

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A
INFORMATIKY



ANALÝZA RIEŠENÍ NELINEÁRNYCH
PARCIÁLNYCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC
FINANČNEJ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2015

Bc. Karol ĎURIŠ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**ANALÝZA RIEŠENÍ NELINEÁRNYCH
PARCIÁLNYCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC
FINANČNEJ MATEMATIKY**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci práce: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2015

Bc. Karol ĎURIŠ



80308353

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Karol Ďuriš

Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)

Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika

Typ záverečnej práce: diplomová

Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Analýza riešení nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc finančnej matematiky / *The analysis of the nonlinear partial differential equation solutions of financial mathematics*

Ciel: Cieľom práce bude analýza riešení parciálnych diferenciálnych rovníc finančnej matematiky so spätnou difúziou, ktoré vznikajú pri modelovaní nelineárnych efektov pri oceňovaní finančných derivátov, akými sú napríklad transakčné náklady, riziko plynúce z nezaisteného portfólia a pod. Súčasťou práce bude aj návrh numerických schém na riešenie parabolických rovníc so spätnou difúziou.

Vedúci: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Katedra: FMFI KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 29.01.2014

Dátum schválenia: 10.02.2014

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie Touto cestou sa chcem pod'akovat svojmu školiteľovi diplomovej práce prof. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc. za trpežlivost', námety a odborné rady pri tvorbe tejto práce. Zároveň by som chcel vyjadriť svoju vdŕačnosť Mgr. Jánovi Ruhalovskému, ktorý mi preukázal veľkú pomoc pri prevzatí údajov. V neposlednom rade však d'akujem aj mojej rodine, milej a priateľom za podporu a posilu.

Abstrakt

ĎURIŠ, Karol: Analýza riešení nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovnic finančnej matematiky [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava, 2015, 82 strán

Táto diplomová práca sa zaoberá nelineárnym zovšeobenéním lineárnej Black-Scholesovej rovnice. Rovnica reprezentuje hodnotu opcie závislú na rôznych vstupoch. Nelineárne modely zovšeobecňujú zjednodušený rámec tejto parciálnej diferenciálnej rovnice. Uvažujú s viacerými významnými faktormi, ktoré sú prítomné na finančnom trhu - transakčné náklady, vplyv dominantného investora, efekt nelikvidného trhu, či riziko plynúce z nezabezpečeného portfólia, s ktorými Black-Scholesov model nepočíta. Jedným z cieľov práce je vypočítať všeobecné riešenie ceny finančného derivátu pre nelineárne modely pomocou metódy malého parametra. Metóda predpokladá, že riešenie sa dá napísat' v tvare asymptotického rozvoja a d'alším cieľom je odvodiť druhý člen tohto rozvoja, nakoľko prvý je známy. Pre model uvažujúci nelikvidný trh (Frey-Stremmeho model) kalibrujeme v práci na základe odvodeneho vzorca parametre σ a ρ pre reálne trhové dátá.

Kľúčové slová: oceňovanie opcií, kalibrácia, nelineárny Frey-Stremmeho model, metóda malého parametra, asymptotický rozvoj

Abstract

ĎURIŠ, Karol: The Analysis of the Nonlinear Partial Differential Equation Solutions of Financial Mathematics [Master's Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava, 2015, 82 pages

The master thesis deals with the nonlinear generalisation of the linear Black-Scholes formula. This equation represents the option price, which is dependent on various inputs. The models generalize simplified framework of this partial differential formula. These models consider a number of substantial factors present on the financial market - transaction costs, feedback and illiquid market effects due to large investors on the market or risk from unprotected portfolio. The Black-Scholes model does not deal with these problems. Therefore, this master thesis introduces the general solution of the financial derivative price for nonlinear models using small parameter method. This method assumes, that the solution can be written in the form of the asymptotic expansion. Therefore, the goal of this thesis is to derive the second term of the expansion since the first is already known. The thesis also points out on parameter calibration σ and ρ for the real market data purposes on the basis of the derived formula for Frey-Stremme model assuming illiquid market effects.

Keywords: options pricing, calibration, nonlinear Frey-Stremme model, the method of small parameter, asymptotical expansion

Obsah

Zoznam použitých symbolov a termínov	1
Úvod	2
1 Zovšeobecnené nelineárne modely Black-Scholesovho typu s nekonštantnou volatilitou	4
1.1 Motivácia oceňovania opcií	4
1.2 Odvodenie Black-Scholesovho modelu	5
1.3 Typy opcií	6
1.4 Nelineárne modely	7
1.4.1 Prehľad nelineárnych modelov	8
2 Metódy malého parametra	15
2.1 Motivačný príklad	16
2.2 Asymptotické metódy	17
2.2.1 Metóda malého parametra	17
2.2.2 Aplikácia MMP na motivačné príklady	18
3 Odvodenie explicitného nelineárneho vzorca pre cenu opcie	31
3.1 Odvodenie pre nelineárnu funkciu volatility	31
3.2 Výpočet vzorca	32
3.2.1 Výpočet vzorca pre $\delta \neq 1$	37
3.2.2 Výpočet vzorca pre $\delta = 1$	38
3.3 Analýza citlivosti riešenia podľa premenných	39

3.3.1	Model s parametrom $\gamma = 1$	40
3.3.2	Model s parametrom $\gamma = \delta$	41
3.4	Explicitné riešenie pre inú koncovú podmienku	42
4	Frey-Stremmeho model nelikvidného trhu a vplyvu dominantného investora	44
4.1	Popis vytvárania modelu	44
4.2	Postup získavania údajov	46
4.3	Postupná kalibrácia σ_{impl} a ρ_{impl}	47
4.3.1	Implikovaná volatilita a jej existencia	47
4.3.2	Kalibrácia parametra ρ	49
4.4	Kalibrácia modelu pomocou historickej volatility	50
5	Kalibrácia na reálne dátá	51
5.1	Skúmanie vývoja implikovanej volatility σ_{impl}	52
5.1.1	Implikovaná volatilita počítaná s Black-Scholesovými cenami opcíí	52
5.1.2	Volatilita nelineárneho modelu	53
5.2	Skúmanie vývoja parametra ρ	58
5.3	Faktory citlivosti	62
5.3.1	Parameter Vega Υ	62
5.3.2	Vega závisí od Zommy	64
5.3.3	Závislosť ostatných parametrov na "Greeks" vyššieho rádu	66
5.4	Kalibrácia prostredníctvom historickej volatility	66
5.4.1	Parameter σ	66
5.4.2	Parameter ρ	68
Záver		71

Zoznam použitých symbolov a termínov

PDR	parciálna diferenciálna rovnica
$\partial_S^2 V(S, \tau)$	$\frac{\partial^2 V(S, \tau)}{\partial S^2}$
$N(x)$ ($N'(x)$)	distribučná funkcia (hustota) štandardizovaného normálneho rozdelenia
$H = S \partial_S^2 V$	veličina vyjadrená kvôli tomu, že je bezrozumná
S/E	pomer ceny akcie a expiračnej ceny - veličina vyjadrená kvôli tomu, že je bezrozumná
ask cena	ponuková cena
bid cena	dopytová cena
bid-ask stred	stredná hodnota medzi bid a ask cenou
Black-Scholesova cena	cena počítaná Black-Scholesovým modelom, väčšinou stredná cena medzi bid a ask

Úvod

Jedným z najdôležitejších, no nie smerodajných ukazovateľov, sú pre každú akciovú spoločnosť hodnoty jej akcií. Firme zabezpečujú akcie kapitál pre fungovanie a aj budúce investície spoločnosti. Naopak pre akcionárov na burzovom trhu predstavujú tieto aktíva možnosť investície, ktorá môže priniest investorovi zisk z dividend či vzrastu hodnoty akcie, ale aj stratu z jej poklesu. Jedným z príkladov väčšej straty je obrovský prepad akcií na americkej burze NYSE koncom 30. rokov minulého storocia, ktorý spôsobila Veľká hospodárska kríza.

Jednou z možností ako predísť stratám sú opcie. Tieto finančné deriváty poskytujú právo obchodovať v budúcom čase s podkladovou akciou, resp. aktívom, za dohodnutú cenu. Ohodnocovanie opcí sa preto stalo v minulom storocí dôležitou témuou, na ktorú našli v roku 1973 odpoved' na problém oceniaenia týchto derivátov americkí ekonómovia Fisher Black a Myron Scholes značne známej a dôležitej parciálnej diferenciálnej rovnice. Tento lineárny model poskytuje riešenie ceny opcie na základe istých predpokladov, ktoré však nemožno zovšeobecniť v každej situácii. Kvôli tomu boli neskôr odvodené nelineárne Black-Scholesove modely, ktoré brali do úvahy rôzne skutočnosti finančných trhov ako sú transakčné náklady, investorove preferencie, nelikvidita vyskytujúca sa na trhu, či riziko plynúce z nezabezpečenosťi portfólia.

Cieľom tejto práce je odvodiť všeobecný explicitný vzorec pre nelineárne modely, ktorý bude ohodnocovať opciu v prítomnosti niektornej z uvedených možností. Nakol'ko však vzorec nemožno explicitne vyjadriť vo všeobecnosti,

pokúsime sa approximovať hľadané riešenie. Zvolíme prístup metódy malého parametra, ktorý vie approximovať funkciu pomocou asymptotického rozvoja. Vzhľadom na náročnosť výpočtov chceme získať tvar prvých dvoch členov rozvoja. Ďalšou zložkou práce je aj kalibrácia pomocou odvodenej formuly na skutočných trhových cenách.

Súčasťou cieľov práce je návrh numerického algoritmu a jeho porovnanie efektivity a presnosti s odvodeným explicitným vzorcom. Táto časť práce bude uverejnená v článku [9].

Práca je rozdelená do piatich kapitol. Prvá kapitola je venovaná úvodu do problematiky oceňovania opcí. Popíšeme motiváciu odvodenia nelineárnych modelov a uvedieme ich prehľad. V nasledujúcej časti sa upriamime na tému asymptotických metód. Uvedieme základný tvar úlohy, na ktorú bude aplikovaná metóda malého parametra. Túto metódu otestujeme na motivačných príkladoch a výsledky graficky vyhodnotíme. Na záver definujeme základnú úlohu pre kúpnu call opciu, ktorú má práca za cieľ vyriešiť. V štvrtej kapitole odvodíme explicitný vzorec na základe spoločného tvaru funkcie volatility pre nelineárne modely. Vzorec preskúmame na základe citlivosti premenných, ktoré doň vstupujú. Spomenieme aj odvodenie formuly pre iné typy začiatocných podmienok opcí. Štvrtá kapitola je venovaná odvodeniu funkcie volatility a jej parametrov pre Frey-Stremmeho nelineárny model nelikvidného trhu. Uvedená je aj myšlienka a postup kalibrácie modelu pomocou rôznych metód. Obsahom poslednej piatej kapitoly je kalibrácia Frey-Stremmeho modelu na trhových dátach. Uvedené výsledky kalibrácie interpretujeme a zdôvodníme správanie trhových cien. Analyzujeme faktory citlivosti pre model a ukážeme ich závislosť na faktoroch vyšších rádov.

V druhej a piatej kapitole sme výsledky kalibrácie doplnili grafickými ilustráciami. Tieto obrázkové grafy sme počítali a následne vykreslili pomocou programovacieho prostredia **Mathematica**®.

Kapitola 1

Zovšeobecnené nelineárne modely Black-Scholesovho typu s nekonštantnou volatilitou

V úvodnej kapitole sa pozrieme na históriu oceňovania opcí aj na to, aké modely boli vyvinuté kvôli výpočtu hodnoty tohto cenného papiera a uvedieme metódy používané v našej práci.

1.1 Motivácia oceňovania opcií

Príklad kontraktu, ktorý sa vztahuje na budúce obdobie, nájdeme už v jednej z našich najstarších kníh - v biblii *Gn 29,15-25* [18] a [4]. Izákov syn Jakub si hľadá ženu a nájde ju u Labana. Dohodnú sa však na forme obchodu. Jakub bude u Labana pracovať sedem rokov a po uplynutí tohto obdobia dostane Labanovu dcéru Ráchel za svoju manželku. V dnešnej dobe by sme túto dohodu mohli považovať za podobnú forwardu. Za budúce dohodnuté aktívum obchodu, teda Labanovu dcéru Ráchel, musel platiť Jakub vopred stanovených sedem rokov.

Ďalšia motivácia pre štúdium hľadania ceny opcie pochádza zo 17. storočia z [18]. Tulipány v Holansku boli v tomto čase symbolom spoločenského

postavenia a ich popularita sa rozšírila aj do zahraničia. Ceny tulipánov a tulipánových cibuliek prudko vzrástli, pričom trh s tulipánmi sa či už pre pestovateľov, alebo aj pre veľkopredajcov stal ziskovým podnikaním. Kvôli riziku zo zlej úrody si pestovatelia začali kupovať predajné put opcie a obchodníci, naopak, kúpne call opcie.

1.2 Odvodenie Black-Scholesovho modelu

V druhej polovici 20. storočia vznikol súčasný najväčší trh s opciami CBOE. Kvôli tomu vznikla potreba vytvoriť model, ktorý by vedel ohodnotiť jednotlivé opčné kontrakty na podkladové aktíva. Podarilo sa to v roku 1973 dvom americkým ekonómom Fischerovi Blackovi a Myronovi Scholesovi, ktorí vytvorili model nazvaný podľa nich samých - Black-Scholesov model. Tento ako aj iné modely sú odvodené z predpokladu, že cena podkladového aktíva S sleduje vývoj geometrického Brownovho pohybu. Ten sa dá zapísat pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t, \quad (1.2.1)$$

kde μ určuje trend ceny, σ je jeho volatilita, $t \in [0, T]$ je čas a W_t je Wienerov proces. V diferenciálnej rovnici vystupujú zmeny jednotlivých parametrov za časovú zmenu dt a Wienerov proces je charakterizovaný nasledujúcimi podmienkami:

1. $W_0 = 0$
2. trajektórie Wienerovho procesu sú spojité s pravdepodobnosťou 1.
3. Wienerov proces $W_t \sim N(0, t)$ má nezávislé prírastky $W_{t+s} - W_s \sim N(0, t)$.

Myšlienka odvodenia spočíva bud' vo vytvorení samofinancovateľného portfólia V zloženého z jedného dlhopisu V a δ akcií S pri odvodení Blacka a Scholesa [17]:

$$P = V + \delta S, \quad (1.2.2)$$

alebo portfólia s nulovým rastom investícií, kde cena akcie (opcie) je $S(V)$ a jej počet $Q_S(Q_V)$ a peňažný objem bezrizikových dlhopisov B [21]:

$$SQ_S + VQ_V + B = 0. \quad (1.2.3)$$

Tento prístup bol nezávisle od Blacka a Scholesa odvodený Mertonom. Samofinancovateľnosť portfólií značí držanie takého pomeru akcií a opcíí, aby dané portfólio zostało vzhľadom na vývoj cien akcií a opcíí nadálej bezrizikové. Tento proces zmeny pomeru, pri ktorom sa hodnota portfólia nemení, hoci zmena hodnôt jednotlivých položiek mohla nastat', sa nazýva *delta hedžing* prípadne *hedžovanie portfólia*.

Výsledkom práce [5] Blacka a Scholesa je parciálna diferenciálna rovnica, ktorej riešenie popisuje vývoj hodnoty opcie $V(S, t)$ závisiacej od času a hodnoty podkladového aktíva:

$$\partial_t V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_S^2 V + (r - q)S\partial_S V - rV = 0. \quad (1.2.4)$$

Premenná σ je spomínaná volatilita ceny opcie z (1.2.1), r je úroková miera bezrizikového dlhopisu a q úroková miera z ročne vyplácaných dividend podkladového aktíva.

1.3 Typy opcíí

Na výpočet hodnoty opcie je potrebné mať rovnicu aj s počiatočnou, resp. koncovou podmienkou, keďže pre PDR (1.2.4) existuje nekonečne veľa funkcií, ktoré sú jej riešeniami. Najčastejšími obchodovacími opciami sú call a put opcie. Budeme predpokladat', že sú európskeho charakteru:

- **Európska call opcia** je právo, teda nie povinnosť kúpiť podkladové aktívum, na ktoré sa daná opcia vztahuje, vo vopred dohodnutom tzv. *expiračnom čase* T za vopred dohodnutú *expiračnú cenu* E ,
- **Európska put opcia** je právo, teda nie povinnosť predat' podkladové aktívum, na ktoré sa daná opcia vztahuje, vo vopred dohodnutom tzv. *expiračnom čase* T za vopred dohodnutú *expiračnú cenu* E .

Výplata opcie vlastníkovi v expiračnom čase sa nazýva *payoff*. Opcia bude uplatnená, resp. zrealizovaná, pokiaľ vlastník opcie bude mať z realizácie zisk. Inak sa pre majiteľa call (put) opcie neoplati v čase T uplatniť opciu, keď je expiračná cena E vyššia (nižšia) ako cena podkladového aktíva v tom istom čase. Vtedy hovoríme, že opcia je *out-of-money*, takže vlastník by jej uplatnením mal stratu. Naopak pri zisku z uplatnenia hovoríme, že opcia je *in-the-money*. Ak je cena podkladového aktíva rovná expiračnej cene, vtedy hovoríme, že opcia je *at-the-money*. Matematicky sa dá koncová podmienka pre zisk z uplatnenia, resp. pre neuplatnenie call opcie zapísat nasledovne:

$$V(S, T) = \max(0, S - E), \quad (1.3.1)$$

resp. pre put opciu:

$$V(S, T) = \max(0, E - S). \quad (1.3.2)$$

Z uvedených typov opcií put a call sa dajú pomocou ich zmiešania robiť kombinované stratégie podľa toho, aké má investor očakávania o vývine akcií, ktoré sú popísané napr. časť 2.3.3 [21].

Pre ostatné typy opcií odkazujeme čitateľa na knihy [17], [20] a [21].

1.4 Nelineárne modely

Black-Scholesov model má mnoho predpokladov, ktoré na finančných trhoch nanešťastie neplatia. Obmedzil sa kvôli výpočtom, ktoré by boli veľmi zložité na príklady trhov, ktoré sú úplné, dokonale elastické a likvidné. Trh v tomto modeli obsahuje dostatočný počet schopných a ochotných kupujúcich a predávajúcich. Preto predpokladá podmienku na trhu, aby poskytoval doстатočný počet opcií s rozdielnymi časmi splatnosti a expiračných cien, teda aby bola možnosť vytvoriť samofinancovateľné portfólio.

Takisto na trhu neexistuje žiadny dominantný investor, ktorý by svojím obchodovaním vedel ovplyvniť vývoj ceny akcie. Model predpokladá konštantnú volatilitu a existenciu bezrizikovej úrokovej miery, s ktorou možno ľubovoľne často obchodovať.

Tieto podmienky sa však na trhoch nedajú zaistit'. Už len predpoklad, že ponuková cena, ktorá sa nazýva *ask* a dopytová cena - *bid*, budú rovnaké, nie je reálny predpoklad. Na finančných trhoch sú všetky ask ceny vyššie ako bid ceny, takže v tomto prípade nemôžeme hovoriť o jednotnej cene aktíva, ktorá by sa dala z PDR (1.2.4) vypočítat'. Tieto rozdiely v cene aktív nazývame *transakčné náklady*.

Predpoklad jednotnej ceny aktíva sa v modeli nachádza kvôli hedžovaniu portfólia. Neustála zmena hodnôt zložiek portfólia implikuje neustálu zmenu ich pomeru a teda aj neustály nákup a predaj akcií a opcií. Pri prítomnosti transakčných nákladov sú náklady pri delta hedžingu nekonečné a teda stráca svoj význam. Z tohto dôvodu je možné meniť pomer akcií a opcií iba v postupných diskrétnych časoch. Tu vzniká problém z možnej straty kvôli tomu, že portfólio už nie je úplne bezrizikové. Môže vtedy nastat' strata z nezabezpečenosťi portfólia.

1.4.1 Prehľad nelineárnych modelov

Pri kalibrácií volatility Black-Scholesovho modelu z príkladu reálnych dát môžeme zistit', že implikovaná volatilita nemá konštantnú tendenciu. Veľmi častý je jav nazvaný *volatility smile*. Vtedy implikovaná volatilita v závislosti od ceny podkladového aktíva má tvar úsmevu. V matematickom ponímaní má tvar konvexnej funkcie premennej S a to hlavne v okolí, v ktorom premenná S nadobúda hodnoty blízke expiračnej cene. V tomto okolí zároveň nadobúda implikovaná volatilita nižšie hodnoty.

Môžeme preto usúdiť', že volatilitu nemožno považovať za konštantnú, ale bude závislá od premenných. Preto potrebujeme zovšeobecnenie Black-Scholesovho modelu a teda aj úpravu rovnice (1.2.4). Budeme predpokladat', že bude funkciou:

$$\sigma = \sigma(H, S, T - t), \quad (1.4.1)$$

kde $H = S\partial_S^2V$ súčin ceny S podkladového aktíva s druhou parciálou deriváciou. Dôvod, prečo je vo výraze H aj súčin s hodnotou S je taký, že pri počítaní call opcie, ktorú budeme používať ako príklad pri výpočte PDR

(1.2.4), vzniká v menovateli v druhej parciálnej derivácií takisto cena S a preto sa navzájom vykrátia. Výraz H sa preto stáva bezrozmerným. Tiež predpokladáme, že funkcia závisí od samotnej ceny a od času ostávajúcim do expirácie.

Lineárnu PDR preto upravíme na rovnicu, ktorá však vo všeobecnosti nie je lineárna. V nasledujúcim odstavci si uvedieme prehľad modelov, ktoré zodpovedajú niektorým zovšeobecneniam.

1.4.1.1 Lelandov model

Ako už bolo spomenuté vyššie, transakčné náklady neumožňujú spojité úpravy zložiek v portfóliu. Je to možné iba v diskrétnych časoch kvôli neohraňičeným nákladom za jednotlivé transakcie. Lelandov model, ktorý odvodil Hayne E. Leland [16], zovšeobecňuje Black-Scholesov lineárny model a zahŕňa nenulové transakčné náklady. Tie sú pre každé aktívum charakterizované bezrozmerou konštantou:

$$c = \frac{S_{ask} - S_{bid}}{S}, \quad (1.4.2)$$

kde stredná cena aktíva je počítaná pomocou aritmetického priemeru medzi ask a bid cenou aktíva $S = \frac{S_{ask} + S_{bid}}{2}$. Model, tak ako pri Black-Scholesovom modeli, vychádza zo zostavenia portfólia z akcií a opcíí s takým rozdielom, že zmena hodnoty portfólia zahŕňa stratu vzniknutú prítomnosťou transakčných nákladov. Inými slovami pri obchodovaní s akciami alebo opciami klesá hodnota portfólia.

Lelandov model sa zaoberá takisto otázkou ako často má nastávať aktualizácia portfólia. V príliš krátkom čase by náklady spojené s transakciami boli veľmi veľké. Preto musí byť čas Δt , ktorý označuje čas medzi dvomi zaistovaniami portfólia zdola ohraničený. Pre veľmi veľké hodnoty δt však vzniká riziko z nezabezpečenosťi portfólia, preto tento čas nemôže byť ani príliš vysoký.

