

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Matematická interpretácia estetických zákonitostí v hudbe

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Matematická interpretácia estetických zákonitostí v hudbe

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr. Soňa Kilianová, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Lukáš Píš
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Matematická interpretácia estetických zákonitostí v hudbe / *Mathematical interpretation of aesthetic principles in music*

Cieľ: V diplomovej práci sa budeme zaoberať skúmaním a analýzou tónov v hudbe. Estetické princípy a hodnotenie kvality tónu sú medzi hudobníkmi chápané skôr intuitívne. Môže však byť zaujímavé pokúsiť sa ich interpretovať a intuitívne vnímanie potvrdiť resp. vyvrátiť s využitím matematického aparátu, pričom sa zameriame na frekvenčnú analýzu tónov.

Vedúci: Mgr. Soňa Kilianová, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 25.01.2013

Dátum schválenia: 04.02.2013
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Pod'akovanie Ďakujem Mgr. Soni Kilianovej, PhD. za jej odborné rady, pripomienky a trpezlivosť pri tvorbe tejto diplomovej práce.

Ďalej chcem poďakovať Zuzane Vanekovej a Pavlovi Macháľkovi za poskytnutie profesionálneho nahrávacieho zariadenia a Šimonovi Píšovi za pomoc pri získavaní nahrávok.

Abstrakt

PÍŠ, Lukáš: *Matematická interpretácia estetických zákonitostí v hudbe* [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; Vedúci diplomovej práce: Mgr. Soňa Kiliánová, PhD., Bratislava, FMFI UK, 2014, 60 s.

Hlavným cieľom práce je skúmanie a analýza kvalitatívnych vlastností tónov v hudbe. Estetické princípy a hodnotenie kvality tónu sú medzi hudobníkmi chápané skôr intuitívne. Môže však byť zaujímavé pokúsiť sa ich interpretovať a intuitívne vnímanie potvrdiť resp. vyvrátiť s využitím matematického aparátu. Zameriame sa konkrétne na otázku závislosti kvality klavírneho tónu od spôsobu jeho hrania a pokúsime sa nájsť odpovede pomocou frekvenčnej analýzy tónov. V práci vysvetlíme základné hudobné a akustické pojmy, stručne predstavíme teóriu Fourierových radov a rýchlu Fourierovu transformáciu, ktoré budeme používať pri analýze tónov. Na základe analýzy vyslovíme niekoľko tvrdení, z ktorých niektoré priamo konfrontujú zaužívané postoje medzi hudobníkmi.

Kľúčové slová: tón, spektrum tónu, alikvóty, rýchla Fourierova transformácia, viacrozmerná analýza rozptylu

Abstract

PÍŠ, Lukáš: *Mathematical interpretation of aesthetical principles in music* [Master thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Soňa Kilianová, PhD., Bratislava, FMFI UK, 2014. 60 p.

The main aim of the Thesis is researching and analysis of qualitative characteristics of tones in music. The aesthetic principles and valuation of quality of tone among musicians are understood rather intuitive. The attempting to interpret them and to confirm or to refute the intuitive perception by using the mathematical methods could be very interesting. The Thesis is oriented to the matter of submission the quality of the piano tone under the manners how it is played and it try to find answers through the frequency analysis of tones. The Thesis explains the basic musical and acoustic terms, shortly presents the Theory of Fourier Series and the Multivariate Analysis of Variance, which are used in analysis of tones. On the basis of the analysis the Thesis states several statements and some of them directly confront the standard customary attitude among musicians.

Keywords: tone, spectrum, aliquotes, Fast Fourier Transform, Multivariate Analysis of Variance

Obsah

Úvod	9
1 Hudobné dielo ako organizovaný systém tónov	10
1.1 Stručný prehľad literatúry zaoberajúcej sa vzťahom medzi matematikou a hudbou	11
1.2 Základné hudobné pojmy	11
1.3 Systém usporiadania tónov	14
2 Stručný prehľad teórie Fourierových radov	15
2.1 Amplitúda signálu, intenzita zvuku	15
2.2 Jednoduchý zvukový signál - sínusoida	17
2.3 Reprezentácia tónu Fourierovým radom	18
2.4 Rýchla Fourierova transformácia (FFT)	20
2.5 Spektrum Fourierovho radu	21
2.6 Spektrogram	23
2.7 Problémy pri aplikácii FFT-metódy a ich riešenie	25
2.7.1 Nežiaduce skreslenie	25
2.7.2 Nežiaduci rozptyl	26
3 Stručný prehľad používaných štatistických metód	28
3.1 Viacrozmerná analýza rozptylu	28
3.1.1 Wilksova testovacia štatistika	28
3.1.2 Pillaiova testovacia štatistika	29
3.1.3 Stručný prehľad ďalších testovacích štatistík	30
3.1.4 Predpoklady viacrozmernej analýzy rozptylu, možnosti ich overovania a citlivosť testov na ich porušenie	31
4 Analýza zvukových signálov klavírneho tónu	33
4.1 Špecifiká tvorby klavírneho tónu	33
4.2 Spôsoby klavírnej hry	36
4.3 Štrukturálny pohľad na klavírny tón	37
4.4 Príprava a získavanie údajov	37

4.5	Spracovanie údajov	39
4.6	Štruktúra výskumu klavírnych tónov	40
4.7	Prvá fáza	41
4.8	Druhá fáza	42
4.8.1	Analýza úderu tónu	46
4.8.2	Analýza znenia tónu	46
4.9	Tretia fáza	47
4.10	Vyhodnotenie analýzy	49
5	Analýza zvukových signálov tónu elektrického klavíra	52
5.1	Stručný opis tvorby tónu na elektrickom klavíri	52
5.2	Analýza tónu elektrického klavíra	53
5.3	Porovnanie výsledkov analýzy pre mechanický a elektrický klavír	55
	Záver	56
	Zoznam použitej literatúry	57
	Príloha	59

Úvod

Umenie celkovo chápeme ako veľmi transcendentálnu entitu, avšak hudba má aj v rámci umenia výnimočné postavenie vďaka pojmu interpretácia, ktorý najčastejšie počujeme v spojení s pojmom hudobné dielo. Na jednej strane totiž existuje prakticky nekonečne mnoho rôznych možností interpretácie realizujúcej vždy to isté dielo, na druhej strane sa každá interpretácia stáva jedinečným jednorazovým zážitkom, ktorý sa v celej svojej kráse a zložitosti nedá úplne zopakovať. Rovnako ako interpretácia, ani jej základný element - tón, nikdy nezaznie rovnako. Okrem vzájomných interakcií medzi tónmi, ku ktorým v priebehu interpretácie dochádza, je významnou zložkou podieľajúcou sa na výslednom estetickom ohodnotení práce aj samotná kvalita jednotlivých tónov. Práve snaha o nazeranie na kvalitu tónu z pohľadu matematiky je inšpiráciou našej práce.

Prácu sa snažíme koncipovať tak, aby bola zrozumiteľná pre čitateľov s matematickým ako i hudobným vzdelaním. V prvej a druhej kapitole vysvetľujeme dôležité hudobné, akustické a matematické pojmy, znalosť ktorých čitateľovi uľahčí zorientovať sa v práci a jej výsledkoch. V tretej kapitole stručne vysvetlíme princíp a predpoklady viacrozmernej analýzy rozptylu, ktorú používame pri porovnávaní kvalitatívnych vlastností tónov. V štvrtej a piatej kapitole analyzujeme kvalitu klavírnych tónov hraných rôznym spôsobom, na mechanickom aj elektrickom klavíri, pričom v analýze postupne zahrňame viacero predpokladov - vplyv sily tónu, časový vývoj tónu atď. Na základe získaných výsledkov formulujeme tvrdenia o vplyve spôsobu hrania na klavírny tón a hľadáme analógie a konfrontácie týchto výsledkov so stanoviskami hudobníkov.

1 Hudobné dielo ako organizovaný systém tónov

Najjednoduchšie možno hudbu definovať ako organizovaný systém určitých zvukov. Výber zvukov, ich rytmické členenie a usporiadanie určujú kvalitu a estetickú hodnotu hudby. Neexistuje však objektívne pravidlo, ktoré hovorí, akým spôsobom treba pri tvorbe hudobného diela zvuky organizovať, aby sme estetickú hodnotu hudby zvýšili. Vieme síce povedať, aké predpoklady musia zvuky spĺňať, aby mohli byť zaradené do procesu tvorby hudobného diela, avšak nepoznáme uspokojivú odpoveď na otázku, prečo v nás niektoré zvuky resp. ich určité kombinácie dokážu vyvolať estetický zážitok. Otázky typu *prečo* však vo všeobecnosti bývajú oveľa ťažšie zodpovedateľné než otázky typu *ako*. Ak teda sformulujeme otázku „Akým spôsobom sa riadi tvorba, vznik a samotný priebeh hudobného diela (napr. v rámci koncertu) a ako dokážeme vyselektovať hudobné zvuky od nehudobných?“, pomerne uspokojivé vysvetlenia nám ponúka matematika.

Je dôležité si uvedomiť, že medzi matematikou a hudbou chápanou ako výsledok tvorivej ľudskej činnosti podmienenej inšpiráciou neexistuje takmer žiadny vzťah. V minulosti existovali a dodnes existujú exotické hudobné kultúry (napr. malajská, indická a i.), ktoré sa neriadia matematickými vzťahmi odvodenými Pythagorom [5], čo okrem iného naznačuje, že estetické vnímanie hudby je závislé od kultúrno-historického vývoja spoločnosti a nepodlieha žiadnemu a priori danému zákonu.

Existuje však jedna výnimka. Všetky zvuky s frekvenciami vo vzájomných pomeroch násobkov čísla 2 predstavujúce interval jednej oktávy (pojem *interval* je vysvetlený v Kapitole 1.3) sú totiž technicky rozdielne frekvencie, ale napriek tomu ich človek zo zatiaľ neobjasnených príčin vníma istým spôsobom kvalitatívne ako totožné, a to nezávisle od hudobného vzdelania, kultúrneho vývoja a pod. Tento jav je jasne pozorovateľný napr. pri počúvaní mužského a ženského hlasu. Pokiaľ žena zaspieva určitú melódiu svojím prirodzeným hlasom a muž túto melódiu presne zopakuje svojím prirodzeným hlasom, bude sa bežnému poslucháčovi zdať, že obaja spievajú rovnaké tóny, len inou farbou (pojem farba tónu vysvetľujeme v Kapitole 1.2). V skutočnosti však muž spieva melódiu o oktávu nižšie, t.j. pri speve vytvára tóny s presne dvojnásobne nižšou frekvenciou. Tento „zázračný“ vplyv čísla dva v hudbe sa zatiaľ nikomu nepodarilo vysvetliť a nie je to cieľom tejto práce.

Uvedený jav je zrejme jediným „zákonom“, ktorým sa hudba objektívne riadi a to je očividne príliš málo na to, aby sme mohli prehlásiť, že hudobný proces možno opísať, modelovať či nebodaj predikovať pomocou matematiky.

Hudba je však komplexný systém a ako taký sa teda skladá z určitých základných stavebných a štruktúrnych jednotiek - tónov, ktoré už dokážeme pomerne uspokojivo opísať s využitím matematického aparátu.

1.1 Stručný prehľad literatúry zaoberajúcej sa vzťahom medzi matematikou a hudbou

Napriek ťažkostiam, ktoré sprevádzajú pokusy o nazerania na niektoré hudobné javy pomocou matematiky, je v súčasnosti badateľný narastajúci záujem o túto problematiku, a to nielen vo svete, ale i na Slovensku. Treba spomenúť najmä pravidelný seminár Matematika a hudba, ktorý má na Slovensku už takmer tridsaťročnú tradíciu. V rámci neho bolo prezentovaných množstvo výskumov a prednášok so zaujímavými výsledkami predovšetkým v oblasti kompozície. V roku 1997 vyšla rovnomenná kniha obsahujúca zaujímavé prednášky v rámci prvých trinástich seminárov spájajúcich svet matematiky a hudby [3]. Prakticky použiteľné výsledky niektorých výskumov ukazujú v názore, že nestranný pohľad matematika na rôzne javy vyskytujúce sa v hudbe môže byť veľmi prospešný.

1.2 Základné hudobné pojmy

V nasledujúcich kapitolách obmedzíme používanie pojmu hudba a pre potreby našej práce budeme namiesto neho pracovať s pojmom hudobné dielo. Hudobné dielo môžeme chápať ako organizovaný systém navzájom interagujúcich základných jednotiek. V klasickej hudobnej terminológii podľa [4] hudobné dielo označujeme ako formu, ktorá sa skladá z menších podjednotiek - dielov. Jednotlivé diely sa zas rozdeľujú na menšie celky - vety. Veta obsahuje jeden alebo viac motívov. Motív je najmenšia štruktúrna jednotka hudobného diela a jedná sa o najmenšie zoskupenie jedného alebo viacerých tónov, ktoré spolu dokážu vyjadriť určitú hudobnú myšlienku.

Takto sme sa postupne dopracovali k pojmu **tón**. Tón je teda základnou stavebnou

jednotkou hudobného diela. Jedná sa o zvuky s veľmi špecifickými vlastnosťami, ktorými sa odlišujú od ostatných zvukov - šumov. Podľa [8] má každý tón štyri základné vlastnosti, ktoré ho opisujú.

Jednotlivé tóny môžeme porovnávať predovšetkým na základe ich frekvencie (v hudobných disciplínach sa tento pojem nahrádza pojmom **výška tónu**). Tón s vyššou frekvenciou od určitého základného tónu nazývame vyšší. Veľmi špeciálnym prípadom vyššieho tónu je vyšší harmonický resp. alikvótny tón. Ide o tón, ktorého frekvencia je celočíselným násobkom frekvencie pôvodného tónu.

Sila tónu je ďalšou dôležitou charakteristikou tónu. Jedná sa o intenzitu signálu zodpovedajúceho danému tónu, pričom tón s väčšou intenzitou vnímame ako hlasnejší a teda má väčšiu silu.

Každý tón vytvorený určitým hudobným nástrojom je kombináciou viacerých tónov rôznych frekvencií (pre účely tejto práce ich nazveme jednoduché), pričom kombinácia týchto tónov rôznej frekvencie a sily určuje **farbu tónu**. Farba tónu je jeho najšpecifickejšia vlastnosť a výrazne sa podieľa na kvalite hudobného diela. Farba tónu totiž nezávisí iba od voľby hudobného nástroja, ale tiež od samotného spôsobu tvorenia tónu. Interpret, t.j. osoba, ktorá svojou činnosťou tvorí tóny na základe buď vlastnej inšpirácie (vtedy hovoríme o improvizácii) alebo na základe tzv. notového zápisu, má totiž pri práci s hudobným nástrojom k dispozícii mnoho rozličných techník a spôsobov, akými môže tvoriť tón. Napríklad klavirista tvorí tón stlačením klávesy, ktorá pomocou zložitého mechanizmu rozochveje pomocou kladivka danú strunu. V závislosti od toho, akým spôsobom udrie (pomocou sily prstu, použitím celého ramena, pod určitým uhlom, určitou rýchlosťou...), dokáže vytvoriť široké spektrum farieb tónov.

Štvrtou základnou vlastnosťou tónu je jeho **dĺžka**, teda jeho trvanie v čase. Absolútna dĺžka trvania tónu však pre nás nemá význam. Dôležité je jeho relatívne trvanie vo vzťahu k iným tónom v hudobnom diele. Ako jednotku dĺžky tónu používame tzv. *dobu*. Trvanie jednej doby je relatívne a mení sa v závislosti od tempa.

Je dôležité si uvedomiť, že tvorba umeleckého diela má dve základné fázy. Prvú fázu nazývame kompozícia. V nej autor diela na základe inšpirácie vytvorí určitú postupnosť tónov s rôznymi vlastnosťami a túto postupnosť zapíše pomocou notového zápisu, čo je špeciálny typ notácie, ktorý umožňuje hudobnému skladateľovi v dostatočnej miere

opísať danú postupnosť tónov i vlastnosti jednotlivých tónov, najmä však ich silu, výšku a dĺžku.

Druhou fázou tvorby umeleckého diela je jeho interpretácia. Je zjavné, že kým kompozícia je jedinečná, interpretácií vo všeobecnosti môže byť ľubovoľne veľký počet a navzájom sa líšia, no pritom všetky zachovávajú notový zápis, teda rešpektujú autora a jeho kompozíciu. Hudobné dielo sa však stáva reálnym až pri jeho interpretácii, t.j. pri tvorbe skutočnej postupnosti tónov, ktorú dokáže ľudské ucho vnímať.

A tu sa vynára zásadný problém - teoreticky totiž môžeme z jedinej kompozície získať nekonečne veľa interpretácií, ktoré budú všetky zachovávať notový zápis a zároveň nenájdeme jedinú dvojicu rovnakých interpretácií. Aké kritériá nám umožňujú porovnávať tieto interpretácie? Ako je možné, že zatiaľ čo niektoré interpretácie veľkých hudobníkov (L. Pavarotti, P. Dvorský, M. Lapšanský a.i.) vyvolajú v ľudskom mozgu veľkú emočnú odozvu, iné „priemerné“ interpretácie nezanechajú v človeku žiadnu emočnú stopu?

