

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



VYUŽITIE KOPULA FUNKCIÍ PRI MODELOVANÍ
VÝVOJA VÝNOSOV ČESKÉHO AKTÍVA PRE
SLOVENSKÉHO INVESTORA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

VYUŽITIE KOPULA FUNKCIÍ PRI MODELOVANÍ
VÝVOJA VÝNOSOV ČESKÉHO AKTÍVA PRE
SLOVENSKÉHO INVESTORA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr. Andrea Stupňanová, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

- Meno a priezvisko študenta:** Bc. Lukáš Kurinec
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický
- Názov:** Využitie kopula funkcií pri modelovaní vývoja výnosov českého aktíva pre slovenského investora
Utilization of copula functions by modelling of returns development of Czech's assets for Slovak investor.
- Cieľ:** Ak investuje slovenský investor do českého aktíva, je nutné pri modelovaní vývoja výnosov tohoto aktíva zohľadniť aj výnosy českej koruny. Týmto vzniká potreba modelovať vývoj dvoch rizikových faktorov, ktoré sú medzi sebou do určitej miery závislé. V prípade modelovania bez zohľadnenia tejto závislosti medzi jednotlivými rizikovými faktormi môže dôjsť k nadhodnoteniu (v prípade zápornej závislosti) alebo podhodnoteniu rizika (v prípade kladnej závislosti). Z tohoto dôvodu je potrebné túto závislosť v modele uvažovať. Cieľom práce je určiť pravdepodobnostné rozdelenia jednotlivých rizikových faktorov (marginálne rozdelenia) a popísať ich závislosť pomocou kopula funkcií.
- Vedúci:** Mgr. Andrea Stupňanová, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 29.01.2014
Dátum schválenia: 10.02.2014 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie Chcem sa poďakovať svojej vedúcej diplomovej práce Mgr. Andrei Stupňanovej, PhD., za ochotu, pomoc, cenné rady a konzultácie, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďalej by som sa veľmi rád poďakoval prof. RNDr. Magdaléne Komorníkovej, PhD. a Ing. Tomášovi Bacigálovi, PhD. za odbornú pomoc v aplikačnej časti. Osobitné poďakovanie patrí mojej rodine, priateľke Tinke a kamarátom za ich trpezlivosť, podporu a pochopenie.

Abstrakt v štátnom jazyku

KURINEC, Lukáš: Využitie kopula funkcií pri modelovaní vývoja výnosov českého aktíva pre slovenského investora [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Andrea Stupňanová, PhD., Bratislava, 2015, 63 s.

V predloženej práci sme sa zaoberali aplikáciou teórie kopúl, ktorá bola použitá na modelovanie vývoja výnosov českého aktíva pre slovenského investora. Naším cieľom bolo nájsť vhodné kopule zachytávajúce vzájomnú závislosť indexu pražskej burzy a menového kurzu. Aplikovaním eliptických a Archimedovských kopúl sme došli k záveru, že eliptické kopule sú pre dané dáta vhodnejšie. Ako bonus sme pripravili tri štúdie, počas ktorých sme pozorovali zmeny spôsobené zanedbaním nutnosti použitia GARCH modelov pri filtrácii alebo rozdelením dát na rôzne časové obdobia. Dáta sme rozdeľovali na časti, kvôli otvorenej otázke, či náhla zmena v indexe alebo menovom kurze môže viesť k ovplyvneniu závislosti dát a tým pádom aj voľby kopule.

Kľúčové slová: Archimedovská kopula, Eliptická kopula, Sklarova veta, ARMA-GARCH modely, závislosť

Abstract

KURINEC, Lukáš: Utilization of copula functions by modelling of returns development of Czech's assets for Slovak investor. [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Andrea Stupňanová, PhD., Bratislava, 2015, 63 p.

In the work presented we focused on application of the copula theory, which was used for modelling of returns development of Czech's assets for Slovak investor. Our objective was to find convenient copulas capturing the interdependence between Index of Prague stock exchange and exchange rate. By applying elliptical and Archimedean copulas we came to conclusion that elliptical copulas are for given data more convenient. Furthermore we carried out three studies in which we were observing changes caused by neglecting the necessity of using GARCH models for filtration or by dividing data into different periods of time. We divided data into two partitions because of unanswered question, whether sudden change in index or exchange rate could lead to affection of dependence of data and therefore also to affection of choice of copula.

