

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ÚROKOVÁ MIERA S OHRANIČENÝM OBOROM HODNÔT

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ÚROKOVÁ MIERA S OHRANIČENÝM OBOROM HODNÔT

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: RNDr. Stehlíková Beáta, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Jana Trajová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Úroková miera s ohraničeným oborom hodnôt
Cieľ: Oboznámiť sa s modelom krátkodobej úrokovej miery s ohraničeným oborom hodnôt (analýza priebehu úrokových mier, cien dlhopisov, výnosových kriviek). Porovnanie odvodených vlastností s vlastnosťami reálnych dát.

Vedúci: RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 25.01.2013

Dátum schválenia: 04.02.2013
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

PodĎakovanie Chcela by som poďakovať mojej školiteľke, RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD., za jej odbornú pomoc s vypracovaním diplomovej práce, ale i za jej ľudský prístup, ochotu, čas a rady, ktorými ma zahŕňala počas písania diplomovej práce. Ďakujem aj mojej rodine a priateľom za ich podporu počas štúdia.

Čestné prehlásenie Prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne,
s využitím uvedenej literatúry a na základe konzultácií s vedúcou diplomovej práce.

Bratislava 28. apríl 2014

.....

Abstrakt

TRAJOVÁ, Jana: **Úroková miera s ohraňčeným oborom hodnôt** [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2014, 52 s.

Cieľom práce je predstaviť menej známy model úrokovej miery s ohraňčeným oborom hodnôt a jeho vlastnosti. Súčasťou práce je odvodenie hustoty úrokovej miery pre vybraný model, odhad parametrov modelu metódou maximálnej vierohodnosti a ich aplikácia na reálnych dátach. Získané odhady parametrov použijeme na výpočet cien dlhopisov pomocou aproximačnej formuly.

Kľúčové slová: • dlhopis • výnosová krivka • model úrokovej miery s ohraňčeným oborom hodnôt • aproximácia

Abstract

TRAJOVÁ, Jana: **Bounded short rate model** [Master's Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2014, 52 p.

The aim of our thesis is to present little known one-factor bounded short rate model and its properties. One part of our thesis is to derivate density of short rate for choosen model, to estimate parameters of model using maximum likelihood method and their application to real data. We use estimated parameters to compute bond prices via the Taylor expansion.

Keywords: • bond • yield curve • bounded short rate model • approximation

Obsah

Úvod	9
1 Úvod do modelovania úrokových mier	11
1.1 Dlhopisy a okamžitá úroková miera	11
1.2 Stochastický kalkulus	13
1.3 Jednofaktorové short rate modely	14
1.4 Parciálna diferenciálna rovnica pre cenu dlhopisu	16
2 Modely úrokovej miery s ohraničeným oborom hodnôt	18
2.1 Model úrokovej miery s ohraničeným oborom hodnôt I.	18
2.2 Model úrokovej miery s ohraničeným oborom hodnôt II.	22
2.3 Ohraničený model úrokovej miery II. s konštantnými parametrami . . .	23
2.3.1 Odvodenie hustoty okamžitej úrokovej miery r v modeli s ohraničeným oborom hodnôt	25
3 Odhad parametrov modelu okamžitej úrokovej miery s ohraničeným oborom hodnôt	27
3.1 Metóda maximálnej vierohodnosti	27
3.2 Metóda maximálnej vierohodnosti na odhad parametrov modelu ohraničenej úrokovej miery	28
3.2.1 Aplikácia na reálnych dátach	33
4 Aproximácia ceny dlhopisu v ohraničenom modeli úrokovej miery	36
4.1 Výpočet ceny dlhopisu pomocou Taylorovho rozvoja	36
4.2 Výpočet logaritmu ceny dlhopisu pomocou Taylorovho rozvoja	38

4.3	Numerické výsledky pre model úrokovej miery s ohraničeným oborom hodnôt II.	39
4.3.1	Numerické výsledky získané aproximáciou ceny dlhopisu	39
4.3.2	Monte Carlo metóda	41
4.3.3	Porovnanie metódy Monte Carlo a aproximácie cien dlhopisov Taylorovým polynómom	45
	Záver	49
	Literatúra	50
A.1	Príloha	52

Úvod

Finančný svet bez dlhopisov, opcií, swapov, capov, floorov či iných finančných nástrojov. V dnešných časoch ťažko predstaviteľné. Pre ich korektné oceňovanie je ale nutné zachytiť dynamiku úrokovej miery. Úroková miera však nie je deterministická veličina, práve naopak jej vývoj je náhodný, stochastický. Vďaka pánovi Vašíčkovi a jeho pionierskej práci z roku 1977 svet dnes pozná modely úrokových mier popisujúce časovú štruktúru úrokových mier prostredníctvom stochastických diferenciálnych rovníc. Okrem kultovo známych modelov ako Vašíčkov model, Black-Karasinského model, Cox-Ingersoll-Rossov model či Hull-Whiteov model, existujú i menej známe modely. A práve jeden takýto si predstavíme v tejto práci. Model okamžitej úrokovej miery s ohraňčeným oborom hodnôt.

Práca je rozdelená na štyri časti. V prvej kapitole nahliadneme do problematiky modelovania úrokových mier a to predstavením základných pilierov - pojmov ako dlhopis a úroková miera a stochastického kalkulu.

Druhá kapitola je venovaná samotným modelom okamžitej úrokovej miery s ohraňčeným oborom hodnôt, vlastnostiam a odvodeniu hustoty úrokovej miery pre daný model.

Metóda maximálnej vierohodnosti na odhad parametrov modelu je náplň tretej kapitoly. Odvodíme pre explicitné vzťahy pre odhady a aplikujeme ich na reálne dáta.

V poslednej štvrtej kapitole navrhujeme aproximačnú formulu pre cenu dlhopisu, pretože explicitný vzorec neexistuje. Použijeme ju na výpočet aproximácie cien dlhopisov pre parametre získané v predchádzajúcej kapitole a výsledky porovnáme s Monte Carlo simuláciami.

Ak čitateľ hľadá motiváciu k štúdiu modelov okamžitých úrokových mier, tak nasledujúci rozhovor medzi **QUANTom**, expertom na analýzu kvantitatívnych dát a **TRADERom**, obchodníkom o tom, či majú short rate modely budúcnosť, je tou motiváciou.

Q: Do you think short rate models still have a future?

T: Who knows. The HJM developments did not threaten seriously the short-rate world but rather incorporated it. However, the recent growth of market models certainly thre-

atens the short-rate model survival.

Q: What can be impressing is the calibrating capacity: The LIBOR market model can calibrate a lot of swaptions and caps at the same time, at least in priciple...

T: Sure, but that is not necessarily a uniform advantage. Remember what I call the üncertainty principle of modelling", the more a model fits, the less it explains.

Q: What do you mean exactly?

T: I mean, if a model recovers a huge number of financial observables by construction, it cannot be able to explain well what is happening, exactly because it äatsëeverything you feed it on. On the contrary, a model that cannot calibrate a huge number of prices will signal problems. Then, I can watch the data and decide whether the problem is with the model limitations or there are some pathologies with the market structures given as input. So the poor model warns me, while a too rich mode is always happy and does not help me that much to sense danger.

Q: This looks like a point of short rate models.

T: Yes.

Kapitola 1

Úvod do modelovania úrokových mier

Ak chceme nahliadnuť do problematiky modelovania úrokových mier, je namieste zadefinovať základné pojmy a vysloviť definície či lemy, na ktorých sú modely úrokových mier postavené. Táto prvá kapitola patrí dlhopisom, úrokovej miere, výnosovým krivkám a základnej vete stochastického kalkulu, Itôvej leme.

1.1 Dlhopisy a okamžitá úroková miera

Dlhopis (*bond*) je cenný papier, s ktorým je spojené právo majiteľa požadovať splácanie dlžnej sumy v menovitej hodnote a vyplácanie výnosov z nej k určitému dátumu a povinnosť osoby oprávnenej vydávať dlhopisy tieto záväzky splniť [11].

Cena dlhopisu $P(t, T)$ závisí od okamžitého času t , doby splatnosti, maturity, T a taktiež od úrokovej miery:

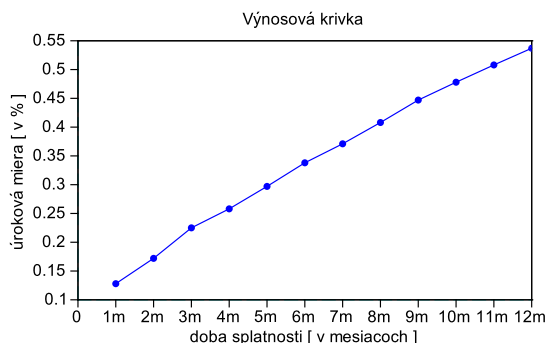
$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}. \quad (1.1)$$

Dlhopisy sa delia na *bezkupónové* (*zero coupon bonds*), spravidla s kratšou maturitou (do 1 roka) a *kupónové* (*coupon bonds*), spravidla s dlhšou maturitou (niekoľko rokov). Najjednoduchším derivátom úrokovej miery je diskontný dlhopis (bezkupónový dlhopis s nominálnou hodnotou 1).

Časová štruktúra úrokových mier $R(t, T)$ vyjadruje závislosť úrokovej miery od maturity dlhopisu. Je odvodená zo vzťahu (1.1):

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}. \quad (1.2)$$

Zvyčajne je rastúca, pretože na dlhšiu dobu požičiavame s vyšším úrokom, pri očakávaní poklesu úrokových mier je klesajúca. Nemusí však mať nutne monotónny charakter. Niekedy sa nazýva aj *výnosová krivka*. Príklad výnosovej krivky je na obrázku 1.1.



Obr. 1.1: Časová štruktúra úrokových mier z dňa 1.10.2013, Euribor. Zdroj: [10].

Euribor (Euro Interbank Offered Rate) je medzibanková referenčná sadzba v rámci hospodárskej a menovej únie, ktorá bola zavedená v roku 1999. Je to sadzba, za ktorú sú euro termínové vklady ponúkané jednou bankou inej banke na medzibankovom trhu [11].

Okamžitá úroková miera (short rate) r_t v čase t je úroková miera $R(t, T)$ s okamžitou splatnosťou $T = t$, t.j.

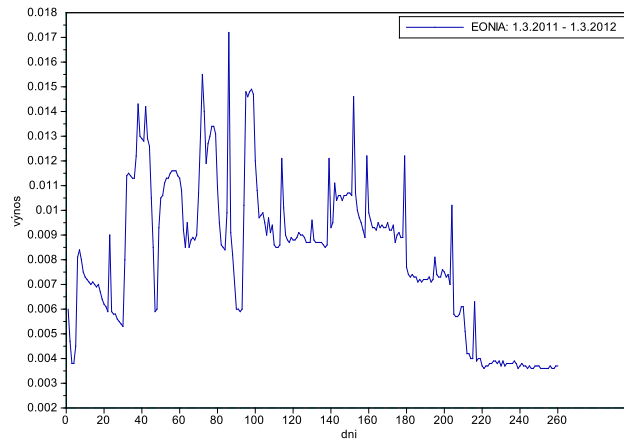
$$r_t = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T) \quad (1.3)$$

Predstavuje začiatok krivky časovej štruktúry úrokových mier: $r_t = R(t, t)$. Dosadením definície (1.2) do (1.3) dostaneme predpis

$$r(t) = -\lim_{T \rightarrow t} \frac{\ln P(t, T)}{T - t} = -\frac{\partial \ln P(t, t)}{\partial T}. \quad (1.4)$$

Na finančnom trhu táto veličina priamo neexistuje, časovo najbližšie má k nej **EONIA** (The Euro OverNight Index Average). EONIA je referenčná sadzba pre skutočne realizované jednodňové obchody v euro. Vypočíta sa ako vážený priemer všetkých jednodňových nezabezpečených úverových transakcií, ktoré sa uskutočnili na medzibankovom trhu krajín eurozóny, medzi dvoma prispievajúcimi bankami (panel banks). [11]

Prakticky sa však okamžitá úroková miera nahrádza jednomesačnou alebo trojmesačnou úrokovou mierou, keďže jednodňové obchody môžu byť ovplyvnené špekuláciami a príslušná úroková miera má veľmi veľkú volatilitu.



Obr. 1.2: Priebeh úrokovej sadzby EONIA za obdobie 1.3.2011 - 1.3.2012, zdroj [10]

1.2 Stochastický kalkulus

Matematicky zahrnúť náhodnosť pri modelovaní úrokových mier nám umožňujú stochastické procesy. V tejto časti si povieme, čo je to stochastický proces, aké má vlastnosti a jeho špeciálne prípady. Táto kapitola je spracovaná podľa [6].

Definícia 1.2.1. *Stochastický proces* je t -parametrický systém náhodných premenných $X(t), t \in I$, kde I je interval alebo diskrétna množina indexov.

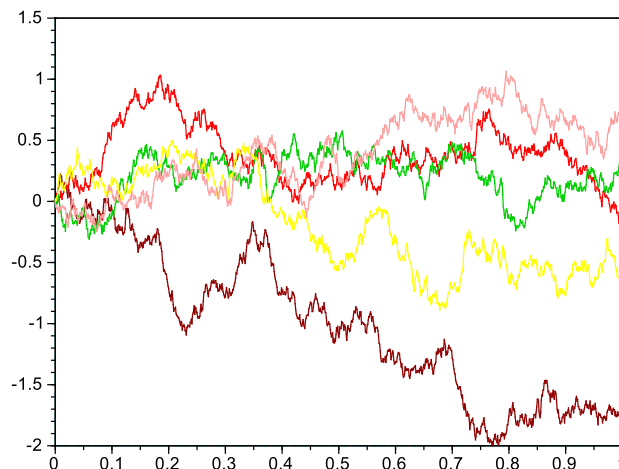
Definícia 1.2.2. *Brownov pohyb* $X(t), t \geq 0$ je t -parametrický systém náhodných veličín, pričom

1. všetky prírastky $X(t + \Delta) - X(t)$ majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu\Delta$ a disperziou $\sigma^2\Delta$,
2. pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ sú prírastky $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa bodu 1.,
3. s pravdepodobnosťou 1 sú trajektórie tohto procesu spojité a $X(0) = 0$.

Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ nazývame Wienerov proces.

Obrázok 1.3 znázorňuje niekoľko realizácií Wienerovho procesu.

Základná veta stochastického kalkulu, *Itóova lema*, umožňuje zostaviť stochastickú



Obr. 1.3: Niekoľko simulácií Wienerovho procesu

diferenciálnu rovnicu popisujúcu vývoj ľubovoľnej hladkej funkcie $f(x, t)$, ak x je riešením zadanej stochastickej diferenciálnej rovnice.

Lema 1.2.3. Itóova lema. *Nech $f(x, t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice*

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw,$$

kde w je Wienerov proces. Potom prvý defenciál funkcie f je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt,$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t)\frac{\partial f}{\partial x}dw.$$

1.3 Jednofaktorové short rate modely

Short rate modely, resp. modely okamžitej úrokovej miery, popisujú vývoj krátkodobej úrokovej miery prostredníctvom stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dr = \mu(t, r)dt + \sigma(t, r)dw. \quad (1.5)$$

Drift (trend) $\mu(t, r)$ vo vývoji úrokovej miery určuje deterministickú časť procesu dr , charakter náhodných fluktuácií úrokovej miery v okolí deterministickej zložky

ovplyvňuje volatilita $\sigma(t, r)$.

Často sa drift volí v tvare

$$\mu(t, r) = \kappa(\theta - r),$$

kde κ, θ sú kladné konštanty. Parameter θ sa nazýva limitnou úrokovou mierou a κ je rýchlosť návratu k limitnej úrokovej miere. Podstatou takto zvoleného driftu je, že stredná hodnota úrokovej miery je priťahovaná k rovnovážnej hodnote θ , pričom sila priťahovania je daná parametrom κ . Procesy s takýmto driftom sa označujú aj mean reversion procesy [6].

Teraz si predstavíme najznámejšie short rate modely:

- **Vašíčkov model (1977)**

$$dr = \kappa[\theta - r]dt + \sigma dw$$

- **Cox - Ingersoll - Rosso model (CIR) (1985)**

$$dr = \kappa[\theta - r]dt + \sigma\sqrt{r}dw$$

- **Hull - Whiteov model (HW) (1990)**

$$dr = \kappa(t)[\theta(t) - r]dt + \sigma(t)dw$$

- **Black - Karasinského model (BK) (1991)**

$$d \ln r = \kappa(t)[\theta - \ln r]dt + \sigma(t)dw,$$

kde κ, θ sú kladné konštanty a $\theta(\cdot), \kappa(\cdot), \sigma(\cdot)$ sú nezáporné funkcie.

Prehľad týchto modelov s ich základnými charakteristikami, čo sú odpovede na otázky:

- Pripúšťa model záporné úrokové miery?
- Z akého pravdepodobnostného rozdelenia je r ?
- Je model mean-reverting?
- Existuje explicitné vyjadrenie pre cenu dlhopisu?

je uvedený v tabuľke 1.1 a spracovaný podľa [3].

Model	$r \geq 0$	Rozdelenie r	Mean - reversion	Existencia expl.ceny dlhopisu
Vašíček	nie	normálne	áno	áno
CIR	áno	necentrálny χ^2	áno	áno
HW	nie	normálne	áno	áno
BK	áno	lognormálne	nie	nie

Tabuľka 1.1: Vlastnosti vybraných modelov úrokových mier

1.4 Parciálna diferenciálna rovnica pre cenu dlhopisu

V modeloch okamžitej úrokovej miery je cena dlhopisu P riešením parciálnej diferenciálnej rovnice. V jednofaktorových modeloch máme závislosť $P = P(r, t, T)$. Hodnota dlhopisu teda závisí od hodnoty okamžitej úrokovej miery r , času t a času do expirácie T . Čas do expirácie chápeme ako parameter, čas t a úroková miera r predstavujú časovú a priestorovú premennú.

Pri odvodzovaní ceny dlhopisu použijeme rovnaký postup ako v [6]. Budeme uvažovať diskontný dlhopis a predpokladať, že vývoj okamžitej úrokovej miery je daný stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw.$$

Podľa Itoovej lemy potom platí:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial P}{\partial r} dw = \mu_B(t, r)dt + \sigma_B(t, r)dw,$$

kde $\mu_B(t, r)$ označuje drift a $\sigma_B(t, r)$ volatilitu ceny dlhopisu. Zostrojíme portfólio pozostávajúce z dvoch typov dlhopisov:

- 1 dlhopis s maturitou T_1 ,
- Δ dlhopisov s maturitou T_2 .

Hodnota π tohto portfólia je: $\pi = 1 \cdot P(r, t, T_1) + \Delta \cdot P(r, t, T_2)$. Zmena hodnoty portfólia:

$$\begin{aligned} d\pi &= dP(r, t, T_1) + \Delta dP(r, t, T_2) \\ &= \mu_B(t, r, T_1)dt + \sigma_B(t, r, T_1)dw + \Delta\mu_B(t, r, T_2)dt + \Delta\sigma_B(t, r, T_2)dw \\ &= [\mu_B(t, r, T_1) + \Delta\mu_B(t, r, T_2)]dt + [\sigma_B(t, r, T_1) + \Delta\sigma_B(t, r, T_2)]dw. \end{aligned}$$

Elimináciou náhodnosti v portfóliu, tj. $\Delta = -\frac{\sigma_B(t,r,T_1)}{\sigma_B(t,r,T_2)}$, dostávame bezrizikové portfólio len s deterministickou zložkou a vylúčením možnosti arbitráže platí, že výnos takéhoto portfólia sa rovná okamžitej úrokovej miere: $d\pi = r\pi dt$, čiže:

$$r(P(r,t,T_1) - \frac{\sigma_B(t,r,T_1)}{\sigma_B(t,r,T_2)}P(r,t,T_2))dt = \left(\mu_B(t,r,T_1) - \frac{\sigma_B(t,r,T_1)}{\sigma_B(t,r,T_1)}\mu_B(t,r,T_2) \right) dt,$$

preto musí platiť

$$r(P(r,t,T_1) - \frac{\sigma_B(t,r,T_1)}{\sigma_B(t,r,T_2)}P(r,t,T_2)) = \mu_B(t,r,T_1) - \frac{\sigma_B(t,r,T_1)}{\sigma_B(t,r,T_1)}\mu_B(t,r,T_2),$$

z čoho vyplýva, že musí byť splnená rovnosť:

$$\frac{-rP(r,t,T_1) + \mu_B(t,r,T_1)}{\sigma_B(t,r,T_1)} = \frac{-rP(r,t,T_2) + \mu_B(t,r,T_2)}{\sigma_B(t,r,T_2)}. \quad (1.6)$$

Maturity T_1 a T_2 sú ľubovoľné, a preto výraz (1.6) nezávisí od maturity dlhopisu, tj. existuje taká funkcia $\lambda(r,t)$, že pre ľubovoľnú maturitu T platí:

$$\lambda(r,t) = \frac{-rP(r,t,T) + \mu_B(t,r,T)}{\sigma_B(t,r,T)}. \quad (1.7)$$

Funkcia λ sa nazýva trhovú cenu rizika a vyjadruje očakávaný nárast výnosu dlhopisu na jednotku rizika.

Dosadením funkcií μ_B a σ_B do (1.7) dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu $P(r,t,T)$

$$rP = \frac{\partial P}{\partial t} + (\mu(r,t) - \lambda(r,t)\sigma(r,t))\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2(r,t)}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}, \quad (1.8)$$

ktorá musí byť splnená pre každé $t \in [0,T)$ a každé $r > 0$. V čase splatnosti T je hodnota dlhopisu rovná jednotke bez ohľadu na aktuálnu hodnotu okamžitej úrokovej miery, a preto $P(r,T,T) = 1$ pre každé $r > 0$.

Kapitola 2

Modely úrokovej miery s ohraňčeným oborom hodnôt

Zadeňinovať vlastnosti korektného modelu úrokovej miery nie je jednoznačná úloha. Ak by sme za postačujúce vlastnosti zvolili nezápornosť, ohraňčenosť a tendenciu návratu k rovnovážnej hodnote, jedným z kandidátov je menej známy **jednofaktorový model úrokovej miery s ohraňčeným oborom hodnôt**. Už samotný názov implikuje, že hodnoty úrokovej miery pochádzajú z nejakého intervalu (a, b) . Význam dolnej nezápornej hranice napr. zamedzenie arbitrážnym špekuláciám pri úrokoch, opodstatnenie hornej hranice, úroková miera nepresiahne určitú hornú hranicu, má dosah napríklad na stabilitu hodnoty peňazí. Táto kapitola predstaví 2 modely ohraňčenej úrokovej miery a ich základné charakteristiky.

2.1 Model úrokovej miery s ohraňčeným oborom hodnôt I.

Schlogl a Sommer publikovali v roku 1994 článok *On short rate processes and their implications for term structure movements*, v ktorom sa zaoberali modelmi úrokových mier a ich vlastnosťami. Prvý jednofaktorový model úrokovej miery s ohraňčeným oborom hodnôt, s ktorým sa oboznámime v našej diplomovej práci, je popísaný v tomto článku [9]. Je daný nasledovnou stochastickou diferenciálnou rovnicou (SDR) v

rizikovo - neutrálnej miere¹:

$$dr_t = \left[\frac{c(a+b-2r)}{b-a} - \frac{(b-r_t)(r_t-a)}{b-a} \theta(t) \right] dt + \sigma \frac{(b-r_t)(r_t-a)}{b-a} dW_t, \quad (2.1)$$

kde a je dolná hranica, b horná hranica, pričom $b > a$, $c > 0$, $\sigma > 0$, θ je trhovú cenu rizika.

Pre proces v reálnej miere potom platí

$$dr_t = \left[\frac{c(a+b-2r_t)}{b-a} \right] dt + \sigma \frac{(b-r_t)(r_t-a)}{b-a} dw_t. \quad (2.2)$$

Pre zmenu miery z rizikovo - neutrálnej do reálnej miery sme využili fakt, že funkcia volatility je pri oboch mierach rovnaká a pre drift platí

$$[\text{rizikovo - neutrálny drift}] = [\text{reálny drift}] - [\text{trhovú cenu rizika} \lambda][\text{volatilita}].$$

Viac o mierach a zmenách miery nájde čitateľ v [5]. Konštruovať model v reálnej úrokovej miere umožňuje demonštrovať niektoré vlastnosti úrokových mier, napr. **mean-reversion**. Mean - reversion vlastnosť sa do modelu zahrnie voľbou driftu v tvare

$$\mu(r, t) = \kappa(\theta - r)dt, \quad (2.3)$$

kde κ , θ sú konštanty. Úpravou nášho modelu (2.2) na tvar mean - reversion, t.j.

$$dr_t = \kappa(\theta - r)dt + \sigma \frac{(b-r_t)(r_t-a)}{b-a} dw_t,$$

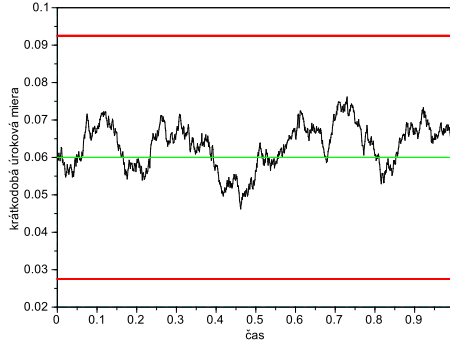
dostávame

$$dr_t = \frac{2c}{b-a} \left(\frac{a+b}{2} - r \right) dt + \sigma \frac{(b-r_t)(r_t-a)}{b-a} dw_t. \quad (2.4)$$

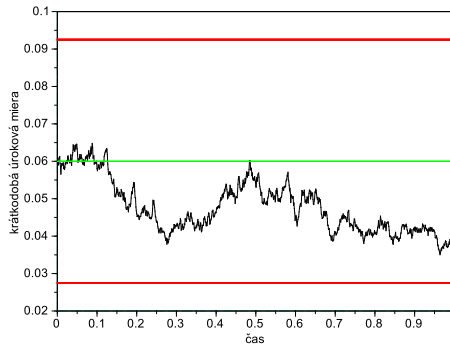
Zo vzťahu (2.3) vidíme, že limitná úroková miera $\theta = \frac{a+b}{2}$ a rýchlosť prítahovania daná parametrom $\kappa = \frac{2c}{b-a}$.

Všimnime si, že hodnota konštanty c podmieňuje rýchlosť reverzie κ . Čím vyššia hodnota c , tým rýchlejšie sa stredná hodnota úrokovej miery približuje k limitnej hodnote. Demonštruje to Obr. 2.1, kde hodnota $c = 0.45$ a Obr. 2.2 s $c = 0.0045$, ostatné parametre sú rovnaké: hranice $a = 0.0275$, $b = 0.0925$, počiatočná hodnota $r_0 = 0.06$, volatilita $\sigma = 2$. Zelenou čiarou je znázornená limitná hodnota 0.06 a červenými čiarami sú znázornené hranice a, b .

¹rizikovo - neutrálna miera bude mať značenie dW , reálna miera dw



Obr. 2.1: Vývoj úrokovej miery v ohraničenom short-rate modeli, $c = 0.45$



Obr. 2.2: Vývoj úrokovej miery v ohraničenom short-rate modeli, $c = 0.0045$

Ak počiatočná hodnota úrokovej miery r_0 je z intervalu (a, b) , tak celý priebeh úrokovej miery leží v tomto intervale (a, b) . Intuitívne to vidíme z tvaru volatility danej predpisom $\sigma(t, r) = \sigma \frac{(b-r_t)(r_t-a)}{b-a}$. Ak úroková miera nadobudne hraničnú hodnotu a resp. b , volatilita je nulová. Drift je pritom v prípade dosiahnutia dolnej hranice kladný $(\frac{2c}{b-a}(\frac{a+b}{2} - a) = c > 0)$ a v prípade dosiahnutia hornej hranice záporný $(\frac{2c}{b-a}(\frac{a+b}{2} - b) = -c < 0)$. Presný dôkaz ohraničenosti úrokovej miery danej SDR (2.1) nájde čitateľ v [9].