Mnohí renomovaní hudobníci ponúkajú rôzne druhy odpovedí. Často používajú pojmy ako estetické štandardy. V priebehu posledných storočí sa samozrejme vyvinuli určité štandardy, ktoré určovali, ktoré interpretácie sú dobré a ktoré nie. Takisto je zrejmé, že hudobník s priemerne rozvinutým hudobným sluchom sa uspokojí aj s nižšou úrovňou interpretácie, ale skúsený poslucháč potrebuje počuť oveľa kvalitnejšiu interpretáciu.

Otázkou zostáva, čo spôsobuje tak veľké rozdiely v kvalite interpretácií. Existuje totiž veľké množstvo hudobne vyškolených interpretov, ale počet skutočných virtuózov, ktorí dokonale ovládajú spôsoby na dosiahnutie esteticky veľmi hodnotnej interpretácie, je obmedzený.

V našej práci sa pokúsime analyzovať základné jednotky hudobného diela - tóny a budeme porovnávať zvukové výstupy rôznych interpretácií tej istej kompozície a pokúsime sa objaviť určité vzťahy, ktoré nám pomôžu objasniť určité estetické kritériá. Hoci musíme mať stále na zreteli, že proces tvorby hudobného diela sa nedá úplne vysvetliť a analyzovať, očakávame, že napriek tomu môžeme dospieť k zaujímavým poznatkom.

1.3 Systém usporiadania tónov

Ako bolo spomenuté vyššie, iba zvuky určitých špecifických kvalít možno zaradiť do koncepcie hudobného diela. Spôsoby vyberania týchto zvukov sa vyvíjali spolu s ľudskou civilizáciou a najmä pre súčasnú hudobnú tvorbu je charakteristické, že medzi tóny zaraďuje aj také zvuky, ktoré ešte v pomerne nedávnej minulosti boli považované za šumy.

V rámci našej práce budeme pracovať so systémom tónov, ktorý je súčasťou tzv. *európskej hudobnej kultúry*. V rámci nej sa postupným vývojom vytvoril systém usporiadania tónov podľa výšky. Na základe princípu opakovania sa tónov pri dvojnásobnom zvýšení frekvencie sa vytvoril nomenklatúrny systém, v ktorom existuje sedem základných tónov označených písmenami *c, d, e, f, g, a, h* a číslom v závislosti od frekvencie. Za referenčný tón sa považuje tón *a1*, tzv. **komorné a**, jedná sa o tón s frekvenciou 440Hz (Veľká Británia) a 442Hz príp. 443Hz (Európa). Všetky ostatné tóny sa od tohto tónu vytvoria zvýšením alebo znížením frekvencie. Tóny s dvojnásobným pomerom frekvencií sú označené rovnako, avšak zvýši sa ich číselné označenie. Napr. tón s frekvenciou 880Hz bude mať označenie *a2*. Od základných tónov dokážeme zvýšením alebo znížením frekvencie v pomere $1 : 2^{\frac{1}{12}}$ získať odvodené tóny, ktoré majú osobitné označenie pomocou prípony *-is* pri zvýšení a prípony *-es* pri znížení.

Okrem samotných tónov sú v hudbe dôležité najmä ich vzájomné vzdialenosti označované ako intervaly, pričom sa jedná o ich vzájomné pomery frekvencií. Už starovekí Gréci ukázali, že mimoriadne pozitívne sú človekom vnímané také pomery frekvencií, ktoré sa dajú vyjadriť ako pomer dvoch celých čísel a vytvorili v tejto oblasti teoretické základy, ktoré tvoria svojim spôsobom jadro modernej európskej hudby [5].

Na základe intervalových vzťahov medzi tónmi vznikli v priebehu storočí viaceré systémy tónov (napr. iónsky, lýdický, pentatonický a i.), ktoré sa používali pri tvorbe hudobného diela. Tieto systémy boli spočiatku uzavreté, t.j. pri tvorbe diela sa mohli používať iba tóny patriace do určeného systému, tzv. módu, neskôr tóniny. Postupne sa však od tejto zásady upúšťalo, bolo možné jednotlivé módy resp. tóniny navzájom kombinovať a prelínať. V súčasnosti sa komponujú aj diela, ktoré nevyužívajú žiaden systém, ale používajú všetky tóny ľubovoľne. Takýmto umeleckým dielam hovoríme atonálne.

2 Stručný prehľad teórie Fourierových radov

V prvej kapitole sme stručne opísali tón ako základnú stavebnú jednotku hudobného diela. Pokiaľ chceme tóny analyzovať pomocou matematického aparátu, musíme sa na ne pozeráť ako na zvukové signály s určitými špecifickými vlastnosťami. V tejto kapitole sa budeme venovať fyzikálnej podstate tónu ako zvukovému signálu, vysvetlíme dôležité akustické pojmy vychádzajúc z [1] a [12] a predstavíme teóriu Fourierových radov, pomocou ktorej dokážeme niektoré vlastnosti zvukových signálov využiť pri našej analýze, pričom uvedieme základné princípy a vzťahy, ktoré budeme v našej práci využívať a v prípade hlbšieho záujmu čitateľa odkazujeme na zdroje [2], [14] a [15]. Obrázky použité v tejto kapitole sme získali spracovaním signálov v programe Matlab.

2.1 Amplitúda signálu, intenzita zvuku

Vnímanie zvuku nie je zďaleka takou jednoznačnou záležitosťou, ako by sa mohlo na prvý pohľad zdať. V tomto odseku stručne vysvetlíme niekoľko dôležitých pojmov, ktoré budeme ďalej používať.

Zvuk je pozdĺžne mechanické vlnenie pružného prostredia, ktoré človek dokáže vnímať pomocou zmyslových orgánov, pričom pod pružným prostredím budeme v našej práci rozumieť vzduch, aj keď všeobecne sa môže jednať o akékoľvek pružné látky ako napríklad voda či kovy. Zjednodušene povedané sa jedná o zmenu tlaku vzduchu, pričom rozdiel medzi okamžitou veľkosťou tlaku v danom bode a stálou hodnotou atmosférického tlaku sa nazýva **akustický tlak** a riadi sa rovnicou:

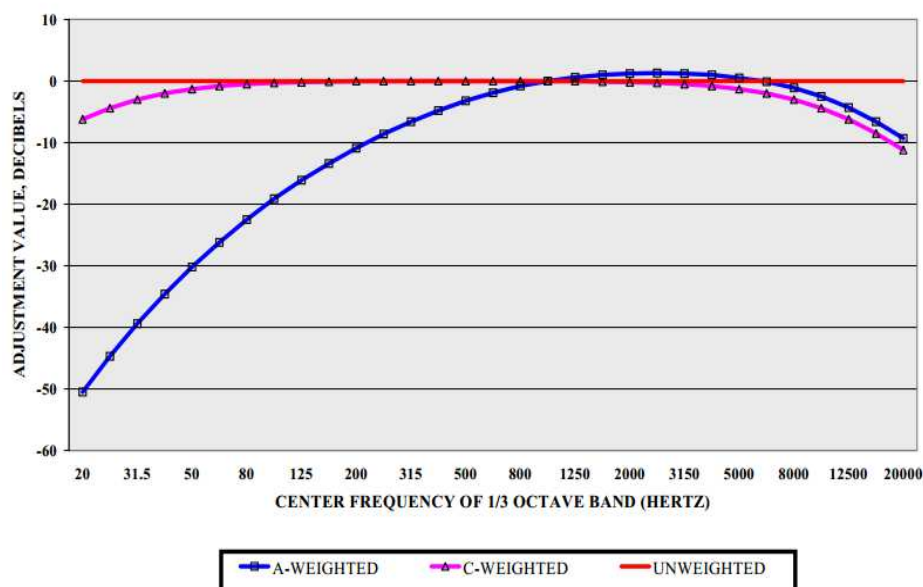
$$p(t) = p_A \cos(\omega t + \alpha), \quad (1)$$

kde p_A je amplitúda akustického tlaku a α je počiatočná fáza vlnenia. Hodnotu $p_{ef} = \frac{p_A}{\sqrt{2}}$ nazývame **efektívny akustický tlak** a jeho hodnoty úzko súvisia s vnímaním hlasitosti zvuku. Keďže človek dokáže zachytiť veľmi veľký rozsah akustických tlakov, nie je najvhodnejšie vyjadrovať hlasitosť priamo pomocou efektívneho akustického tlaku. Preto sa používa tzv. **hladina akustického tlaku** (angl. sound pressure level, SPL) s jednotkou decibel (dB), ktorá je vyjadrená vzťahom

$$L_p = 20 \log_{10} \left(\frac{p_{ef}}{p_{min}} \right),$$

kde p_{ef} je efektívny akustický tlak a $p_{min} = 20,4 \mu Pa$ predstavuje najnižšiu hodnotu efektívneho akustického tlaku, ktorú je človek schopný počuť, tzv. prah počuteľnosti [1]. Niekedy (najmä v súvislosti s počítačovým spracovaním zvuku) sa zvykne používať pojem *hladina intenzity zvuku*.

Zaujímavosťou je, že človek subjektívne vníma rovnaké hladiny akustického tlaku pri rôznych frekvenciách rôzne. Vnímaná hlasitosť preto závisí nielen od akustického tlaku, ale i od frekvencie zvukového signálu. Preto sa Medzinárodnou elektrotechnickou komisiou (IEC) definovalo tzv. A-váhovanie, ktoré s využitím štatistických údajov upravuje zmeranú hodnotu hladiny akustického tlaku v závislosti od frekvencie zdroja. Toto váhovanie však nie je jediné, existuje viac spôsobov, ako zohľadniť frekvenciu pri zisťovaní subjektívnej hlasitosti (napr. C-váhovanie). Pre ilustráciu uvádzame Obrázok 1, zobrazujúci závislosť subjektívneho vnímania hlasitosti zvuku v závislosti od jeho frekvencie. Môžeme vidieť, že pokiaľ vnímame zvuk s veľmi nízkymi alebo naopak s veľmi vysokými frekvenciami, subjektívne vnímaná hlasitosť zvuku oproti hladine akustického tlaku výrazne klesá.



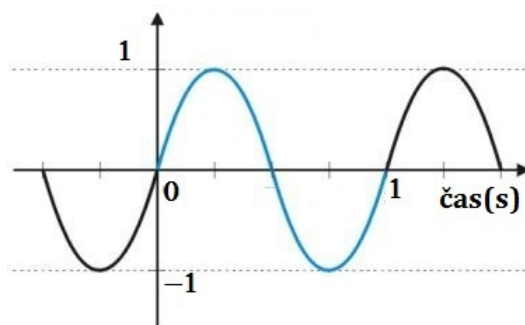
Obr. 1: Grafické znázornenie A-, B- C-váhovania. X-ová os predstavuje frekvenciu, Y-ová os znázorňuje hladinu akustického tlaku. Krivky zobrazujú relatívnu zmenu vnímania hlasitosti zvukového signálu v závislosti od jeho frekvencie. Zdroj:[7]

V našej práci nás však nebudú zaujímať absolútne hodnoty hladiny akustického

tlaku, ale budeme ich medzi sebou porovnávať. Preto nemusíme uvažovať subjektivitu ľudského vnímania ani sa zaoberať vhodnou voľbou jednotiek.

2.2 Jednoduchý zvukový signál - sínusoida

Uvažujme teraz najjednoduchší prípad zvukového signálu s periódou trvajúcou jednu sekundu, teda s frekvenciou 1 Hz . Predpokladajme, že tento signál je „normalizovaný“, t.j. upravený tak, aby jeho amplitúda bola rovná jednej (pripomíname, že nezáleží na voľbe jednotiek). Grafické znázornenie priebehu takéhoto jednoduchého signálu vidíme na Obrázku 2.

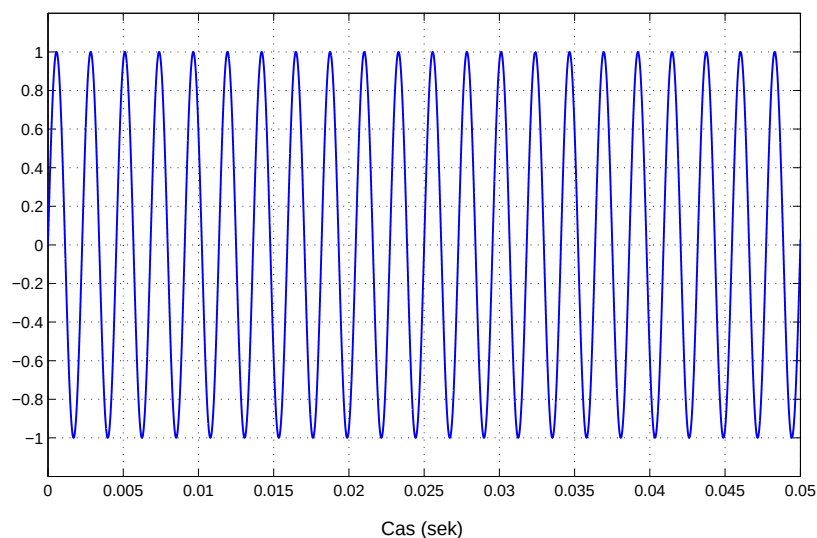


Obr. 2: Graf zvukového signálu s frekvenciou 1 Hz .

Takýto signál môžeme matematicky zapísať jednoducho pomocou funkcie sínus:

$$f(t) = \sin 2\pi t. \quad (2)$$

Signál s frekvenciou 440 Hz v hudbe predstavujúci referenčný tón $a1$, pomocou ktorého sa ladia takmer všetky hudobné nástroje, je graficky zobrazený na Obrázku 3.



Obr. 3: Graf zvukového signálu s frekvenciou 440 Hz.

Tento signál možno opäť opísať pomocou funkcie sínus:

$$f(t) = \sin 2\pi 440t. \quad (3)$$

2.3 Reprezentácia tónu Fourierovým radom

Vidíme, že jednoduché, elektronicky vygenerované zvukové signály dokážeme veľmi jednoducho popísať. Tóny tvorené hudobnými nástrojmi majú však omnoho zložitejší výstup. Obrázok 4 nám zobrazuje časový vývoj tónu *a1* zahraného na klavíri.

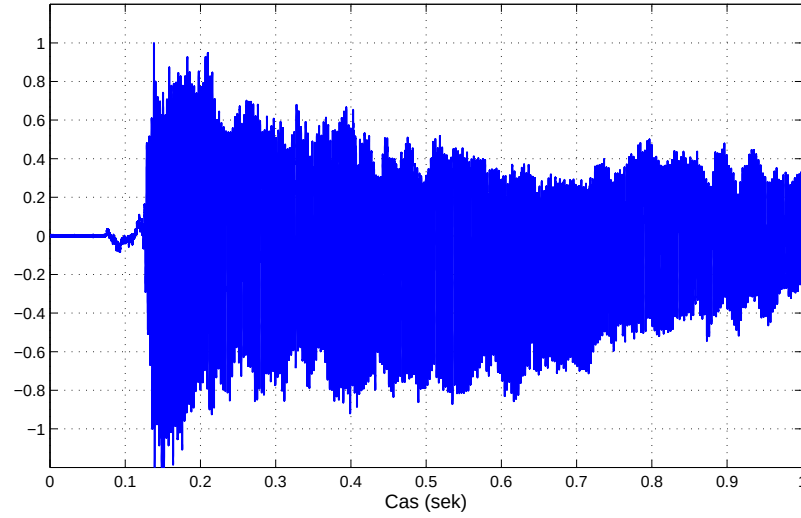
V skutočnosti sa jedná o superpozíciu viacerých jednoduchých signálov. Matematicky môžeme takýto tón zapísať pomocou tzv. Fourierovho radu. Rôzne typy vlnení, ako napr. signál alebo zvuk, možno najlepšie opísať pomocou Fourierových radov.

Uvažujme funkciu $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, v našom prípade reprezentujúcu určitý zvukový signál. Jej Fourierov rad bude mať nasledovný tvar [15]:

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right\}, \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

kde a_0 , a_n a b_n sú tzv. Fourierove koeficienty, ktoré definujeme nasledovne:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (5)$$



Obr. 4: Graf zvukového signálu reprezentujúceho tón $e1$ zahráný na klavíri.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt, \quad n = 1, 2, 3... \quad (6)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} dt, \quad n = 1, 2, 3... \quad (7)$$

Podľa [2] uvedieme aj exponenciálny zápis Fourierových radov. Tento zápis budeme využívať pri numerickej implementácii Rýchlej Fourierovej transformácie (kód uvádzame v prílohe). S využitím tzv. Eulerových vzťahov,

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad e^{-it} = \cos t - i \sin t,$$

$$\cos t = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}, \quad \sin t = \frac{i}{2}e^{-it} - \frac{i}{2}e^{it},$$

možno tvar (4) prepísať nasledovne:

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n e^{i2\pi nt/T} + a_{-n} e^{-i2\pi nt/T}\}, \quad (8)$$

pričom koeficient a_n bude mať tvar

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i2\pi nt/T} dt, \quad n = 0, 1, 2, 3... \quad (9)$$

Pre n -tý člen Fourierovho radu $a_n e^{i2\pi nt/T}$ platí, že má periódu T/n , a teda jeho frekvencia je n/T . Z toho vyplýva, že daný signál reprezentovaný Fourierovým radom bude

vlastne superpozíciou signálov s frekvenciami $1/T, 2/T, \dots$. Akým spôsobom však vieme určiť koeficienty a_n Fourierovho radu pre daný zvukový signál?