V tomto modeli sa funkcia volatility dá napísat' v tomto tvare:

$$\sigma^2(H, S, \tau) = \hat{\sigma}^2 \left(1 + Le \operatorname{sign} \left(\frac{H}{S} \right) \right) = \hat{\sigma}^2 (1 + Le \operatorname{sign}(\partial_S^2 V)), \quad (1.4.3)$$

kde Lelandovo číslo:

$$Le = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{c}{\hat{\sigma} \sqrt{\Delta t}}. \quad (1.4.4)$$

V Lelandovom modeli sa dá odvodiť explicitné riešenie pre call, resp. put opciu, keďže vieme, že obe opcie sú konvexnou funkciou ceny aktíva. Preto majú druhé parciálne derivácie kladné znamienko. Aby sme vypočítali riešenie, zvolíme čas, ktorý určuje našu aktualizáciu portfólia, tak aby:

$$0 \leq Le < 1. \quad (1.4.5)$$

Ked'že všetky premenné sú nezáporné, podmienka sa redukuje na podmienku z [2]:

$$c < \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{\sigma} \sqrt{\Delta t}. \quad (1.4.6)$$

Táto situácia je splnená, ak transakčné náklady c sú dostatočne nízke, alebo interval Δt je dostatočne veľký. Druhá možnosť môže spôsobiť, že funkcia (1.4.3) bude záporná a riešenie vo všeobecnosti neexistuje. Pre investora je to obchodovanie na *krátkej pozícii*. Z odseku II. článku [2] vyplýva, že je v tomto prípade potrebné znova spravit aktualizovanie portfólia.

Po zvolení času Δt vypočítame upravené volatility postupne pre bid a ask ceny opcií:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &\mapsto (1 - Le)\hat{\sigma}^2, \\ \hat{\sigma}^2 &\mapsto (1 + Le)\hat{\sigma}^2. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Riešenie cien opcií je teraz možné výpočítať pomocou upravených volatilit dosadených do PDR (1.2.4).

1.4.1.2 Model s ohraničenou volatilitou

Ďalším príkladom nelineárneho rozšírenia Black-Scholesovho modelu je model s ohraničenou volatilitou. Model je uvedený v článku [1]. Vychádza z predpokladu, že nekonštantná historická volatilita σ_t je ohraničená dvomi extremálnymi hodnotami σ_{min} zdola a σ_{max} zhora:

$$\sigma_{min} \leq \sigma_t \leq \sigma_{max}. \quad (1.4.8)$$

Potom má funkcia volatility tvar:

$$\sigma^2(H, S, T - t) = \begin{cases} \hat{\sigma}_1^2, & \text{ak } \partial_S^2 V < 0, \\ \hat{\sigma}_2^2, & \text{ak } \partial_S^2 V > 0, \end{cases} \quad (1.4.9)$$

kde $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ sú navzájom opačné hranice volatilít $\hat{\sigma}_{min}, \hat{\sigma}_{max}$.

1.4.1.3 Model zohľadňujúci preferencie investorov

Na začiatku tejto časti sme uvádzali príklad, kedy investorove preferencie mohli ovplyvniť trhovú cenu finančných derivátov. Spomínaná prítomnosť transakčných nákladov spôsobuje, že neexistuje portfólio na finančných trhoch, ktoré by bolo dokonale samofinancovateľné. Barles a Soner odvodili model vo svojej práci [3], v ktorom sa snažili zohľadniť preferencie investorov a taktiež ich aj kvantifikovať na príklade európskej call opcie. Na stanovenie preferencií investorov použili exponenciálnu úzitkovú funkciu:

$$U^\varepsilon(x) := 1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}, \quad (1.4.10)$$

s parametrom ε , pričom $\frac{1}{\varepsilon}$ je priamo úmerný faktoru udávajúcemu rizikovú averziu investora. Samotná averziu k riziku je označená parametrom a . Funkcia volatility pre nelineárne zovšeobecnenie Black-Scholesovho modelu (1.2.4) má tvar:

$$\sigma^2(H, S, T - t) = \hat{\sigma}^2(1 + \Psi(a^2 e^{r(T-t)} SH)), \quad (1.4.11)$$

kde funkcia $\Psi(x)$ je riešením obyčajnej diferenciálnej rovnice:

$$\begin{cases} \Psi'(x) = \frac{\Psi(x)+1}{2\sqrt{x\Psi(x)-x}}, \\ \Psi(0) = 0. \end{cases} \quad (1.4.12)$$

Riešenie $\Psi(x)$ má takú vlastnosť, že v okolí hodnôt blízkych nule sa táto funkcia správa približne ako funkcia tretej odmocniny: $\Psi(x) \sim O(x^{\frac{1}{3}})$ pre $x \sim 0$. Táto vlastnosť je potrebná kvôli neskoršej linearizácii resp. aproximácie funkcie volatility do požadovaného tvaru v nasledujúcej kapitole. Aby bola presnosť funkcie zaručená, je potrebné, aby bol parameter a dostatočne nízky, aby aj celý výraz v argumente funkcie sa približoval k nule. Inak aproximácia tretou odmocninou nie je vhodná.

1.4.1.4 Nelikvidita trhu a vplyv dominantného investora v modeli

V modeli (1.2.4) sa predpokladá, že investori sú dostatočne malí na to, aby nemohli svojím zabezpečovaním portfólia ovplyvniť hodnotu podkladového aktíva. Model predpokladá, že trh je likvidný, teda ľubovoľný investor dokáže kúpiť resp. predať ľubovoľné aktívum za veľmi malý čas. V zovšeobecnenom modeli popisovanom v prácach Freya [10] a Freya a Stremmeho [12] sú tieto predpoklady vynechané. V prácach je odvodený model, pre ktorý je jeho nekonštantná volatilita funkciou:

$$\sigma^2(H, S, T - t) = \frac{\hat{\sigma}^2}{(1 - \rho\lambda(S)S\partial_S^2V)^2}, \quad (1.4.13)$$

berie do úvahy vplyv dominantného investora na cenu aktív. Takisto nepredpokladá, že trh je dokonale likvidný. Ako v príkladoch ostatných nelineárnych modelov, tak aj v tomto vystupuje parameter ρ , ktorý určuje mieru nelikvidity trhu. Funkcia $\lambda(S)$ je striktne konvexná podľa [20] a predpokladá sa, že $\lambda(S) = 1$.

V práci Bordagovej a Chmakovej [7] a Bordagovej a Freya [8] je uvedené explicitné riešenie pre úlohu, v ktorej úroková miera a miera dividend $r = 0, q = 0$. Používajú pritom metódy s analýzy Lieových skupín, pričom využívajú symetrické vlastnosti riešení. Model sa takisto nachádza v práci Freya a Patieho [11], kde sú popísané simulačné štúdie k modelu.

1.4.1.5 Model so vzrastajúcou trhovou volatilitou

Ďalší model podobný tomu predchádzajúcemu vzniká so vzrastajúcou volatilitou na trhu. Pridaním spätného efektu dominantného investora do Black-Scholesovho modelu vznikne model reprezentovaný nelineárnom parciálnou diferenciálnou rovnicou. Odvodený je v práci [19]:

$$\sigma^2(H, S, T - t) = \hat{\sigma}^2 \left(\frac{1 - \rho\partial_S V}{1 - \rho\partial_S V - \rho S\partial_S^2 V} \right)^2. \quad (1.4.14)$$

Pre tento model je prvý člen asymptotickej expanzie spomínamej v časti (2.2.2.4) zhodný s prvým členom nelineárneho modelu popisujúceho vplyv dominantného investora.

1.4.1.6 Risk Adjusted Pricing Methodology

Posledný model, ktorý zapadá medzi nelineárne rozšírenia Black-Scholesovho modelu, je Risk Adjusted Pricing Methodology (RAPM). Model zahŕňa transakčné náklady spomínané v Lelandovom modeli a tiež aj riziko vznikajúce pri nezabezpečenom portfóliu. Ako bolo už vyššie spomínané, portfólio nemožno aktualizovať príliš často kvôli vzrastajúcim transakčným nákladom, ale tiež na druhej strane pri aktualizovaní portfólia po príliš dlhom období vzniká riziko, že portfólio ostane nezabezpečené. Kvôli tomu model rieši úlohu, ktorá hľadá taký čas aktualizácie, ktorý bude spĺňať, aby zároveň ani jedno z týchto dvoch spomenutých nemalo vysoké náklady. Matematicky sú transakčné náklady vyjadrené rovnicou:

$$r_{TC} = \frac{C\hat{\sigma}S}{\sqrt{2\pi}} |\partial_S^2 V| \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}, \quad (1.4.15)$$

ktorých formulácia je totožná s mierou transakčných nákladov v Lelandovom modeli. Na druhej strane náklady spojené s nezabezpečeným portfóliom sa dajú formulovať nasledovne:

$$r_{VP} = R \frac{\text{var} \left(\frac{\Delta \Pi}{S} \right)}{\Delta t} = \frac{1}{2} R \hat{\sigma}^4 S^2 \Gamma^2 \Delta t. \quad (1.4.16)$$

Gamma opcie $\Gamma = \partial_S^2$ vyjadruje druhú parciálnu deriváciu hodnoty opcie. Meria citlivosť ako sa mení delta opcie, teda pomer v hedžovanom portfóliu, pri zmene ceny podkladového aktíva S . Ako môžeme pozorovať, transakčné náklady sú nepriamo úmerné času medzi dvomi transakciami, zatiaľ čo náklady s veľmi volatilným portfóliom sú tomuto času priamo úmerné. Preto riešime úlohu minimalizácie celkových nákladov, ktoré sú súčtom týchto dvoch:

$$r_R = r_{TC} + r_{VP} = \frac{C\hat{\sigma}S}{\sqrt{2\pi}} |\partial_S^2 V| \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} + \frac{1}{2} R \hat{\sigma}^4 S^2 \Gamma^2 \Delta t \rightarrow \min_{\Delta t \in (0, \infty)}. \quad (1.4.17)$$

V [15] je vypočítaný čas, kedy sú celkové náklady vzhľadom na daný interval zmeny portfólia najnižšie:

$$\Delta t_{opt} = \frac{K^2}{\hat{\sigma}^2 |H|^{\frac{2}{3}}}, \quad \text{kde } K = \left(\frac{C}{R\sqrt{2\pi}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (1.4.18)$$

Ak položíme $\mu = 3 \left(C^2 R / \sqrt{2\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$, podľa [15] sa dá odvodiť model, ktorý je nelineárnym zovšeobecnením (1.2.4) s funkciou volatility:

$$\sigma^2(H, S, T - t) = \hat{\sigma}^2 \left(1 + \mu H^{\frac{1}{3}} \right). \quad (1.4.19)$$

Kapitola 2

Metódy malého parametra

V tejto kapitole sa budeme venovať asymptotickým metódam v matematike a ich využitím v iných vedeckých odvetviach. Mnoho úloh v matematike nemôžno vo všeobecnosti explicitne vyriešiť. Medzi tieto úlohy patria rôzne integrály, výpočet riešenia funkcie $f(x) = 0$, či výpočet riešenia obyčajných alebo parciálnych diferenciálnych rovníc. Kvôli neexistencií explicitného riešenia sa zvyknú tieto úlohy riešiť pomocou často používaných numerických metód. Hľadaný výsledok poskytujú z numerickými nepresnosťami vyplývajúcimi bud' z aritmetiky počítača, alebo z aproximácie požadovaného riešenia rovnice či výrazu. Ďalšou nevýhodou numerickej matematicky býva často časovo zložitý algoritmus, ktorý pre zložitejší problém počíta riešenie dlhšie.

V knihách Holmesa [13] a [14] sú uvedené iné metódy, ktoré môžu takisto približne vyriešiť daný problém. Jedným zo spôsobov je perturbácia danej úlohy, teda jemné odchýlenie od počiatočnej úlohy. Úloha sa upraví takým spôsobom, že pre upravenú rovnicu bude existovať explicitné riešenie. Potom väčšinou má perturbované riešenie úlohy podobnú hodnotu prípadne charakter ako pôvodné riešenie, ktorého explicitný tvar neexistuje.

2.1 Motivačný príklad

V oboch knihách je uvedený ako motivačný príklad projektilu, ktorý je vystrelený nad povrch Zeme. Podľa Newtonovho druhého zákona platí pre výšku projektilu, že je riešením obyčajnej diferenciálnej rovnice:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}, \quad \text{pre } t > 0. \quad (2.1.1)$$

Aby bolo riešenie rovnice jednoznačné, položíme počiatočné podmienky:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \\ x'(0) &= v_0, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

ktoré popisujú nulovú začiatočnú výšku a začiatočnú rýchlosť objektu v_0 .

Táto diferenciálna rovnica je nelineárna a teda nájst' explicitné riešenie by bolo náročné. Avšak keď porovnáme hodnoty výšky projektilu s polomerom Zeme, ktorý je rádovo omnoho vyšší, tak po zanedbaní výšky projektilu v menovateli rovnice dostaneme výraz, ktorý je spomínanou perturbáciou pôvodnej úlohy:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -g, \quad \text{pre } t > 0. \quad (2.1.3)$$

Táto diferenciálna rovnica je už lineárna a preto sa dá riešenie nájst' jednoduchým integrovaním:

$$x_0(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t. \quad (2.1.4)$$

Nájdené riešenie je pomerne dobrou approximáciou skutočného riešenia počiatočnej rovnice. Stále však ostáva otázkou zistit', ako presne riešenie (2.1.4) popisuje skutočný tvar krivky funkcie pôvodného riešenia. Túto výšku chyby by sme chceli takisto aj odmerať. Preto je potrebné pridať k riešeniu (2.1.4) korektný člen, ktorý by mohol lepsie approximovať riešenie pôvodnej rovnice. Na druhej strane nie vždy je možné urobiť takúto úpravu, ktorá by vo vhodnej miere approximovala pôvodnú úlohu.

2.2 Asymptotické metódy

Na riešenie popísaných problémov sa v matematike používajú asymptotické metódy popísané [13] a [14]. Tieto metódy zahŕňajú rozšírenia približného riešenia úlohy. Ich využitie sa uplatňuje najmä v úlohách, ktoré sú dané obyčajnými či diferenciálnymi rovnicami. Ich použitie si uvedieme na príklade z predchádzajúceho odseku.

Kvôli lepšej predstave príklad upravíme do inej podoby. Spomínané publikácie [13] a [14] popisujú transformáciu, ktorá transformuje jednotlivé premenné na bezrozmerné premenné τ :

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{gt}{v_0}, \\ y(\tau) &= \frac{gx(t)}{v_0^2}.\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

Transformovaná diferenciálna rovnica bude mať teraz tvar:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{d\tau^2} &= -\frac{1}{(1+\varepsilon y)^2}, \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 1,\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

kde bezrozmerný parameter $\varepsilon = \frac{v_0^2}{Rg}$. Aproximácia pomocou perturbovaného riešenia (2.1.4) by bola vhodným priblížením, pokiaľ by počiatočná rýchlosť bola dostatočne nízka ($v_0 \ll 300ms^{-1}$, porov. [14]). Potom by parameter ε bol dostatočne nízky na to, aby sme ho v (2.2.2) mohli zanedbať. Riešením upravenej úlohy by v tomto prípade bolo transformované riešenie (2.1.4).

2.2.1 Metóda malého parametra

Problém však nastáva, keď parameter ε nie je úplne zanedbatelný. Riešenie by sme chceli vylepšiť pomocou vhodnejšej approximácie. Vieme, že riešenie transformovaného príkladu (2.2.2) má pre hodnoty $\varepsilon \rightarrow 0$ dostatočne blízke nule veľmi podobný charakter pôvodnému riešeniu. Úlohy tohto typu budeme nazývať perturbačné problémy.

Takýto problém budeme reprezentovať pomocou rovnice nasledujúceho tvaru:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y, \varepsilon) &= 0, \\ \mathcal{P}(y(c^T \mathcal{A}), \varepsilon) &= \mathbf{0},\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

pričom predpokladáme, že operátor \mathcal{L} obsahujúci parameter ε určuje ľavú stranu rovnice a y je riešenie danej rovnice. Operátor \mathcal{P} predstavuje sústavu počiatočných podmienok k danému riešeniu, pričom je rovný nulovému vektoru $\mathbf{0}$. \mathcal{A} je vektor hodnôt, kde sa aplikuje koncová podmienka a vektor c je jednotkový vektor. V ňom je jednotka na tej pozícii, na ktorej je aktívna definičná hodnota koncovej podmienky. Pre diferenciálne rovnice prvého rádu sa však vyskytuje len jedna podmienka, teda vektor \mathcal{A} bude jednorozmerný a $c \equiv 1$. Vo všeobecnosti je nutné zaviesť viacrozmerný vektor, kvôli možnosti viacerých počiatočných podmienok vyčíslených v rôznych bodoch.

2.2.2 Aplikácia MMP na motivačné príklady

Za príklad rovnice si zoberieme príklad z predchádzajúceho odseku:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y, \varepsilon) &= \frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{(1 + \varepsilon y)^2}, \\ c &= 1, \\ \mathcal{A} &= 0, \\ \mathcal{P}(y(\mathcal{A}), \varepsilon) &= \begin{pmatrix} y(\mathcal{A}) \\ \frac{dy}{dt}(\mathcal{A}) - 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.2.4}$$

Definovaný operátor \mathcal{L} je v tomto prípade nelineárny. Avšak našim cieľom je získať riešenie pomocou expanzie asymptotického radu. Dobrou myšlienkom v tomto prípade je upravenie nelineárneho operátora pomocou Taylorovho radu pre parametre blízke nule:

$$z(\varepsilon) = z(0) + \varepsilon z'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} z''(0) + \dots\tag{2.2.5}$$

Nedostatkom tohto radu však je, že tvar mocniny parametra nemusí byť vo všeobecnosti iba prirozené číslo. Takýto prípad by nastal, keby v príklade

(2.2.2) bol v menovateli uvedený parameter pod odmocninou. Preto je nutné zovšeobecniť (2.2.5) na rad s mocninami vo všeobecnom tvaru:

$$z(\varepsilon) \sim z_0 + \varepsilon^{a_1} z_1 + \varepsilon^{a_2} z_2 + \dots, \quad (2.2.6)$$

kde mocniny sú usporiadane: $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ kvôli jednoznačnosti a prehľadnosti zápisu. Niektoré rovnice splňajú tento zápis aj v pôvodnom zadaní, ale tie, ktoré sa tak nedajú zapísat', musíme do tohto tvaru upraviť'. Príklad (2.2.2) bude v tomto prípade v tvaru:

$$\mathcal{L}(y, \varepsilon) \sim \frac{d^2y}{d\tau^2} + 1 - 2\varepsilon y + \dots \quad (2.2.7)$$

Podstatou metódy malého parametra je snaha o získanie odhadu riešenia do požadovaného rádu parametra ε . Riešenie bude teda rovnako ako operátor závisieť od mocnín parametra:

$$y \sim y_0 + \varepsilon^{\lambda_1} y_1 + \varepsilon^{\lambda_2} y_2 + \dots, \quad (2.2.8)$$

kde tak ako v predchádzajúcim, usporiadame mocniny podľa ich veľkosti: $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$. Mocniny bývajú prevažne identické s mocninami v rovnici, prípadne sú ich násobkami.

Inak povedané naším cieľom bude riešiť rovnice, ktoré sa dajú napísat' v tvaru (2.2.6). Hľadané riešenie chceme mať zapísané v tvaru asymptotickej expanzie (2.2.8) pomocou parametra ε . Čím viac členov rozvoja radu vypočítame, tým bližšiu vieme získať aproximáciu. Na opačnej strane však výpočtová náročnosť problému sa zvyšuje so zvyšujúcou presnosťou riešenia. V niektorých príkladoch hľadanie viacerých členov rozvoja je preto nemysliteľné a vystačíme si s nižším počtom členov asymptotickej expanzie.

2.2.2.1 Príklad 1 - úloha výšky projektílu

Využitie metódy malého parametra si ukážeme na niekoľkých motivačných príkladoch. V prvom vypočítame prvé dva členy hľadaného riešenia výšky vystreleného projektílu popísanej rovnicou (2.1.1). Z dôvodu, že hľadáme riešenie diferenciálnej rovnice, ktoré závisí na časovej premennej, jednotlivé

členy riešenia budú takisto nevyhnutne závisieť od τ . Rovnicu (2.2.2) potom prepíšeme do nasledovného tvaru s počiatočnými podmienkami:

$$\begin{aligned} (y_0''(\tau) + \varepsilon^{\lambda_1} y_1''(\tau) + \varepsilon^{\lambda_2} y_2''(\tau) + \dots) + 1 - 2\varepsilon(y_0(\tau) + \varepsilon^{\lambda_1} y_1(\tau) + \dots) + \dots &= 0, \\ y_0(0) + \varepsilon^{\lambda_1} y_1(0) + \varepsilon^{\lambda_2} y_2(0) + \dots &= 0, \\ y_0'(0) + \varepsilon^{\lambda_1} y_1'(0) + \varepsilon^{\lambda_2} y_2'(0) + \dots &= 1. \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Rovnicu rozložíme na viaceru rovníc podľa rádu parametra. Pre riešenie bude platíť, že výrazy pri rovnakých hodnotách exponentov parametra budú v súčte rovné pravej strane, teda nulové. Najnižší rád:

$$o(1): \quad y_0''(\tau) + 1 = 0,$$

$$y_0(0) = 0, \quad y_0'(0) = 1,$$

Riešenie tohto podproblému je po krátkom výpočte

$y_0(\tau) = -\tau^2/2 + \tau$. Ďalší najnižší známy exponent je lineárny, preto položíme $\lambda_1 = 1$.

$$o(\varepsilon): \quad y_1''(\tau) - 2y_0(\tau) = 0,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0,$$

Riešenie lineárneho člena je $y_1(\tau) = -\frac{1}{12}(\tau - 4)\tau^3$. Ked'že vieme, že prvý exponent je rovný jednej a výraz v ďalšom rozvoji je rovný dvom, tak ďalší najnižší rád bude $\lambda_2 = 2$ z výrazu $\varepsilon^2(-2y_1(\tau) + 3y_0^2(\tau))$. Takisto si môžeme všimnúť, že jednotlivé členy asymptotického rozvoja budú polynómy a bude pre ne platíť, že so zvyšujúcim poradím člena v rozvoji sa stupeň polynómu zvýši o dva.

Riešenie úlohy s požadovanou presnosťou sme teda našli. Zapíšeme ho pomocou rozvoja (2.2.8):

$$y(\tau) \sim -\frac{\tau^2}{2} + \tau - \varepsilon \frac{1}{12}(\tau - 4)\tau^3. \tag{2.2.10}$$

Prepísaním tejto rovnice do pôvodných súradníc dostaneme approximáciu výšky projektilu:

$$x(t) \approx -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t - \frac{1}{12R}(gt - 4v_0)\frac{g^2t^3}{v_0^2}. \quad (2.2.11)$$

Ak porovnáme toto riešenie s riešením perturbovanej úlohy (2.1.3), môžeme si všimnúť, že riešenie je identické s prvým členom nášho asymptotického rozvoja (2.2.11). Inými slovami môžeme povedať, že ak položíme $\varepsilon = 0$, potom dostávame pomocou hľadaného rozvoja presné riešenie. Toto riešenie bude pomerne presné aj pre dostatočne nízke hodnoty a lineárny člen rozvoja bude zvyšovať jeho presnosť.

