

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



KALIBRÁCIA JEDNOFAKTOROVÉHO MODELU
ÚROKOVÝCH MIER POMOCOU VIACERÝCH KRITÉRIÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2015

Bc. Martin ČECHVALA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

KALIBRÁCIA JEDNOFAKTOROVÉHO MODELU
ÚROKOVÝCH MIER POMOCOU VIACERÝCH KRITÉRIÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava 2015

Bc. Martin ČECHVALA



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Martin Čechvala
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Kalibrácia jednofaktorového modelu úrokových mier pomocou viacerých kritérií
Calibration of one-factor interest rate model using multicriterial method

Cieľ: Cieľom práce je kalibrovať modely úrokových mier súčasne pomocou funkcie vierohodnosti okamžitej úrokovej miery a zhodnotenia kvality fitovania výnosových kriviek.

Vedúci: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 29.01.2014

Dátum schválenia: 10.02.2014
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie Touto cestou by som sa chcel poďakovať vedúcej diplomovej práce RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za jej cenné rady, pripomienky a odborné vedenie, ktoré mi pomohli pri písaní tejto diplomovej práce.

Abstrakt

Čechvala, Martin: **Kalibrácia jednofaktorového modelu úrokových mier pomocou viacerých kritérií.** [Diplomová práca] - Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. - Vedúci diplomovej práce: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., - Bratislava 2015 /62 s./.

Táto diplomová práca sa zaoberá kalibráciou Vašíčkovho modelu a CKLS modelu krátkodobej úrokovej miery súčasne pomocou metódy maximálnej vierohodnosti a zhodnotenia kvality fitovania výnosových kriviek. V práci navrhujeme metódu, ktorá zohľadní optimá podľa oboch použitých metód a určí množinu vhodných odhadov parametrov. Každému z možných odhadov tiež prislúcha miera dvojkritériálnej efektivity, ktorá reprezentuje to, ako veľmi je daná kombinácia parametrov optimalizovaná podľa funkcie vierohodnosti a kvality fitovania výnosových kriviek súčasne. Naše metódy otestujeme pre Vašíčkov model a CKLS model na programovo vygenerovaných dátach podľa podmieneného rozdelenia úrokovej miery, ako aj na skutočných hodnotách Euribor.

Kľúčové slová: časová štruktúra úrokových mier, krátkodobá úroková miera, model úrokovej miery, kalibrácia, pravdepodobnostná miera.

Abstract

Čechvala, Martin: **Calibration of one-factor interest rate model using multicriterial method.** [Master's thesis] - Comenius University in Bratislava. Faculty of mathematics, physics and informatics; Department of applied mathematics and statistics. - Supervisor: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., - Bratislava 2015. /62 pp./.

This work is concerned with calibration of Vasicek and CKLS interest rate models simultaneously by maximum likelihood method and quality of fitting the term structures. In work, we develop a method, that works with optimal estimations according to both used methods and determines a set of convenient estimations. For every convenient estimation there is rate of two-criterial effectiveness, which represents how much is this estimation optimized by likelihood function and quality of fitting the term structures simultaneously. We will test our methods for Vasicek model and CKLS model on generated data following conditional probability distribution, as well as on real Euribor rates.

Keywords: term structure, short rate, interest rate model, calibration, probability margin.

Obsah

Úvod	9
1 Základné pojmy modelovania úrokových mier	11
1.1 Dlhopisy a časová štruktúra úrokových mier	11
1.2 Okamžitá úroková miera	12
1.3 Stochastický proces	12
1.4 Brownov pohyb a Wienerov proces	13
1.5 Itóova lema	14
1.6 Reálna a rizikovo neutrálna pravdepodobnostná miera	14
2 Modely úrokových mier	17
2.1 Jednofaktorové modely	17
2.2 Zmena miery	19
2.3 Cena dlhopisu v jednofaktorových modeloch	21
2.3.1 Cena dlhopisu vo Vašíčkovom modeli	23
2.3.2 Aproximácia ceny dlhopisu v CKLS modeli	25
3 Metódy kalibrácie modelov úrokových mier	26
3.1 Metóda maximálnej vierohodnosti	26
3.1.1 Metóda maximálnej vierohodnosti pre Vašíčkov model	26
3.1.2 Aproximácia funkcie vierohodnosti pre CKLS model	29
3.2 Metóda minimalizujúca vzdialenosť teoretických a reálnych výnosových kriviek	30
3.2.1 Odhady pre Vašíčkov model	31
3.2.2 Odhady pre CKLS model	31
3.3 Odhad trhovej ceny rizika	32
3.4 Vylepšenie kalibrácie Vašíčkovho modelu	33
4 Testovanie programov na vygenerovaných dátach	35
4.1 Vašíčkov model - dvojkriteriálna optimalizácia pri voľnej volatilitate (Ka- librácia 1)	36

4.2	Vašíčkov model - dvojkriteriálna optimalizácia pri pevnej volatilitě (Kalibrácia 2)	43
4.3	CKLS model - dvojkriteriálna optimalizácia (Kalibrácia 3)	45
5	Testovanie programov na reálnych dátach	51
5.1	Vašíčkov model (Kalibrácia 1)	52
5.2	Vašíčkov model (Kalibrácia 2)	55
5.3	CKLS model (Kalibrácia 3)	56
	Záver	60
	Literatúra	61

Úvod

V poslednej dobe sa problematika úrokových mier a oceňovania od nich odvodených derivátov dostáva čoraz viac do popredia. Na finančných trhoch sa vo veľkom obchoduje s mnohými derivátmi úrokovej miery, preto je veľký záujem popísať jej vývoj nejakým stochastickým procesom.

V tejto práci sa zoberáme kalibráciou jednofaktorových modelov, konkrétne Vašíčkovho modelu a CKLS modelu, ktorý je jeho zovšeobecnením. Medzi najpoužívanejšie metódy kalibrácie patria metóda maximálnej vierohodnosti a metóda minimalizujúca váženú strednú kvadratickú chybu medzi skutočnými a modelom implikovanými výnosmi. My navrhujeme metódu, ktorá tieto dva prístupy kombinuje a vymedzí istú množinu vhodných odhadov pri zohľadnení oboch kritérií. Ako veľmi je konkrétny odhad vhodný nám potom určuje miera dvojkriteriálnej efektivity, ktorú sme zaviedli na zaznamenanie toho, ako je daná kombinácia parametrov optimálna vzhľadom na obe použité jednokriteriálne metódy.

Prácu sme rozdelili na 5 častí. V prvej kapitole definujeme základné pojmy potrebné pre úvod do tejto problematiky ako dlhopis, časová štruktúra úrokových mier, alebo okamžitá úroková miera. Taktiež uvádzame čitateľa do problematiky stochastického kalkulu, keďže modely úrokových mier s ktorými v tejto práci pracujeme sú formulované v tvare stochastickej diferenciálnej rovnice a teda v nej vystupuje náhodný proces.

Druhá časť je venovaná prehľadu modelov úrokových mier, a ich formuláciám v reálnej a rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere. Prechodu medzi týmito mierami sa tu tak isto venujeme, aj keď len okrajovo. Potom postupne odvodíme cenu dlhopisu vo všeobecnom jednofaktorovom modeli, cenu dlhopisu vo Vašíčkovom modeli a nakoniec aproximujeme cenu dlhopisu pre CKLS model.

V tretej kapitole sa zaoberáme metódami kalibrácie našich dvoch modelov úrokových mier. Odvodíme podmienené pravdepodobnostné rozdelenie úrokovej miery pre Vašíčkov model, čo nám umožní odvodiť vierohodnostnú funkciu pre tento model. Toto potom zovšeobecníme aj pre CKLS model, kde odvodíme aproximáciu vierohodnostnej funkcie. Pre fitovanie trhových a teoretických výnosových kriviek uvedieme na základe cien dlhopisov v jednotlivých modeloch tvar účelových funkcií a metódy ich optimalizácie. Potom na základe výsledkov z oboch metód uvedieme výpočet trhovej ceny rizika.

Na záver kapitoly navrhne vylepšenie dvojkriteriálnej metódy pre Vašíčkov model, ktorá pomáha vylepšiť vychýlené odhady driftu metódou maximálnej vierohodnosti.

V štvrtej časti sformulujeme a otestujeme tri algoritmy na vygenerovaných dátach. Pre CKLS model vygenerujeme dáta a výnosové krivky pre CIR model, čo je CKLS model s parametrom $\gamma = 0.5$, keďže pre tento je známe podmienené rozdelenie úrokovej miery. Výstupy z kalibrácií analyzujeme a popisujeme.

V poslednej časti použijeme tieto tri dvojkriteriálne prístupy na kalibráciu reálnych dát úrokovej sadzby Euribor. Podobne ako v predchádzajúcej kapitole, prezentujeme tu získané výstupy a výsledky.

1 Základné pojmy modelovania úrokových mier

V tejto kapitole definujeme a objasníme základne pojmy týkajúce sa modelovania úrokových mier pomocou stochastických procesov. Najprv definujeme pojmy ako dlhopis, časová štruktúra úrokových mier a okamžitá úroková miera. V ďalšej časti uvedieme čitateľa do problematiky stochastického kalkulu, o ktorý sa modelovanie okamžitej úrokovej miery opiera. Vychádzame pritom z kníh [7] a [8].

1.1 Dlhopisy a časová štruktúra úrokových mier

Dlhopis je základným derivátom úrokovej miery. Je to dohoda zaplatiť určitú sumu, za prísľub obdržania vyššej sumy v budúcnosti. Rozlišujeme kupónové a bezkupónové dlhopisy. Kupónové dlhopisy vyplácajú počas doby splatnosti isté čiastky a v čase T vyplatia finálnu čiastku. Bezkupónový dlhopis vyplatí sumu len v čase splatnosti T . Najjednoduchším derivátom úrokovej miery je dlhopis, ktorý vyplatí vlastníčkovi v čase T jednotkovú sumu. Takýto cenný papier nazývame diskontný dlhopis. Ceny dlhopisov určujú časovú štruktúru úrokových mier definovanú ako

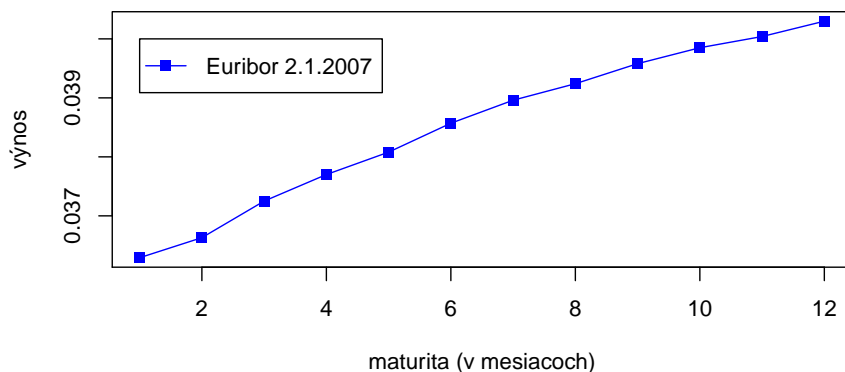
$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$$

kde $P(t, T)$ je hodnota dlhopisu v čase t so splatnosťou v T a $R(t, T)$ je úroková miera dlhopisu v čase t so splatnosťou v T . Z tohto vzťahu vieme vyjadriť $R(t, T)$ čiže časovú štruktúru úrokových mier ako

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t} \quad (1.1)$$

Časová štruktúra úrokových mier teda vyjadruje závislosť úrokovej miery v čase t od maturity dlhopisu T . Inak povedané vyjadruje vzťah medzi hodnotou dlhopisu a časom do splatnosti. Preto sa táto krivka nazýva aj výnosová krivka. Keďže na dlhšie obdobie sa požičiava s vyšším úrokom, obvykle je časová štruktúra úrokových mier rastúca. Nie je to však pravidlo. V prípade očakávania poklesu úrokových mier je krivka klesajúca.

Na obrázku 1.1 je výnosová krivka úrokovej miery Euribor zo dňa 2.1.2007, teda ešte pred finančnou krízou.



Obr. 1.1: Príklad výnosovej krivky

1.2 Okamžitá úroková miera

Okamžitá (prípadne krátkodobá) úroková miera (anglicky short rate) je $R(t, T)$ s okamžitou splatnosťou v čase $T = t$ a je definovaná v [3] ako

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T).$$

Keďže predpokladáme spojitý čas t , okamžitá úroková miera predstavuje úrokovú mieru na limitne krátke obdobie, a teda sa neustále mení. Je to teoretická veličina a v praxi na trhu sa nahrádza dennou, týždennou, prípadne mesačnou aproximáciou.

Ak zohráva úroková miera úlohu podkladového aktíva finančného derivátu, nazýva sa daný derivát derivátom úrokovej miery. Medzi deriváty úrokovej miery patria napríklad swapy, forwardy alebo opcie.

1.3 Stochastický proces

Modely úrokových mier sú často formulované v tvare stochastických diferenciálnych rovníc. Sú to rovnice, v ktorých vystupuje aspoň jeden stochastický proces.

Definícia 1.3.1. *Stochastický proces je t - parametrický systém náhodných premenných $X(t), t \in I$, kde I je interval alebo diskrétna množina indexov.*

Pre názornosť je možné predstaviť si premennú t ako čas a X ako náhodný experiment. $X(t)$ je potom realizácia, alebo výsledok experimentu X v čase t , kde pri opätovnej realizácii experimentu X v čase t môžeme dostať iný výsledok, keďže $X(t)$ je náhodná premenná.

1.4 Brownov pohyb a Wienerov proces

Najznámejším stochastickým procesom je Brownov pohyb.

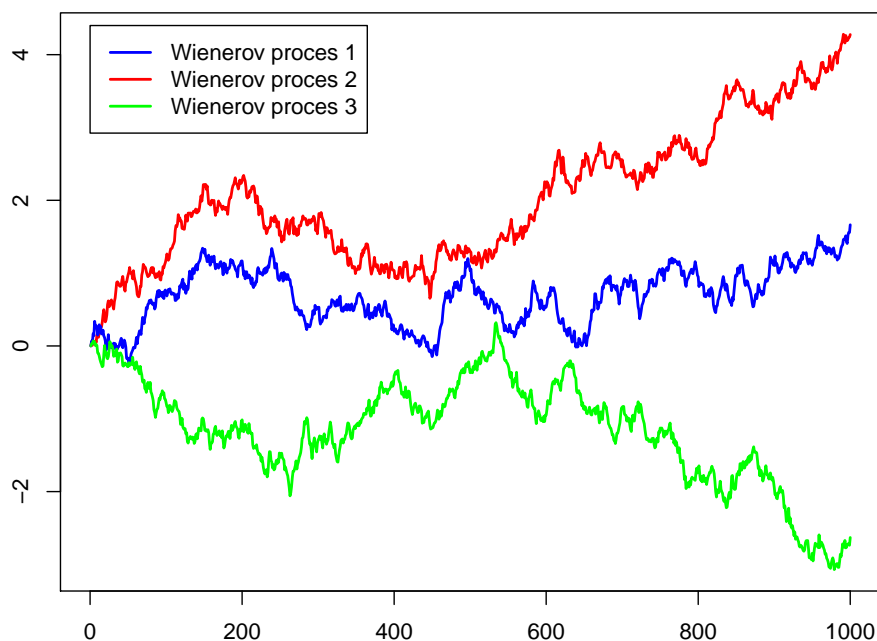
Definícia 1.4.1. *Brownov pohyb $\{X(t), t \geq 0\}$ je t - parametrický systém náhodných veličín, pričom:*

(i) *všetky prírastky $X(t+\Delta) - X(t)$ majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu\Delta$ a disperziou (alebo aj varianciou) $\sigma^2\Delta$,*

(ii) *pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$ sú prírastky $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa bodu (i),*

(iii) $X(0) = 0$

Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ nazývame Wienerov proces.



Obr. 1.2: Wienerov proces

Na obrázku 1.2 vidíme tri realizácie Wienerovho procesu. Ako vidíme, proces môže rásť, aj klesať. Nie je to však trend, ale volatilita procesu, ktorá tento proces vychýľuje. Všetky modely krátkodobej úrokovej miery, ktorými sa v tejto práci zaoberáme, obsahujú práve Wienerov proces.

1.5 Itóova lema

Vo finančnej matematike je Itóova lema jedna z najdôležitejších. Popisuje vzťah medzi malou zmenou hodnoty náhodnej premennej a malou zmenou hodnoty funkcie tejto náhodnej premennej.

Lema 1.5.1. *Nech $f(x, t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice*

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw$$

kde w je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt,$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t)\frac{\partial f}{\partial x}dw.$$

Itóova lema ukazuje, ako je možné zostaviť stochastickú diferenciálnu rovnicu z ľubovoľnej hladkej funkcie $f(x, t)$, kde premenná x je riešením zadanej stochastickej diferenciálnej rovnice. Itóova lema nám neskôr pomôže odvodiť cenu dlhopisu pre všeobecný jednofaktorový model úrokovej miery.

1.6 Reálna a rizikovo neutrálna pravdepodobnostná miera

Modely úrokových mier je možné formulovať buď v reálnej, alebo rizikovo neutrálny pravdepodobnostnej miere. Reálna miera sa používa v súvislosti s prácou na reálnych dátach. Rizikovo neutrálna miera je pravdepodobnostná miera, pri ktorej je hodnota aktíva v súčasnosti rovná budúcej hodnote aktíva diskontovanej bezrizikovou úrokovou mierou do súčasnosti. Zaniká tak možnosť arbitráže a preto sa používa na oceňovanie finančných derivátov. V závislosti od metódy kalibrácie daného modelu, budeme v našej práci pracovať s oboma formuláciami modelu. Pre lepšie pochopenie použitých metód je potrebné definovať pojmy ako podmienená stredná hodnota a martingal, ktoré sa využívajú v princípe zmeny miery. V nasledujúcich riadkoch vychádzame z knihy [7], kde môže čitateľ nájsť podrobnejšie informácie k tejto problematike.

Predstavme si sled diskrétnych udalostí, kde v každom kroku poznáme pravdepodobnosť nasledovných možných realizácií udalosti. Realizácie udalostí v jednotlivých krokoch sa ovplyvňujú. V tomto prípade sa dá zjednodušene povedať, že podmienená stredná hodnota za podmienky informácie v čase t je náhodná premenná priradzujúca krokom v čase t stredné hodnoty podmienené ostatnými krokmi. Tento pojem teraz definujeme.

Definícia 1.6.1. *Nech (Ω, F, P) je pravdepodobnostný priestor, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ náhodná premenná, pre ktorú platí $E(|X|) < \infty$. Nech $H \subset F$ je σ -algebra. Podmienená stredná hodnota $E(X|H)$ je náhodná premenná s nasledujúcimi vlastnosťami:*

- (i) $E(X|H)$ je H -merateľná
- (ii) $\int_H E(X|H)dP = \int_H XdP \quad \forall H \in H$.

Zo známej Radon-Nikodymovej vety, ktorej sa venuje celá práca [6] vyplýva existencia a jednoznačnosť $E(X|H)$.