2.4 Rýchla Fourierova transformácia (FFT)

Účinná metóda pre výpočet Fourierovho radu pre zvukový signál sa nazýva **rýchla Fourierova transformácia**, skrátene **FFT**-metóda (z anglického Fast Fourier transform). Je založená na vypočítaní aproximácií Fourierových koeficientov, ktoré sa nazývajú **diskrétne Fourierove transformácie (DFTs)**. Pre potreby našej práce uvedieme základné myšlienky a vzťahy, pričom čitateľa v prípade hlbšieho záujmu odkazujeme na [14].

Uvažujme nejaké dostatočne veľké prirodzené číslo K , ktoré nám označuje, aký veľký bude výber bodov funkcie $f(t)$, pomocou ktorých budeme počítať Fourierov rad. Nech $t_k = kT/K$ pre $k = 0, 1, 2, \dots, K-1$ sú rôzne časy, v ktorých poznáme hodnotu funkcie $f(t)$ a nech T je perióda hľadaného Fourierovho radu. Označíme $\Delta t = T/K$, pričom $1/\Delta t$ je tzv. vzorkovacia frekvencia. Potom n -tý Fourierov koeficient a_n zo vzťahu (8) aproximujeme na DFT nasledovne:

$$a_n \approx \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{K-1} f(t_k) e^{-i2\pi n t_k / T} \Delta t = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} f(k) e^{-i2\pi n k / K}, \quad (10)$$

pričom $f(t_k)$ je hodnota signálu v čase t_k .

V princípe môžeme vypočítať ľubovoľné množstvo Fourierových koeficientov (teda pre ľubovoľne veľké n), avšak pokiaľ poznáme hodnotu našej funkcie v K bodoch, iba prvých K členov Fourierovho radu nám poskytuje signifikantný údaj [14].

Problémom DFT- metódy je jej výpočtová náročnosť, $O(K^2)$. Pre vysoké K bude doba výpočtu veľmi vysoká. Tento problém efektívne rieši práve FFT-metóda.

Začneme tým, že pôvodnú sumu vo vzťahu (10) rozdelíme na dve sumy, každú s $\frac{K}{2}$ členmi, prvú pre k párne a druhú k nepárne:

$$a_n \approx \frac{1}{K} \sum_{m=0}^{\frac{K}{2}-1} f(2m) W_K^{2mn} + \frac{1}{K} \sum_{m=0}^{\frac{K}{2}-1} f(2m+1) W_K^{n(2m+1)}.$$

Všimnime si, že platí: $W_K^{2mn} = e^{-i\frac{2\pi}{K}(2mn)} = e^{-i\frac{2\pi}{\frac{K}{2}}mn} = W_{\frac{K}{2}}^{mn}$, a teda môžeme písať:

$$a_n \approx \frac{1}{K} \sum_{m=0}^{\frac{K}{2}-1} f(2m) W_{\frac{K}{2}}^{mn} + W_K^m \frac{1}{K} \sum_{m=0}^{\frac{K}{2}-1} f(2m+1) W_{\frac{K}{2}}^{mn},$$

pričom $W_K^n = e^{-i2\pi n/K}$.

Za predpokladu, že K je mocninou 2, môžeme tento proces opakovať a vytvoríme postupne $\frac{K}{2}$, $\frac{K}{4}$ -bodovú transformáciu, až pokým sa nedostaneme k 2-bodovej transformácii. Zložitosť tejto metódy bude $K/2 \log_2 K$. V porovnaní s DFT-metódou sa pri 1024 a viacbodovom výbere ušetrí viac ako 99,5 % výpočtového času [14].

2.5 Spektrum Fourierovho radu

Veľmi dôležitým vzťahom v teórii Fourierových radov je *Parsevalova rovnosť*:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |a_{-n}|^2). \quad (11)$$

Pre analýzu zvukových signálov má táto rovnosť veľký význam. Je zjavné, že Fourierove koeficienty istým spôsobom súvisia s pomerom, v ktorom jednotlivé jednoduché signály „prispievajú“ k celkovému signálu. Tento dôležitý fakt môžeme presne ukázať s využitím pojmu **energie signálu** na určitom časovom intervale. Energia zvukového signálu reprezentovaného funkciou $f(t)$ na intervale $[0, T]$ je definovaná nasledovne:

$$E_{[0,T]} = \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

Nech $E_{[0,T]}^n$ je energia jednoduchého signálu

$$f_n(t) = a_n e^{it2\pi n/T}, \quad t \in [0, T].$$

Podľa [2] sa dá ukázať, že platí:

$$E_{[0,T]}^n = T|a_n|^2.$$

S využitím Parsevalovej rovnosti teda môžeme písať:

$$E_{[0,T]} = \sum_{n=1}^{\infty} E_{[0,T]}^n.$$

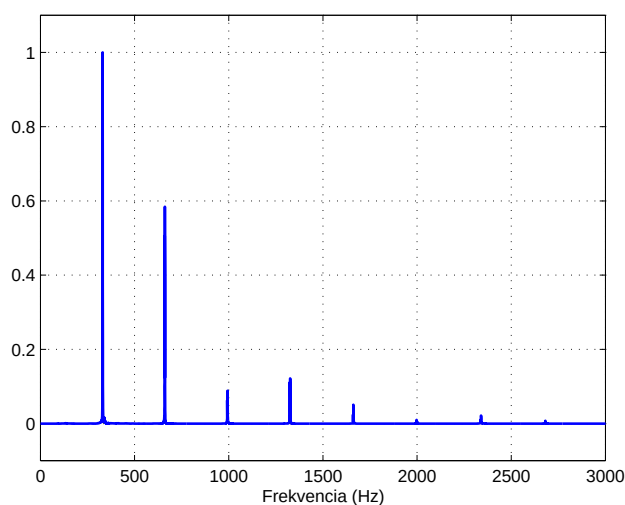
Môžeme teda povedať, že energia signálu f na intervale $[0, T]$ je rovná sume energií jednoduchých signálov (reprezentovaných členmi jeho Fourierovho radu), z ktorých je zložený [2].

Je dôležité si ešte uvedomiť, že keďže platí $|a_{-n}|^2 = |a_n|^2$, môžeme Parsevalovu rovnosť prepísať nasledovne:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|^2. \quad (12)$$

Postupnosť štvorcov $\{2|a_n|^2\}_{n \geq 1}$ nazývame **spektrum** a toto spektrum úplne opisuje energie jednoduchých signálov s danými frekvenciami, ktoré tvoria analyzovaný zvukový signál. $|a_0|^2$ je energia „pozadia“, ktoré predstavujú najmä rôzne nepočuteľné zvuky a nemá zmysel ich ďalej uvažovať [2].

Zvukový signál teda dokážeme opísať pomocou jeho spektra. Ako toto spektrum vyzerá, nám ukazuje Obrázok 5.



Obr. 5: Spektrum tónu e_1 zahraného na klavíri, s amplitúdovou normalizáciou.

Signál s najmenšou frekvenciou 330Hz je **základný tón** pre tón e_1 . Vidíme, že všetky ďalšie signály majú frekvencie, ktoré sú celočíselnými násobkami základnej frekvencie (660, 990, ...). Jedná sa teda o **aliquótne tóny** spomínané v Kapitole 1.2.

Pomocou spektra dokážeme povedať, do akej miery sú v analyzovanom tóne zastúpené jednotlivé aliquótne tóny. Energie jednotlivých aliquót sú špecifické pre každý tón a vyjadrujú jeho farbu. Preto je spektrum veľmi dobrým nástrojom pre analýzu tónov - pri profesionálnych interpretáciách sa totiž kladie dôraz najmä na kvalitu vyludzovaného tónu v zmysle jeho farby (napríklad pri hre na klavíri sa rozlišuje kvalitný tzv. mäkký tón a nekvalitný tvrdý tón). Pri porovnávaní rôznych tónov pomocou spektra by sme teda mohli zistiť, ako ovplyvní spôsob hry jeho kvalitu, ktorá sa odzrkadlí v spektre signálu daného tónu.

2.6 Spektrogram

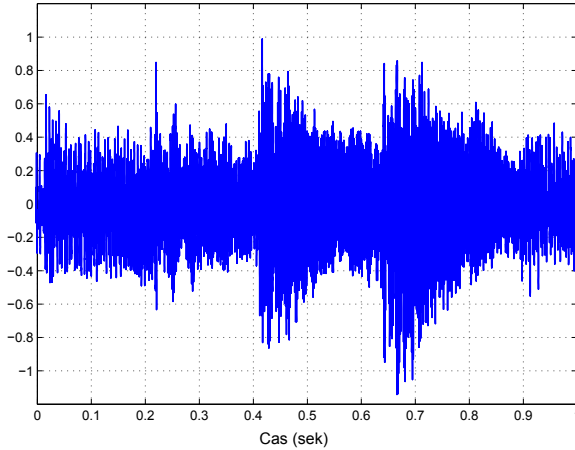
Určenie spektra je síce dobrý spôsob, ako analyzovať jednotlivé tóny a určovať ich farbu, avšak pri analýze viacerých tónov zahrnutých v určitom časovom slede jeho použiteľnosť klesá. Získané spektrum totiž zahŕňa všetky tóny z uvažovaného časového intervalu a nezohľadňuje sa v ňom časová následnosť hraných tónov. Nedokážeme z neho určiť, ktoré signály patria ku konkrétnym tónom. Pre ilustráciu uvádzame Obrázky 6 a 7. Rovnaký problém nastáva aj pri analýze jedného tónu, ktorého niektoré vlastnosti (napr. sila, farba) sa významne menia v závislosti od času.

Na to, aby sme dokázali od seba oddeliť jednotlivé tóny, potrebujeme vygenerovať spektrum osobitne pre kratšie časové intervaly a tieto potom „naskladať“.

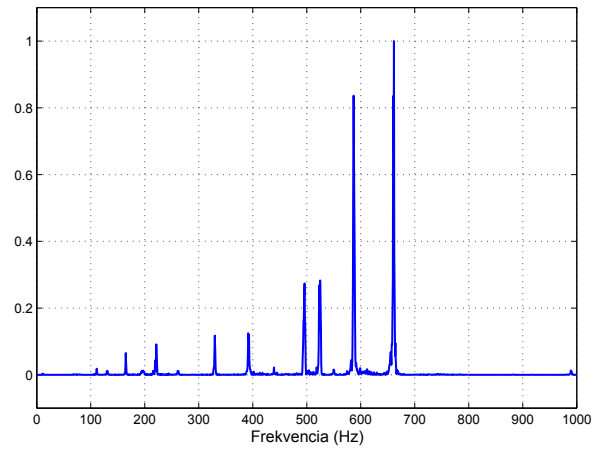
Presne táto myšlienka je základom pre **spektrogram** [2]. Aby sme izolovali jednotlivé tóny v určitom slede, zvukový signál f na intervale $[0, T]$ pre násobíme postupnosťou tzv. časových okien $o_m(t)$ definovaných nasledovne:

$$o_m(t) = \begin{cases} 1; & t \in (\tau_m - \varepsilon, \tau_m + \varepsilon), \\ \text{hladko klesá k nule}; & t \in [\tau_{m-1} + \delta, \tau_m - \varepsilon] \cup [\tau_m + \varepsilon, \tau_{m+1} - \delta], \\ 0; & \text{inak,} \end{cases}$$

kde τ_m je čas predstavujúci stred časového okna $o_m(t)$, $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ sú zvolené



Obr. 6: Signál tónov c_2 , d_2 , e_2 a f_2 zahranych na klavíri v časovom slede.



Obr. 7: Spektrum tónov c_2 , d_2 , e_2 a f_2 zahranych na klavíri v časovom slede.

parametre, $m = 1, 2, \dots, M$, $\tau_0 = 0$, $\tau_M = T$, pričom platí, že $\tau_{m-1} < \tau_m$ pre všetky m .

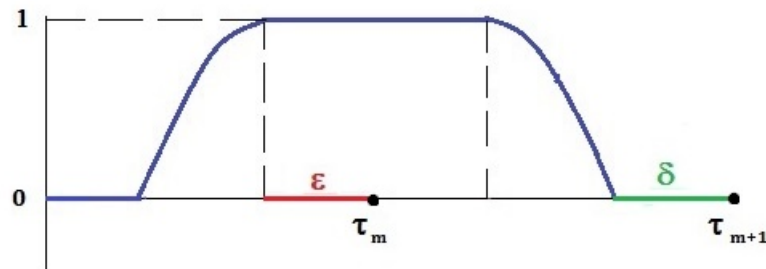
Okná sú volené tak, aby platila rovnosť:

$$\sum_{m=1}^M o_m(t) = 1 \quad \text{pre všetky } t \in [0, T]. \quad (13)$$

Pokiaľ prenásobíme obe strany vzťahu (13) hodnotou $f(t)$, dostávame:

$$f(t) = \sum_{m=1}^M f(t) o_m(t), \quad (14)$$

teda pôvodný signál je sumou signálov $f(t) o_m(t)$. Každý signál $f(t) o_m(t)$ je nenulový iba v intervale $[\tau_{m-1} + \delta, \tau_{m+1} - \delta]$. Obrázok 8 znázorňuje časové okná.

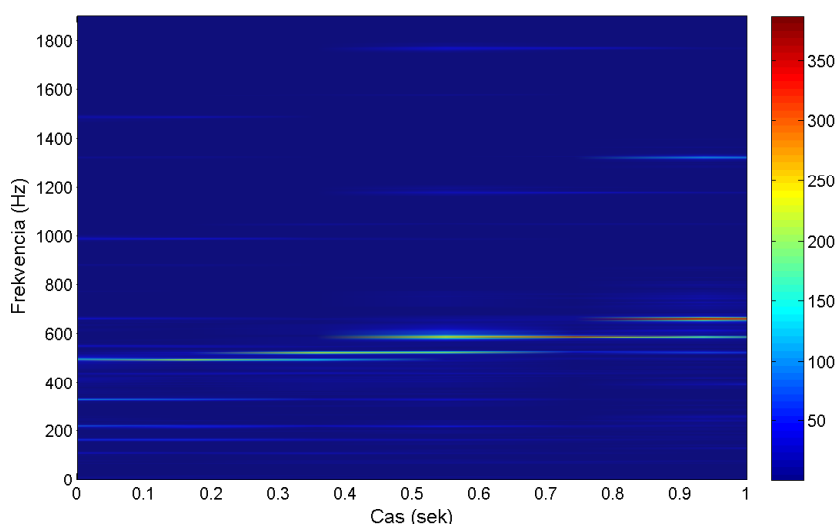


Obr. 8: Grafické znázornenie časového okna.

Je namieste otázka, prečo nestačí pôvodný signál jednoducho „rozsekať“ na menšie ekvivalentné časové úseky a tieto ďalej osobitne analyzovať? Problémom je tzv.

nežiaduci rozptyl, ktorého vznik vysvetľujeme v Kapitole 2.7.2 .

Keď teda zistíme spektrum každého signálu $f(t)o_m(t)$, môžeme tieto spektrá zobrazit v jednom grafe, ktorý nazývame **spektrogram**. Obrázok 9 znázorňuje 2D-spektrogram už spomínaného sledu tónov $c2$, $d2$, $e2$ a $f2$ zahraných na klavíri, vytvorený pomocou programu Matlab. Horizontálna os predstavuje čas, vertikálna os predstavuje frekvenciu. Intenzita signálu je znázorňovaná graficky pomocou farebného spektra. Okrem 2D-spektrogramu sa využívajú aj 3D-spektrogramy, pričom voľba konkrétneho typu grafu závisí okrem iného od názornosti a prehľadnosti grafov.



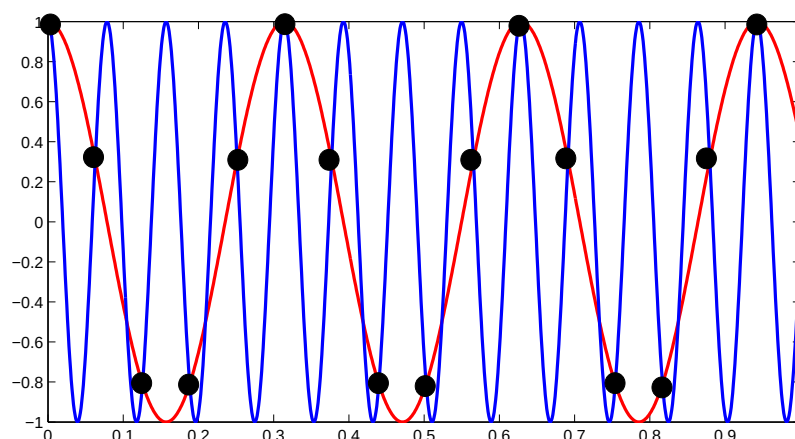
Obr. 9: Príklad 2D-spektrogramu sledu tónov $c2$, $d2$, $e2$ a $f2$ zahraných na klavíri.

2.7 Problémy pri aplikácii FFT-metódy a ich riešenie

Pri využívaní FFT-metódy sa najčastejšie vyskytujú dve závažné chyby, ktoré znižujú relevantnosť získaných výsledkov a treba venovať primerané úsilie ich odstráneniu. Jedná sa o tzv. nežiaduce skreslenie (angl. aliasing) a nežiaduci rozptyl (angl. leakage).