2.2.2.2 Príklad 2 - diferenciálna rovnica druhého rádu

Ďalší motivačný príklad, ktorý uvedieme, je autorom vymyslený príklad obyčajnej diferenciálnej rovnice druhého rádu s počiatočnými podmienkami. Parameter $\varepsilon \ll 1$ sa nachádza pri prvej derivácii hľadanej funkcie:

$$\begin{aligned} y''(t) + 2\varepsilon y'(t) - y(t) &= 0, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 1. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Funkciu môžeme opäť zapísat v základnom tvare (2.2.3):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y, \varepsilon) &= \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dy(t)}{dt} - y(t), \\ c &= 1, \\ \mathcal{A} &= 0, \\ \mathcal{P}(y(\mathcal{A}), \varepsilon) &= \begin{pmatrix} y(\mathcal{A}) \\ \frac{dy}{dt}(\mathcal{A}) - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

V tejto úlohe vieme ľahko vypočítať explicitné riešenie, takže hľadaný asymptotický rozvoj môžeme porovnať graficky. Zistíme tak, ako veľmi sa rozvoj odlišuje od skutočného riešenia. Riešenie zapíšeme rovnako ako v predchádzajúcim príklade pomocou asymptotickej expanzie (2.2.8). Tentokrát však bude

hl'adané riešenie závisiet' od premennej t . Z nášho zadania potom vznikne problém, ktorý sa opäť dá rozpísat' na systém rovníc podľa rádu parametra. Budeme hl'adat' prvé tri členy rozvoja, preto očakávame, že aproximácia bude presnejšia, ako keby sme approximovali riešenie iba pomocou dvoch členov.

$$\begin{aligned} & (y_0''(t) + \varepsilon^{\lambda_1} y_1''(t) + \varepsilon^{\lambda_2} y_2''(t) + \dots) + \\ & + 2\varepsilon(y_0'(t) + \varepsilon^{\lambda_1} y_1'(t) + \dots) - (y_0(t) + \varepsilon^{\lambda_1} y_1(t) \dots) = 0, \\ & y_0(0) + \varepsilon^{\lambda_1} y_1(0) + \varepsilon^{\lambda_2} y_2(0) + \dots = 0, \\ & y_0'(0) + \varepsilon^{\lambda_1} y_1'(0) + \varepsilon^{\lambda_2} y_2'(0) + \dots = 1. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Pre najnižší rád, ktorý neobsahuje parameter $o(1)$ platí:

$$\begin{aligned} o(1): \quad & y_0''(t) - y_0(t) = 0, \\ & y_0(0) = 0, y_0'(0) = 1, \end{aligned}$$

Daná rovnica je homogénna diferenciálna rovnica druhého rádu.

Pri riešení jej charakteristickej rovnice vzniknú dva korene

$r_{\pm} = \pm 1$. Po zohľadení počiatočných podmienok je teda riešenie tejto podúlohy $y_0(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. Takisto ako v predchádzajúcom príklade sa pozrieme na ďalšie členy, aby sme mohli určiť koeficienty v rozvoji (2.2.8). Najbližší člen, ktorý najviac prispieva k zmene hodnoty riešenia je $2\varepsilon y'(t)$. Preto položíme parameter $\lambda_1 = 1$.

$$\begin{aligned} o(\varepsilon): \quad & y_1''(t) - y_1(t) = -2y_0'(t), \\ & y_1(0) = 0, y_1'(0) = 0, \end{aligned}$$

Na rozdiel od predchádzajúcej časti príkladu, teraz zadaná diferenciálna rovnica má nehomogénnu časť na pravej strane.

Riešenie tejto rovnice je potom $y_1(t) = t \frac{e^{-t} - e^t}{2}$. Položíme parameter $\lambda_2 = 2$.

$$\begin{aligned} o(\varepsilon^2): \quad & y_2''(t) - y_2(t) = -2y_1'(t), \\ & y_2(0) = 0, y_2'(0) = 0, \\ & \text{Riešenie rovnice je } y_2(t) = t^2 \frac{e^t + e^{-t}}{4} + t \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \end{aligned}$$

Našli sme approximáciu riešenia pomocou troch členov:

$$y(t) \sim \frac{e^t - e^{-t}}{2} + \varepsilon t \frac{e^{-t} - e^t}{2} + \varepsilon^2 \left(\frac{t^2}{2} + t \right) \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \quad (2.2.15)$$

Kvôli zisteniu, že dobre asymptotické riešenie sa podobá skutočnému, na obrázku (2.1) je uvedené grafické porovnanie riešení vypracované v programe **Wolfram Mathematica 9.0**. Pri pohľade na obrázky zistíme, že pre veľmi malé hodnoty parametra ε nadobúdajú approximácie pomocou ľubovoľného počtu členov rozvoja dostatočné výsledky na sledovanom intervale. So zvyšujúcou hodnotou parametra sa approximácia pomocou jediného členu stáva nedostatočne presnou (porov. obr. (2.1), $\varepsilon = 0.01$). Na najvyššej sledovanej hladine parametra $\varepsilon = 0.1$ dáva dostatočnú presnosť už len najviac approximované riešenie s tromi členmi rozvoja (2.2.15).

2.2.2.3 Príklad 3 - singulárna úloha

Doposiaľ sme uviedli príklady, ktoré sa dali pomocou asymptotického rozvoja ľahko spočítať. Existujú aj úlohy, pre ktoré platí, že nemajú expanziu, ktorá konverguje k hľadanému riešeniu. V literatúre [14] je uvedený taký príklad. Funkcia $e^{-1/\varepsilon}$ má funkčné hodnoty príliš malé na to, aby sa dali charakterizovať pomocou rozvoja (2.2.8).

Problém s riešením pomocou metódy malého parametra sa vyskytuje aj v príkladoch lineárnych alebo difereciánych rovníc, kedy parameter vystupuje pri člene najvyššieho stupňa rovnice osamote. Riešenie tohto problému si uvedieme na príklade kubickej rovnice z knihy [14], cvičenie 1.18 (e):

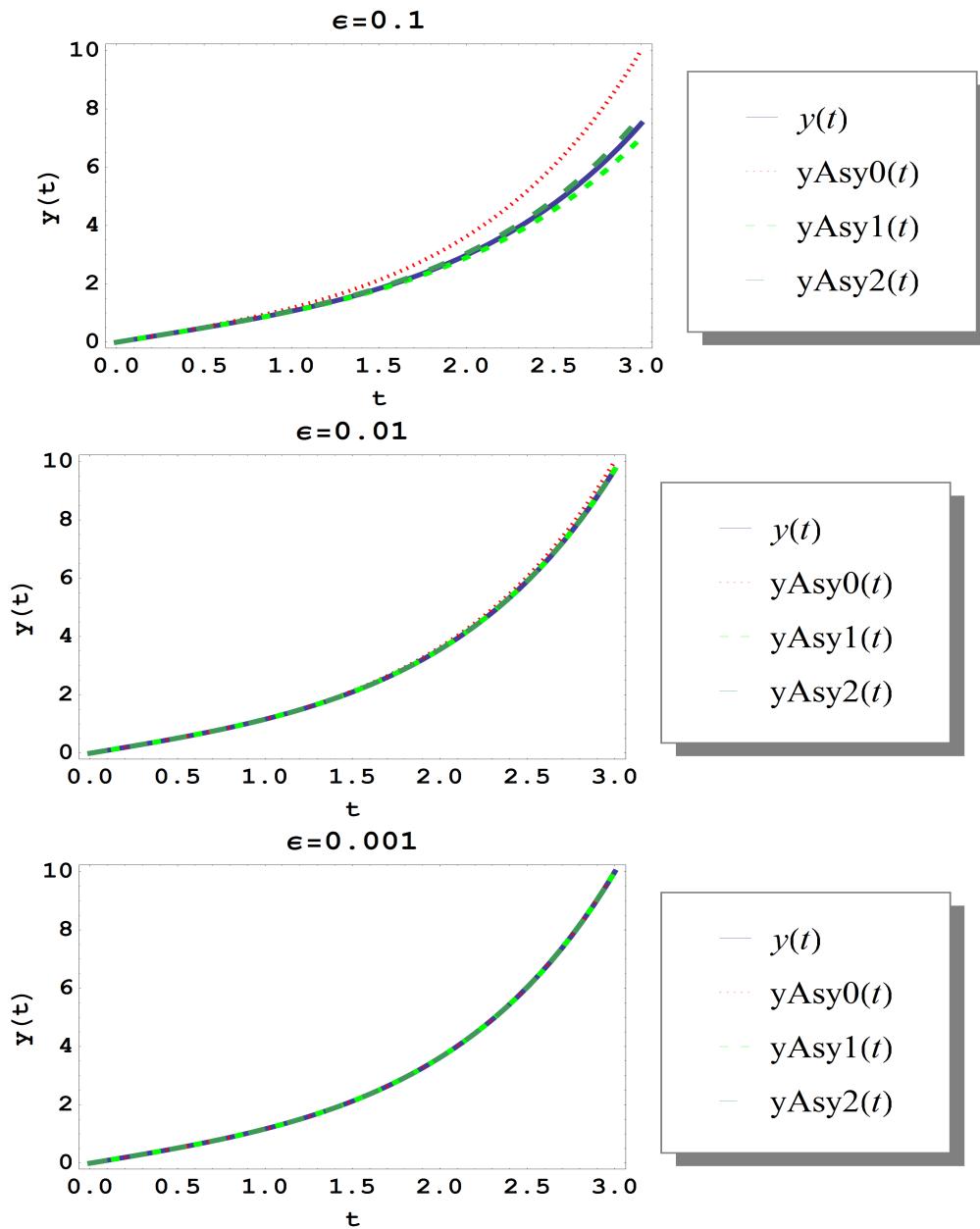
$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \varepsilon) &= \varepsilon x^3 - 3x + 1 = 0, \\ \mathcal{P}(y(c^T \mathcal{A}), \varepsilon) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Ak by sme rozvoj popísali pomocou (2.2.8), potom v prvom kroku:

$$\varepsilon(x_0^3 + 3\varepsilon^{\lambda_1} x_0^2 x_1 + \dots) - 3(x_0 + \varepsilon^{\lambda_1} x_1 + \varepsilon^{\lambda_2} x^2 + \dots) + 1 = 0, \quad (2.2.17)$$

kedy porovnávame najnižšie stupne exponentu parametra $o(1)$, dostaneme rovnicu, v ktorej sa nenachádza kubický člen:

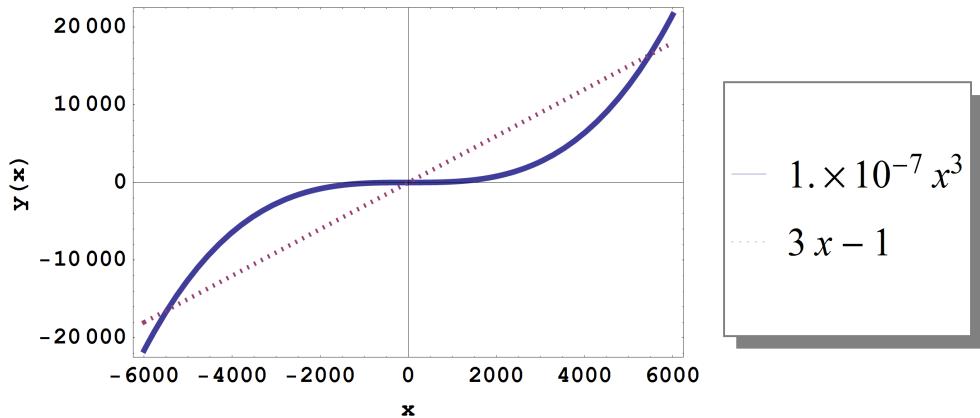
$$-3x_0 + 1 = 0. \quad (2.2.18)$$



Obr. 2.1: Porovnanie skutočného riešenia obyčajnej diferecnciálnej rovnice (2.2.12) s jeho asymptotickým rozvojom s 1, 2 a 3 členmi na intervale $[0, 3]$. Na vrchnom obrázku je parameter $\varepsilon = 0.1$ najväčší, na strednom $\varepsilon = 0.01$ a dolný obrázok zobrazuje riešenie s $\varepsilon = 0.001$. Uvedené sú štyri grafy funkcií: skutočné riešenie (plná, modrá), riešenie s jedným (bodkovaná, fialová), dvoma (plnšie bodky, zelenohnedá) a troma členmi rozvoja (čiarkovaná, zelená).

Pri hľadaní druhého členu rozvoja položíme $\lambda_1 = 1$:

$$x_0^3 - 3x_1 = 0. \quad (2.2.19)$$



Obr. 2.2: Náčrt riešenia rovnice (2.2.16) v tvare $\varepsilon x^3 = 3x - 1$ pre $\varepsilon = 10^{-7}$.

Tieto rovnice sú lineárne a poskytujú preto jediné riešenie $x^{(1)} = \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{81}$. Zo základnej vety algebry vieme, že rovnica (2.2.16) má tri riešenia, takže pomocou rozvoja nemožno dostať úplné riešenie. Ostatné riešenia z tohto rozvoja nemôžeme získať totiž preto, lebo aproximácia iba pomocou prvého člena je identická riešeniu, kedy by sme v rovnici položili $\varepsilon = 0$.

Obrázok (2.2) zobrazuje riešenie rovnice pre veľmi nízke hodnoty parametra. Hodnoty riešení sú naopak vysoké, preto sa môžeme domnievať, že niektoré členy asymptotickej expanzie budú nepriamo úmerné parametru ε . Riešenie podľa [14] napíšeme v tvare:

$$x \sim \varepsilon^\gamma (x_0 + \varepsilon^{\lambda_1} x_1 + \dots). \quad (2.2.20)$$

Hodnotu γ určíme tak, aby sa exponenty parametra ε v:

$$\varepsilon^{1+3\gamma} (x_0^3 + 3\varepsilon^{\lambda_1} x_0^2 x_1 + \dots) - 3\varepsilon^\gamma (x_0 + \varepsilon^{\lambda_1} x_1 + \varepsilon^{\lambda_2} x_2 + \dots) + 1 = 0 \quad (2.2.21)$$

v jednotlivých výrazoch rovnali. Pri porovnaní druhého a tretieho výrazu ($\gamma = 0$) dostávame vyššie skúmaný rozvoj a prvého a tretieho výrazu ($\gamma =$

$-1/3$) ostane v druhom výraze člen s nižším rádom. Preto nám ostáva porovnat' výrazy vzniknuté z kubického a lineárneho člena. Vtedy položíme $\gamma = -1/2$.

$$o(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}): x_0^3 - 3x = 0,$$

Nulové riešenie zodpovedá nájdenému riešeniu rovnice (2.2.17).

Preto berieme do úvahy riešenia $x_0^{(2,3)} = \pm\sqrt{3}$. Najbližší najnižší exponent sa nachádza v tret'om konštantnom výraze (ε^0), preto $\lambda_1 = 1/2$.

$$o(\varepsilon^0): 3x_0^2x_1 - 3x_1 + 1 = 0,$$

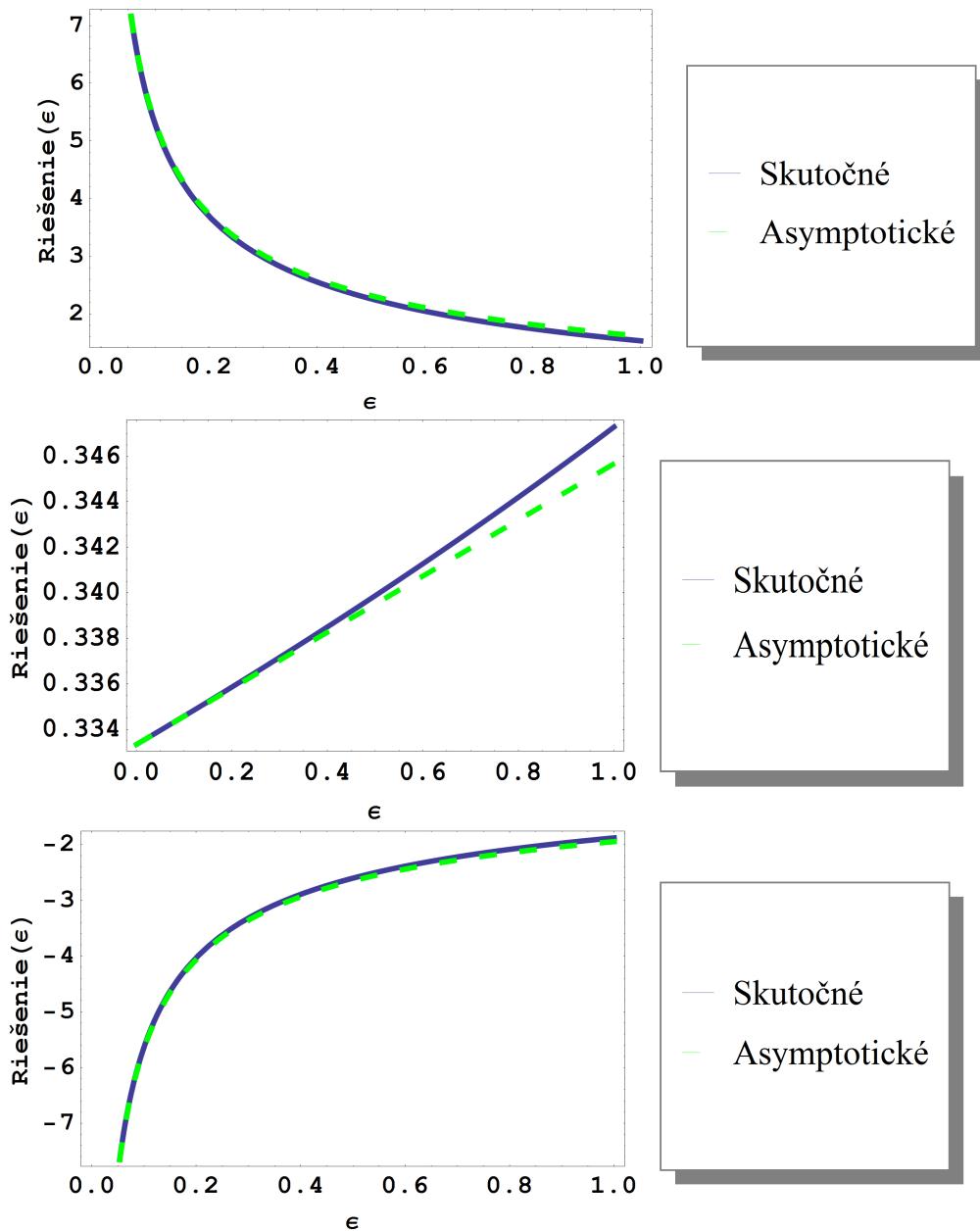
Vypočítame riešenie rovnice: $x_1^{(2,3)} = -1/6$. λ_2 určíme z rozvoja prvého člena $\lambda_2 = 2\lambda_1 = 1$.

$$o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}): 3x_0x_1^2 + 3x_0^2x_2 - 3x_2 = 0,$$

Riešenie rovnice je $x_2^{(2,3)} = \pm\sqrt{3}/36$.

Po vypočítaní rovnice pomocou asymptotického rozvoja (2.2.20) sme na koniec našli všetky hľadané riešenia:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{1}{3} + \varepsilon \frac{1}{81}, \\ x^{(2)} &= \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}} - \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3\varepsilon}}{36}, \\ x^{(3)} &= -\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}} - \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3\varepsilon}}{36}. \end{aligned} \tag{2.2.22}$$



Obr. 2.3: Skutočné riešenia (plná, modrá) rovnice (2.2.16) a asymptotický rozvoj (2.2.22) (zelená, čiarkovaná).

Na obrázku (2.3) je znázornené porovnanie reálnych a aproximovaných riešení v závislosti od veľkosti parametra ϵ . Môžeme si všimnúť, že druhý koreň rovnice sa pre väčšie hodnoty väčšmi odchyluje od presného riešenia. Môže to

byť spôsobené skutočnosťou, že jeho asymptotický rozvoj má iba dva členy v porovnaní s ostatnými riešeniami.

2.2.2.4 Nelineárne zobšeobecnenia Black-Scholesvej PDR pomocou metódy malého parametra

V jadre našej práce sa budeme venovať výpočtu cien opcií nelineárnych modelov. Ako bolo vyššie spomínané, explicitné riešenie modelov vo všeobecnosti neexistuje, preto treba pri výpočte zvoliť iný prístup. Riešenie sa pokúsime nájsť pomocou asymptotickej metódy - Metódy malého parametra. Táto časť práce je súčasťou článku [9], ktorého autorom je aj autor tejto práce. Zodpovedajúcu úlohu napíšeme v základnom tvare (2.2.3):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(V, \varepsilon) &= \partial_t V + \frac{1}{2} \sigma_\varepsilon^2(H, S, T-t) S^2 \partial_S^2 V + (r-q) S \partial_S V - r V = 0, \\ c &= 1, \\ \mathcal{A} &= T, \\ \mathcal{P}(V(S, \mathcal{A}), \varepsilon) &= V(S, \mathcal{A}),\end{aligned}\tag{2.2.23}$$

pričom $V \equiv V(S, t)$ a ako bolo spomínané v predošej kapitole: $H = S \partial_S^2 V$. Úloha je počítaná pre európsky typ call opcie.

Tak ako v predchádzajúcej časti by mohol problém nastat' v prípade existencie singularity spomínanej v publícii [14] v danom probléme, keďže parameter sa nachádza pri najvyššom stupni $\partial_S^2 V$ parciálnej derivácie rovnice. Funkcia $\sigma(H, S, T-t)$ má však taký tvar, v ktorom ak by nastal prípad $\varepsilon = 0$, potom sa rovnica zmení na pôvodnú Black-Scholesovu PDR a najvyšší stupeň parciálnej derivácie sa zachová. Rovnica je preto regulárna a možno na ňu aplikovať regulárny asymptotický rozvoj (2.2.8).

Kvôli multidimenzionalite problému bude cieľom vypočítať prvé dva členy asymptotickej expanzie (2.2.8):

$$V(S, t) \approx V_0(S, t) + \varepsilon^{\lambda_1} V_1(S, t).\tag{2.2.24}$$

Parciálnu diferenciálnu rovnicu v (2.2.23) môžeme rozpísat' podľa rádu

exponentu parametra:

$$\mathcal{L}(V, \varepsilon) = \mathcal{L}_0(V) + \varepsilon^{\lambda_1} \mathcal{L}_1(V) + \varepsilon^{\lambda_2} \mathcal{L}_2(V) + \dots \quad (2.2.25)$$

Ked'že parameter ε vystupuje v Black-Scholedovej PDR iba v člene s funkciou volatility, tak z jednotlivých spomínaných modelov z predchádzajúcej kapitoly vieme zistit' bližšie informáciu o exponentoch λ_i . Modely, v ktorých parameter nevystupuje v menovateli, budú obsahovať iba jeden exponent, preto $\mathcal{L}_i(V) \equiv 0$ pre $\forall i \geq 2$. Iné modely (napr. model s vplyvom dominantného investora) s parametrom v menovateli sa dajú rozpísat' do asymptotického radu, pre ktorý bude platit', že exponenty tvoria aritmetický rad:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda, \\ \lambda_2 &= 2\lambda, \\ \lambda_3 &= 3\lambda, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Tieto exponenty sa budú zhodovať v oboch radoch (2.2.24) a (2.2.25), aby bolo možné vypočítať členy asymptotického rozvoja riešenia.

Vidíme, že chyba aproximácie (2.2.24) je rádu $O(\varepsilon^{2\lambda})$. Preto budeme uvažovať parameter ε nadobúdajúci dostatočne nízke hodnoty. Pre hodnoty $\varepsilon \gg 0$ je potrebné pre zlepšenie aproximácie zvýšiť počet členov v (2.2.24).