Definícia 1.6.2. *Filtráciou na pravdepodobnostnom priestore (Ω, F, P) nazývame systém σ -algebier $\{M_t\}_{t \geq 0}$, $M_t \subset F$ takých, že*

$$0 \leq s < t \Rightarrow M_s \subset M_t.$$

Táto definícia je potrebná na definovanie martingalu, čo je istá trieda stochastických procesov.

Definícia 1.6.3. *Stochastický proces $\{M_t\}_{t \geq 0}$ na (Ω, F, P) sa nazýva martingal vzhľadom k filtrácii $\{M_t\}_{t \geq 0}$ (a miere P), ak*

- (i) náhodná premenná M_t je M_t -merateľná pre všetky $t \geq 0$
- (ii) $E[|M_t|] < \infty \quad \forall t \geq 0$
- (iii) $E[M_s|M_t] = M_t \quad \forall s \geq t$.

Inak povedané, martingal je náhodný proces, ktorého náhodné premenné sú v každom čase F_t -merateľné a jeho súčasná hodnota je rovná podmienenej strednej hodnote jeho budúceho stavu. Príklad martingalu je Wienerov proces.

Veta 1.6.4. *(Girsanova veta)*

Nech $W_t(\omega)$, $0 \leq t \leq T$, je Brownov pohyb na (Ω, F, P) . Nech $\widetilde{W}_t(\omega) = W_t(\omega) + \eta t$,

kde η je konštanta. Nech $\gamma_t(\omega)$ je F_t^W -adaptovaný proces, pre ktorý

$$E_p \left(\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right) \right) < \infty.$$

Potom existuje miera Q na (Ω, F) taká, že

(i) $Q \sim P$

$$(ii) \frac{dQ}{dP}(\omega) = \exp \left(- \int_0^T \gamma_t(\omega) dW_t(\omega) - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2(\omega) dt \right)$$

(iii) $\widetilde{W}_t(\omega) = W_t(\omega) + \int_0^t \gamma_s(\omega) ds$ je Brownov pohyb na (Ω, F, Q) .

Girsanovu vetu využijeme v nasledujúcej kapitole pri zmene miery.

2 Modely úrokových mier

V tejto kapitole si predstavíme niektoré modely krátkodobej úrokovej miery. Najdôležitejšou vlastnosťou modelu úrokovej miery je jeho presnosť pri porovnávaní s reálnymi dátami. Na druhej strane však príliš komplikované modely platia svoju daň v podobe náročnosti (alebo nemožnosti) oceňovania derivátov úrokových mier. Keďže druhá časť našej práce sa zaoberá kalibráciou Vašíčkovho modelu a Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders (CKLS) modelu, kladieme na ne špeciálny dôraz a odvodíme pre ne aj cenu dlhopisu, resp. v prípade CKLS modelu jeho aproximáciu.

2.1 Jednofaktorové modely

Jednofaktorové modely predstavujú najjednoduchšiu triedu modelov úrokovej miery. V tejto podkapitole vychádzame z knihy [8]. V jednofaktorových modeloch vystupuje len jeden náhodný faktor a tým je práve okamžitá úroková miera r . V týchto modeloch je okamžitá úroková miera r daná riešením stochastickej diferenciálnej rovnice v tvare

$$dr = \mu(t, r)dt + \sigma(t, r)dw. \quad (2.1)$$

Proces pozostáva z dvoch členov, kde jeden je deterministický a druhý stochastický. Deterministický člen $\mu(t, r)dt$ nazývame trend (drift) vývoja úrokovej miery, stochastický člen $\sigma(t, r)dw$ určuje náhodné výchylky tohto procesu v čase, pričom dw je zmena Wienerovho procesu definovaného v predchádzajúcej kapitole a $\sigma(t, r)$ sa nazýva volatilita procesu. V jednoduchosti sa dá povedať, že volatilita určuje veľkosť náhodných fluktuácií v okolí trendovej funkcie.

Obvykle sa ako driftová funkcia volí $\mu(t, r) = \kappa(\theta - r)$, kde κ a θ sú kladné konštanty. Parameter θ nazývame limitnou úrokovou mierou a κ rýchlosťou návratu k limitnej úrokovej miere. Ľahko vidieť, že keď $r = \theta$, je drift nulový a teda tento člen nemení okamžitú úrokovú mieru v danom čase t . Naopak, čím väčší je ich rozdiel v absolútnej hodnote, tým viac priťahuje drift okamžitú úrokovú mieru r v istom čase t k limitnej hodnote θ . Rýchlosť návratu r k θ určuje κ a túto vlastnosť modelových mier nazývame mean reversion. Stochastický proces s driftovou funkciou v tomto tvare sa nazýva Ornstein - Uhlenbeckov mean reversion proces. Pre jeho strednú hodnotu

platí

$$dE(r_t) = E(dr_t) = \kappa(\theta - E(r_t))dt + E(\sigma(t, r)dw) = \kappa(\theta - E(r_t))dt,$$

pričom riešenie tejto diferenciálnej rovnice má tvar

$$E(r_t) = \theta + (E(r_0) - \theta)e^{-\kappa t}$$

a platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(r_t) = \theta.$$

Teraz sa zameriame na Orstein - Uhlenbeckove procesy typu mean reversion. Jednotlivé modely sa budú o seba líšiť tvarom funkcie volatility $\sigma(r, t)$.

Vašíčkov model

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw \tag{2.2}$$

bol odvodený v práci [13] v roku 1977 českým matematikom Oldřichom Vašíčkom. Patrí medzi prvé a najjednoduchšie short rate modely, z čoho vyplýva relatívne jednoduchá výpočtová zložitosť. Za jeho najväčšiu nevýhodu sa považoval fakt, že s nenulovou pravdepodobnosťou pripúšťa záporné hodnoty úrokovej miery. Keď je r blízke nule, volatilita je konštantná a je možné že proces môže nadobudnúť záporné hodnoty, čo bola v minulosti pri modelovaní úrokovej miery nežiaduca vlastnosť a hlavný nedostatok tohto modelu, no dnes sa už úrokové miery pohybujú aj v záporných hodnotách, preto tento argument dnes už neplatí.

Dothanov model so stochastickou diferenciálnou rovnicou v tvare

$$dr = \sigma\sqrt{r}dw,$$

disponuje nulovou driftovou funkciou. Bol navrhnutý rok po Vašíčkovom modeli s cieľom zaručiť kladné úrokové miery tým, že volatilita je závislá od r .

Exponenciálny Vašíčkov model vznikol využitím procesu (2.2) pre x_t a definovaním úrokovej miery $r_t = e^{x_t}$. Dostaneme stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$d \ln r = \kappa(\ln \theta - \ln r)dt + \sigma dw,$$

v ktorej je úroková miera r vždy kladná.

Cox-Ingersoll-Rossov model (skrátene CIR model) odvodený v práci [4] pridáva závislosť driftu od r . Stochastická diferenciálna rovnica pre tento model má tvar

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw. \quad (2.3)$$

Pre r blízke nule je aj volatilita malá a pre $r = 0$ je volatilita nulová, pričom drift je kladný, čo zabezpečuje deterministický návrat úrokovej miery do kladných hodnôt. Navyše, ak platí $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ tak dosiahnutie hodnoty $r = 0$ má nulovú pravdepodobnosť. Krátky dôkaz tohto tvrdenia môže čitateľ nájsť v [8].

Ho a Lee model v tvare

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dw$$

je prvý bezarbitrážny model úrokovej miery, ktorý sa často používa na oceňovanie derivátov úrokových mier. $\theta(t)$ zabezpečuje, aby model dobre fitoval dnešnú časovú štruktúru úrokových mier.

Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders model (skrátene CKLS model) navrhnutý v práci [2] predstavuje zovšeobecnenie Vašíčkovho modelu a CIR modelu. Stochastická diferenciálna rovnica pre r má tvar

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw, \quad (2.4)$$

kde $\gamma \geq 0$ je konštanta. Naozaj pre $\gamma = 0$ dostaneme Vašíčkov model a pre $\gamma = \frac{1}{2}$ dostaneme CIR model.

2.2 Zmena miery

Problematika zmeny miery je pomerne zložitá, preto uvedieme k tejto téme iba základné myšlienky. Podrobnejšie informácie nájde čitateľ v [4]. V našom prípade je cieľom zmeny miery, aby istý Itóov proces (napríklad proces daného diskontovaného podkladového aktíva) pri rizikovo neutrálnej miere Q bol martingal. To znamená, že

z istého výchýleného Brownovho pohybu v reálnej miere P dostaneme Brownov pohyb v súlade s definíciou 1.4.1 pri miere Q . Ak označíme premenné príslušné rizikovo neutrálnej miere vlnovkou, tak podľa Girsanovej vety 1.6.4 platí

$$d\tilde{w} = dw + \lambda(t, r)dt.$$

Ako sme uviedli na začiatku tejto podkapitoly, každý model krátkodobej úrokovej miery môže byť definovaný v reálnej, alebo rizikovo neutrálnej miere. Všeobecný jednofaktorový model (2.1) je v tomto tvare v reálnej miere. Tento model po transformácii do rizikovo neutrálnej miery bude mať tvar

$$dr = (\mu(t, r) - \lambda(t, r)\sigma(t, r))dt + \sigma(t, r)dw,$$

kde $\lambda(t, r)$ sa nazýva trhovú cenu rizika, ktorú bližšie špecifikujeme neskôr. Vidíme, že vo všeobecnosti platí pre tento prechod, že funkcia volatility ostane nezmenená a pre funkciu driftu platí

$$\tilde{\mu}(t, r) = \mu(t, r) - \lambda(t, r)\sigma(t, r), \quad (2.5)$$

kde $\tilde{\mu}(t, r)$ je rizikovo neutrálny drift. Pre Vašíčkov model (2.2) v reálnej miere môžeme teda priradiť jeho ekvivalent v rizikovo neutrálnej miere ako

$$dr = (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma)dt + \sigma dw.$$

My však budeme v tejto práci používať zápis

$$dr = (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}r)dt + \sigma dw, \quad (2.6)$$

pričom

$$\tilde{\alpha} = \kappa\theta - \lambda\sigma \quad \tilde{\beta} = -\kappa.$$

Neskôr, keď budeme kalibrovať modely, sa nám kvôli lepšiemu porovnaniu odhadnutých parametrov hodí aj zápis pri reálnej miere v tvare

$$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma dw, \quad (2.7)$$

kde

$$\alpha = \kappa\theta \quad \beta = -\kappa.$$

V závislosti od kontextu pravdepodobnostnej miery budeme ďalej zápisy (2.6) a (2.7) Vašíčkovho modelu v tvare všeobecného lineárneho driftu používať a ďalej v práci pre ne odvodzovať príslušné vzťahy.

Pre CKLS model (2.4) zapísaný v reálnej miere, je jeho ekvivalent v rizikovo neutrálnej miere

$$dr = (\kappa(\theta - r) - \lambda(r, t)\sigma r^\gamma)dt + \sigma r^\gamma dw.$$

Často sa zvykne zvoliť $\lambda(r, t)$ tak, aby bol výsledný drift lineárny. Ak $\lambda(r, t) = \lambda r^{-\gamma}$, potom vieme model zapísať ako

$$dr = (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}r)dt + \sigma r^\gamma dw, \quad (2.8)$$

pričom

$$\tilde{\alpha} = \kappa\theta - \lambda\sigma \quad \tilde{\beta} = -\kappa.$$

Podobne ako v prípade Vašíčkovho modelu, budeme pri kalibrácii v reálnej miere využívať tvar s všeobecným lineárnym driftom, teda

$$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r^\gamma dw, \quad (2.9)$$

kde

$$\alpha = \kappa\theta \quad \beta = -\kappa.$$

Ďalej budeme pre CKLS model používať zápisy (2.8) a (2.9) v tvare všeobecného lineárneho driftu v závislosti od kontextu pravdepodobnostnej miery.

V ďalšom texte budeme rizikovo neutrálne parametre modelu označovať s vlnovkou, teda $\tilde{\alpha}$ a $\tilde{\beta}$ a reálne parametre ako α, β . Volatilitu $\sigma(t, r)$ budeme značiť bez vlnovky aj v rizikovo neutrálnej miere, lebo pri zmene miery sa mení len drift a volatilita ostáva nezmenená.

2.3 Cena dlhopisu v jednofaktorových modeloch

V nasledujúcich riadkoch odvodíme cenu bezkupónového dlhopisu vo všeobecnom jednofaktorovom modeli (2.1) úrokovej miery tak, ako to je v [8]. Naším cieľom je odvodiť parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu P so splatnosťou v čase T . P závisí

okrem terminálneho času T aj od okamžitého času t a od aktuálnej hodnoty úrokovej miery r , t.j. $P = P(r, t, T)$. Z Ióovej lemy 1.5.1 dostávame

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial P}{\partial r} dw = \mu_B(t, r)dt + \sigma_B(t, r),$$

kde $\mu_B(t, r)$ označuje drift a $\sigma_B(t, r)$ volatilitu ceny dlhopisu. Zostrojíme portfólio pozostávajúce z dlhopisov s dvomi maturitami. V portfóliu budeme mať jeden dlhopis s maturitou T_1 a Δ dlhopisov s maturitou T_2 . Hodnota portfólia π je

$$\pi = P(r, t, T_1) + \Delta P(r, t, T_2).$$

Potom je zmena jeho hodnoty

$$\begin{aligned} d\pi &= dP(r, t, T_1) + \Delta dP(r, t, T_2) \\ &= (\mu_B(r, t, T_1) + \Delta \mu_B(r, t, T_2))dt + (\sigma_B(r, t, T_1) + \Delta \sigma_B(r, t, T_2))dw. \end{aligned}$$

Nech je počet Δ dlhopisov s maturitou T_2

$$\Delta = - \frac{\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2)}.$$

Pre takto zvolenú Δ sa stochastický člen eliminuje a dostaneme bezrizikové portfólio s deterministickou zložkou

$$d\pi = \left(\mu_B(r, t, T_1) - \frac{\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2)} \mu_B(r, t, T_2) \right) dt.$$

Aby sme znemožnili arbitráž, výnos tohto portfólia sa musí rovnať krátkodobej bezrizikovej úrokovej miere r t.j. $d\pi = r\pi dt$, alebo inak

$$\mu_B(r, t, T_1) - \frac{\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2)} \mu_B(r, t, T_2) = r\pi,$$

kde po dosadení za π dostávame

$$\mu_B(r, t, T_1) - \frac{\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2)} \mu_B(r, t, T_2) = r \left(P(r, t, T_1) - \frac{\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2)} P(r, t, T_2) \right).$$

Tento vzťah implikuje rovnosť

$$\frac{\mu_B(r, t, T_1) - rP(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_1)} = \frac{\mu_B(r, t, T_2) - rP(r, t, T_2)}{\sigma_B(r, t, T_2)}.$$

Na začiatku tohto odvodenia sme stanovili časy splatnosti T_1 a T_2 ľubovoľné a teda tento výraz nezávisí od maturity dlhopisu. Z toho vyplýva, že existuje funkcia $\lambda(r, t)$ taká, že

$$\lambda(r, t) = \frac{\mu_B(r, t, T) - rP(r, t, T)}{\sigma_B(r, t, T)} \quad (2.10)$$

pre všetky T . Funkciu λ nazývame aj trhovú cenu rizika, lebo zachytáva očakávaný nárast výnosu dlhopisu na jednotku rizika. Naším pôvodným zámerom však bolo odvodiť parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu. Tú dostaneme dosadením μ_B a σ_B do (2.10) ako

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu - \lambda\sigma) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0. \quad (2.11)$$

V momente splatnosti dlhopisu je bez ohľadu na aktuálnu hodnotu úrokovej miery cena diskontného dlhopisu rovná jednej. Riešenie rovnice $P(r, T, T)$ teda musí spĺňať koncovú podmienku

$$P(r, T, T) = 1 \quad \forall r > 0.$$

2.3.1 Cena dlhopisu vo Vašíčkovom modeli

V nasledujúcich riadkoch opäť vychádzame z [8] a ukážeme, okrem explicitného odvodenia ceny dlhopisu pre Vašíčkov model, aj to, že funkciu troch parametrov $P(r, t, T)$ môžeme zjednodušiť po transformácii $\tau = T - t$ na funkciu dvoch parametrov $P(r, \tau)$. Cenu dlhopisu pre Vašíčkov model budeme teda hľadať ako funkciu okamžitej úrokovej miery $r > 0$ a času do splatnosti $\tau \in (0, T)$. Po dosadení príslušných premenných do (2.11) dostaneme

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}r) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad (2.12)$$

a počiatočnú podmienku

$$P(r, 0) = 1 \quad \forall r > 0.$$

Nech λ je konštanta. Potom budeme hľadať riešenie v tvare

$$P(r, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r}, \quad (2.13)$$

kde funkcie $A(\tau)$ a $B(\tau)$ budú spĺňať počiatočné podmienky $A(0) = 1$ a $B(0) = 0$. Dosadením derivácií, $\frac{\partial P}{\partial \tau}$, $\frac{\partial P}{\partial r}$ a $\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}$ vystupujúcich v rovnici (2.12) dostaneme

$$(\dot{A} - A\dot{B}r) + \frac{\sigma^2}{2} B^2 A - (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}r)AB - rA = 0.$$

Vyjmemo r z členov, ktoré ho obsahujú, aby sme dostali lineárnu rovnicu pre r .

$$\left(-\dot{A} + \frac{\sigma^2}{2}AB^2 - \tilde{\alpha}AB\right) + rA\left(\dot{B} - \tilde{\beta}B - 1\right) = 0.$$

Keďže rovnica (2.12) musí byť splnená $\forall r > 0$, musí aj táto rovnosť platiť pre všetky r . To platí len vtedy, ak sú obe zátvorky rovné nule. Dostávame teda sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} -\dot{A} + \frac{\sigma^2}{2}AB^2 - \tilde{\alpha}AB &= 0 \\ \dot{B} - \tilde{\beta}B - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Obyčajná diferenciálna rovnica pre B je lineárna a preto jej riešenie, ktoré spĺňa počiatočnú podmienku $B(0) = 0$ je možné jednoducho nájsť v tvare

$$B(\tau) = \frac{e^{\tilde{\beta}\tau} - 1}{\tilde{\beta}}.$$

Keď už poznáme funkciu B , integrovaním rovnice pre A dostaneme

$$\ln A = \int \frac{d \ln A}{d\tau} = \int \frac{\sigma^2}{2}B^2 - \tilde{\alpha}B d\tau.$$

Po dosadení funkcie $B(\tau)$ a vypočítaním integrálu s využitím podmienky $A(0) = 1$ dostávame

$$A(\tau) = \exp \left\{ \left[\tau - \frac{1}{\tilde{\beta}}(e^{\tilde{\beta}\tau} - 1) \right] \left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} + \frac{\sigma^2}{2\tilde{\beta}^2} \right) + \frac{\sigma^2}{4\tilde{\beta}^3}(1 - e^{\tilde{\beta}\tau})^2 \right\}.$$

Po dosadení funkcií $A(\tau)$ a $B(\tau)$ do (2.13) poznáme teda explicitné vyjadrenie ceny dlhopisu vo Vašíčkovom modeli.