2.7.1 Nežiaduce skreslenie

Jedná sa o jav typický pri diskretizácii pôvodne spojitej funkcie (v našom prípade sa jedná o zvukový signál). Nastáva v prípade, keď je tzv. vzorkovacia frekvencia nižšia ako dvojnásobok frekvencie najvyššej uvažovanej zložky pôvodného signálu (v našom prípade alikvóty s najvyššou frekvenciou). Vzorkovacia frekvencia f_s vyjadruje počet



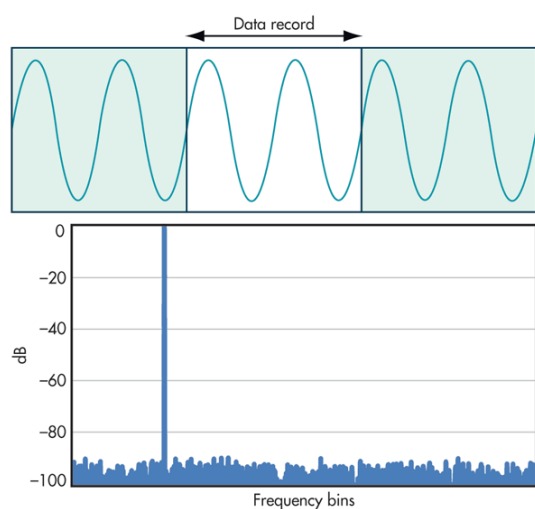
Obr. 10: Ilustračný príklad vzniku nežiaduceho skreslenia.

výberových bodov (na Obrázku 10 znázornených čiernou bodkou) za jednotku času. V takomto prípade je možné kvôli nízkej výberovej frekvencii vytvoriť zo získaného výberu bodov skreslený (angl. alias) signál s nižšou frekvenciou oproti pôvodnému, skutočnému signálu. Pre ilustráciu sme vytvorili Obrázok 10. Modrou čiarou je znázornený pôvodný signál, červenou skreslený „falošný“ signál. Zabrániť vzniku tejto chyby resp. jej nežiaducim vplyvom možno používaním dostatočne vysokej vzorkovacej frekvencie. V našej analýze vychádzame z predpokladu, že ľudské ucho nie je schopné vnímať frekvencie vyššie ako 20kHz . V našej práci využívame dve vzorkovacie frekvencie, pri analýze mechanického klavíra frekvenciu 44100Hz , pri analýze elektrického klavíra frekvenciu 96000Hz . Obe frekvencie sú dostatočne vysoké, preto nebudeme uvažovať negatívny vplyv skreslenia na našu analýzu.

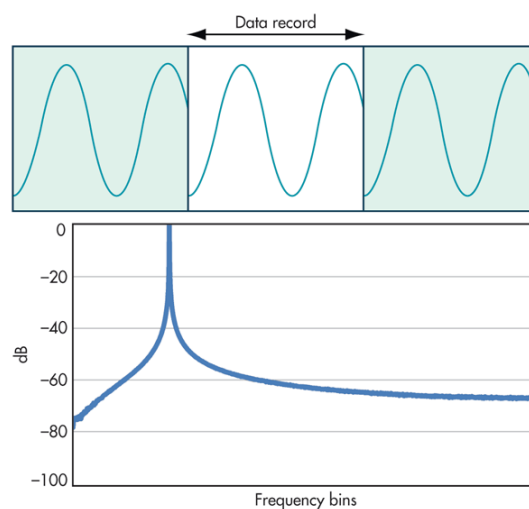
2.7.2 Nežiaduci rozptyl

Pri výpočte FFT určitého signálu na intervale $[0, T]$ predpokladáme, že analyzovaný signál je periodický, s periódou T . V prípade, že počítame FFT neperiodického signálu, dochádza k tzv. nežiaducemu rozptylu (angl. leakage).

Jedná sa o nežiaduce zdanlivé rozptýlenie energie skutočného signálu spektra do signálov s blízkymi hodnotami frekvencií (Obrázky 11 a 12). Toto rozptýlenie energie môže jednak „zakryť“ pôvodné signály pri blízkych frekvenciách a jednak spôsobuje zdanlivé zníženie hodnoty energie daného signálu oproti skutočnej hodnote.



Obr. 11: Ukážka pôvodného periodického signálu a jeho spektra. X -ová os predstavuje frekvenciu, Y -ová os znázorňuje hladinu akustického tlaku. Zdroj:[10]



Obr. 12: Ukážka pôvodného neperiodického signálu a jeho skresleného spektra. X -ová os predstavuje frekvenciu, Y -ová os znázorňuje hladinu akustického tlaku. Zdroj:[10]

Nežiaducemu rozptylu možno zabrániť transformovaním pôvodného neperiodického signálu na periodický pomocou spomínaných časových okien.

V našej práci budeme prípadný výskyt skreslenia eliminovať používaním tzv. obdĺžnikových a Hammingových okien. V prípade hlbšieho záujmu o problematiku čitateľa odkazujeme na článok [9].

3 Stručný prehľad používaných štatistických metód

Keďže budeme analyzovať kvalitu tónov a hľadať rozdiely vo farbe tónu podmienené rôznym spôsobom hry na hudobnom nástroji, bolo by dobré vedieť určité veličiny reprezentujúce farbu tónu vhodným spôsobom štatisticky podložiť. V tejto kapitole stručne vysvetlíme tzv. viacrozmernú analýzu rozptylu, pomocou ktorej budeme pozorované veličiny porovnávať. Vychádzame z [6] a [13].

3.1 Viacrozmerná analýza rozptylu

Viacrozmerná analýza rozptylu, skrátene MANOVA (z anglického Multivariate Analysis of Variance) je štatistická testovacia procedúra porovnávajúca viacrozmerné stredné hodnoty niekoľkých skupín.

Nech $\mathbf{y}_{ij}$ je j -ty p -rozmerný vektor patriaci do i -teho náhodného výberu s veľkosťou n_i s p -rozmerným normálnym rozdelením $\mathbf{N}_p \sim (\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, pričom $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \dots = \boldsymbol{\Sigma}_k$.

Predpokladajme, že vektory spĺňajú model:

$$\mathbf{y}_{ij} = \boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad j = 1, 2, \dots, n_i; \quad (15)$$

kde $\boldsymbol{\mu}_i$ je stredná hodnota i -teho náhodného výberu a $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \in N \sim (0, \sigma_{ij}^2)$.

Testujeme hypotézu:

$$H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \dots = \boldsymbol{\mu}_k,$$

proti alternative

$$H_1 : \boldsymbol{\mu}_i \neq \boldsymbol{\mu}_j \text{ pre nejaké } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, k.$$

Na test tejto hypotézy možno použiť viacero testovacích štatistík, ktoré uvádzame v nasledujúcich podkapitolách.

3.1.1 Wilksova testovacia štatistika

Najpoužívanější spôsob, ako testovať uvedenú hypotézu, je použitie tzv. Wilksovej testovacej štatistiky.

Definujme si teraz maticu S_E typu $p \times p$ charakterizujúcu variabilitu a kovariancie v rámci jednotlivých výberov a maticu S_T typu $p \times p$, charakterizujúcu variabilitu a

Podmienky	Transformácia	Stupne voľnosti
$k = 2$	$F = \frac{(1-\Lambda)(n-p-1)}{p\Lambda}$	$p, n - p - 1$
$\min(p, k - 1) = 2$	$F = \frac{(1-\sqrt{\Lambda})(n-r-2)}{r\sqrt{\Lambda}}$	$2r, 2n - 2r - 4$
$\min(p, k - 1) > 2$	$\chi^2 = \frac{p+k+2-2n}{n} \ln \lambda$	$pk - p$

Tabuľka 1: Možnosti transformácie Wilksovej Lambdy, $r = \max(k - 1, p)$.

kovariancie medzi jednotlivými výbermi:

$$S_E = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{y}_{ij} - \bar{\mathbf{y}}_i)(\mathbf{y}_{ij} - \bar{\mathbf{y}}_i)'$$

$$S_T = \sum_{i=1}^k (n_i \bar{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}})(\bar{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}})',$$

kde $\bar{\mathbf{y}} = (\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{y}_{ij})/N$ je p -rozmerný vektor priemerov všetkých údajov, $\bar{\mathbf{y}}_i = (\sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{y}_{ij})/n_i$ je p -rozmerný vektor priemerov údajov patriacich do i -teho výberu a $N = \sum_{i=1}^k n_i$. Apos-trofom označujeme transpozíciu.

Wilksovu testovaciu štatistiku, známu tiež ako Wilkovu Lambdu, definujeme nasledovne:

$$\Lambda = \frac{|S_E|}{|S_E + S_T|}. \quad (16)$$

Podľa podmienok uvedených v Tabuľke 1 môžeme Λ transformovať na iné testovacie štatistiky uvedené v druhom stĺpci tabuľky s príslušnými stupňami voľnosti uvedenými v treťom stĺpci. Hypotézu $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ zamietame, keď transformovaná hodnota Wilksovej štatistiky Λ presiahne zvolenú pravdepodobnostnú hladinu α daného rozdelenia s príslušnými stupňami voľnosti.

3.1.2 Pillaiova testovacia štatistika

Hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \dots = \boldsymbol{\mu}_k$ možno testovať aj pomocou Pillaiovej testovacej štatistiky

$$V = \text{tr}[(S_E + S_T)^{-1} S_T], \quad (17)$$

kde tr označuje stopu matice v argumente. Pillaiovu štatistiku dokážeme aproximovať na približnú hodnotu F -štatistiky nasledovne:

$$F = \frac{(2N + s + 1)V}{(2m + s + 1)(s - V)} \sim F_{s(2m+s+1), s(2N+s+1)}, \quad m = \frac{1}{2}(|k - 1 - p| - 1). \quad (18)$$

Hypotézu H_0 zamietame pre hodnoty približnej F štatistiky presahujúce zvolenú pravdepodobnostnú hladinu α F -rozdelenia s príslušnými stupňami voľnosti.

3.1.3 Stručný prehľad ďalších testovacích štatistík

V modeli MANOVA sa používajú aj ďalšie štatistiky. Všetky, vrátane Wilksovej Lambdy aj Pillaiovej štatistiky, sa dajú jednoducho vyjadriť nasledujúcimi vzťahmi, v ktorých $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_s$ sú vlastné hodnoty matice $S_E^{-1}S_T$, pričom $s = \min(k - 1, p)$.

$$\text{Wilksova lambda:} \quad \Lambda = \prod_{i=1}^s \frac{1}{1 + \lambda_i}, \quad (19)$$

$$\text{Pillaova štatistika:} \quad V = \sum_{i=1}^s \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i}, \quad (20)$$

$$\text{Lawley-Hotellingova štatistika:} \quad U = \sum_{i=1}^s \lambda_i, \quad (21)$$

$$\text{Royova štatistika:} \quad \theta = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}. \quad (22)$$

Zo vzťahov (19) a (20) sa dajú odvodiť vzťahy (16) a (17), avšak v rámci našej práce nebudeme týmto odvođeniam venovať pozornosť a v prípade záujmu čitateľa odkazujeme na [13].

Tieto štyri štatistiky majú rovnakú pravdepodobnosť chyby 1. druhu, t.j. v prípade, že hypotéza H_0 platí, je pravdepodobnosť jej chybného zamietnutia vo všetkých testoch rovnaká.

Rozdiel medzi štatistikami je podmienený silou ich testu, t.j. pravdepodobnosťou zamietnutia hypotézy, ktorá je nepravdivá. V závislosti od rôznych typov dát sa mení aj poradie štatistík podľa ich sily, avšak všeobecne platí, že Wilksova Λ nie je ani najhoršia ani najlepšia spomedzi všetkých štatistík [13]. Nás však bude zaujímať viac ich citlivosť na porušenie základných predpokladov modelu.

3.1.4 Predpoklady viacrozmernej analýzy rozptylu, možnosti ich overovania a citlivosť testov na ich porušenie

Podľa [13] MANOVA predpokladá nasledovné vlastnosti náhodných výberov:

- Všetky testované náhodné výbery pochádzajú z p -rozmerného normálneho rozdelenia.
- Pre všetky náhodné výbery platí rovnosť (homogenita) ich kovariančných matíc, t.j. $\Sigma_i = \Sigma_j$ pre všetky $i, j = 1, 2, \dots, k$.
- Neprítomnosť outlierov v rámci každého výberu.

Overenie podmienky viacrozmerného normálneho rozdelenia nie je triviálne. Všetky testy modelu MANOVA sú dostatočne robustné na porušenie tejto podmienky, a vo všeobecnosti platí, že pokiaľ sa náhodné výbery značne odchyľujú od predpokladaného normálneho rozdelenia, tento rozdiel sa prejaví už na jednorozmernej úrovni. Preto stačí overiť (napríklad pomocou známeho t -testu, prípadne Wilks-Shapirovoho testu), či jednotlivé premenné majú normálne rozdelenia. V prípade výrazného porušenia tejto podmienky sa odporúča nájsť jednorozmerné a viacrozmerné outliery, prípadne sa pokúsiť vhodným spôsobom transformovať údaje.

Homogenitu kovariančných matíc môžeme overiť napríklad pomocou Boxovho M -testu [13]. Porušenie podmienky má v prípade výrazne odlišných veľkostí náhodných výberov negatívne dôsledky. Pokiaľ majú väčšie výbery väčšie variancie a kovariancie, testy sa stávajú konzervatívnymi t.j. budú prijímať aj také hypotézy, ktoré by v prípade dodržania podmienky boli zamietnuté, v opačnom prípade sa stávajú liberálnymi. Pokiaľ máme rovnaký počet pozorovaní v každom výbere, všetky testy sú dostatočne odolné voči porušeniu podmienky rovnosti kovariančných matíc [13]. Vždy však platí, že najmenej citlivá na porušenie podmienky je Pillaiova štatistika, preto sa v prípade porušenia homogenity odporúča používať Pillaiov test.

Prítomnosť outlierov skresľuje výsledky všetkých testov a môže sa podieľať na porušení ďalších podmienok, preto je vhodné overiť ich prítomnosť a následne ich odstrániť. Prítomnosť jednorozmerných outlierov môžeme overiť jednoducho graficky pomocou tzv. boxplotu.

Prítomnosť viacrozmerných outlierov pre p -rozmerný náhodný výber s vektormi pozorovaní $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, aritmetickým priemerom $\bar{\mathbf{x}}$ a kovariančnou maticou Σ sa overuje použitím Mahalanobisovej vzdialenosti definovanej nasledovne [6]:

$$MD_i = \left((\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \right)^{1/2}.$$

Pre údaje pochádzajúce z viacrozmerného normálneho rozdelenia majú druhé mocniny príslušných hodnôt Mahalanobisovej vzdialenosti rozdelenie Chi-kvadrát s p stupňami voľnosti. Údaje s hodnotami Chi-kvadrátu prekračujúcimi zvolený kvantil (štandardne sa zvykne uvažovať 97,5 percentný kvantil) považujeme za outliery [6].

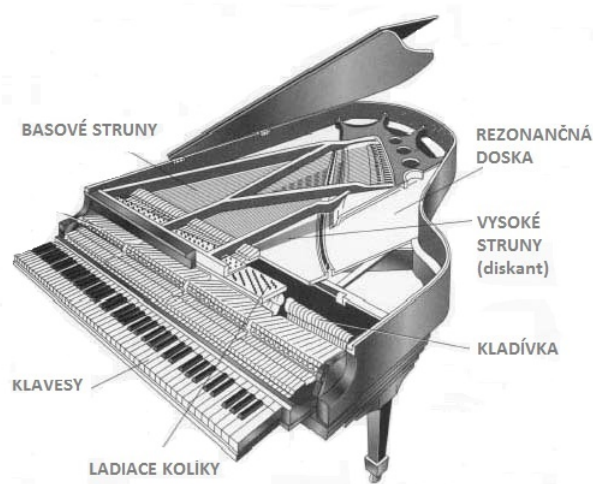
4 Analýza zvukových signálov klavírneho tónu

V našej práci sa zaoberáme jednotlivými klavírnymi tónmi s cieľom bližšie objasniť vzťah medzi fyzikálnymi vlastnosťami tónu ako zvukového signálu a jeho estetickým vplyvom na poslucháča. Nebudú nás zaujímať vzájomné vzťahy medzi tónmi, ale budeme tieto tóny skúmať izolovane. Je zrejmé, že samostatné tóny nemajú zďaleka takú schopnosť vytvoriť u človeka estetický vnem ako ich vzájomné interakcie, predsa však práve schopnosť dokonale ovládať hudobný nástroj a mať kontrolu nad všetkými vlastnosťami izolovaného hraného tónu umožňuje interpretovi podať na koncerte výnimočný výkon, preto má zmysel skúmať aj jednotlivé tóny a snažiť sa odhaliť niektoré zaujímavé súvislosti.

Každý hudobný nástroj je špecifický nielen jedinečnou farbou vyludzovaného tónu, ale najmä možnosťami ovládania vlastností daného tónu a zmien týchto vlastností v čase a každý hudobník sa usiluje o maximálne využitie tónových možností, ktoré mu ponúka daný nástroj.