Nakoľko budeme počítať iba dva členy expanzie, PDR môžeme zredukovať na rovnicu s dvomi členmi. Ostatné členy majú parametre s vyšším exponentom a preto nám k požadovanému riešeniu nebudú prispievať.

$$\mathcal{L}(V, \varepsilon) \approx \mathcal{L}_0(V) + \varepsilon^\lambda \mathcal{L}_1(V). \quad (2.2.27)$$

Do tejto rovnice potom môžeme dosadiť hľadané riešenie (2.2.24):

$$\mathcal{L}(V, \varepsilon) = \mathcal{L}_0(V_0 + \varepsilon^\lambda V_1) + \varepsilon^\lambda \mathcal{L}_1(V_0 + \varepsilon^\lambda V_1). \quad (2.2.28)$$

Oba operátory $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$ rozvinieme na princípe Taylorovho rozvoja s dvomi členmi vo V_0 :

$$\mathcal{L}(V, \varepsilon) = \mathcal{L}_0(V_0) + \varepsilon^\lambda \frac{d\mathcal{L}_0}{dV}(V_0)V_1 + \varepsilon^\lambda \left(\mathcal{L}_1(V_0) + \varepsilon^\lambda \frac{d\mathcal{L}_1}{dV}(V_0)V_1 \right). \quad (2.2.29)$$

Ked'že v našom prípade je operátor $\mathcal{L}_0(V)$ lineárny vo V , jeho symbolická derivácia bude znamenat':

$$\frac{d\mathcal{L}_0}{dV}(V_0)V_1 = \mathcal{L}_0(V_1). \quad (2.2.30)$$

Rovnicu (2.2.29) upravíme:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V, \varepsilon) &= \mathcal{L}_0(V_0) + \varepsilon^\lambda \mathcal{L}_0(V_1) + \varepsilon^\lambda \left(\mathcal{L}_1(V_0) + \varepsilon^\lambda \frac{d\mathcal{L}_1}{dV}(V_0)V_1 \right) \\ &= \mathcal{L}_0(V_0) + \varepsilon^\lambda (\mathcal{L}_0(V_1) + \mathcal{L}_1(V_0)) + \varepsilon^{2\lambda} \frac{d\mathcal{L}_1}{dV}(V_0)V_1 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Nakoľko úlohu budeme riešiť pre európsku Call opcii, dorátame počiatočné podmienky pre jednotlivé členy rozvoja:

$$\mathcal{P}(V(S, \mathcal{A}), \varepsilon) = V(S, \mathcal{A}) = V_0(S, \mathcal{A}) + \varepsilon^\lambda V_1(S, \mathcal{A}) = \max(S - E, 0). \quad (2.2.32)$$

Parciálna diferenciálna rovnica (2.2.31) a aj počiatočná podmienka (2.2.32) obsahuje sústavu rovníc podľa rádu exponenta parametra ε :

$$o(1): \quad \mathcal{L}_0(V_0) = 0,$$

$$V_0(S, \mathcal{A}) = \max(S - E, 0).$$

Riešenie prvého člena je riešením Black-Scholesovej PDR (1.2.4), preto túto podúlohu nie je potrebné počítať.

$$o(\varepsilon^\lambda): \quad \mathcal{L}_0(V_1) = -\mathcal{L}_1(V_0),$$

$$V_1(S, \mathcal{A}) = 0.$$

Táto úloha má rovnaký tvar ako Black-Scholesova PDR (1.2.4), na pravej strane však obsahuje nehomogénnu časť, čo značne skomplikuje riešenie aj napriek tomu, že počiatočná podmienka je nulová. V nasledujúcej kapitole sa budeme venovať výpočtu tohto problému.

Kapitola 3

Odvodenie explicitného nelineárneho vzorca pre cenu opcie

3.1 Odvodenie pre nelineárnu funkciu volatility

V tejto časti práce sa budeme venovať popísaniu a odvodeniu vzorca ceny opcie počítaného pomocou metódy malého parametra. Explicitný vzorec sa pokúsime odvodiť pre všeobecný rámec nelineárnych modelov popísaných v kapitole (1.4.1) a odvodenie je tak ako predchádzajúca časť súčasťou článku [9], ktorého autorom je aj autor tejto práce. Spomínané modely sa líšia v zápise funkcie volatility. Po bližšom analyzovaní môžeme položiť funkciu volatility (1.4.1):

$$\sigma = \sigma_\varepsilon(H, S, T - t) \approx \hat{\sigma}^2(1 + \varepsilon^\lambda B(T - t)S^{\gamma-1}H^{\delta-1}). \quad (3.1.1)$$

Pravú časť funkcie sme approximovali na základe (2.2.27), kvôli tomu, že požadujeme z dôvodu veľkosti problému iba prvé dva členy. Funkciu $B(T - t)$ sme položili ako funkciu závisiacu od času do expirácie. Tak ako doteraz uvažujeme $H = S\partial_S^2V$ ako súčin ceny akcie s druhou parciálnou deriváciou

ceny opcie podľa ceny akcie, ktorá sa inak nazýva gamma opcie. Z dôvodu neskoršieho jednoduchšieho zápisu sme použili všeobecné exponenty $\gamma - 1$, $\delta - 1$.

Riešenie môžeme zapísat' v podobe (2.2.24) s dvomi členmi expanzie:

$$V(S, t) \approx V_0(S, t) + \varepsilon^\lambda V_1(S, t). \quad (3.1.2)$$

Môžeme si všimnúť, že v aproximácii sme použili namiesto pôvodného λ_1 , exponent totožný s exponentom parametra v (3.1.1), aby sme mohli podobne ako v časti (2.2.2.4) porovnať rovnaké exponenty v PDR (2.2.23). Túto rovnicu môžeme pre funkciu (3.1.1) rozpísat' pomocou funkcií $\mathcal{L}_i(V)$ z (2.2.25) s tvarom exponenta $\lambda_1 = \lambda$, i=0,1:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(V) &= \partial_t V + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 S^2 \partial_S^2 V + (r - q) S \partial_S V - r V, \\ \mathcal{L}_1(V) &= B(T - t) \frac{\hat{\sigma}^2}{2} S^\gamma (S \partial_S^2 V)^\delta. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Z konca predošej kapitoly môžeme zapísat' úlohu $\mathcal{L}_0(V_1) = -\mathcal{L}_1(V_0)$, ktorú chceme v našej práci riešiť pre európsku call opciu:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0(V_1) = -A(T - t) S^\gamma H_0^\delta, & (S, t) \in (0, \infty) \times [0, T], \\ V_1(S, T) = 0, & S \in (0, \infty), \end{cases} \quad (3.1.4)$$

kde bezrozmerná veličina je definovaná pre prvý člen rozvoja (2.2.24) $H = S \partial_S^2 V_0$ a $\mathcal{L}_0(V_1) = \partial_t V_1 + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 S^2 \partial_S^2 V_1 + (r - q) S \partial_S V_1 - r V_1$. Ked'že funkcia času do expirácie $B(T - t)$ závisí od konkrétneho modelu, kvôli jednoduchosti zadanej úlohy sme položili $A(T - t) = B(T - t)^{\frac{\hat{\sigma}^2}{2}}$ a čas, v ktorom sa aplikovala koncová podmienka $\mathcal{A} = T$ je časom expirácie opcie.

3.2 Výpočet vzorca

V tejto sekcií sa pokusíme vypočítať riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice (3.1.4). Kvôli tomu potrebujeme poznat' riešenie V_0 . Z kapitoly 3 knihy [20]

vieme:

$$\begin{aligned} V_0(S, t) &= Se^{-q\tau}N(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2), \\ d_{1,2} &= \frac{\ln \frac{S}{E} + \left(r - q \pm \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)\tau}{\hat{\sigma}\sqrt{\tau}}, \\ \tau &= T - t, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

kde výraz $N(d_1)$ je hodnota distribučnej funkcie štandardizovaného normálneho rozdelenia v bode d_1 . Preto výraz vystupujúci na pravej strane (3.1.4) má tvar:

$$\partial_S^2 V_0 = \frac{e^{-q\tau} N'(d_1)}{S\hat{\sigma}\sqrt{\tau}}. \quad (3.2.2)$$

Idea riešenia nelineárnej rovnice je transformácia súradníc tak, aby vznutá rovnica bola lineárna a v základnom tvare. Časovú premennú transformujeme na premennú vyjadrujúcu čas ostávajúci do expiračného času a premennú S logaritmicky transformujeme. Napokon rovnicu pomocou exponentiály pretransformujeme na základnú parabolickú rovnicu. Podobne ako v [20]:

$$\begin{aligned} \tau &= T - t, \\ S &= Ee^x, \\ e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) &= V_1(S, t), \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

pričom konštanty α a β zvolíme tak, aby koeficienty pri člene s funkciou $V(S, t)$ a člene s jeho parciálnou deriváciou podľa hodnoty podkladového aktíva v (3.1.4) boli nulové:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} + \frac{q - r}{\hat{\sigma}^2}, \\ \beta &= -\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{8} + \frac{r + q}{2} + \frac{(r - q)^2}{2\hat{\sigma}^2}\right) = -\frac{\hat{\sigma}^2}{2}\alpha^2 - r. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Po úprave PDR (3.1.4) dosadením transformovaných premenných (3.2.3) dostávame:

$$-e^{\alpha x + \beta \tau} \partial_\tau u + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \partial_x^2 u = -A(\tau) E^\gamma e^{\gamma x} e^{-q\delta\tau} \frac{(N'(d_1))^\delta}{\hat{\sigma}^\delta \tau^{\frac{\delta}{2}}}, \quad (3.2.5)$$

$$u(x, 0) = 0.$$

Môžeme vidieť, že počiatočná podmienka je aj po transformácii nulová. Upravené d_1 má po transformácii premennej udávajúcej hodnotu podkladového aktíva tvar:

$$\hat{d}_1 = \frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma}\sqrt{\tau} = \frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}} + (1 - \alpha)\sigma\sqrt{\tau}. \quad (3.2.6)$$

Zo štatistiky vieme, že derivácia distribučnej funkcie štandardizovaného normálneho rozdelenia je jeho hustota:

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (3.2.7)$$

Napokon upravíme rovnicu a dosadíme výraz (3.2.2), takže rovnica, z ktorej budeme vychádzat pri výpočte:

$$\begin{cases} \partial_\tau u - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\partial_x^2 u = \frac{E^\gamma}{(2\pi\hat{\sigma}^2\tau)^{\frac{\delta}{2}}} A(\tau) e^{-\frac{\delta}{2\hat{\sigma}^2\tau}x^2 + [\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)]x} \\ \qquad \qquad \qquad e^{-[\beta + q\delta + \frac{\delta}{2}(1-\alpha)^2\hat{\sigma}^2]\tau}, & (x, \tau) \in \mathbb{R} \times [0, T], \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Z diferenciálneho počtu vieme, že všeobecné riešenie nehomogénnej parabolickej PDR:

$$\begin{cases} \partial_t u - a^2\partial_x^2 u = f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty], \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.2.9)$$

sa dá vypočítať ako súčet integrálu homogénneho riešenia a integrálu konvolúcie:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x - s, \tau)u^0(s)ds + \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - s, \tau - l)f(s, l)ds dl, \\ G(\xi, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

pričom v našej úlohe je funkcia $u^0(x)$ nulové počiatočné riešenie a funkcia $f(x, t)$ nehomogénna časť na pravej strane PDR a Greenovo tepelné jadro:

$$G(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2 t}}e^{-\frac{\xi^2}{2\hat{\sigma}^2 t}} \quad (3.2.11)$$

Vzhľadom na to, že počiatočná podmienka je nulová, tak aj integrál z nulovej funkcie je nulový a teda riešenie sa redukuje iba na výpočet druhého integrálu z (3.2.10):

$$u(x, \tau) = \int_0^\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2(\tau-l)}} e^{-\frac{(x-s)^2}{2\hat{\sigma}^2(\tau-l)}} \frac{E^\gamma}{(2\pi\hat{\sigma}^2 l)^{\frac{\delta}{2}}} A(l) e^{-\frac{\delta}{2\hat{\sigma}^2\tau}s^2 + [\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)]s - [\beta + q\delta + \frac{\delta}{2}(1-\alpha)^2\hat{\sigma}^2]\tau} ds dl. \quad (3.2.12)$$

Ak označíme EXP súčet oboch exponentov eulerovho čísla, potom upravením na štvorec dostávame výraz:

$$\begin{aligned} EXP &= -\frac{x^2 - 2xs + s^2}{2\hat{\sigma}^2(\tau-l)} - \frac{\delta}{2\hat{\sigma}^2 l} s^2 + [\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)] s - \\ &\quad - \left[\beta + q\delta + \frac{\delta}{2}(1-\alpha)^2\hat{\sigma}^2 \right] l = \\ &= -\frac{l + \delta(\tau-l)}{2\hat{\sigma}^2(\tau-l)l} s^2 + \frac{x + [\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)] \hat{\sigma}^2(\tau-l)}{\hat{\sigma}^2(\tau-l)} s - \\ &\quad - \left[\beta + q\delta + \frac{\delta}{2}(1-\alpha)^2\hat{\sigma}^2 \right] l - \frac{x^2}{2\hat{\sigma}^2(\tau-l)} = \\ &= -\frac{\delta\tau + (1-\delta)l}{2\hat{\sigma}^2(\tau-l)l} \left\{ s^2 - 2\frac{x + [\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)\hat{\sigma}^2(\tau-l)]}{\delta\tau + (1-\delta)l} ls + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{x + [\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)] \hat{\sigma}^2(\tau-l)}{\delta\tau + (1-\delta)l} l \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{x + [\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)] \hat{\sigma}^2(\tau-l)}{\delta\tau + (1-\delta)l} l \right]^2 \right\} - \\ &\quad - \left[\beta + q\delta + \frac{\delta}{2}(1-\alpha)^2\hat{\sigma}^2 \right] l - \frac{x^2}{2\hat{\sigma}^2(\tau-l)} = \\ &= -\frac{\delta\tau + (1-\delta)l}{2\hat{\sigma}^2(\tau-l)l} \left\{ s - \frac{x + [\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)] \hat{\sigma}^2(\tau-l)}{\delta\tau + (1-\delta)l} l \right\}^2 + \\ &\quad + \frac{\left\{ x + [\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)] \hat{\sigma}^2(\tau-l) \right\}^2}{2\hat{\sigma}^2(\tau-l) [\delta\tau + (1-\delta)l]} l - \\ &\quad - \left[\beta + q\delta + \frac{\delta}{2}(1-\alpha)^2\hat{\sigma}^2 \right] l - \frac{x^2}{2\hat{\sigma}^2(\tau-l)}. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Výraz sme upravovali na štvorec kvôli tomu, že integrál na množine reálnych čísel z hustoty normálneho rozdelenia je z teórie pravdepodobnosti istá udalosť a teda rovný jednej. To využijeme v úprave celkového riešenia (3.2.8), pričom musíme vynásobit riešenie špeciálnou jednotkou kvôli disperzií normálneho rozdelenia:

$$\begin{aligned}
 u(x, \tau) &= \int_0^\tau \frac{E^\gamma}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2(\tau-l)(2\pi\hat{\sigma}^2l)^{\frac{\delta}{2}}}} A(l) e^{\frac{\{x+[\gamma-\delta-\alpha(1-\delta)]\hat{\sigma}^2(\tau-l)\}^2}{2\hat{\sigma}^2(\tau-l)[\delta\tau+(1-\delta)l]}} l \\
 &\quad e^{-[\beta+q\delta+\frac{\delta}{2}(1-\alpha)^2\hat{\sigma}^2]l-\frac{x^2}{2\hat{\sigma}^2(\tau-l)}} \sqrt{\frac{2\pi\hat{\sigma}^2(\tau-l)}{\delta\tau+(1-\delta)l}} \\
 &\quad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi\hat{\sigma}^2(\tau-l)}{\delta\tau+(1-\delta)l}}} e^{-\frac{\delta\tau+(1-\delta)l}{2\hat{\sigma}^2(\tau-l)} \left\{ s - \frac{x+[\gamma-\delta-\alpha(1-\delta)]\hat{\sigma}^2(\tau-l)}{\delta\tau+(1-\delta)l} l \right\}^2} ds dl = \\
 &= \int_0^\tau \frac{E^\gamma}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}} l^{\frac{\delta-1}{2}} \sqrt{\delta\tau+(1-\delta)l}} A(l) e^{\frac{x^2 l}{2\hat{\sigma}^2(\tau-l)[\delta\tau+(1-\delta)l]} - \frac{x^2}{2\hat{\sigma}^2(\tau-l)}} \\
 &\quad e^{\frac{[\gamma-\delta-\alpha(1-\delta)]xl}{\delta\tau+(1-\delta)l} + \frac{[\gamma-\delta-\alpha(1-\delta)]^2\hat{\sigma}^2(\tau-l)l}{2[\delta\tau+(1-\delta)l]} - [\beta+q\delta+\frac{\delta}{2}(1-\alpha)^2\hat{\sigma}^2]l} dl. \tag{3.2.14}
 \end{aligned}$$

Do posledného výrazu exponentu môžeme dosadiť tvar konštanty β z (3.2.4):

$$\begin{aligned}
 \beta + q\delta + \frac{\delta}{2}(1-\alpha)^2\hat{\sigma}^2 &= -\frac{\hat{\sigma}^2}{2}\alpha^2 - r + q\delta + \frac{\delta}{2}\hat{\sigma}^2 + \delta\alpha\hat{\sigma}^2 + \frac{\delta}{2}\alpha^2\hat{\sigma}^2 = \\
 &= q\delta - r + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\alpha^2(\delta-1) + \frac{\delta}{2}\hat{\sigma}^2(1-2\alpha) = \\
 &= q\delta - r + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\alpha^2(\delta-1) + \frac{\delta}{2}\hat{\sigma}^2 \left[1 - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{q-r}{\hat{\sigma}^2} \right) \right] = \\
 &= q\delta - r + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\alpha^2(\delta-1) + \delta(r-q) = r(\delta-1) + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\alpha^2(\delta-1) = \\
 &= \left(r + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\alpha^2 \right) (\delta-1). \tag{3.2.15}
 \end{aligned}$$

Dosadením výrazu (3.2.15) do úpravy riešenia (3.2.14) dostávame:

$$u(x, \tau) = \int_0^\tau \frac{E^\gamma}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}} l^{\frac{\delta-1}{2}} \sqrt{\delta\tau + (1-\delta)l}} A(l) e^{\frac{l - [\delta\tau + (1-\delta)l]}{2\hat{\sigma}^2(\tau-l)[\delta\tau + (1-\delta)l]} x^2} e^{\frac{[\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)]xl + [\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)]^2 \hat{\sigma}^2(\tau-l)l}{2[\delta\tau + (1-\delta)l]} - \left(r + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\alpha^2\right)(\delta-1)l} dl. \quad (3.2.16)$$

3.2.1 Výpočet vzorca pre $\delta \neq 1$

V tejto časti predpokladáme, že parameter $\delta \neq 1$. Preto môžeme racionálne funkcie vystupujúce v exponente (3.2.16) upraviť na parciálne zlomky:

$$\begin{aligned} \frac{l}{\delta\tau + (1-\delta)l} &= \frac{1}{1-\delta} \frac{\delta\tau + (1-\delta)l - \delta\tau}{\delta\tau + (1-\delta)l} = \frac{1}{1-\delta} - \frac{\delta\tau}{1-\delta} \frac{1}{\delta\tau + (1-\delta)l}, \\ \frac{(\tau - l)l}{\delta\tau + (1-\delta)l} &= Al + B + \frac{C}{\delta\tau + (1-\delta)l}, \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

kde výrazy $A = \frac{1}{1-\delta}$, $B = \frac{\tau}{(1-\delta)^2}$ a $C = -\frac{\delta\tau^2}{(1-\delta)^2}$ a celkovo výraz (3.2.16):

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \int_0^\tau \frac{E^\gamma}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}} l^{\frac{\delta-1}{2}} \sqrt{\delta\tau + (1-\delta)l}} A(l) e^{-\frac{\delta x^2}{2\hat{\sigma}^2} \frac{1}{\delta\tau + (1-\delta)l}} \\ &\quad e^{\frac{[\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)]x}{1-\delta} - \frac{[\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)]x\delta\tau}{1-\delta} \frac{1}{\delta\tau + (1-\delta)l} + \frac{[\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)]^2 \hat{\sigma}^2 l}{2(\delta-1)}} \\ &\quad e^{\frac{[\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)]^2 \hat{\sigma}^2 \tau}{2(1-\delta)^2} - \frac{[\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)]^2 \hat{\sigma}^2 \delta\tau^2}{2(1-\delta)^2 [\delta\tau + (1-\delta)l]} - \left(r + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\alpha^2\right)(\delta-1)l} dl = \\ &= \int_0^\tau \frac{E^\gamma}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}} l^{\frac{\delta-1}{2}} \sqrt{\delta\tau + (1-\delta)l}} A(l) \\ &\quad e^{\left\{ \frac{[\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)]^2 \hat{\sigma}^2}{2(\delta-1)} - \left(r + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\alpha^2\right)(\delta-1) \right\} l + \left\{ \frac{[\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)]x}{1-\delta} + \frac{[\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)]^2 \hat{\sigma}^2 \tau}{2(1-\delta)^2} \right\}} \\ &\quad e^{-\left\{ \frac{\delta x^2}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{[\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)]x\delta\tau}{1-\delta} + \frac{[\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)]^2 \hat{\sigma}^2 \delta\tau^2}{2(1-\delta)^2} \right\} \frac{1}{\delta\tau + (1-\delta)l}} dl. \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Pôvodné riešenie úlohy (3.1.4) sa dá potom odvodiť nasledovne:

$$\begin{aligned}
 V_1(S, \tau) &= e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) = \\
 &= \frac{E^\gamma}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}}} e^{\left[\alpha + \frac{\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)}{1-\delta} \right] x + \left\{ \beta + \frac{[\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)]^2 \hat{\sigma}^2}{2(1-\delta)^2} \right\} \tau} \\
 &\quad \int_0^\tau \frac{A(l)}{l^{\frac{\delta-1}{2}} \sqrt{\delta\tau + (1-\delta)l}} e^{\left\{ \frac{[\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)]^2 \hat{\sigma}^2}{2(\delta-1)} - \left(r + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \alpha^2 \right) (\delta-1) \right\} l} \\
 &\quad e^{-\left\{ \frac{\delta x^2}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{[\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)] x \delta \tau}{1-\delta} + \frac{[\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)]^2 \hat{\sigma}^2 \delta \tau^2}{2(1-\delta)^2} \right\} \frac{1}{\delta\tau + (1-\delta)l}} dl, \tag{3.2.19}
 \end{aligned}$$

kde substituované premenné x, τ pochádzajú z transformácie (3.2.3). Ich spätným nahradením bude mať riešenie tvar:

$$\begin{aligned}
 V_1(S, \tau) &= \frac{E^\gamma}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}}} \left(\frac{S}{E} \right)^{\frac{\gamma-\delta}{1-\delta}} e^{\left\{ \beta + \frac{[\gamma - \delta - \alpha(1-\delta)]^2 \hat{\sigma}^2}{2(1-\delta)^2} \right\} \tau} \\
 &\quad \int_0^\tau \frac{A(l)}{l^{\frac{\delta-1}{2}} \sqrt{\delta\tau + (1-\delta)l}} e^{Kl - M(S) \frac{1}{\delta\tau + (1-\delta)l}} dl, \tag{3.2.20}
 \end{aligned}$$

kde výraz:

$$K = \frac{[\gamma - \delta - \alpha(1 - \delta)]^2 \hat{\sigma}^2}{2(\delta - 1)} + \beta(\delta - 1), \tag{3.2.21}$$

funkcia:

$$M(S) = \frac{\delta}{2\hat{\sigma}^2} \left(\ln \frac{S}{E} \right)^2 + \frac{[\gamma - \delta - \alpha(1 - \delta)] \delta \tau}{1 - \delta} \ln \frac{S}{E} + \frac{[\gamma - \delta - \alpha(1 - \delta)]^2 \hat{\sigma}^2 \delta \tau^2}{2(1 - \delta)^2} \tag{3.2.22}$$

a premenná $\tau = T - t$. Túto premennú sme nechali v transformovanom zápisе, kvôli jednoduchšiemu vyjadreniu vo vzorci. Zároveň vyjadruje čas do expirácie opcie ako bolo spomínané pri jej zadefinovaní.