Ak označíme časovú štruktúru úrokových mier ako $R(r, t, t + \tau)$, v čase r a so splatnosťou v čase $t + \tau$, vieme ju vyjadriť ako

$$\begin{aligned} R(r, t, t + \tau) &= -\frac{\ln P(r, \tau)}{\tau} = \left(1 + \frac{1 - e^{\tilde{\beta}\tau}}{\tilde{\beta}\tau} \right) \left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} + \frac{\sigma^2}{2\tilde{\beta}^2} \right) + \\ &+ \frac{\sigma^2}{4\tilde{\beta}^3} \frac{(e^{\tilde{\beta}\tau} - 1)^2}{\tau} + \frac{e^{\tilde{\beta}\tau} - 1}{\tilde{\beta}\tau} r, \end{aligned} \quad (2.14)$$

čo využijeme neskôr pri generovaní výnosových kriviek v našom programe.

2.3.2 Aproximácia ceny dlhopisu v CKLS modeli

Keďže pre CKLS model neexistuje explicitné vyjadrenie ceny dlhopisu, uvedieme aproximačnú formulu a rád presnosti pre jeho cenu tak, ako je to v [12]. Uvažujme CKLS model pri rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere v tvare (2.8). Potom je cena diskontného dlhopisu $P(r, \tau)$, $r > 0$, $\tau \in (0, T)$ riešením parciálnej diferenciálnej rovnice

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 r^{2\gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}r) \frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0 \quad (2.15)$$

s počiatočnou podmienkou $P(0, r) = 1, \forall r > 0$. Táto parciálna diferenciálna rovnica zahŕňa aj Vašíčkov model, ako podmnožinu triedy CKLS modelov. Naozaj, keď dosadíme $\gamma = 0$ do (2.15), dostaneme parciálnu diferenciálnu rovnicu (2.12) pre cenu dlhopisu vo Vašíčkovom modeli. Rovnako po dosadení $\gamma = \frac{1}{2}$ dostaneme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu v CIR modeli, ktorej explicitné riešenie je tiež známe (pozri [10]). S výnimkou týchto dvoch modelov, však explicitné riešenie pre CKLS model neexistuje, preto uvádzame jednu z jeho aproximácií. Ak zoberieme riešenie rovnice (2.13) pre cenu dlhopisu vo Vašíčkovom modeli z prechádzajúcej podkapitoly, dostaneme pre jeho logaritmus

$$\ln P_{vas}(r, \tau) = \left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} + \frac{\sigma^2}{2\tilde{\beta}^2} \right) \left(\frac{1 - e^{\tilde{\beta}\tau}}{\tilde{\beta}} + \tau \right) + \frac{\sigma^2}{4\tilde{\beta}^3} (1 - e^{\tilde{\beta}\tau})^2 + \frac{1 - e^{\tilde{\beta}\tau}}{\tilde{\beta}} r.$$

Ak v tomto riešení zameníme funkcie volatility jednotlivých modelov, čiže miesto σ dosadíme σr^γ dostaneme aproximáciu riešenia rovnice (2.15)

$$\ln P^{ap}(r, \tau) = \left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{2\tilde{\beta}^2} \right) \left(\frac{1 - e^{\tilde{\beta}\tau}}{\tilde{\beta}} + \tau \right) + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{4\tilde{\beta}^3} (1 - e^{\tilde{\beta}\tau})^2 + \frac{1 - e^{\tilde{\beta}\tau}}{\tilde{\beta}} r. \quad (2.16)$$

Označme teraz $P^{ex}(r, \tau)$ presné, ale neznáme riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice (2.15). Potom podľa [12] platí

$$\ln P^{ap}(r, \tau) - P^{ex}(r, \tau) = c_4(r)\tau^4 + o(\tau^4)$$

ak $\tau \rightarrow 0^+$, pričom

$$c_4(r) = -\frac{1}{24}\gamma r^{2\gamma-2}\sigma^2[2\tilde{\alpha}r + 2\tilde{\beta}r^2 + (2\gamma - 1)r^{2\gamma}\sigma^2].$$

Pre dôkaz tohto tvrdenia pozri [12].

3 Metódy kalibrácie modelov úrokových mier

Existujú viaceré spôsoby kalibrácie modelov úrokových mier. Od konkrétnej metódy sa pochopiteľne považuje, aby odhadla model a jeho parametre tak že získaný proces opisuje čo najlepšie skutočný vývoj úrokovej miery, ako aj to, aby výpočtová zložitosť metódy bola prijateľná. Pri zložitejších algoritmoch, od ktorých očakávame široké spektrum testovaných hodnôt a výstupov to totiž zaberie istý čas na vyrátanie, o čom sme sa presvedčili v nami naprogramovaných algoritmoch. Treba však jedným dychom dodať, že tok programu nemusel byť optimálny.

Vo všeobecnosti sa dajú modely kalibrovať z časového radu krátkodobej úrokovej miery, snahou o čo najväčšiu zhodu teoretických a reálnych výnosových kriviek, alebo kombináciou týchto dvoch prístupov. Medzi najpoužívanejšie metódy kalibrácie patria metóda maximálnej vierohodnosti, kde je možné všetky parametre modelu odhadnúť z časového radu short rate a metóda, ktorá minimalizuje vzdialenosť teoretických a reálnych výnosových kriviek, kde do algoritmu vstupujú okrem okamžitej úrokovej miery aj výnosové krivky. V ďalšej časti práce predstavíme čitateľovi obe metódy. V praktickej časti našej práce sme totiž navrhli algoritmy, ktoré využívajú obe spomínané metódy a kombinujú ich výstupy.

3.1 Metóda maximálnej vierohodnosti

V nasledujúcich riadkoch najprv odvodíme podmienené rozdelenie úrokovej miery vo Vašíčkovom modeli, ktoré je potrebné v metóde maximálnej vierohodnosti. Potom odvodíme účelovú funkciu vierohodnosti pre Vašíčkov model ktorej maximalizáciou získame odhady parametrov neznámeho modelu. Nakoniec tento postup zovšeobecníme tak, že pre CKLS model (2.4) získame aproximáciu vierohodnostnej funkcie. Vychádzame pritom z [8].

3.1.1 Metóda maximálnej vierohodnosti pre Vašíčkov model

Podmienené rozdelenie okamžitej úrokovej miery je možné odvodiť viacerými spôsobmi. Napríklad v [8] odvodili autori toto rozdelenie pomocou Fokker - Planckovej parciálnej diferenciálnej rovnice. My však uvádzame iné odvodenie z rovnakej knihy. Vynásobíme

stochastickú diferenciálnu rovnicu (2.2) pre Vašíčkov model výrazom $e^{-\beta s}$. Využitím Itóovej lemy pre $f(s, t) = e^{-\beta s}r$ a krátkych úpravách získame vzťah

$$d(e^{-\beta s}r_s) = -\beta\theta e^{-\beta s}ds + \sigma e^{-\beta s}dw_s,$$

ktorý keď integrujeme s hranicami od t do $t + \Delta t$ dostaneme

$$\begin{aligned} e^{-\beta(t+\Delta t)}r_{t+\Delta t} - e^{-\beta t}r_t &= \alpha \int_t^{t+\Delta t} e^{-\beta s}ds + \sigma \int_t^{t+\Delta t} e^{-\beta s}dw_s \\ &= -\frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta(t+\Delta t)} - e^{-\beta t}) + \sigma \int_t^{t+\Delta t} e^{-\beta s}dw_s. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Po úprave dostaneme explicitné vyjadrenie náhodnej premennej $r_{t+\Delta t}$

$$r_{t+\Delta t} = e^{-\kappa\Delta t}r_t + (1 - e^{-\kappa\Delta t})\theta + \sigma e^{-\kappa(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s}dw_s.$$

Podmienené rozdelenie $r_{t+\Delta t}$ pri danom r_t je normálne a jeho stredná hodnota je

$$E(r_{t+\Delta t}|r_t) = e^{\beta\Delta t}r_t - \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{\beta\Delta t}).$$

Pre varianciu platí

$$\begin{aligned} Var(r_{t+\Delta t}|r_t) &= \sigma^2 e^{2\beta(t+\Delta t)} Var\left(\int_t^{t+\Delta t} e^{-\beta s}dw_s\right) \\ &= \sigma^2 e^{2\beta(t+\Delta t)} E\left(\left[\int_t^{t+\Delta t} e^{-\beta s}dw_s\right]^2\right) \\ &= \sigma^2 e^{2\beta(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} (e^{-\beta s})^2 ds \\ &= \frac{\sigma^2}{2\beta}(e^{2\beta\Delta t} - 1). \end{aligned}$$

Pri úprave tohto vzťahu sme využili Itóovu izometriu uvedenú v knihe [7]. Podmienené rozdelenie $r_{t+\Delta t}$ pri danom r_t je teda

$$r_{t+\Delta t}|r_t \sim N\left(e^{\beta\Delta t}r_t - \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{\beta\Delta t}), \frac{\sigma^2}{2\beta}(e^{2\beta\Delta t} - 1)\right),$$

čo môžeme pre model v tvare (2.2) zapísať ako

$$r_{t+\Delta t}|r_t \sim N\left(e^{-\kappa\Delta t}r_t + \theta(1 - e^{-\kappa\Delta t}), \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t})\right). \quad (3.2)$$

Majme teraz časový rad štatistických meraní krátkodobej úrokovej miery, ktorého hodnoty označíme ako $r_0, r_{\Delta t}, r_{2\Delta t}, \dots, r_{N\Delta t}$ pozorované v okamihoch $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, N, \Delta t$.

Ak označíme

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{\sigma^2}{2\beta}(e^{2\beta\Delta t} - 1) \\ \epsilon &= e^{\beta\Delta t}, \end{aligned}$$

potom vieme pre tento prípad vyjadriť funkciu hustoty normálneho rozdelenia v tvare

$$f(r_{i+1}|r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} \exp \left\{ -\frac{[r_{i+1} - \epsilon r_i + \frac{\alpha}{\beta}(1 - \epsilon)]^2}{2v^2} \right\}.$$

Keďže predpokladáme nezávislosť pozorovaní, vieme vyjadriť funkciu vierohodnosti ako súčin hustôt náhodných, normálne rozdelených premenných ako

$$L(\alpha, \beta, v^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} \exp \left\{ -\frac{[r_{i+1} - \epsilon r_i + \frac{\alpha}{\beta}(1 - \epsilon)]^2}{2v^2} \right\},$$

pričom častejšie sa používa logaritmická funkcia vierohodnosti (ktorej argument maxima ostáva nezmenený) v tvare

$$l(\alpha, \beta, v^2) = \ln L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi v^2 - \frac{1}{2v^2} \sum_{i=1}^n [r_{i+1} - \epsilon r_i + \frac{\alpha}{\beta}(1 - \epsilon)]^2. \quad (3.3)$$

Pre model v tvare (2.2) dostaneme

$$l(\epsilon, \theta, v^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi v^2 - \frac{1}{2v^2} \sum_{i=1}^n [r_{i+1} - \epsilon r_i - \theta(1 - \epsilon)]^2. \quad (3.4)$$

Cieľom je maximalizovať funkciu (3.3) vzhľadom na parametre ϵ, θ, v^2 , resp. funkciu (3.4) vzhľadom na α, β, v^2 . To dosiahneme pomocou parciálnych derivácií, ktoré tu už však neuvádzame a čitateľ ich môže nájsť v [3]. Z takto odhadnutých parametrov už ľahko získame spätnou transformáciou parametre κ, σ . Ak fixujeme parametre β a σ , optimalizujeme funkciu (3.3) iba vzhľadom na α a vieme explicitne vyjadriť jeho optimálnu hodnotu ako

$$\alpha = \frac{\beta}{n(e^{\beta\Delta t} - 1)} \sum_{i=1}^n (r_{i+1} - e^{\beta\Delta t} r_i). \quad (3.5)$$

Tento fakt sme pri kalibrácii využili tak, že sme zvolili dostatočne široký interval pre parametre β a σ , v ktorom sme očakávali ich skutočné hodnoty a diskretizovali ich. Následne sme pre každú kombináciu β, σ z týchto množín vypočítali optimálnu hodnotu α podľa vzťahu (3.5). Každú trojicu α, β, σ sme dosadili do funkcie vierohodnosti (3.3) a z nich vybrali najväčšiu hodnotu. Príslušné odhady α, β, σ sú odhadnuté parametre modelu podľa tejto metódy.

3.1.2 Aproximácia funkcie vierohodnosti pre CKLS model

V tejto podkapitole odvodíme aproximáciu funkcie vierohodnosti podľa Nowmana [8] pre CKLS model (2.4). V prípade, že $\gamma = 0$ sa odvodená aproximácia bude zhodovať s funkciou vierohodnosti pre Vašíčkov model z predchádzajúcej podkapitoly. Ide teda o priamočiare zovšeobecnenie, nakoľko aj CKLS model je zovšeobením Vašíčkovho a iných modelov.

Ak označíme volatilitu procesu ako $\sigma(r)$ a dosadíme ju miesto σ do (3.1), dostaneme

$$\begin{aligned} e^{-\beta(t+\Delta t)}r_{t+\Delta t} - e^{-\beta t}r_t &= \alpha \int_t^{t+\Delta t} e^{-\beta s} ds + \int_t^{t+\Delta t} \sigma(r_s)e^{-\beta s} dw_s \\ &= -\frac{\alpha}{\beta}(e^{-\beta(t+\Delta t)} - e^{-\beta t}) + \int_t^{t+\Delta t} \sigma(r_s)e^{-\beta s} dw_s. \end{aligned}$$

Tento výraz sa od zodpovedajúceho výrazu (3.1) v prípade Vašíčkovho modelu líši tým, že $\sigma(r)$ je teraz súčasťou integrálu. Nemožno ho vyňať pred integrál ako v prípade Vašíčkovho modelu, kde nám to potom umožnilo explicitne vypočítať jeho rozdelenie. Tento integrál môžeme v prípade $\gamma \neq 0$ iba aproximovať. Predpokladajme teraz, že volatilita $\sigma(r)$ je na krátkom intervale $[t, t + \Delta t]$ konštantná. V prípade dostatočne malých intervalov je toto rozumný predpoklad a aproximácia sa blíži skutočnej hodnote integrálu. Nech sa volatilita rovná hodnote na začiatku tohto intervalu, teda $\sigma(r_s) \approx \sigma r_t^\gamma$ pre $s \in [t, t + \Delta t)$. Aproximácia integrálu teda vyzerá nasledovne:

$$\int_t^{t+\Delta t} \sigma(r_s)e^{-\beta s} dw_s \approx \sigma r_t^\gamma \int_t^{t+\Delta t} e^{-\beta s} dw_s.$$

Ďalej postupujeme rovnako ako v prípade Vašíčkovho modelu a dostaneme funkciu vierohodnosti v rovnakom tvare ako (3.3) s tým, že výraz v^2 sa zmení na

$$v_i^2 = \frac{\sigma^2}{2\beta}(e^{2\beta\Delta t} - 1)r_{i-1}^{2\gamma}$$

a keďže je závislý od r_i , stane sa súčasťou sumy, čiže máme

$$l(\alpha, \beta, v^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi v^2 - \frac{1}{2v^2} \sum_{i=1}^n [r_{i+1} - e^{\beta\Delta t}r_i + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{\beta\Delta t})]^2. \quad (3.6)$$

Opäť maximalizujeme túto funkciu vzhľadom na α, β, v^2 . My sme fixovali parametre σ a γ (keďže $v^2(\sigma, \gamma)$, fixujeme vlastne v^2) a odhadovali sme parametre reálneho driftu α a β ako dvojrozmernú optimalizáciu pomocou funkcie `optim` v softvéri R, ktorej implementácia využíva BFGS optimalizačný algoritmus. Táto problematika patrí pod

nelineárne programovanie, bližšie sa jej nevenujeme a podrobnejšie informácie môže čitateľ nájsť v [5]. Zvolíme teda dostatočne široké intervaly v ktorých očakávame skutočné hodnoty parametrov σ, γ a diskretizujeme ich. Pre každú dvojicu σ, γ z nami zvolených intervalov teda dostaneme optimálnu dvojicu α, β , ktorú keď spolu s príslušnou dvojicou σ, γ dosadíme do vierohodnostnej funkcie (3.6), obdržíme jej optimálnu hodnotu pre danú dvojicu σ, γ . Podobne ako vo Vašíčkovom modeli jednotlivé hodnoty optima porovnáme a vyberieme tú s najvyššou hodnotou. Príslušné parametre α, β, σ a γ predstavujú odhady parametrov CKLS modelu.

3.2 Metóda minimalizujúca vzdialenosť teoretických a reálnych výnosových kriviek

Cieľom tejto metódy je minimalizovať určitú mieru vzdialenosti medzi skutočnými a modelom implikovanými výnosovými krivkami. V tejto podkapitole vychádzame z článku [12], kde je funkcia vzdialenosti daná ako

$$F = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} (R(\tau_j, r_i) - R_{ij})^2, \quad (3.7)$$

kde $r_1, \dots, r_i, \dots, r_n$ je krátkodobá úroková miera pozorovaná v i -ty deň, $\tau_1, \dots, \tau_j, \dots, \tau_m$ je j -ta maturita úrokových mier, $R(\tau_j, r_i)$ je teoretická úroková miera pre r_i s maturitou τ_j vypočítaná z modelu, R_{ij} je úroková miera pozorovaná v i -ty deň s maturitou τ_j a w_{ij} sú zodpovedajúce váhy pre konkrétny rozdiel teoretickej a skutočnej úrokovej miery v i -ty deň s maturitou τ_j . Podľa vzťahu (1.1) ak poznáme cenu dlhopisu $P(\tau, r)$, vieme pri daných maturitách vypočítať aj časovú štruktúru úrokových mier $R(\tau, r)$ implikovaných modelom. Pre Vašíčkov model sme odvodili presné riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice (2.12) v tvare (2.13). Pre CKLS model poznáme iba jeho aproximáciu (2.16). V oboch prípadoch sa dajú prirodzené logaritmy riešení prepísať ako lineárna funkcia parametrov $\tilde{\alpha}$ a σ^2

$$\ln P(\tau, r) = c_0(\tau, r) + c_1(\tau, r)\tilde{\alpha} + c_2(\tau, r)\sigma^2,$$

kde v oboch modeloch majú koeficienty c_0 a c_1 tvar

$$c_0(\tau_j, r_i) = \frac{r_i(1 - e^{\tilde{\beta}\tau_j})}{\tilde{\beta}} \quad c_1(\tau_j) = \frac{1}{\tilde{\beta}} \left(\frac{1 - e^{\tilde{\beta}\tau_j}}{\tilde{\beta}} + \tau_j \right).$$

V závislosti od modelu sa bude líšiť koeficient c_2 . Najprv rozoberieme prípad Vašíčkovho modelu.

