

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Spektrálna analýza tichnutia hudobného tónu

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Spektrálna analýza tichnutia hudobného tónu

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr. Pavol Bokes, PhD.



ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

- Meno a priezvisko študenta:** Bc. Samuel Dudlák
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
- Názov:** Spektrálna analýza tichnutia hudobného tónu / *Spectral analysis of acoustic sound*
- Cieľ:** Analyzovať zvukový záznam brnknutia na akustickú gitaru s cieľom určiť rýchlosť poklesu amplitúd jednotlivých harmonických zložiek tónu. Porovnať s fyzikálnymi modelmi tlmeného kmitania struny.
- Vedúci:** Mgr. Pavol Bokes, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 29.01.2014
- Dátum schválenia:** 10.02.2014
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie Rád by som sa touto cestou poďakoval svojmu školiteľovi Mgr. Pavlovi Bokesovi, PhD. za pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem tiež svojim rodičom za štylistickú a gramatickú korekciu a v neposlednom rade aj mojej priateľke za podporu a trpezlivosť pri písaní.

Abstrakt v štátnom jazyku

DUDLÁK, Samuel: *Spektrálna analýza tíchnutia hudobného tónu* [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Pavol Bokes, PhD., Bratislava, 2015, 54 s.

V našej práci analyzujeme frekvenčné spektrum gitarového tónu. Zameriame sa na pokles harmonických frekvencií v čase. Na začiatku práce definujeme diskretnú Fourierovu transformáciu a rýchlu Fourierovu transformáciu, ktorej softvérovú implementáciu v práci používame na získanie zastúpenia harmonických frekvencií. Z nameraných dát analyzujeme rýchlosti poklesov jednotlivých harmonických frekvencií v čase znenia tónu. Ich správanie porovnáme s modelom mocninového zákona dvoma rôznymi spôsobmi. Na základe získaných odhadov mocninového zákona pozorujeme vplyv sily úderu, výšky tónu a druhu gitary na charakter tíchnutia harmonických frekvencií. Výsledky naznačujú najmä vplyv výšky tónu a druhu gitary na charakter poklesu frekvenčného spektra. Napriek tomu sila úderu má stále vplyv na farbu tónu.

Kľúčové slová: Fourierove rady, diskretná Fourierova transformácia, harmonické frekvencie, alikvóty, spektrum hudobného tónu, Mocninový zákon

Abstract

DUDLÁK, Samuel: Spectral analysis of acoustic sound [Master's Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Pavol Bokes, PhD., Bratislava, 2011, 54p.

In our work we analyze the spectrum of a guitar tone. We focus on the attenuation of harmonics along the time. At the beginning of the work we define discrete Fourier transform and fast Fourier transform. We use its software implementation to obtain an amount of tone harmonics. From the measured data, we analyze the rate of attenuation of an individual harmonics in the decay time of the tone. We compare the behavior of the power law model in two different ways. Based on the estimated power-law we observe the impact of the plucked force, tone pitch and the type of a guitar on the nature of attenuation of tone harmonics. The results particularly indicate the impact of the pitch and the type of guitar on the pattern of spectrum attenuation. However, the plucked force still has the impact on the timbre.

Keywords: Fourier series, discrete Fourier transform, harmonics, frequency spectrum, power-law

Obsah

| | |
|---|-----------|
| Úvod | 8 |
| 1 Fourierova transformácia | 9 |
| 1.1 Farba | 10 |
| 1.2 Energia | 11 |
| 1.3 Diskrétna Fourierova transformácia | 11 |
| 1.3.1 Súvis DFT a Fourierových koeficientov | 13 |
| 1.3.2 Fast Fourier Transformation | 14 |
| 2 Technický popis merania | 16 |
| 2.1 Akustická a elektrická gitara | 16 |
| 2.2 Digitálne zaznamenanie tónu | 18 |
| 2.3 Temperované ladenie | 19 |
| 3 Mocninový zákon | 21 |
| 3.1 Škálová invariantnosť | 21 |
| 3.2 Pravdepodobnostné rozdelenie moncinového zákona | 23 |
| 3.3 Analýza dát mocninového zákona | 24 |
| 3.4 Odhadnutie parametrov modelu | 25 |
| 3.5 Správnosť odhadu modelu | 26 |
| 3.6 Alternatívne rozdelenia | 27 |
| 4 Spektrálna analýza tónu | 29 |
| 4.1 Tíchnutie harmonických frekvencií | 30 |
| 4.1.1 Analýza poklesu harmonických frekvencií | 33 |
| 4.1.2 Mocninový zákon rýchlostí poklesu | 36 |
| 4.1.3 Rozdelenie rýchlostí poklesov | 39 |
| 4.1.4 Oscilácia poklesu harmonických frekvencií | 41 |
| 4.2 Vplyv sily a výšky tónu na tíchnutie | 46 |
| Záver | 51 |
| Zoznam použitej literatúry | 52 |

Úvod

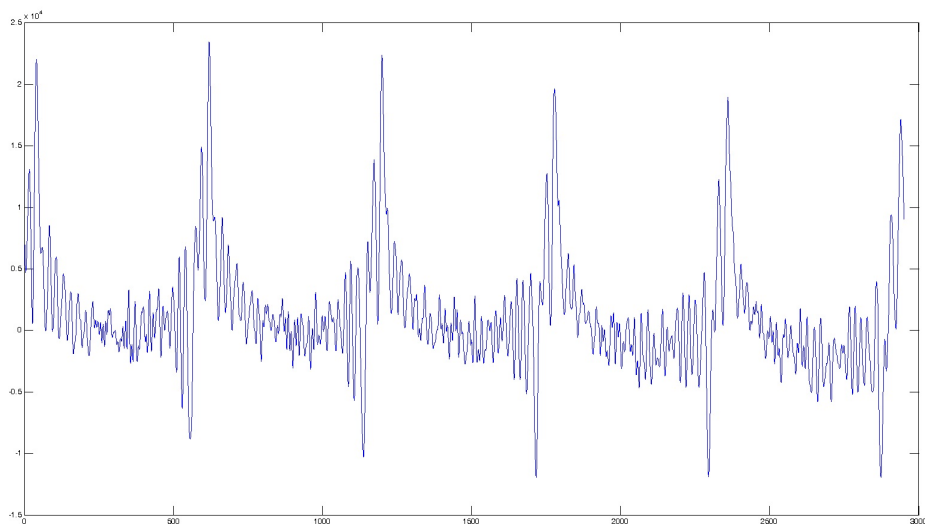
Každý hudobný nástroj produkuje nejaký zvuk. Ten sa môže skladať z jedného alebo viacerých tónov alebo šumu, ktorý zodpovedá nepravidelným vibráciám nástroja, teda neharmonickému zvuku ako napríklad bicie nástroje. V našej práci sa zameriame na nástroje, ktoré produkujú jeden alebo viacero harmonických tónov. Harmonické tóny sú také, ktoré dokážeme popísať určitou harmonickou funkciou. Otázkou už len zostáva, ako túto funkciu nájsť?

Aby sme mohli vôbec nejakým spôsobom skúmať tóny, musíme ich vedieť zaznamenať. Tému, ako elektroakusticky zaznamenáme tón a následne sa dostaneme ku hodnotám jeho amplitúdy sa venujeme v jednej kapitole. Dôležité je si taktiež uvedomiť, že tieto hodnoty sú diskkrétne s konkrétnou hustotou vzorkovania. Ak sa následne pozrieme na funkciu tlaku vzduchu harmonického tónu v čase, tak uvidíme, že sa tu nachádza periodicita v grafe. Tento tón vieme opísať troma charakteristikami: hlasitosť, výška a farba tónu. Hlasitosť zodpovedá intenzite zmien tlaku. Výška sa mení v závislosti od dĺžky jedného opakovania periódy tlakovej funkcie. Hlboké tóny majú dlhšiu periódu ako vysoké. Posledná charakteristika—farba—bude mať dočinenia so štruktúrou opakujúcej sa periódy. Práve tejto charakteristike budeme venovať našu pozornosť.

Vedomosť, že tlaková funkcia je periodická, nám dáva motiváciu, aby sme ju popísali len harmonickými funkciami. S využitím matematického aparátu Fourierovej transformácie sa ku takémuto prevodu dostaneme. Tu sa naskytá celkom iný pohľad na tón ako doteraz. Zistíme, že tón nehrá len svoju hlavnú frekvenciu ale aj jej násobky, ktoré predstavujú koeficienty Fourierovho radu. Práve zastúpenie týchto harmonických frekvencií udáva tónu jeho farbu. Preto napríklad vieme rozoznať tón zahratý na gitare od tónu s tou istou hlasitosťou a výškou zahraneho na klavíri. Cieľom našej práce bude práve analýza tohoto frekvenčného spektra. Konkrétne sa zameriame na tíchnutie jednotlivých harmonických frekvencií v čase. Na to, ktoré frekvencie tíchnu rýchlejšie a ktoré pomalšie, prípadne, či by charakter ich tíchnutia nedal popísať nejakým vzťahom. Táto práca môže priniesť vysvetlenia na rôzne akustické javy, ktoré vnímame, prípadne overiť experimentami rôzne akustické teórie alebo vzťahy z fyziky, či štatistiky. Zároveň môže poslúžiť ako motivácia pre zdokonalenie rôznych algoritmov na syntézu tónov.

1 Fourierova transformácia

Z fyzikálnej teórie kmitov vieme, že struny majú niekoľko prirodzených módov kmitania (alebo rezonančných frekvencií) a že každý typ vibrácie, ktorý je daný počiatocnými podmienkami, môžeme chápať ako kombináciu niekoľkých prirodzených módov, ktoré spolu kmitajú. Ďalej vieme, že prirodzené módy kmitania struny sú $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ kde ω_0 je základná frekvencia. Základný mód sa opakuje v perióde $T_1 = 2\pi/\omega_0$. Druhý harmonický mód sa opakuje v perióde $T_2 = 2\pi/2\omega_0$, tak tiež to znamená, že dva krát počas základnej periódy $T_1 = 2T_2$. Podobne tretí mód sa zopakuje 3 krát počas základnej periódy, atď. Toto vytvára hudobný tón.



Obr. 1: Harmonický tón.

Konečný zvuk ale vytvára pohyb vzduchu, ktorý je stimulovaný pohybom struny. Zoberme teda $f(t)$ ako funkciu tlaku vzduchu podľa času pre hudobný tón, ako na obrázku 1. Keďže ide o harmonickú funkciu, tak môžeme predpokladať, že $f(t)$ vieme zapísať ako súčet niekoľkých jednoduchých harmonických funkcií (napr. $\cos\omega t$), zodpovedajúcich jednotlivým harmonickým frekvenciám. Pre periódu T bude nosná frekvencia $\omega = 2\pi/T$ a harmonické frekvencie budú $2\omega, 3\omega, \dots$

Ďalej si musíme uvedomiť, že počiatocné fázy nemusia nutne byť rovnaké pre všetky frekvencie a preto budeme brať do úvahy funkciu tvaru $\cos(\omega t + \phi)$. Jednoduchšie ale

bude použitie sínusu aj kosínusu pre každú frekvenciu. Rozpíšeme si teda výraz

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos \phi \cos \omega t - \sin \phi \sin \omega t. \quad (1)$$

Keďže ϕ je konštanta, budú konštantné aj výrazy $\cos \phi$ a $\sin \phi$. Dostávame tvar *Fourierovho radu* pre ľubovoľnú harmonickú funkciu $f(t)$ s periódou T

$$f(t) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t, \quad (2)$$

kde $\omega = 2\pi/T$ a a, b sú konštanty, ktoré sa nazývajú *Fourierove koeficienty* a hovoria nám ako veľmi sú jednotlivé kmity dominantné. Aby bol tento vzorec všeobecný, pridali sme aj konštantu a_0 , ktorá reprezentuje posun priemernej hodnoty na ypsilonovej osi. Pre hudobný tón je to obyčajne nula. Hodnoty týchto konštant sa dajú odvodiť z hore uvedeného vzťahu a vyjadriť nasledovne:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt. \end{aligned} \quad (3)$$

1.1 Farba

Ako sme spomínali v úvode, hudobný tón vieme popísať štyrmi charakteristikami: hlasitosť, výška a farba tónu. V tejto kapitole si povieme niečo o poslednej menovanej. Pomocou vyššie definovaného Fourierovho radu vieme matematicky popísať, čo farba tónu vyjadruje. Je to relatívne zastúpenie harmonických frekvencií, teda koeficientov a a b . Tón, ktorý by mal iba prvú harmóniu označujeme ako *jednoduchý*. Naopak tón s veľkým zastúpením harmonických frekvencií voláme *sýty*. Gítara má iné zastúpenie harmonických frekvencií ako napríklad klavír.

Ak by sme pripojili niekoľko oscilátorov ku reproduktoru, vieme vytvoriť rôzne hudobné tóny. Oscilátor totiž vytvára jednoduchú harmonickú funkciu. Frekvencie oscilátorov zvolíme $\omega, 2\omega, 3\omega$, atď. a pridávaním alebo uberaním hlasností jednotlivým oscilátorom ovplyvníme zastúpenie harmonických frekvencií. Na takomto princípe funguje syntetizátor, ktorý vie dokázať vyprodukovať zvuk rozličných nástrojov zväčša za pomoci len troch oscilátorov.

Taktiež je zaujímavé, že nám na to stačí iba jeden oscilátor pre každú frekvenciu—nepotrebuje zvlášť oscilátor pre sínus a zvlášť pre kosínus. Naše ucho nevie dobre rozlíšiť relatívne fázy frekvencie. Počuje najmä celkové zastúpenie sínusovej a kosínusovej časti frekvencie.

1.2 Energia

Vo všeobecnosti je energia vlny—teda aj zvukovej vlny—úmerná druhej mocnине jej amplitúdy. Energia jednej periódy vlny v komplexnom tvare na intervale $[0, T]$ bude teda úmerná $\int_0^T f^2(t) dt$. Funkciu amplitúdy $f(t)$ si ešte vyjadríme pomocou Fourierových koeficientov

$$\int_0^T f^2(t) dt = \int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \right]^2 dt. \quad (4)$$

Po roznásobení dostaneme rôzne kombinácie súčinov sínusov a kosínusov. Dá sa ukázať, že pre $m, n \in \mathbb{Z}_{-0}$ a $\omega = 2\pi/T$ platí

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T \sin n\omega t \cos m\omega t dt &= 0, \\ \int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t dt \\ \int_0^T \sin n\omega t \sin m\omega t dt \end{aligned} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{ak } m \neq n \\ T/2 & \text{ak } m = n \end{cases} \quad (5)$$

a teda nám ostali len súčiny tvaru $a_n^2 \cos^2 n\omega t$ alebo $a_n^2 \sin^2 n\omega t$, ktorých integrál jednej periódy je rovný $T/2$. Dostávame nakoniec

$$\int_0^T f^2(t) dt = T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (6)$$

Táto rovnica sa nazýva teória energie a hovorí, že celková energia vlny je iba súčet energii všetkých jej Fourierových koeficientov.

1.3 Diskrétna Fourierova transformácia

Pre jednoduchšie pracovanie s Fourierovými radmi použijeme komplexnú reprezentáciu, vďaka ktorej budeme schopný previesť rad do nasledujúceho tvaru

$$f(t) \approx \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\frac{2\pi i}{T} n t} \quad (7)$$

Pomocou Eulerových vzorcov,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad (8)$$

rozpíšeme tvar Fourierovho radu (2):

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right] &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{e^{\frac{2\pi i}{T}nt} + e^{-\frac{2\pi i}{T}nt}}{2} + b_n \frac{e^{\frac{2\pi i}{T}nt} - e^{-\frac{2\pi i}{T}nt}}{2i} \right] = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{\frac{2\pi i}{T}nt} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-\frac{2\pi i}{T}nt} \right] \end{aligned}$$

a dostaneme tvar konštánt c_n :

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Po dosadení a_n a b_n z pôvodného tvaru dostaneme

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi i}{T}nt} dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Vďaka tvaru (7) Fourierovho radu máme už iba jeden vektor koeficientov. Navyše ak zoberieme predpoklad, že na dostatočnú presnosť nám stačí iba konečný počet hodnôt definujeme diskrétnu Fourierovu transformáciu (DFT).