3.2.2 Výpočet vzorca pre $\delta = 1$

Pre úplnosť riešenia zadania (3.1.4) vypočítame aj možnosť, v ktorej je parameter $\delta = 1$. Pokračujeme v úprave funkcie $u(x, \tau)$ z tvaru (3.2.16), do

ktorej dosadíme určený tvar parametra:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \int_0^\tau \frac{E^\gamma}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2\tau}} A(l) e^{-\frac{x^2}{2\hat{\sigma}^2\tau} + \frac{(\gamma-1)xl}{\tau} + \frac{(\gamma-1)^2\hat{\sigma}^2(\tau-l)}{2\tau}} dl = \\ &= \int_0^\tau \frac{E^\gamma}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2\tau}} A(l) e^{-\frac{(\gamma-1)^2\hat{\sigma}^2}{2\tau}l^2 + \left[\frac{(\gamma-1)x}{\tau} + \frac{(\gamma-1)^2\hat{\sigma}^2}{2}\right]l - \frac{x^2}{2\hat{\sigma}^2\tau}} dl. \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Dosadením do funkcie spred transformácie dostávame výraz:

$$\begin{aligned} V_1(S, \tau) &= e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) = \\ &= \frac{E^\gamma}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2\tau}} \left(\frac{S}{E}\right)^\alpha e^{\beta\tau - \frac{(\ln \frac{S}{E})^2}{2\hat{\sigma}^2\tau}} \int_0^\tau A(l) e^{-\frac{(\gamma-1)^2\hat{\sigma}^2}{2\tau}l^2 + \left[\frac{(\gamma-1)x}{\tau} + \frac{(\gamma-1)^2\hat{\sigma}^2}{2}\right]l} dl. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Rovnako ako v prípade, kedy parameter γ nie je rovný jednej, sme ponechali časovú premennú vo forme času do expirácie.

3.3 Analýza citlivosti riešenia podľa premenných

V ďalšom kroku by sme chceli riešenie (3.2.20) analyzovať na základe citlivosti jednotlivých premenných vstupujúcich do vzorca. Problémom je veľkosť vzorca a fakt, že premenné S, τ vstupujú do vzorca na viacerých pozíciach. Preto môže spôsobovať problém jednoznačne určiť, či sú tieto premenné priamo alebo nepriamo úmerné výslednej hodnote opcie. Vzhľadom na to, že parametre γ a δ sú dané všeobecne, nemožno určiť exponenty výrazov. Ak však čiastočne upresníme ich hodnoty, potom sa výrazy vo vzorci (3.2.20) značne zjednodušia. Taktiež sa ukazuje, že modely popísané v časti (1.4.1) nadobúdajú tie hodnoty, ktoré zjednodušia vzorec riešenia.

Citlivosť na premennej S budeme skúmať na základe zmeny pomery ceny akcie S a expiračnej ceny E kvôli tomu, že podiel S/E je bezrozmerná veličina.

Najjednoduchší tvar nadobudne vzorec v prípade, ak sú obidve premenné rovné $\gamma = \delta = 1$. To nastáva v Lelandovom modeli, pre ktorý Leland od-

vodil pre call opciu explicitný vzorec v práci [16]. Týmto prípadom sa teda nebudeme zaoberať.

3.3.1 Model s parametrom $\gamma = 1$

Ked' porovnáme tvar funkcie volatility (3.1.1) s funkiami pre nelineárne zovšeobecnenia v (1.4.1), tak zistíme, že sem patria modely:

- Model s vplyvom dominantného investora (Frey-Stremmeho model)
- Model so vzrastajúcou trhovou volatilitou
- Risk Adjusted Pricing Methodology

Vzorec sa zjednoduší nasledovne:

$$\begin{aligned}
 V_1(S, \tau) &= \frac{E}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}}} \left(\frac{S}{E}\right)^{\alpha+(1-\alpha)} e^{\left[\beta + \frac{(1-\alpha)^2\hat{\sigma}^2}{2}\right]\tau} \\
 &\quad \int_0^\tau \frac{A(l)}{l^{\frac{\delta-1}{2}} \sqrt{\delta\tau + (1-\delta)l}} e^{(1-\delta)ql - M(S)\frac{1}{\delta\tau + (1-\delta)l}} dl = \\
 &= \frac{E}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}}} \frac{S}{E} e^{-q\tau} \int_0^\tau \frac{A(l)}{l^{\frac{\delta-1}{2}} \sqrt{\delta\tau + (1-\delta)l}} e^{(1-\delta)ql - M(S)\frac{1}{\delta\tau + (1-\delta)l}} dl,
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

pričom

$$M(S) = \frac{\delta}{2\hat{\sigma}^2} \left(\ln \frac{S}{E} \right)^2 + [(1-\alpha)\delta\tau] \ln \frac{S}{E} + \frac{(1-\alpha)^2\hat{\sigma}^2\delta\tau^2}{2}. \tag{3.3.2}$$

Pri analyzovaní závislosti hodnoty $V_1(S, t)$ od podielu S/E pozorujeme kvôli nezápornosti všetkých výrazov, že závislosť je kladná na základe výskytu podielu pred odmocninou. Na druhej strane podiel sa vyskytuje aj vo funkcií $M(S)$ z (3.3.2). V prvom výraze funkcie vystupuje podiel v kvadratickom tvare logaritmu podielu, takže akákoľvek zmena od podielu $S/E = 1$ znižuje funkčnú hodnotu exponenciálky kvôli zápornému znamienku. Naopak druhý výraz obsahuje logaritmus podielu, preto sa zvýšenie podielu prejaví v znižení hodnoty exponentu. Ak porovnáme oba činitele pred výrazmi $\frac{\delta}{2\hat{\sigma}^2}$

a $(1 - \alpha)\delta\tau$, tak môžeme usúdiť, že celkovo má prvý výraz väčší vplyv na hodnotu exponentu. Teda najväčšie hodnoty bude dosahovať vtedy, keď sa cena akcie bude rovnat expiračnej cene. Závisí to však aj hodnôt jednotlivých parametrov vystupujúcich vo výrazoch, preto to vo všeobecnosti nemusí platit.

Časová premenná ovplyvňuje cenu opcie viacerými spôsobmi. Výraz $e^{-q\tau}$ udáva nepriamu úmeru ceny od času, zatiaľ čo hranica integrálu sa zväčšuje so zvyšovaním času do expirácie. Ked'že je vnútro integrálu kladné, potom sa zvyšuje aj funkčná hodnota s rastúcim časom do expirácie. Funkcia na chádzajúca sa vo vnútri integrálu je takisto funkciou času do expirácie, takže celkovo nie je možné bez výpočtu jednoznačne určiť závislosť hodnoty opcie od časovej premennej.

3.3.2 Model s parametrom $\gamma = \delta$

Druhou skupinou, pri ktorej sa vzorec zjednoduší je model, v ktorom sa parametre γ, δ rovnajú. Patrí sem napr.:

- Model zohľadňujúci preferečne investorov (Barles Sonerov model)

Tentokrát bude vzorec vyzerat' nasledovne:

$$\begin{aligned} V_1(S, \tau) &= \frac{E^\gamma}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}}} \left(\frac{S}{E}\right)^{\alpha + \frac{-\alpha(1-\delta)}{1-\delta}} e^{\left\{\beta + \frac{[-\alpha(1-\delta)]^2\hat{\sigma}^2}{2(1-\delta)^2}\right\}\tau} \\ &\quad \int_0^\tau \frac{A(l)}{l^{\frac{\delta-1}{2}} \sqrt{\delta\tau + (1-\delta)l}} e^{(1-\delta)rl - M(S) \frac{1}{\delta\tau + (1-\delta)l}} dl = \\ &= \frac{E^\gamma}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}}} e^{-r\tau} \int_0^\tau \frac{A(l)}{l^{\frac{\delta-1}{2}} \sqrt{\delta\tau + (1-\delta)l}} e^{(1-\delta)rl - M(S) \frac{1}{\delta\tau + (1-\delta)l}} dl, \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

kde funkcia:

$$M(S) = \frac{\delta}{2\hat{\sigma}^2} \left(\ln \frac{S}{E} \right)^2 - \alpha\delta\tau \ln \frac{S}{E} + \frac{\alpha^2\hat{\sigma}^2\delta\tau^2}{2}. \tag{3.3.4}$$

V porovnaní s predchádzajúcim má tento príklad tiež podobné vlastnosti. Na rozdiel od modelu s $\gamma = 1$ sa však vykrátil podiel S/E , preto je od tohto

pomeru cena opcie závislá vo vnútri funkcie $M(S)$. Tentokrát sa zvýšením podielu zvýší hodnota exponentu pre druhý výraz vo funkcií (3.3.4), no pre podiel $S/E \neq 1$ sa naopak táto hodnota zníži v prvom výraze.

Skúmaním závislosti hodnoty opcie na čase do expirácie τ dospejeme k rovnakým úvahám ako pre predošlý model. Preto budeme závislosť od času musiet' analyzovať iným spôsobom.

3.4 Explicitné riešenie pre inú koncovú podmienku

V našej práci sa zaoberáme výpočtom hodnoty pre európsku call opciu. Zaujímavé by však bolo zistit' tvar rozvoja pre iné typy koncovej podmienky.

Často používaným typom opcie je okrem call takisto aj put opcia, ktorá v čase expirácie vypláca investorovi výplatu $V(S, T) = \max(E - S, 0)$. Ked'že úloha takisto rieši PDR (1.2.4), riešenie sa oproti výpočtu call opcie zmení len na základe zmeny terminálnej podmienky. Ked'že používame transformovaný čas do expirácie τ , potom môžeme skôr hovorit' o začiatočnej podmienke. Podľa [20] platí pre put opciu počítanú Black-Scholesovým modelom:

$$V_0(S, \tau) = Ee^{-r\tau}N(-d_2) - Se^{-q\tau}N(-d_1) \quad (3.4.1)$$

a takisto *Gamma* opcie je totožná s *Gammou* pre call opciu:

$$\Gamma_{put} = \Gamma_{call} = \partial_S^2 V(S, \tau) = \frac{e^{-q\tau} N'(d_1)}{\hat{\sigma} S \sqrt{\tau}}. \quad (3.4.2)$$

Do riešenia druhého člena (3.1.4) rozvoja (2.2.24) nevstupuje začiatočná podmienka a riešenie $V_0(S, \tau)$ vstupuje iba prostredníctvom $H = ST$. Preto je riešenie $V_1(S, \tau)$ pre európsku put opciu identické s riešením pre európsku call opciu.

Výpočet explicitného vozrca pre všeobecnú opčnú stratégiu však je omnoho zložitejšie. Ako príklad môžeme uviesť stratégiu *straddle* s rôznymi expiračnými cenami E_1, E_2 pre súčet call a put opcie. Začiatočná podmienka v

premennej τ je potom:

$$V(S, 0) = V_{E_1}^{call}(S, \tau) + V_{E_2}^{put}(S, \tau) = \max(S - E_1, 0) + \max(E_2 - S, 0). \quad (3.4.3)$$

Black-Scholesov lineárny člen ostáva kvôli linearite PDR lienárnowou kombináciou samostatných Black-Scholesových riešení pre opcie. Pre druhý člen rozvoja sa mení taktiež ako v predchádzajúcim prípade iba Γ pre *straddle* stratégiu, ktorá má tvar:

$$\Gamma_{straddle} = \frac{e^{-q\tau} N'(d_1(E_1))}{\hat{\sigma} S \sqrt{\tau}} + \frac{e^{-q\tau} N'(d_1(E_2))}{\hat{\sigma} S \sqrt{\tau}}. \quad (3.4.4)$$

Kvôli tomu, že sa v Γ pre *straddle* stratégiu nachádzajú rôzne expiračné ceny, nie je možné spraviť linearizáciu riešení na výpočet $V_1(S, \tau)$. Výpočet člena pre zmiešanú stratégiu je preto značne komplikovanejší.

Kapitola 4

Frey-Stremmeho model nelikvidného trhu a vplyvu dominantného investora

Všeobecný vzorec z predchádzajúcej časti je odvodený vo všeobecnom rámci pre nelineárne modely (1.4.1). Frey-Stremmeho model s vlastnými parametrami zapadá do tohto konceptu, preto bude cieľom tejto kapitoly zamerat' sa na popis odvodenia funkcie volatility vedúci ku kalibrácii modelu. Taktiež opíšeme rôzne prístupy kalibrácie.

4.1 Popis vytvárania modelu

Ako bolo spomínané v sekcii (1.4.1), model bol odvodený prostredníctvom zovšeobecnenia Black-Scholesovho lineárneho modelu. Lísi sa tým, že volatilita nie je konštantná, ale je definovaná ako funkcia závislá od premenných. Jej tvar spomenieme kvôli prehľadnosti:

$$\sigma^2(H, S, T - t) = \frac{\hat{\sigma}^2}{(1 - \rho S \partial_S^2 V)^2}, \quad (4.1.1)$$

Funkciu volatility dosadíme do pôvodnej Black-Scholesovej PDR za výraz udávajúci konštantnú volatilitu $\hat{\sigma}$. Zdá sa, že problém nastane kvôli tomu, že

rovnica sa nedá zapísat' v tvare mocninového radu s odlišnými exponentmi, aby zodpovedala zápisu (2.2.25) úlohy (2.2.23), ktorú riešime v práci. Ak však rovnicu rozvinieme do asymptotickej expanzie, potom nám bude stačiť určitý počet prvých členov na dosiahnutie asymptotického explicitného výsledku. Funkciu volatility $\sigma(H, S, T - t)$ upravíme na nekonečný mocninový rad s postupnosťou prirodzených čísel na mieste exponentov:

$$\begin{aligned}\sigma^2(H, S, T - t) &= \frac{\hat{\sigma}^2}{(1 - \rho S \partial_S^2 V)^2} \left[\frac{1 + \rho S \partial_S^2 V + (\rho S \partial_S^2 V)^2 + \dots}{1 + \rho S \partial_S^2 V + (\rho S \partial_S^2 V)^2 + \dots} \right]^2 \\ &= \hat{\sigma}^2 \left\{ 1 + 2\rho S \partial_S^2 V_0 + \rho^2 [3(S \partial_S^2 V_0)^2 + 2S \partial_S^2 V_1] + \dots \right\} \\ &\approx \hat{\sigma}^2 (1 + 2\rho S \partial_S^2 V_0).\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

Ked'že úlohou tejto práce je vypočítať prvé dva členy rozvoja ceny opcie, bude opäť postačovať iba načrtnutá aproximácia funkcie volatility. Pre vhodnú aproximáciu je potrebné, aby bol parameter ρ dostatočne nízky, ako bolo spomenuté v časti (2.2.2.4). V opačnom prípade sa môže približovaním menovateľa k nule stat', že volatilita bude neohraničená.

Teraz je už možné porovnať funkciu volatility so všeobecným tvarom zovšeobecnených modelov (3.1.1). Metóda malého parametra sa teda pre nás model bude uplatňovať pre $\varepsilon = \rho$ a pre hodnotu exponentu $\lambda = 1$. Funkcia $B(\tau) = 2$ preto $A(\tau)$ a ostatné parametre charakterizujúce Frey-Stremmeho model nadobúdajú hodnoty:

$$\begin{aligned}A(\tau) &= \hat{\sigma}^2, \\ \gamma &= 1, \\ \delta &= 2.\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

Naozaj sme teda overili, že model patrí do skupiny s $\gamma = 1$ spomínanej v predchádzajúcej kapitole v časti (3.3.1). Ked' dosadíme funkciu $A(\tau)$ a oba parametre do vzorca (3.2.20), dostaneme presný tvar vzorca pre Frey Stremmeho model.

Vypočítaním parametrov vieme zistit' chybu aproximácie riešenia (3.1.2). Kvôli tomu, že exponent parametra $\lambda = 1$, je approximačná chyba na úrovni $o(\rho^2)$. Inak môžeme túto chybu interpretovať úvahou, že ak začnú byť finančné deriváty na trhu menej likvidné, potom má approximačný vzorec nižšiu presnosť.

4.2 Postup získavania údajov

Na kalibrovanie parametrov modelu potrebujeme zistit' závislosť každého parametra ako funkciu od ceny akcie S a času τ . Časovú premennú budeme opäť udávať v transformovanom tvare udávajúcim čas zostávajúci do expirácie. Preto je potrebné získať údaje z reálneho priebehu cien akcie a opcí pre rôzne expiračné ceny v čase. Údaje sú prevzaté z internetovej stránky poskytujúcej informácie o pohyboch cien akcií, opcí a indexov *finance.yahoo.com*, ktorý aktualizuje informácie o týchto hodnotách v priebehu niekoľkých sekúnd počas obchodovacieho dňa na finančnej burze.

Každých päť minút sa stiahli informácie o hodnotách akcií a opcí pre mnoho expiračných cien, ktoré sa zapísali do súboru vyhradeného pre každú expiračnú cenu. Problém pri stiahovaní dát nastal kvôli posunu údajov o časový úsek, ktorý nastal na strane webovej stránky. Údaje totiž neboli zverejnené v správnych časoch, preto bolo potrebné posunúť údaje o časový úsek naspäť.

Kalibrovať model je možné viacerými spôsobmi. Jeden z nich zahrňa vypočítanie volatility na základe historických dát a kalibráciu implikovaného parametra modelu. Ďalšou možnosťou je kalibrácia oboch parametrov súčasne na základe kúpnej a predajnej ceny opcie. Kalibrácia je popísaná riešením systému dvoch nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc s dvoma neznámymi parametrami. Rovnice zodpovedajú bid a ask cenám opcí a riešenie zodpovedá $V(S, \tau) = V_0(S, \tau) + \rho V_1(S, \tau)$ (resp. $V(S, \tau) = V_0(S, \tau) - \rho V_1(S, \tau)$) postupne pre ask (bid) cenu opcie. Systém rovníc sa rieši najčastejšie numerickou Newtonovou metódou pre nájdenie koreňa neli-

neárnej rovnice, no metóda je pre systém relatívne komplikovaná.

Posledným riešením, ako nakalibrovat' model, je postupná kalibrácia parametra σ na základe Black-Scholesovho modelu a neskôr jej aplikácia na ρ vo Frey-Stremmeho modeli. Nasledovná časť sa bude riadiť týmto prípadom.

4.3 Postupná kalibrácia σ_{impl} a ρ_{impl}

4.3.1 Implikovaná volatilita a jej existencia

Dôležitým bodom pri kalibrácii modelu je vypočítanie implikovanej volatility $\hat{\sigma}_{impl}$ na základe Black-Scholesovo modelu. Implikovanú volatilitu môžeme definovať na základe [21] tak, že $\hat{\sigma}_{impl} > 0$ je taká hodnota parametra, pre ktorú platí, že cena opcie je pre cenu akcie rovnú trhovej cene v danom čase rovná skutočnej reálnej cene opcie. Inými slovami, ak dosadíme hodnotu implikovanej volatility do Black-Scholesovej PDR, potom riešenie počítané pre reálnu cenu podkladového aktíva a v danom čase nadobúda reálnu hodnotu opcie na trhu. Implikovanú volatilitu sme počítali v programe *Scilab* 5.5.1, kvôli jednoduchosti a rýchlosťi výpočtu programu.

Údaje, ktoré sme stiahli obsahovali tri rôzne druhy cien:

- Close - je posledná cena, za ktorú bola obchodovaná opcia
- Bid - je ponúkaná cena na kúpu opcie
- Ask - je požadovaná cena na predaj opcie

Cena, pomocou ktorej počítame implikovanú volatilitu dosadzovanú do modelu, je strednou cenou medzi bid a ask cenou opcie, pričom platí nerovnosť $V_{bid} < V_{ask}$. Takže matematicky vyjadrené:

$$V_{BS} = \frac{V_{bid} + V_{ask}}{2}. \quad (4.3.1)$$

Implikovaná volatilita na stred medzi bid a ask má v každom čase pre každý podiel S/E vlastnú hodnotu, keďže je v každom čase počítaná pre aktuálnu

trhovú cenu opcie a akcie. Je to preto funkcia závisiaca od podielu ceny akcie a expiračnej ceny S/E a času τ .

Implikovaná volatilita vo všeobecnosti nemusí existovať. Z publikácií [20] a [21] vieme určiť limity pre veľmi nízku či vysokú volatilitu. Ak uvažujeme spojité vyplácanie dividend, v limite $\sigma \rightarrow \infty$ sa cena opcie približuje odúročenej cene akcie o dividendy $V(S, \tau) \rightarrow Se^{-q\tau}$. Na druhej strane ak sa volatilita pohybuje blízko nuly $\sigma \rightarrow 0$, potom cena opcie $V(S, \tau) \rightarrow \max(0, Se^{-q\tau} - Ee^{-r\tau})$. Preto podmienkou na existovanie implikovanej volatility je, aby skutočná trhová cena opcie patrila vypočítanému intervalu:

$$V_{real}(S, \tau) \in (\max(0, Se^{-q\tau} - Ee^{-r\tau}), Se^{-q\tau}) \quad (4.3.2)$$

Z tohto intervalu môžeme zistíť, že ak vzrástie skutočná trhová cena nad hranicu odúročenej ceny akcie o vyplácané dividendy, implikovaná volatilita v tomto prípade nebude existovať. V skutočnosti by však táto situácia nemala nastat', keďže taká je v tomto čase cena akcie, na ktorú sa opcia viaže a má vyššiu hodnotu ako jej derivát. Implikovaná volatilita nebude existovať takisto, ak hodnota opcie klesne pod hodnotu $\max(0, Se^{-q\tau} - Ee^{-r\tau})$. To sa stane ak je v určitom čase pre nízku expiračnú cenu vysoká cena akcie. Podiel je v tomto prípade $S/E \gg 1$ a dolná hranica intervalu (4.3.2) je veľmi vysoká.

Existenciu implikovanej volatility sme testovali na reálnych dátach. Na ozaj pri nízkych expiračných cenách sme zistili, že v určitých časoch implikovaná volatilita existovať nemusí.

Neexistencia volatility spôsobuje problém, kedy sa model dá kalibrovať iba v užšom intervale, na ktorom nadobúda hodnoty podiel S/E . Riešením by mohla byť taká úprava dát, kedy by sme hodnoty cien, pre ktoré implikovaná volatilita neexistuje, nahradili cenami zodpovedajúcimi implikovanej volatilite z predchádzajúceho sledovaného času. Týmto by sme však mohli upraviť ceny tak, že by stratili dôležitú informáciu, ktorú vďaka vykreslovaniu reálnej situácie niesli. Preto sme expiračné ceny, pre ktoré aspoň v jednom čase neexistovala implikovaná volatilita, nebrali do úvahy v našom modeli.