Realizácie procesov na obrázkoch boli získané Eulerovou - Maruyamovou diskretizáciou procesu (2.4). V prípade, že volatilita je vysoká, je výhodnejšie použiť nasledovnú transformáciu úrokovej miery r , ktorá je navrhnutá v [9]:

$$x = f(t, r) = \ln \frac{r - a}{b - r}. \quad (2.5)$$

Funkcia $f(t, r)$ je hladká funkcia a r je riešením (2.4), potom podľa *Itóovej lemy* platí:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(r, t) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2(r, t) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) dt + \sigma(r, t) \frac{\partial f}{\partial r} dw.$$

Pripomeňme si, že pre drift $\mu(r, t)$ a volatilitu $\sigma(r, t)$ platí

$$\begin{aligned} \mu(r, t) &= \frac{2c}{b-a} \left(\frac{a+b}{2} - r \right), \\ \sigma(r, t) &= \sigma \frac{(b-r)(r-a)}{b-a}. \end{aligned}$$

Ďalej vypočítame parciálne derivácie funkcie f danej vzťahom (2.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{b-r}{r-a} \frac{1(b-r) - (r-a)(-1)}{(b-r)^2} = \frac{b-a}{(r-a)(b-r)}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= (b-a) \frac{-(-2r+a+b)}{(r-a)^2(b-r)^2}. \end{aligned}$$

Teda proces x je daný stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dx = \left(\frac{c(a+b-2r)}{(r-a)(b-r)} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{a+b-2r}{b-a} \right) dt + \sigma dw, \quad (2.6)$$

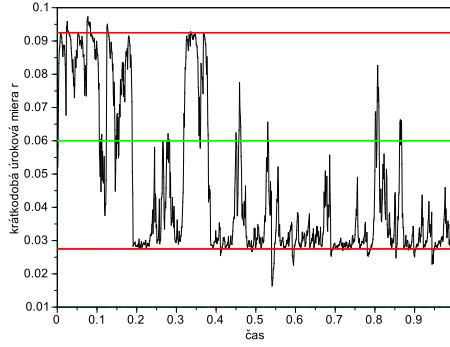
pričom

$$r = \frac{be^x + a}{1 + e^x}. \quad (2.7)$$

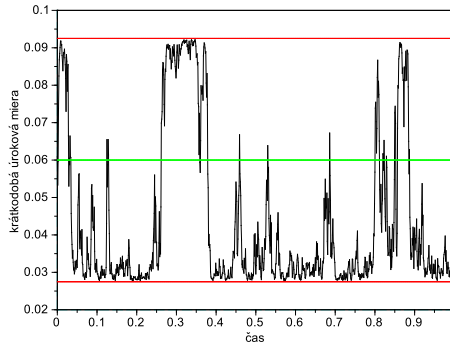
Ak teraz diskretizujeme stochastickú diferenciálnu rovnicu (2.6) a hodnoty procesu r vypočítame zo vzťahu (2.7), máme zaručené, že budú z intervalu (a, b) .

Porovnajme priebeh úrokovej miery získaný Euler - Maruyamovou diskretizáciou modelu (2.4), Obr. 2.3, s priebehom úrokovej miery po aplikácii transformácie a diskretizáciou rovnice (2.6) na Obr. 2.4. Použitá hodnota volatility $\sigma = 20$ a ostatné parametre $a = 0.0275$, $b = 0.0925$, počiatočná hodnota $r_0 = 0.06$, $c = 0.45$.

Vidíme, že pri vysokej volatilitě môže úroková miera definovaná v (2.4) v dôsledku priamej diskretizácie nadobudnúť hodnoty mimo intervalu (a, b) . Ak však použijeme transformáciu (2.5), priebeh úrokovej miery ostáva v intervale (a, b) .



Obr. 2.3: Simulovaný vývoj úrokovej miery, diskretizácia rovnice (2.4)



Obr. 2.4: Simulovaný vývoj úrokovej miery, transformácia (2.5) a diskretizácia rovnice (2.6)

2.2 Model úrokovej miery s ohraničeným oborom hodnôt II.

V roku 2010 Alexander Antonov a Michael Spector v článku *Analytical approximations for short rate models* [1] pracovali s nasledovným modelom okamžitej úrokovej miery s ohraničeným oborom hodnôt:

$$r_t = f(t, x) = \frac{U(t)e^{\beta(t)\sum_i x_i} + L(t)\alpha(t)}{e^{\beta(t)\sum_i x_i} + \alpha(t)}, \quad (2.8)$$

pričom $L(t)$ je dolná a $U(t)$ horná hranica a $X = \sum_i x_i$. X je F -faktorový mean-reverting proces spĺňajúci:

$$dx_i(t) = (\phi_i(t) - a_i(t)x_i(t))dt + \lambda_i(t)dw(t),$$

pre všetky $i = 1, \dots, F$.

Aby zabezpečili platnosť nasledovných vlastností úrokovej miery, a to $f(t, 0) = R(t)$

a $f'(t, 0) = 1$, pričom $R(t)$ je forwardová úroková miera, funkcie $\alpha(t)$ a $\beta(t)$ definovali ako

$$\alpha(t) = \frac{U(t) - R(t)}{R(t) - L(t)},$$

$$\beta(t) = \frac{U(t) - L(t)}{(R(t) - L(t))(U(t) - R(t))}.$$

Podrobnejšie sa budeme venovať špeciálnemu prípadu jednofaktorovému modelu úrokovej miery (2.8) s pevne stanovenými hranicami L, U a konštantnými funkciami α, β . Bez dodatočných požiadaviek na hodnotu procesu pri nulovom súčte faktorov x_i tak dostávame dobre definovaný stochastický proces, ktorý môžeme zobrať ako model pre okamžitú úrokovú mieru.

2.3 Ohraničený model úrokovej miery II. s konštantnými parametrami

V tejto časti budeme uvažovať špeciálny jednofaktorový prípad modelu úrokovej miery s ohraničeným oborom hodnôt II a to

$$r = \frac{Ue^{\beta X} + L\alpha}{e^{\beta X} + \alpha}, \quad (2.9)$$

kde α, β, U sú kladné konštanty, L je nezáporná konštanta a $L < U$. Proces $X = \beta^{-1} \ln \frac{\alpha(r-L)}{(U-r)}$ je typu mean-reversion a je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dX = (\phi - aX)dt + \lambda dw. \quad (2.10)$$

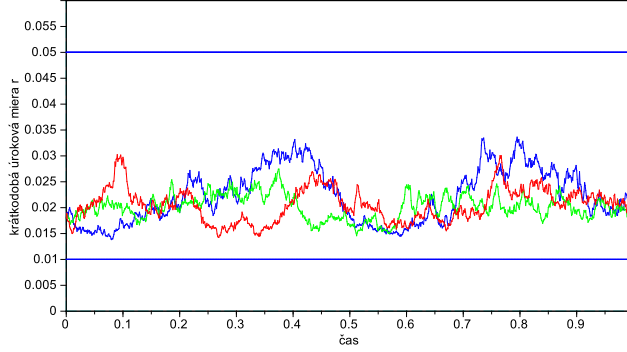
Na obrázku 2.5 je niekoľko simulácií procesu (2.9). Ukážeme, že úroková miera r definovaná vzťahom (2.9) je z intervalu (L, U) a pomocou Itóovej lemy odvodíme stochastickú diferenciálnu rovnicu pre r .

Pri dôkaze ohraničenosti úrokovej miery vychádzame z predpokladu, že $L < U$ a postupnými úpravami dostávame:

$$L < U$$

$$Le^{\beta X} + L\alpha < Ue^{\beta X} + L\alpha$$

$$L < \frac{Ue^{\beta X} + L\alpha}{e^{\beta X} + \alpha} = r. \quad (2.11)$$



Obr. 2.5: Simulácie úrokovej miery r s parametrami $U = 0.05, L = 0.01, \alpha = 1, \beta = 1$.

Obdobne postupuje pri hornej hranici U

$$\begin{aligned}
 U &> L \\
 Ue^{\beta X} + U\alpha &> Ue^{\beta X} + L\alpha \\
 U &> \frac{Ue^{\beta X} + L\alpha}{e^{\beta X} + \alpha} = r.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Z nerovností (2.11) a (2.12) už vyplýva ohraňenie úrokovej miery (2.9), t.j.

$$U > \frac{Ue^{\beta X} + L\alpha}{e^{\beta X} + \alpha} = r > L.$$

Na odvodenie stochastickej diferenciálnej rovnice pre r použijeme Itóovu lemu.

Parciálne rovnice funkcie r sú nasledovné

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial t} &= 0, \\
 \frac{\partial f}{\partial X} &= \frac{\beta U e^{\beta X} (e^{\beta X} + \alpha) - (U e^{\beta X} + L \alpha) (\beta e^{\beta X})}{(e^{\beta X} + \alpha)^2} = \frac{e^{\beta X} \alpha \beta (U - L)}{(e^{\beta X} + \alpha)^2}, \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} &= \alpha \beta (U - L) \frac{\beta e^{\beta X} (e^{\beta X} + \alpha)^2 - e^{\beta X} \alpha (e^{\beta X} + \alpha) \beta e^{\beta X}}{(e^{\beta X} + \alpha)^4} = \alpha \beta^2 (U - L) \frac{e^{\beta X} (\alpha - e^{\beta X})}{(e^{\beta X} + \alpha)^3}.
 \end{aligned}$$

Drift a volatilita sú dané vzťahom (2.10). Proces r spĺňa nasledovnú stochastickú diferenciálnu rovnicu:

$$\begin{aligned}
 dr &= \left((\phi - aX) \frac{e^{\beta X} \alpha \beta (U - L)}{(e^{\beta X} + \alpha)^2} + \frac{1}{2} \lambda^2 \alpha \beta^2 (U - L) \frac{e^{\beta X} (\alpha - e^{\beta X})}{(e^{\beta X} + \alpha)^3} \right) dt + \\
 &+ \left(\lambda \frac{e^{\beta X} \alpha \beta (U - L)}{(e^{\beta X} + \alpha)^2} \right) dw \\
 &= \left(\left(\phi - a\beta^{-1} \ln \frac{\alpha(r - L)}{U - r} \right) \beta \frac{(r - L)(U - r)}{U - L} + \frac{1}{2} \lambda^2 \beta^2 \frac{(r - L)(U - r)(U + L - 2r)}{(U - L)^2} \right) dt + \\
 &+ \left(\lambda \beta \frac{(U - r)(r - L)}{U - L} \right) dw.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.3.1 Odvodenie hustoty okamžitej úrokovej miery r v modeli s ohraňčeným oborom hodnôt

Uvažujme nasledovný model úrokovej miery (2.9)

$$r = \frac{Ue^{\beta X} + L\alpha}{e^{\beta X} + \alpha}.$$

Stochastická diferenciálna rovnica pre mean - reversion proces X je daná predpisom (2.10) a ak poznáme hodnotu x_0 v čase 0, tak hodnota procesu X v čase t je z normálneho rozdelenia so strednou hodnotou μ a disperziou σ^2 , kde

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\phi}{a}(1 - e^{-at}) + x_0 e^{-at}, \\ \sigma^2 &= \frac{\lambda^2}{2a}(1 - e^{-2at}).\end{aligned}$$

Hustotu pre dané x_0 a t označme

$$f_X = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Pre limitné rozdelenie procesu X platí $X \sim N(\frac{\phi}{a}, \frac{\lambda^2}{2a})$, pričom limitná hustota procesu X je $f_X = \frac{\sqrt{2a}}{\lambda\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\frac{\phi}{a})^2}{\frac{\lambda^2}{a}}}$ [6].

Teraz odvodíme vzťah pre hustotu procesu r . Označme distribučnú funkciu X ako $F_X(x)$ a distribučnú funkciu r ako $F_r(\bar{r})$. Potom platí:

$$\begin{aligned}F_r(\bar{r}) &= P[r \leq \bar{r}] = P\left[\frac{Ue^{\beta X} + L\alpha}{e^{\beta X} + \alpha} \leq \bar{r}\right] = P\left[X \leq \beta^{-1} \ln \frac{\alpha(\bar{r} - L)}{(U - \bar{r})}\right] \\ &= F_X\left(\beta^{-1} \ln \frac{\alpha(\bar{r} - L)}{(U - \bar{r})}\right)\end{aligned}$$

Využijeme vzťah medzi hustotou a distribučnou funkciou premennej:

$$f_r(\bar{r}) = \frac{dF_r}{d\bar{r}} = \frac{dF_X\left(\beta^{-1} \ln \frac{\alpha(\bar{r} - L)}{(U - \bar{r})}\right)}{dx} \frac{dX}{d\bar{r}} = f_X\left(\beta^{-1} \ln \frac{\alpha(\bar{r} - L)}{(U - \bar{r})}\right) \frac{dX}{d\bar{r}},$$

kde $X = \beta^{-1} \ln \frac{\alpha(r-L)}{U-r}$. Hustota f_r je teda daná predpisom

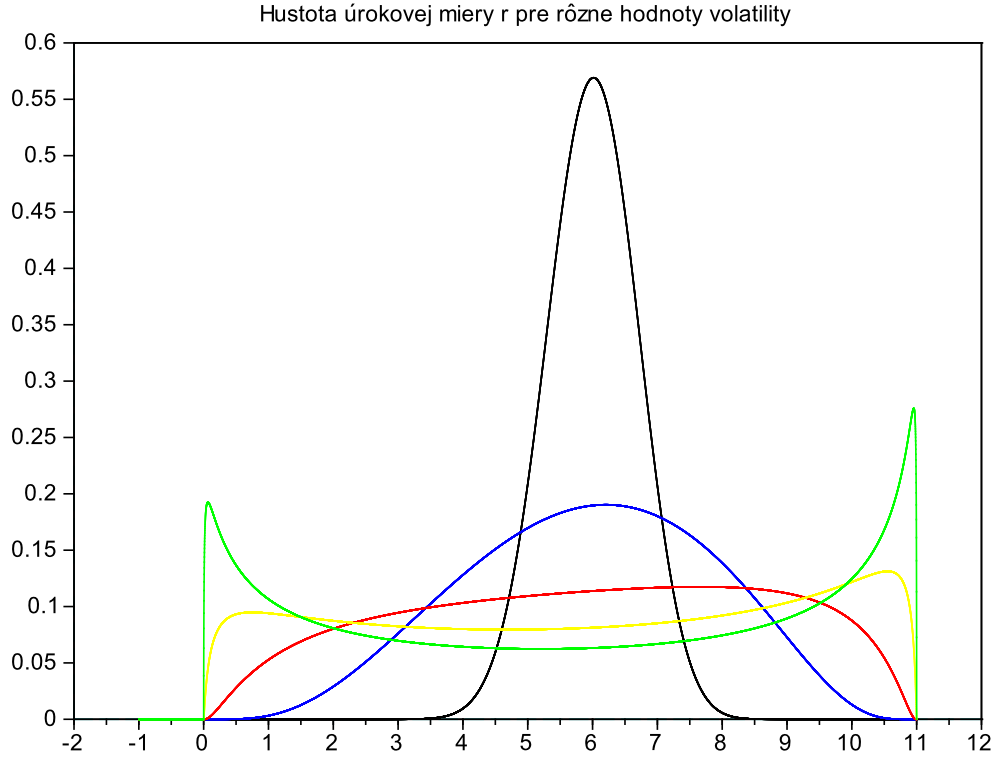
$$f_r(\bar{r}) = f_X\left(\beta^{-1} \ln \frac{\alpha(\bar{r} - L)}{(U - \bar{r})}\right) \beta^{-1} \frac{U - L}{(\bar{r} - L)(U - \bar{r})},$$

pričom μ a σ^2 dosadzované do f_X závisia od toho, akú hustotu počítame (podmienenu alebo limitnú).