Definícia 1.1. *Nech $\vec{\mathbf{f}} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ je postupnosť zložená z N komplexných čísel f_k . Pod diskrétnou Fourierovou transformáciou tejto postupnosti rozumieme N -ticu komplexných čísel $\vec{\mathbf{F}} = (F_0, F_1, \dots, F_{N-1})$ definovanú nasledovným predpisom*

$$\mathbf{F}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{f}_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn}. \quad (11)$$

Poznámka: Často sa v literatúre vyskytuje definícia v podobe $\mathbf{F}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{f}_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn}$. Avšak podoba, ktorú sme v tejto práci zvolili, jednak korešponduje s tvarom Fourierových koeficientov z rovnice (10) a tiež s [cooleytukey] a [cooley], kde je DFT definovaná ako $\mathbf{F}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{f}_n e^{\frac{2\pi i}{N}kn}$ a teda naša definícia korešponduje s ich definíciou inverznej DFT.

Ak označíme $w_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ môžeme zápis DFT zjednodušiť na

$$\mathbf{F}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{f}_n w_N^{-kn}. \quad (12)$$

Môžeme to chápať aj ako násobenie vektora maticou, teda ako lineárne zobrazenie z $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$:

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{1}{N} \mathbf{F} \vec{\mathbf{f}} \quad (13)$$

kde F je $N \times N$ matica tvaru

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N^{-1} & w_N^{-2} & \cdots & w_N^{-(N-1)} \\ 1 & w_N^{-2} & w_N^{-4} & \cdots & w_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{-(N-1)} & w_N^{-2(N-1)} & \cdots & w_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} \quad (14)$$

alebo ekvivalentne

$$\mathbf{F}_{ij} = w_N^{-(i-1)(j-1)}. \quad (15)$$

1.3.1 Súvis DFT a Fourierových koeficientov

Pre vysvetlenie toho, prečo nám stačí konečný počet bodov na dostatočnú aproximáciu, vráťme sa opäť k pôvodnej funkcii $f(t)$, ktorá je periodická s periódou T . Ukázali sme, že jej Fourierov rad má tvar (7) a jeho koeficienty c_n (10). Ak teraz navzorkujeme $f(t)$ na N rovnako vzdialených bodov medzi 0 a T , dostaneme postupnosť $f(k\Delta t)$, kde $\Delta t = T/N$. Táto postupnosť je periodická s periódou N . Substitúciou (7) dostávame

$$\begin{aligned} f(k\Delta t) &= f\left(k\frac{T}{N}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\frac{2\pi i}{N}nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{n+lN} \right] e^{\frac{2\pi i}{N}nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} {}_p c_n e^{\frac{2\pi i}{N}nk}. \end{aligned} \quad (16)$$

Keďže DFT má tvar (11), inverzným procesom (tiež zvaným ako inverzná diskretná Fourierova transformácia) môžeme povedať, že výraz

$${}_p c_n = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{n+lN} \quad (17)$$

je diskretnou (konečnou) Fourierovou transformáciou postupnosti $f(k\Delta t)$. Tieto úvahy môžeme zhrnúť do vety.

Veta 1.2. Ak vieme rozvinúť periodickú funkciu $f(t)$ s periódou T do Fourierovho radu s koeficientami c_n ,

$$f(t) \leftrightarrow c_n \quad (18)$$

potom tvar Fourierových koeficientov ${}_p c_n$ pre konečnú periodickú postupnosť $f(j\Delta t)$ s periódou N , kde $\Delta t = T/N$ vyzerá nasledovne:

$$f(j\Delta t) \leftrightarrow {}_p c_n = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{n+lN}. \quad (19)$$

1.3.2 Fast Fourier Transformation

Nakoľko budeme pracovať s veľkým počtom dát, má zmysel zamyslieť sa nad efektívnosťou algoritmu DFT. Výpočtová náročnosť tejto metódy je N^2 , čo je pri veľkom N obrovské číslo a teda úmerne dlhá bude aj výpočtová doba. Rýchla Fourierova transformácia (FFT z anglického “Fast Fourier transform”) je algoritmus, ktorý zredukuje výpočtovú náročnosť DFT na $N \log_2 N$, čo je významná redukcia pri veľkom N , ktorá môže ušetriť významnú časť výpočtového času.

FFT algoritmov existuje niekoľko, my si načrtne asi najznámejší—*Cooley-Turkey* algoritmus [cooleytukey]. Základná myšlienka algoritmu spočíva v rozložení transformácie dĺžky N za predpokladu, že N nie je prvočíslo na $N = r_1 r_2$, následne sa DFT 12 rozpísaním indexov k a n

$$\begin{aligned} k &= k_1 r_1 + k_0, & k_0 &= 0, 1, \dots, r_1 - 1, & k_1 &= 0, 1, \dots, r_2 - 1, \\ n &= n_1 r_2 + n_0, & n_0 &= 0, 1, \dots, r_2 - 1, & n_1 &= 0, 1, \dots, r_1 - 1, \end{aligned} \quad (20)$$

vyjadrí pomocou dvoch súm

$$f(k_1, k_0) = \sum_{n_0} \sum_{n_1} c(n_1, n_0) \cdot w_N^{kn_1 r_2} w_N^{kn_0}. \quad (21)$$

Úpravami tohoto výrazu dospejeme k záveru, že na celý výpočet algoritmu nám postačí $N(r_1 + r_2)$ operácií.

Celý algoritmus sa dá zovšeobecniť na m krokov, potom $N = r_1 \cdot r_2 \cdots r_m$. Ak zároveň všetky r_j sú rovné r , dostávame výsledný počet operácií $rN \log_r N$. To sa ešte dá zovšeobecniť pre $N = r^{m_1} s^{m_2} t^{m_3} \dots$. Avšak najväčšie výhody pre prácu s počítačmi nám poskytuje forma $N = r^m$, kde $r = 2$ alebo 4 , nakoľko počítače využívajú

v odkazovaní aj v násobení binárny zápis. Navyše podľa [cooleytukey] je pre tieto dve hodnoty algoritmus takmer najefektívnejší—formálne najefektívnejší je pre $r = 3$, ale úspora výkonu je len o 6% v porovnaní s predošlými dvoma, ktoré majú navyše výhodu aplikácie v počítači.

Najjednoduchšia a najpoužívanejšia forma Cooley-Turkey algoritmu je tzv. *split-radix* algoritmus. Princíp spočíva v rozdelení transformácie dĺžky N na dve transformácie dĺžok $N/2$ pomocou identity. Rozdelené sú podľa indexov n na párne $n = 2m$ a nepárne $n = 2m + 1$. Pre DFT tvaru (12) z definície 1.1 to bude vyzeráť nasledovne

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{f}_n w_N^{-kn} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \mathbf{f}_{2m} w_N^{-(2m)k} + \sum_{n=0}^{N/2-1} \mathbf{f}_{2m+1} w_N^{-(2m+1)k} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \mathbf{f}_{2m} w_{N/2}^{-mk} + w_N^{-k} \sum_{n=0}^{N/2-1} \mathbf{f}_{2m+1} w_{N/2}^{-mk}, \end{aligned} \quad (22)$$

tiež je to známe ako Danielson-Lanczosova lema.

FFT v Matlabe

V našej práci budeme na výpočet FFT využívať funkciu v Matlabe s názvom `fft`. $\mathbf{Y} = \text{fft}(\mathbf{x})$ je definovaná pre vstupný vektor x dĺžky N v tvare

$$\mathbf{Y}_k = \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n w_N^{-(k-1)(n-1)}, \quad (23)$$

kde $w_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ je N -tá mocnina identity.

Pri výpočte N -bodovej DFT s využitím knižnice FFTW [fftw] a Cooley-Turkey algoritmom [cooleytukey] najprv rozloží $N = r_1 r_2$ a ďalej postupne vypočíta r_1 transformácií veľkosti r_2 , potom r_2 transformácií veľkosti r_1 . Tento rozklad robí rekurzívne pre obidve transformácie— r_1 -bodová aj r_2 -bodová—až kým nemôže byť problém vyriešený pomocou jedným z niekoľkých počítačom-generovaných skriptov fixnej dĺžky. Tieto skripty používajú kombináciu niekoľkých algoritmov vrátane vyššie spomenutého dvoj-krokového Cooley-Turkey algoritmu, prime-factor algoritmu a split-radix algoritmu. Ak je N prvočíslo, knižnica FFTW najprv pomocou Raderovho algoritmu rozloží N -bodový problém na tri $(N-1)$ -bodové problémy. Následne pomocou Cooley-Turkey rozkladu vypočíta $(N-1)$ -bodové DFT ako je popísané vyššie v odseku.

2 Technický popis merania

2.1 Akustická a elektrická gitara

V nasledujúcich riadkoch si v stručnosti povieme niečo o stavbe gitary a o tom ako v nej vzniká tón. To, čo všetko hrá úlohu pri jeho tvorbe nám môže neskôr objasniť javy, ktoré budeme pozorovať pri analyzovaní tichnutia tónov. V tejto kapitole citujeme niektoré informácie z [6].

Akustická gitara

Moderné akustické gitary majú šesť strún, sú asi 65 cm dlhé a ich štandardné ladenie je E2, A2, D3, G3, B3 a E4 ($f = 82, 110, 147, 196, 247, 330$ Hz). Vyrobené sú z dreva, zvyčajne sekvojového, palisandrového, mahagónového alebo javorového.

Rozlišujeme štyri základné typy akustických gitár: klasické, flamenco, folkové (flat top), jazzové (arch top). Klasické a flamenco gitary majú nylonové struny, folkové a jazzové majú kovové. V našej práci budeme používať klasickú a folkovú gitaru. Navyše folková gitara má aj zabudovaný mikrofón, teda okrem akustického zvuku budeme nahrávať aj elektroakustický.

Zvuk gitary môžeme chápať ako systém viazaných vibrácií. Samotné brnknutie struny priamo spôsobí len slabý zvuk ale ten rozvibruje kobyľku a vrchnú dosku, ktoré odovzdajú energiu do vnútornej dutiny, lubov—ktoré spájajú vrchnú a spodnú dosku— a do spodnej dosky. Zvuk sa potom šíri po vibrujúcich doskách von z kruhového rezonančného otvoru. Pri nízkych frekvenciách vrchná doska prenáša energiu na spodok cez luby a vzduch vo vnútornej dutine. Kobyľka sa správa ako časť vrchnej dosky. Pri vysokých frekvenciách sa väčšina zvuku šíri po vrchnej doske a vtedy môžu byť dominantné mechanické charakteristiky kobyľky.

V našom meraní je pri všetkých akustických tónoch mikrofón nasmerovaný tesne pred rezonančný otvor a okolo gitary je penová izolácia aby sa čo najviac zabránilo neželaným odrazom zvuku od stien miestnosti.



Obr. 2: Ilustrácia rôznych typov gitár: klasická nylonová, folková, elektrická a jazzová.

Elektrická gitara

Hlavný rozdiel elektrických gitár od akustických je, že používajú elektromagnetické, prípadne piezoelektrické snímače. Elektromagnetický snímač pozostáva z cievky so stálym magnetom. Vibrujúca kovová struna spôsobí zmenu magnetického poľa cievky a tým v nej indukuje elektrický signál. Väčšina snímačov má zvlášť magnet pre každú strunu. Cievka je potom buď ovitá okolo všetkých šiestich magnetov, alebo šesť separátnych cievok je zapojených do série. Vzdialenosť medzi magnetmi a strunami je nastaviteľná, zvyčajne býva okolo 1,5 mm.

Kvôli nízkemu indukovanému signálu, sú gitarové snímače náchylné na 60 Hz šum z elektrického napájania. Toto viedlo ku vyvinutiu tzv. humbuckových snímačov, ktoré kombinujú výstup z dvoch cievok navinutých v protichodnom smere, tak aby bol šum z väčšej časti vyrušený.

Väčšina gitár má dva alebo tri snímače upevnené o telo na rôznych pozíciách medzi krkom a kobyľkou, tak aby boli zvýraznené iné harmonické frekvencie. Snímač pri krku zvýrazňuje viac nižšie harmónie a naopak snímač pri kobyľke tie vyššie. Prepínaním medzi snímačmi prípadne zväčšovaním ich odporov vieme ovplyvňovať celkovú farbu



Obr. 3: Snímače na elektrickú gitaru. V ľavo hore je jednoduchý snímač a ostatné dva sú humbuckery.

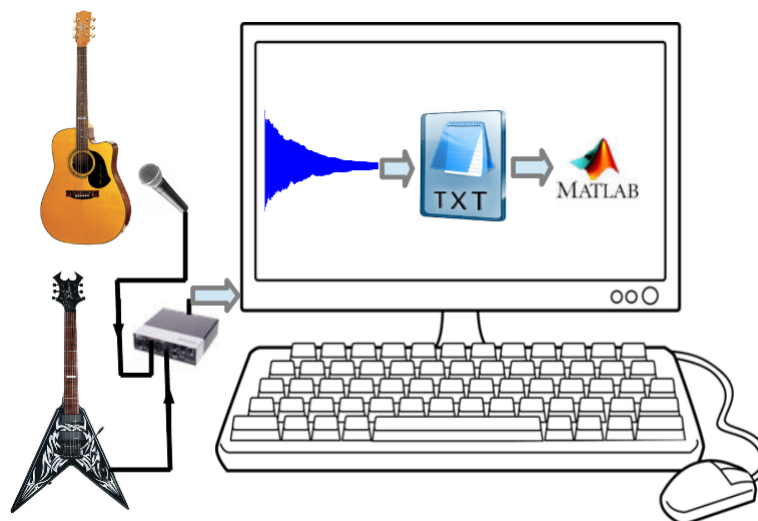
tónu gitary. V našom meraní nahrávame gitaru, ktorá má dva humbuckové snímače. Signál zaznamenávame z oboch snímačov bez zvyšovania odporu.

Telo gitary je plné, najmä kvôli menšej spätnej väzbe medzi reproduktorom a snímačmi, ktorá býva väčšia pri elektroakustických gitarách s dutým telom. Tým, že struny prenášajú relatívne málo energie do tela, elektrické gitary sú charakteristické dlhým doznievaním tónu. Celkovú farbu tónu okrem samotných snímačov a strún ovplyvňuje—v menšej miere—aj tvar tela, či materiály z ktorých je gitara vyrobená.

2.2 Digitálne zaznamenanie tónu

V našej práci budeme analyzovať tóny zahraté na štyroch rôznych gitarách: akustická s nylonovými, akustická s kovovými strunami, elektrická a elektroakustická gitara. Tóny z akustických gitár zaznamenáme pomocou mikrofónu SHURE SM58, ktorý bude signál ďalej posielat cez externú zvukovú kartu do počítača. Elektrickú a elektroakustickú gitaru budeme nahrávať priamo káblom z gitary do externej zvukovej karty a z nej následne do počítača. V počítači pracujeme so zvukom pomocou tzv. Digital Audio Workstation (DAW). Konkrétne v našom prípade použijeme softvér Audacity, ktorý je bezplatný open-source program na nahrávanie a úpravu hudby. Naš cieľ je dostať sa

k diskretným hodnotám funkcie amplitúdy zvuku. Na tento účel použijeme skript v jazyku Python, ktorý uvádzame v Prílohe. Vstupom je hudobný záznam v nekomprimovanom formáte “Berkley/IRCAM/CARL Sound File” s kódovaním “Signed 16 bit PCM” a výstupom je textový súbor s hodnotami funkcie amplitúdy v každom deliacom bode, oddelenými novým riadkom. Po nahratí tónu pomocou DAW ho uložíme v požadovanom formáte a následne zbehneme spomínaný skript. Výstup z tohto skriptu je vlastne vektor diskretných hodnôt funkcie amplitúdy zvuku v textovom formáte. Takýto súbor ľahko importujeme do matematického softvéru Matlab, v ktorom môžeme ďalej tón analyzovať. Pre lepšiu ilustráciu uvádzame nasledujúcu schému:



Obr. 4: Schéma zapojenia nástrojov a zaznamenania analyzovaných tónov.