4.1 Špecifiká tvorby klavírneho tónu

Klavír má medzi hudobnými nástrojmi špecifické postavenie, ktoré je určené predovšetkým kvalitou a vlastnosťami klavírneho tónu a jeho tvorby. Jeho výnimočnosť najlepšie pochopíme, keď klavírny tón porovnáme s tónom iného nástroja, napr. huslí.

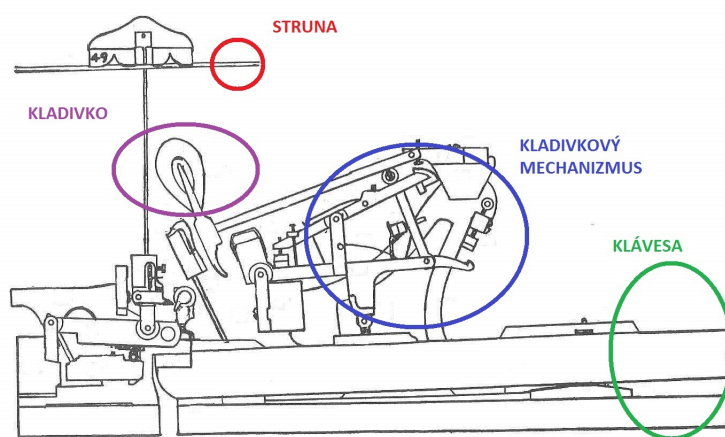


Obr. 13: Schéma konštrukcie klavíra [16].

Klavír, rovnako ako husle, patrí medzi strunové nástroje, čo znamená, že tón vzniká rozochvením struny resp. viacerých strún. Podobne ako u huslí, aj pri klavíri by samotné kmitanie struny vytvorilo zvukovú hladinu s nedostatočnou intenzitou, preto sú vibrácie zosilnené pomocou rezonančnej dosky. Spôsob, akým dochádza k rozochveniu struny, je však u oboch nástrojov diametrálne odlišný. Pri hre na husliach vzniká tón trením sláčka o strunu, pri hre na klavíri sa struna rozochveje nárazom kladivka. Rozdiely v spôsobe vzniku tónu určujú aj možnosti kontroly kvality tónu u oboch nástrojov.

Na husliach dokáže umelec kontrolovať výšku, silu i farbu tónu spojitou počas celej doby trvania tónu (pomocou rýchlosti ťahania sláčka, intenzity trenia a pod.), na klavíri to ale možné nie je.

Klavirista stlačením klávesy pomocou zložitého mechanizmu znázorneného na Obrázku 14 vyvolá náraz kladivka o strunu. V basových polohách naráža do jednej struny, v stredných polohách a v diskante o tri struny. Tie sa začnú chvieť po dobu určenú konštrukciou nástroja a do istej miery kontrolovanú klaviristom. Sila tónu je určená silou, akou kladivko rozochveje strunu, avšak iba v počiatočnej fáze trvania tónu. V momente, ako kladivko narázi a rozochveje strunu, stráca klavirista kontrolu nad ich znením a sila tónu pozvoľne klesá.



Obr. 14: Klavírna mechanika [11].

Napriek tomuto zjavnému „nedostatku“ klavír paradoxne ponúka obrovské možnosti práce s kvalitou tónu. Veľkí klaviristi udivujú už vyše storočia svetové publikum umením obrovskej diferencovateľnosti tónov, vytvárania veľmi jemných farebných odtieňov a precíznou prácou s dynamikou. Geniálni klaviristi dokážu hrou na klavíri dokonca

čiasťočne „imitovať“ iné hudobné nástroje. A schopnosť jemného ovládania kvality klavírneho tónu nie je iba privilegiom tých najlepších. Medzi základné predpoklady každého študenta klavírnej hry na stredoškolskej úrovni patrí schopnosť hrania tzv. mäkkých tónov.

Mnohí skúsení hudobníci a najmä profesionálni klaviristi dokážu rýchlo rozpoznať dobrého a zlého klaviristu iba podľa „jeho tónu“. Stačí sa po koncerte započúvať do rozhovoru skúsených hudobníkov. Môžeme uviesť ukážku typickej konverzácie dvoch náročných poslucháčov:

„Beethovenovu sonátu hral krásne, ale v druhej časti mi prekážali tie príliš teplé tóny.“

„Súhlasím s Vami, ten zvuk bol príliš jemný. Chcelo by to viac kovového lesku. A čo hovoríte na Lisztovu etudu?“

„Famózne. Ten koncentrovaný a pevný, no pritom guľatý tón... úžasné!“

Skutočne, prídavné mená *teplý, chladný, povrchný, tvrdý, mäkký, guľatý, koncentrovaný, kovový, jemný, zvonivý* a mnohé ďalšie slúžia na slovný opis rozmanitosti tónov hraných na klavíri. Dovoľme si povedať, že máloktorý nástroj disponuje toľkými opismi a toľkými nuansami, ako klavír. Ako však môže klavirista docieľať takú rôznorodosť?

Najtypickejším spôsobom je používanie pravého a ľavého pedála. Princíp fungovania pedálov je jednoduchý. Na všetky struny klavíra sú totiž pritlačené tzv. tlmítka, ktoré obmedzujú ich kmitanie. Pokiaľ stlačíme tón bez pravého pedála, tlmítka uvoľnia iba tie struny, ktoré sa majú rozkmitať po údere kladivka. Pri stlačení pravom pedáli sa uvoľnia všetky tlmítka a tým je umožnené ostatným strunám interferovať, čím sa zvýši podiel vyšších alikvót v spektre tónu.

Pri stlačení ľavého pedálu sa celá mechanika posunie mierne do strany, čím sa posunie miesto dopadu kladivka, ktoré potom nerozozvučí všetky tri struny, ale iba jednu, pričom zvyšné dve sa rozkmitajú pomocou interferencie. Odtiaľ pochádza aj označenie používania ľavého pedálu ako *una corda* (lat. jedna struna). Často sa tiež mylne označuje ako tlmiaci pedál. V skutočnosti jeho primárnou funkciou nie je stlmenie tónu, ale zjemnenie jeho farby.

Uvedené dva základné spôsoby sú veľmi účinným nástrojom klaviristu a skúsený interpret sa bez ich používania nezaobíde. Nie vždy sa však klavirista môže spoliehať

na používanie pedálu. V mnohých dielach a v mnohých špecifických situáciách je používanie pedálu nežiaduce. Preto je veľmi dôležitá otázka:

„Dokáže klavirista zmeniť farbu tónu bez pedálu t.j. iba pomocou rôzneho spôsobu stlačenia klávesy?“

Hudobníci bez výnimky odpovedia kladne, opierajúc sa o empirické skúsenosti. Kvalitu tónu však určuje okrem pedálov iba úder kladivka. To udiera rôznou rýchlosťou, čím prenáša rôzne veľkú energiu do struny a tým ju rozochveje. Bez ohľadu na to, akým spôsobom klavirista stlačí kláves (existuje mnoho spôsobov stláčania kláves, napr. zblízka, z výšky, pomalým pohybom, zo šikmého uhla a pod.), jediné, čo teoreticky dokáže ovplyvniť, je energia, ktorou kladivko rozochveje strunu. Tento predpoklad sa však zdá byť v rozpore s vnímanou skutočnosťou.

4.2 Spôsoby klavírnej hry

V rámci štúdia na konzervatóriu a vysokých umeleckých školách v odbore hra na klavíri si študenti osvojujú niekoľko základných spôsobov klavírnej hry v snahe dosiahnuť krásny melodický tón s požadovanými atribútmi (mäkký, zvonivý, koncentrovaný a pod.). Základným princípom klavírnej hry v koncepte súčasných uznávaných klavírnych škôl je hra s uvoľnenými rukami s využívaním váhy celej ruky i trupu. Preferuje sa zapájanie väčšieho množstva svalových skupín a vyhýbanie sa tzv. prstovému hramu, pri ktorom všetka sila stlačenia klávesy pochádza iba od prstových svalov. Zároveň sa zdôrazňuje dôležitosť uvoľnenosti rúk, t.j. minimalizovanie zbytočného svalového napätia v rukách a ramenách. Tón tvorený bez využívania váhy celej ruky a pri nedostatočne uvoľnených rukách má za následok jednak menšiu kontrolu sily tónu a jednak zlú kvalitu tónu. Takéto hranie sa označuje ako tvrdé a má za následok vznik tzv. tvrdých a eznelých tónov. Preferované spôsoby stláčania kláves resp. úderov sa líšia v závislosti od charakteru daného úseku skladby. Pri melodických úsekoch sa preferujú pomalé vláčne pohyby, pri rýchlych úsekoch veľmi rýchle stláčanie kláves pri minimálnom pohybe prstov i ruky.

Ak predpokladáme reálnu zmenu v kvalite pri hraní mäkkých a tvrdých tónov alebo pri pomalých a rýchlych úderoch, teoreticky by malo byť možné určitým spôsobom túto zmenu kvantifikovať. V našej práci budeme pomocou frekvenčnej analýzy skúmať

rozdiely medzi jednotlivými tónmi hranými rôznym spôsobom, čím sa pokúsime o objasnenie tohto problému. V našom výskume budeme analyzovať nasledovné skupiny tónov:

- mäkký vs. tvrdý tón;
- tón hraný bez pedálu, s pravým pedálom, s ľavým pedálom;
- tón hraný zblízka použitím prstových svalov, tón hraný voľne z veľkej výšky;
- tón hraný pomaly, tón hraný rýchlo.

4.3 Štruktúrálny pohľad na klavírny tón

Napriek spomínanej transcendentnej esencii, ktorú hudobné dielo a jeho základné zložky - tóny v sebe obsahujú, z fyzikálneho hľadiska je tón iba zvukový signál s určitými fyzikálnymi vlastnosťami, ktoré ho odlišujú od ostatných zvukov. To ale znamená, že všetky tónové vlastnosti a jeho estetický vplyv na poslucháča nie sú ničím viac ako vhodnou kombináciou určitých fyzikálnych aspektov, ktoré na vznik tónu a jeho vnímanie poslucháčom vplyvajú. Preto by malo byť možné chápať tón ako určitý fyzikálny objekt, charakterizovaný vhodne zvolenými „veličinami“. Z dôvodu prehľadnosti a v snahe o zachovanie určitej jednoty pojmov (keďže hudobno-vedné disciplíny dodnes trpia nedostatočne vybudovaným pojmovým aparátom) zavedieme určité kvázi-premenné, ktoré budeme ďalej používať. Už spomínaný pojem **kvalita tónu** bude v rámci tejto práce predstavovaný pomerom hodnôt prvých deviatich alikvót. Predpokladáme totiž, že rôzne pomery týchto alikvót dostatočne charakterizujú farbu tónu a spolu s ďalšími vlastnosťami (sila, dĺžka a.i.) aj jeho kvalitu.

4.4 Príprava a získavanie údajov

Základným predpokladom pre našu analýzu sú veľmi kvalitné nahrávky klavírnych tónov. V súčasnosti je k dispozícii veľké množstvo nahrávacích zariadení a mikrofónov s veľkou rozlišovacou schopnosťou, vzorkovacou frekvenciou a pod. Používali sme profesionálny mikrofón BLUE YETI PRO a diktafón ZOOM H1. Získané mono-nahrávky

Typ tónu	označ.	poč. vzoriek	sila najslab. tónu	sila najsilnej. tónu	priemerná dĺžka tónu (sek)
mäkký tón	mt	240	0.157	0.405	1.249
tvrdý tón	tt	250	0.368	0.623	1.263
tón hraný pomaly	tp	220	0.140	0.309	1.268
tón hraný rýchlo	tr	220	0.167	0.472	1.227
tón hraný zblízka	tb	215	0.246	0.389	1.235
tón hraný z diaľky	td	215	0.218	0.444	1.239
tón s pravým ped.	tped	70	0.005	0.619	1.254
tón s ľavým ped.	tuc	70	0.004	0.526	1.271
referenčné tóny	tref	250	0.002	0.762	1.244

Tabuľka 2: Prehľad skúmaných tónových skupín a ich základné parametre.

sú veľmi kvalitné a sú dobrým predpokladom pri získavaní relevantných údajov. Rovnako dôležitý je aj použitý nástroj. Pri našej práci sme používali klavírne krídlo značky Petrof.

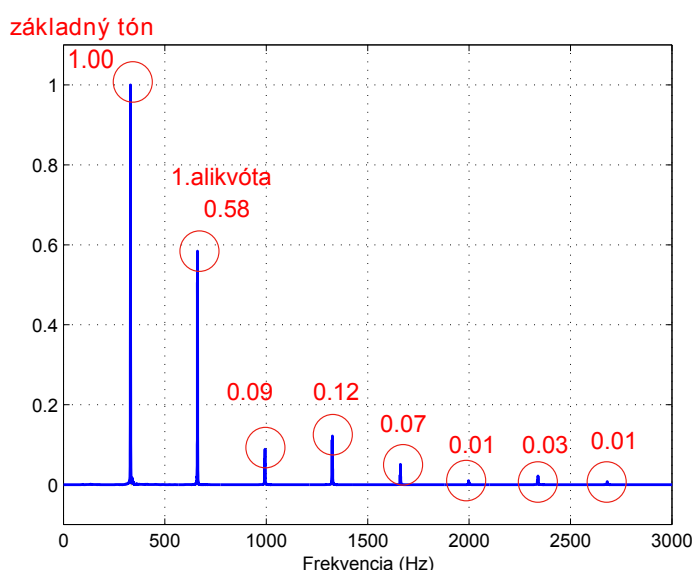
Celková kvalita tónu je súhrnom všetkých jeho vlastností - výšky, dĺžky, sily a farby, pričom niektoré predchádzajúce výskumy už ukázali, že medzi týmito vlastnosťami existuje určitá závislosť. Preto pokiaľ chceme pri skúmaní farby tónu v závislosti od spôsobu hrania dospieť k hodnoverným výsledkom, musíme v čo najväčšej miere eliminovať vplyv resp. zmenu ostatných vlastností tónu.

Nahráli sme tóny hrané rôznymi spôsobmi uvedenými v Kapitole 4.2, ich základné charakteristiky získané jednoduchou analýzou zvukových signálov ilustruje Tabuľka 2. Referenčné tóny predstavujú tóny širokej dynamickej škály hrané jednoduchým „amatérskym“ stláčaním kláves so zafixovanou rukou a zápästím a budú slúžiť pre porovnanie jednotlivých skupín.

Aby sme eliminovali vplyv výšky tónu na farbu, hrali sme všetky tóny rovnakej frekvencie 330 Hz ($e1$). Nie je však možné hrať všetky tóny presne rovnakej dĺžky a sily. Ich vplyv sa pokúsime eliminovať viacerými spôsobmi v ďalšom priebehu analýzy.

4.5 Spracovanie údajov

Ako sme spomenuli v Kapitole 1.2, každý tón je v podstate kombináciou viacerých jednoduchých tónov, spomedzi ktorých nás najviac zaujíma základný tón s najmenšou frekvenciou a alikvótne tóny, ktorých frekvencie sú celočíselnými násobkami základného tónu. Informáciu o zložení tónu vieme získať použitím FFT-metódy popísanej v Kapitole 2, pomocou ktorej získame zo zvukového signálu jeho spektrum. Nás budú zaujímať výšky signálov zodpovedajúcim jednotlivým alikvótam, ako ukazuje Obrázok 15.

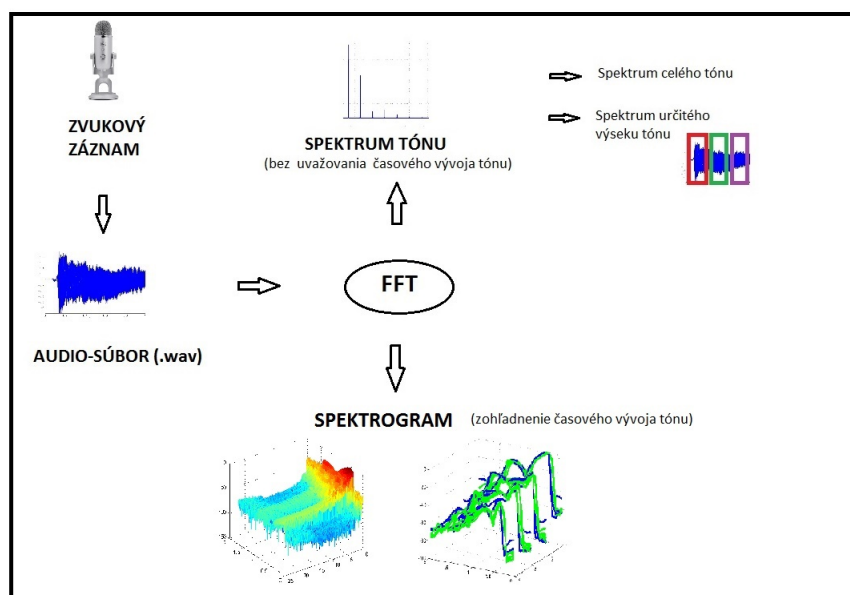


Obr. 15: Spektrum tónu *a1* zahraného na klavíri normalizované podľa signálu základného tónu, s vyznačenými signálmi prislúchajúcimi jednotlivým alikvótam.