Limitná hustota úrokovej miery je

$$f_r(\bar{r}) = \frac{\sqrt{2a}}{\lambda\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\beta^{-1} \ln \frac{\alpha(\bar{r}-L)}{(U-\bar{r})} - \frac{\phi}{a})^2}{\frac{\lambda^2}{a}}} \beta^{-1} \frac{(U-L)}{(\bar{r}-L)(U-\bar{r})}. \quad (2.14)$$

Obrázok 2.6 zobrazuje limitné hustoty úrokovej miery pre rôzne hodnoty volatility λ . Hustota úrokovej miery s najnižšou volatilitou ($\lambda = 1$) je vyznačená čiernou farbou, modrá farba hustoty je pre volatilitu $\lambda = 3$, červená pre $\lambda = 5$, žltá pre $\lambda = 7$ a úroková miera s najvyššou volatilitou $\lambda = 9$ je znázornená zelenou farbou. Vidíme, že pri menších hodnotách volatility ($\lambda = 1$, resp. $\lambda = 3$) je tvar hustoty r podobný normálnemu rozdeleniu. Vysoká volatilita spôsobuje, že úroková miera často nadobúda hodnoty blízke hraničným hodnotám U a L , z čoho pramení bimodálny tvar hustoty úrokovej miery ($\lambda = 7$, resp. $\lambda = 9$).



Obr. 2.6: Hustota úrokovej miery r pre rôzne volatility λ , ostatné parametre modelu úrokovej miery sú $U = 0.11, L = 0, \alpha = 1, \beta = 0.36, a = 1, \phi = 0.5$

Kapitola 3

Odhad parametrov modelu okamžitej úrokovej miery s ohraňčeným oborom hodnôt

3.1 Metóda maximálnej vierohodnosti

Nech $X = (X_1, \dots, X_n)$ je náhodný výber zo spojitého rozdelenia s hustotou $f(x|\theta)$, kde $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T$ je vektor neznámych parametrov a $x_1, \dots, x_n$ sú realizácie náhodného výberu.

Funkciu vierohodnosti značíme $L(x|\theta)$ (z angl. likelihood) a definovaná je nasledovne:

$$L(x|\theta) = L(x_1, \dots, x_n|\theta_1, \dots, \theta_m) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

Princíp metódy maximálnej vierohodnosti tkvie v tom, že odhadujeme hodnotu vektora $\hat{\theta}$ pomocou vektora nameraných údajov $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ako riešenie maximalizačnej úlohy

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

Častokrát sa pri výpočtoch používa logaritmická transformácia L , t.j.

$$l = \ln L(x|\theta) = \ln \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

Táto transformácia zachováva hodnotu maxima, pretože logaritmus je monotónna rastúca funkcia.

Ak $X = (X_1, \dots, X_n)$ nie je náhodný výber a pre realizácie výberu $x_1, \dots, x_n$ platí, že hodnota x_i je podmienená predchádzajúcou hodnotou a Δ je dĺžka časového intervalu medzi dvoma hodnotami, tak funkcia vierohodnosti je definovaná ako

$$l = \ln \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta | x_{i-1}),$$

kde $f(x_i, \theta | x_{i-1})$ je podmienená hustota rozdelenia x_i pri danej hodnote x_{i-1} [7].

3.2 Metóda maximálnej vierohodnosti na odhad parametrov modelu ohraničenej úrokovej miery

Metódu maximálnej vierohodnosti použijeme na výpočet parametrov modelu úrokovej miery z kapitoly 2.3. Pripomeňme si, že má tvar:

$$r = \frac{Ue^{\beta X} + L\alpha}{e^{\beta X} + \alpha}, \quad (3.1)$$

kde X je mean - reversion proces daný SDR $dX = (\phi - aX)dt + \lambda dW$.

Majme časový rad $r_1, \dots, r_n$ známych hodnôt úrokovej miery (3.1) a Δt časový krok medzi dvoma realizáciami úrokovej miery. Potom podmienená hustota $f(r_t | r_{t-1})$ je

$$f(r_t | r_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\beta^{-1} \ln \frac{\alpha(r_t-L)}{(U-r_t)} - \mu)^2}{\sigma^2}} \beta^{-1} \frac{(U-L)}{(r_t-L)(U-r_t)}, \quad (3.2)$$

pričom

$$\mu = \frac{\phi}{a}(1 - e^{-a\Delta t}) + r_{t-1}e^{-a\Delta t} \quad (3.3)$$

$$\sigma^2 = \frac{\lambda^2}{2a}(1 - e^{-2a\Delta t}) \quad (3.4)$$

Funkciu vierohodnosti možno vyjadriť ako

$$L(r|\alpha, \beta, \phi, \lambda, a) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\beta^{-1} \ln \frac{\alpha(r_t-L)}{(U-r_t)} - \mu)^2}{\sigma^2}} \beta^{-1} \frac{(U-L)}{(r_t-L)(U-r_t)}.$$

Použitím logaritmickej funkcie vierohodnosti a využitím vzťahu, že logaritmus súčinu

sa rovná súčtu logaritmov dostávame:

$$\begin{aligned}
l = \ln L(r|\alpha, \beta, \phi, \lambda, a) &= \sum_{t=1}^n \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\beta^{-1} \ln \frac{\alpha(r_t-L)}{U-r_t} - \mu)^2}{\sigma^2}} \beta^{-1} \frac{(U-L)}{(r_t-L)(U-r_t)} \right) \\
&= \sum_{t=1}^n \left[\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} - \frac{1}{2\sigma^2} \left(\beta^{-1} \ln \frac{\alpha(r_t-L)}{U-r_t} - \mu \right)^2 \right] + \sum_{t=1}^n \ln \frac{1}{\beta} \frac{U-L}{(r_t-L)(U-r_t)} \\
&= -\frac{n}{2} \ln \left(\frac{\pi\lambda^2}{a} (1 - e^{-2a\Delta t}) \right) - \\
&\quad - \frac{1}{\frac{\lambda^2}{a} (1 - e^{-2a\Delta t})} \sum_{t=1}^n \left[\beta^{-1} \ln \frac{\alpha(r_t-L)}{U-r_t} - \left(\frac{\phi}{a} (1 - e^{-a\Delta t}) + r_{t-1} e^{-a\Delta t} \right) \right]^2 + \\
&\quad + \sum_{t=1}^n \ln \left[\frac{1}{\beta} \frac{(U-L)}{(r_t-L)(U-r_t)} \right] \rightarrow \max_{\alpha, \beta, a, \phi, \lambda}
\end{aligned}$$

Predpokladajme, že konštanty α, β sú dané. Kvôli zjednodušeniu výpočtu odhadov parametrov a, ϕ, λ zavedieme substitúciu

$$\theta = \frac{\phi}{a}. \quad (3.5)$$

Potom strednú hodnotu μ a disperziu σ^2 v (3.3) resp. (3.4) môžeme zapísať ako

$$\mu = \theta(1-A) + Ar_0 \quad (3.6)$$

$$\sigma^2 = B^2 = \frac{\lambda^2}{2a} (1 - e^{-2a\Delta t}) \quad (3.7)$$

Logaritmická vierohodnostná funkcia je nasledovná:

$$\begin{aligned}
\ln L(r|\theta, A, B^2) &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi B^2) - \frac{1}{2B^2} \sum_{t=1}^n \left[\beta^{-1} \ln \frac{\alpha(r_t-L)}{U-r_t} - \theta(1-A) - Ar_{t-1} \right]^2 + \\
&\quad + \sum_{t=1}^n \ln \left[\frac{1}{\beta} \frac{(U-L)}{(r_t-L)(U-r_t)} \right] \rightarrow \max_{\theta, A, B^2}
\end{aligned} \quad (3.8)$$

Optimálne hodnoty parametrov θ, A, B^2 sú teda riešením parciálnych vierohodnostných rovníc:

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = -\frac{1}{B^2} \sum_{t=1}^n \left[\beta^{-1} \ln \frac{\alpha(r_t-L)}{U-r_t} - \theta(1-A) - Ar_{t-1} \right] (-1+A) = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial l}{\partial B^2} = -\frac{n}{2B^2} + \frac{1}{2B^4} \sum_{t=1}^n \left[\beta^{-1} \ln \frac{\alpha(r_t-L)}{U-r_t} - \theta(1-A) - Ar_{t-1} \right]^2 = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial l}{\partial A} = -\frac{1}{B^2} \sum_{t=1}^n \left[\beta^{-1} \ln \frac{\alpha(r_t-L)}{U-r_t} - \theta(1-A) - Ar_{t-1} \right] (\theta - r_{t-1}) = 0. \quad (3.11)$$

Z rovnice (3.9) získavame vzťah pre odhad parametra θ a riešenie rovnice (3.10) je odhad parametra B^2 :

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{t=1}^n \beta^{-1} \ln \frac{\alpha(r_t - L)}{U - r_t} - \hat{A}r_{t-1}}{n(1 - \hat{A})}, \quad (3.12)$$

$$\hat{B}^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[\beta^{-1} \ln \frac{\alpha(r_t - L)}{U - r_t} - \hat{\theta}(1 - \hat{A}) - \hat{A}r_{t-1} \right]^2. \quad (3.13)$$

Pre odhad parametra A platí podľa rovnice (3.11) nasledovná rovnosť:

$$\sum_{t=1}^n \left[\beta^{-1} \ln \frac{\alpha(r_t - L)}{U - r_t} - \hat{\theta}(1 - \hat{A}) - \hat{A}r_{t-1} \right] (\hat{\theta} - r_{t-1}) = 0. \quad (3.14)$$

$\hat{A}$, odhad parametra A , vyjadríme len v závislosti od hodnôt r_t a r_{t-1} , čo nám následne umožní explicitne vypočítať odhad $\hat{\theta}$ a pomocou $\hat{A}, \hat{\theta}$ i hodnotu parametra $\hat{B}^2$.

Pre lepšiu čitateľnosť výpočtu zavedme substitúcie:

$$X_t = \beta^{-1} \frac{\alpha(r_t - L)}{U - r_t}, \quad X_{t-1} = \beta^{-1} \frac{\alpha(r_{t-1} - L)}{U - r_{t-1}}, \quad \bar{X}_t = \sum_{t=1}^n \frac{X_t}{n}, \quad \bar{X}_{t-1} = \sum_{t=1}^n \frac{X_{t-1}}{n}.$$

V prípade premenných X_t a X_{t-1} index t označuje čas, hodnoty $\bar{X}_t, \bar{X}_{t-1}$ sú konštanty zodpovedajúce aritmetickému priemeru hodnôt X_t a indexy t , resp. $t - 1$ označujú z akých hodnôt sa počíta priemer.

Využitím vyššie uvedenej substitúcie a dosadením $\hat{\theta}$ z rovnice (3.12) do odhadu parametra A , rovnica (3.14), dostávame

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}_t - \hat{A}\bar{X}_{t-1})(\hat{\theta} - X_{t-1}), \\ 0 &= \hat{\theta} \left[\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}_t) - \hat{A} \sum_{t=1}^n (X_{t-1} - \bar{X}_{t-1}) \right] - \sum_{t=1}^n \left[(X_t - \bar{X}_t - \hat{A}(X_{t-1} - \bar{X}_{t-1}))X_{t-1} \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Výraz v prvej hranatej zátvorke rovnosti (3.15) je nula, pretože $\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}_t) = 0$. Teda

$$\hat{A} = \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}_t)X_{t-1}}{\sum_{t=1}^n (X_{t-1} - \bar{X}_{t-1})X_{t-1}}. \quad (3.16)$$

Pri výpočte odhadov parametrov θ, A, B^2 sme predpokladali, že zvyšné parametre α, β sú známe konštanty. Teraz zistíme, či odhadnuté parametre θ, A, B^2 a hodnota

vierohodnostnej funkcie (3.8) závisia, resp. nezávisia od hodnoty α, β .

Označme $Y_t = \ln \frac{\alpha(r_t - L)}{U - r_t}$, t. j. hodnota Y_t je X_t zodpovedajúca $\beta = 1$, platí $X_t = \beta^{-1}Y_t$. Teraz pomocou Y_t , premennej nezávislej od β , vyjadríme odhady $\hat{A}, \hat{\theta}, \hat{B}^2$.