4.3.2 Kalibrácia parametra ρ

V prechádzajúcim odseku sme sa venovali kalibrácií implikovanej volatility σ pomocou strednej hodnoty medzi kúpnou a predajnou cenou opcie. Zostávajúcou úlohou je kalibrovať parameter ρ . Tento parameter sa nachádza vo funkcií (4.1.1). Čím vyšší zvolíme parameter ρ , tým sa bude menovať výrazu zmenšovať. Preto sa celkovo funkčná hodnota funkcie volatility zvýší. Vieme, že cena opcie je rastúcou funkciou volatility, preto sa zvýšenie ceny opcie prejaví pomocou rastu parametra ρ . Preto ho budeme kalibrovať pomocou rozdielu medzi ask cenou a stredom bid a ask ceny opcie a zmena z modelu, kde je položený $\rho = 0$ na model s $\rho = \rho_{impl}$ bude zachytávať túto zmenu. Inými slovami, stredná cena medzi bid a ask cenou zodpovedala nelineárному modelu, kde sme položili parameter $\rho = 0$. Môžeme si všimnúť, že tento model zodpovedá lineárному Black-Scholesovmu modelu s konštantnou volatilitou. Preto túto cenu môžeme nazvať Black-Scholesovou cenou opcie. Naopak ask cena opcie bude počítaná pomocou implikovaného parametra ρ_{impl} .

Otázkou ostáva, ako zistit implikovaný parameter, ak z reálnych vieme zistit ceny opcií bid aj ask. Na to nám poslúži vzorec (3.1.2) a ak uvažujeme v transformovanej premennej τ , potom:

$$\rho_{impl} = \frac{V(S, \tau) - V_0(S, \tau)}{V_1(S, \tau)} \quad (4.3.3)$$

Aproximáciu (3.1.2) budeme chápať podľa vyššie uvedeného ako súčet Black-Scholesovej ceny, ktorá je stredom medzi bid a ask cenou, a druhého sčítanca. Za výsledok súčtu považujeme ask cenu opcie $V(S, \tau)$. Preto výpočet parametra z (4.3.3) je charakterizovaný rozdielom medzi ask $V(S, \tau)$ a Black-Scholesovou cenou $V_0(S, \tau)$ a tento rozdiel je vydelený druhým členom asymptotického rozvoja ceny opcie $V_1(S, \tau)$.

Ked'že ask a Black-Scholesova cena opcie má pre iný čas τ inú cenu akcie S , aj ρ bude mať pre každý čas rôznu hodnotu. Kalibrovať model môžeme takisto pre rôzne expiračné ceny. Celkovo preto môžeme považovať parameter ρ za funkciu bezrozmernej veličiny S/E a časovej premennej τ .

4.4 Kalibrácia modelu pomocou historickej volatility

Druhá alternatíva k výpočtu implikovaných parametrov σ_{impl} a ρ_{impl} je použitie historickej volatility v modeli. Tento prístup zohľadňuje vývoj ceny opcie počítanej v minulosti a po výpočte historickej volatility pokračuje rovnakým spôsobom ako predchádzajúca možnosť⁷.

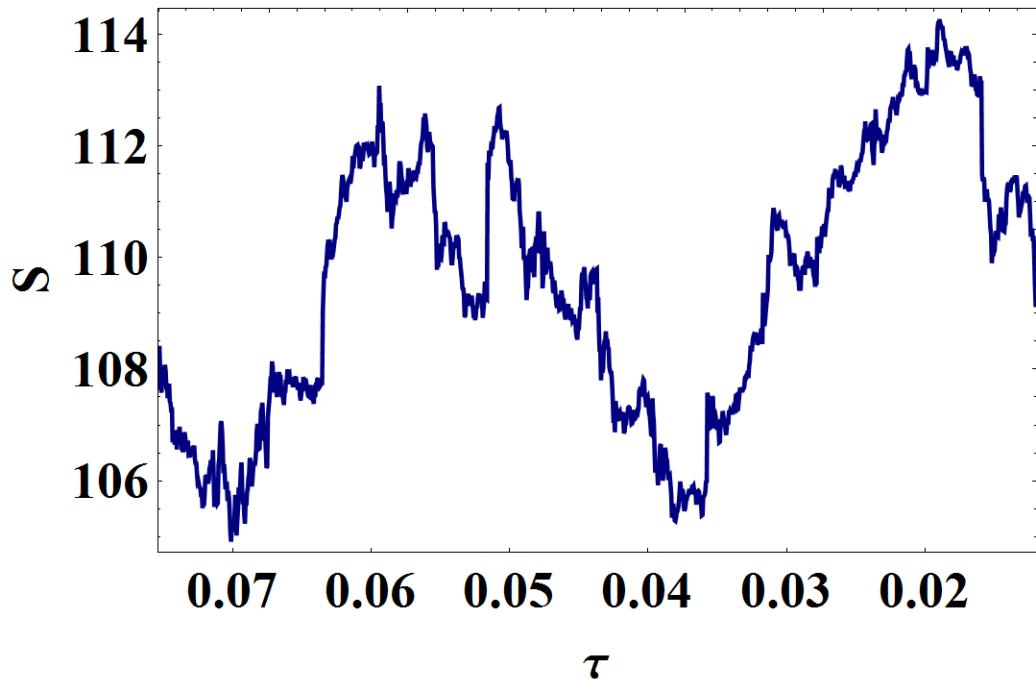
Označme historickú volatilitu symbolom σ_{hist} . Potom túto volatilitu počítame ako štandardnú odchýlku výnosov za sledované obdobia. Naša práca zahŕňala denné údaje o vývoji ceny akcie, preto počítaním s dennými výnosmi dostaneme dennú historickú volatilitu. Pre ročnú potom platí, že bude násobkom odmocniny počtu obchodovacích dní burzy $\sigma_{hist}^R = \sqrt{252}\sigma_{hist}^D$, ked'že volatilita je odmocninou disperzie.

Historická volatilita charakterizuje mieru rôznorodosti ceny aktíva v poslednom období. Čím viac sa cena vychýli, tým vyššia bude hodnota σ_{hist} . Výpočet je založený na predpoklade, že volatilita v poslednom období ostane d'alej na rovnakej úrovni.

Kapitola 5

Kalibrácia na reálne dátá

Frey-Stremmeho model popísaný v predošej kapitole sme kalibrovali na dátach firmy *Apple Inc.* za obdobie 3.1.–27.1.2015 s expiračným časom 30.1.2015 pri úrokovej miere $r = 1\%$. Vývoj ceny akcie je zobrazený na obrázku (5.1).



Obr. 5.1: Vývoj ceny akcie firmy Apple Inc. v čase od 5. januára 2015 do 27. januára 2015. Čas τ je meraný v počte rokov, ktoré ostávajú do expirácie.

Posledné dni pred expriáciou sme nebrali do úvahy, keďže išlo o typ amerických opcíí, ktoré mohli byť uplatnené tesne pred expiráciou, čo značne negatívne ovplyvnilo výpočty. Výška vyplácaných dividend bola za dané obdobie $q = 1.7\%$. Údaje boli získané pre celočíselné expiračné ceny v rozpätí $E \in [100, 130]$ okrem hodnoty $E = 129$. Počet dní, kedy je burzový trh otvorený, bol v modeli predpokladaný na 252 dní.

Hodnoty parametrov je možné kalibrovať iba pre diskrétnu hodnotu podielov S/E a pre diskrétnu časovú τ , pre ktoré boli údaje stiahnuté. Naším cieľom je však získať funkciu volatility závislú od týchto premenných v spojitéch časoch. Na grafické vykreslenie závislosti funkcie od akýchkoľvek hodnôt premenných je v práci použitá interpolácia funkcie tretieho stupňa.

5.1 Skúmanie vývoja implikovanej volatility

$$\sigma_{impl}$$

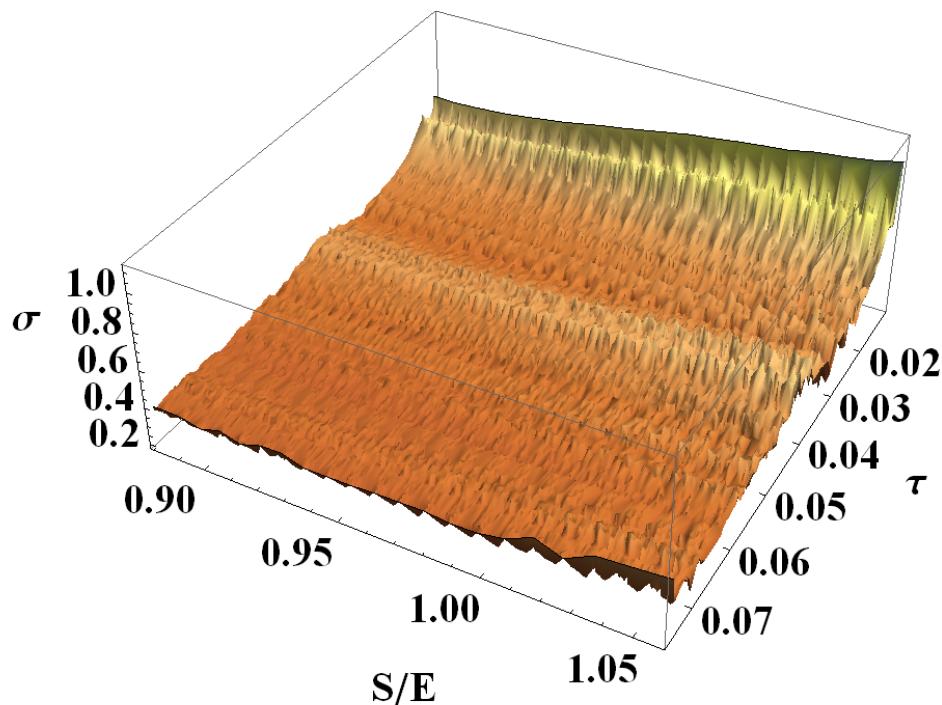
5.1.1 Implikovaná volatilita počítaná s Black-Scholesovými cenami opcíí

Ako sme uviedli v predošлом odseku, prvým parametrom, ktorý sme počítali pri postupnej kalibrácii modelu, bola implikovaná volatilita rátaná pomocou základného modelu (1.2.4) s Black-Scholesovými cenami opcíí. Funkcia implikovanej volatility pre Black-Scholesovu cenu opcie je vykreslená na obrázku (5.2).

Kvalitatívne vlastnosti funkcie implikovanej volatility

Z obrázku (5.2) sa zdá, že implikovaný parameter zostáva približne konštantný v závislosti od podielu S/E pre každú časovú hodnotu. Preto sme vykreslili obrázky (5.3), ktoré charakterizujú implikovanú volatilitu ako funkciu od podielu S/E na konci vybraných obchodovacích dní na burze.

Na prvých troch podgradoch obrázka (5.3) môžeme pozorovať jav "volatility smile", teda implikovaná volatilita nadobúda nižšie hodnoty pre tie



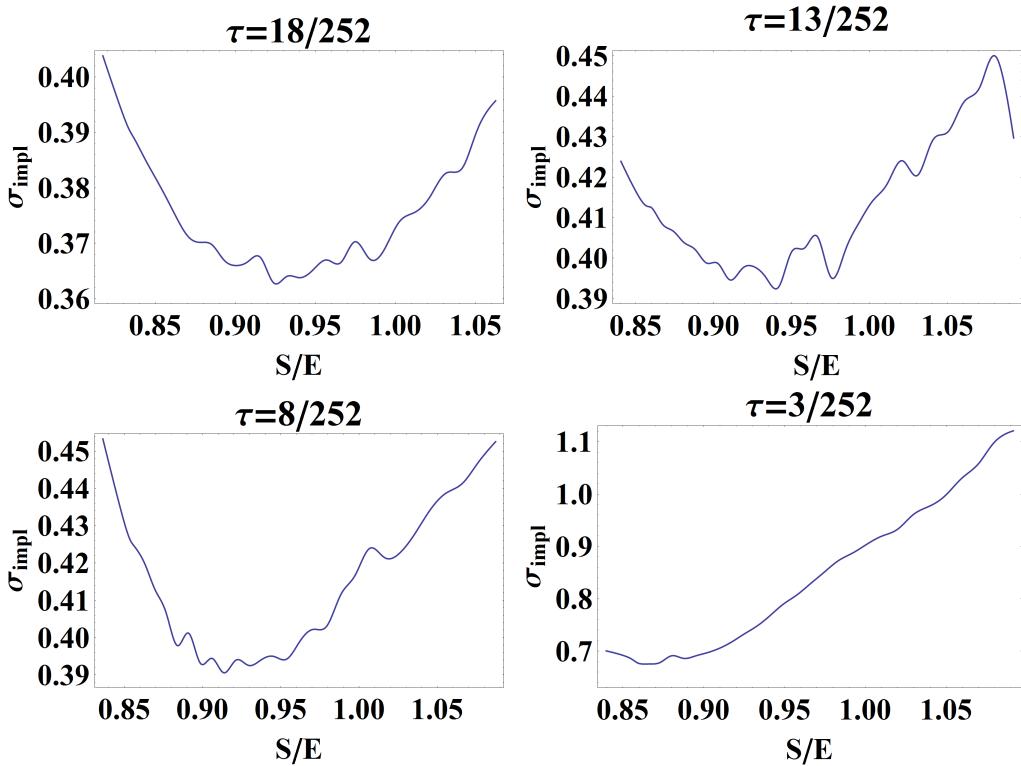
Obr. 5.2: Funkcia volatility (σ_{BS}) počítaná na základe Black-Scholesovho modelu počítaná pre strednú hodnotu bid a ask ceny, závislá na podiele S/E a čase τ .

expiračné ceny, ktoré sú bližšie k aktuálnej cene opcie, zatiaľ čo pre veľmi odlišné expiračné ceny je implikovaná volatilita vyššia. Na poslednom obrázku to nie je možné potvrdiť, tvar krivky má skôr rastúci charakter.

Na oboch obrázkoch (5.2) a (5.3) si však môžeme všimnúť mierne rastúci trend volatility vzhľadom na čas približujúci sa expiráciu. V poslednom týždni, keď $\tau < 0.02$, volatilita začína prudko rásť, čo môže byť dôsledkom toho, že opcie sú amerického typu.

5.1.2 Volatilita nelineárneho modelu

Do nelineárneho zasahuje na rozdiel od zjednodušeného modelu volatilita iným spôsobom.



Obr. 5.3: Funkcia volatility ako funkcia pomeru ceny akcie a expiračnej ceny v konkrétnom čase.

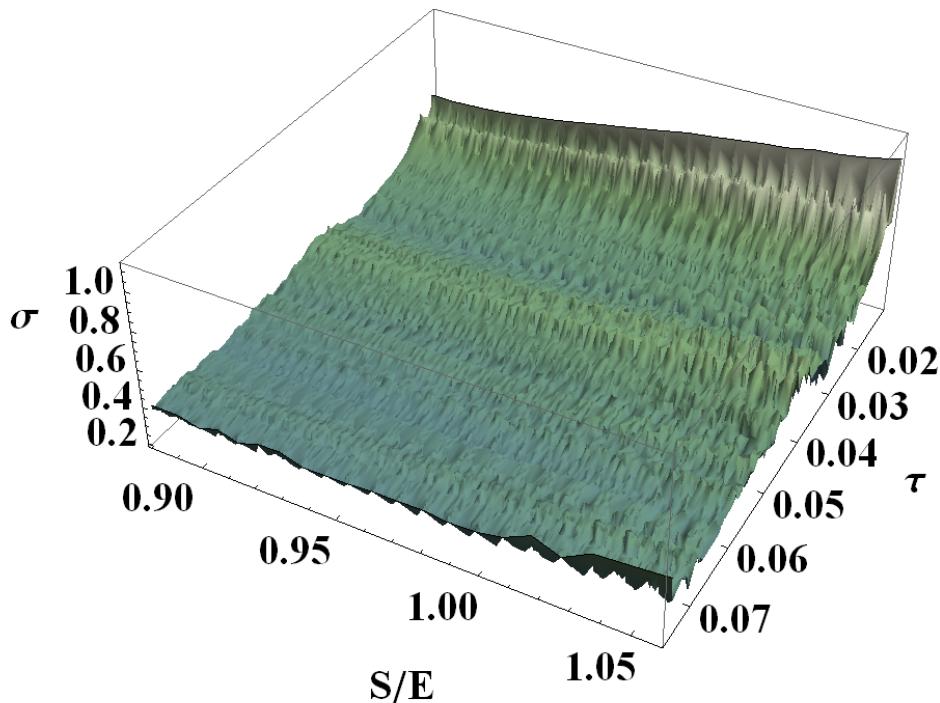
5.1.2.1 Volatilita počítaná pomocou nelineárneho modelu

Počas kalibrácie Frey-Stremmeho modelu sme počítali implikovanú volatilitu pomocou modelu (1.2.4) a potom kalibrovali parameter ρ na základe rozdielu ceny medzi ask cenou a bid-ask stredom. Na tento model sa môžme tiež pozerať ako na základný model (1.2.4), ktorý obsahuje nekonštatnú funkciu volatility. Túto volatilitu môžeme počítať rovnako ako pre základný tvar ako funkciu podielu S/E a ceny do expirácie τ . Volatilitu označíme ako Frey-Stremmeho volatilitu σ_{BS} a z (4.1.1) odvodíme:

$$\sigma_{FS}(S/E, \tau) = \frac{\hat{\sigma}}{|1 - \rho_{impl} S \partial_S^2 V|}, \quad (5.1.1)$$

Funkcia by mala rovnaký tvar ako implikovaná volatilita z predchádzajúceho odstavca (5.2), keby sme vo funkcií volatility (5.1.1) položili parameter

$\rho = 0$. Do modelu však vstupuje nezáporný implikovaný parameter ρ_{impl} . Kedžže vo výraze sa nachádzajú kladné činitele S a $\partial_S^2 V$, hodnota meno-
vateľa poklesne rastom ρ . Celková hodnota volatility preto vzrastie, takže
v každom bode je funkcia volatility pre kalibrovaný Frey-Stremmeho model
vyššia ako implikovaná na stred medzi bid a ask cenou.



Obr. 5.4: Funkcia volatility (σ_{FS}) počítaná kalibráciou na Frey-Stremmeho model.

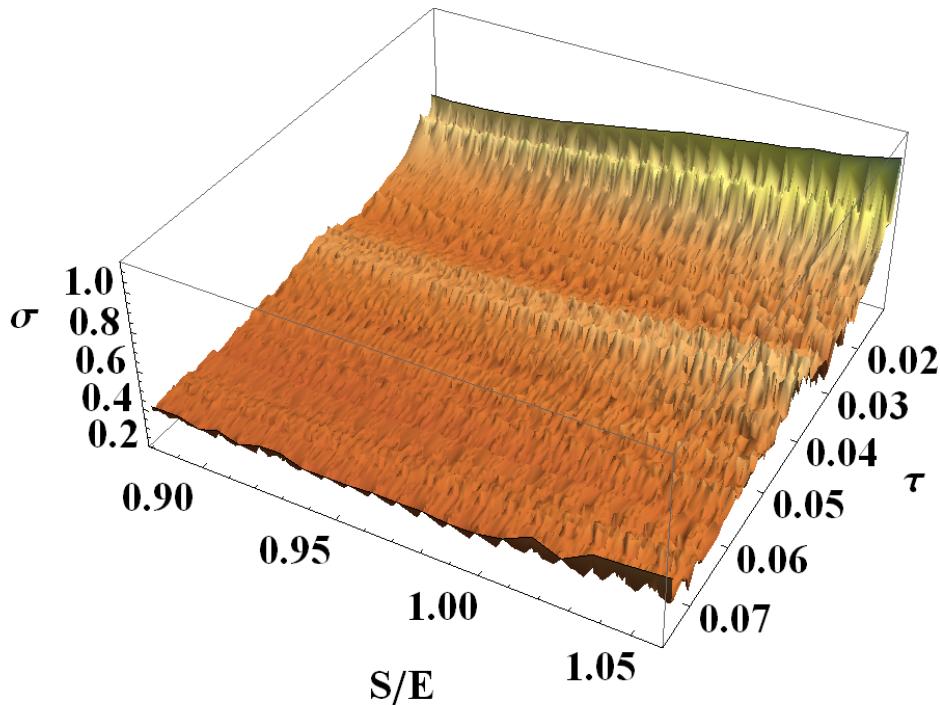
Na obrázku (5.4) je zobrazená Frey-Stremmeho volatilita pre nakalibrované dátá. Rozdiel medzi obrázkami (5.2) a (5.4) nie je viditeľný, takže rozdiely v hodnotách volatility sú rádovo oveľa menšie ako samotné hodnoty.

5.1.2.2 Implikovaná volatilita na ask cenu opcie

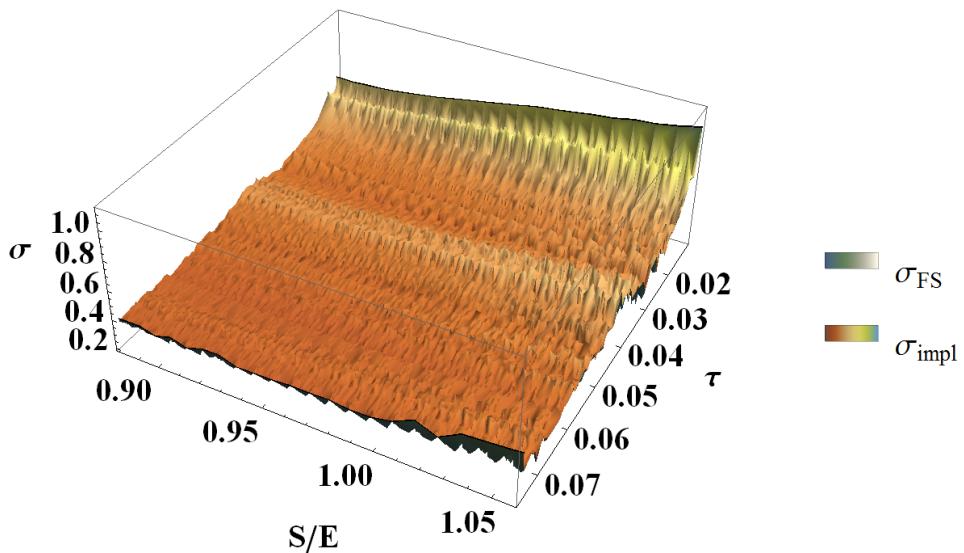
Frey-Stremmeho volatilitu σ_{FS} môžeme vnímať ako volatilitu, ktorú celkovo kalibrujeme na ask cenách opcie. Teda do nelineárnej PDR (2.2.23) vstupuje

práve tátu cena opcie. Iný spôsob počítania volatility na tieto údaje je možnosť vypočítať implikovanú volatilitu priamo na predajnú cenu opcie. Inými slovami v lineárnom modeli (1.2.4) počítame implikovanú volatilitu na ask cenu. Tieto odlišné spôsoby nedávajú rovnaký výsledok ale môžeme porovnať výsledky, ktoré dostaneme výpočtom.