Získané hodnoty sú normalizované podľa základného tónu, pretože v našom výskume nás nezaujímajú absolútne hodnoty jednotlivých alikvót, ale ich vzájomné pomery. Ku každému tónu zaradíme iba jeho prvých 9 alikvót, keďže hodnoty prislúchajúce vyšším alikvótam považujeme za nepresné.

Vzhľadom k tomu, že nedokážeme úplne zabrániť chybám (napr. nežiaduci rozptyl) spôsobujúcim rozptýlenie energie, energia alikvót nie je sústredená v jednej frekvencii, ale mierne rozptýlená. V našej analýze však budeme toto rozptýlenie zanedbávať, pretože toto zanedbanie sa numericky skoro vôbec neprejaví.

4.6 Štruktúra výskumu klavírnych tónov



Obr. 16: Schéma znázorňujúca metodológiu nášho výskumu.

Pre väčšiu prehľadnosť stručne uvedieme postupy pri analyzovaní klavírnych tónov, ilustrované Obrázkom 16. Pri hľadaní rozdielov medzi jednotlivými skupinami tónov budeme postupovať v troch fázach:

V **prvej fáze** budeme pracovať s predpokladom, že farba tónu závisí **iba** od spôsobu hrania tónu a nie je ovplyvnená silou tónu. Vplyv výšky a dĺžky tónu môžeme zanedbať, keďže sme ukázali, že všetky tóny majú rovnakú výšku a rozdiely v dĺžkach tónov medzi jednotlivými skupinami tónov sú zanedbateľné. Taktiež nebudeme brať ohľad na časový vývoj kvality tónu, t.j. pri získavaní spektra každého tónu zahrnieme celý zvukový signál daného tónu.

V **druhej fáze** budeme overovať a ďalej pracovať s predpokladom, že farba tónu závisí od sily tónu. Ako neskôr ukážeme, tento predpoklad je veľmi zásadný. Časový vývoj kvality tónu ani vplyv ostatných parametrov nebudeme uvažovať.

V **tretej fáze** sa budeme zaoberať časovým vývojom tónových vlastností a pokúsime sa hľadať osobitné črty časového vývoja kvality tónu pre každú skupinu tónov.

4.7 Prvá fáza

Keďže nateraz predpokladáme, že farba tónu nie je ovplyvnená jeho silou, stačí nám porovnať hodnoty alikvót medzi jednotlivými skupinami. Použijeme viacrozmernú analýzu rozptylu (MANOVA) na porovnanie stredných hodnôt náhodných vektorov.

Najskôr nájdeme viacrozmerné outliersy použitím Mahalanobisovej vzdialenosti a následne pomocou jednovýberového t -testu overíme, či je splnená podmienka normality údajov pre každú skupinu tónov. Podmienka normality bola výrazne porušená pre tóny s ľavým a pravým pedálom, pri ostatných typoch tónov je podmienka porušená iba pri maximálne jednej alikvóte.

Ďalej sme overovali homogenitu kovariančných matíc pomocou Boxovho M-testu. Na základe výsledkov:

$$\chi^2 = 3922.6789 \quad p - \text{value} = 0.000$$

test zamietol hypotézu, že kovariančné matice sú homogénne. Porušenie tejto podmienky budeme musieť zohľadniť pri samotnej analýze.

Údaje o tónoch s pedálom značne porušujú predpoklady MANOVA, preto ich z analýzy vylúčime a budeme porovnávať iba tóny bez pedálu hrané rôznym spôsobom. Keďže každý typ tónu reprezentuje vzorka rovnakej veľkosti 200 tónov, vykonané testy budú dostatočne odolné voči porušeniu podmienky homogenity kovariančných matíc. Pri testovaní budeme používať Wilksovu Lambdu a Pillaiovu štatistiku. Výsledky testovania uvádzame v Tabuľke 3.

Najskôr sme medzi sebou porovnali všetky typy tónov hraných bez pedálu, t.j. tóny hrané tvrdo, mätko, zblízka, z diaľky, rýchlo a pomaly. Ako vidíme v tabuľke, testy jednoznačne zamietli hypotézu o rovnosti stredných hodnôt.

Následne sme medzi sebou porovnali iba mäkké a tvrdé tóny. Tieto dve skupiny tónov sú špecifické tým, že predstavujú základné rozdelenia tónov podľa kvality, preto očakávame, že tento rozdiel sa prejaví aj v našej analýze. Oba testy opäť jednoznačne ukázali, že farby tónov reprezentované pomermi veľkostí prvých 9 alikvót sú rozdielne.

Nakoniec sme porovnali zvyšné skupiny tónov bez pedálu. Rovnako ako v predošlých prípadoch, aj tentoraz sa potvrdila rozdielnosť vo farbe tónov hraných rôznym spôsobom.

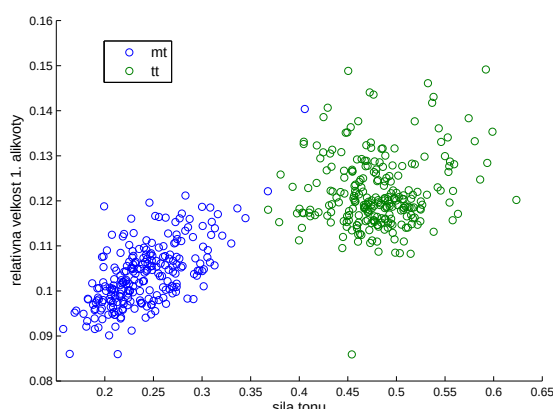
porovnávané typy tónov	Wilksov test	Pillaiov test
mt, tt, tp, tr, tb, td	chi=5612,3; p=0,000	F=166,232; p=0,000
mt, tt	F=407,7999; p=0,000	F=407,7999; p=0,000
tp,tr,tb,td	chi=3042,8; p=0,000	F=190,2888; p=0,000

Tabuľka 3: Výsledky testov hypotéz o štatistickej významnosti rozdielu medzi strednými hodnotami vybraných typov tónov.

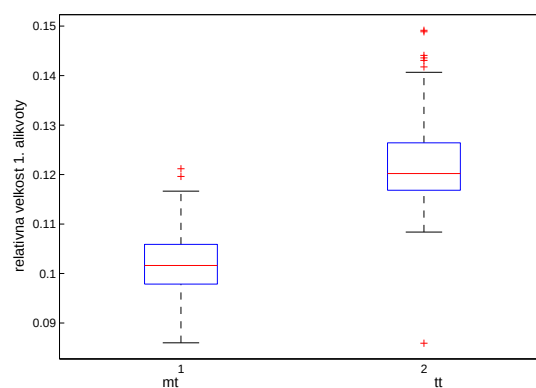
Výsledky testov pre rôzne skupiny tónov sa zdajú byť v súlade s názormi hudobníkov. Zdá sa, že klavirista skutočne dokáže aj bez používania pedálov vytvárať tóny rôznych farieb. Pripomíname, že sme zatiaľ neuvažovali vplyv sily tónu na jeho kvalitu resp. farbu. Ako sa ďalej ukáže, farba a sila tónu sú v prípade klavírnej hry veľmi úzko prepojené.

4.8 Druhá fáza

Jednotlivé skupiny tónov vykazujú jasné rozdiely vo veľkostiach jednotlivých alikvót (Tabuľka 3), čo na prvý pohľad jasne naznačuje, že spôsob hrania skutočne ovplyvní farbu tónu natoľko, že sa to prejaví už v spektre prvých deviatich alikvót. Teraz však do analýzy zahrnieme aj silu tónov.



Obr. 17: Závislosť veľkosti prvých alikvót od sily tónu vykreslená pre tvrdé a mäkké tóny.



Obr. 18: Porovnanie veľkosti prvých alikvót pre mäkké a tvrdé tóny.

Z Obrázkov 17 a 18 znázorňujúcich prvej alikvóty pre tvrdé a mäkké tóny jasne vyplýva, že tieto tóny síce skutočne majú rozdielne veľkosti prvých alikvót, ale tento

Korelácia sily tónu a i-tej alikvóty	i=1	2	3	4	5	6	7	8	9
mt	0,137	0.736	0.857	0.525	0.926	0.631	0.978	0.892	0.903
tt	0.624	-0.224	0.137	0.124	0.826	-0.127	0.581	0.900	0.903
tb	0.650	0.620	0.626	-0.086	0.847	0.328	0.914	0.263	0.542
td	0.626	0.556	0.765	0.346	0.889	0.524	0.904	0.424	0.752
tp	0.572	0.862	0.842	0.582	0.857	0.806	0.977	0.961	0.897
tr	0.672	0.244	0.797	0.248	0.884	0.552	0.932	0.512	0.792
tped	0.843	0.650	0.411	-0.059	-0.064	0.760	-0.079	0.295	-0.107
tuc	0.859	0.836	0.830	0.809	0.684	0.916	0.984	0.955	0.964
tref	0.599	0.467	0.491	0.157	0.585	0.708	0.100	0.346	-0.077

Tabuľka 4: Prehľad korelácií medzi jednotlivými alikvótami a silou tónu.

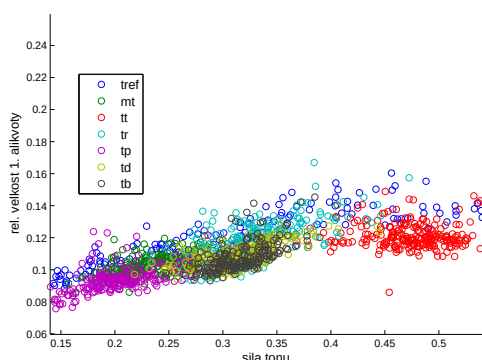
rozdiel zrejme súvisí so silou tónu, čo nás vedie k domnienke, že farba tónu závisí od jeho sily. Ako potvrdenie našej domnienky uvádzame korelácie medzi jednotlivými alikvótami a silou tónov pre rôzne skupiny (Tabuľka 4).

Hodnoty ukazujú, že relatívne hodnoty alikvót sú pomerne silno korelované so silou tónu. Preto stráca zmysel rozlišovať jednotlivé skupiny tónov iba na základe rôznych veľkostí alikvót. Zvolíme iný postup na porovnávanie jednotlivých skupín - budeme skúmať jednotlivé závislosti veľkostí alikvót od sily tónov a budeme skúmať rozdiely v týchto závislostiach pre rôzne skupiny. Takýmto spôsobom by sa nám však jednotlivé skupiny veľmi ťažko porovnávali, preto využijeme referenčné tóny. Tieto tóny majú dve veľmi užitočné vlastnosti:

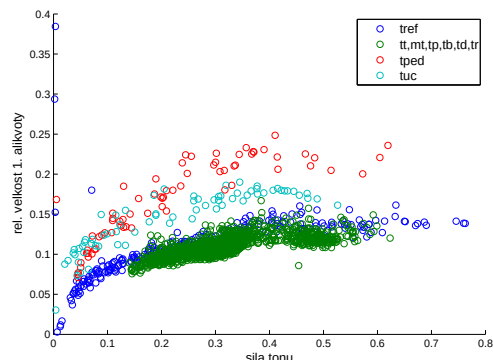
- Tóny boli vytvorené rovnakým spôsobom hrania, čiže sa menila iba sila úderu do klávesy. Spôsob hrania bol navyše veľmi neprofesionálny a „strojový“.
- Skupina referenčných tónov v sebe zahŕňa veľkú dynamickú škálu tónov od najslabších, sotva počuteľných, po veľmi silné tóny.

Môžeme predpokladať, že iný spôsob tvorenia tónu spôsobí, že závislosť od sily tónu bude rozdielna pre referenčné tóny a tóny hrané rôznymi spôsobmi.

Obrázky 19 a 20 ukazujú jasnú rozdielnosť medzi tónmi hranými bez pedálu a ostatnými tónmi. Relatívne veľkosti prvých alikvót sú jednoznačne najvyššie pri tónoch



Obr. 19: Závislosť veľkosti prvých alikvót od sily tónu pre všetky skupiny tónov.



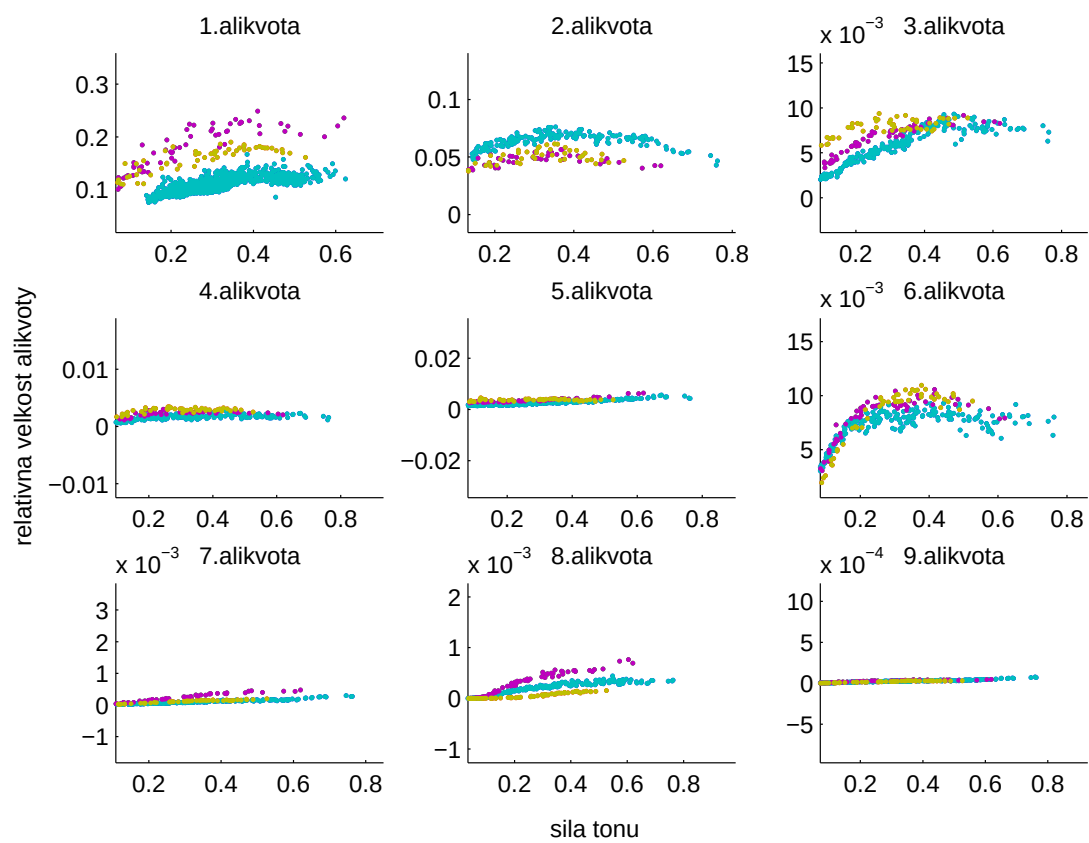
Obr. 20: Závislosť veľkosti prvých alikvót pre tóny hrané bez pedálu.

hraných s pravým pedálom, nasledujú tóny s ľavým pedálom a najnižšie hodnoty prvých alikvót majú tóny bez pedálu. Medzi tónmi hranými bez pedálu sa však žiadny rozdiel neobjavil bez ohľadu na spôsob hrania. Rovnaký scenár by sa opakoval pri všetkých alikvótach. Pre ilustráciu uvádzame grafické porovnanie závislostí alikvót od sily tónu pre tóny s pravým, ľavým pedálom, a referenčné tóny.

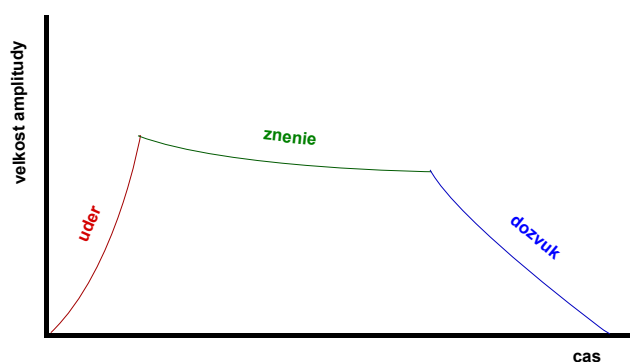
Porovnávaním závislostí veľkostí alikvót od sily tónu pre rôzne skupiny tónov sme ukázali, že zjavný rozdiel vo farbe tónu sa prejaví aj bez zohľadnenia časového vývoja tónu a vplyvu ďalších parametrov. Dôležitým záverom je tiež skutočnosť, že toto použitie pedálu sa prejaví bez ohľadu na silu tónu. Jednoznačný rozdiel medzi závislosťami jednotlivých alikvót od sily tónu hranými s pedálom a referenčnými tónmi nám teda potvrdil dôležitú úlohu pedálov pri ovplyvňovaní kvality tónu.

Na druhej strane však výsledky naznačujú, že medzi ostatnými tónmi nebude žiadny rozdiel. Vskutku, závislostí alikvót od sily tónu pre jednotlivé skupiny tónov a referenčných tónov splývajú. Preto pristúpime k ďalšiemu rozšíreniu predpokladov.