3.2.1 Odhady pre Vašíčkov model

Koeficient c_2 môžeme v prípade Vašíčkovho modelu napísať ako

$$c_2(\tau_j) = \frac{1}{2\tilde{\beta}^2} \left[\frac{1 - e^{\tilde{\beta}\tau_j}}{\tilde{\beta}} + \tau_j + \frac{(1 - e^{\tilde{\beta}\tau_j})^2}{2\tilde{\beta}} \right].$$

Toto vyjadrenie dosadíme do (3.7) a pre Vašíčkov model dostaneme

$$F = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} [c_0(\tau_j, r_i) + c_1(\tau_j)\tilde{\alpha} + c_2(\tau_j)\sigma^2 + R_{ij}\tau_j]^2. \quad (3.8)$$

Od tohto momentu sa možné prístupy k hľadaniu optima tejto funkcie líšia. My sme pri kalibrácii použili metódu, kde sme fixovali parametre $\tilde{\beta}$ a σ a dostali sme jednorozmernú optimalizáciu pre parameter $\tilde{\alpha}$. Ak teda fixujeme parametre $\tilde{\beta}$ a σ je tento funkcionál kvadratická funkcia parametra $\tilde{\alpha}$ a jeho optimálna hodnota je

$$\tilde{\alpha} = - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} [c_0(\tau_j, r_i) + c_2(\tau_j)\sigma^2 + R_{ij}\tau_j] c_1(\tau_j)}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_1(\tau_j)^2}. \quad (3.9)$$

Ak zvolíme dostatočne široké intervaly v ktorých očakávame skutočné hodnoty pre parametre $\tilde{\beta}$, σ a diskretizujeme ich, vieme pre každú ich kombináciu vyrátať optimálnu hodnotu $\tilde{\alpha}$ podľa vzťahu (3.9). Následným dosadením príslušnej trojice do (3.8) získame optimálnu hodnotu účelovej funkcie pre dané $\tilde{\beta}$ a σ . Optimálna trojica parametrov bude tá, pre ktorú sa nadobúda najmenšia hodnota účelovej funkcie F .

3.2.2 Odhady pre CKLS model

Koeficient c_2 je v prípade CKLS modelu v tvare

$$c_2(\tau_j) = \frac{r^{2\gamma}}{2\tilde{\beta}^2} \left[\frac{1 - e^{\tilde{\beta}\tau_j}}{\tilde{\beta}} + \tau_j + \frac{(1 - e^{\tilde{\beta}\tau_j})^2}{2\tilde{\beta}} \right].$$

Keď dosadíme cenu dlhopisu v tomto tvare do (3.7) podobne dostávame

$$F = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} [c_0(\tau_j, r_i) + c_1(\tau_j)\tilde{\alpha} + c_2(\tau_j)\sigma^2 + R_{ij}\tau_j]^2. \quad (3.10)$$

V CKLS modeli okrem parametrov $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ a σ odhadujeme aj parameter γ . Tak isto sa dá zvoliť viacero postupov na nájdenie optima tohto funkcionálu. My sme fixovali parametre σ a γ a odhadovali sme parametre rizikovo neutrálneho driftu $\tilde{\alpha}$ a $\tilde{\beta}$ ako dvojrozmernú optimalizáciu pomocou funkcie `optim` v softvéri R, podobne ako pri metóde maximálnej vierohodnosti pre tento model. Zvolíme teda dostatočne široké intervaly v ktorých očakávame skutočné hodnoty parametrov σ, γ a diskretizujeme ich. Pre každú dvojicu σ, γ teda dostaneme optimálnu dvojicu $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$, ktorú keď spolu s príslušnou dvojicou σ, γ dosadíme do účelovej funkcie F , obdržíme jej optimálnu hodnotu pre danú dvojicu σ, γ . Jednotlivé hodnoty optima opäť porovnáme a vyberieme tú s najnižšou hodnotou. Príslušné parametre $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \sigma$ a γ predstavujú odhady parametrov touto metódou pre CKLS model.

3.3 Odhad trhovej ceny rizika

V práci [3] sa navrhuje odhadnúť trhovú cenu rizika pomocou minimalizácie vzdialenosti teoretických a reálnych výnosových kriviek. V prvej fáze sa odhadnú všetky parametre modelu okrem trhovej ceny rizika buď metódou maximálnej vierohodnosti, alebo minimalizáciou vzdialenosti trhových a teoretických výnosových kriviek. V druhej fáze minimalizujeme vzdialenosť výnosových kriviek s tým, že jediným neznámym parametrom v účelovej funkcii je trhovú cenu rizika λ a teda ide o jednorozmernú optimalizáciu.

V našej práci však optimalizujeme jednu sadu dát súčasne pomocou funkcie vierohodnosti aj minimalizácie vzdialenosti reálnych a teoretických výnosov. Najprv teda odhadneme všetky parametre modelu v reálnej aj rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere a potom zo získaných odhadov konečne odhadneme aj trhovú cenu rizika. Pre všeobecný jednofaktorový model platí (2.5):

$$\tilde{\mu}(t, r) = \mu(t, r) - \lambda(r)\sigma(t, r),$$

kde $\tilde{\mu}(t, r)$ je drift modelu v rizikovo neutrálnej miere a $\mu(t, r)$ je drift pri reálnej miere. Inak povedané rizikovo neutrálny drift získame cez minimalizáciu vzdialenosti trhových a teoretických výnosov a reálny drift metódou maximálnej vierohodnosti. Pre Vašíčkov teda platí

$$\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}r = \alpha + \beta r - \lambda\sigma. \quad (3.11)$$

V našej práci sme optimalizujeme Vašíčkov model pomocou dvoch popísaných metód pri fixovanej bete a sigme. V tomto prípade to znamená $\tilde{\beta} = \beta$ a teda môžeme vyjadriť λ ako konštantu nezávislú od r v tvare

$$\lambda = \frac{\alpha - \tilde{\alpha}}{\sigma}.$$

V prípade odhadu trhovej ceny rizika pre CKLS model postupujeme analogicky, čiže podľa (2.5) dostávame

$$\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}r = \alpha + \beta r - \lambda \sigma r^\gamma.$$

Ako sme písali, pri odhadovaní tohto modelu fixujeme σ a γ pre obe použité metódy a teda na rozdiel od Vašíčkovho modelu máme $\tilde{\beta} \neq \beta$ a odhadujeme osobitne obomi metódami oba parametre driftu α, β resp. $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$. Pre trhovú cenu rizika teda platí

$$\lambda(r) = \frac{\alpha - \tilde{\alpha} + (\beta - \tilde{\beta})r}{\sigma r^\gamma} = \frac{\alpha - \tilde{\alpha}}{\sigma r^\gamma} + \frac{\beta - \tilde{\beta}}{\sigma} r^{1-\gamma}. \quad (3.12)$$

V CKLS modeli je teda $\lambda(r)$ naozaj závislá od okamžitej úrokovej miery r .

3.4 Vylepšenie kalibrácie Vašíčkovho modelu

Podľa prác [1] a [9] je odhad driftu metódou maximálnej vierohodnosti pre malý počet dát veľmi vychýlený, o čom sme sa presvedčili aj v testoch na vygenerovaných dátach podľa podmieneného rozdelenia úrokovej miery. Odhady parametrov α a β sú opačne vychýlené (β nadol, α nahor) tak, že ich pomer, teda pôvodný parameter θ , ostáva pomerne robustný. Odhady všetkých parametrov sú asymptoticky presné pre všetky parametre Vašíčkovho modelu. V praxi nám metóda maximálnej vierohodnosti dávala pri rádovo desiatkách dát veľmi vychýlené odhady, pri stovkách to záviselo od konkrétnej sady dát a až pri tisíckach dát odhadovala metód parametre β a α relatívne presne. V situáciach, kde sa bežne kalibruje model zo časového radu short rate za jeden kvartál, teda 63 hodnôt, si tento problém vyžaduje aspoň čiastočné riešenie. Ukázalo sa, že metóda maximálnej vierohodnosti, ako aj metóda založená na minimalizácii vzdialenosti reálnych a teoretických výnosových kriviek dávala veľmi presné odhady pre parameter σ . Po prvotných odhadoch obomi metódami navrhujeme teda v druhom kroku zafixovať parameter σ na hodnote aritmetického priemeru pre odhadnuté optimálne hodnoty σ a $\tilde{\sigma}$, teda

$$\sigma_{fix} = \frac{\sigma + \tilde{\sigma}}{2}. \quad (3.13)$$

Ak označíme

$$r_{i+1} - e^{\beta\Delta t} r_i + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{\beta\Delta t}) = S,$$

tak sa v prípade konštantnej $\sigma = \sigma_{fix}$ logaritmickej funkcia vierohodnosti pre Vašíčkov model zmení na

$$l(\alpha, \beta) = -\frac{n}{2} \left(\ln 2\pi\sigma_{fix}^2 + \ln \frac{e^{2\beta\Delta t} - 1}{2\beta} \right) + \frac{\beta}{\sigma_{fix}^2(1 - e^{2\beta\Delta t})} \sum_{i=1}^n S^2.$$

Túto funkciu treba maximalizovať vzhľadom na α, β . Skúsime teda nájsť jej parciálne derivácie podľa týchto premenných v bode maxima. Po krátkych úpravách dostávame

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \beta} &= \frac{1}{2\beta^2} [n\sigma_{fix}^2(1 - e^{2\beta\Delta t})(-2e^{2\beta\Delta t}\beta\Delta t + e^{2\beta\Delta t} - 1)] + \\ &+ \left\{ \frac{1}{\beta^2} [\beta(e^{2\beta\Delta t} - 1) - 2\beta^2\Delta t e^{2\beta\Delta t}] \sum_{i=1}^n S^2 \right\} + \\ &+ 2(1 - e^{2\beta\Delta t})(e^{\beta\Delta t}\Delta t) \sum_{i=1}^n S \left(r_i + \frac{\alpha}{\beta} \right) = 0. \end{aligned}$$

Pre druhú parciálnu deriváciu v bode maxima platí

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{1 - e^{\beta\Delta t}}{\sigma^2(1 - e^{2\beta\Delta t})} 2 \sum_{i=1}^n S = 0.$$

Z tejto sústavy rovníc nevieme explicitne vyjadriť argument maxima (α, β) , preto sme v našom programe zafixovali premennú β a odhadovali α pomocou funkcie optimize ako jednorozmernú numerickú optimalizáciu. Iteráciou cez diskretný vektor hodnôt β sme pre každú hodnotu β dostali optimálnu α a optimálnu hodnotu $l(\alpha, \beta)$. Ako konečnú optimálnu kombináciu nakoniec vyberieme tú, pre ktorú sa dosahuje najväčšia hodnota $l(\alpha, \beta)$.

V metóde minimalizácie vzdialenosti teoretických a trhových výnosových kriviek sa pri konštantnej σ vo výrazoch (3.8) a (3.9) iba zamení premenná σ za σ_{fix} a ďalej postupujeme rovnako s jediným rozdielom, že iterujeme iba cez premennú $\tilde{\beta}$.

4 Testovanie programov na vygenerovaných dátach

V tejto kapitole analyzujeme testy našich programov v softvéri R na vygenerovaných dátach. Pod vygenerovanými dátami rozumieme dáta vygenerované pre nám známy model a jeho hodnoty parametrov pomocou podmieneného rozdelenia úrokovej miery. Následne vygenerujeme aj príslušné výnosové krivky pre určené maturity. Keďže kalibrujeme dva modely úrokovej miery, aj dáta musíme generovať dvomi spôsobmi. V prípade Vašíčkovho modelu to nie je problém, pretože sme odvodili podmienené rozdelenie úrokovej miery (3.2) v tomto modeli, ako aj vzťah (2.14) pre časovú štruktúru úrokových mier. Pre CKLS model však nepoznáme podmienené rozdelenie krátkodobej úrokovej miery pre γ iné ako 0, alebo 0,5. Preto nemôžeme vygenerovať short rate presne pre ľubovoľný CKLS model. Keďže pri generovaní dát pomocou podmieneného rozdelenia úrokovej miery poznáme presné parametre modelu, slúži kalibrácia na týchto dátach hlavne na otestovanie naprogramovaných algoritmov. Pre tento účel nám teda bohato poslúži CIR model (2.3), teda CKLS model s $\gamma = 0,5$.

Na presné generovanie časového radu krátkodobej úrokovej miery potrebujeme poznať jej podmienené rozdelenie. Nech poznáme hodnotu úrokovej miery r_i nameranej v čase i . Podľa [11] je podmienené rozdelenie úrokovej miery r_{i+1} v čase $i + 1 > i$ podmienené hodnotou r_i necentrálny chi-kvadrát

$$r_{i+1}|r_i \sim c\chi_d'^2(f), \quad (4.1)$$

pričom

$$c = \frac{1}{4\beta}\sigma^2(e^{\beta\Delta t} - 1) \quad d = \frac{4\alpha}{\sigma^2} \quad f = \frac{4\beta e^{\beta\Delta t}}{\sigma^2(e^{\beta\Delta t} - 1)}r_i.$$

Bližšie informácie napríklad, napríklad o strednej hodnote a variancii tohto rozdelenia nájde čitateľ v [10]. Teraz uvidíme vzorec, ktorý sme použili na generovanie časovej štruktúry úrokových mier pre CIR model, ktorý je odvodený v [8]

$$R(r, t, t + \tau) = -\frac{1}{\tau} \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \ln \left[\frac{2\phi e^{(\phi+\psi)\tau/2}}{(\psi + \phi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi} \right] + \frac{1}{\tau} \frac{2(e^{\phi\tau} - 1)}{(\phi + \psi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi} r, \quad (4.2)$$

kde

$$\psi = \kappa + \lambda\sigma \quad \phi = \sqrt{(\kappa + \lambda\sigma)^2 + 2\sigma^2}.$$

4.1 Vašíčkov model - dvojkriteriálna optimalizácia pri voľnej volatilitate (Kalibrácia 1)

Cieľom tejto podkapitoly je objasniť novú dvojkriteriálnu metódu na odhad parametrov α, β a σ Vašíčkovho modelu v tvare (2.6). Pri zohľadnení jedného kritéria sa za najúčinnšie metódy považujú maximalizácia funkcie vierohodnosti a minimalizácia vzdialenosti reálnych a modelom implikovaných výnosových kriviek. V tejto metóde sa pokúšame odhadnúť parametre modelu tak, že optimalizujeme súčasne obe kritéria. Našou úlohou je odhadnúť neznáme parametre Vašíčkovho modelu z historických dát priebehu short rate a výnosových kriviek. Zhrnutie tohto prístupu uvádzame v nasledovnej schéme.

Kalibrácia 1: Vašíčkov model pri voľnej σ

Vstupy

- Skutočné hodnoty parametrov α, β, σ odhadovaného modelu
- Počet vygenerovaných úrokových mier n , vektor maturít úrokových mier τ s dĺžkou m , časový úsek medzi dvomi pozorovaniami dt
- Množiny testovaných hodnôt parametrov β a σ

Algoritmus

- Vygenerovať úrokové miery a výnosové krivky na základe skutočných hodnôt parametrov modelu
- Pre každú kombináciu β, σ z množiny testovaných hodnôt vyrátať vzhľadom na minimalizáciu hodnoty zápornej funkcie vierohodnosti (3.3) optimálnu hodnotu α podľa (3.5)
- Dosadiť všetky trojice β, σ, α do účelovej funkcie a vybrať minimum
- Pre každú kombináciu β, σ z množiny testovaných hodnôt vyrátať vzhľadom na minimalizáciu hodnoty funkcionálu (3.8) optimálnu hodnotu $\tilde{\alpha}$ podľa (3.9)

- Dosadiť všetky trojice $\beta, \sigma, \tilde{\alpha}$ do účelovej funkcie a vybrať minimum
- Pre každú kombináciu β, σ vyrátať trhovú cenu rizika λ
- Identifikovať efektívne kombinácie parametrov, vyhovujúce vzťahu (4.3)
- Vyrátať pre každý efektívny bod dvojkriteriálnu mieru efektivity - 2krit podľa (4.4)

Výstupy

- Odhady parametrov α, β, σ podľa metódy maximálnej vierohodnosti
- Odhady parametrov $\tilde{\alpha}, \beta, \sigma$ podľa minimalizácie miery vzdialenosti medzi teoretickými a trhovými výnosmi
- Efektívne kombinácie parametrov a odhady $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \sigma, \lambda, 2krit$ pre každý z efektívnych bodov
- Grafické zobrazenie všetkých, aj efektívnych bodov

Úloha môže znieť takto:

Predpokladajme, že sa krátkodobá úroková miera riadi Vašíčkovým modelom. K dispozícií máme hodnoty short rate za jeden štvrt rok (teda 63 hodnôt) pre každý obchodovateľný deň a príslušné výnosové krivky. Odhadnite parametre α, β, σ neznámeho Vašíčkovho modelu.

V tejto podkapitole vygenerujeme short rate podľa vzťahu (3.2) a príslušné výnosové krivky podľa (2.14). Funkcionál (3.8) minimalizujeme, kým vierohodnostnú funkciu (3.3) treba maximalizovať. My však budeme minimalizovať $-\ln L$, aby sme optimalizovali obe účelové funkcie jedným smerom a mohli ich hodnoty vykresliť a porovnať v jednom scatterplote.

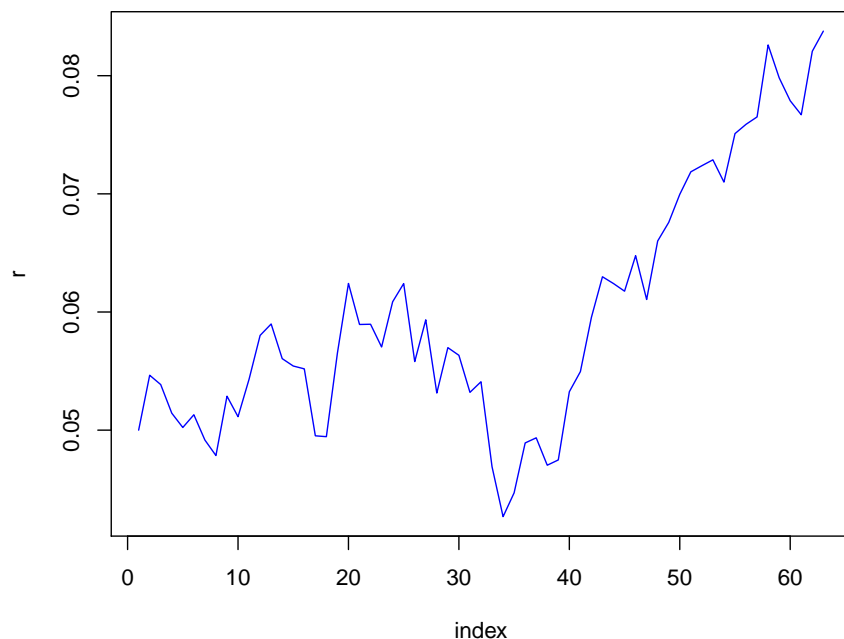
Vidíme, že ML odhad optimalizujeme vzhľadom na α, β a σ a fitujeme krivky vzhľadom na $\tilde{\alpha}, \beta$ a σ . V prípade fixovaných hodnôt β a σ vieme explicitne vyjadriť optimálnu hodnotu parametra α ako (3.5) a parametra $\tilde{\alpha}$ ako (3.9). Následným dosadením optimálnych parametrov a príslušných dvojíc β a σ vieme zistiť hodnoty účelových funkcií.