2.3 Temperované ladenie

V hudbe poznáme základných sedem celých tónov: C, D, E, F, G, A, H, aby boli vzdialenosti medzi všetkými tónami rovnaké nachádzajú sa ešte medzi niektorými poltóny: Cis, Dis, Gis, Ais. Dokopy nám to dáva interval dvanástich rovnako rozložených tónov. Harmonické frekvencie si všimol už Pythagoras, tým že niektoré tóny spolu znejú príjemne a niektoré naopak nie. Objavil, že je to vtedy ak dĺžky dvoch strún rovnakého materiálu a napätia sú v pomere dvoch malých celých čísel. Napríklad ak sú v pomere jedna ku dvom zodpovedá to jednej *oktáve*, teda ten istý tón o dvanásť poltónov vyššie. Ak sú dĺžky v pomere dva ku trom, zodpovedá to intervalu napríklad medzi

tónami C a G, nazývame ho *kvinta*. Dôvod prečo znejú tóny príjemne sú práve harmonické frekvencie, totiž tretia harmonická frekvencia prvého tónu je zhodná s druhou harmonickou frekvenciou druhého tónu. Podobne to platí pre všetky tóny, ktoré majú frekvenciu v nejakom pomere celých čísel. Práve ale od pomeru kvinty je odvodené tzv. *pythagorejské ladenie*. V tomto ladení sú všetky tóny oktávy získané postupnými kvintovými krokmi. Problém v tomto ladení je, že súčet dvanástich čistých kvínt sa nerovná siedmim oktávam. Tento fenomén sa nazýva *pythagorejská koma* a matematicky sa dá vyjadriť ako

$$\frac{(3 : 2)^{12}}{(2 : 1)^7} = \frac{3^{12}}{2^{12+7}} = \frac{531441}{524288} \approx 1,01364.$$

Vzniklo preto rovnomerne temperované ladenie, v ktorom kvinty nie sú čisté ale temperované s pomerom frekvencií $2^{7/12} : 1$. Dvanásta kvinta sa tak rovná siedmej oktáve. Rovnomerné preto, lebo pythagorejská koma je rovnomerne rozdelená do všetkých dvanástich kvínt. Ekvivalentne vieme ku tomuto ladeniu dospieť, ak priamo rozdelíme oktávu na dvanásť rovnako veľkých intervalov. Frekvencie v rovnomerne temperovanom ladení sú teda tvorené geometrickou postupnosťou s kvocientom $q = \sqrt[12]{2} \approx 1,05946$. Tým, že je to iracionálne číslo, rovnomerne temperované ladenie bude okrem oktáv vždy mierne vychýlené od intervalov v čistom pythagorejskom ladení.

3 Mocninový zákon

V našej práci sa pokúsime nájsť vzťah tichnutia jednotlivých harmonických frekvencií v čase. Jedna z hypotéz bude, že pokles ich amplitúd v čase bude rovnomerný, teda frekvencie budú spolu klesať rovnakou rýchlosťou. Na tento predpoklad nám poslúži práve mocninový zákon, ktorý vyjadruje mocninový vzťah medzi dvoma veličinami. Takýto vzťah platí v rôznych prírodných alebo človekom zapríčinených javoch: fázový prechod vody alebo magnetu, veľkosť častíc piesku, rozdelenie populácie v mestách alebo taktiež akustický útlm v zmysle merania straty energie šírenia zvuku v nejakom prostredí.

Práve posledný menovaný fenomén nás motivoval v skúmaní mocninového zákona v tichnutí harmonických frekvencií. Najprv si ale povieme niečo bližšie o ňom. Väčšina prostredí je viskózna, a teda nie sú ideálnymi prostrediami v ktorých sa zvuk šíri. Vždy totiž dochádza ku tepelnej spotrebe energie zapríčinené viskozitou. Mnohé experimentálne štúdie ukazujú, že koeficient akustického útlmu v mnohých prostrediach z viskózne-elastických materiálov, ako sú mäkké tkanivá, polyméry, zem a pórovitá skala môže byť vyjadrený ako mocninový zákon v závislosti od frekvencie [10,7]:

$$E(x + \Delta x) = E(x)e^{-\lambda(\omega)\Delta x}, \quad (24)$$

$$\lambda(\omega) = \lambda_0\omega^k, \quad (25)$$

kde ω je uhlová frekvencia, E je amplitúda akustického pola ako napríklad tlak alebo rýchlosť, Δx je vzdialenosť šírenia vlny, $\lambda(\omega)$ je koeficient akustického útlmu a k je reálny nezáporný exponent závislý od frekvencie, ktorý je získaný ako odhad empirických dát. Jeho hodnota sa pohybuje od 0 do 2. Akustický útlm vo vode, mnohých kovochoch a kryštalických materiáloch je kvadraticky závislý od frekvencie, teda $k = 2$. Ďalej napríklad pre sedimenty, zem a skaly sa pohybuje okolo hodnoty 1 a pre väčšinu mäkkých tkanív medzi hodnotami 1 a 2 [10,7].

3.1 Škálová invariantnosť

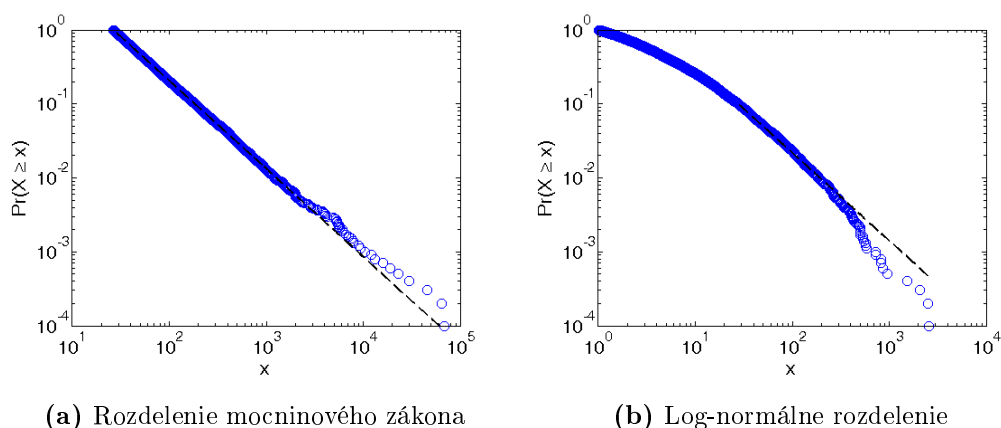
Jedna z vlastností mocninových zákonov je ich škálová invariantnosť. Pre rovnicu

$$f(x) = ax^k \quad (26)$$

to znamená, že škálovaním argumentu x nejakým konštantným faktorom c spôsobí len proporčné škálovanie samotnej funkcie. Matematicky vyjadrené ako

$$f(cx) = a(cx)^k = c^k f(x) \propto f(x). \quad (27)$$

Značí to, že škálovaním konštantou c jednoducho vynásobíme pôvodný vzťah mocninového zákona konštantou c^k . Teda všetky mocninové zákony s nejakým škálovým exponentom sú ekvivalentné až na konštantné faktory, keďže každý je zrejme škálovou variantou iného. Toto správanie je to, čo robí lineárnu závislosť pri zlogaritmovaných $f(x)$ a x . Graficky to vieme vyjadriť priamkou na log-log grafe, ktorá sa často nazýva *znak* mocninového zákona. V reálnych dátach je tento znak nutnou ale nie postačujúcou podmienkou správania mocninového zákona. V skutočnosti existuje veľa spôsobov ako vygenerovať dáta, ktoré majú tento znak, ale pri asymptotickom priblížení to nie sú skutočné mocninové zákony. Ako ilustráciu porovnania znaku mocninového rozdelenia uvádzame obrázok 5. Na podobrázku 5b sú náhodne vygenerované dáta z log-normálneho rozdelenia s parametrami $\mu = 0$ a $\sigma = 2$, pre ktoré sme odhadli parametre modelu mocninového zákona a vykreslili na log-log graf. Na podobrázku 5a sú na porovnanie dáta vygenerované z rozdelenia mocninového zákona s parametrami z predchádzajúceho odhadu. Preto je správne odhadovanie a posudzovanie modelu mocninového zákona stále aktívnou oblasťou výskumu v štatistike.



Obr. 5: Porovnanie znaku rozdelenia mocninového zákona a log-normálneho rozdelenia na log-log grafe. Modré guľičky sú náhodne vygenerované dáta z príslušných rozdelení a čierna prerušovaná čiara vyznačuje dáta, ktoré sa správajú podľa mocninového zákona.

Ďalšie vlastnosti mocninového zákona sú univerzálnosť a samopodobnosť.

3.2 Pravdepodobnostné rozdelenie mocninového zákona

Vo všeobecnosti pre množinu x platí mocninový zákon, ak je jej pravdepodobnostné rozdelenie

$$p(x) \propto x^{-\alpha}, \quad (28)$$

kde α je konštantný parameter rozdelenia a nazývame ho *exponent* alebo *škálový parameter*. Škálový parameter zvyčajne nadobúda hodnoty $2 < \alpha < 3$, ale nastávajú aj výnimky.

V praxi len pre zopár empirických javov platí mocninový zákon pre všetky hodnoty x . Väčšinou platí len pre hodnoty, ktoré sú väčšie ako nejaké najmenšie x_{min} . Vtedy hovoríme, že mocninové rozdelenie platí pre *chvost* rozdelenia.

Rozdelenie mocninového zákona rozlišujeme na spojité rozdelenie, kedy hodnoty dát sú reálne čísla a diskkrétne rozdelenie, kedy uvažujeme, že obor hodnôt pozostáva len z nejakej diskkrétnej množiny bodov, najčastejšie celých čísel. V našej práci budeme pozorovať exponenty poklesu jednotlivých harmonických frekvencií, ktoré nadobúdajú spojité reálne hodnoty. Samotné dáta budú samozrejme diskkrétne, len ich hodnoty budú pochádzať zo spojitého oboru hodnôt. Zameriame sa preto na spojité rozdelenie mocninového zákona a ďalej budeme uvádzať vzorce len pre tento typ rozdelenia. Jeho hustota pravdepodobnosti je

$$p(x) dx = \Pr(x \leq X < x + dx) = Cx^{-\alpha} dx, \quad (29)$$

kde X je pozorovaná veličina a C normalizačná konštanta spĺňajúca $\sum_{x=x_{min}}^{\infty} Cx^{-\alpha} = 1$. Vidíme, že toto rozdelenie diverguje pri $x \rightarrow 0$. Preto musíme zaviesť dolné ohraničenie $x_{min} > 0$ mocninového zákona. Ďalej predpokladáme $\alpha > 1$, keďže rozdelenia s $\alpha \leq 1$ nie sú normalizovateľné a preto ani reálne v prírode nemôžu nastať. Dopočítame normalizačnú konštantu a dostávame

$$p(x) = \frac{\alpha - 1}{x_{min}} \left(\frac{x}{x_{min}} \right)^{-\alpha}. \quad (30)$$

V niektorých prípadoch je taktiež vhodné uvažovať aj kumulatívnu distribučnú funkciu alebo CDF (z anglického cumulative distribution function) rozdelenia mocninového zákona, ktorú značíme $P(x)$ a je definovaná ako $P(x) = \Pr(X \geq x)$. Jej tvar pre spojité

prípád vyzerá nasledovne

$$P(x) = \int_x^\infty p(x')dx' = \left(\frac{x}{x_{min}}\right)^{-\alpha+1}. \quad (31)$$

3.3 Analýza dát mocninového zákona

Hoci výskyt mocninového zákona v prírodných lebo ľudských javoch je častý, jeho odhalenie a charakterizovanie je zvyčajne komplikované najmä kvôli fluktuáciám na chvoste rozdelenia ako aj obtiažnosťou identifikovania rozsahu dát pre ktorý mocninový zákon platí. Často používané metódy na analyzovanie mocninového zákona, ako napríklad metóda najmenších štvorcov, môžu spôsobiť nepresné odhady parametrov mocninového zákona ako aj nedostatočnú informáciu o tom, či vôbec dáta správajú podľa mocninového zákona. Na takéto metódy často nabáda jednoduchá úvaha. Ak zlogaritmujeme obe strany rovnice (28) dostávame, že rozdelenie mocninového zákona popisuje vzťah $\ln p(x) = \alpha \ln x + \text{konštanta}$, čo implikuje klesajúcu priamku na grafe s oboma zlogaritmovanými osami. Ďalej sa obyčajne kvantifikuje závislosť x , zostrojí sa histogram frekvencie rozdelenia a vykreslí sa do zlogaritmovaného grafu. Následne sa na základe histogramu usúdi, či krivka so škálovým parametrom α dostatočne aproximuje dáta. Sklon krivky sa zvyčajne odhaduje pomocou lineárnej regresie najmenších štvorcov logaritmu histogramu. Nasledujúci postup nám—narozdiel od toho predchádzajúceho [1]—zaručí dobrý a dostatočne presný odhad parametrov rozdelenia mocninového zákona:

1. Odhadnutie parametrov x_{min} a α pomocou metód popísaných v kapitole 3.4.
2. Vypočítanie správnosti odhadu modelu pomocou metód z kapitoly 3.5. Ak je výsledná p -hodnota väčšia ako 0.1, mocninový zákon je prípustnou hypotézou pre dáta, inak je zamietnutý.
3. Porovnanie mocninového zákona s alternatívnou hypotézou pomocou testu maximálnej vierohodnosti, ako je popísané v kapitole 3.6. Ak je pre každú alternatívu pomer vierohodnosti významne odlišný od nuly, potom to vypovedá o tom, či je alternatíva preferovaná voči modelu mocninového zákona alebo nie.

3.4 Odhadnutie parametrov modelu

Odhadnutie dolného ohraničenia

Ako sme už spomínali vyššie, je dôležité správne určenie dolného ohraničenia dát, od ktorého sa správajú podľa mocninového zákona. Ak by sme ho zvolili veľmi nízko, dostaneme vychýlený odhad škálového parametra, keďže sa budeme pokúšať odhadnúť model mocninového zákona s nemocninovými dátami. Na druhej strane, ak zvolíme x_{min} veľmi veľké, zbytočne sa zbavíme legitímnych dát $x_i < \hat{x}_{min}$, čo zvýši štatistickú chybu škálového parametra ako aj odchýlku spôsobenú konečným rozsahom.

Metóda, ktorú popíšeme je založená na minimalizovaní “vzdialenosti” medzi modelom mocninového zákona a empirických dát a môže sa použiť pre diskkrétne aj spojité dáta. Základná myšlienka metódy je jednoduchá: zvolíme takú hodnotu \hat{x}_{min} , aby bolo rozdelenie pravdepodobnosti meraných dát a najlepší odhad mocninového modelu čo najpodobnejší ako nad \hat{x}_{min} . Vo všeobecnosti, ak zvolíme \hat{x}_{min} vyššie, ako skutočná hodnota x_{min} , zbytočne zredukujeme náš dátový súbor a tým bude horšie vyhovovať rozdelenie pravdepodobnosti kvôli štatistickým fluktuáciám. Naopak, ak zvolíme \hat{x}_{min} nižšie ako skutočné x_{min} , rozdelenie bude iné kvôli základným rozdielom medzi dátami a modelom, ktorým ho popisujeme. Niekde medzi nimi teda leží náš najlepší odhad.

Na meranie vzdialenosti medzi dvoma pravdepodobnostnými rozdeleniami použijeme Kolmogorov-Smirnov alebo KS štatistiku, nakoľko nejde o normálne dáta. Udáva maximálnu vzdialenosť medzi kumulatívnymi distribučnými funkciami dát a odhadovaného modelu:

$$D = \max_{x \geq x_{min}} |S(x) - P(x)|. \quad (32)$$

$S(x)$ tu predstavuje CDF dát pre pozorovania s hodnotou aspoň x_{min} a $P(x)$ je CDF pre model mocninového zákona, ktorý najlepšie popisuje dáta v rozsahu $x \geq x_{min}$. Náš odhad \hat{x}_{min} je potom hodnota x_{min} , ktorá minimalizuje D .

Odhad škálového parametra

Správne odhadnutie škálového parametra α vyžaduje dolné ohraničenie x_{min} dát mocninového zákona. Odhad x_{min} už máme z predošlej kapitoly, môžeme teda prejsť k odhadu α .