Odhad parametra A je

$$\hat{A} = \frac{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y}_t) Y_{t-1}}{\sum_{t=1}^n (Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1}) Y_{t-1}}. \quad (3.17)$$

Pre odhady $\hat{\theta}$ a $\hat{B}^2$ platí

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \frac{1}{1 - \hat{A}} \left(\bar{X}_t - \hat{A} \bar{X}_{t-1} \right) = \frac{1}{1 - \hat{A}} \left(\beta^{-1} \bar{Y}_t - \hat{A} \beta^{-1} \bar{Y}_{t-1} \right) = \\ &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{(1 - \hat{A})} \left(\bar{Y}_t - \hat{A} \bar{Y}_{t-1} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \hat{B}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(X_t - \hat{\theta}(1 - \hat{A}) - \hat{A} X_{t-1} \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(X_t - \bar{X}_t - \hat{A} (X_{t-1} - \bar{X}_{t-1}) \right)^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\beta^{-1} Y_t - \beta^{-1} \bar{Y}_t - \hat{A} (\beta^{-1} Y_{t-1} - \beta^{-1} \bar{Y}_{t-1}) \right)^2 = \\ &= \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(Y_t - \bar{Y}_t - \hat{A} (Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1}) \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Z odhadov parametrov A, B^2, θ prostredníctvom Y_t môžeme usúdiť, že odhad $\hat{A}$ nezávisí od hodnoty parametra β , kým odhady $\hat{\theta}$ i $\hat{B}^2$ od parametra β závisia a táto závislosť je daná vzťahmi (3.18) a (3.19). Ak dosadíme odhady $\hat{\theta}, \hat{A}, \hat{B}^2$ v tvare (3.18), (3.17), (3.19) do logaritmickej vierohodnostnej funkcie (3.8), dostaneme po úprave

$$l = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} + \sum_{t=1}^n \ln \frac{U - L}{(r_t - L)(U - r_t)} - \frac{n}{2} \ln \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(Y_t - \bar{Y}_t - \hat{A} (Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1}) \right)^2 \right].$$

Premenná Y_t, Y_{t-1} a tiež odhad $\hat{A}$ nie sú funkciou β a teda i hodnota vierohodnostnej funkcie nezávisí od parametra β .

Teraz vyšetríme vplyv parametra α . Použijeme nasledovnú substitúciu:

$$Y_t = \ln \frac{\alpha(r_t - L)}{U - r_t} = \ln \alpha + \ln \frac{r_t - L}{U - r_t} = \ln \alpha + Z_t. \quad (3.20)$$

Potom:

$$Y_{t-1} = \ln \alpha + Z_{t-1}, \quad (3.21)$$

$$\bar{Y}_t = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln \frac{\alpha(r_t - L)}{U - r_t} = \ln \alpha + \bar{Z}_t, \quad (3.22)$$

$$\bar{Y}_{t-1} = \ln \alpha + \bar{Z}_{t-1}. \quad (3.23)$$

Dosadením (3.20), (3.21), (3.22), (3.23) do odhadov parametrov A (3.17), B^2 (3.19), θ (3.18) dostaneme tieto vzťahy

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= \frac{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y}_t) Y_{t-1}}{\sum_{t=1}^n (Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1}) Y_{t-1}} = \frac{\sum_{t=1}^n (\ln \alpha + Z_t - \ln \alpha - \bar{Z}_t)(\ln \alpha + Z_{t-1})}{\sum_{t=1}^n (\ln \alpha + Z_{t-1} - \ln \alpha - \bar{Z}_{t-1})(\ln \alpha + Z_{t-1})} = \\
&= \frac{\ln \alpha \sum_{t=1}^n (Z_t - \bar{Z}_t) + \sum_{t=1}^n (Z_t - \bar{Z}_t) Z_{t-1}}{\ln \alpha \sum_{t=1}^n (Z_{t-1} - \bar{Z}_{t-1}) + \sum_{t=1}^n (Z_{t-1} - \bar{Z}_{t-1}) Z_{t-1}} = \\
&= \frac{\sum_{t=1}^n (Z_t - \bar{Z}_t) Z_{t-1}}{\sum_{t=1}^n (Z_{t-1} - \bar{Z}_{t-1}) Z_{t-1}}, \\
\hat{B}^2 &= \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(Y_t - \bar{Y}_t - \hat{A}(Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1}) \right)^2 \right] = \\
&= \frac{1}{n\beta^2} \sum_{t=1}^n \left(\ln \alpha + Z_t - \ln \alpha - \bar{Z}_t - \hat{A}(\ln \alpha + Z_{t-1} - \ln \alpha - \bar{Z}_{t-1}) \right)^2 = \\
&= \frac{1}{n\beta^2} \sum_{t=1}^n \left(Z_t - \bar{Z}_t - \hat{A}(Z_{t-1} - \bar{Z}_{t-1}) \right)^2, \\
\hat{\theta} &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{(1 - \hat{A})} \left(\bar{Y}_t - \hat{A}\bar{Y}_{t-1} \right) \right] = \frac{1}{\beta} \frac{1}{(1 - \hat{A})} (\ln \alpha + \bar{Z}_t - \hat{A}(\ln \alpha + \bar{Z}_{t-1})) = \\
&= \frac{\ln \alpha}{\beta} + \frac{\bar{Z}_t - \hat{A}\bar{Z}_{t-1}}{\beta(1 - \hat{A})}.
\end{aligned}$$

Premenné $Z_t, \bar{Z}_t, Z_{t-1}, \bar{Z}_{t-1}$ neobsahujú parameter α . Ukázali sme teda nezávislosť odhadov parametrov A, B^2 od hodnoty parametra α . Hodnota vierohodnotnej funkcie (3.8),

$$l = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} + \sum_{t=1}^n \ln \frac{U - L}{(r_t - L)(U - r_t)} - \frac{n}{2} \ln \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(Z_t - \bar{Z}_t - \hat{A}(Z_{t-1} - \bar{Z}_{t-1}) \right)^2 \right],$$

tiež nezávisí od parametra α .

Zistili sme teda, že v modeli úrokovej miery s ohraničeným oborom hodnôt (3.1) stačí uvažovať $\alpha = 1, \beta = 1$ (resp. iné zvolené konštanty). Odhad parametrov a, ϕ, λ^2 metódou maximálnej vierohodnosti modelu môžeme explicitne vyjadriť pomocou nasledovných vzťahov

$$\begin{aligned}
\hat{a} &= -\frac{\ln \hat{A}}{\Delta t}, \\
\hat{\phi} &= \hat{\theta} \hat{a}, \\
\hat{\lambda}^2 &= \frac{2\hat{a}\hat{B}^2}{1 - e^{-2\hat{a}\Delta t}},
\end{aligned}$$

pričom odhady parametrov $\hat{A}, \hat{B}^2, \hat{\theta}$ spĺňajú (3.17), (3.13), (3.12).

3.2.1 Aplikácia na reálnych dátach

Uvažujme proces (3.1) s parametrami $\alpha = 1, \beta = 1$. Náš model teda vyzerá takto:

$$r = \frac{Ue^X + L}{e^X + 1},$$

pričom mean - reverting proces X spĺňa stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dX = (\phi - aX)dt + \lambda dW.$$

Parametre a, ϕ, λ^2 najskôr odhadneme z hodnôt EONIA za obdobie 2.1.2007 - 30.12.2011 a potom aj pre 3 - mesačný EURIBOR v období 2.1.2013 - 28.6.2013.

Odhad parametrov z úrokovej sadzby EONIA

Vývoj úrokovej miery EONIA počas daného obdobia je zaznamenaný na Obr. 3.1 vľavo. Vidíme, že na začiatku sledovaného obdobia sa krátkodobá úroková miera držala stabilne okolo hodnoty 0.04, koncom roku 2008 sa prepadla na hodnotu 0.005 a až do konca obdobia nadobúda nízke hodnoty, od 0.005 do 0.015. Takýto priebeh implikuje vysokú volatilitu úrokovej miery. Podľa vývoja EONIE určíme hornú hranicu $U = 0.05$ a dolnú hranicu $L = 0$.

Odhadnuté parametre ohraničenej úrokovej miery metódou maximálnej vierohodnosti sú v tabuľke 3.1.

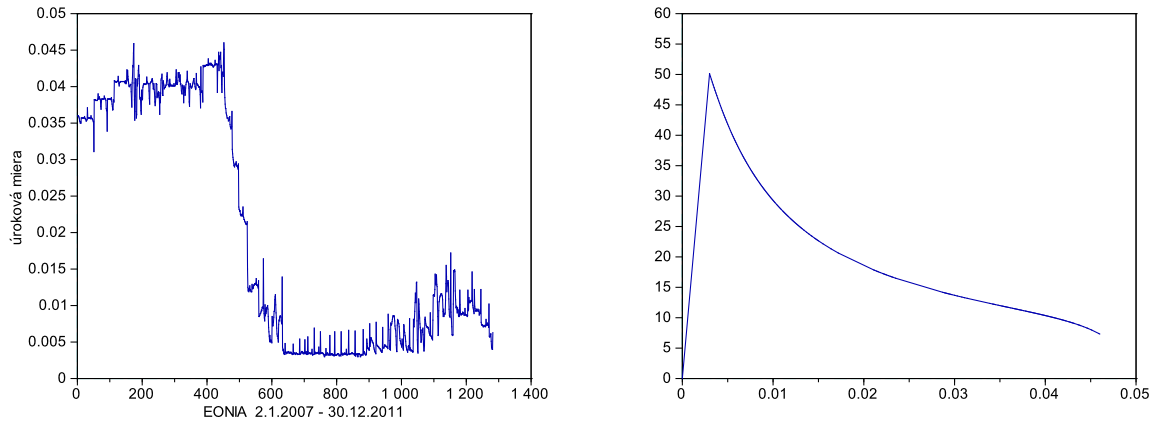
$\hat{a}$	$\hat{\lambda}^2$	$\hat{\phi}$
2.70389	16.50245	-2.31657

Tabuľka 3.1: Odhadnuté parametre z modelu ohraničenej úrokovej miery pre EONIA

Pre úrokovú sadzbu EONIA zobrazíme jej hustotu pomocou odvodeného vzťahu (2.14), tvar hustoty je na Obr.3.1 vpravo.

Odhad parametrov z 3 - mesačného EURIBORU

Dáta, z ktorých odhadnuté parametre a, ϕ, λ^2 , použijeme v ďalšej časti našej práce sú hodnoty 3 - mesačného EURIBORu z obdobia 2.1.2013 - 28.6.2013. Vzhľadom na



Obr. 3.1: Vľavo - vývoj úrokovej sadzby EONIA za obdobie 2.1.2007 - 30.12.2011, vpravo - hustota úrokovej miery pri odhadnutých parametroch a, ϕ, λ^2 a daných hraniciach $L = 0, U = 0.05$

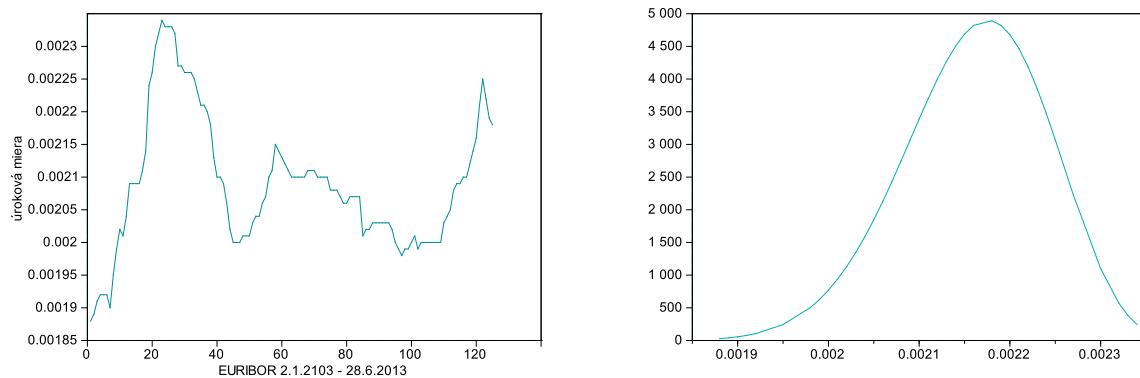
nadobudnuté hodnoty EURIBORu, určíme hornú hranicu $U = 0.0025$ a dolnú hranicu $L = 0.0015$. Metódou maximálnej vierohodnosti dostaneme hodnoty parametrov, ktoré sú uvedené v tabuľke 3.2.

$\hat{a}$	$\hat{\lambda}^2$	$\hat{\phi}$
8.4192503	2.2825595	5.7624479

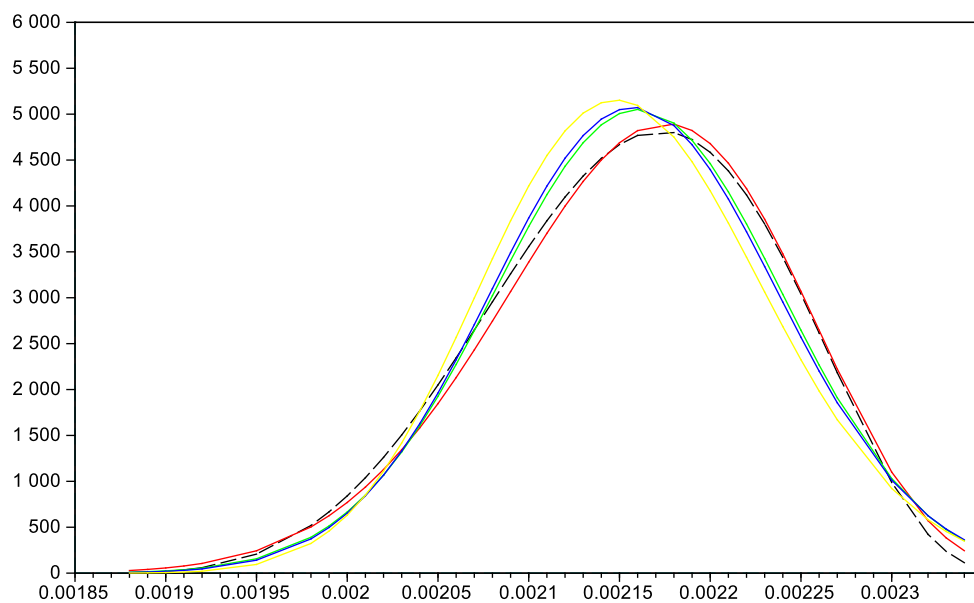
Tabuľka 3.2: Odhadnuté parametre z modelu ohraničenej úrokovej miery pre 3 - mesačný EURIBOR

Tieto dáta sú menej volatilné. Na Obr. 3.2 vľavo je znázornený priebeh 3 - mesačného EURIBORU a vľavo jeho hustota odvodená opäť zo vzorca (2.14).