V našom programe v softvéri R sme si teda zvolili množiny diskretných hodnôt z istých intervalov pre β a σ , v ktorých predpokladáme výskyt skutočných hodnôt. Pre každú kombináciu β a σ sme vypočítali α a $\tilde{\alpha}$ a dosadili trojicu α, β, σ do (3.3), resp. $\tilde{\alpha}, \beta, \sigma$ do (3.8). Ak sme napríklad zvolili 50 testovaných hodnôt pre β a 60 hodnôt pre σ , dostali sme celkom $50 \times 60 = 3000$ hodnôt oboch účelových funkcií. Zaznamenané hodnoty oboch účelových funkcií sme potom vykreslili do scatterplotu z ktorého sme potom vyhodnocovali efektívnosť alebo neefektívnosť jednotlivých bodov a teda kombinácií parametrov. Efektívne body sú také, ktoré sú v zmysle posúdenia oboch kritérií optimálne, čo neskôr presne definujeme. Výsledky dvojkriteriálneho prístupu sa líšia od jednokriteriálneho tým, že v prípade vyhodnocovania dvoch kritérií sa najčastejšie ukázalo efektívnych bodov viac. To znamená že nemôžeme jednoznačne prehlásiť jediná kombináciu parametrov za optimálnu, ako je to v prípade jednokriteriálneho prístupu. Ukážeme si niekoľko výstupov nášho programu pre 63 (štvrt' rok) denných hodnôt short rate.

Najprv sme teda vygenerovali 63 short rate-ov podľa podmienenej hustoty normálneho rozdelenia (3.2). Parametre, podľa ktorých sa tieto hodnoty generovali (môžeme ich nazvať skutočné parametre modelu) sme si sami určili a uvádzame ich v nasledovnej tabuľke:

Názov parametra	α	β	σ	n	m	dt
Hodnota parametra	0.05	-1	0.06	63	12	1/252

Pre úplnosť, vektor časov do splatnosti τ je 12 miestny vektor s rovnomerne rozloženými hodnotami medzi $1/12$ a 1 , čiže časy do splatnosti rastú o 1 mesiac. Vygenerovaný priebeh short rate zobrazuje nasledovný obrázok 4.1.



Obr. 4.1: Priebeh short rate

Množiny, pre ktoré testujeme parametre β a σ , sme zvolili tak, aby dostatočne pokrývali skutočné parametre modelu a ich okolie a zároveň, aby bolo delenie dostatočne jemné. Sú nasledovné:

β	$\{-2.0, -1.9, \dots, -0.2, -0.1\}$
σ	$\{0.01, 0.02, \dots, 0.19, 0.20\}$

Výsledky odhadov podľa metódy maximálnej vierohodnosti:

Názov parametra	α	β	σ	$-\ln L$
Odhad parametra	0.2565715	-2	0.05	-265.8918116

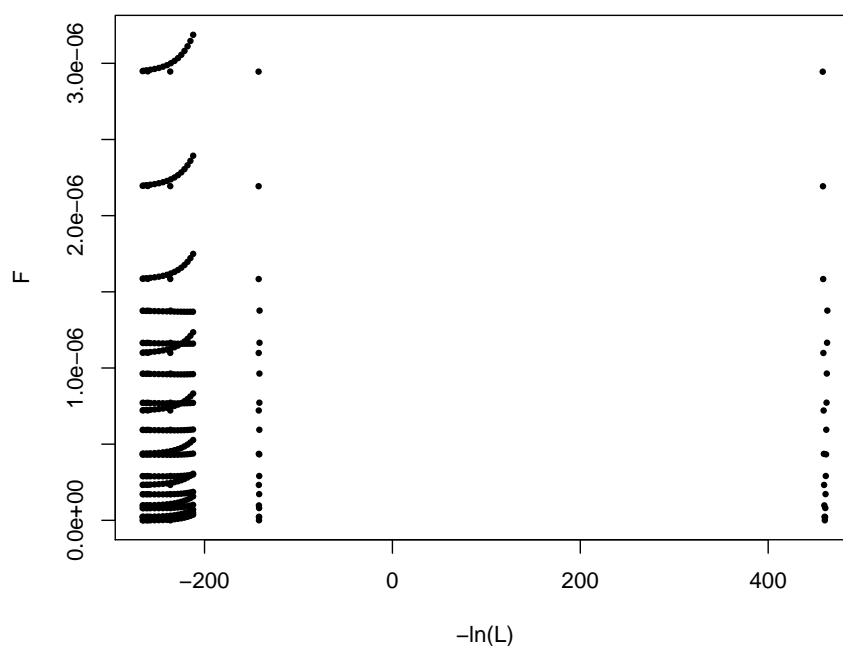
Pozorujeme vychýlenosť odhadov β a α pomocou tejto metódy popísanú v prácach [1] a [9]. V prípade fitovania kriviek potrebujeme aj reálne výnosové krivky R_{ij} . Pre účely overenia postupu však teraz vygenerujeme výnosové krivky na základe skutočných parametrov modelu. Poslúži nám to zároveň na overenie správnosti postupu a nášho kódu, keďže hodnota funkcionálu (3.8) v optime bude nulová a odhadnuté parametre týmto spôsobom by mali byť zhodné so skutočnými parametrami. Naozaj, z tejto metódy dostávame odhady:

Názov parametra	α	β	σ	F
Odhad parametra	0.05	-1	0.06	2.910042×10^{-33}

Hodnota funkcionálu 2.910042×10^{-33} má byť v optime teoreticky nulová, prakticky však dostávame malú numerickú chybu spôsobenú výpočtovým algoritmom a zaokrúhľovaním v softvéri R. Vzhľadom na jej rád je však zanedbateľná.

Keď už poznáme obe hodnoty účelových funkcií pre každú kombináciu parametrov, vieme podľa vzťahu (3.11) vypočítať trhovú cenu rizika λ , ktoré sú vo Vašíčkovom modeli nezávisle od r , teda konštanty. Uvedieme ich pre niektoré kombinácie parametrov, ktoré nazveme optimálne.

Na obrázku 4.2 vidíme scatterplot všetkých kombinácií parametrov, teda $20 \times 20 = 400$ bodov.

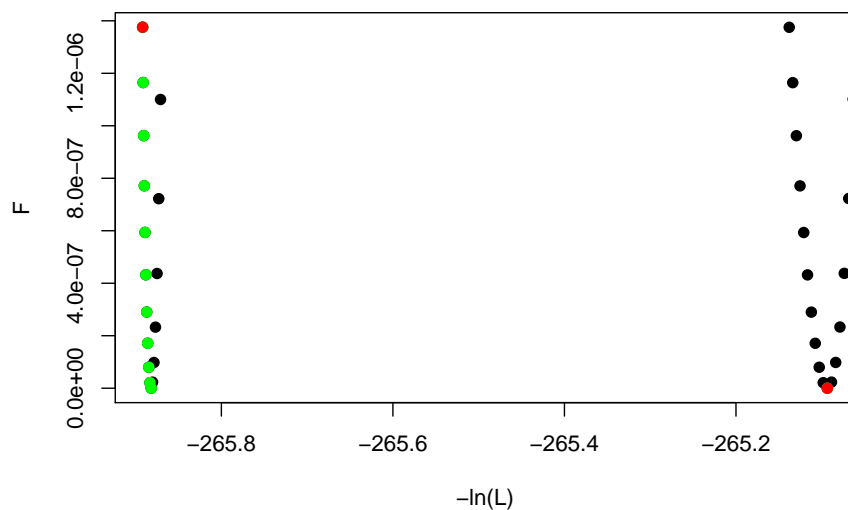


Obr. 4.2: Scatterplot kombinácií

Cieľom je nájsť všetky efektívne body tohto grafu. Efektívne body sú práve tie body, ktoré sú v zmysle posúdenia oboch kritérií optimálne. Ak označíme množinu všetkých posudzovaných bodov ako M , potom je bod x efektívny, ak patrí do nasledovnej množiny E :

$$E = \{x; \forall y \in M : (x[-\ln L] < y[-\ln L]) \vee (x[F] < y[F])\}. \quad (4.3)$$

Z hľadiska nášho grafu sú to také body, ktoré nemajú žiadne iné body v smere vľavo dole, prípadne presne vľavo alebo presne nadol od nich. Vo všeobecnosti sa efektívne body nachádzajú v ľavom dolnom rohu grafu, prípadne na jeho spodnej alebo ľavej hranici, keďže v smere oboch osí optimalizujeme práve týmto smerom. Priblíženie a zobrazenie optím podľa jedného kritéria červenou farbou a všetkých ostatných efektívnych bodov zelenou farbou zobrazuje obrázok 4.3.



Obr. 4.3: Efektívne body

V tomto prípade máme 12 efektívnych bodov. Pre každý efektívny bod by bolo vhodné určiť mieru jeho dvojkritériálnej efektivity, ktorá by hovorila o tom, ako veľmi je bod optimálny pri posúdení oboch kritérií. Od tejto charakteristiky budeme požadovať:

- chceme ju iba pre efektívne body (teda v pomyselnom štvorci okolo nich sú optimá podľa jedného kritéria v ľavom hornom a pravom dolnom rohu),
- optimá podľa jedného kritéria by mali mať dvojkritériálnu efektívnosť nulovú, lebo oproti ostatným efektívnym bodom najmenej kombinujú dve použité metódy na optimalizáciu, napriek tomu že sú maximálne efektívne vzhľadom na jednu z nich,
- teoretický bod v ľavom dolnom rohu by mal mať efektívnosť 100, lebo je maximálne efektívny pre obe metódy.

Vzhľadom na tieto požiadavky sme použili postup, kde rátame relatívne efektívnosti bodov podľa metódy maximálnej vierohodnosti, resp. minimalizácie strednej váženej kvadratickej chyby medzi teoretickými a skutočnými výnosmi. Po vynásobení týchto dvoch čísel dostaneme výslednú dvojkriteriálnu efektívnosť, ktorá spĺňa požadované vlastnosti. Ak označíme dML rozpätie hodnôt účelovej funkcie (3.3) pre efektívne body a dF ako rozpätie hodnôt (3.8) pre tieto body, potom vieme dvojkriteriálnu efektívnosť pre daný bod X vyjadriť v percentách ako

$$E_{2krit} = \frac{\max(-\ln L) - X[-\ln L]}{dML} \frac{\max(F) - X[F]}{dF} 100, \quad (4.4)$$

kde $\max(-\ln L)$ je maximálna hodnota zápornej funkcie vierohodnosti pre efektívne body a $\max(F)$ maximálna hodnota funkcionálu F .

Samozrejme, toto nie je jediný možný prístup k tejto charakteristike. Mohli by sme napríklad počítať aritmetický priemer efektívnosti podľa jednotlivých metód, to by však nespĺňalo naše požiadavky na túto vlastnosť.

Dôležité údaje (hodnoty parametrov a účelových funkcií pre tento bod), ktoré sa ich týkajú sme uložili do matice `effectivePoints` na obrázku 4.4, kde `2krit` vyjadruje mieru dvojkriteriálnej efektívnosti vyjadrenú v percentách.

```
> effectivePoints
      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]      [,6]
alpha(-lnL) 2.565715e-01 2.506063e-01 2.446410e-01 2.386757e-01 2.327105e-01 2.267452e-01
alpha(F)    1.067560e-01 1.010628e-01 9.536860e-02 8.967338e-02 8.397710e-02 7.827976e-02
beta       -2.000000e+00 -1.900000e+00 -1.800000e+00 -1.700000e+00 -1.600000e+00 -1.500000e+00
sigma      5.000000e-02 5.000000e-02 5.000000e-02 5.000000e-02 5.000000e-02 5.000000e-02
lambda     2.996310e+00 2.990869e+00 2.985448e+00 2.980047e+00 2.974668e+00 2.969310e+00
-lnL       -2.658918e+02 -2.658913e+02 -2.658906e+02 -2.658899e+02 -2.658890e+02 -2.658881e+02
F          1.375808e-06 1.164808e-06 9.626548e-07 7.714835e-07 5.937494e-07 4.322711e-07
2krit      0.000000e+00 1.532606e+01 2.998551e+01 4.381936e+01 5.664669e+01 6.826170e+01
      [,7]      [,8]      [,9]      [,10]     [,11]     [,12]
alpha(-lnL) 2.207800e-01 2.148148e-01 2.088495e-01 2.028843e-01 1.969191e-01 1.969191e-01
alpha(F)    7.258132e-02 6.688177e-02 6.118109e-02 5.547925e-02 4.977624e-02 5.000000e-02
beta       -1.400000e+00 -1.300000e+00 -1.200000e+00 -1.100000e+00 -1.000000e+00 -1.000000e+00
sigma      5.000000e-02 5.000000e-02 5.000000e-02 5.000000e-02 5.000000e-02 6.000000e-02
lambda     2.963974e+00 2.958660e+00 2.953369e+00 2.948101e+00 2.942856e+00 2.448651e+00
-lnL       -2.658871e+02 -2.658859e+02 -2.658846e+02 -2.658833e+02 -2.658818e+02 -2.650935e+02
F          2.902833e-07 1.714952e-07 8.015823e-08 2.114419e-08 3.359755e-11 2.910042e-33
2krit      7.843040e+01 8.688681e+01 9.332865e+01 9.741245e+01 9.874799e+01 0.000000e+00
```

Obr. 4.4: Efektívne body

Vidíme, že najvyššiu dvojkriteriálnu efektívnosť majú body 9,10 a 11, preto ich v istom zmysle môžeme považovať za najviac dôveryhodné odhady.

4.2 Vašíčkov model - dvojkriteriálna optimalizácia pri pevnej volatilitate (Kalibrácia 2)

Teraz aplikujeme algoritmus popísaný v podkapitole 3.4 na výsledky získané v predchádzajúcej podkapitole, teda zafixujeme odhad σ na hodnote aritmetického priemeru odhadov tohto parametra podľa oboch použitých metód, v tomto prípade na hodnote $\sigma_{fix} = 0.055$. Zhrnutie tohto prístupu uvádzame v nasledovnej schéme.

Kalibrácia 2: Vašíčkov model pri pevnej σ

Vstupy

- Príslušné vygenerované úrokové miery a výnosové krivky z predchádzajúceho postupu
- Množina testovaných hodnôt parametru β
- Odhady parametru σ podľa funkcie vierohodnosti, resp. minimalizácie vzdialenosti trhových a modelom implikovaných výnosov

Algoritmus

- Zafixovať hodnotu σ_{fix} na hodnote aritmetického priemeru odhadov oboch použitých metód
- Pre každú β z množiny testovaných hodnôt a σ_{fix} vyrátať vzhľadom na minimalizáciu hodnoty zápornej funkcie vierohodnosti (3.3) optimálnu hodnotu (3.5) pre α
- Dosadiť všetky trojice $\beta, \sigma_{fix}, \alpha$ do účelovej funkcie a vybrať minimum
- Pre každú β z množiny testovaných hodnôt vyrátať vzhľadom na minimalizáciu hodnoty funkcionálu (3.8) optimálnu hodnotu 3.9 $\tilde{\alpha}$
- Dosadiť všetky trojice $\beta, \sigma_{fix}, \tilde{\alpha}$ do účelovej funkcie a vybrať minimum
- Pre každú β z množiny testovaných hodnôt vyrátať trhovú cenu rizika λ
- Identifikovať efektívne hodnoty parametru β , vyhovujúce vzťahu (4.3)

- Pre každý efektívny bod vypočítať mieru dvojkriteriálnej efektivity

Výstupy

- Odhady parametrov $\alpha, \beta, \sigma_{fix}$ podľa metódy maximálnej vierohodnosti
- Odhady parametrov $\tilde{\alpha}, \beta, \sigma_{fix}$ podľa minimalizácie miery vzdialenosti medzi teoretickými a trhovými výnosmi
- Efektívne parametre β a odhady $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \lambda, 2krit$ pre každý z efektívnych bodov pri volatilitate σ_{fix}
- Grafické zobrazenie všetkých, aj efektívnych bodov

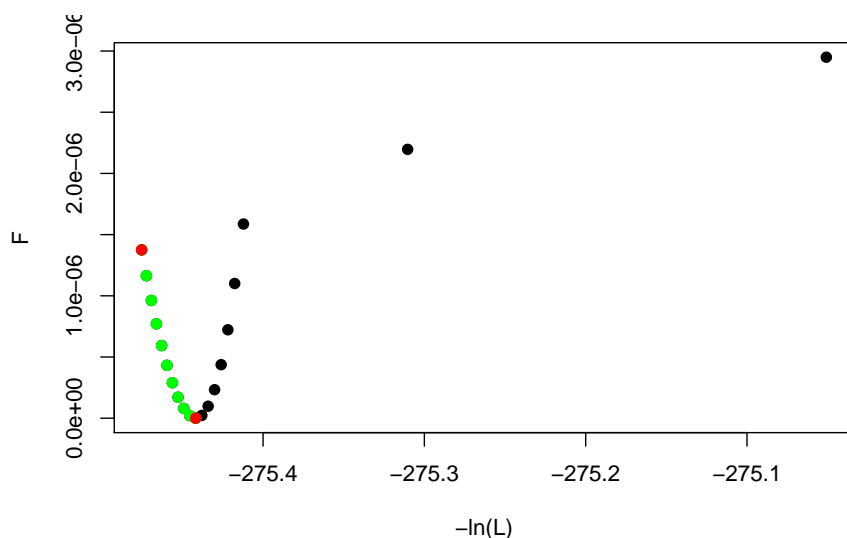
Odhady parametrov, podľa metódy maximálnej vierohodnosti uvádzame v nasledovnej tabuľke:

Názov parametra	α	β	σ_{fix}	$-\ln L$
Odhad parametra	0.2565715	-2	0.055	-275.4752628

Odhady podľa váženej strednej kvadratickej chyby medzi teoretickými a trhovými výnosovými krivkami sú:

Názov parametra	α	β	σ_{fix}	F
Odhad parametra	0.04988304	-1	0.055	9.180323×10^{-12}

Podľa vzťahu (3.11) dorátame konštantné trhovú cenu rizika, pre každú kombináciu parametrov. Keďže sme zafixovali hodnotu σ , iterujeme a počítame hodnoty účelových funkcií iba pre rozličné hodnoty β a teda dostaneme v tomto prípade celkovo $20 \times 1 = 20$ bodov v scatterplote. Všetky jeho body, kde opäť máme optimá podľa jedného kritéria zobrazené červenou farbou a všetky ostatné efektívne body zelenou farbou zobrazuje obrázok 4.5.