Na odhadovanie parametru α použijeme *metódu maximálnej vierohodnosti*. Odhad maximálnej vierohodnosti (MLE z anglického maximum likelihood estimator) pre dáta z rozdelenia mocninového zákona pre $x \geq x_{min}$ je

$$\hat{\alpha} = 1 + n \left[\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{x_{min}} \right]^{-1}, \quad (33)$$

kde $x_i, i = 1 \dots n$ sú namerané hodnoty x , pre ktoré platí $x_i \geq x_{min}$. Štandardná odchýlka odhadu $\hat{\alpha}$ je

$$\sigma = \frac{\hat{\alpha} - 1}{\sqrt{n}} + O(1/n), \quad (34)$$

kde korekcia vyššieho rádu je kladná. [1]

3.5 Správnosť odhadu modelu

Nástroje v predošlej kapitole nám pomôžu nastaviť rozdelenie mocninového zákona pre dané dáta a poskytnúť odhady α a x_{min} . Avšak nehovoria nič o tom, či je mocninový zákon pravdepodobný odhad pre dáta. Bez ohľadu na skutočné rozdelenie, z ktorého dáta pochádzajú, vždy môžeme odhadovať mocninovým zákonom. Potrebujeme teda nejaký spôsob ako určíme, či je odhad modelu pre dané dáta správny.

Na odpoveď pre takúto hypotézu použijeme tzv. *test správnosti modelu*, ktorý nám vygeneruje p -hodnotu, ktorá vyčíslí pravdepodobnosť testovanej hypotézy. Tieto testy sú založené na meraní “vzdialenosti” medzi rozdelením empirických dát a predpokladaným modelom. Vzďialenosť je porovnaná s nameranou vzdialenosťou pre porovnateľne syntetické dáta pochádzajúce z rovnakého modelu a p -hodnota je definovaná ako podiel syntetických vzdialeností väčších ako empirická vzdialenosť. Ak je p veľké (blízke 1), potom sú rozdiely medzi empirickými dátami a modelom zodpovedajúce iba štatistickým fluktuáciám. Ak je malé, model je pre dané dáta nepravdepodobný.

Najprv odhadneme empirické dáta modelom mocninového zákona ako je popísané v kapitole 3.4 a vypočítame KS štatistiku pre tento odhad. Ďalej vygenerujeme veľké množstvo syntetických dát z rozdelenia mocninového zákona so škálovým parametrom α a dolným ohraničením x_{min} , ktoré nám vyšli z odhadu modelu. Odhadneme každý syntetický dátový súbor zvlášť jeho vlastným modelom mocninového zákona a pre každý vypočítame KS štatistiku v závislosti od jeho modelu. Potom spočítame akým

podielom je výsledná štatistika väčšia ako hodnota pre empirické dáta. Tento podiel je naša p -hodnota.

Ak sa už dopočítame ku našej p -hodnote, potrebujeme vedieť rozhodnúť či je dostatočne malá na to aby sme mohli zamietnuť hypotézu mocninového zákona, alebo či je naopak pravdepodobná pre testované dáta. Hypotézu mocninového zákona zamietneme ak $p \leq 0.1$ teda vtedy, ak je pravdepodobnosť 1 ku 10 alebo menšia a to v tom prípade, že by sme náhodou vygenerovali dáta, ktoré tak nepresne zodpovedajú modelu ako dáta ktoré testujeme.

Je dôležité si tiež uvedomiť, že veľká p -hodnota nutne neznamená rozdelenie mocninového zákona dát. Sú na to dva dôvody. Po prvé, môže existovať iné rozdelenie, ktoré popisuje dáta rovnako dobre alebo ešte lepšie v rozsahu pozorovaných x . Je potrebné vykonanie ďalších testov na zamietnutie takýchto alternatív, tie popíšeme v kapitole 3.6. Po druhé je možné, že pre malé hodnoty n bude empirické rozdelenie približne zodpovedať mocninovému zákonu a teda p -hodnota bude veľká napriek tomu, že mocninový zákon je zlý model pre dáta. Toto nie je nedostatok metódy ale odzrkadľuje to fakt, že je skutočne ťažké zamietnuť mocninový zákon, ak máme veľmi málo dát. Preto by sme vysoké p -hodnoty mali vyhodnocovať opatrne pri malom n .

3.6 Alternatívne rozdelenia

Metódy písane v kapitole 3.5 nám poskytujú spoľahlivý test, či dané dáta pravdepodobne pochádzajú z rozdelenia mocninového zákona. Nehovoria už ale nič o tom, či nejaké iné rozdelenie, napríklad exponenciálne alebo log-normálne, nepopisujú model rovnako dobre alebo prípadne ešte lepšie. Toto vieme eliminovať, ak by sme znovu použili test správnosti odhadu—jednoducho môžeme celý proces popísaný vyššie urobiť pre ďalšie možné rozdelenia, nakoniec vypočítať p -hodnoty a porovnať ich s p -hodnotou rozdelenia mocninového zákona. Pochopiteľne nevieme porovnať odhad mocninového zákona so všetkými možnými rozdeleniami, je preto v konečnom dôsledku na uvážení výskumníka, ktoré hypotézy má zmysel porovnávať.

V praxi sa porovnaniam alternatívnych rozdelení dostaneme len vtedy, ak bude splnený test správnosti odhadu rozdelenia mocninového zákona. Ak by nebol, ďalej nás rozdelenie nezaujíma. Ak je splnený, existujú metódy, ktoré priamo porovnávajú

dve rozdelenia a sú jednoduchšie na implementovanie ako KS test. Takou metódou je *test pomeru vierohodnosti*. Základná myšlienka je spočítať vierohodnosť dát pre dve konkurenčné rozdelenia. Rozdelenie s väčšou vierohodnosťou je lepším odhadom.

4 Spektrálna analýza tónu

V nasledujúcej kapitole sa budeme venovať analytickej práci. Celý výskum budeme sledovať na rôznych druhoch gitár. Našu pozornosť upriamime na správanie harmonických frekvencií v čase znenia tónu. Zameriame sa na rôzne faktory—charakteristiky—ktoré na to môžu vplyvať. Tieto charakteristiky sme už v tejto práci spomínali—sú to výška, hlasitosť a farba tónu. Najprv si ale poďme priblížiť, akým spôsobom to budeme sledovať.

Aby sme mohli pozorovať závislosti medzi jednotlivými charakteristikami ako aj to, ako každá zvlášť vplyva na výslednú farbu tónu, potrebujeme zostaviť meranie, ktoré pokryje všetky kombinácie zmien charakteristík. Teraz popíšeme to, ako budeme jednotlivé charakteristiky ovplyvňovať.

Tóny budeme hrať na rôznych strunách, teda rôznych výškach tónu. Pre jednoduchosť si zvolíme len jeden tón a meniť budeme iba jeho oktávy, presnejšie násobky jeho frekvencie. Ako pozorovací tón sme si zvolili E. Výhodou tohto tónu na gitare je, že dve struny (najhrubšia a najtenšia) sú naladené na jeho frekvencie v rozdiel dvoch oktáv—E2 a E4. Každú z týchto dvoch strún okrem brnknutia na prázdno, zahráme aj o oktávu vyššie, čiže s prichyteným dvanástym pražcom. Okrem dvoch ďalších tónov E3 a E5, získame aj pohľad na farbu stlačenej struny na pražci.

Struny budeme vždy brnkáť približne na rovnakom mieste na strune a budeme používať brnkátko, pre čo najväčšiu jednotnosť v hraní. Každý tón budeme hrať tromi rôznymi intenzitami—slabo, stredne silno a silno. Získame tak pohľad na charakteristiku hlasitosti tónu v podobe sily úderu. Aj bez analýzy totiž vnímame na vlastné uši rozdiel vo farbe tónu zahratého slabučko a veľmi silno, samozrejme okrem zmeny samotnej hlasitosti.

Farba tónu bude našim primárnym objektom pozorovania. Okrem jeho pozorovania ho budeme aj priamo ovplyvňovať hraním tónov na rôznych druhoch gitár. Ako sme písali v kapitole 2.1, na výslednú farbu vplyva veľa faktorov—tvar tela, materiály, druh strún ako aj spôsob zachytenia a prenosu signálu. V našom meraní použijeme klasickú akustickú gitaru s nylonovými strunami, elektroakustickú gitaru s kovovými strunami (folková gitara), ktorú budeme snímať jednak akusticky mikrofónom ale aj priamo káblom cez zabudovanú elektroakustickú mechaniku gitary a nakoniec elektrickú gitaru

s elektromagnetickými snímačmi.

Pre lepší prehľad uvádzame nasledujúcu tabuľku zachytávajúcu spôsoby alternovania charakteristík hudobných tónov v našom meraní. Výsledný súbor dát pozostáva so všetkých kombinácií uvedených možností a navyše každý tón je zahratý trikrát pre lepšiu objektivitu merania. Spolu to dáva $4 \text{ výšky} \times 3 \text{ hlasitosti} \times 4 \text{ druhy gitár} \times 3 \text{ merania} = 144 \text{ tónov}$.

| Výška, struna a pražec | Hlasitosť | Druh gitary |
|------------------------|---------------|------------------|
| E2 82.41 Hz, 6, 0 | slabo | klasická |
| E3 164.81 Hz, 6, 12 | stredne silno | folková |
| E4 329.63 Hz, 1, 0 | veľmi silno | elektroakustická |
| E5 659.25 Hz, 1, 12 | | elektrická |

Tabuľka 1: Prehľad spôsobov zmien charakteristík tónu v meraniach. Prvý stĺpec reprezentuje zmenu výšky. Prvý údaj v ňom udáva označenie tónu a jeho výšku frekvencie, nasleduje poradové číslo struny na gitare—1 znamená najtenšia struna a 6 najhrubšia, posledný údaj označuje prichytený pražec na danej strune. V druhom stĺpci sú tri rôzne intezity brnknutia na strune a posledný stĺpec reprezentuje obmenu farby tónu vplyvom rôznych typov gitár.

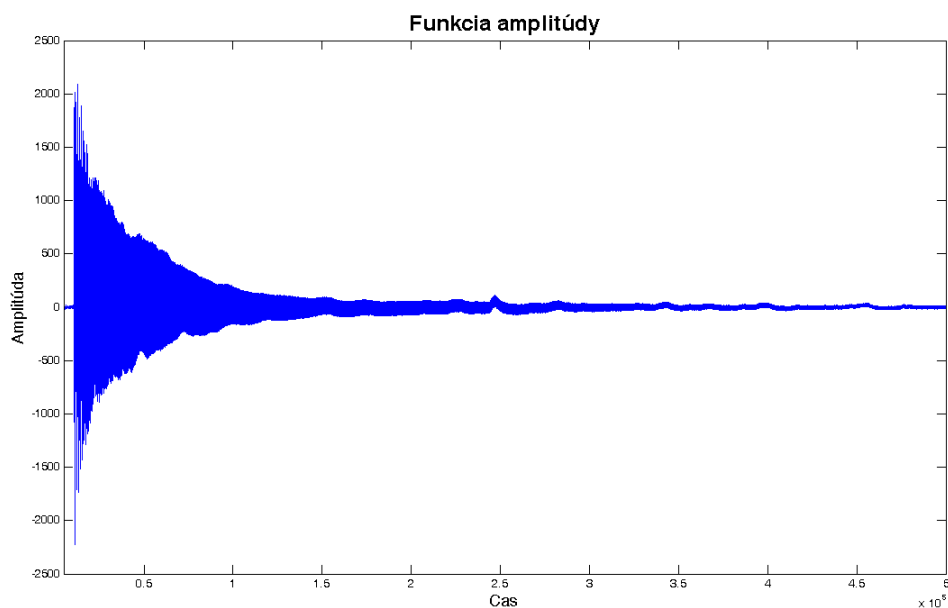
Pri nahrávaní budeme postupovať spôsobom popísaným v kapitole 2.2. Výstupom uvedeného postupu bude 144 textových súborov, v ktorých budú zapísané hodnoty funkcie amplitúd jednotlivých tónov merania. Takéto súbory vieme ľahko importovať do výpočtového softvéru Matlab a pracovať s nimi ako s vektormi hodnôt.

4.1 Tíchnutie harmonických frekvencií

Našou prvou a hlavnou úlohou bude analyzovanie tíchnutia harmonických frekvencií v čase. Teda to, ako sa správajú jednotlivé harmonické frekvencie od brnknutia na strunu, až po doznenie tónu. Zaujímá nás, či by sme vedeli tento úpadok reprezentovať nejakou vhodnou funkciou, prípadne, či sa vývoj v čase nejakým odlišuje pri rôznych frekvenciách.

Ukážeme si ako to v praxi vyzerá na konkrétnom tóne. Ako príklad si zoberme tón E4 zahraný stredne silno na akustickej folkovej gitare s kovovými strunami. Obrá-

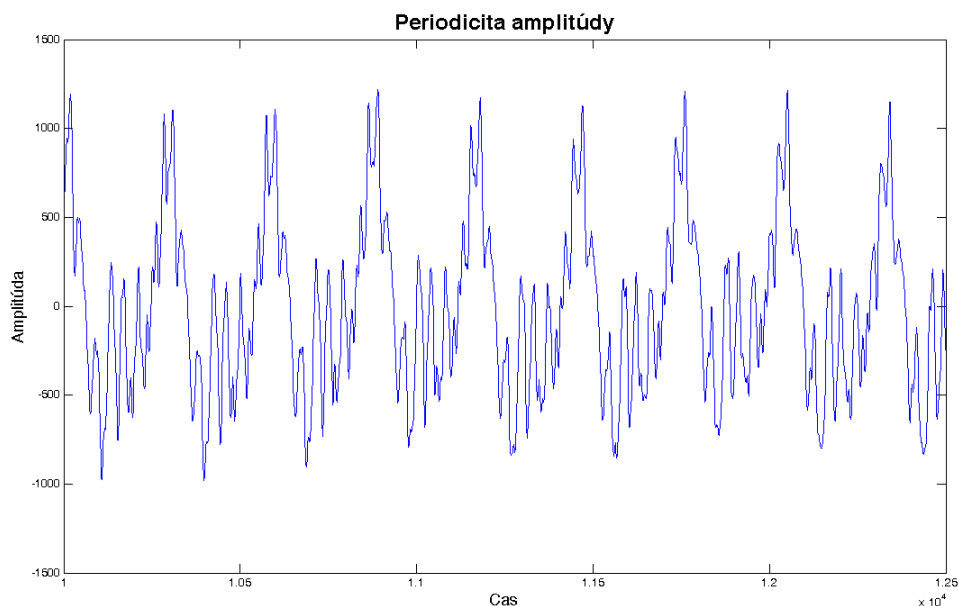
zok 6 reprezentuje priebeh jeho funkcie amplitúdy v čase. Popíšeme si najprv *obálku tónu*—je to celková štruktúra amplitúdy zvuku. Už na prvý pohľad z obrázku vidno exponenciálny pokles amplitúdy, čo je v princípe známy fenomén. Na začiatku tónu môžeme badať krátky nárast amplitúdy nazývaný anglicky *attack*, nasleduje pomalý úbytok amplitúdy (*decay*) potom doznievanie (*sustain*) až nakoniec doznenie (*release*). Tieto premenné sú často krát nastaviteľné v syntetizátoroch, nakoľko do veľkej miery ovplyvňujú charakter výsledného zvuku.



Obr. 6: Priebeh amplitúdy tónu v celej dobe znenia.