Hodnota hornej a dolnej hranice pre úrokovú mieru EURIBOR bola určená podľa jej priebehu, avšak nie exaktne, aby napr. obor hodnôt úrokovej miery bol čo najužší. Vystupuje tu teda otázka, ako hranice L a U ovplyvňujú hustotu úrokovej miery. Demonštrácia je na Obr. 3.3 pre rôzne hranice L a U . Vidíme, že hustoty úrokovej miery pre rôzne ohraničenia sú veľmi podobné a šírka intervalu (L, U) významne neovplyvní tvar hustoty úrokovej miery.



Obr. 3.2: Vľavo - vývoj úrokovej sadzby EURIBOR za obdobie 2.1.2013 - 28.6.2013, vpravo - hustota úrokovej miery pri odhadnutých parametroch a, ϕ, λ^2 a daných hraniciach $L = 0.0015, U = 0.0025$



Obr. 3.3: Hustota úrokovej miery EURIBOR za obdobie 2.1.2013 - 28.6.2013, pričom červenou je znázornená hustota s hranicami $L = 0.0015, U = 0.0025$, zelenou s $L = 0.0005, U = 0.0035$, modrou s $L = 0, U = 0.005$, žltou s $L = 0.0015, U = 0.0035$ a čiernou s $L = 0.0018, U = 0.0024$.

Kapitola 4

Aproximácia ceny dlhopisu v ohraničenom modeli úrokovej miery

Rogemar S. Mamon v článku *Three ways to solve for bond prices in the Vasicek model* [4] predstavil hneď tri spôsoby ako odvodiť explicitný vzorec ceny dlhopisu pre Vasíčkov model. Pre mnoho modelov úrokových mier explicitný vzorec ceny dlhopisu je buď zložitý a odvodenie komplikované alebo explicitné riešenie neexistuje. K takýmto modelom sa radí aj model úrokovej miery s ohraňčeným oborom hodnôt. Preto pre cenu dlhopisu použijeme aproximačnú formulu s využitím Taylorovho polynómu, ktorá je odvodená v článku [8].

4.1 Výpočet ceny dlhopisu pomocou Taylorovho rozvoja

Nech úroková miera je v rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere daná stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dW.$$

Cena dlhopisu, $P = P(t, r)$, je potom riešením parciálnej diferenciálnej rovnice

$$rP = \frac{\partial P}{\partial t} + \mu(r, t)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2(r, t)}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2},$$

a je splnená pre každé $t \in [0, T)$ a každé $r > 0$. Použitím transformácie $\tau = T - t$ môžeme prepísať cenu dlhopisu ako $P = P(\tau, r)$ spĺňajúcu rovnicu

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + \mu(r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2(r)\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad (4.1)$$

pre všetky $r > 0$, $\tau \in (0, T]$ s počiatočnou podmienkou $P(0, r) = 1$ pre všetky $r > 0$.

Taylorov rozvoj $P(\tau, r)$ v okolí $\tau = 0$ konštruujeme v tvare

$$P(\tau, r) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(r)\tau^j. \quad (4.2)$$

Rovnicu (4.1) prepíšeme pomocou Taylorovho rozvoja (4.2) a dostávame

$$-\left[\sum_{k=0}^{\infty} k c_k(r)\tau^{k-1}\right] + \mu(r)\left[\sum_{k=0}^{\infty} c'_k(r)\tau^k\right] + \frac{1}{2}\sigma^2(r)\left[\sum_{k=0}^{\infty} c''_k(r)\tau^k\right] - r\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k(r)\tau^k\right] = 0.$$

Porovnaním koeficientov pri τ^j pre $j = 0, 1, \dots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[-(k+1)c_{k+1}(r) + \mu(r)c'_k(r) + \frac{1}{2}\sigma^2(r)c''_k(r) - rc_k(r) \right] \tau^k = 0,$$

dostávame vzťah

$$-(k+1)c_{k+1}(r) + \mu(r)c'_k(r) + \frac{1}{2}\sigma^2(r)c''_k(r) - rc_k(r) = 0. \quad (4.3)$$

Z počiatočnej podmienky $P(0, r) = 1$ dopočítame koeficient $c_0(r)$, platí

$$1 = P(0, r) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(r)0^j = c_0(r)0^0 + c_1(r)0^1 + \dots = c_0(r).1 + 0 + 0 + \dots = c_0(r).$$

Ak poznáme c_0 , z rovnice (4.3) vieme rekurzívne dopočítať ostatné koeficienty c_{k+1}

$$c_{k+1}(r) = \frac{1}{k+1}(\mu(r)c'_k(r) + \frac{1}{2}\sigma^2(r)c''_k(r) - rc_k(r)). \quad (4.4)$$

Vypočítame ostatné koeficienty Taylorovho rozvoja do J -teho rádu $c_1(r), c_2(r), \dots, c_J(r)$, potom cena dlhopisu sa dá vyjadriť aproximačne ako

$$P(\tau, r) \sim \sum_{j=0}^J c_j(r)\tau^j. \quad (4.5)$$

4.2 Výpočet logaritmu ceny dlhopisu pomocou Taylorovho rozvoja

Pri výpočte logaritmu ceny dlhopisu postupujeme rovnako ako v predchádzajúcej kapitole pri odvodení aproximácie $P(\tau, r)$. Označme logaritmus ceny dlhopisu ako

$$f(\tau, r) = \ln P(\tau, r).$$

Potom platí $P(\tau, r) = e^{f(\tau, r)}$. Využitím tohto vzťahu transformujeme parciálnu diferenciálnu rovnicu (4.1), pričom pre parciálne derivácie platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial \tau} &= \frac{\partial e^f}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \tau} = e^f \frac{\partial f}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial P}{\partial r} &= \frac{\partial e^f}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial r} = e^f \frac{\partial f}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} &= \left[\frac{\partial e^f}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial r} \right] \frac{\partial f}{\partial r} + e^f \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right] = \left[e^f \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + e^f \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right].\end{aligned}$$

a ich dosadením do (4.1) dostávame

$$-e^f \frac{\partial f}{\partial \tau} + \mu(r) e^f \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2(r) \left[e^f \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + e^f \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right] - r e^f = 0.$$

Ekvivalentnou úpravou, vynásobením rovnice $\frac{1}{e^f}$, dostaneme novú parciálnu diferenciálnu rovnicu pre $f(\tau, r)$

$$-\frac{\partial f}{\partial \tau} + \mu(r) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2(r) \left[\left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right] - r = 0. \quad (4.6)$$

Logaritmus ceny dlhopisu opäť vyjadríme v tvare

$$f(\tau, r) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(r) \tau^j. \quad (4.7)$$

Dosadením (4.7) do (4.6) dostávame

$$\begin{aligned}- \left[\sum_{k=0}^{\infty} k c_k(r) \tau^{k-1} \right] + \mu(r) \left[\sum_{k=0}^{\infty} c'_k(r) \tau^k \right] + \frac{1}{2} \sigma^2(r) \left[\sum_{k=0}^{\infty} c'_k(r) \tau^k \right]^2 + \\ + \frac{1}{2} \sigma^2(r) \left[\sum_{k=0}^{\infty} c''_k(r) \tau^k \right] - r \tau^0 = 0.\end{aligned} \quad (4.8)$$

Porovnaním koeficientov pri τ^0 sme dostali vzťah

$$-1c_1(r) + \mu(r)c'_0(r) + \frac{1}{2} \sigma^2(r) c'_0(r)^2 + \frac{1}{2} \sigma^2(r) c''_0(r) - r = 0. \quad (4.9)$$

Z počiatočnej podmienky pre cenu dlhopisu dostaneme: $f(0, r) = \ln P(0, r) = \ln 1 = 0$, z čoho vidíme, že $c_0(r) = 0$ pre každé $r > 0$. Z rovnice (4.9) dosadením za $c_0(r) = 0$ dopočítame $c_1(r) = -r$.

Ak upravíme rovnosť (4.8), t. j.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1)c_{k+1}(r) + \mu(r)c'_k(r) + \frac{1}{2}\sigma^2(r)c''_k(r) \right] \tau^k + \frac{1}{2}\sigma^2(r) \left[\sum_{k=0}^{\infty} c'_k(r)\tau^k \sum_{k=0}^{\infty} c'_k(r)\tau^k \right] - r = 0,$$

a porovnáme koeficienty pri τ^j pre $j = 1, 2, \dots$, pričom z člena $[\sum_{k=0}^{\infty} c'_k(r)\tau^k \sum_{k=0}^{\infty} c'_k(r)\tau^k]$ vyberieme, len tie koeficienty $c'_i(r)$, ktoré nám v súčine dajú τ^k , dostávame

$$-(k+1)c_{k+1}(r) + \mu(r)c'_k(r) + \frac{1}{2}\sigma^2(r) \sum_{i=0}^k c'_i(r)c'_{k-i}(r) + \frac{1}{2}\sigma^2(r)c''_k(r) = 0. \quad (4.10)$$

Koeficienty c_{k+1} vypočítame podľa rekurzívneho vzťahu

$$c_{k+1}(r) = \frac{1}{k+1} \left[\mu(r)c'_k(r) + \frac{1}{2}\sigma^2(r) \sum_{i=0}^k c'_i(r)c'_{k-i}(r) + \frac{1}{2}\sigma^2(r)c''_k(r) \right]. \quad (4.11)$$

A ak poznáme koeficienty $c_2, c_3, \dots, c_J$, aproximácia $\ln P(\tau, r)$ je nasledovná

$$\ln P(\tau, r) \sim \sum_{j=0}^J c_j(r)\tau^j.$$

4.3 Numerické výsledky pre model úrokovej miery s ohraničeným oborom hodnôt II.

V tejto časti vypočítame ceny dlhopisov a výnosové krivky najskôr pomocou odvodennej aproximácie a porovnáme ich s výsledkami získanými Monte Carlo simuláciami.

4.3.1 Numerické výsledky získané aproximáciou ceny dlhopisu

Uvažujme model ohraničenej úrokovej miery II. v rizikovo neutrálnej miere

$$r = \frac{Ue^X + L}{e^X + 1}. \quad (4.12)$$

Pre úrokovú mieru r sme odvodili stochastickú diferenciálnu rovnicu v tvare¹

$$dr = \left[\left(\phi - a^{-1} \ln \left(\frac{r-L}{U-r} \right) \right) \frac{(r-L)(U-r)}{U-L} + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 (U-r)(r-L)(U+L-2r)}{(U-L)^2} \right] dt + \left[\frac{\lambda (U-r)(r-L)}{U-L} \right] dw. \quad (4.13)$$

Zo vzťahu (4.13) poznáme drift $\mu(r)$ a volatilitu $\sigma(r)$ procesu r , a ich dosadením do vzorca (4.4) vypočítame koeficienty $c_k(r)$ aproximácie cenu dlhopisu a dosadením parametrov do vzorca (4.11) získame koeficienty pre logaritmus ceny dlhopisu². Prvé tri koeficienty pre cenu dlhopisu sú

$$c_0(r) = 1,$$

$$c_1(r) = -r,$$

$$c_2(r) = \frac{1}{2} \left(-\frac{(r-L)(U-r) \left(\phi - a \ln \left[\frac{r-L}{U-r} \right] \right)}{U-L} - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 (r-L)(U-r)(L-2r+U)}{(U-L)^2} + r^2 \right).$$

Pre logaritmus ceny dlhopisu sú prvé tri koeficienty nasledovné

$$c_0(r) = 0,$$

$$c_1(r) = -r,$$

$$c_2(r) = \frac{1}{2} \left(-\frac{(r-L)(U-r) \left(\phi - a \ln \left[\frac{r-L}{U-r} \right] \right)}{U-L} - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 (r-L)(U-r)(L-2r+U)}{(U-L)^2} \right).$$

V 3. kapitole sme odhadovali parametre a, ϕ, λ pri danej hornej U a dolnej L hranici. S odhadnutými parametrami $a = 8.4192503, \phi = 5.7624479, \lambda = 1.5108142$ a hodnotou okamžitej úrokovej miery $r = 0.0018$ vypočítame cenu a logaritmus ceny dlhopisu s maturitou 3 mesiace. Výsledky sú zobrazené v tabuľke 4.1 a graficky na obrázku 4.1.

Prvé dva grafy znázorňujú konvergenciu Taylorovej aproximácie ceny a logaritmu ceny dlhopisu pri zaokrúhlení na päť desatinných miest, ďalšie dva grafy konvergenciu pri zaokrúhlení na štyri desatinné miesta. Pre dlhopis s trojmesačnou maturitou nastáva konvergencia na 4 desatinné miesta.

Porovnajme konvergenciu ceny dlhopisu pre rôzne maturity (Tabuľka 4.2).