Obr. 4.5: Efektívne body

Podstatné informácie týkajúce sa týchto bodov sme uložili do matice effectivePointsFix na obrázku 4.6.

```
> effectivePointsFix
      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]      [,6]
alpha(-lnL) 2.565715e-01 2.506063e-01 2.446410e-01 2.386757e-01 2.327105e-01 2.267452e-01
alpha(F)    1.068363e-01 1.011452e-01 9.545320e-02 8.976030e-02 8.406647e-02 7.837168e-02
beta       -2.000000e+00 -1.900000e+00 -1.800000e+00 -1.700000e+00 -1.600000e+00 -1.500000e+00
sigma      5.500000e-02 5.500000e-02 5.500000e-02 5.500000e-02 5.500000e-02 5.500000e-02
lambda     2.722459e+00 2.717474e+00 2.712505e+00 2.707554e+00 2.702619e+00 2.697701e+00
-lnL       -2.754753e+02 -2.754723e+02 -2.754692e+02 -2.754661e+02 -2.754629e+02 -2.754596e+02
F          1.375588e-06 1.164593e-06 9.624458e-07 7.712831e-07 5.935604e-07 4.320970e-07
2krit      0.000000e+00 1.397927e+01 2.463466e+01 3.191776e+01 3.583509e+01 3.646170e+01
      [,7]      [,8]      [,9]      [,10]     [,11]
alpha(-lnL) 2.207800e-01 2.148148e-01 2.088495e-01 2.028843e-01 1.969191e-01
alpha(F)    7.267593e-02 6.697920e-02 6.128148e-02 5.558276e-02 4.988304e-02
beta       -1.400000e+00 -1.300000e+00 -1.200000e+00 -1.100000e+00 -1.000000e+00
sigma      5.500000e-02 5.500000e-02 5.500000e-02 5.500000e-02 5.500000e-02
lambda     2.692801e+00 2.687919e+00 2.683055e+00 2.678210e+00 2.673382e+00
-lnL       -2.754562e+02 -2.754527e+02 -2.754491e+02 -2.754455e+02 -2.754418e+02
F          2.901280e-07 1.713634e-07 8.005541e-08 2.107679e-08 9.180323e-12
2krit      3.395750e+01 2.858666e+01 2.074088e+01 1.096701e+01 0.000000e+00
```

Obr. 4.6: Efektívne body

Najvyššiu mieru dvojkriteriálnej efektivity majú body 5, 6 a 7.

4.3 CKLS model - dvojkriteriálna optimalizácia (Kalibrácia 3)

V tejto podkapitole opíšeme a otestujeme algoritmus dvojkriteriálnej kalibrácie CKLS modelu z vygenerovaných dát. Ako sme uviedli v podkapitole 3.1.2, nepoznáme podmienené rozdelenie okamžitej úrokovej miery pre ľubovoľný parameter γ v CKLS modeli.

Poznáme ho pre hodnoty $\gamma = 0$ (Vašíčkov model) a $\gamma = 0,5$ (CIR model). Keďže Vašíčkov model sme už kalibrovali, rozhodli sme sa generovať krátkodobú úrokovú mieru pre CIR model podľa pravdepodobnostného rozdelenia (4.1) a výnosové krivky podľa (4.2). Treba poznamenať, že toto je najpresnejší spôsob generovania short rate, lebo využíva odvodené podmienené rozdelenie okamžitej úrokovej miery, avšak nie je jediný. Napríklad v [11] autor generoval hodnoty pomocou aproximácie. Uvádzame schému algoritmu:

Kalibrácia 3: CKLS model

Vstupy

- Skutočné hodnoty parametrov α, β, σ odhadovaného CIR modelu (CKLS s $\gamma = 0,5$)
- Počet vygenerovaných úrokových mier n , vektor maturít úrokových mier τ s dĺžkou m , časový úsek medzi dvomi pozorovaniami dt
- Množiny testovaných hodnôt parametrov σ a γ

Algoritmus

- Vygenerovať úrokové miery a výnosové krivky na základe skutočných hodnôt parametrov modelu
- Pre každú kombináciu σ, γ z množiny testovaných hodnôt vyrátať vzhľadom na minimalizáciu hodnoty aproximácie zápornej funkcie vierohodnosti (3.6) optimálne hodnoty α a β
- Dosadiť všetky štvorice $\sigma, \gamma, \alpha, \beta$ do účelovej funkcie a vybrať minimum
- Pre každú kombináciu σ, γ z množiny testovaných hodnôt vyrátať vzhľadom na minimalizáciu hodnoty funkcionálu (3.10) optimálne hodnoty $\tilde{\alpha}$ a $\tilde{\beta}$
- Dosadiť všetky štvorice $\sigma, \gamma, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ do účelovej funkcie a vybrať minimum
- Pre každú kombináciu σ, γ vyrátať trhovú cenu rizika $\lambda(r)$ ako funkciu short rate

- Identifikovať efektívne kombinácie parametrov, vyhovujúce vzťahu (4.3)
- Pre každý efektívny bod vypočítať mieru jeho dvojkriteriálnej efektivity

Výstupy

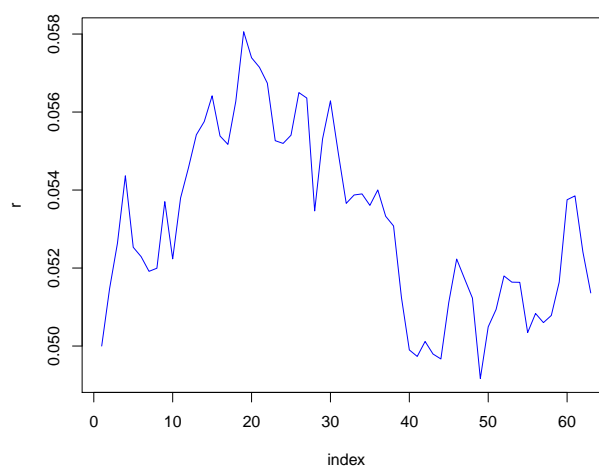
- Odhady parametrov $\alpha, \beta, \sigma, \gamma$ podľa metódy maximálnej vierohodnosti
- Odhady parametrov $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \sigma, \gamma$ podľa minimalizácie miery vzdialenosti medzi teoretickými a trhovými výnosmi
- Efektívne kombinácie parametrov a odhady $\alpha, \beta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \sigma, \gamma, \lambda(r), 2krit$ pre každý z efektívnych bodov
- Grafické zobrazenie všetkých, aj efektívnych bodov

Skutočné hodnoty parametrov, ktoré sme použili na generovanie krátkodobej úrokovej miery a výnosových kriviek s príslušnými splatnosťami:

Názov parametra	α	β	σ	γ	n	m	dt
Hodnota parametra	0.04	-0.8	0.08	0.5	63	12	1/252

Zvolené testované množiny parametrov σ a γ :

σ	{0.01, 0.02, 0.03, ..., 0.99, 1}
γ	{0, 0.1, 0.2, ..., 1.4, 1.5}



Obr. 4.7: Priebeh short rate

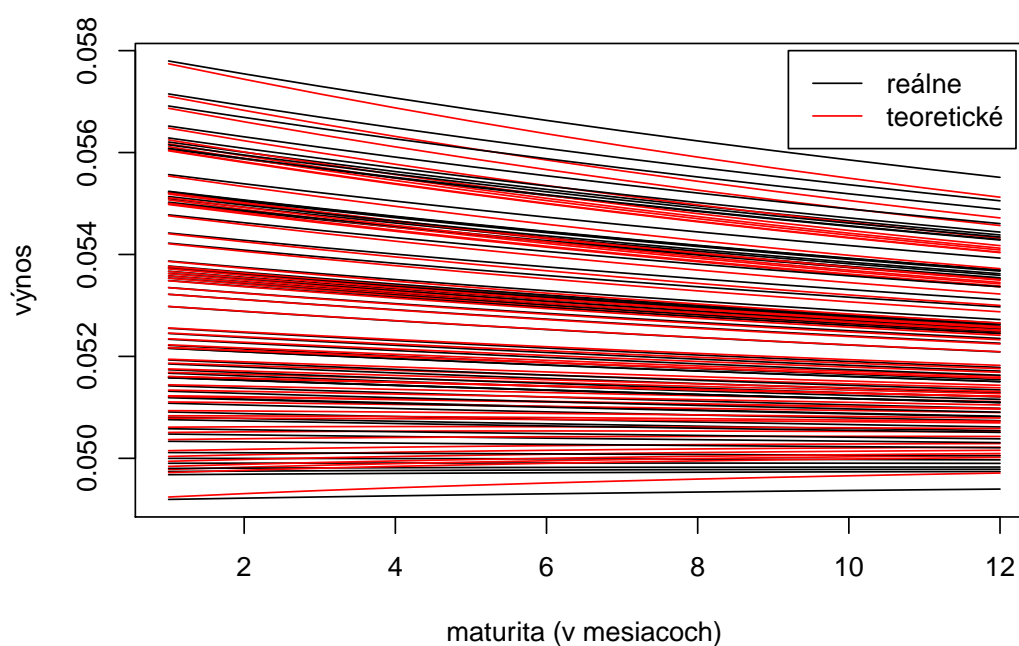
Na obrázku 4.7 je vygenerovaný priebeh short rate. Odhady parametrov, podľa metódy maximálnej vierohodnosti uvádzame v nasledovnej tabuľke:

Názov parametra	α	β	σ	γ	$-\ln L$
Odhad parametra	1.788655	-33.533898	0.8	1.3	-394.764287

Odhady podľa váženej strednej kvadratickej chyby medzi teoretickými a trhovými výnosovými krivkami sú:

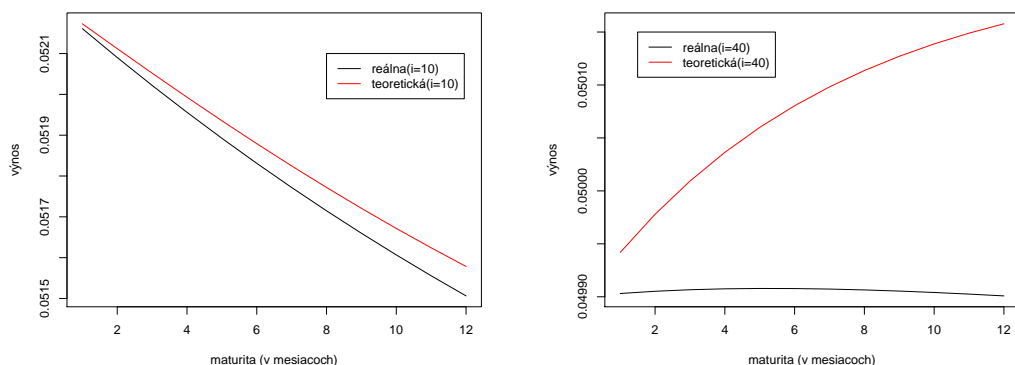
Názov parametra	α	β	σ	γ	F
Odhad parametra	0.05553105	-1.091344	0.04	0	9.406554×10^{-9}

Podľa vzťahu (3.12) dorátame trhové ceny rizika $\lambda(r)$ ako funkcie závislé od r , pre každú kombináciu parametrov. Nasledovný obrázok 4.8 zobrazuje, ako fitujú odhadnuté výnosové krivky skutočné.



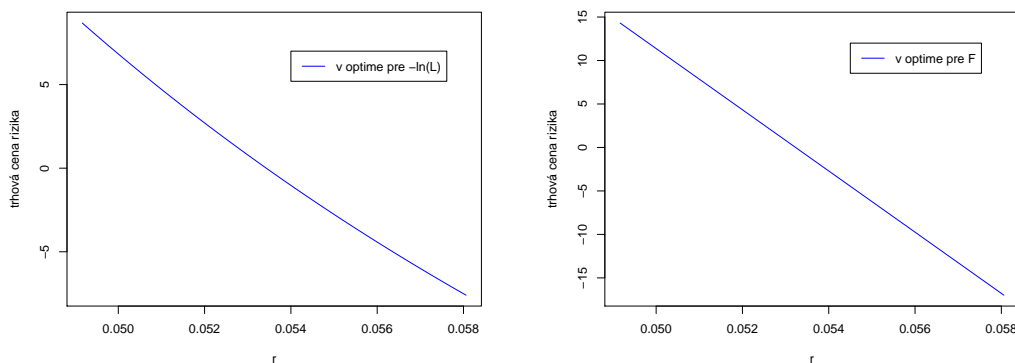
Obr. 4.8: Fitovanie všetkých výnosov

Fitovanie doch kriviek pre indexy 10 a 40 zobrazuje dvojica obrázkov 4.9.



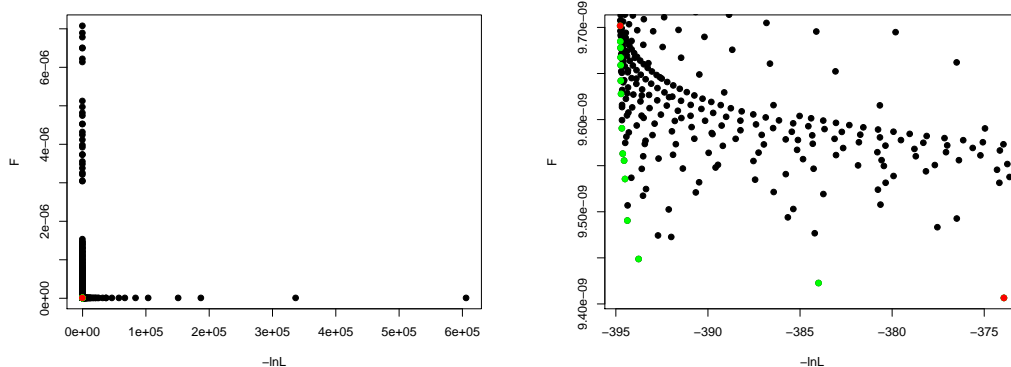
Obr. 4.9: Fitovanie pre indexy 10 a 40

Tu nabádame čitateľa, aby si všimol mierku osí pre výnos, takže aj zdanlivo nepresné fitovanie pre index 40, je v skutočnosti veľmi dobré. Pripomíname, že v CKLS modeli, už trhovú cenu rizika $\lambda(r)$ nie je konštanta ako v prípade Vašíčkovho modelu, ale funkcia závislá od r podľa vzťahu (3.12). Vypočítali sme koeficienty tejto funkcie pre každý bod a na dvojici obrázkov 4.10 je jej priebeh pre body optima podľa funkcie vierohodnosti resp. podľa F .



Obr. 4.10: Trhové ceny rizika

Scatterplot odhadov a jeho priblíženie efektívnych bodov vidíme na dvojici obrázkov 4.11.



(a) Všetky body

(b) Efektívne body

Obr. 4.11: Scatterplot CKLS

Podstatné informácie týkajúce sa efektívnych bodov sme uložili do matice effectivePoints zobrazenej na obrázku 4.12.

```

> effectivePoints
      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]      [,6]
alpha(-lnL)  2.196811e+00  4.534687e+00  1.599271e+00  7.548992e+00  1.933135e+00  1.916145e+00
alpha(F)     5.529939e-02  5.539592e-02  5.527587e-02  5.553105e-02  5.528858e-02  5.528782e-02
beta(-lnL)   -4.120947e+01 -8.517538e+01 -2.996984e+01 -1.418615e+02 -3.625479e+01 -3.593570e+01
beta(F)     -1.091450e+00 -1.091406e+00 -1.091461e+00 -1.091344e+00 -1.091455e+00 -1.091456e+00
sigma       2.000000e-02  3.000000e-02  3.000000e-02  4.000000e-02  6.000000e-02  8.000000e-02
gamma       0.000000e+00  0.000000e+00  2.000000e-01  0.000000e+00  4.000000e-01  5.000000e-01
-lnL       -3.937649e+02 -3.839950e+02 -3.943751e+02 -3.739308e+02 -3.945021e+02 -3.945513e+02
F          9.448766e-09  9.422706e-09  9.490467e-09  9.406554e-09  9.535561e-09  9.555541e-09
2krit      8.158963e+01  4.566470e+01  7.023799e+01  0.000000e+00  5.559133e+01  4.902528e+01
      [,7]      [,8]      [,9]      [,10]     [,11]     [,12]
alpha(-lnL)  1.695672e+00  1.831119e+00  1.813232e+00  1.765884e+00  1.750366e+00  1.820692e+00
alpha(F)     5.527922e-02  5.528435e-02  5.528352e-02  5.528163e-02  5.528098e-02  5.528368e-02
beta(-lnL)   -3.178181e+01 -3.433457e+01 -3.399769e+01 -3.310436e+01 -3.281123e+01 -3.413876e+01
beta(F)     -1.091460e+00 -1.091457e+00 -1.091458e+00 -1.091458e+00 -1.091459e+00 -1.091458e+00
sigma       1.000000e-01  1.400000e-01  2.500000e-01  3.300000e-01  4.400000e-01  4.500000e-01
gamma       6.000000e-01  7.000000e-01  9.000000e-01  1.000000e+00  1.100000e+00  1.100000e+00
-lnL       -3.946259e+02 -3.946747e+02 -3.947166e+02 -3.947317e+02 -3.947372e+02 -3.947411e+02
F          9.563057e-09  9.590583e-09  9.627934e-09  9.642141e-09  9.659032e-09  9.667501e-09
2krit      4.667391e+01  3.749964e+01  2.495212e+01  2.016543e+01  1.445645e+01  1.159365e+01
      [,13]     [,14]     [,15]
alpha(-lnL)  1.752253e+00  1.804609e+00  1.788655e+00
alpha(F)     5.528100e-02  5.528301e-02  5.528235e-02
beta(-lnL)   -3.284657e+01 -3.383522e+01 -3.353390e+01
beta(F)     -1.091459e+00 -1.091458e+00 -1.091458e+00
sigma       5.900000e-01  6.000000e-01  8.000000e-01
gamma       1.200000e+00  1.200000e+00  1.300000e+00
-lnL       -3.947471e+02 -3.947554e+02 -3.947643e+02
F          9.677863e-09  9.684811e-09  9.701765e-09
2krit      8.089742e+00  5.740516e+00  0.000000e+00

```

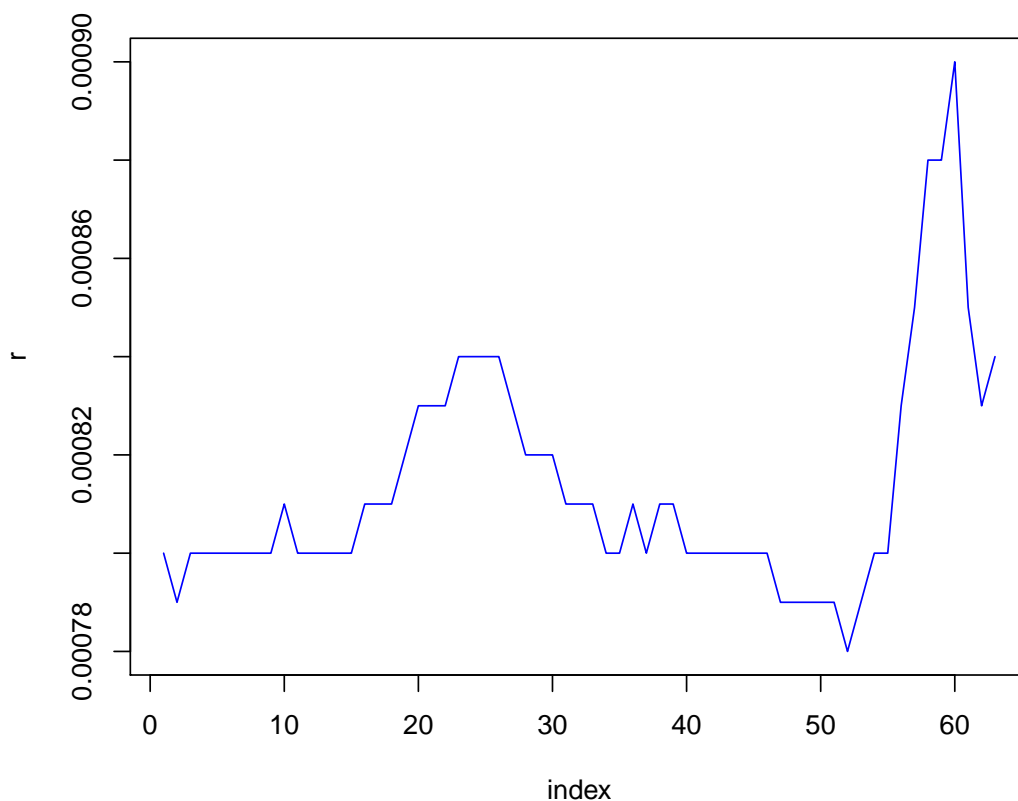
Obr. 4.12: Efektívne body

Ako vidíme, najvyššiu mieru dvojkriteriálnej efektivity majú body 1,3 a 5.