Ak by sme si obrázok 6 dostatočne priblížili, skutočne uvidíme periodicitu amplitúdy (obrázok 7). Okrem hlavnej periódy, ktorá nám udáva frekvenciu tónu, čiže jeho výšku môžeme pozorovať aj periódy vo vnútri nej. Tieto periódy sú harmonické frekvencie, ktoré ako sme už neraz spomínali určujú farbu tónu. Na ich vyčíslenie použijeme DFT. Máme teraz dve možnosti, ako sa na spektrum harmonických frekvencií pozeráť. Buď môžeme spraviť DFT pre celý tón ako celok a získame tak jedno frekvenčné spektrum pre celé znenie tónu. Druhá možnosť je, že zistíme hlavnú frekvenciu tónu a urobíme DFT pre každé opakovanie základnej periódy zvlášť. Získame tak K frekvenčných spektrier, kde K je počet opakovaní základnej periódy tónu v čase. Nás bude zaujímať práve tá druhá možnosť, nakoľko pri nej vieme analyzovať vývoj zastúpenia jednotlivých harmonických frekvencií v čase. V našom príklade na obrázku 7 ľahko spočítame, že jednu

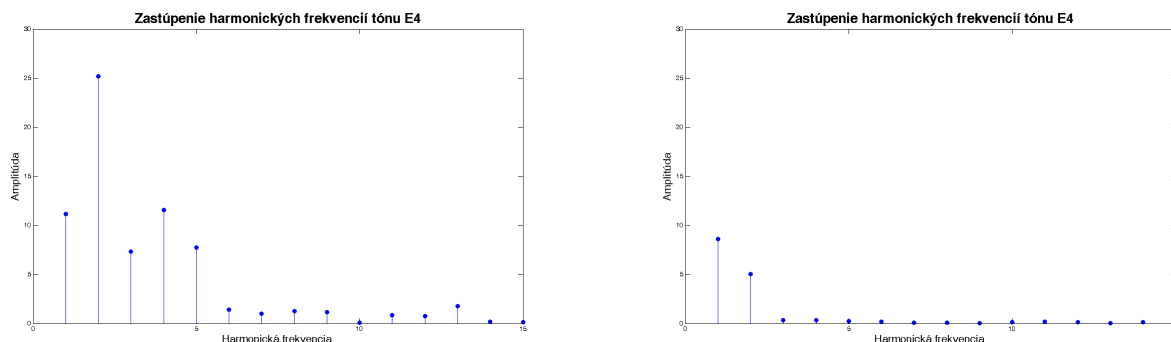
periódu tvorí 290 bodov. Ďalej vieme, že sme nahrávali pri vzorkovaní 96 000 Hz a teda po vydelení počtom bodov jednej periódy dostaneme hlavnú frekvenciu pozorovaného tónu približne 331 Hz, čo skutočne zhruba zodpovedá tónu E4.



Obr. 7: Približená perióda amplitúdy hudobného tónu.

Pozrime sa najprv, ako vyzerá zastúpenie harmonických frekvencií v jednej perióde. Perióda, ktorej spektrum je ilustrované na obrázku 8a, sa nachádza približne v štvrtine celého znenia tónu. Toto zastúpenie sa s každou predošlou aj nasledujúcou periódou mení. Poďme si ale povedať, čo vidíme z tohto obrázku. Na x-ovej osi sa nachádza pätnásť harmonických frekvencií. Nosná frekvencia je 331 Hz, teda prvá hodnota znázorňuje zastúpenie tejto frekvencie a ďalšie znázorňujú zastúpenie jej celočíselných násobkov. Pätnásť frekvencia má výšku 4965 Hz, čo zďaleka nie je hranica počutia ľudského ucha—tá je niekde v intervale 16-20 kHz. Napriek tomu vyššie frekvencie nebudeme brať do úvahy, nakoľko môžu byť značne ovplyvnené šumom alebo nepresnosťami softvérových výpočtov. Vidíme, že najväčšie zastúpenie nemá prvá ale druhá frekvencia, teda najdominantnejší charakter tónu E4 na gitare udáva frekvencia 662 Hz, takisto nasledujúce tri harmonické frekvencie (tretia, štvrtá a piata) tiež značne ovplyvňujú celkovú farbu tónu. Ostatné majú na farbu tónu napriek nižšiemu zastúpeniu stále podstatný vplyv.

Ako motiváciu pre nasledujúcu podkapitolu sa pozrime na obrázok 8b. Podobne ako



(a) Zastúpenie harmonických frekvencií v spektre tesne po zahraní tónu. (b) Zastúpenie harmonických frekvencií v spektre pri doznívaní tónu.

Obr. 8: Porovnanie zastúpenie harmonických frekvencií v spektre v rôznych časoch znenia tónu.

na obrázku 8a sa tam nachádza zastúpenie harmonických frekvencií v tom istom tóne, ale v inom časovom okamihu. Je to približne v troch štvrtinách znenia. V porovnaní s predchádzajúcim obrázkom sú zastúpenia nižšie, čo nie je prekvapivé, keďže tón doznieva. Zaujímavé ale je, že pomery medzi jednotlivými harmonickými frekvenciami sú odlišné. Konkrétne prvá je zastúpená viacej ako druhá, na rozdiel od prvého obrázku, kde to bolo naopak. Jednoznačne nám to napovedá, že priebeh poklesov jednotlivých harmonických frekvencií nie je rovnaký a teda niektoré doznejú skôr ako iné. Prípadne môže nastať situácia, že niektoré frekvencie v čase tíchnutia sa na nejaký čas zintenzívnia. O tom ale budeme bližšie rozprávať až v podkapitole 4.1.4.

4.1.1 Analýza poklesu harmonických frekvencií

Zamerajme sa ďalej na správanie sa jednotlivých harmonických frekvencií v čase. Ako sme si už pri pohľade na obrázok 6 všimli, celková amplitúda tónu v čase klesá exponenciálne. Budeme teda predpokladať a nakoniec sa aj skutočne ukáže, že aj harmonické frekvencie klesajú podobným spôsobom avšak otázkou stále zostáva, či klesajú všetky rovnako, prípadne, ktoré klesajú rýchlejšie a ktoré pomalšie v čase. Priebeh vývoja harmonických frekvencií v čase budeme aproximovať exponenciálnou funkciou. Funkcia exponenciálneho poklesu má vo všeobecnosti tvar

$$f(t) = f_0 e^{-\lambda t}, \quad (35)$$

kde f_0 je počiatočná hodnota funkcie v čase $t = 0$ a λ je konštanta exponenciálneho poklesu.

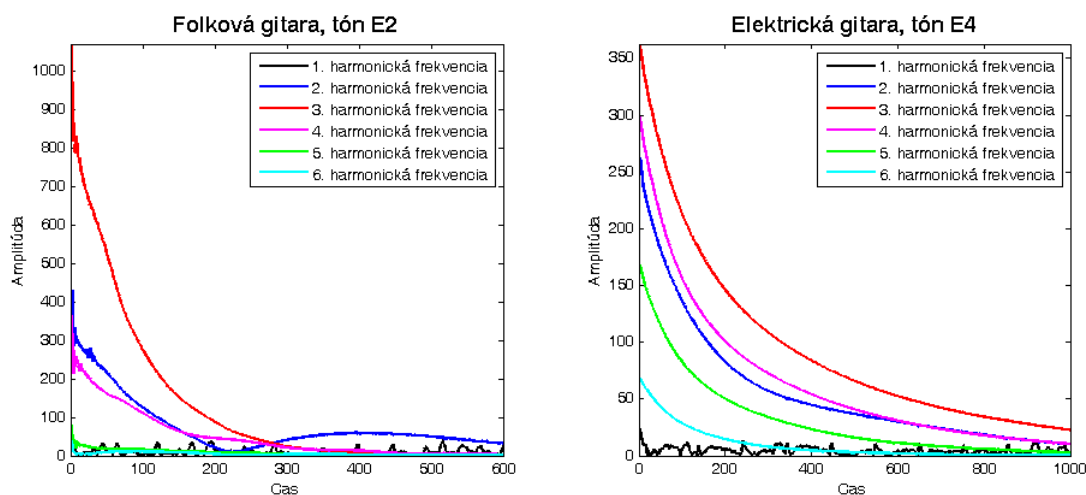
Vzhľadom na to, že v našom prípade do funkcie $f(t)$ vstupujú diskkrétne hodnoty z konečného súboru, má zmysel zaviesť pojem *priemerná životnosť* prvku. Označuje sa τ a vieme ju jednoducho vyjadriť pomocou konštanty exponenciálneho poklesu, ako $\tau = \frac{1}{\lambda}$. Taktiež si definujeme ďalšiu charakteristiku exponenciálneho poklesu—*polčas rozpadu* $t_{1/2}$. Vieme ho vyjadriť pomocou konštanty poklesu alebo priemernej životnosti prvku, ako:

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \tau \ln(2). \quad (36)$$

Ako prvé odhadneme nelineárnou metódou najmenších štvorcov model exponenciálneho poklesu (35) pre každú harmonickú frekvenciu zvlášť. Pre tento odhad využijeme v Matlabe funkciu `fit` a model `exp1`. Vzhľadom na to, že nás v tejto podkapitole zaujíma, ktoré harmonické frekvencie tíchnu v čase rýchlejšie a ktoré pomalšie, budeme ďalej analyzovať iba ich konštanty exponenciálneho poklesu λ . Tie si ešte upravíme na tvar priemernej životnosti $\tau = \frac{1}{\lambda}$. Namerané hodnoty konštánt exponenciálneho poklesu sú totiž malé čísla rádovo v intervale $(10^{-4}, 10^{-1})$, preto obrátením ich hodnoty získame prehľadnejšie hodnoty. Pri týchto hodnotách platí, že čím sú väčšie tým dlhšie daná harmonická frekvencia znie. Takto získame z dát vektor $\vec{\tau}$, ktorého hodnoty budú pozostávať z obrátenej hodnoty odhadov konštánt exponenciálneho poklesu pre jednotlivé harmonické frekvencie pozorovaného tónu. Ďalej sa má zmysel zamyslieť nad dĺžkou tohto vektora, teda konkrétne nad počtom pozorovaných harmonických frekvencií. Vysoké harmonické frekvencie totiž môžu byť ovplyvnené softvérovými nepresnosťami ako aj šumom signálu. Keďže pozorujeme tóny s rôznymi výškami základných frekvencií zavedieme horné frekvenčné ohraničenie harmonických frekvencií. Budeme teda pozorovať len správanie tých harmonických frekvencií, ktorých frekvencia je nižšia ako toto ohraničenie. To znamená, že pre rôzny výšky tónov dostaneme rôzne počty harmonických frekvencií. Keďže je ťažké odhadnúť správnu hranicu ohraničenia, tak aby sme jednak nezanedbali frekvencie, ktoré sú vo farbe tónu dôležité, ale zároveň aby sme nebrali do úvahy nepresné odhady vyšších frekvencií a vplyv šumu, vyskúšame viacero horných ohraničení a porovnáme výsledky.

Aby sme mali lepšiu predstavu o vývoji harmonických frekvencií v čase tíchnutia

tónu, pozrime sa na obrázok 9. Ako vidíme, pokles harmonických frekvencií sa môže veľmi líšiť v závislosti od rôznych charakteristík. Ako príklad uvádzame priebeh tíchnutia pre tón E2 na folkovej gitare a tónu E4 na elektrickej. Rozdielov je hneď niekoľko. Zatiaľ čo na pravom podobrázku tíchnu jednotlivé frekvencie približne rovnakou rýchlosťou a ich pomery zastúpenia sú v čase približne podobné, na ľavom podobrázku sa pomery zastúpenia v čase viac krát menia a každá frekvencia sa vyvíja vlastným spôsobom. Napríklad druhá harmonická frekvencia okrem poklesu, kedy na krátko jej amplitúda klesne takmer na nulu, zaznamenáva na nejaký čas dokonca nárast intenzity, a aj v doznievaní tónu je jej frekvencia najdominantnejšia. Vývoj základnej frekvencie tónu, teda prvej harmonickej frekvencie bude asi zapríčinený nejakou chybou buď merania, alebo výpočtov. Rozhodne toto nebude jej skutočný vývoj tíchnutia a teda ju bohužiaľ budeme musieť ignorovať. Rozdiel v hodnotách amplitúd na podobrázku je spôsobený rôznym nastavením zosilnenia signálu pri nahrávaní, nás ale nezaujímajú hodnoty zastúpenia harmonických frekvencií ale ich rýchlosť poklesu, ktorá sa zachová aj pri inej škále amplitúdy.



Obr. 9: Rôzne charaktery tíchnutia harmonických frekvencií pre dva rozličné tóny líšiacie sa vo výške tónu a druhu gitary, na ktorej bol zahráný.

Na základe tohto pozorovania sme zistili, že rôzne harmonické frekvencie klesajú rôznymi rýchlosťami, dokonca môžu počas poklesu tlmene oscilovať. Tieto prejavy môžu závisieť od rôznych charakteristík a vplyvov ako napríklad výška tónu, sila úderu, druh gitary prípadne iné. Preto nás bude ďalej zaujímať:

1. Závislosť rýchlostí poklesov od príslušných harmonických frekvencií v kapitole 4.1.2,
2. Pravdepodobnostné rozdelenie rôznych rýchlostí poklesov pozorovaných pre určitý tón v kapitole 4.1.3.

4.1.2 Mocninový zákon rýchlostí poklesu

Keďže v prírode sa často tento známy vzťah vyskytuje, rozhodli sme sa preskúmať, či by sa správanie konštánt poklesu, prípadne ich obrátených hodnôt—priemerné životnosti, dalo takýmto spôsobom popísať. Ako sme písali na začiatku kapitoly 3, motivovali nás najmä výskumy akustického útlmu v rôznych prostrediach. V rovnici 24 sa má konštanta exponenciálneho poklesu správať ako mocninový vzťah frekvencie. Ak to aplikujeme na našu rovnicu v tvare 35, budeme očakávať, že λ sa bude správať ako

$$\lambda(f) = \lambda_0 f^\alpha, \quad (37)$$

kde f budeme uvažovať ako harmonickú frekvenciu príslušnej konštanty exponenciálneho poklesu, λ_0 a α sú parametre mocninového zákona. Táto rovnica teda vyjadruje, že vyššie harmonické frekvencie tíchnu oveľa rýchlejšie ako nižšie a rýchlosť poklesu sa mení od frekvencie mocninovo. Exponent α budeme teda predpokladať, že vyjde kladný a teda priamka—znak mocninového zákona—na log-log grafe bude rastúca. Ak by sme ale namiesto λ zobrali priemernú životnosť $\tau = \frac{1}{\lambda}$, rovnica by sa upravila na

$$\tau(f) = \frac{1}{\lambda(f)} = \frac{1}{\lambda_0} f^{-\alpha} \quad (38)$$

a znak mocninového zákona bude klesajúci.

Z našich dát máme k dispozícii vektor konštánt exponenciálnych poklesov, v ktorom každý prvok zodpovedá nejakej harmonickej frekvencii a zároveň máme hodnotu základnej frekvencie tónu odhadnutú z dát, z ktorej si ľahko vytvoríme vektor harmonických frekvencií vynásobením poradovým číslom prvku vektora. Takúto dvojicu vektorov máme pre každé meranie. Našou úlohou teda ostáva odhadnúť tieto hodnoty modelom mocninového zákona v tvare rovnice (37) respektíve (38). Na to vieme využiť funkciu v Matlabe `logfit`, voľne dostupnú na [8]. Táto funkcia vykreslí dáta s jedným z voliteľných odhadov: mocninový zákon, logaritmickejší, exponenciálny alebo

lineárny odhad. Do funkcie vstupujú vektory x a y a tiež parameter pre škálovanie osí v závislosti od požadovaného odhadu. V našom prípade to bude parameter `loglog`, pre vykreslenie mocninového zákona. Následne funkcia regresne odhadne priamku pre dáta metódou najmenších štvorcov. Výstupom z funkcie je okrem parametrov modelu λ_0 a α aj priemerná štvorcová odchýlka MSE medzi dátami vektora y a odhadom priamky v lineárnych jednotkách vstupov a tiež koeficient determinácie R^2 , ktorý vyjadruje percento variability $\log(y)$, ktoré je vysvetlené premennou $\log(x)$ na odhadnutej priamke.

Odhad pomocou funkcie `logfit` sme urobili pre všetky merania niekoľkými spôsobmi. Jednak sme ako vstupný vektor y volili λ alebo τ a zároveň sme menili dve rôzne horné frekvenčné ohraničenia 3000 Hz¹ a 5000 Hz. Pri druhom menovanom stupni voľnosti bola zmena odhadov očakávaná, keďže niektoré vyššie harmonické frekvencie sa už nemuseli správať mocninovo, kvôli spomínaným nežiadúcim vplyvom šumu a teda odhady mohli vyjsť presnejšie. Viac nás prekvapili mierne odlišné výstupy funkcie pri zmene vstupu λ na τ , keďže ide len o obrátenie hodnôt. Odlišnosti ale mohli byť zapríčinené algoritmom funkcie. Pre porovnanie výsledkov uvádzame priemerné hodnoty priemernej štvorcovej odchýlky \overline{MSE} a koeficientu determinácie $\overline{R^2}$.