Pri pozornom počúvaní ľubovoľného tónu si pozorný poslucháč všimne, že v znení tónu v závislosti od času môžeme nájsť určité fázy. Pre ilustráciu uvádzame Obrázok 22 Každý klavírny tón má tri fázy: **úder**, **znenie** a **dozvuk**. V praxi však pri klavírnej hre málokedy počujeme celé trvanie tónu od úderu až po dozvuk. Dokonca pri veľkých rýchlostiach dokáže zručný klavirista zahrať aj 15-20 tónov za sekundu (tí najlepší dokonca vyše 25), čo znamená, že tón nestihne zaznieť celý, počujeme iba údery. Tým pádom získavanie celého spektra nielenže môže byť zbytočné, zahrňanie rozdielnych fáz



Obr. 21: Porovnanie závislostí veľkostí 1.-9. alikvóty od sily tónu pre referenčné tóny a tóny s pravým a ľavým pedálom.

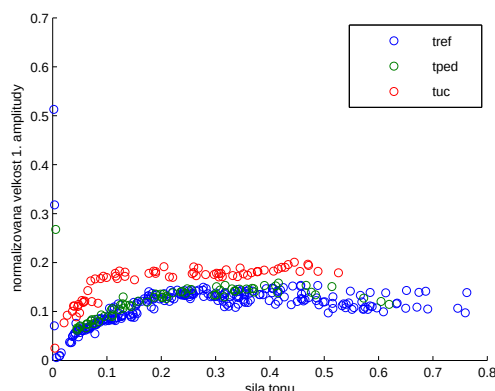


Obr. 22: Schéma znázorňujúca základné fázy trvania tónu.

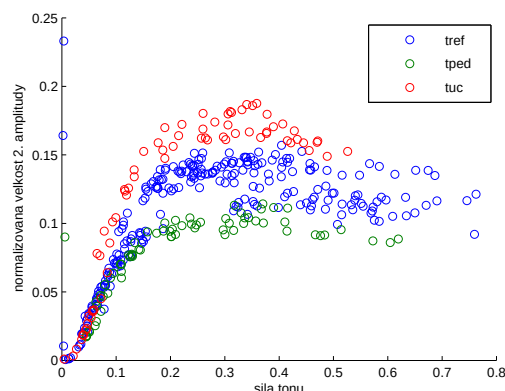
tónu s rozličnou intenzitou a trvaním môže byť kontraproduktívne. Preto zopakujeme analýzu závislosti veľkostí alikvót, nie však pre celý tón, ale iba pre jeho určité úseky. Konkrétne sa zameriame na úder a znenie.

4.8.1 Analýza úderu tónu

Aj keď sa dala očakávať zmena, analýza nepriniesla v prípade tónov hraných bez pedálu zaujímavé výsledky. Rozdiely sa však objavili pri tónoch hraných s pedálom.



Obr. 23: Závislosť veľkosti prvých alikvót od sily tónu pre tóny s pedálom a ref. tóny.



Obr. 24: Závislosť veľkosti druhých alikvót od sily pre tóny s pedálom a ref. tóny.

Na Obrázku 23 si môžeme všimnúť, že relatívne veľkosti alikvót pre tóny s pravým pedálom a ich závislosť od sily tónu je rovnaká, ako pre referenčné tóny, aj keď pri skúmaní závislosti pri celom trvaní tónu (Obrázok 19) boli tieto veľkosti jednoznačne väčšie. Naproti tomu tóny s ľavým pedálom majú veľkosti prvých alikvót väčšie, ako referenčné tóny. Na Obrázku 24 vidíme, že v prípade druhých alikvót sú ich hodnoty pre tóny s pedálom nižšie ako pri referenčných, čo je vyslovene prekvapujúce.

Tieto výsledky sú zaujímavé tým, že poukazujú na veľmi jemné rozdiely vo farbe tónu. Efekt stlačeného pravého pedálu skutočne pri údere tónu nie je počuteľný a interferencia ostatných strún sa prejaví zrejme až pri znení tónu. Naproti tomu použitie ľavého pedála sa prejaví ihneď pri údere.

Zvláštné je však, že hodnoty druhých alikvót sú všeobecne pre tóny s pravým pedálom nižšie ako pri referenčných tónoch. Tento jav sa nám nepodarilo pomocou našich hudobných poznatkov uspokojivo vysvetliť.

4.8.2 Analýza znenia tónu

Analýza znenia tónu priniesla rovnaké výsledky ako analýza celého tónu. Neobjavili sa žiadne výrazné zmeny oproti predchádzajúcim výskumom. Tóny hrané s pedálom boli

najbohatšie na prítomnosť vyšších alikvót, v prípade tónov hraných bez pedálu sme žiaden rozdiel neevidovali.

4.9 Tretia fáza

Aj keď predchádzajúce výskumy priniesli niekoľko zaujímavých poznatkov a potvrdili dôležitú úlohu používania obidvoch pedálov a ich vplyv na farbu tónu, nedokázali potvrdiť hypotézu o vplyve spôsobu hry na farbu tónu bez použitia pedálu. Preto skúsime zohľadniť ďalší faktor vplývajúci na kvalitu tónu - jeho časový vývoj.

Ako sme už spomenuli, spektrum tónu zachytáva signál ako statický, t.j. nie sú v ňom zachytené informácie o zmene pomeru alikvót v závislosti od času. Ako však už naznačili predchádzajúce výsledky, rozloženie veľkostí alikvót v rámci jedného tónu sa zrejme bude meniť v čase. To môže znamenať, že aj keď rôzne spôsoby hry neovplyvnia celkové spektrum tónu, môžu vplývať na jeho časový vývoj.

Pri ďalšej analýze budeme teda používať spektrogramy, ktorých základný princíp sme vysvetlili v Kapitole 2. Spektrogramy dostatočne prehľadné, preto budeme okrem nich používať aj modifikácie zobrazujúce veľkosti jednotlivých alikvót v jednotlivých zvolených časových úsekoch. Keďže rozsah týchto hodnôt je z intervalu $[10^{-5} \quad 1]$, kvôli prehľadnosti budeme ich veľkosti zobrazovať v decibeloch, pričom ako referenčnú intenzitu zvolíme maximálnu hodnotu základného tónu. Táto bude nadobúdať hodnotu $0dB$ a ostatné budú mať záporné hodnoty.

Taktiež by nebolo vhodné zobrazovať grafy pre všetky vzorky tónov pre všetky skupiny. Preto sme pre každú skupinu tónov bez pedálu (okrem referenčných) vypočítali priemerné hodnoty prvých deviatich alikvót. Tón s takýmito alikvótami však reálne nikdy nezaznel, preto ak $i = 1, 2, \dots, k$ bude číselné označenie skupín (tt, mt, ...) a n_i bude počet vzoriek v skupine i , tak spomedzi všetkých nahratých tónov v rámci skupiny vyberieme ten, ktorý sa najviac „podobá“ hypotetickému priemernému tónu, teda ktorý spĺňa:

$$j_i^* = \arg \min_{j \in \{1, 2, \dots, n_i\}} \|\mathbf{x}_i^j - \bar{\mathbf{x}}_i\|_2.$$

Označenie $\mathbf{x}_i^j$ predstavuje vektor relatívnych hodnôt alikvót j -teho tónu z i -tej skupiny, $\bar{\mathbf{x}}_i$ je vektor alikvót priemerného tónu v skupine i .

Pri porovnávaní kvality tónov $j \in \{1, \dots, n_i\}$ zo skupín $i \in \{1, \dots, k\}$ s referenčnými tónmi vyberieme spomedzi referenčných tónov ten, ktorý je z hľadiska *sily* najbližšie k porovnávanému tónu.

Nech p_i^* označuje silu priemerného tónu j_i^* zo skupiny i , potom hľadáme také $j_{ref}^* \in \{1, 2, \dots, n_{ref}\}$, kde n_{ref} je počet vzoriek v skupine referenčných tónov, ktoré spĺňa

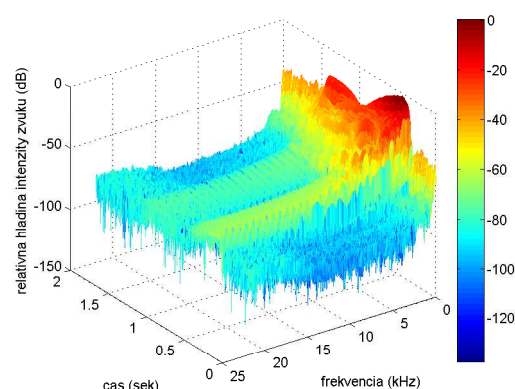
$$j_{ref}^* = \arg \min_{j \in \{1, 2, \dots, n_{ref}\}} |p_{ref}^j - p_i^*|.$$

p_{ref}^j označuje silu j -teho referenčného tónu.

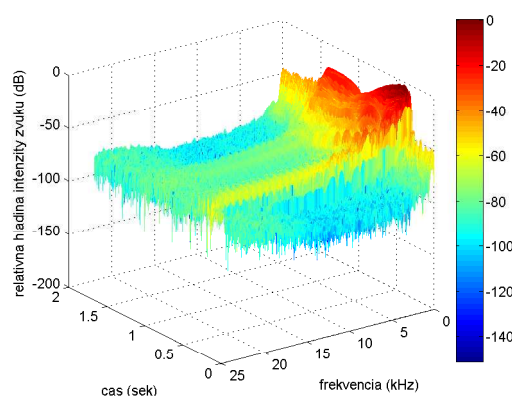
Takto získané tóny majú veľmi podobnú silu a v maximálnej možnej miere charakterizujú celú skupinu. Na základe vizuálneho porovnania získaných grafov budeme voliť ďalší postup výskumu. Uvádzame ilustračné obrázky 27 a 28 zobrazujúce grafické porovnania časového vývoja rôznych alikvót pre tvrdé tóny a referenčné tóny. Obrázky nepoukazujú na žiadne relevantné rozdiely medzi skupinami. Preto zobrazíme časový vývoj iba pre prvé štyri hodnoty alikvót. Na Obrázku 27 vidíme vykreslený časový vývoj alikvót pre tvrdé a referenčné tóny, pričom sme medzi sebou porovnávali priemerný tvrdý tón a referenčný tón s podobnou silou. Mohlo by sa zdať, že oba tóny majú rozdielny vývoj hodnôt alikvót, avšak v Obrázku 28 sme vykreslili sedem náhodných tvrdých tónov a im zodpovedajúcich referenčných tónov s rovnakou silou a vidíme, že medzi nemožno objaviť markantný rozdiel. Podobne to platí aj pre ostatné skupiny.

Je však zaujímavé všimnúť si, že jednotlivé alikvóty sa zjavne vyvíjajú nezávisle od ostatných. Dalo by sa očakávať, že krivky zobrazujúce vývoj jednotlivých alikvót sa budú podobáť, ale každá má osobitný priebeh. Na základe tohto javu sa pokúsime Obrázky 27 a 28 modifikovať - nebudeme si všímať časový vývoj jednotlivých alikvót, ale budeme sledovať vzájomné pomery alikvót a ich zmenu v čase. Je možné, že týmto prístupom objavíme nové súvislosti.

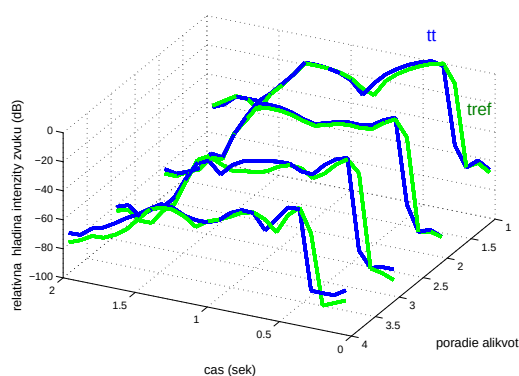
Ani modifikácia nepriniesla nové výsledky, ako vidno na Obrázku 29. V rámci našej práce považujeme možnosti porovnávaní rôznych vlastností tónov a ich závislostí prostredníctvom frekvenčnej analýzy za vyčerpané.



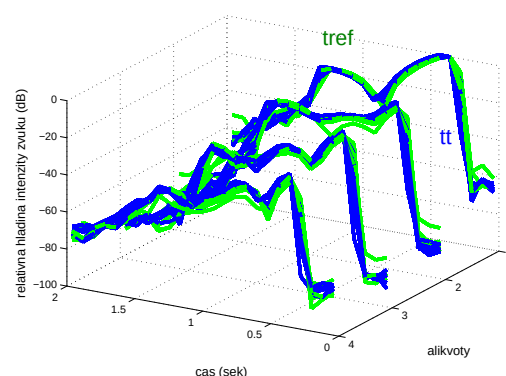
Obr. 25: Spektrogram „priemerného“ tónu v skupine tvrdých tónov.



Obr. 26: Spektrogram referenčného tónu.



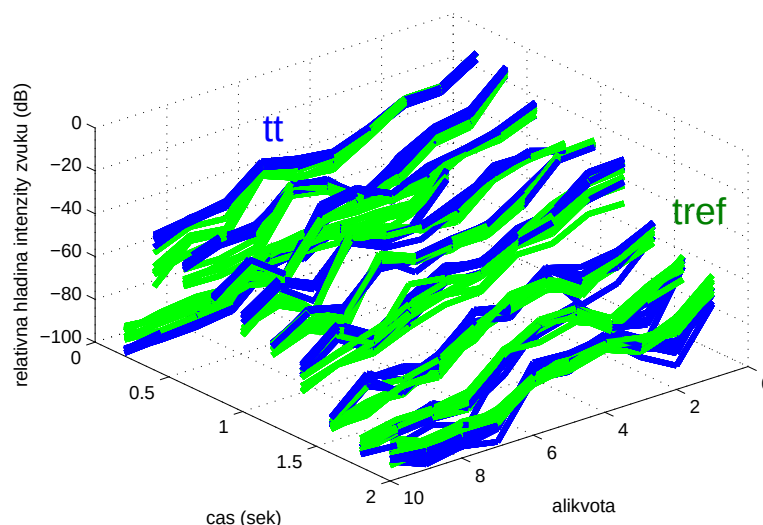
Obr. 27: Porovnanie časového vývoja prvých štyroch alikvót pre tvrdé a referenčné tóny (porovnanie priemerných tónov).



Obr. 28: Porovnanie časového vývoja prvých štyroch alikvót pre tvrdé a referenčné tóny (porovnanie náhodnej vzorky 7 tónov z každej skupiny).

4.10 Vyhodnotenie analýzy

Uvedené metódy poskytli zaujímavý pohľad na problematiku tvorby a časového vývoja tónu a ukázali zaujímavé výsledky najmä pre tóny hrané s pedálom. Rozdiely medzi tónmi bez pedálu hrané rôznymi spôsobmi však nedokázali nájsť, čo samozrejme neznamená, že nie je možné ich nejakým spôsobom zaznamenať. Zdôrazňujeme, že nami použité metódy frekvenčnej analýzy pracovali so základnými poznatkami, predpokladmi a zjednodušeniami, ktoré mohli prispieť k zníženiu relevantnosti údajov. Ako sa ukázalo, výsledky obzvlášť pri tónoch hraných s pedálom našli logické zdôvodnenie a potvrdzovali hudobnú prax. Napriek tomu ich nepovažujeme za dostatočne účinné,



Obr. 29: Porovnanie vývoja alikvót pre výber tvrdých tónov a výberu referenčných tónov.

aby sme mohli vyhlásiť, že schopnosť klaviristu ovládať iba pomocou prstov široké farebné spektrum klavíra, je mýtus. Čo ale s určitosťou môžeme povedať je, že farba tónu je veľmi úzko spätá s jeho silou. Výsledky výskumu tiež naznačujú, že klavirista nie je schopný ovplyvniť farbu tónu bez zmeny dynamiky, inak povedané, nedokáže zahrat dva tóny rôznej farby bez toho, aby musel zmeniť silu tónu. Tento náš záver však nekorešponduje s názormi profesionálnych klaviristov.

Preukázateľné výsledky nášho výskumu kvality klavírných tónov môžeme zhrnúť do nasledujúcich bodov:

- Farba tónu do značnej miery závisí od sily, akou tón zahráme.
- Tóny hrané s pravým alebo ľavým pedálom majú vyššie relatívne hodnoty alikvótnych tónov, ako tóny hrané bez pedála.
- Vzájomné pomery alikvót v rámci tónu sú vo všeobecnosti korelované, avšak časový vývoj jednotlivých alikvót je veľmi rôznorodý a nepravidelný.
- Nepodarilo sa ukázať vplyv spôsobu hrania tónu na jeho farbu, iba na jeho silu, a to ani pri zohľadnení časového vývoja farby tónu.
- Spektrum celého tónu a spektrum fázy trvania tónu - znenia sú veľmi podobné a obsahujú v sebe podstatnú informáciu o kvalite tónu.

- Vplyv pravého pedálu sa na zmene farby tónu prejaví až vo fáze znenia, vplyv ľavého pedálu je badateľný už od úderu tónu.

Potvrdilo sa, že hudba je komplexný pojem a aj jej najjednoduchšie stavebné prvky chápané čisto ako fyzikálne objekty disponujú veľkou rôznosťou a prepojenosťou svojich vlastností.