5 Testovanie programov na reálnych dátach

V tejto kapitole použijeme identické postupy ako z predchádzajúcej kapitoly s rozdielom, že krátkodobú úrokovú mieru nebudeme programovo generovať, ale zoberieme jej aproximáciu v podobe týždenného Euribor-u a výnosové krivky zoberieme ako úrokové miery Euribor so zvyšnými dlhšími dobami splatnosti. Príslušné výnosové krivky zobrazíme neskôr na grafe, ktorý nám podobne ako obrázok 4.8 ukáže, ako dobre fitujú odhadnuté výnosy skutočné.

Sada dát je z prvého kvartálu roku 2013, konkrétne od 2.1.2013 do 2.4.2013. Tieto dáta sú voľne dostupné na stránke [14]. Na obrázku 5.1 vidíme priebeh tejto sady dát.



Obr. 5.1: Priebeh short rate

Treba dodať, že v tomto prípade je vektor časov do splatnosti τ 14 miestny, keďže tu sa evidujú aj časy do splatnosti 2 a 3 týždne (1 týždeň nahrádza short rate).

5.1 Vašíčkov model (Kalibrácia 1)

Množiny pre testované parametre β a σ sme zvolili na základe obrázku 5.1 a testov na vygenerovaných dátach. Vieme, že β určuje rýchlosť návratu úrokovej miery k dlhodobej hodnote a σ volatilitu procesu. Intervaly musíme tiež pochopiteľne diskretizovať vzhľadom na rád hodnôt dostatočne jemne. Samozrejme určovanie tejto množiny len na základe obrázku a predchádzajúcich skúseností z kalibrácie tohto modelu je veľmi nepresné, preto musia tieto množiny pokrývať dostatočne široké spektrum hodnôt. V tomto prípade sme najprv zistili optimálne hodnoty parametrov podľa metódy maximálnej vierohodnosti, aj fitovania kriviek samostatne a potom sme zvolili intervaly, ktoré sme diskretizovali nerovnomerne tak, aby v okolí optimálnych odhadov boli hodnoty hustejšie. Spravili sme to z toho dôvodu, že odhady podľa metód boli od seba rádovo pomerne ďaleko vzdialené, a keby sme rovnomerne a jemne diskretizovali celý interval, dostali by sme veľký počet efektívnych bodov, čo z pohľadu kalibrácie nevadí, keďže efektívna hranica je nejaká krivka, teda nekonečne veľa bodov, ale je to pri zobrazovaní matice `effectivePoints` v tejto práci neprehľadné. Nami zvolené množiny uvádzame v nasledovnej tabuľke:

β	$\{-5, -4, \dots, -1, -0.9, -0.8, \dots, -0.2, -0.1\}$
σ	$\{0.0001, 0.0002, \dots, 0.0005, 0.01, 0.02, \dots, 0.05, 0.055, 0.056, \dots, 0.060\}$

Výsledky odhadov podľa metódy maximálnej vierohodnosti:

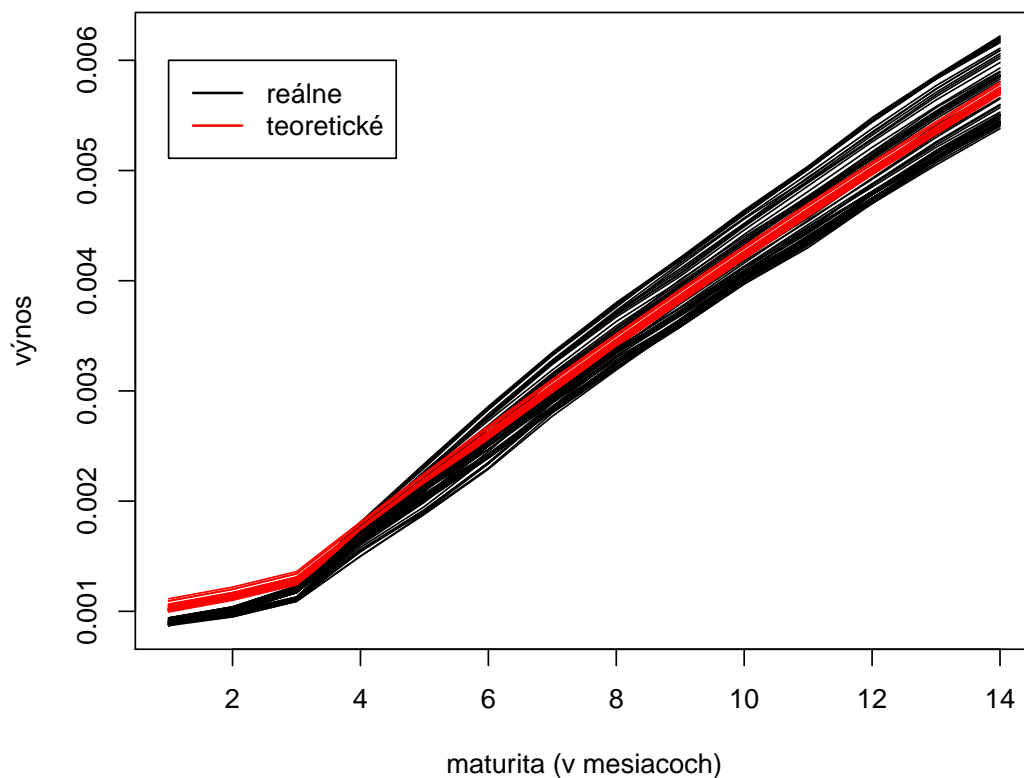
Názov parametra	α	β	σ	$-\ln L$
Odhad parametra	0.004227909	-5	0.0002	-619.1838

Ako sme spomínali v podkapitole 3.4, odhady driftu sú pre menší počet dát v tejto metóde veľmi vychýlené, ako aj v tomto prípade.

Výsledky odhadov pre fitovanie výnosov:

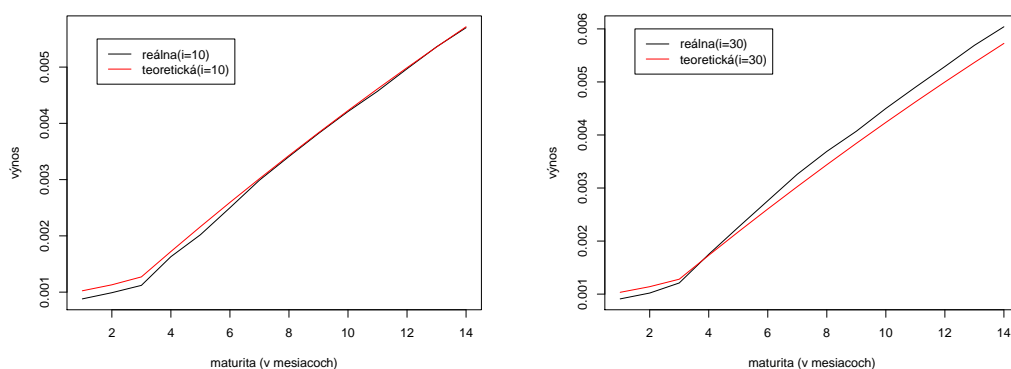
Názov parametra	α	β	σ	F
Odhad parametra	0.01126347	-0.1	0.057	1.820375×10^{-8}

Keďže sme aplikovali na dáta obe metódy, môžeme dorátať trhovú cenu rizika, ktorej hodnoty uvedieme pre efektívne body. Ukážka fitovania všetkých výnosových kriviek je na obrázku 5.2.



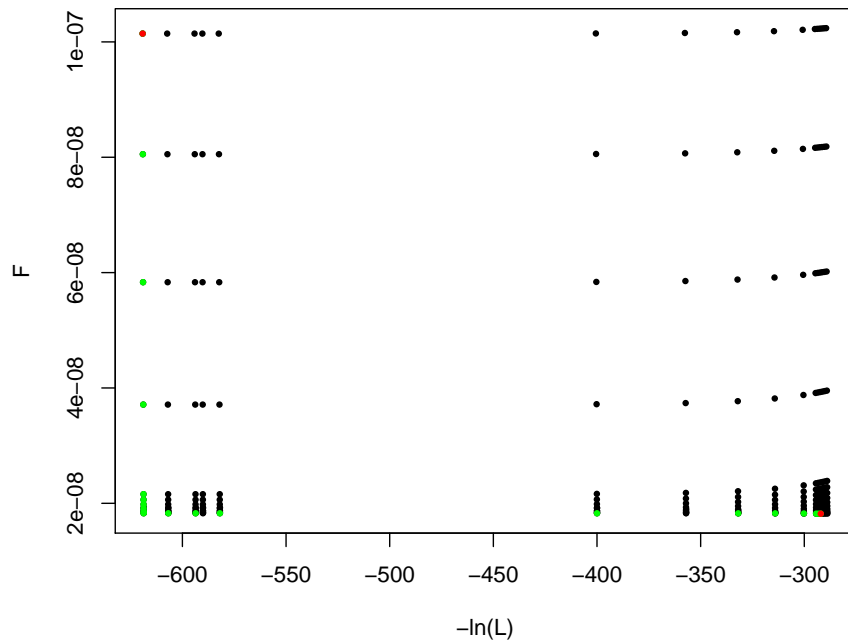
Obr. 5.2: Fitovanie všetkých výnosov

Na obrázkoch 5.3 je ukážka fitovania výnosových kriviek pre v poradí desiatu a tridsiatu úrokovú mieru.



Obr. 5.3: Fitovanie výnosov s indexmi 10 a 30

Scatterplot všetkých kombinácií s efektívnymi bodmi vyznačenými zelenou farbou zobrazuje nasledovný obrázok 5.4.



Obr. 5.4: Efektívne body

```

> effectivePoints
      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]      [,6]
alpha(-lnL) 4.227909e-03 3.414842e-03 2.601776e-03 1.788711e-03 9.756454e-04 8.943389e-04
alpha(F)    3.113190e-02 2.664303e-02 2.223795e-02 1.795463e-02 1.384725e-02 1.344885e-02
beta       -5.000000e+00 -4.000000e+00 -3.000000e+00 -2.000000e+00 -1.000000e+00 -9.000000e-01
sigma      2.000000e-04 2.000000e-04 2.000000e-04 2.000000e-04 2.000000e-04 2.000000e-04
lambda     -1.345200e+02 -1.161409e+02 -9.818089e+01 -8.082958e+01 -6.435804e+01 -6.277254e+01
-lnL       -6.191838e+02 -6.190828e+02 -6.189785e+02 -6.188708e+02 -6.187598e+02 -6.187485e+02
F          1.014435e-07 8.053065e-08 5.833666e-08 3.712021e-08 2.158273e-08 2.062557e-08
2krit      0.000000e+00 2.511590e+01 5.175387e+01 7.720080e+01 9.581631e+01 9.696135e+01
      [,7]      [,8]      [,9]      [,10]     [,11]     [,12]
alpha(-lnL) 8.130324e-04 7.317259e-04 6.504194e-04 5.691130e-04 4.878065e-04 4.878065e-04
alpha(F)    1.305300e-02 1.265980e-02 1.226933e-02 1.188168e-02 1.149695e-02 1.149696e-02
beta       -8.000000e-01 -7.000000e-01 -6.000000e-01 -5.000000e-01 -4.000000e-01 -4.000000e-01
sigma      2.000000e-04 2.000000e-04 2.000000e-04 2.000000e-04 2.000000e-04 3.000000e-04
lambda     -6.119984e+01 -5.964037e+01 -5.809456e+01 -5.656286e+01 -5.504571e+01 -3.669718e+01
-lnL       -6.187372e+02 -6.187258e+02 -6.187144e+02 -6.187030e+02 -6.186915e+02 -6.068092e+02
F          1.981559e-08 1.916389e-08 1.868206e-08 1.838210e-08 1.827643e-08 1.827643e-08
2krit      9.792974e+01 9.870815e+01 9.928273e+01 9.963909e+01 9.976235e+01 9.613314e+01
      [,13]     [,14]     [,15]     [,16]     [,17]     [,18]
alpha(-lnL) 4.878065e-04 4.878065e-04 4.878065e-04 4.065000e-04 4.065000e-04 3.251936e-04
alpha(F)    1.149698e-02 1.149700e-02 1.152181e-02 1.134727e-02 1.152777e-02 1.140533e-02
beta       -4.000000e-01 -4.000000e-01 -4.000000e-01 -3.000000e-01 -3.000000e-01 -2.000000e-01
sigma      4.000000e-04 5.000000e-04 1.000000e-02 3.000000e-02 4.000000e-02 5.000000e-02
lambda     -2.752293e+01 -2.201839e+01 -1.103401e+00 -3.646924e-01 -2.780318e-01 -2.216028e-01
-lnL       -5.936127e+02 -5.819254e+02 -3.999983e+02 -3.318805e+02 -3.140447e+02 -3.001977e+02
F          1.827643e-08 1.827643e-08 1.827580e-08 1.826593e-08 1.826052e-08 1.823240e-08
2krit      9.210254e+01 8.853288e+01 3.296725e+01 1.216336e+01 6.715524e+00 2.486278e+00
      [,19]     [,20]     [,21]
alpha(-lnL) 2.438871e-04 2.438871e-04 2.438871e-04
alpha(F)    1.120126e-02 1.123209e-02 1.126347e-02
beta       -1.000000e-01 -1.000000e-01 -1.000000e-01
sigma      5.500000e-02 5.600000e-02 5.700000e-02
lambda     -1.992250e-01 -1.962179e-01 -1.933261e-01
-lnL       -2.942763e+02 -2.931591e+02 -2.920618e+02
F          1.820679e-08 1.820400e-08 1.820375e-08
2krit      6.769396e-01 3.354589e-01 0.000000e+00

```

Obr. 5.5: Efektívne body

Matica effectivePoints je na obrázku 5.5. Dvojkriteriálna efektivita nad 90% sa dosahuje pre body 5-13, teda tieto odhady považujeme za najdôveryhodnejšie.

5.2 Vašíčkov model (Kalibrácia 2)

Hodnota σ_{fix} sa teda rovná 0.0286 podľa vzťahu (3.13), množina testovaných hodnôt beta ostáva rovnaká.

Výsledky odhadov podľa metódy maximálnej vierohodnosti:

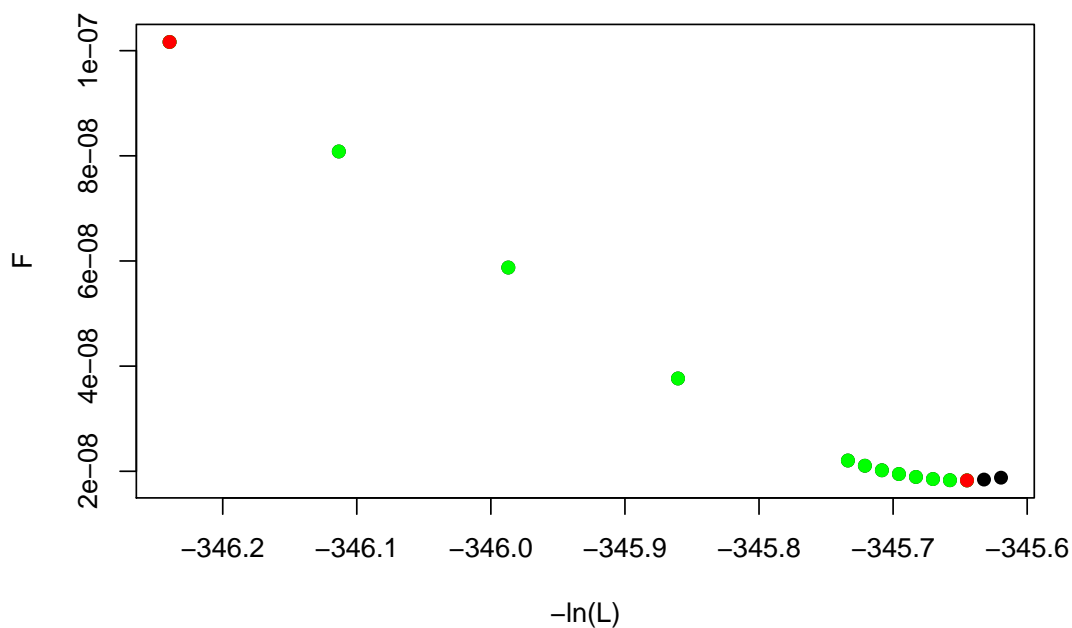
Názov parametra	α	β	σ_{fix}	$-\ln L$
Odhad parametra	0.004227909	-5	0.0286	-346.2396

Výsledky odhadov podľa F:

Názov parametra	α	β	σ_{fix}	F
Odhad parametra	0.01132612	-0.3	0.0286	1.827125×10^{-8}

Keďže sa odhadnuté parametre zmenili, dorátame opäť aj trhovú cenu rizika λ . Odhadnuté výnosové krivky sa z grafického pohľadu zmenili oproti Kalibrácii 1 len minimálne, preto ich tu neuvádzame.

Obrázok 5.6 zobrazuje scatterplot všetkých kombinácií a efektívnych bodov zelenou farbou.