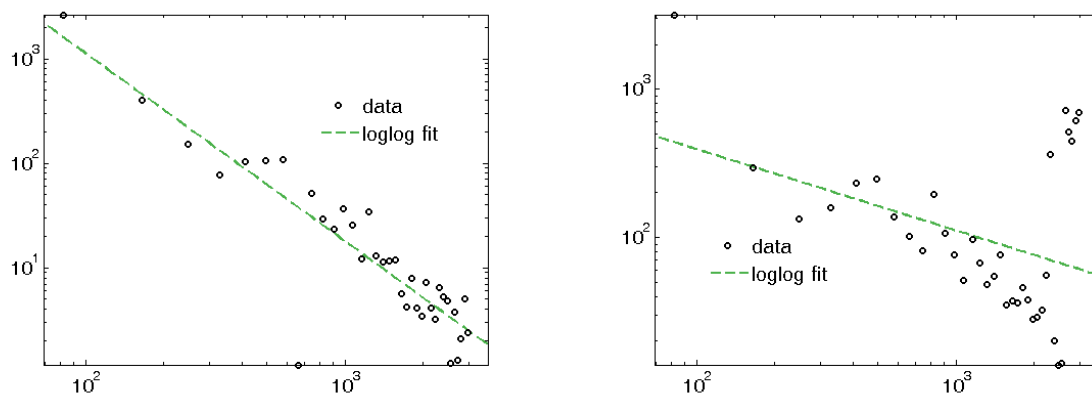
| Frekvenčné ohraničenie | 3000 Hz | | 5000 Hz | |
|--------------------------------------|------------------------|------------------|------------------------|------------------|
| Priemer výstupov <code>logfit</code> | \overline{MSE} | $\overline{R^2}$ | \overline{MSE} | $\overline{R^2}$ |
| λ | $8,525 \times 10^{-3}$ | 0,323 | $14,68 \times 10^{-3}$ | 0,271 |
| τ | $1,988 \times 10^6$ | 0,555 | $17,75 \times 10^6$ | 0,446 |

Tabuľka 2: Porovnanie priemerných hodnôt priemernej štvorcovej odchýlky a koeficientu determinácie regresného odhadu mocninové zákona pre hodnoty konštant exponenciálneho poklesu respektíve priemerných životností harmonických frekvencií a pre rôzne horné frekvenčné ohraničenia ku nim prislúchajúcich harmonických frekvencií.

Rádový rozdiel v hodnotách \overline{MSE} medzi λ a τ je spôsobený obrátenými hodnotami týchto veličín a navyše umocnených na kvadrát, keďže ide o priemernú štvorcovú

¹Nakoľko pri tomto ohraničení by sme pre tón E5 = 660 Hz pozorovali iba štyri harmonické frekvencie, rozhodli sme sa ho z merania vylúčiť aby sme predišli nepresnostiam funkcií z dôvodu malého počtu vstupných dát.

odchýlku. Nemá teda zmysel tie hodnoty medzi riadkami porovnávať. Každopádne vidíme, že odchýlka je väčšia pri vyššom hornom ohraničení, čo je v súlade s tým čo sme očakávali. Naopak hodnoty $\overline{R^2}$ sú vyjadrené v percentách, teda môžeme ich ľubovoľne medzi sebou zrovnávať. V tomto prípade platí, že čím je hodnota väčšia, tým lepšie odhadnutý model popisuje dáta. Najväčšia hodnota je pre τ ako vstupný vektor a ohraničenie 3000 Hz. Ako sme už spomínali, zaujímavý je relatívne významný rozdiel medzi týmito hodnotami pre λ a pre τ . Spôsobené to môže byť buď tým, že funkcia akoby lepšie odhadovala krivku pre vyššie vstupné hodnoty alebo lepšie odhaduje hodnoty pre klesajúci trend. To by sme sa ale museli detailnejšie pozrieť na to ako presne funguje, čo ale nie je naším cieľom. Na základe tejto analýzy budeme ďalej pracovať s vektorom τ a frekvenčným ohraničením 3000 Hz.



(a) Odhad mocninového zákona pre priemerné životnosti τ príslušných harmonických frekvencií tónu E2 stredne silno zahraného na nylonovej gitare.

(b) Odhad mocninového zákona pre priemerné životnosti τ príslušných harmonických frekvencií tónu E2 slabo zahraného na elektroakustickej gitare. Príklad vychýlenia regresného odhadu outliermi.

Obr. 10: Príklad rôznych regresných odhadov mocninového zákona.

Príklad grafického výstupu funkcie `logfit` v rámci vyššie špecifikovaných dát uvádzame na obrázku 10a. Ide o tón E2 na folkovej gitare a skutočne na hodnotách jeho priemerných životností τ na zlogaritmovanej y-ovej osi prislúchajúcich k harmonickým frekvenciám na zlogaritmovanej x-ovej osi vieme pozorovať znak mocninového zákona. Odhady sa líšili pri rôznych meraniach, pre niektoré boli presnejšie, pre iné zase celkom nepresné. Často bolo vychýlenie zapríčinené nejakými outliermi. V niektorých prípadoch z dôvodu malého počtu dát pri vyšších tónoch boli dokonca odhadnuté kladné

exponenty mocninového zákona. Rozhodne ale pri väčšine prípadoch bol tento vzťah do nejakej miery prítomný, dokonca v niektorých až nadmieru zrejmy.

4.1.3 Rozdelenie rýchlostí poklesov

Na celú problematiku sa môžeme pozrieť aj z opačného, čisto experimentálneho pohľadu. Konkrétne pre namerané hodnoty exponenciálnych poklesov sa pokúsiť odhadnúť rozdelenie mocninového zákona. Treba si ale uvedomiť, že tu už riešime úplne inú úlohu ako doteraz. Teraz bude vektor exponenciálnych poklesov $\vec{\lambda}$ respektíve priemerných životností $\vec{\tau}$ figurovať ako vstup do funkcie mocninového zákona $f(\lambda) = \lambda^\alpha$ respektíve $f(\tau) = \tau^{-\alpha}$. Funkcia $f(x)$ teda predstavuje hustotu rozdelenia pre $x \geq x_{min}$ rôznych poklesov amplitúd respektíve priemerných životností harmonických frekvencií daného tónu. V kapitole 3 sme opísali ako sa dá korektne odhaliť správanie rozdelenia mocninového zákona v empirických dátach. Uvedené postupy sa teraz pokúsime aplikovať na vektory $\vec{\lambda}$ aj $\vec{\tau}$ pri rôznych frekvenčných ohraničeniach a výsledky opäť porovnáme.

Na výpočet odhadov parametrov x_{min} a α modelu mocninového zákona ako aj štatistické ukazovatele vhodnosti modelu—log-likelihood odhadu L pre dáta väčšie ako x_{min} , p -hodnota odhadu modelu a správnosť odhadu modelu, využijeme naprogramované funkcie pre Matlab dostupné na [2], kde sa nachádzajú aj bližšie informácie o ich fungovaní a použití. Tieto funkcie sú v súlade so správnym použitím modelu pre hľadanie rozdelenia mocninového zákona popísaným v kapitole 3. Vyvíjali ich autori publikácie [1], z ktorej sme čerpali informácie uvedené v kapitole 3.

Prvá funkcia, ktorú z balíka využijeme má názov `plfit` a slúži na odhadnutie parametrov x_{min} a α . Do tejto funkcie vstupuje vektor dát x , pre ktoré sa snažíme odhadnúť rozdelenie mocninového zákona $P(x) = x^{-\alpha}$ pre $x \geq x_{min}$. Výstupom je $\hat{\alpha}$, ktorý je odhadom najväčšej vierohodnosti škálového parametra modelu, odhad dolného ohraničenia správania mocninového zákona $\widehat{x_{min}}$ a log-likelihood odhadnutého modelu pre dáta $x \geq \widehat{x_{min}}$.

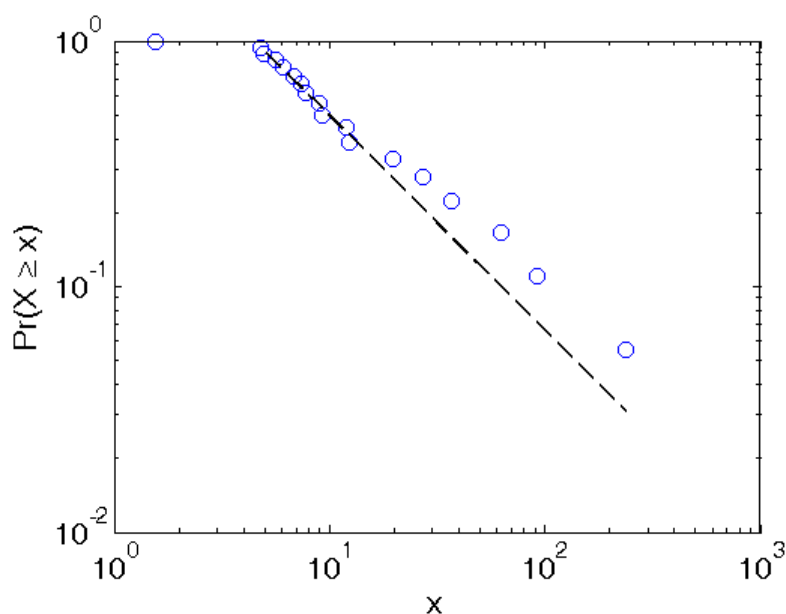
Ďalšia funkcia sa volá `plpva` a vypočíta p -hodnotu daného odhadu mocninového zákona pre nejaké dáta. Funkcia zoberie dáta x a dané dolné ohraničenie správania mocninového zákona x_{min} vypočíta príslušnú p -hodnotu pre Kolmogorov-Smirnov test,

podľa metód popísaných v kapitole 3.5. Jej výstupom okrem p -hodnoty je aj hodnota goodness-of-fit, čiže správnosti odhadu.

Ako smerodajný údaj pre lepšiu úspešnosť odhadu z pomedzi rôznych volieb frekvenčného ohraničenia a vektora rýchlosti poklesu sme si zvolili p -hodnotu. Aby sme mohli porovnať, pre ktorú kombináciu vektora dát a frekvenčného ohraničenia vyšli odhady rozdelenia lepšie, vypočítame si priemernú hodnotu p -hodnôt zo všetkých meraní v príslušnej kombinácii. Výsledky uvádzame v tabuľke 3.

| Priemerné p -hodnoty | 3000 Hz | 5000 Hz |
|------------------------|---------|---------|
| λ | 0,488 | 0,414 |
| τ | 0,613 | 0,584 |

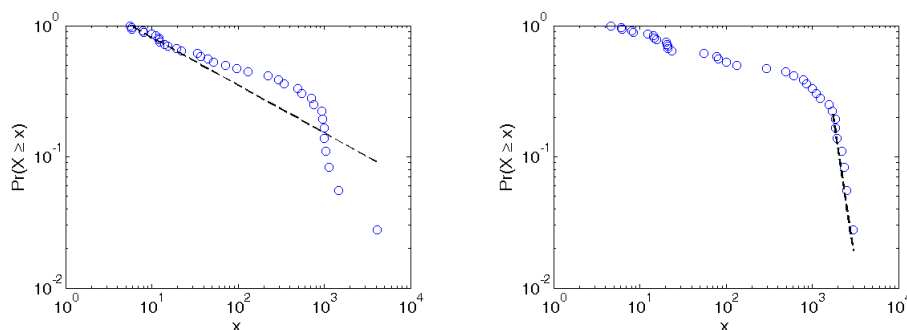
Tabuľka 3: Porovnanie priemerov p -hodnôt odhadov rozdelenia mocninového zákona pre hodnoty konštant exponenciálneho poklesu respektíve priemerných životností harmonických frekvencií a pre rôzne horné frekvenčné ohraničenia ku nim prislúchajúcich harmonických frekvencií.



Obr. 11: Odhad rozdelenia mocninového zákona pre priemerné životnosti τ harmonických frekvencií tónu E3 silno zahraného na nylonovej gitare. Hodnoty τ sú na x-ovej osi a sú odhadnuté parametre rozdelenia, ktorého hustota je znázornená na y-ovej osi. Čierna prerušovaná čiara znázorňuje pre, ktoré hodnoty platí odhadnutá hustota pravdepodobnosti.

Podobne ako pri odhadovaní mocninového zákona medzi harmonickými frekvenciami a k nim prislúchajúcim rýchlostiam poklesu, aj pri odhadovaní rozdelenia mocninového zákona pre rýchlosti poklesu, vyšli najlepšie odhady modelu pre vektor priemerných životností τ pri hornom frekvenčnom ohraničení 3000 Hz.

Uvedieme teraz niektoré vybrané grafické výstupy funkcie `p1plot`, ktorá slúži na vykreslenie znaku mocninového zákona pre odhadnuté parametre rozdelenia mocninového zákona získané vyššie popísanými funkciami. Na obrázku 11 je príklad veľmi presného odhadu pre dané dáta, na obrázkoch 12a a 12b sú už menej presné odhady dát.



(a) Odhad rozdelenia mocninového zákona pre priemerné životnosti τ harmonických frekvencií tónu E2 stredne silno zahraného na elektrickej gitare. Príklad dát s nízkou p -hodnotou odhadu.

(b) Odhad rozdelenia mocninového zákona pre priemerné životnosti τ harmonických frekvencií tónu E2 slabozahraného na elektrickej gitare. Príklad dát s vysokým dolným ohraničením x_{min} .

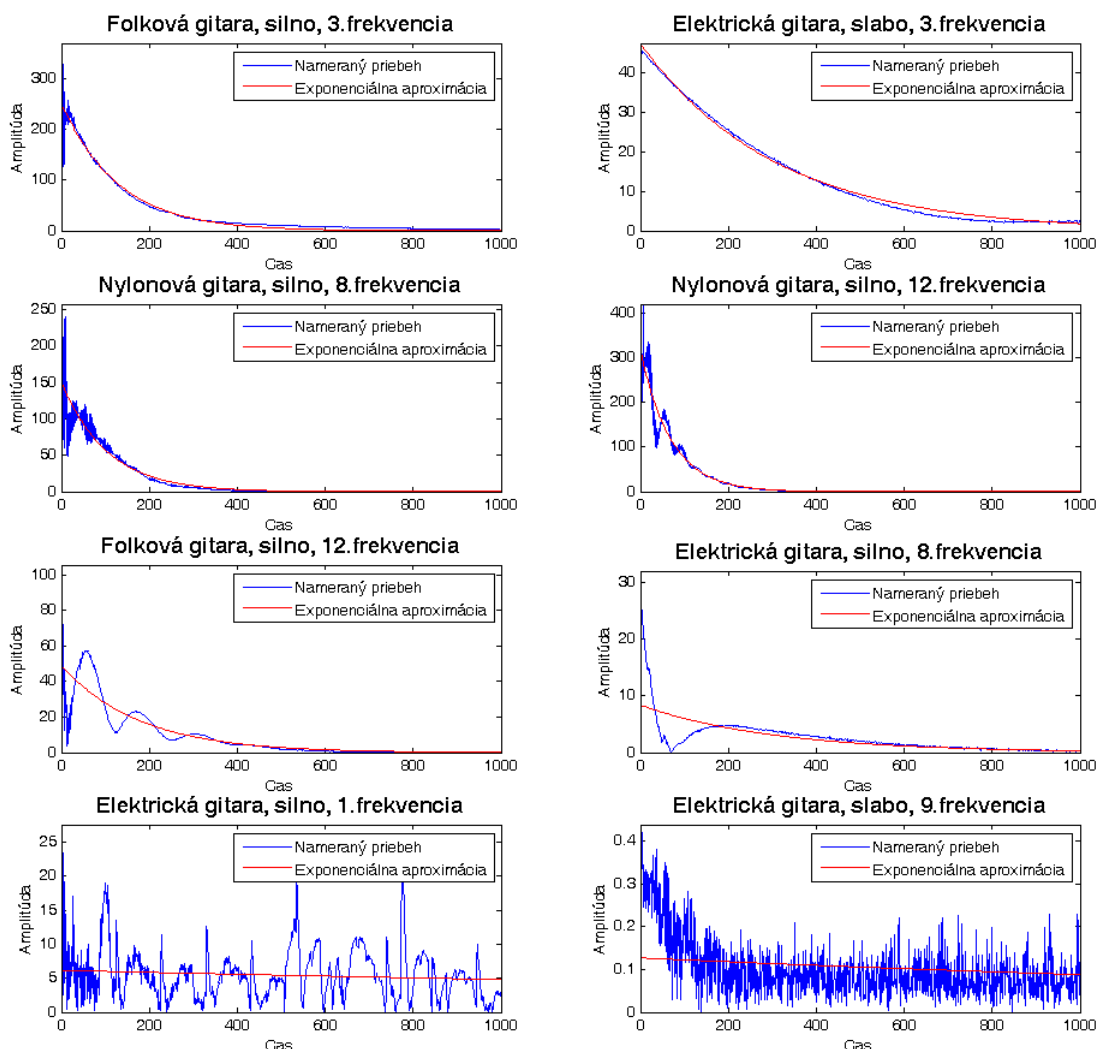
Obr. 12: Príklady zlých odhadov rozdelenia mocninového zákona.