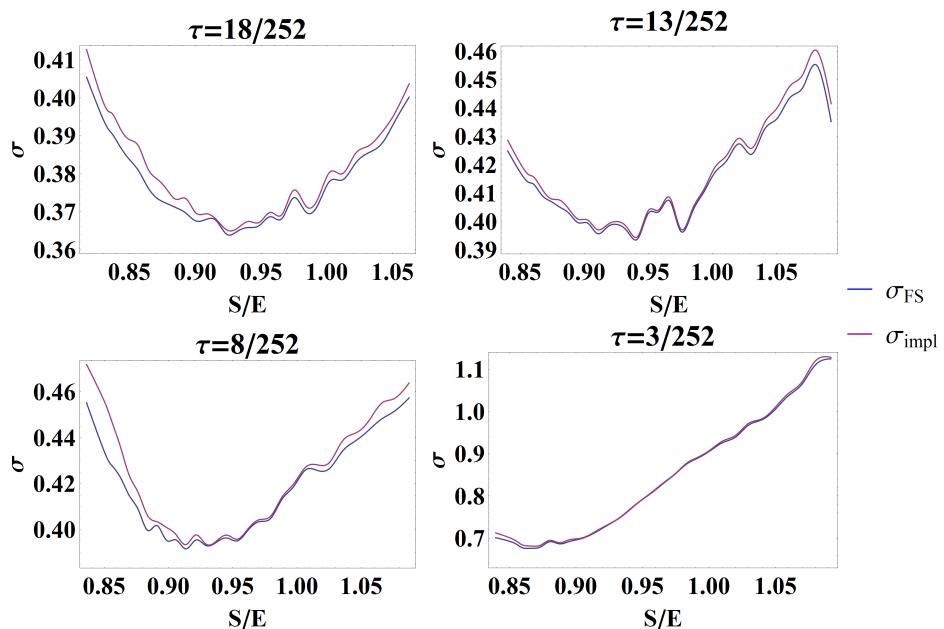
Z literatúry [20] a [21] vyplýva, že v lineárnom Black-Scholesovom modeli je cena opcie rastúcou funkciou volatility: $\frac{\partial V}{\partial \sigma} > 0$. Preto vieme zhodnotiť, že implikovaná volatilita počítaná na vyššiu cenu je vyššia ako keby bola počítaná na nižšiu cenu opcie. Preto aj v tomto prípade bude implikovaná volatilita na ask cenu vyššia ako implikovaná volatilita na bid-ask stred. Jej náčrt je na obrázku (5.5). Rovnako ako v predchádzajúcim prípade je rozdiel medzi volatilitami veľmi nízky.



Obr. 5.5: Implikovaná volatilita (σ_{impl}) počítaná na lineárnom modeli (1.2.4) s ask cenami opcie.



Obr. 5.6: Frey-Stremmeho volatilita (σ_{FS}) a implikovaná volatilita (σ_{impl}). V každom bode platí nerovnosť $\sigma_{impl} > \sigma_{FS}$, preto volatilitu σ_{FS} nevidno.

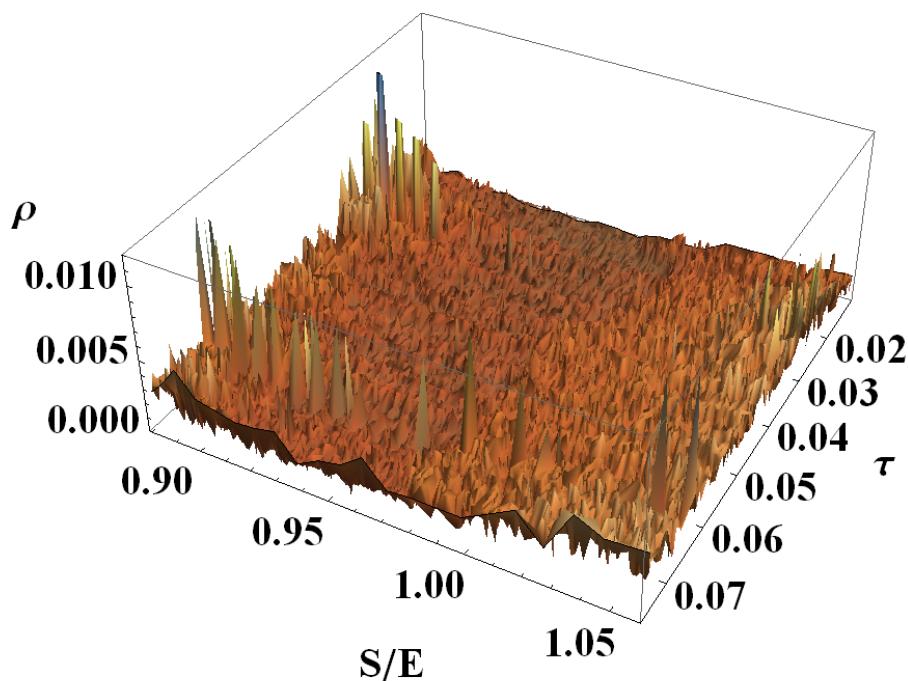


Obr. 5.7: Frey-Stremmeho volatilita (σ_{FS} , modrou) a implikovaná volatilita (σ_{impl} , fialovou) ako funkcia pomeru ceny akcie a expiračnej ceny v čase.

Frey-Stremmeho a implikovaná volatilita na ask cenu sa obe počítajú pomocou totožných hodnôt parametrov. Preto má zmysel ich porovnávať a zistit' ich vzájomný vztah. Na obrázkoch (5.6) sú zobrazené pre rôzne expiračné ceny a časy do expirácie a (5.7) vyčíslené pre tie isté časy ako (5.3).

Vidíme teda, že implikovaná volatilita na ask cenu nadobúda v porovnaní s Frey-Stremmeho volatilitou väčšie hodnoty. Z obrázka (5.3) však ešte vieme vydedukovať, že pre hodnoty akcie blízke expiračnej cene sa hodnoty oboch volatilít líšia menej ako pre vzdialenejšie hodnoty.

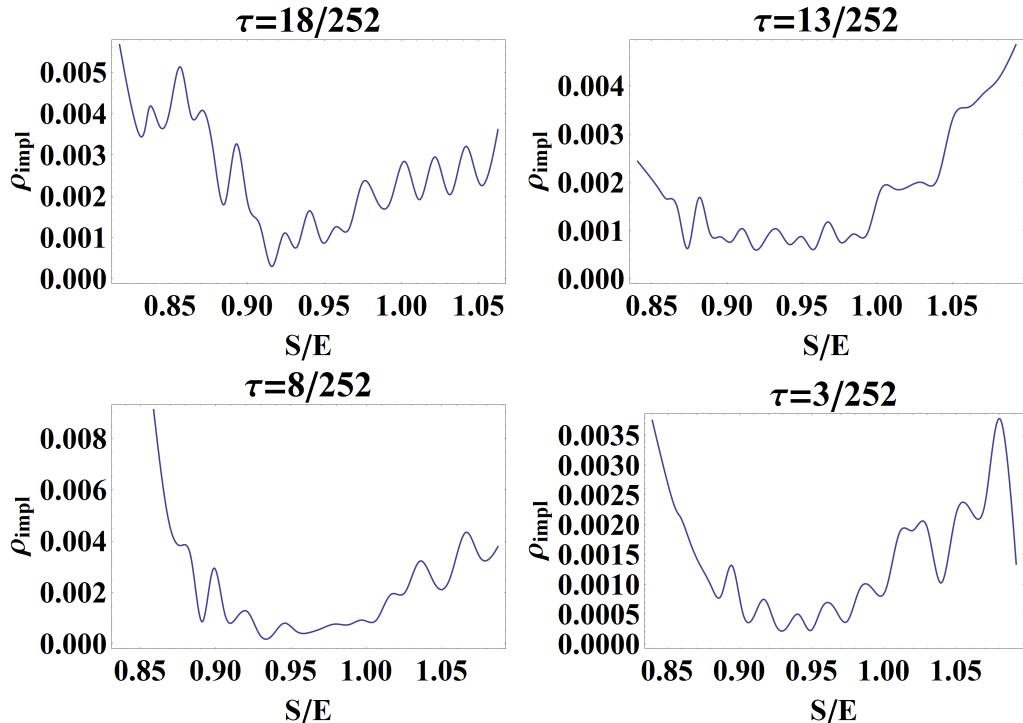
5.2 Skúmanie vývoja parametra ρ



Obr. 5.8: Implikovaný parameter ρ_{impl} pre Frey-Stremmeho model.

Druhý paramter, ktorý vo Frey-Stremmeho modeli kalibrujeme je ρ_{impl} . Ako už bolo uvedené parameter určuje mieru nelikvidity trhu. Predpokla-

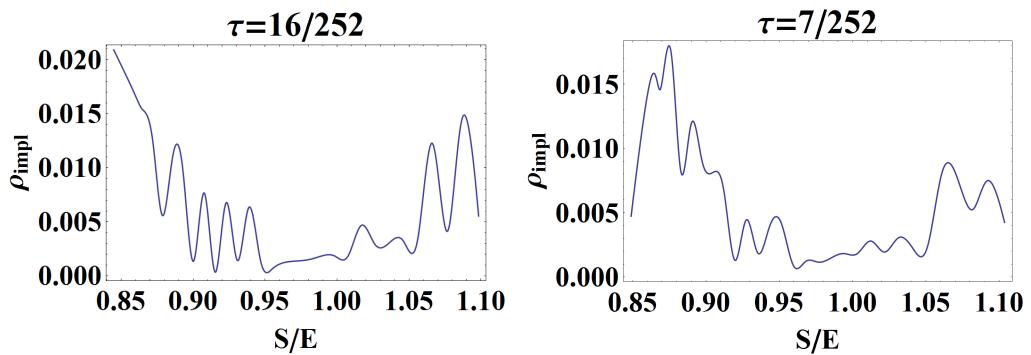
dáme, že hodnoty parametra budú veľmi nízke, aby pre kalibráciu Frey-Stremmeho modelu počítaná metóda malého parametra dávala dostatočne presné hodnoty. Aj mälo badateľný rozdiel medzi obrázkami (5.2) a (5.4) implikuje skutočnosť nízkych hodnôt ρ_{impl} .



Obr. 5.9: Implikovaný parameter ρ_{impl} ako funkcia S/E kalibrovaný na konci niektorých dní.

Kalibrovaný parameter ρ_{impl} je vykreslený na obrázkoch (5.8) a (5.9). Hodnoty parametra sú naozaj nízke, preto approximácia funkcie $\sigma(H, S, \tau)$ (4.1.2) aj s uvážením obrázka (5.12) nebola nevhodná.

Na grafe môžeme pozorovať zvýšené hodnoty parametra v časoch $\tau \approx 0.063$ a $\tau \approx 0.028$. Hodnoty parametra závislého od S/E sú v tomto čase zobrazené na (5.10). Vývoj cien akcií a opcíí (tabuľky 5.1 a 5.2) zaznamenal v týchto obdobiach vysoký vzrast, čo mohlo nepriamo zapríčiniť vzrast prametra v tomto obdobii.



Obr. 5.10: Implikovaný parameter ρ_{impl} v období prudkého vzrastu akcií a opcií.

Čas	Cena akcie	Expiračná cena E				
		103	108	113	118	123
07/01/2015 15:30	107.84	7	4	1.965	0.875	0.38
07/01/2015 16:00	107.75	6.925	3.95	1.925	0.85	0.385
08/01/2015 09:30	109.04	8	4.625	2.415	1.085	0.48
08/01/2015 10:00	110.06	8.25	4.975	2.565	1.15	0.485

Tabuľka 5.1: Vývoj cien akcie a opcií na konci 17-teho a začiatku 16-teho dňa pred expiráciou opcií ($\tau = 16/252$, kurzívou) pre vybrané expiračné ceny.

		Expiračná cena E				
Čas	Cena akcie	104	122	123	124	125
21/01/2015 15:30	109.96	7.125	0.24	0.63	0.19	0.145
21/01/2015 16:00	109.55	6.9	0.24	0.605	0.18	0.145
22/01/2015 09:30	110.37	7.4	0.265	0.71	0.21	0.166
22/01/2015 10:00	110.37	7.25	0.235	0.71	0.185	0.146

Tabuľka 5.2: Vývoj cien akcie a opcií na konci ôsmeho a začiatku siedmeho dňa pred expiráciou opcií ($\tau = 7/252$, kurzívou) pre vybrané expiračné ceny.

Interpretácia výsledkov kalibrácie ρ sa môže vztahovať na nelikviditu trhu v období vysokých hodnôt parametra. Parameter ρ môže byť interpretovaný na základe odvodenia (4.3.3) aj ako normovaný rozdiel medzi ask a bid-ask strednou cenou opcie pomocou člena $V_1(S, \tau)$. Na základe toho možno pozorovať, že v tabuľke (5.3), ktorá popisuje správanie sa ceny opcie s expiračnou cenou $E = 111$, sa rozpätie medzi bid a ask rýchlosťne zvýšilo na prelome sledovaných dní. Ponuková bola príliš vysoká vzhľadom k dopytovej cene, preto opcia nebola dostatočne likvidnou.

Čas	Cena akcie	Bid	Stred	Ask
07/01/2015 15:30	107.84	2.63	2.655	2.68
07/01/2015 16:00	107.75	2.58	2.6	2.62
08/01/2015 09:30	109.04	2.9	3.15	3.4
08/01/2015 10:00	110.06	3.25	3.3	3.35

Tabuľka 5.3: Vývoj cien akcie, bid a ask opcií na konci 17-teho a začiatku 16-teho dňa pred expiráciou opcií ($\tau = 16/252$, kurzívou) pre expiračnú cenu $E = 111$ (v čase $\tau = 16/252$: $S/E = 0.982$). Parameter mal hodnotu $\rho = 0.0093$.

5.3 Faktory citlivosti

Dôležitou charakteristikou v problematike oceňovania opcí je skúmanie citlivosti rôznych faktorov vplývajúcich na vytvorený model. Analyzovaním vplyvu týchto „Greeks“ faktorov zistíme lepšie závislosti medzi parametrami modela. Zameriame sa najmä na vplyv volatility na hodnotu opcie. Vieme, že volatilita, s ktorou sa obchoduje na trhu, je veľmi špecifický parameter, ktorý sa nedá jednoznačne zmerať a závisí vo veľkej miere od trhu a jeho investorov.

5.3.1 Parameter Vega Υ

Závislosť medzi cenou V a volatilitou σ vyjadruje faktor citlivosti *Vega*: $\Upsilon = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$. Podľa knihy [20] sa dá pre Black-Scholesov model vypočítať explicitný vzorec pre európsku call opciu:

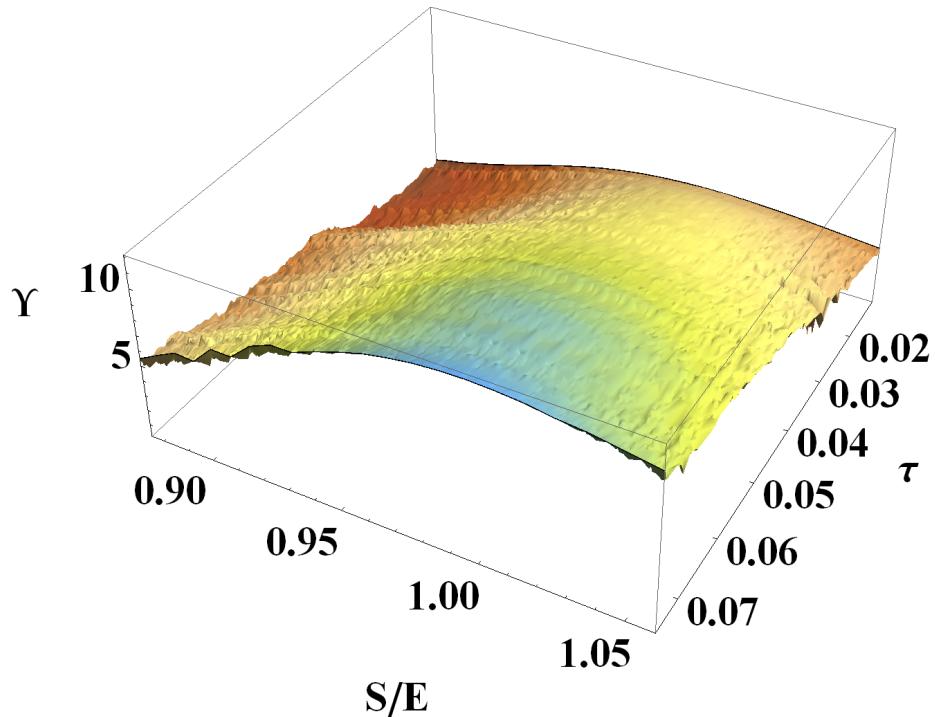
$$\Upsilon_{BS} = Ee^{-r\tau} N'(d_2) \sqrt{\tau}. \quad (5.3.1)$$

Problém nastáva, keď chceme parameter vypočítať explicitne pre Frey-Stremmho model. Cena opcie je zložená z dvoch zložiek asymptotického rozvoja, pričom prvý člen je definovaný pomocou explicitného vzorca. Z (2.2.24):

$$\Upsilon_{FS} = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = \frac{\partial(V_0 + \rho V_1)}{\partial \sigma} = \Upsilon_{BS} + \rho \frac{\partial V_1}{\partial \sigma}. \quad (5.3.2)$$

Riešenie V_1 z (3.2.20), do ktorého sú dosadené hodnoty (4.1.3), je však pri veľmi komplikované na to, aby sme vedeli jednoducho vypočítať parciálnu deriváciu podľa σ . Parciálnu deriváciu sme však počítali pomocou programu **Mathematica 9.0**.

Obrázok sa pokúsime interpretovať na jednoduchom príklade. Pre daný čas a expiračnú cenu budeme sledovať zmenu ceny za jednotku zmeny volatility, čo vlastne udáva Υ . Vybrali sme pre nás názorný príklad expiračnú cenu na začiatku sledovaného obdobia, pre ktorú $S/E \approx 0.97$. Cena opcie pre bid-ask stred bola 3.4\$, zatial' čo sa opcia ponúkala za ask 3.5\$, teda jej vzrast $V_{stred} \rightarrow 1.03V_{ask}$. Parameter sa dá pre tento čas a expiračnú cenu

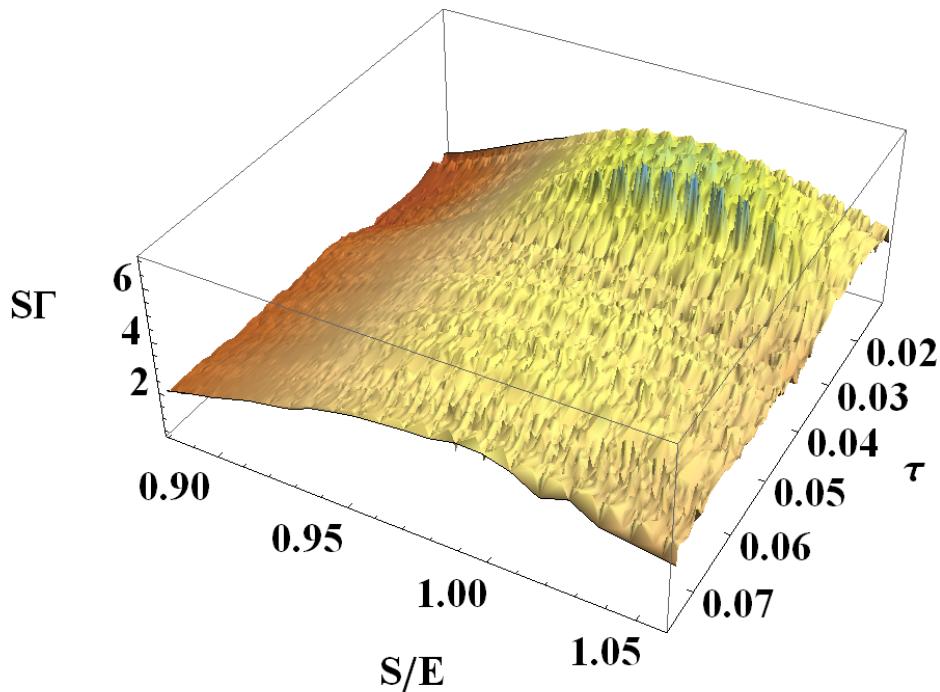


Obr. 5.11: Parameter Υ_{FS} závislosti ceny opcie od volatility σ pre Frey-Stremmeho model.

aproximovať $\Upsilon \approx 10$, čo sa dá interpretovať ako vyjadrenie, že ak hodnota volatility vzrástie o 1%, potom hodnota opcie vzrástie o 10%. Preto očakávaný vzrast volatility je desaťkrát nižší ako ceny opcie, teda v našom príklade to je $\sigma \rightarrow 1.003\sigma$.

Ked' naopak porovnáme vzrast volatility pre oba modely, pre ktoré sa dané ceny opcií počítajú, potom tento vzrast sa dá vyjadriť $\sigma \rightarrow \sigma(1 + \rho S\Gamma)$. Pokúsime sa odhadnúť na akej úrovni sa nachádza veličina $S\Gamma$.

Z obrázka (5.12) môžeme usúdiť, že $S\Gamma \approx 3$. Teda celkovo vzrast $\sigma \rightarrow \sigma(1 + 3\rho)$ má zodpovedať predpokladanému vzrastu $\sigma \rightarrow 1.003\sigma$. Preto budeťme očakávať, že parameter vplyvu dominantného investora bude rádovo na úrovni $\rho \approx 0.001$. Tento predpoklad sa zhoduje s kalibrovaním implikovaného parametra na obrázku (5.8).

Obr. 5.12: Bezrozmerná veličina $S\Gamma$.

5.3.2 Vega závisí od Zommy

Ak však chceme zistit' viac informácií o závislosti, ako sa vyvíja Υ explicitne od premenných v modeli, naprogramovaná derivácia nám žiaľ' nebude stačiť. Na druhej strane sa môžeme pokúsiť vypočítať deriváciu nepriamo pomocou vzorca.

Pôvodné zadanie (3.1.4) našej úlohy, kde nehomogénna zložka závisela od $\Gamma = \partial_S^2 V_0$, sme pretransformovali na transformovanú úlohu (3.2.8), ktorú sme počítali pomocou dvojného integrálu. Tento môžeme naspäť transformovať do pôvodných súradníc tak, že nám vznikne úloha:

$$V_1(S, \tau) = \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}} G(S, s, \tau, l; \sigma) F(\partial_S^2 V_0(s, l; \sigma), s, l; \sigma) ds dl, \quad (5.3.3)$$

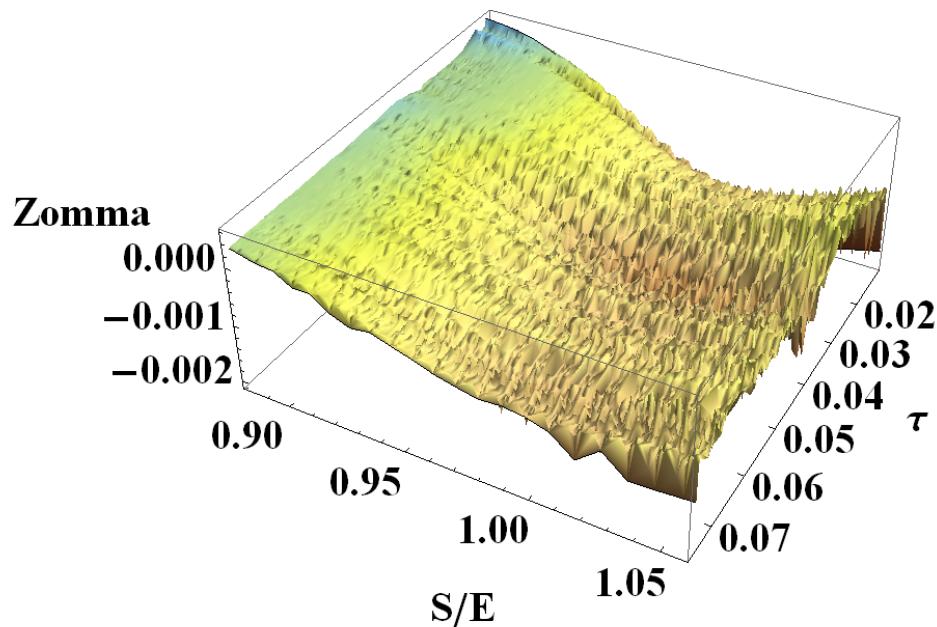
kde G je Greenovo tepelné jadro a funkcia F je nehomogénna pravá strana PDR, ktorá charakterizuje úlohu. Riešenie sa dá teraz parciálne diferencovať

podľa premennej σ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1(S, \tau; \sigma)}{\partial \sigma} = & \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}} G'_\sigma(S, s, \tau, l; \sigma) F(P, s, l; \sigma) + \\ & + G(S, s, \tau, l; \sigma) F'_\sigma(P, s, l; \sigma) + \\ & + G(S, s, \tau, l; \sigma) F'_P(P, s, l; \sigma) \frac{\partial^3 V_0}{\partial S^2 \partial \sigma} ds dl, \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

kde sme označili $P = \partial_S^2 V_0(s, l; \sigma)$ a pomocou horného indexu v podobe čiarky je naznačená parciálna derivácia.