Obr. 5.6: Efektívne body

Na obrázku 5.7 je matica effectivePointsFix.

```
> effectivePointsFix
      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]      [,6]
alpha(-lnL) 4.227909e-03 3.414842e-03 2.601776e-03 1.788711e-03 9.756454e-04 8.943389e-04
alpha(F)    3.120012e-02 2.672390e-02 2.233663e-02 1.807964e-02 1.401363e-02 1.362061e-02
beta       -5.000000e+00 -4.000000e+00 -3.000000e+00 -2.000000e+00 -1.000000e+00 -9.000000e-01
sigma      2.860000e-02 2.860000e-02 2.860000e-02 2.860000e-02 2.860000e-02 2.860000e-02
lambda     -9.430844e-01 -8.150020e-01 -6.900300e-01 -5.696129e-01 -4.558736e-01 -4.449744e-01
-lnL      -3.462396e+02 -3.461134e+02 -3.459870e+02 -3.458604e+02 -3.457337e+02 -3.457210e+02
F          1.016572e-07 8.083064e-08 5.875363e-08 3.765648e-08 2.205067e-08 2.105433e-08
2krit     0.000000e+00 1.967508e+01 2.959667e+01 2.781683e+01 1.425635e+01 1.237349e+01
      [,7]      [,8]      [,9]      [,10]     [,11]     [,12]
alpha(-lnL) 8.130324e-04 7.317259e-04 6.504194e-04 5.691130e-04 4.878065e-04 4.065000e-04
alpha(F)    1.323043e-02 1.284321e-02 1.245906e-02 1.207808e-02 1.170039e-02 1.132612e-02
beta       -8.000000e-01 -7.000000e-01 -6.000000e-01 -5.000000e-01 -4.000000e-01 -3.000000e-01
sigma      2.860000e-02 2.860000e-02 2.860000e-02 2.860000e-02 2.860000e-02 2.860000e-02
lambda     -4.341748e-01 -4.234785e-01 -4.128894e-01 -4.024114e-01 -3.920485e-01 -3.818049e-01
-lnL      -3.457083e+02 -3.456957e+02 -3.456830e+02 -3.456703e+02 -3.456576e+02 -3.456449e+02
F          2.019450e-08 1.948046e-08 1.892161e-08 1.852744e-08 1.830750e-08 1.827125e-08
2krit     1.042193e+01 8.411180e+00 6.351707e+00 4.254927e+00 2.133234e+00 0.000000e+00
```

Obr. 5.7: Efektívne body

Najvyššiu dvojkriteriálnu optimalitu majú body 2,3 a 4, ktoré sú však stále pomerne nízke, čo znamená že v tomto prípade nemáme kombináciu parametrov, ktorá by dávala oproti ostatným efektívnym bodom veľmi dobré výsledky podľa oboch metód súčasne.

5.3 CKLS model (Kalibrácia 3)

V tejto časti budeme kalibrovať tie isté dáta, teda úrokovú mieru s priebehom na obrázku 5.1, avšak náš predpoklad zovšeobecníme, a budeme predpokladať, že sa úroková miera riadi podľa CKLS modelu.

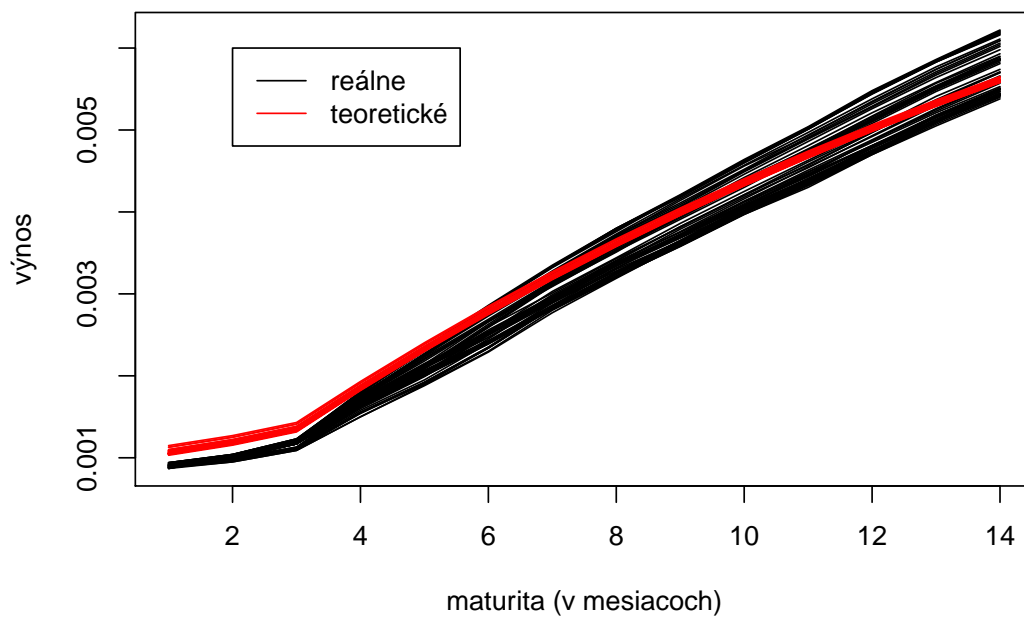
Odhady parametrov podľa metódy maximálnej vierohodnosti:

Názov parametra	α	β	σ	γ	$-\ln L$
Odhad parametra	0.01664077	-20.25671119	0.8	1.2	-680.41515088

Odhady na základe F:

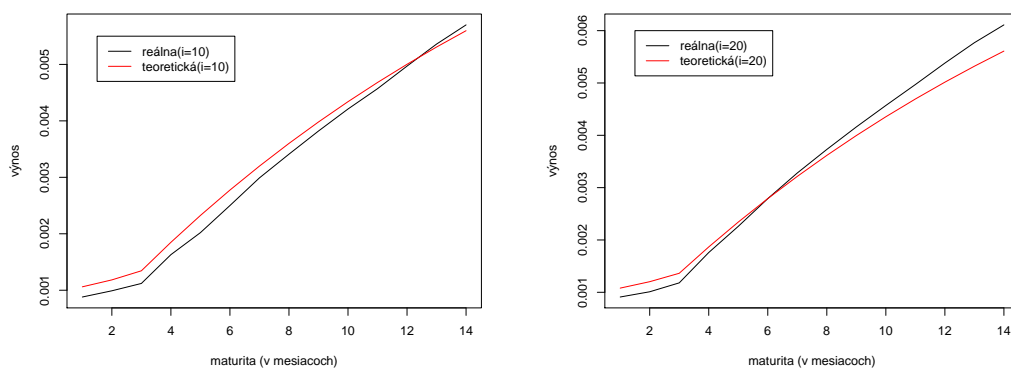
Názov parametra	α	β	σ	γ	F
Odhad parametra	0.01405009	-1.050683	0.0009	1.5	2.21206×10^{-8}

Keďže poznáme hodnoty účelových funkcií, dorátame trhové ceny rizika $\lambda(r)$ závislé od r . Fitovanie všetkých výnosov je na obrázku 5.8.



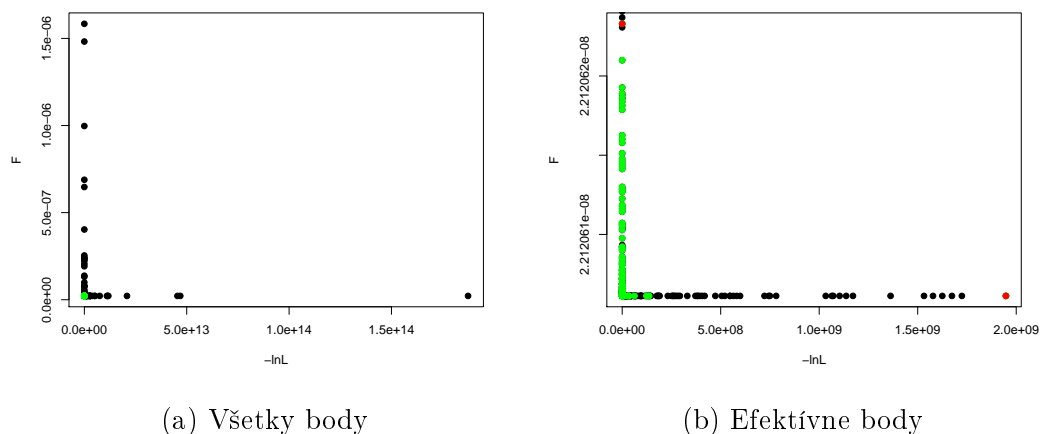
Obr. 5.8: Fitovanie všetkých výnosov

Fitovanie v poradí desiatej a dvadsiatej výnosovej krivky zobrazuje obrázok 5.9.



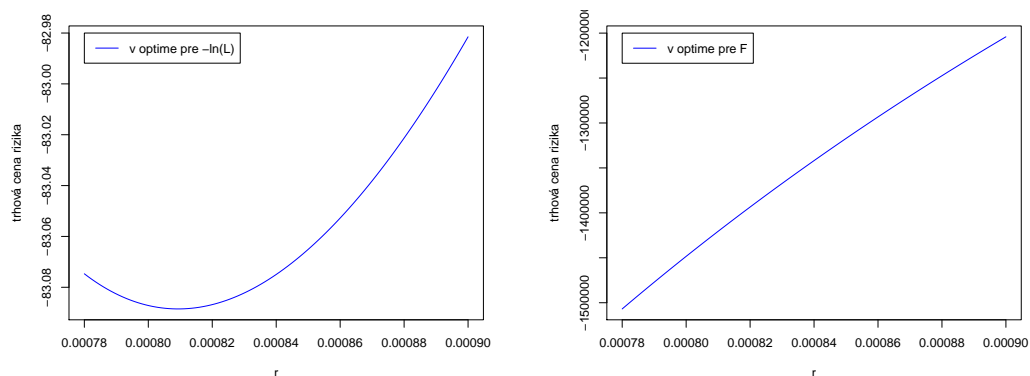
Obr. 5.9: Fitovanie pre indexy 10 a 20

Na obrázku 5.10 je scatterplot všetkých kombinácií a priblíženie efektívnych bodov.



Obr. 5.10: Scatterplot CKLS

Zobrazenie funkcií $\lambda(r)$ pre body optima podľa metódy maximálnej vierohodnosti resp. podľa metódy minimalizujúcej mieru vzdialenosti teoretických a skutočných výnosových kriviek zobrazuje dvojica obrázkov 5.11.



Obr. 5.11: Trhové ceny rizika

Všimnime si, že pre bod optima metódy fitovania výnosových kriviek nadobúda funkcia $\lambda(r)$ pre pozorované úrokové miery veľmi nízke hodnoty. Prvých 18 z 251 efektívnych bodov zobrazuje obrázok 5.12.

```

> effectivePoints
      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]      [,6]
alpha(-lnL) 1.000000e-04 1.000000e-04 1.000000e-04 1.000000e-04 1.000000e-04 1.000000e-04
alpha(F)    1.405010e-02 1.405009e-02 1.405009e-02 1.405009e-02 1.405009e-02 1.405009e-02
beta(-lnL) -1.000000e-04 -1.000000e-04 -1.000000e-04 -1.000000e-04 -1.000000e-04 -1.000000e-04
beta(F)    -1.050683e+00 -1.050683e+00 -1.050683e+00 -1.050683e+00 -1.050683e+00 -1.050683e+00
sigma      1.000000e-04 1.000000e-04 1.000000e-04 1.000000e-04 1.000000e-04 1.000000e-04
gamma      0.000000e+00 1.000000e-01 2.000000e-01 3.000000e-01 4.000000e-01 5.000000e-01
-lnL      -6.469703e+02 -3.937673e+02 7.853942e+02 5.774769e+03 2.644425e+04 1.116480e+05
F          2.212061e-08 2.212060e-08 2.212060e-08 2.212060e-08 2.212060e-08 2.212060e-08
2krit     6.662392e+01 9.179799e+01 9.798524e+01 9.950474e+01 9.987706e+01 9.996400e+01
      [,7]      [,8]      [,9]     [,10]     [,11]     [,12]
alpha(-lnL) 1.000000e-04 1.000000e-04 1.000000e-04 1.000000e-04 1.000000e-04 1.000000e-04
alpha(F)    1.405009e-02 1.405009e-02 1.405010e-02 1.405009e-02 1.405009e-02 1.405009e-02
beta(-lnL) -1.000000e-04 -1.000000e-04 -1.000000e-04 -1.000000e-04 -1.000000e-04 -1.000000e-04
beta(F)    -1.050683e+00 -1.050683e+00 -1.050683e+00 -1.050683e+00 -1.050683e+00 -1.050683e+00
sigma      1.000000e-04 1.000000e-04 2.000000e-04 2.000000e-04 2.000000e-04 2.000000e-04
gamma      6.000000e-01 7.000000e-01 1.000000e-01 2.000000e-01 3.000000e-01 4.000000e-01
-lnL      4.624795e+05 1.906760e+06 -6.453938e+02 -3.836904e+02 8.305663e+02 5.964848e+03
F          2.212060e-08 2.212060e-08 2.212061e-08 2.212060e-08 2.212060e-08 2.212060e-08
2krit     9.996884e+01 9.990003e+01 6.719237e+01 9.194236e+01 9.802202e+01 9.951414e+01
      [,13]     [,14]     [,15]     [,16]     [,17]     [,18]
alpha(-lnL) 1.000000e-04 1.000000e-04 1.000000e-04 1.000000e-04 1.000000e-04 1.000000e-04
alpha(F)    1.405009e-02 1.405009e-02 1.405009e-02 1.405009e-02 1.405009e-02 1.405009e-02
beta(-lnL) -1.000000e-04 -1.000000e-04 -1.000000e-04 -1.000000e-04 -1.000000e-04 -1.000000e-04
beta(F)    -1.050683e+00 -1.050683e+00 -1.050683e+00 -1.050683e+00 -1.050683e+00 -1.050683e+00
sigma      2.000000e-04 2.000000e-04 2.000000e-04 2.000000e-04 3.000000e-04 3.000000e-04
gamma      5.000000e-01 6.000000e-01 1.000000e+00 1.100000e+00 2.000000e-01 3.000000e-01
-lnL      2.723269e+04 1.149075e+05 3.328169e+07 1.370508e+08 -5.830071e+02 -6.784637e+01
F          2.212060e-08 2.212060e-08 2.212060e-08 2.212060e-08 2.212060e-08 2.212060e-08
2krit     9.987939e+01 9.996448e+01 9.829098e+01 9.296358e+01 8.187093e+01 9.554992e+01

```

Obr. 5.12: Efektívne body

Ako vidíme, nachádza sa medzi nimi mnoho bodov s dvojkriteriálnou efektivitou nad 90%, viaceré dokonca nad 99,9% a tento trend pokračuje aj pre ostatné efektívne body. Keď sa pozrieme na obrázok 5.10, naozaj sa väčšina bodov nachádza veľmi blízko ľavého dolného rohu.

Záver

Kalibrácia modelov úrokových mier je vo všeobecnosti problematika s nejednoznačným prístupom. V prípade vyhodnocovania iba jedného kritéria (metóda maximálnej vierohodnosti, alebo fitovanie kriviek) dostaneme vždy iba jediné optimálne riešenie, ktoré však môže byť veľmi vychýlené, hlavne pre metódu maximálnej vierohodnosti a menší počet dát.

Hlavný prínos tejto práce spočíva v návrhu dvojkriteriálnej metódy, kde pre istú množinu parametrov odhadujeme zvyšné parametre na základe optimálnej hodnoty účelovej funkcie podľa jedného kritéria. Navrhli sme jej tri verzie, z toho dve pre Vašíčkov model a jednu pre CKLS model. Kombináciou výsledkov z dvoch metód dostávame množinu efektívnych bodov, ktoré charakterizujú body, od ktorých neexistujú kombinácie parametrov, ktoré by boli lepšie v oboch posudzovaných kritériách. Samozrejme, toto závisí aj od rozumnej voľby množiny testovaných hodnôt.

Ďalej sme pre tieto efektívne body zaviedli dôležitú charakteristiku, ktorú sme nazvali dvojkriteriálna miera efektivity a vyjadruje, ako veľmi sú jednotlivé efektívne body optimalizované vzhľadom na obe účelové funkcie oproti optimálnym odhadom.

Odhady tejto dvojkriteriálnej metódy spočívajú v istom vymedzení kombinácií parametrov, ktoré sa javia ako najpravdepodobnejšie. Zohľadňujú sa pritom dve kritéria a preto sa zvýši aj vierohodnosť takto nadobudnutých výsledkov. Keďže väčšinou dostaneme optimálnych bodov viac, otvárajú sa ďalšie možnosti na bližšie a podrobnejšie preskúmanie optimálnych riešení avšak v prípade, že sa uspokojíme s efektívnym bodom s najväčšou mierou dvojkriteriálnej efektivity, dostávame uspokojivé výsledky odhadov.

Predmetom ďalšieho výskumu v tejto oblasti by mohla byť napríklad analýza vplyvu dvojkriteriálnej efektivity na presnosť odhadov metódy, alebo zahrnutie ďalších posudzovaných kritérií a modelov do kalibrácie.

Literatúra

- [1] Andrews, Donald W. K. *Exactly median-unbiased estimation of first order autoregressive/unit root models*, *Econometrica* 61, pp. 139–166, 1993.
- [2] Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A., Sanders, A. B.: *An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate*, *The Journal of Finance* 47(3), pp. 1209-1227, 1992.
- [3] Chattová S.: *Kalibrácia konvergenčného modelu úrokových mier Vašíčkovo typu*, Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2013.
- [4] Cox, J., Ingersoll, J., Ross, S.: *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, *Econometrica* 53, pp. 385-408, 1985.
- [5] Hamala M., Trnovská M.: *Nelineárne programovanie*, Epos, Bratislava, 2012.
- [6] Kuric T.: *Radonova-Nikodymova veta*, Bakalárska práca, Prírodovedecká fakulta Masarykovej univerzity, Brno, 2013.
- [7] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, Bratislava, 2005.
- [8] Mikula K., Stehlíková B., Ševčovič D.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Nakladateľstvo STU, Bratislava, 2009.
- [9] Mlynárik M.: *Kalibrácia jednofaktorových modelov úrokových mier pomocou analytickej aproximácie cien dlhopisov*, Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2009.
- [10] Szatcschneider W.: *Cox–Ingersoll–Ross (CIR) interest rate model (1985)*, www.riskmathics.com/files/PODCAST/Cox-Ingersoll-Ross-CIR-interest-rate-model-1985-Wojciech-Szatcschneider.pdf.
- [11] Shao A.: *A fast and exact simulation for CIR process*, Graduate school of the University of Florida, Dizertačná práca, 2012, http://ufdcimages.uflib.ufl.edu/UF/E0/04/39/21/00001/SHAO__.pdf.

- [12] Stehlíková, B.: *A simple analytic approximation formula for the bond price in the Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders model*, International Journal of Numerical Analysis and Modeling, Series B, Volume 4, Number 3, pp. 224-234, 2013.
- [13] Vasicek, O.: *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*, Journal of Financial Economics 5, pp. 177-188, 1977.
- [14] Úroková sazba Euribor,
www.emmi-benchmarks.eu/euribor-org/euribor-rates.html.