Ťažko by sa dalo povedať či priemerné životnosti pochádzajú z rozdelenia mocninového zákona alebo nie, nakoľko v niektorých prípadoch vyšli odhady celkom pekne a iných zasa nie. Navyše by to vyžadovalo hlbšie testovanie, ktoré bolo popísané v kapitole 3. Každopádne nám to poskytlo nejaký pohľad na základe, ktorého by možno malo zmysel takýto vzťah bližšie preskúmať, keďže pri veľa dátach sa toto správanie nejakým spôsobom prejavilo.

4.1.4 Oscilácia poklesu harmonických frekvencií

Pozrime sa teda bližšie na niektoré konkrétne priebehy poklesov harmonických frekvencií. Na obrázku 13 sú z pomedzi všetkých meraní tónu E4 vybrané niektoré zaujímavé

priebehy poklesov harmonických frekvencií. Zobrazené sú namerané priebehy harmonickej frekvencie a aj jej aproximácia exponenciálneho poklesu.



Obr. 13: Prehľad priebehu poklesu spolu s príslušnou exponenciálnou aproximáciou vybraných harmonických frekvencií tónu E4 zahraného na rôznych druhoch gitár.

V prvom riadku obrázku 13 sú zobrazené očakávané priebehy poklesu harmonickej frekvencie. V ľavom podobrázku ide o tretiu harmonickej frekvencie tónu E4 na folkovej gitare, ktorá bola zahraná silno. To sa odzrkadlilo na začiatku jemným zakolísaním kedy pri silnom brnknutí na strunu mohlo dôjsť ku zarezonovaniu s okolitými materiálmi. V pravom bola naopak struna zahraná veľmi slabo a teda môžeme pozorovať pekný exponenciálny pokles jej tretej harmonickej frekvencie. Takto sme sledovali priebeh vývoja harmonických frekvencií, ďalej sme vybrali práve tie zaujímavejšie, ktoré nám

priniesli do práce nové otázky.

Na druhom a treťom riadku vidíme okrem exponenciálneho poklesu aj súčasne prebiehajúcu harmonickú osciláciu, teda ich funkcia poklesu je zložená funkcia exponenciálnej a harmonickej funkcie. Tento jav môže byť zapríčinený rezonančnými frekvenciami nástroja. Napriek tomu, že v tomto prípade ide o tóny zahrané silno, jav sa ukazuje aj pri iných intenzitách brnknutia a vyskytuje sa pomerne často. Možno by bolo zaujímavé pozorovať frekvenciu harmonickej oscilácie počas exponenciálneho poklesu a pokúsiť sa nájsť nejaký vzťah s ostatnými vplyvmi.

V poslednom riadku môžeme pozorovať taktiež osciláciu ale tá už nie je harmonická a pripomína šum. Na ľavom podobrázku pozorujeme priebeh hlavnej frekvencie, ktorá je celkom bez poklesu. Je to pravdepodobne nejakou chybou zaznamenania merania, nevieme si inak vysvetliť takéto správanie. Takýto priebeh sa vyskytuje výlučne len pri hlavných frekvenciách. Na pravom podobrázku ide o veľmi silno zašumený exponenciálny pokles. Dokonca ani aproximácia kvôli šumu neodhalila pokles. Takýto priebeh sa v danom meraní vyskytuje už od približne piatej harmonickej frekvencie pre všetky vyššie. Môže to byť zapríčinené slabým brnknutím tónu a tým pádom nepresným zaznamenaním amplitúdy z dôvodu slabého elektrického prúdu.

Načrtli sme niektoré zaujímavé fenomény pri pozorovaní priebehu tíchnutia harmonických frekvencií. V nasledujúcich riadkoch sa ich pokúsime bližšie preskúmať a pochopiť.

Pre jednoduchšiu predstavu oscilácie počas exponenciálneho poklesu, skúsme sa pozrieť na jej samotný priebeh. Budeme vychádzať z odhadu v tvare rovnice (35) získaného v kapitole 4.1.1. Ako prvé sa pozrieme na chybu odhadu jednoduchým odčítaním odhadu od skutočných hodnôt. Túto chybu si označíme ako ε_1 . Matematicky vyjadrené ako

$$\varepsilon_1 = f(t) - \hat{f}_0 e^{-\hat{\lambda}t}, \quad (39)$$

kde \hat{f}_0 a $\hat{\lambda}$ sú odhady parametrov modelu. Ďalší spôsob ako sa dá pozrieť na chybu odhadu je pomocou lineárnej transformácie nelineárneho regresného problému tvaru

$$f(t) = \hat{f}_0 e^{-\hat{\lambda}t} E_2, \quad (40)$$

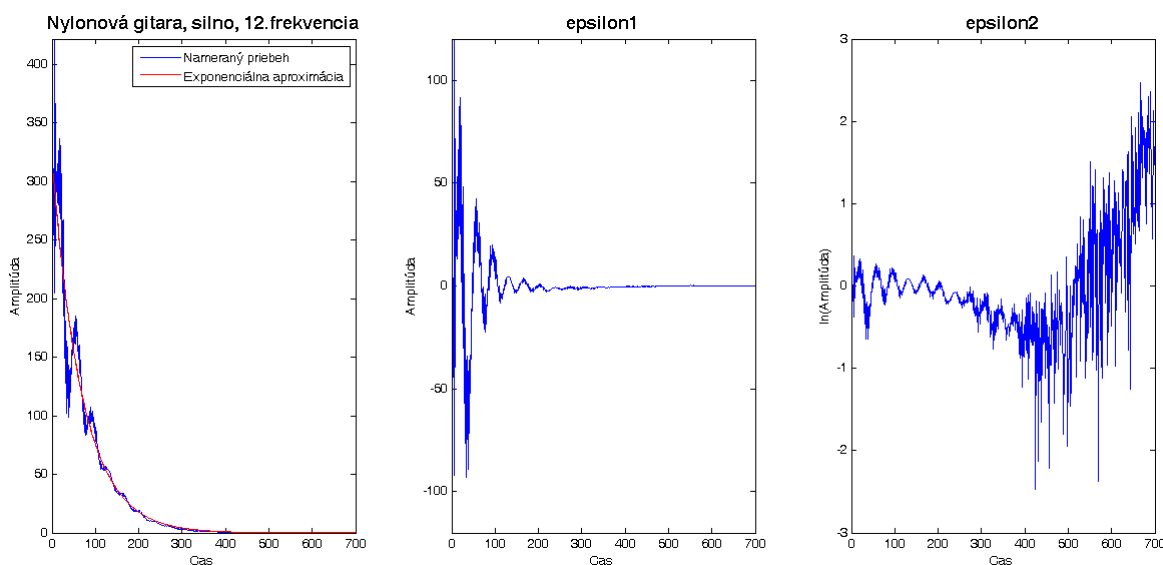
kde E_2 je multiplikatívna chyba. Ak by sme zlogaritmovali obe strany rovnice (41),

dostávame

$$\ln(f(t)) = \ln(\hat{f}_0) - \hat{\lambda}t + \varepsilon_2, \quad (41)$$

kde $\varepsilon_2 = \ln(E_2)$. Pri interpretácii tejto chyby ale treba byť opatrný nakoľko jej vývoj je veľmi ovplyvnený hodnotami vstupných dát.

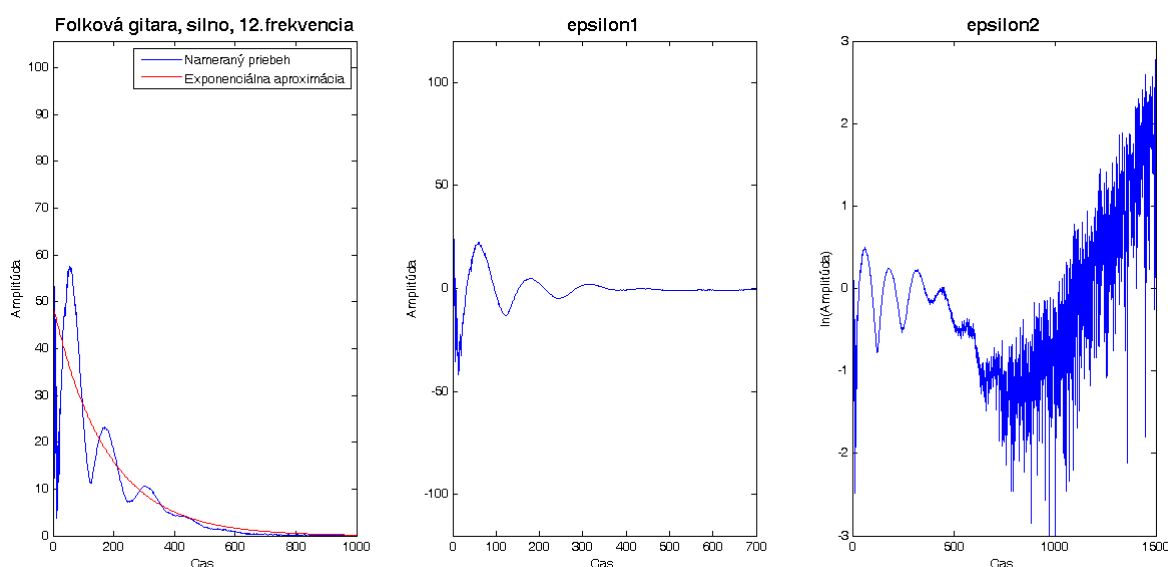
Pozrime sa, ako vývoj týchto chýb vyzerá na konkrétnej harmonickej frekvencii z predchádzajúceho obrázku 13. Zoberme si napríklad dvanástu frekvenciu silno zahraného tónu E4 na klasickej nylonovej gitare. Na obrázku 14 je najprv zobrazený priebeh harmonickej frekvencie v čase spolu s odhadom exponenciálneho poklesu a potom grafická interpretácia chyby ε_1 a ε_2 .



Obr. 14: Grafické porovnanie chýb ε_1 a ε_2 aproximácie poklesu dvanástej harmonickej frekvencie funkciou exponenciálneho poklesu. Tón E4 bol zahraný na nylonovej gitare.

Ako vidíme na obrázku 14 chyba ε_1 je tlmenou osciláciou konvergujúcou do nuly. V princípe sme akoby “narovnali” priebeh funkcie exponenciálneho poklesu a získali priebeh funkcie chyby, ktorá bola pripočítaná ku hodnotám exponenciálneho poklesu. Skutočne aj v pôvodnej funkcii je táto oscilácia pomaly tlmená. Vývoj chyby ε_2 sa značne odlišuje od prechádzajúceho vývoja. Je to spôsobené odlišným pohľadom na chybu. V tomto prípade predpokladáme, že funkcia chyby násobí funkciu exponenciálneho poklesu. Zároveň sme celý model linearizovali pomocou prirodzeného logaritmu. To malo okrem iného za následok aj zmenu ypsilonovej osi grafu. Hodnoty na nej sú

teraz prirodzeným logaritmom hodnôt amplitúdy. Ide teda o semi-logaritmický graf. Týmto sme z časti odstránili tlmený efekt oscilácie. Na druhej strane tu teraz pozorujeme najprv osciláciu okolo nuly, potom mierny pokles trendu, ktorý vystrieda prudký nárast trendu spojený s intenzívnym šumom. Tomuto správaniu nemá zmysel venovať takú pozornosť, keďže sa vyskytuje pri tom, ako sa exponenciálna funkcia asymptoticky blíži k nule, čo teoreticky mohlo spôsobiť aj vývoj chyby. Každopádne tento úsek tíchnutia už pre nás nie je zaujímavý.



Obr. 15: Grafické porovnanie chýb ε_1 a ε_2 pre dvanástu harmonickú frekvenciu tónu E4 zahraného folkovou gitarou.

Obrázky 14 a 15 sú zaujímavé aj tým, že chyba modelu exponenciálneho poklesu je do určitého času harmonickou osciláciou. To znamená, že vieme zistiť jej frekvenciu. Túto frekvenciu môžeme potom dať do pomeru s frekvenciou tónu a zistiť, či spolu nejako súvisia. Frekvencia oscilácie chyby na obrázku 14 nám vyšla približne 2406 Hz, pričom samotná harmonická frekvencia má asi 3954 Hz. Podiel týchto frekvencií je približne 1,64. Nejde o celočíselný pomer a teda pravdepodobne nemá súvis s frekvenciou hraného tónu. Mohlo by ešte teoreticky ísť o nejakú interferenciu s inou strunou, ale keď porovnáme frekvenciu 2406 Hz s frekvenciami tónov, nachádza sa niekde medzi D7 a Dis7. Tým pádom to najskôr nie je ani frekvencia iného hudobného tónu. Navyše pri meraní sme dbali na to, aby všetky ostatné struny boli dostatočne tlmené kusom látky, aby sme tak zamedzili práve takýmto neželaným interferenciám. Pre chybu

exponenciálneho poklesu harmonickej frekvencie na obrázku 15 nám vyšla frekvencia oscilácie približne 770 Hz, pričom harmonická frekvencia opäť asi 3958 Hz, keďže ide o ten istý tón iba iné meranie na inej gitare. Ich pomer je opäť neceločíselný (5,14) a samotná frekvencia oscilácie sa nachádza znovu medzi dvoma hudobnými tónmi. Môže teda skutočne ísť o nejakú rezonančnú frekvenciu nástroja, čo podporuje aj fakt, že tieto frekvencie sú rôzne pre rôzne druhy gitár. Tieto úvahy sú nedostatočne podložené faktami a vyžadovali by hlbší výskum.

4.2 Vplyv sily a výšky tónu na tichnutie

Zo záverov práce [9] jednoznačne vyplýva vplyv sily tónu na jeho farbu, teda zastúpenie harmonických frekvencií. Hoci v spomínanej práci autor pozoroval tóny hrané na klavíri, my predpokladáme, že rovnaké správanie platí pre ľubovoľný iný nástroj a teda aj pre gitaru. Autor v práci odhalil koreláciu jednotlivých harmonických frekvencií so silou úderu na kláves. To nás motivovalo pozrieť sa bližšie na to, aké ďalšie charakteristiky, vplyvy, prípadne iné pozorované veličiny ešte spolu súvisia. A takisto sa pokúsil vysvetliť tieto súvislosti.

V našej práci zvolíme trochu iný prístup, aby sme sa pozreli na problém z iného uhla pohľadu. Namiesto pozorovania zastúpenia harmonických frekvencií, budeme pozorovať ich priemerné životnosti, teda obrátené hodnoty konštánt exponenciálneho poklesu, pretože analýzy z predošlých podkapitol pre ne naznačili lepšie výsledky. Ako sme už ukázali, zastúpenie harmonických frekvencií sa v čase veľmi mení a bolo by zložité generalizovať čas, v ktorom by sme zastúpenie pozorovali. Ak by sme zobrali jedno frekvenčné spektrum pre celé znenie tónu, stratili by sme informáciu o vývoji tónu v čase jeho tichnutia. Navyše, my sa v tejto práci zameriavame práve na rýchlosť tichnutí harmonických frekvencií, ani nie tak na ich zastúpenie.