Vidíme, že konvergencia ceny dlhopisu závisí od jeho maturity. Pri nižších maturitách

¹SDR (2.13), parametre $\alpha = 1, \beta = 1$

²koeficienty vyšších rádov Taylorovho rozvoja, t.j. $J = 3, 4, 5$ sú uvedené v prílohe (koeficient $c_3(r)$), ostatné koeficienty kvôli ich dĺžke sú k dispozícii na vyžiadanie

rad J	aproximácia	rad J	aproximácia
0	1	0	0
1	0.99955	1	-0.000450
2	0.99946	2	-0.000538
3	0.99949	3	-0.000506
4	0.99953	4	-0.000465
5	0.99945	5	-0.000549

Tabuľka 4.1: Model úrokovej miery s ohraničením oborom hodnôt II. s parametrami $a = 8.4192503$, $\phi = 5.7624479$, $\lambda = 1.5108142$, $L = 0.0015$, $U = 0.0025$ a maturitou $\tau = 1/4$, vľavo je cena dlhopisu, vpravo logaritmus ceny dlhopisu.

rad J	$\tau = 1$	$\tau = 3$	$\tau = 6$	$\tau = 12$
1	0.99985	0.99955	0.99910	0.99820
2	0.99984	0.99946	0.99875	0.99680
3	0.99984	0.99949	0.99901	0.99883
4	0.99984	0.99954	0.99967	1.00941
5	0.99984	0.99945	0.99695	0.92257

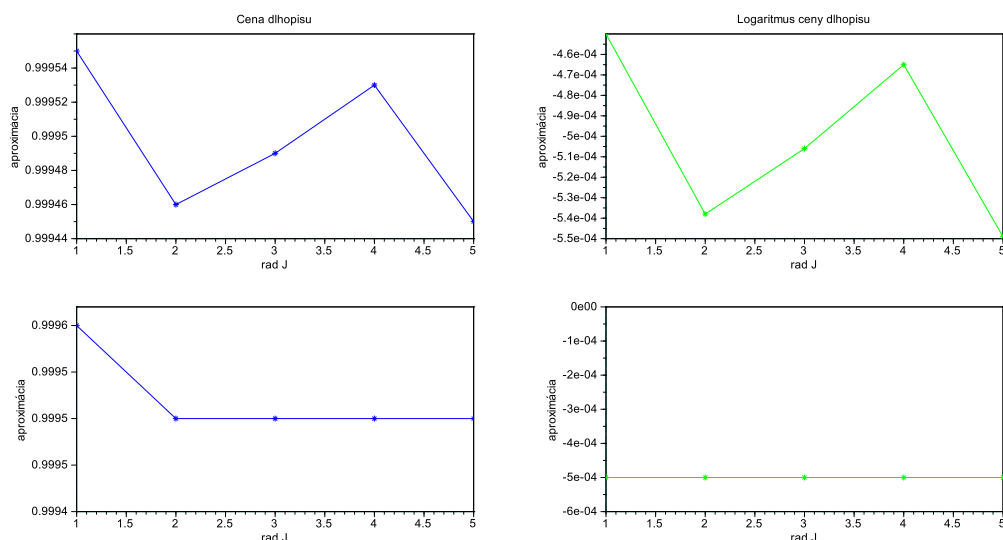
Tabuľka 4.2: Konvergencia ceny dlhopisu pre rôzne maturity τ [v mesiacoch]

nastáva konvergencia rýchlejšie a je aj presnejšia, napr. aproximácia ceny dlhopisu s mesačnou maturitou konverguje na 5 desatinných miest a od 2. rádu Taylorovho rozvoja. Pre dlhopis s ročnou maturitou je konvergencia pomalá a ani pri 5.ráde nie je presnejšia ako na 1. desatinné miesto. Keďže ceny dlhopisu sú aproximované Taylorovým rozvojom 5.rádu v okolí $\tau = 0$, očakávame teda presnejšie výsledky pre malé τ .

Odhadnutá výnosová krivka, závislosť úrokovej miery od maturity dlhopisu, a závislosť ceny dlhopisu od maturity dlhopisu aproximáciou ceny dlhopisu pomocou Taylorovho rozvoja je na obrázku 4.2.

4.3.2 Monte Carlo metóda

Monte Carlo metóda umožňuje odhadnúť číselnú hodnotu prostredníctvom stochastických simulácií, ak je príliš komplikované vypočítať ju analytickými prostriedkami.



Obr. 4.1: Model úrokovej miery s ohraňčením oborom hodnôt II. s parametrami $a = 8.4192503$, $\phi = 5.7624479$, $\lambda = 1.5108142$, $L = 0.0015$, $U = 0.0025$ a maturitou $\tau = 1/4$, vľavo cena dlhopisu, vpravo logaritmus ceny dlhopisu. Horné 2 grafy sú s hodnotami zaokrúhlenými na 5 desatinných miest, dolné 2 s hodnotami zaokrúhlenými na 4 desatinné miesta, čo sa premietne do rozdielnych hodnôt na y - ovej osi dolných a horných grafov.

Veľmi zjednodušená schéma Monte Carlo metódy spočíva vo vytvorení modelu pre stochasticky správajúci sa objekt, vygenerovaní náhodných čísel a ich dosadením do modelu, čím získame výstup z modelu - číselnú hodnotu a opakujeme generovanie náhodnosti čím dostávame nové výstupy z modelu.

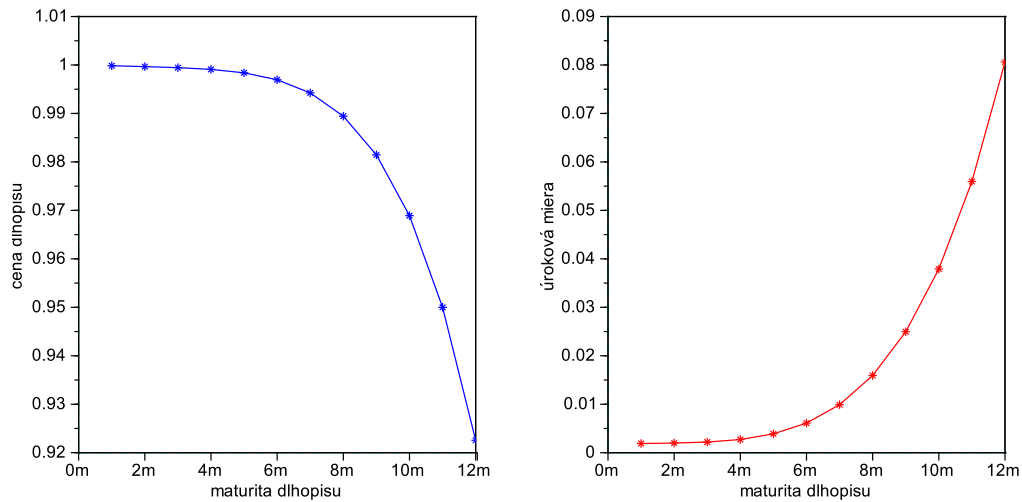
Monte Carlo metódu použijeme na odhad ceny dlhopisov s rôznymi maturitami od 1 až po 12 mesiacov a na skonštruovanie výnosovej krivky.

Pre cenu dlhopisu platí

$$P(r, t) = E[e^{-\int_t^T r(s)ds}].$$

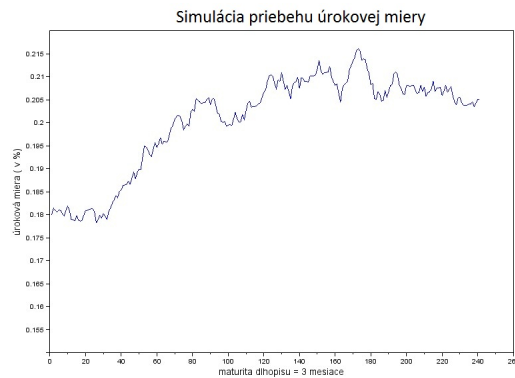
Vieme, že úroková miera je daná stochastickou diferenciálnou rovnicou (4.13). Stochastická časť procesu $r - \sigma(r, t)dW$ je popísaná Wienerovým procesom W , ktorého prírastky dW sú z normálneho rozdelenia.

Najskôr nasimulujeme 10 000 trajektórií úrokovej miery r na intervale, ktorého dĺžka zodpovedá maturite dlhopisu. Interval je malým časovým krokom $dt = \frac{1}{960}$ rozdelený na N bodov. Budeme simulovať trajektorie úrokových mier podľa modelu (4.12), pričom použijeme odhadnuté parametre z podkapitoly 3.2.1. Na obrázku 4.3 je jedna



Obr. 4.2: Grafické výsledky pre aproximáciu ceny dlhopisu pomocou Taylorovho rozvoja v modeli ohraničenej úrokovej miery s parametrami $a = 8.4192503$, $\phi = 5.7624479$, $\lambda = 1.5108142$, $L = 0.0015$, $U = 0.0025$, vľavo závislosť ceny dlhopisu od jeho maturity (v mesiacoch), vpravo výnosová krivka.

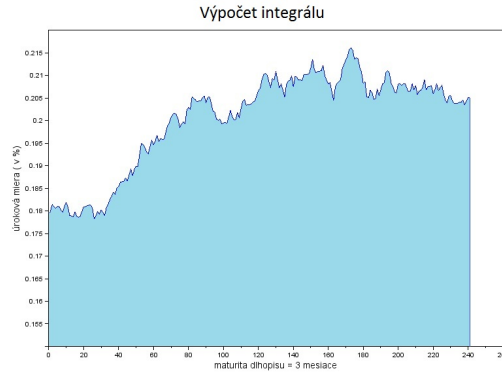
simulácia priebehu úrokovej miery pre dlhopis s maturitou 3 mesiace.



Obr. 4.3: Simulácia priebehu úrokovej miery pre dlhopis s maturitou 3 mesiace

Pre každý vygenerovaný priebeh úrokovej miery r spočítame cenu dlhopisu $P(\tau, r)$, t.j. vypočítame integrál ako obsah plochy pod krivkou úrokovej miery (Obr.4.4). Keďže máme vygenerované hodnoty úrokovej miery v diskrétnych časových bodoch, integrál počítame numericky. Použili sme obdĺžnikové pravidlo [7].

Výsledná cena dlhopisu $P(\tau, r)$ sa odhadne ako aritmetický priemer zo všetkých simulovaných cien dlhopisov. Ak poznáme ceny dlhopisov, použitím vzorca $P(t, T) =$



Obr. 4.4: Výpočet integrálu

$e^{-r(t,T)(T-t)}$ dopočítame úrokové miery.

Odhadnuté ceny dlhopisov s rôznymi maturitami a úrokové miery sú v tabuľke 4.3 a v tabuľke 4.4 sú štatistické údaje o približných cenách dlhopisov získaných Monte Carlo metódou a to minimum, maximum, štandardná odchýlka a interval spoľahlivosti pre cenu dlhopisu.

τ	$P(\tau, r)$	$R(\tau)$	τ	$P(\tau, r)$	$R(\tau)$
1	0.99984	0.0018757	7	0.99878	0.0020846
2	0.99967	0.0019539	8	0.99861	0.0020932
3	0.99950	0.0020021	9	0.99843	0.0021011
4	0.99932	0.0020347	10	0.99825	0.0021074
5	0.99914	0.0020567	11	0.99807	0.0021124
6	0.99896	0.0020729	12	0.99789	0.0021162

Tabuľka 4.3: Výsledky Monte Carlo simulácií pre model ohraňeného short rate modelu s parametrami: $a = 8.4192503$, $\phi = 5.7624479$, $\lambda = 1.5108142$, $L = 0.0015$, $U = 0.0025$, počiatočná hodnota $r(0) = 0.0018$. Označenie: τ = maturita v mesiacoch, $P(\tau, r)$ = cena dlhopisu, $R(\tau)$ = úroková miera.

Graficky znázornené výsledky z Monte Carlo simulácií sú na Obr. 4.5 , konkrétne závislosť ceny dlhopisu od maturity dlhopisu a výnosová krivka.

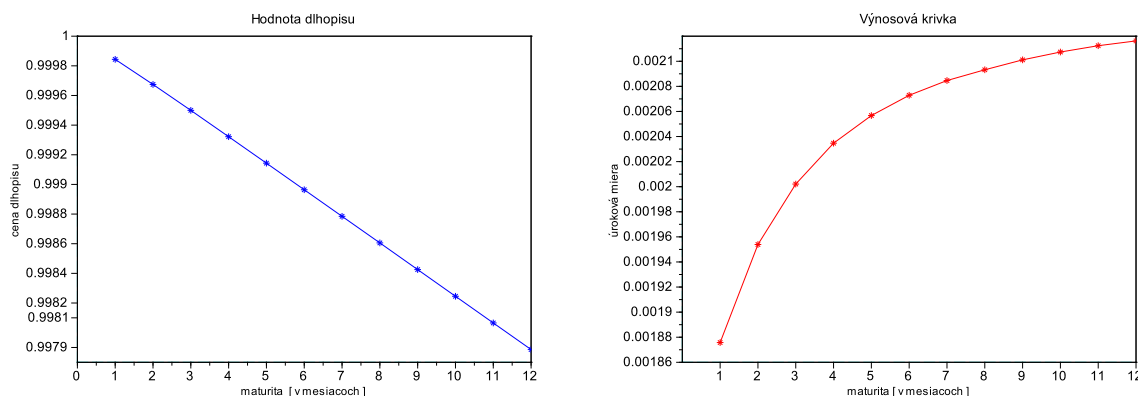
τ	$P(\tau, r)$	minimum	maximum	štand. odchýlka	interval spoľahlivosti
1	0.99984	0.999829	0.999857	3.81313E-06	(0.999836, 0.999851)
2	0.99967	0.999639	0.999709	8.93202E-06	(0.999657, 0.999692)
3	0.99950	0.999450	0.999555	1.3456E-05	(0.999473, 0.999527)
4	0.99932	0.999260	0.999385	1.73981E-05	(0.999287, 0.999357)
5	0.99914	0.999065	0.999216	2.05494E-05	(0.999102, 0.999185)
6	0.99896	0.998884	0.999048	2.34463E-05	(0.998917, 0.999011)
7	0.99878	0.998697	0.998889	2.61952E-05	(0.998732, 0.998837)
8	0.99861	0.998491	0.998712	2.83399E-05	(0.998549, 0.998662)
9	0.99843	0.998292	0.998543	3.09708E-05	(0.998363, 0.998487)
10	0.99825	0.998140	0.998369	3.25082E-05	(0.998180, 0.998310)
11	0.99807	0.997951	0.998207	3.45262E-05	(0.997996, 0.998135)
12	0.99789	0.997761	0.998043	3.63419E-05	(0.997813, 0.997959)

Tabuľka 4.4: Štatistické parametre Monte Carlo simulácií pre ohraničený short rate model s parametrami: $a = 8.4192503$, $\phi = 5.7624479$, $\lambda = 1.5108142$, $L = 0.0015$, $U = 0.0025$, hodnota okamžitej úrokovej miery $r = 0.0018$.

4.3.3 Porovnanie metódy Monte Carlo a aproximácie cien dlhopisov Taylorovým polynómom

Pre model úrokovej miery s ohraničeným oborom hodnôt neexistuje explicitný vzorec na výpočet ceny dlhopisu. Preto sme na jej výpočet použili aproximáciu ceny dlhopisu Taylorovým polynómom a metódu Monte Carlo, kde sme pre náš model s danými parametrami simulovali cenu dlhopisu. Teraz sa pozrieme ako dobre fitujú výsledky získané aproximáciu s výsledkami metódy Monte Carlo. Grafické porovnanie metódy Monte Carlo a Taylorovskej aproximácie je na Obr. 4.6 a číselné porovnanie v tabuľke 4.5.