Celkovo sme tým ukázali, že Vega Υ_{FS} priamo závisí od Greek tretieho rádu Zommy pôvodného Black-Scholesovho modelu $\frac{\partial^3 V_0}{\partial S^2 \partial \sigma}$. Tento faktor citlivosti sme tak tiež vykreslili na obrázku (5.13). Popisuje citlivosť zmeny parametra Γ na základe zmeny hodnoty volatility. Blížšie je parameter popísaný v dizertačnej práci [6].



Obr. 5.13: Greek tretieho rádu Zomma

5.3.3 Závislosť ostatných parametrov na "Greeks" vyššieho rádu

Podobne môžeme ukázať, že aj iné faktory citlivosti závisia od faktorov vyšších rádov. Podstatou zostáva, že riešenie v tvare integrálu konvolúcie môžeme derivovať podľa dotyčného parametra. Rád sa kvôli druhej parciálnej derivácií z (5.3.4) posunie o dva rády nasledovne:

- pre Deltu: $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ bude závisieť od $Speed(V_0) = \frac{\partial^3 V_0}{\partial S^3}$,
- pre Thetu: $\Theta = -\frac{\partial V}{\partial \tau}$ bude závisieť od $Color(V_0) = \frac{\partial^3 V_0}{\partial S^2 \partial \tau}$.

Rovnako ako to platilo pre parameter *Zomma*, aj tieto parametre udávajú postupne závislosť zmeny Γ od zmeny hodnôt ceny akcie S a času do expirácie τ .

5.4 Kalibrácia prostredníctvom historickej volatility

Druhý spôsob kalibrovania modelu (4.4) v porovnaní s predchádzajúcim prístupom vypočíta v prvom kroku historickú volatilitu namiesto implikovanej. Ostatné kroky kalibrácie ostávajú nezmenené.

Oceňovanie opcí pomocou výpočtu s historickou volatilitou nie je považované za veľmi presný prístup k problému. Volatilita často nemá ustálenú tendenciu, preto jej vývoj v čase môže byť rôznorodý. Napriek tomu môžeme urobiť kalibráciu pre porovnanie s predchádzajúcim modelom.

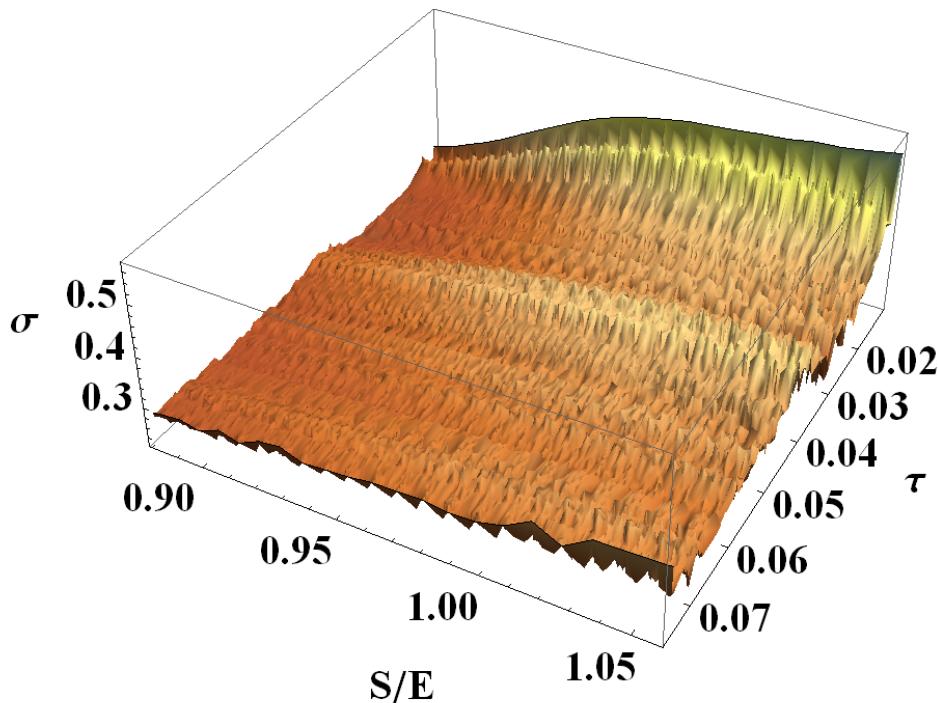
5.4.1 Parameter σ

Obdobie, za ktoré sme počítali historicú volatilitu na základe ceny akcie, sme stanovili na jeden mesiac. Ročná hodnota volatility potom vyšla $\sigma_{hist} = 0,237$. Tentokrát teda je parameter $\hat{\sigma} = \sigma_{hist}$ konštantný, preto budeme

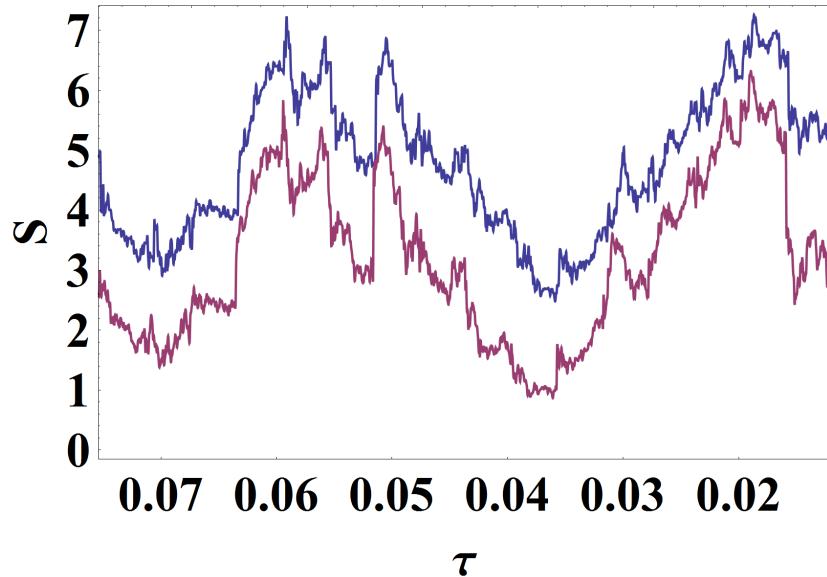
graficky zobrazovať volatilitu (5.1.1) na ilustráciu jej vývoja:

$$\sigma_{FS}(S/E, \tau) = \frac{\sigma_{hist}}{|1 - \rho_{impl} S \partial_S^2 V|}. \quad (5.4.1)$$

Jej vývoj znázorníme na obrázku (5.14). Vo vývoji σ_{FS} možno taktiež ako pre (5.4) pozorovať rastúcu tendenciu pri časoch približujúcich sa k expirácií. Tentokrát však dosahuje parameter o dost' nižsie hodnoty. Tento jav je spôsobený faktom, že hodnota σ_{hist} je nízka v porovnaní s hodnotami implikovanej volatility. Môžeme teda predpokladať, že hodnoty ρ budú značne vyššie ako v prípade prvej kalibrácie. Preto môžeme povedať, že kalibrácia pomocou historickej volatility nie je najsprávnejší prístup. To dokazuje pre naše trhové dáta aj obrázok (5.15). Skutočné ceny totiž dosahujú výrazne vyššie hodnoty ako hodnoty počítané pre historickú volatilitu.



Obr. 5.14: Funkcia volatility (σ_{FS}) počítaná kalibráciou prostredníctvom historickej volatility na Frey-Stremmeho model.



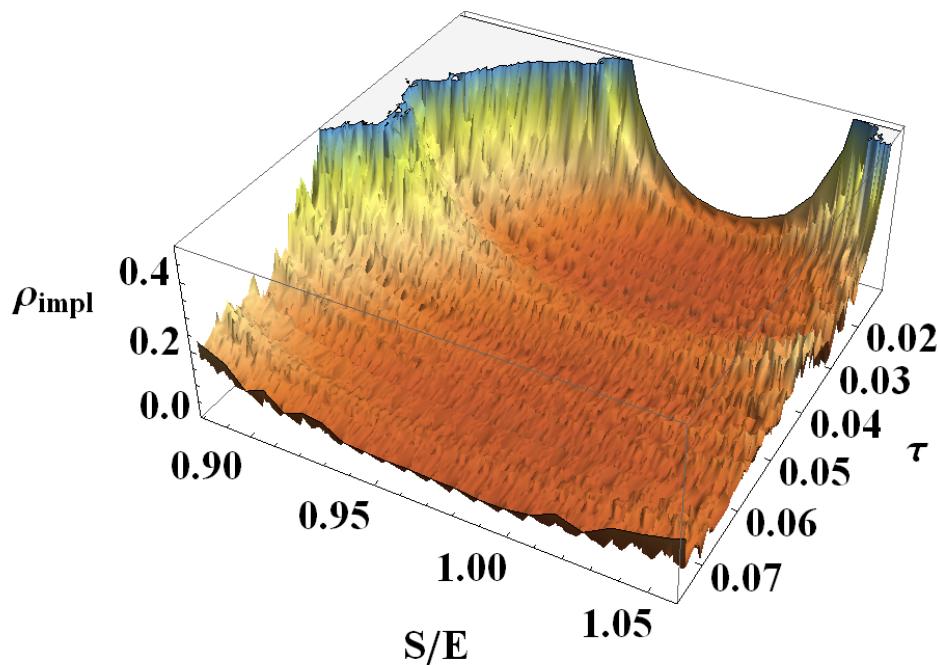
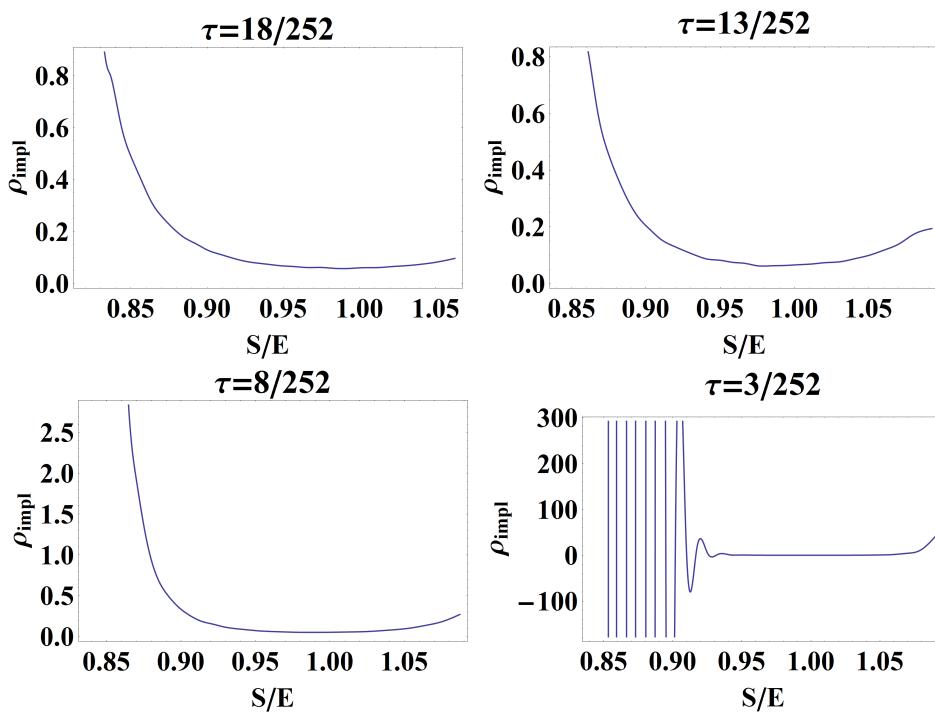
Obr. 5.15: Vývoj trhovej (modrá) a teoretickej ceny opcie (fialová) pre historickú volatilitu a pre expiračnú cenu $E = 108\$$.

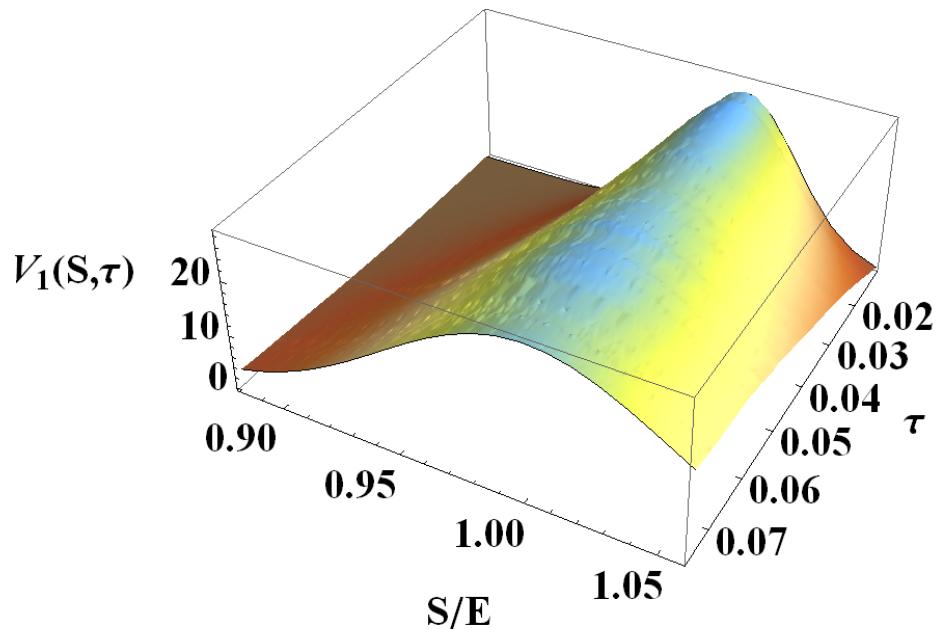
5.4.2 Parameter ρ

Tak ako pre postupnú kalibráciu parametrov počítame parameter ρ_{impl} na obr. (5.16) a (5.17).

Parameter podľa predpokladu dosahuje veľmi vysoké hodnoty. Obrázok (5.17) zobrazuje záporné hodnoty parametra. Implikovaná volatilita dosahovala nižšie hodnoty, preto v týchto prípadoch nemusel vyjsť kladný výsledok.

Na obrázku (5.16) nie sú zobrazené vysoké hodnoty pre čas blížiaci sa expirácií a $S/E \gg 1$ alebo $S/E \ll 1$. Dôvodom sú nízke hodnoty odvodenej funkcie $V_1(S, \tau)$ v týchto bodoch (5.18). Takisto si môžeme všimnúť tvar druhého člena funkcie, ktorý pripomína zvyčajný tvar parametra $\Gamma_0 = \partial_S^2 V_0$. Táto úvaha zodpovedá odseku (5.3.2), tentoraz však sa posúva rád parciálnej derivácie aj pre samotnú funkciu.

Obr. 5.16: Vývoj parametra ρ_{impl} s prístupom s historickou volatilitou.Obr. 5.17: Parameter ρ_{impl} na konci niektorých dní pre historickú volatilitu.



Obr. 5.18: Druhý člen rozvoja (3.1.2) s prístupom s historickou volatilitou.

Funkcia takisto závisí od faktora citlivosti pre Black-Scholesovu cenu opcie, v ktorom je parciálna derivácia znížená o dva stupne.

Záver

V práci sme sa venovali oceňovaniu opčných derivátov na základe riešenia nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc. Jej cieľom bolo analyzovať riešenia nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc, ktoré mali na rozdiel od lineárneho modelu nekonštantnú volatilitu závislú od niekoľkých premenných. Keďže explicitné riešenie pre všeobecný rámec nelineárnej Black-Scholesovej rovnice neexistuje, zvolili sme iný prístup. Hodnotu opcie sme počítali rozvinutím riešenia do asymptotického rozvoja. Cieľom bolo vypočítať prvé dva členy tohto rozvoja pre spoločný tvar funkcie volatility nelineárnych modelov. Situácia bola uľahčená faktom, že prvý člen zodpovedal riešeniu lineárnej Black-Scholesovej rovnice, preto predmetom záujmu sa stal druhý člen rozvoja. Na záver sme prezentovali získaný explicitný vzorec na základe kalibrácie parametrov $\hat{\sigma}$ a ρ Frey-Stremmeho modelu nelikvidného trhu.

V prvých dvoch kapitolách sme sa venovali teoretickej problematike práce. Súčasťou prvej časti je úvod do nelineárnych modelov a ich prehľad. V druhej časti sme sa venovali asymptotickej metóde malého parametra, ktorú sme prezentovali pomocou nami vytvorených, či prebratých príkladov z publikácie [14]. Tieto príklady sme uviedli v základnom tvare (2.2.3), z ktorého sme na záver kapitoly odvodili základnú úlohu pre hodnotu opcie. Prínosom práce v nasledujúcej časti bol úspešne odvodený explicitný vzorec (3.2.20) pre druhý člen asymptotického rozvoja hodnoty opcie na základe rovnakého tvaru funkcie volatility z rôznymi hodnotami špecifických parametrov. Úlohu sme riešili pre európsku call opciu, no ukázali sme, že pre európsku put opciu

má druhý člen rozvoja rovnaký tvar. Záverečné kapitoly sme venovali Frey-Stremmeho modelu, ktorý bral do úvahy možnosť nelikviditu na finančnom trhu, a jeho kalibráciu. V štvrtej kapitole sme popísali parametre, ktoré charakterizujú Frey-Stremmeho model na základe funkcie volatility (4.1.1) a jej approximácie. Na záver sme vysvetlili myšlienku myšlienka kalibrácie parametrov a uviedli možnosti prístupov ku kalibrácii. V poslednej kapitole sa nám podarilo získané výsledky kalibrovať na reálnych dátach trhu. Rovnako boli sme parametre $\hat{\sigma}$ a ρ znázornili graficky, pričom boli uvedené možné príčiny ich správania. Správnosť očakávaných výsledkov potvrdil aj príklad z odseku (5.3.1). Prezentovali sme aj citlivosť riešenia na volatilitu σ a ukázali sme, že tento faktor, no aj iné, priamo závisia od faktorov vyššieho rádu. V záverečnom odseku sme sa venovali kalibrácií prostredníctvom implikovanej volatility, no podľa predpokladov tento prístup neposkytuje vhodné výsledky.

Napriek prínosu práce v podobe explicitného tvaru riešenia pomocou dvoch členov rozvoja (3.1.2), nemusí dávať naše riešenie hodnoty s dostatočnou presnosťou. Chyba approximácie dvoch členov expanzie je pre Frey-Stremmeho model $o(\rho^2)$, čo pri zvýšených hodnotách parametra môže byť rádovo približne $o(10^{-2})$. Možnosťou, ako zlepšiť presnosť, je vypočítat' nasledujúci člen rozvoja. Avšak kvôli veľkému počtu vstupujúcich premenných už do nehomogénnej PDR pre druhý člen, môže úloha pre nasledujúci člen vo veľmi veľkej mieri zvyšovať náročnosť výpočtu.

V každej úlohe, pre ktorú je riešenie vypočítané iba približne, je dôležitým faktom, ako je approximované riešenie správne vzhlľadom na presné riešenie. Jednou z možností je porovnanie s numerickým prístupom k danej problematike. Tomuto porovnaniu sa venujeme v článku [9], ktorý nadväzuje na diplomovú prácu. Porovnáme v ňom approximované riešenie s numerickými metódami založenými na Newtonovej metóde.

Literatúra

- [1] Avellaneda, M., Levy, A., Parás, A.: *Pricing and Hedging Derivative Securities in Markets with Uncertain Volatilities*, Applied Mathematical Science, 1994, 165-193
- [2] Avellaneda, M., Parás, A.: *Dynamic Hedging Portfolios for Derivative Securities in the Presence of Large Transaction Costs*, Applied Mathematical Science, 1994, 165-193
- [3] Barles, G., Soner, H. M.: *Option Pricing with Transaction Costs and a Nonlinear Black-Scholes Equation*, Finance Stochast. 2, 1998, 369–397
- [4] ——— *Biblia*, kniha Genezis
- [5] Black, F., Scholes, M.: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, The Journal of Political Economy 81, 1973, 637-654
- [6] Bokes, T.: *Probabilistic and Analytic Methods for Pricing American Style of Asian Options*, dizertačná práca, FMFI UK, Bratislava, 2011, dostupné na internete (29.3.2015): <http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/phd/bokes/Bokes-PhD-thesis.pdf>
- [7] Bordag, L. A., Frey, R.: *Pricing Options in Illiquid Markets: symmetry reductions and exact solutions*, Nonlinear Models in Mathematical Finance: Research Trends in Option Pricing, NOVA SCIENCE PUBLISHERS, 2009, 103-130
- [8] Bordag, L. A., Chmakova, A. Z.: *Explicit Solutions for a Nonlinear Model of Financial Derivatives*, International Journal of Theoretical and Applied Finance vol.10, 2007, 1-21
- [9] Ďuriš, K., Lai Choi-Hong, Ševčovič D., Tan Shih-Hau: *Comparison of two numerical schemes for solving a class of Black-Scholes equation with nonlinear*

volatility, Working paper

- [10] Frey, R.: *Market Illiquidity as a Source of Model Risk in Dynamic Hedging*, Risk Publications, London, 2000, 125-136
- [11] Frey, R., Patie, P.: *Risk Management for Derivatives in Illiquid Markets: A Simulation-Study*, Advances in Finance and Stochastics, Springer, 2002, 137-159
- [12] Frey, R., Stremme, A.: *Market Volatility and Feedback Effects from Dynamic Hedging*, Mathematical Finance vol. 7, 1997, 351-374
- [13] Holmes, M. H.: *Introduction to the Foundations of Applied Mathematics*, Texts in Applied Mathematics vol. 56, Springer, 2009
- [14] Holmes, M. H.: *Introduction to Perturbation Methods*, Texts in Applied Mathematics vol. 20, Springer, 2013
- [15] Jandačka, M., Ševčovič, D.: *On the Risk-Adjusted Pricing-Methodology-Based Valuation of Vanilla Options and Explanation of the Volatility Smile*, Journal of Applied Mathematics 3, 2005, 235-258
- [16] Leland, H. E.: *Option Pricing and Replication with Transaction Costs*, The Journal of Finance 40, 1985, 1283-1301
- [17] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z Finančnej Matematiky*, EPOS, Bratislava, 2005
- [18] Poitras, G.: *The Early History of Option Contracts*, Simon Fraser University, Vancouver, 2008
- [19] Sircar, K. R., Papanicolaou G.: *General Black-Scholes Models Accounting For Increased Market Volatility From Hedging Strategies*, Applied Mathematical Finance 5, 1998, 45-82
- [20] Ševčovič, D., Stehlíková, B., Mikula, K.: *Analytical and Numerical Methods for Pricing Financial Derivatives*, Nova Science Publishers, New York, 2011
- [21] Ševčovič, D., Stehlíková, B., Mikula, K.: *Analytické a Numerické Metódy Oceňovania Finančných Derivátov*, Nakladatel'stvo STU, Bratislava, 2009