Celé meranie sme sa snažili zostaviť tak, aby sme vedeli odhaliť prípadné vplyvy sily a výšky tónu na vývoj farby tónu v čase tichnutia. Opäť budeme pracovať s hodnotami τ a horným frekvenčným ohraničením 3000 Hz. Skúsme sa najprv pozrieť na korelácie sily a frekvencie pre priemerné životnosti prvých sedem harmonických frekvencií, pre každý druh gitary zvlášť. Hodnoty korelácií sú v tabuľke 4.

Z hodnôt sa síce nedá jednoznačne povedať, či existuje súvis medzi tichnutím har-

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------|-------|--------------|--------------|-------------|-------------|-------|-------------|
| S | -0,19 | -0,50 | -0,58 | -0,02 | -0,03 | -0,33 | -0,37 |
| <i>f</i> | -0,11 | 0,37 | 0,60 | 0,67 | 0,56 | -0,33 | 0,56 |

(a) Korelácia harmonických frekvencií folkovej gitary.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------|--------------|-------------|-------------|-------------|-------|-------|-------------|
| S | -0,57 | 0,06 | -0,10 | -0,23 | -0,02 | -0,15 | -0,03 |
| <i>f</i> | 0,15 | 0,56 | 0,72 | 0,81 | 0,28 | 0,28 | 0,50 |

(b) Korelácia harmonických frekvencií elektroakustickej gitary.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------|-------|--------------|--------------|-------|--------------|--------------|--------------|
| S | -0,34 | -0,54 | -0,04 | -0,07 | 0,05 | -0,51 | -0,45 |
| <i>f</i> | -0,41 | -0,68 | -0,45 | 0,33 | -0,48 | -0,03 | -0,09 |

(c) Korelácia harmonických frekvencií nylonovej gitary.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------|-------|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------|
| S | 0,20 | -0,07 | 0,02 | -0,08 | -0,18 | -0,22 | -0,24 |
| <i>f</i> | -0,13 | -0,48 | 0,92 | 0,78 | 0,81 | 0,80 | 0,30 |

(d) Korelácia harmonických frekvencií elektrickej gitary.

Tabuľka 4: Korelácie sily a výšky s priemernými životnosťami prvých siedmich harmonických frekvencií rozdelené podľa meraní jednotlivých druhov gitár.

monických frekvencií a silou, respektíve výškou tónu, ale vyznačené vyššie hodnoty korelácií naznačujú, že nejaký súvis by tam predsa mohol byť. Väčšie korelácie priemernej životnosti harmonických frekvencií vyšli s frekvenciou. Pri všetkých gitarách si môžeme všimnúť veľmi nízku koreláciu frekvencie so životnosťou základnej frekvencie. Toto je pravdepodobne spôsobené našou chybou merania alebo výpočtu, ktorú sme už spozorovali na obrázku 9 v kapitole 4.1.1 a obrázku 13 v kapitole 4.1.4. Najvyššie korelácie s frekvenciou tónu vyšli pre elektrickú gitaru. Najnižšie, dokonca na rozdiel od ostatných, záporné korelácie vyšli pre nylonovú gitaru. Záporná korelácia značí nepriamu úmeru, teda pre nylonovú vyšlo, že s vyšším tónom tichne rýchlejšie, kdežto pri ostatných gitarách je to naopak, čiže s vyšším tónom sa predlžuje znenie. Treba zdôraz-

niť, že pozorované tóny pri hornom frekvenčnom ohraničení boli iba tri—E2 na prázdnej strune, E3 na dvanástom pražci a E4 na prázdnej strune. Pričom, struny zahrané na prázdno, teda bez prichyteného pražca, znejú vo všeobecnosti dlhšie ako s prichyteným pražcom. Tieto výsledky sú teda značne ovplyvnené nedostatočným počtom meraných výšok tónu, rozhodne ale niečo naznačujú.

Korelácie so silou tónu sú v porovnaní s koreláciami s frekvenciou nižšie a takmer vždy záporné. Znamená to teda, že ak sila tónu nejakou ovplyvňuje rýchlosť poklesu jeho harmonických frekvencií, tak je to nepriamoúmerné. Čiže čím je tón zahraný silnejšie, tým kratšie znejú niektoré jeho harmonické frekvencie. Toto je možno trochu paradoxný výsledok a nakoľko korelácie sú skutočne pri väčšine harmonických frekvencií nízke, nebudeme na základe tohto robiť konkrétne závery. Taktiež treba zdôrazniť, že pozorované sily úderu boli len tri a úlohu zohrával aj ľudský faktor pri hraní rôznou silou, teda bola tam istá variabilita sily počas celého merania. To mohlo tiež zapríčiniť nižšie korelácie.

| Veličina | Stručný popis a dátové vyjadrenie |
|--------------|---|
| α_1 | regresný odhad parametra mocninového zákona medzi priemernými životnosťami τ a harmonickými frekvenciami |
| R^2 | koefficient determinácie regresného odhadu mocninového zákona |
| α_2 | odhad škálového parametra hustoty mocninového rozdelenia pre priemerné životnosti $\tau \geq \tau_{min}$ |
| L | log-likelihood odhadu mocninového rozdelenia dát väčších ako x_{min} |
| p -hodnota | príslušného odhadu mocninového zákona |

Tabuľka 5: Prehľad a stručný popis dát z ktorých vypočítame korelačnú maticu na nájdenie závislostí charakteristík tichnutia tónu.

Ďalej na odhalenie závislostí medzi jednotlivými charakteristikami, ako aj rôznymi pozorovanými veličinami v predchádzajúcich kapitolách, si vypočítame korelácie sily a frekvencie s odhadnutými parametrami a štatistickými veličinami odhadov z predošlých analýz—regresný odhad mocnivého zákona medzi priemernými životnosťami a harmonickými frekvenciami a odhad rozdelenia mocninového zákona pre priemerné životnosti

harmonických frekvencií. Ak by sme nejakú významnejšiu koreláciu medzi nejakými veličinami zaznamenali, pokúsime sa ju bližšie analyzovať. Vstupné dáta pozostávajú z nášho merania popísaného na začiatku tejto kapitoly. V tabuľke 5 je prehľad veličín, ktorých korelácia so silou a výškou tónu nás zaujíma a príslušné hodnoty korelácií sú vyčíslené v tabuľke 6 pre každú gitaru zvlášť.

| | α_1 | R^2 | α_2 | L | p |
|-----|--------------|--------------|------------|-------------|--------------|
| S | -0,36 | -0,44 | -0,02 | 0,08 | -0,44 |
| f | -0,59 | -0,39 | 0,27 | 0,70 | -0,11 |

(a) Korelácia folkovej gitary.

| | α_1 | R^2 | α_2 | L | p |
|-----|------------|-------|-------------|-------------|-------|
| S | -0,17 | -0,08 | 0,29 | 0,16 | -0,02 |
| f | -0,10 | 0,08 | 0,43 | 0,73 | -0,08 |

(b) Korelácia elektroakustickej gitary.

| | α_1 | R^2 | α_2 | L | p |
|-----|--------------|--------------|-------------|-------------|-------|
| S | 0,01 | -0,03 | 0,23 | 0,06 | -0,10 |
| f | -0,78 | -0,66 | 0,89 | 0,83 | 0,06 |

(c) Korelácia klasickej nylonovej gitary.

| | α_1 | R^2 | α_2 | L | p |
|-----|-------------|-------------|------------|-------------|------|
| S | 0,74 | 0,75 | -0,35 | 0 | 0,30 |
| f | 0,44 | 0,12 | 0,26 | 0,47 | 0,31 |

(d) Korelácia elektrickej gitary.

Tabuľka 6: Korelácie sily a výšky tónu s vybranými pozorovanými veličinami z analýz rozdelené podľa meraní jednotlivých druhov gitár.

Korelácie pre jednotlivé gitary sa dosť rôznia. Môže to okrem iného znamenať, že druh gitary podstatne ovplyvňuje charakter tíchnutia harmonických frekvencií. Jediná korelačná zhoda medzi gitarami je korelácia frekvencie a log-likelihood odhadu rozdelenia hustoty pravdepodobnosti podľa mocninového zákona pre priemerné životnosti. Teda pre vyššie tóny je odhad pravdepodobnejší ako pre nižšie. Pre akustické gitary—

folkovú a nylonovú—vyšli záporné korelácie frekvencie tónu a regresného odhadu parametra mocninového zákona harmonických frekvencií s ich priemernými životnosťami. Čo značí, že čím je tón vyšší, tým je sklon znaku mocninového zákona plytší, čiže menej strmí. Vyššie harmonické frekvencie vtedy tichnu pomalšie na úkor nižších, ktoré stichnu skôr. Pre elektrickú gitaru vyšli vysoké korelácie regresného odhadu a koeficientom determinácie so silou. Silnejšie zahrané tóny majú strmší znak mocninového zákona harmonických frekvencií s ich životnosťami a zároveň ich príslušný regresný model lepšie popisuje. Dali by sa interpretovať aj ďalšie uvedené korelácie, napriek tomu treba poznamenať, že ide iba o korelácie, teda nutne nevyjadrujú aj kauzalitu.

Tieto pozorovania nám naznačili súvis druhu gitary, výšky tónu a sily úderu s charakterom tichnutia harmonických frekvencií. Rozhodne by sa z nich ťažko robili konkrétne závery. Uvedené výsledky však naznačujú, že charakter tichnutia harmonických frekvencií v čase znenia tónu skôr súvisí s druhom nástroja a výškou jeho základnej frekvencie ako so silou zahratia. Sila zahratia tónu až tak veľmi neovplyvní charakter tichnutia jednotlivých harmonických frekvencií, napriek tomu to má taktiež vplyv na výslednú farbu v hodnotách ich zastúpení vo frekvenčnom spektre [9].

Záver

V našej práci sme analyzovali rýchlosti tichnutia harmonických frekvencií hudobného tónu. Ako základný matematický aparát sme využili diskretnú Fourierovu transformáciu, aby sme získali kvantifikovateľný pohľad na farbu tónu. Pomocou nej sme získali zastúpenia harmonických frekvencií tónu v čase pre každé opakovanie základnej periódy amplitúdy daného tónu. Následne sme aproximovali pokles jednotlivých harmonických frekvencií exponenciálnou funkciou, ktorej konštanta v exponente nám určila rýchlosť tichnutia príslušnej harmonickej frekvencie. Ďalej sme sledovali správanie týchto konštánt poklesu, respektíve ich obrátených hodnôt—priemerných životností.

V kapitole 4.1.2 sme pozorovali závislosť rýchlostí poklesov od k nim prislúchajúcim harmonických frekvenciám. Na základe pozorovaní sa zdá, že medzi týmito veličinami by mohlo ísť o vzťah mocninového zákona. Pekným príkladom je obrázok 10a, kde na zlogarimovanej x-ovej osi sú harmonické frekvencie a na zlogaritmovanej y-ovej osi sú ich priemerné životnosti. Výsledkom regresie je klesajúca priamka nazývaná znak mocninového zákona. Vec sme preskúmali aj z iného pohľadu a v kapitole 4.1.3 sme sa pre rýchlosti poklesov pokúšali odhadnúť pravdepodobnostné rozdelenie mocninového zákona. V tomto prípade sa rýchlosti nachádzajú na x-ovej osi grafu a hustota rozdelenia na y-ovej. Podobne aj pre takýto vzťah vyšli v niektorých prípadoch zaujímavé výsledky. Pozornosť sme venovali aj rôznym osciláciám harmonických frekvencií počas poklesu v kapitole 4.1.4. Nakoniec sme na základe dát z predchádzajúcich analýz, sledovali v kapitole 4.2 vplyv sily úderu, výšky tónu a druhu gitary na charakter tichnutia harmonických frekvencií. Z výsledkov sa javí, že na tichnutie spektra najviac vplýva výška tónu a druh gitary. Treba ale podotknúť, že pri analyzovaní sme brali do úvahy len frekvencie nižšie ako určené ohraničenie, meranie bolo zostavené iba z niekoľko kombinácií charakteristík tónu a na výsledky mohli vplývať rôzne nežiadúce javy ako šum signálu, skreslenie a podobne. Nakoľko je farba tónu veľmi komplexná vec, ktorú ovplyvňuje veľké množstvo faktorov, nevedeli sme s určitosťou potvrdiť, či spomínané vzťahy skutočne platia alebo neplatia. Každopádne sme získali zaujímavý pohľad na správanie frekvenčného spektra počas tichnutia hudobného tónu, ktorý môže poslúžiť ako motivácia pre ďalší výskum v tejto oblasti. Jeho výsledky by sa neskôr mohli aplikovať napríklad pri syntéze tónov alebo spracovaní zvuku.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Clauset, A., Shalizi, C. R., Newman, M. E. J.: *Power-law distributions in empirical data*, SIAM review 51.4 (2009): 661-703, Dostupné na internete: <http://arxiv.org/pdf/0706.1062.pdf>
- [2] Clauset, A., Shalizi, C. R., Newman, M. E. J.: *Stránka s dostupnými funkciami na výpočet odhadu rozdelenia mocninového zákona* [online], Dostupné na internete: <http://www.santafe.edu/~aaronc/powerlaws/>
- [3] Cooley, J. W., Lewis, P. A. W., Welch, P. D.: *Application of the Fast Fourier Transform to Computation of Fourier Integrals, Fourier Series, and Convolution Integrals*, Audio and Electroacoustics, IEEE Transactions on 15.2 (1967): 79-84, IEEE, 1967
- [4] Cooley, J. W., Tukey, J. W.: *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*, Mathematics of Computation Vol. 19, No. 90 (Apr., 1965), pp. 297-301, MIT Press, 1965, Dostupné na internete: http://www.math.uci.edu/~brusso/mallat51_4-6.pdf
- [5] Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M.: *The Feynman Lectures on Physics*, Desktop Edition Volume I. Vol. 1., Basic Books, 2013, ISBN 0-201-02010-6-H
- [6] Fletcher, N. H., Rossing, T.: *The Physics of Musical Instruments*, Springer Science & Business Media, 2013, ISBN 03-87-21603-0
- [7] Chen, W., Holm, S., *Modified Szabo's wave equation models for lossy media obeying frequency power law*, J. Acoust. Soc. Am., 114(5), pp. 2570-2574, 2003, Dostupné na internete: http://em.hhu.edu.cn/chenwen/papers/softmatter/JASA_time.pdf
- [8] Lansey, J. C.: *Stránka s dostupnou funkciou na výpočet regresného odhadu mocninového zákona* [online], Dostupné na internete: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/29545-power-law-exponential-and-logarithmic-fit/content/logfit.m>

- [9] Píš, L.: *Matematická interpretácia estetických zákonitostí v hudbe*, Diplomová práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava, 2014
- [10] Szabo, T. L.: *Time domain wave equations for lossy media obeying a frequency power law*, J. Acoust. Soc. Am., 96(1), pp. 491-500, 1994, Dostupné na internete: <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/96/1/10.1121/1.410434>
- [11] *FFTW - Knižnica pre počítanie diskkrétnej Fourierovej transformácie* [online], Dostupné na internete: <http://www.fftw.org/>

Príloha

Skript v jazyku Python na konvertovanie hudobného záznamu do textového súboru s hodnotami funkcie amplitúdy pre každú vzorku merania.

```
import numpy as pn
import sys

if len(sys.argv) != 3:
    print "Syntax: python sf_to_txt.py input.sf output.txt\n"
myfile = open(sys.argv[1], "rb")
output = open(sys.argv[2], "w")
header = myfile.read(1024)

while True:
    word = myfile.read(2)
    if len(word) == 2:
        b0 = ord(word[0])
        b1 = ord(word[1])
        if b1 > 127:
            sign = -1
            b0 = 255 - b0
            b1 = 255 - b1
            plus = 1
        else :
            sign = 1
            plus = 0
        number = sign*(256*b1 + b0 + plus)
        output.write(str(number) + "\n")
    else :
        break

myfile.close()
output.close()
```