5 Analýza zvukových signálov tónu elektrického klavíra

V tejto kapitole sa zaoberáme analýzou tónu elektrického klavíra s cieľom porovnať možnosti diferenciácie kvality tónu pri hre na elektrickom a mechanickom klavíri. Keďže analýza tónov hraných na mechanickom klavíri naznačila, že klavirista má obmedzené možnosti meniť farbu tónu bez použitia pedálu, mohlo by sa zdať, že estetická kvalita hry na elektrickom klavíri môže byť porovnateľná s hrou na mechanickom klavíri. Takéto tvrdenie absolútne odporuje všetkým skúsenostiam profesionálnych hudobníkov ako aj skúsených poslucháčov. Výsledky, ktoré nám analýza prinesie, môžu veľmi zaujímavým spôsobom doplniť pozorovania z predchádzajúcej kapitoly. Postup pri analýze bude analogický, avšak vynecháme prvú fázu. Ako sa ukáže, možnosti klaviristu ovplyvňovať kvalitu tónu sú pri hre na elektrickom klavíri naozaj výrazne obmedzené v porovnaní s hrou na mechanickom klavíri.

5.1 Stručný opis tvorby tónu na elektrickom klavíri

Pod pojmom elektrický klavír si môžeme predstaviť širokú paletu rôznych typov klavírov, pre ktoré je typické, že tón nevzniká rozochvením struny kladivkom, ale vytváraním elektrických signálov a ich následnou transformáciou na zvukový signál - tón, pre ktorý je charakteristická podobná farba, akú má tón „obyčajného“ mechanického klavíra.

Pri porovnávaní je okrem kvality zvuku dôležitá najmä citlivosť na silu stlačenia klávesy, inými slovami, pokiaľ chceme, aby elektrický klavír čo najviac pripomínal mechanický klavír, nestačí, aby mal približne rovnakú farbu, ale aby jeho reakcie na rôznu intenzitu stlačenia klávesu boli podobné, ako pri mechanickom klavíri.

V našej práci nás zaujímajú práve typy klavírov s vysokou mierou podobnosti s mechanickým klavírom. V súčasnosti je badateľný trend (okrem iného z finančných dôvodov) uprednostňovania takýchto elektrických klavírov pred mechanickými klavírmi. Najmä v základných umeleckých školách sa často stretávame s nahrádzaním starších klavírov elektrickými náhradami. Taktiež je kúpa elektrického klavíra vhodná voľba pre domácnosti, je jednoduchšie kúpiť relatívne lacný elektrický klavír, ako drahý mechanický klavír. Rozdiel v kvalite a tvorbe tónu je pre neskúsených hudobníkov nepatrný.

Typ tónu	označ.	poč. vzoriek	sila najslab. tónu	sila najsilnej. tónu	priemerná dĺžka tónu (sek)
mäkký tón	mt	100	0.058	0.111	1.353
tvrdý tón	tt	100	0.117	0.162	1.361
tón hraný pomaly	tp	100	0.036	0.097	1.341
tón hraný rýchlo	tr	100	0.061	0.117	1.349
tón s pravým ped.	tped	45	0.011	0.158	1.351
referenčné tóny	tref	45	0.010	0.225	1.346

Tabuľka 5: Prehľad základných tónových skupín hraných na elektrickom klavíri a ich základné parametre.

Na základe vlastnej pedagogickej aj interpretačnej činnosti si však dovoľíme vysloviť tvrdenie, že elektrický klavír nedokáže plne nahradiť mechanický klavír, a môže slúžiť iba ako dočasná náhrada, no žiak sa na ňom nemôže naučiť dostatočne dobre ovládať klavírny tón, ani nedokáže vytvoriť také interpretácie ako na mechanickom klavíri.

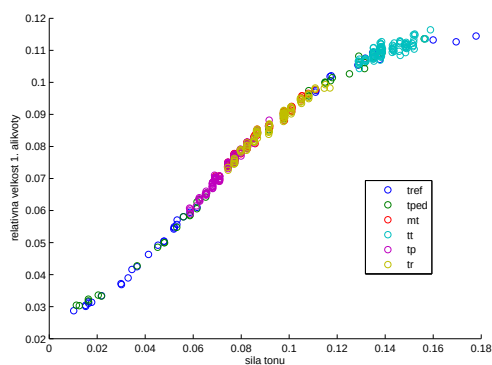
Pri hre na elektrický klavír skúsenejší interpret cíti, že nástroj ho „neposlúcha“. Kvalita tónu nezodpovedá zvyčajnému štandardu mechanických klavírov. Pojmy ako mäkký, tvrdý či guľatý tón pri hre na elektrický klavír strácajú zmysel.

Pri počúvaní takejto hry skúsení poslucháči nebudú za žiadnych okolností spokojní s interpretáciou. Hre chýba „život“, hraná skladba stráca potrebný esprit, celkovo klesá úroveň estetického zážitku. Pokúsime sa nájsť príčinu tohto rozdielu.

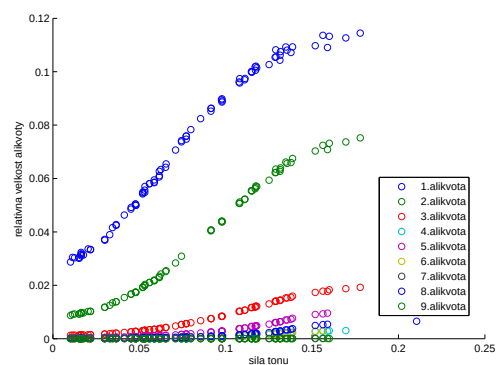
5.2 Analýza tónu elektrického klavíra

Tabuľka 5 zobrazuje prehľad skúmaných tónových skupín. Nahrávky sa realizovali na klavíri Casio Privia X-100 pomocou line-in pripojenia. Na prvý pohľad si môžeme všimnúť, že všetky skupiny vyznačujú značne nižšiu úroveň sily tónu v porovnaní s mechanickým klavírom, čo však je zapríčinené rozdielnym spôsobom získania nahrávok a rôzneho nastavenia nahrávaného signálu. Tento rozdiel nás však nemusí zaujímať, podstatné budú totiž pomery alikvót.

Obrázok 30 jasne ukazuje, že pri hre na elektrickom klavíri nezáleží na spôsobe hrania, dokonca ani na použití pravého pedála. Môžeme totiž vidieť zreteľnú závislosť



Obr. 30: Závislosť veľkosti prvých alikvót od sily tónu vykreslená pre všetky tóny na elektrickom klavíri.



Obr. 31: Závislosť veľkosti jednotlivých alikvót od sily tónu vykreslená pre referenčné tóny na elektrickom klavíri.

Korelácia sily tónu a i -tej alikvóty	$i=1$	2	3	4	5	6	7	8	9
mt	0,989	0,997	0,996	0,993	0,990	0,987	0,985	0,984	0,982
tt	0,822	0,947	0,973	0,977	0,985	0,987	0,988	0,988	0,988
tp	0,991	0,992	0,988	0,982	0,980	0,977	0,974	0,974	0,972
tr	0,952	0,993	0,991	0,987	0,981	0,977	0,974	0,971	0,967
tped	0,924	0,898	0,844	0,845	0,893	0,875	0,882	0,928	0,920
tref	0,988	0,989	0,976	0,957	0,937	0,917	0,899	0,882	0,867

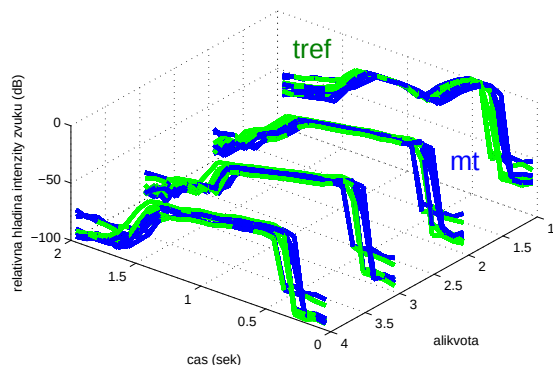
Tabuľka 6: Prehľad korelácií medzi jednotlivými alikvótami a silou tónu na elektrickom klavíri.

relatívnej veľkosti prvej alikvóty od sily tónu, pričom táto závislosť je rovnaká pre všetky skupiny tónov. Analogické výsledky prinášajú aj závislosti ostatných alikvót od sily. Na Obrázku 31 vidíme jasné závislosti jednotlivých alikvót od sily tónu pre referenčné tóny. Závislosti potvrdzuje aj Tabuľka 6. Vidíme, že hodnoty korelácií medzi silou tónu a veľkosťami alikvót boli blízke jednej, čo je aj oproti koreláciám pri mechanickom klavíri výrazný rozdiel.

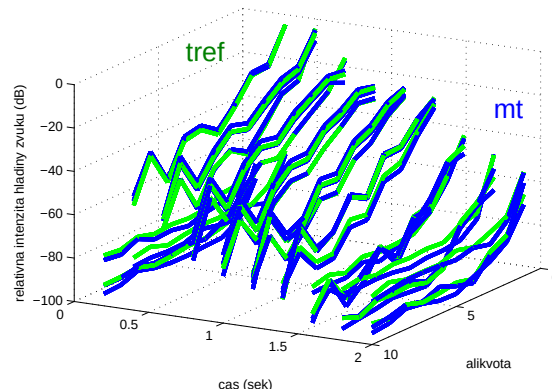
Pri analýze jednotlivých fáz trvania tónu sme dospeli k analogickým výsledkom ako pri skúmaní jednotlivých fáz na mechanickom klavíri, t.j. ani vo fáze úderu, ani vo fáze znenia tónu sa neobjavili výrazné rozdiely medzi rôznymi skupinami tónov.

Porovnanie časového vývoja veľkostí alikvót neprinieslo podľa očakávania nové vý-

sledky. Môžeme opäť vidieť väčšiu závislosť medzi vývojom jednotlivých alikvót na rozdiel od vývoja alikvót pri mechanickom klavíri (Obrázok 32 a 33).



Obr. 32: Porovnanie časového vývoja prvých štyroch alikvót pre mäkké a referenčné tóny (porovnanie náhodnej vzorky 7 tónov z každej skupiny).



Obr. 33: Porovnanie časového vývoja pomeru jednotlivých alikvót pre mäkké a referenčné tóny (porovnanie náhodnej vzorky 7 tónov z každej skupiny).

5.3 Porovnanie výsledkov analýzy pre mechanický a elektrický klavír

Zistené rozdiely medzi elektrickým a mechanickým klavírom zhrnieme do nasledovných bodov:

- Na zmenu spektra tónu hranom na elektrickom klavíri nemá vplyv ani používanie pravého pedálu, na rozdiel od mechanického klavíra.
- Medzi silou úderu a jeho spektrom sa javí funkčná závislosť. Je však oveľa zreteľnejšia ako v prípade mechanického klavíra.
- Vzájomné pomery alikvót v rámci tónu elektrického klavíra sú korelované a aj časový vývoj jednotlivých alikvót sa javí byť podobný a determinovaný. Tento „tónový determinizmus“ môže zapríčiniť umelé znenie tónu.

Ukázalo sa, že pri hre na elektrický klavír nemá použitie pravého pedálu na kvalitu tónu vplyv, čo poukazuje na výrazné ochudobnenie možností elektrického klavíra v porovnaní s mechanickým klavírom.

Záver

Cieľom našej práce bolo pokúsiť sa nazrieť na tón a jeho kvalitu z iného uhla pohľadu pomocou matematiky. Jednalo sa však o metodologicky pomerne zložitý problém, najmä z dôvodu, že naša práca spája dve oblasti ľudskej činnosti, ktoré sa málokedy prelínajú. Preto sme v celej práci dôrazne dbali na čo najpresnejšie, najvýstižnejšie a najjednoduchšie objasnenie potrebných pojmov, vzťahov a postupov tak, aby boli zrozumiteľné pre čitateľa pochádzajúceho z matematického i hudobného prostredia.

Pomocou FFT sme analyzovali celkovo 15 skupín tónov hraných rôznym spôsobom na mechanickom, elektrickom klavíri (spolu vyše 2000 tónov) a hľadali sme rozdiely medzi jednotlivými vzorkami. Získané poznatky sme zhrnuli v niekoľkých tvrdeniach. Na základe týchto tvrdení sa môžeme domnievať, že klaviristi nedokážu ovplyvniť kvalitu tónu pomocou rôzneho spôsobu hry. Dokážu ovplyvniť iba silu tónu. Objavili sme však veľkú súvislosť medzi silou tónu a jeho farbou. Tieto pojmy sa zdajú byť oveľa viac prepojené, ako sme pôvodne predpokladali. Potvrdilo sa, že estetické subjektívne vnímanie hudby je zložitý proces a ako taký je veľmi ťažko uchopiteľný pomocou matematiky. S interpretáciou získaných výsledkov treba však byť opatrný, nakoľko sme uvažovali iba prvých 9 alikvót, zanedbávali sme všetky vyššie alikvóty ako aj rôzne šumy sprevádzajúce a možno dopĺňajúce klavírny tón (zvuk spôsobený dopadom prstu na kláves, zvuk pri stlačení pedála a pod.), predpokladali sme dostatočnú odolnosť nášho modelu voči chybám, napr. skreslenia, rozptyly a pod. Je veľmi dôležité si tiež uvedomiť, že sme pracovali iba so základným matematickým aparátom využívajúcim iba spektrálnu analýzu. Nie je vylúčené, že iné matematické metódy by mohli zachytiť a popísať rozdiely medzi rôznymi skupinami tónov, ktoré frekvenčná analýza objaviť nedokázala.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Adam, P.: *Úvod do metód spracovania zvuku v súčasnom multimediálnom prostredí*, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava 2006
- [2] Alm, J.F., Walker, J.S.: *Time-Frequency Analysis of Musical Instruments*, Siam review, Vol. 44, No. 3, s. 457-476
- [3] Berger, R., Riečan, B.: *Matematika a hudba*, zbierka seminárov, VEDA (vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied), Bratislava 1997
- [4] Cepko, M.: *Náuka o hudobných formách*, materiály k predmetu Hudobné formy, Konzervatórium v Bratislave, 2011
- [5] Černušák, G.: *Dejiny evropské hudby*, Panton, Praha-Bratislava, 1964
- [6] Filzmoser, P.: *A Multivariate Outlier Detection in Exploration Geochemistry*, Computers and Geosciences, 31, s. 579-587
- [7] Ford, R.D.: *Transportation Noise Reference Book*, Butterworths, Londýn, 1987
- [8] Harnum, J.: *Basic Music Theory: How to read, write and understand music*, Sol-UT Press, 2009
- [9] Harris, F.J.: *On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform*, Proceedings of the IEEF, Vol.66 No.1, január 1978 , s. 51-83
- [10] Chioye, L.: *Choose The Right FFT Window Function When Evaluating Precision ADCs*, dostupné na internete: <http://electronicdesign.com/datasheet/choose-right-fft-window-function-when-evaluating-precision-adcs-pdf-download>
- [11] Keith, T.: *Allegro Piano Works*, dostupné na internete: <http://www.allegropianoworks.com/>
- [12] Olson, H.F.: *Elements of Accoustical Engineering*, D. Van Nostrand Company, Inc., 1957
- [13] Rencher, A.C.: *Methods of Multivariate Analysis*, Second Edition, John Wiley and Sons, 2003

- [14] Roberts, S.: *The Discrete Fourier Transform*, Lecture 7, Michaelmas Term 2003
- [15] Ševčovič, D.: *Prednášky z matematickej analýzy*, FMFI UK, 2011
- [16] *How products are made, Volume 3*, dostupné na internete:
<http://www.madehow.com/Volume-3/Piano.html>

Príloha

fft1.m

Kód pre výpočet diskretných Fourierových transformácií tónu pomocou FFT-metódy. Program vráti vektor relatívnych hodnôt prvých 9 alikvót reprezentujúcich farbu tónu, hodnotu sily tónu a vykreslí spektrum a spektrogram tónu. Používateľ si môže zvoliť použitie Hammingovho okna.

```
function[farba sila] = fft1(zvuk,vyska,ham)

[w,fs] = wavread(zvuk);
sila    = max(abs(w));
s       = length(w);
h       = 2^(nextpow2(s));

for j=1:h
    if j>s    wn(j)=0;
    else     wn(j)=w(j);
    end
end

if ham==1
    okno = hamming(h);
    for j=1:(h)
        wn(j)=wn(j)*okno(j);
    end
end

y = rekurzia(wn)/h;
fr = (0:h-1)*(fs/h);
ee = y.*conj(y)*4;

figure;
plot(fr(1:floor(h/2)),ee(1:floor(h/2)));
xlabel('Frekvencia (Hz)')
ylabel('Energia')
```

```
title('{\bf FFT}')
title(zvuk)

for i=1:10
    z=round(vyska*h/(2.2*fs));
    a=round((i*vyska*h/fs)-z);
    b=round((i*vyska*h/fs)+z);
    farba(i)=max(ee(a:1:b));
end

farba=farba/farba(1);

figure;
[~,F,T,P] = spectrogram(w(:,end),200,200/2,256,fs);
m = max(max(P))
I = (-10*log10(P/m));
h = surf(T,F/1000,I.*-1);
set(h, 'edgecolor','none');

function[f]=rekurzia(x)
    d = length(x);
    if d == 1
        f = x;
    else
        g = d/2;
        f_1 = rekurzia(x(1:2:(d-1)));
        f_2 = rekurzia(x(2:2:d));
        k = exp(-2 * pi * i / d) .^ (0:g-1);
        z = k .* f_2;
        f = [ f_1 + z , f_1 - z ];
    end
end
```