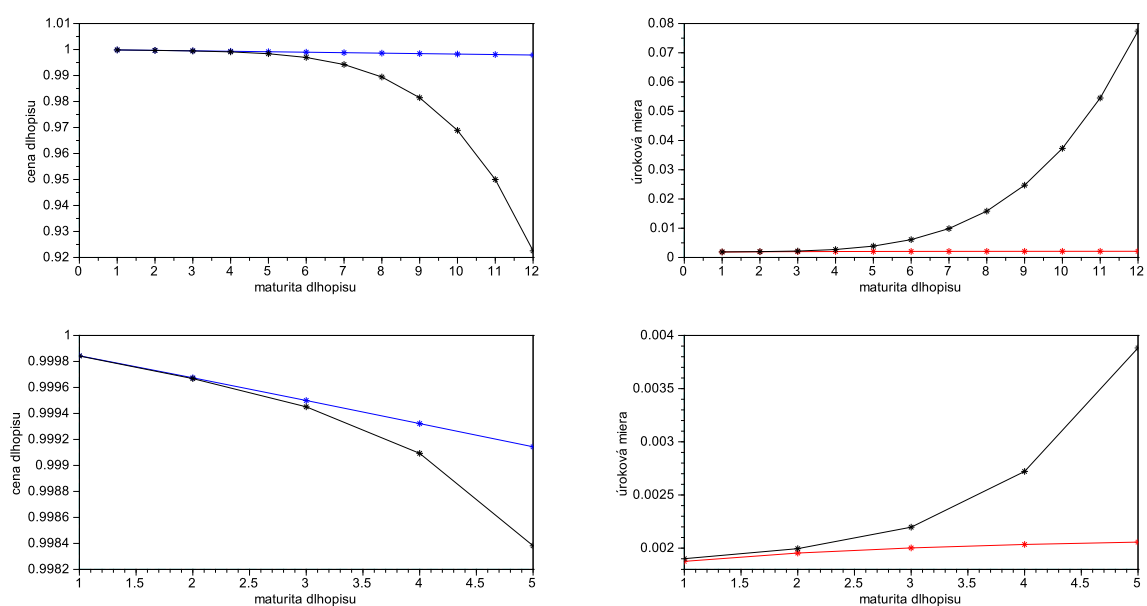
Ak sa pozrieme na grafy (Obr. 4.6) všimneme si, že získané ceny dlhopisov sa zhodujú pri malej maturite, tj. 1, 2 a 3 mesiace. So zväčšujúcou sa maturitou sa zväččuje i rozdiel získaných hodnôt dvoma spôsobmi. Trhové dáta sa udávajú s presnosťou na



Obr. 4.5: Grafické výsledky Monte Carlo simulácií pre model ohraňčeného short rate modelu s parametrami: $a = 8.4192503$, $\phi = 5.7624479$, $\lambda = 1.5108142$, $L = 0.0015$, $U = 0.0025$, hodnota okamžitej úrokovej miery $r = 0.0018$. Vľavo je znázornená závislosť ceny dlhopisu od maturity, vpravo výnosová krivka - závislosť úrokovej miery od maturity dlhopisu.

tri desatinné miesta. Ak vezmeme do úvahy túto skutočnosť a porovnáme odhadnutú výnosovú krivku Monte Carlo simuláciami s výnosovou krivkou konštruovanou cez aproximáciu ceny dlhopisu Taylorovým polynómom 5. rádu, zhoda nastáva pri dlhopisoch s maturitou 1 až 3 mesiace. Pri maturite 5 mesiacov a viac, je značný rozdiel - od 0.182 do 7.529 %.

Dôvody, prečo je odvodená aproximácia ceny dlhopisu nepresná, sú minimálne dva. Počítame s nulovou trhovou cenou rizika a teda rizikovo neutrálne parametre, ktoré používame, nemusia byť realistické a dáta, z ktorých odhaduje parametre modelu, sú volatilné, čo môže spôsobiť pomalšiu konvergenciu pri cenách dlhopisov.



Obr. 4.6: Čierna farba grafov patrí aproximácii ceny dlhopisu Taylorovým rozvojom, modrá a červená reprezentuje výsledky získané Monte Carlo simuláciami. Vľavo je znázornená závislosť ceny dlhopisu od maturity, vpravo výnosová krivka - závislosť úrokovej miery od maturity dlhopisu. Dolné dva grafy porovnávajú výsledky s väčšou presnosťou a maturitou 1 až 5 mesiacov.

τ	$P^*(\tau, r)$	$P(\tau, r)$	rozdiel	$R^*(\tau)$	$R(\tau)$	rozdiel
1	0.99984	0.99984	0	0.00188	0.00190	- 0.00002
2	0.99967	0.99967	0	0.00195	0.00200	- 0.00005
3	0.99950	0.99945	0.00005	0.00200	0.00220	- 0.0002
4	0.99932	0.99909	0.00023	0.00203	0.00272	- 0.00069
5	0.99914	0.99838	0.00076	0.00206	0.00388	- 0.00182
6	0.99896	0.99695	0.00201	0.00207	0.00610	- 0.00403
7	0.99878	0.99424	0.00454	0.00208	0.00988	- 0.0078
8	0.99861	0.98943	0.00918	0.00209	0.01585	- 0.01376
9	0.99843	0.98146	0.01697	0.00210	0.02472	- 0.02262
10	0.99825	0.96891	0.02934	0.00211	0.03731	- 0.0352
11	0.99807	0.95000	0.04807	0.00211	0.05453	- 0.05242
12	0.99789	0.92257	0.07532	0.00212	0.07741	- 0.07529

Tabuľka 4.5: Porovnanie cien dlhopisov a úrokových mier získaných Monte Carlo simuláciami (označené hviezdikou) s cenami dlhopisov a hodnotami úrokových mier aproximáciou Taylorovým polynómom

Záver

V tejto práci sme sa venovali modelu okamžitej úrokovej miery s ohraňčeným oborom hodnôt. Typická charakteristika tohto modelu, ohraňčenosť je dosiahnutá tvarom volatility v stochastickej diferenciálnej rovnici, ktorou sa modeluje náhodný priebeh úrokovej miery alebo transformáciou pomocného procesu funkciou s požadovaným oborom hodnôt.

Metódou maximálnej vierohodnosti sme z údajov 3 - mesačného EURIBORU za prvé dva kvartály roku 2013 odhadli parametre modelu a tie sme používali i pri ďalších výpočtoch. Keďže neexistuje explicitné vzťah pre cenu dlhopisu, použili sme aproximačnú formulu pre oceňovanie dlhopisov, Taylorov rozvoj ceny dlhopisu a Monte Carlo simulácie. Výsledky boli uspokojivé len pre dlhopisy s malou maturitou, preto predmetom ďalšieho výskumu by mohlo byť použitie inej aproximačnej formuly pre cenu dlhopisu, napr. *Exponent Expansion* z článku [2]. Táto metóda totiž umožňuje rozdeliť časový interval na kratšie podintervaly, použiť aproximáciu na každom z nich a potom výsledky "pospájať".

Literatúra

- [1] ANTONOV, A., SPECTOR, M.: *Analytic approximations for short rate models*, numerix quantitative research, 2010.
- [2] CAPRIOTTI, L., STEHLÍKOVÁ, B.: *An effective approximation for zero-coupon bonds and Arrow-Debreu prices in the Black-Karasinski model*, prijaté na publikovanie v International Journal of Theoretical and Applied Finance.
- [3] KAPLUN, A.: *Bounded short - rate models with Ehrenfest and Jacobi processes*, dizertačná práca, Die Fakultät für Mathematik der Technischen Universität, Dortmund, 2010, dostupné na internete (14.3.2013): <https://eldorado.tu-dortmund.de/handle/2003/27457>.
- [4] MAMON, R., S.: *Three ways to solve for bond prices in the Vasicek model*, Journal of applied mathematics and decision sciences, 8(1), 2004, pp. 1 - 14.
- [5] MELICHERČÍK, I., OLŠAROVÁ, L., ÚRADNÍČEK, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, EPOS, 2005, Bratislava.
- [6] MIKULA, K., STEHLÍKOVÁ, B., ŠEVČOVIČ, D.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Nakladateľstvo STU, 2009, Bratislava.
- [7] RIEČANOVÁ, Z a kol.: *Numerické metódy a matematická štatistika*, Alfa, 1987, Bratislava.
- [8] STEHLÍKOVÁ, B.: *Approximating the zero-coupon bond price in the general one-factor model with constant coefficients*, preprint.
- [9] SCHOGL, E., SOMMER, D.: *On short rate processes and their implications for term structure movements*, discussion paper no. B- 293.

- [10] EUROPEAN BANKING FEDERATION, dostupné na internete (1.4.2014):
www.euribor-ebf.eu.
- [11] NÁRODNÁ BANKA SLOENSKA, dostupné na internete (1.4.2014): www.nbs.sk.

A.1 Príloha

Koeficient $c_3(r)$ z Taylorovho rozvoja pre cenu dlhopisu

$$\begin{aligned} c_3(r) = & (- (r * (r^2 - (0.5 * \text{lambda}^2 * (-L + r) * (L - 2 * r + U) * (-r + U))) / (-L + U)^2 - ((-L + r) * (-r + U) * (\text{phi} - a * \text{Log}[(-L + r) / (-r + U)])) / (-L + U))) / 2 + ((2 * r + (0.5 * \text{lambda}^2 * (-L + r) * (L - 2 * r + U)) / (-L + U)^2 + (1. * \text{lambda}^2 * (-L + r) * (-r + U)) / (-L + U)^2 - (0.5 * \text{lambda}^2 * (L - 2 * r + U) * (-r + U)) / (-L + U)^2 + (a * (-r + U)^2 * ((-L + r) / (-r + U)^2 + (-r + U)^{(-1)}))) / (-L + U) + ((-L + r) * (\text{phi} - a * \text{Log}[(-L + r) / (-r + U)])) / (-L + U) - ((-r + U) * (\text{phi} - a * \text{Log}[(-L + r) / (-r + U)])) / (-L + U) * ((0.5 * \text{lambda}^2 * (-L + r) * (L - 2 * r + U) * (-r + U)) / (-L + U)^2 + ((-L + r) * (-r + U) * (\text{phi} - a * \text{Log}[(-L + r) / (-r + U)])) / (-L + U))) / 2 + (\text{lambda}^2 * (-L + r)^2 * (-r + U)^2 * (2. - (2. * \text{lambda}^2 * (-L + r)) / (-L + U)^2 - 1. * \text{lambda}^2 * (-((L - 2 * r + U) / (-L + U)^2) - (2 * (-r + U)) / (-L + U)^2) - ((-L + r) * ((2 * a * (-r + U) * ((-L + r) / (-r + U)^2 + (-r + U)^{(-1)}))) / (-L + r) - a * (-r + U) * (((-r + U) * ((2 * (-L + r)) / (-r + U)^3 + 2 / (-r + U)^2)) / (-L + r) - ((-L + r) / (-r + U)^2 + (-r + U)^{(-1)})) / (-L + r) - ((-r + U) * ((-L + r) / (-r + U)^2 + (-r + U)^{(-1)})) / (-L + r)^2))) / (-L + U) - (2 * (-\text{phi} - (a * (-r + U)^2 * ((-L + r) / (-r + U)^2 + (-r + U)^{(-1)}))) / (-L + r) + a * \text{Log}[(-L + r) / (-r + U)])) / (-L + U))) / (4 * (-L + U)^2)) / 3 \end{aligned}$$

Koeficient $c_3(r)$ z Taylorovho rozvoja pre logaritmus ceny dlhopisu

$$\begin{aligned} c_3(r) = & ((\text{lambda}^2 * (-L + r)^2 * (-r + U)^2) / (2 * (-L + U)^2) + (((0.5 * \text{lambda}^2 * (-L + r) * (L - 2 * r + U)) / (-L + U)^2 + (1. * \text{lambda}^2 * (-L + r) * (-r + U)) / (-L + U)^2 - (0.5 * \text{lambda}^2 * (L - 2 * r + U) * (-r + U)) / (-L + U)^2 + (a * (-r + U)^2 * ((-L + r) / (-r + U)^2 + (-r + U)^{(-1)}))) / (-L + U) + ((-L + r) * (\text{phi} - a * \text{Log}[(-L + r) / (-r + U)])) / (-L + U) - ((-r + U) * (\text{phi} - a * \text{Log}[(-L + r) / (-r + U)])) / (-L + U) * ((0.5 * \text{lambda}^2 * (-L + r) * (L - 2 * r + U) * (-r + U)) / (-L + U)^2 + ((-L + r) * (-r + U) * (\text{phi} - a * \text{Log}[(-L + r) / (-r + U)])) / (-L + U))) / 2 + (\text{lambda}^2 * (-L + r)^2 * (-r + U)^2 * (0. - (2. * \text{lambda}^2 * (-L + r)) / (-L + U)^2 - 1. * \text{lambda}^2 * (-((L - 2 * r + U) / (-L + U)^2) - (2 * (-r + U)) / (-L + U)^2) - ((-L + r) * ((2 * a * (-r + U) * ((-L + r) / (-r + U)^2 + (-r + U)^{(-1)}))) / (-L + r) - a * (-r + U) * (((-r + U) * ((2 * (-L + r)) / (-r + U)^3 + 2 / (-r + U)^2)) / (-L + r) - ((-L + r) / (-r + U)^2 + (-r + U)^{(-1)})) / (-L + r) - ((-r + U) * ((-L + r) / (-r + U)^2 + (-r + U)^{(-1)})) / (-L + r)^2))) / (-L + U) - (2 * (-\text{phi} - (a * (-r + U)^2 * ((-L + r) / (-r + U)^2 + (-r + U)^{(-1)}))) / (-L + r) + a * \text{Log}[(-L + r) / (-r + U)])) / (-L + U))) / (4 * (-L + U)^2)) / 3 \end{aligned}$$