Keywords: Archimedean copula, elliptical copula, Sklar's Theorem, ARMA-GARCH models, dependence

Obsah

Úvod	8
1 Úvod do kopúl	9
1.1 Základné pojmy	9
2 Kopule	13
2.1 Kopule - teoretická rovina	13
2.2 Kopule - Sklarova veta	16
2.3 Kopule a náhodné premenné	22
2.4 Archimedovské kopule	25
2.5 Eliptické kopule	28
3 Jednparametrické triedy kopúl - vlastnosti	29
4 Modelovanie vývoja indexu PX	32
4.1 ARMA modely	32
4.2 ARCH/GARCH modely	37
4.3 Marginálne rozdelenia	39
4.4 Fitovanie kopúl	41
5 Modelovanie - špeciálne prípady	43
5.1 Pomocou ARMA modelov	43
5.2 Rozdelenie podľa indexu	45
5.3 Rozdelenie podľa kurzu	54
Záver	62
Zoznam použitej literatúry	63

Úvod

V tejto práci sa zameriame na využitie kopúl pri modelovaní vývoja výnosov českého aktíva pre slovenského investora. Práca je inšpirovaná článkom [3]. Pri takomto modelovaní je potrebné zohľadniť vývoj dvoch rizikových faktorov, medzi ktorými môže byť určitá závislosť. Ak by sme túto závislosť nebrali do úvahy, mohli by vzniknúť problémy s podhodnotením alebo nadhodnotením rizika.

Elegantným riešením modelovania závislosti je použitie kopúl. Kopule sú funkcie, ktoré prepájajú jednorozmerné marginálne rozdelenia náhodných premenných s ich združeným rozdelením, teda modelujú výhradne ich vzájomný vzťah. V praxi sa kopule využívajú pri rôznych finančných aplikáciach, ako napríklad odhad value-at-risk alebo oceňovanie kreditných derivátov.

Na začiatku práce si pripomenieme základné pojmy z pravdepodobnosti a štatistiky. V druhej časti sa budeme venovať kopuliam v teoretickej rovine, uvedieme si triedy kopúl a ich vlastnosti. Podrobne sa budeme zaoberať triedou Archimedovských kopúl, z ktorých spomenieme Gumbelovu, Frankovu, Claytonovu a Ali-Mikhael-Haq kopulu. Následne sa prepracujeme k praktickej časti. Ako aktívum si zvolíme index pražskej burzy PX v časovom období od roku 2010 do roku 2015. Po filtrovaní dát ARMA-GARCH modelmi, o ktorých sa podrobnejšie môžeme dočítať v [5], získame párové dáta vhodné na spracovanie pomocou kopúl.

Okrem fitovania jednotlivých kopúl na prefiltrované dáta ARMA-GARCH modelmi počas celého obdobia, rozanalyzujeme si tri zaujímavé štúdie. Prvou z nich je pozorovanie zmeny výstupov v prípade nepoužitia GARCH modelov, ktorých použitie môže ovplyvňovať mieru závislosti. V druhej štúdii rozdelíme dáta na dve časové obdobia, z dôvodu jednorazového výrazného poklesu hodnôt indexu PX a porovnáme s pôvodnou štúdiou. V poslednej časti si opäť rozdelíme dáta na dve časové obdobia, tentoraz podľa výraznej zmeny v menovom kurze. Na záver výsledky porovnáme a analyzujeme.

1 Úvod do kopúl

Na začiatku tejto kapitoly si uvedieme základné pojmy, ktoré budeme neskôr využívať pri kopuliach. Pôjde o pojmy ako z pravdepodobnosti, tak aj z matematickej analýzy. Celá kapitola je spracovaná na základe [4].

1.1 Základné pojmy

Predpokladajme dvojicu náhodných premenných X a Y s distribučnými funkciami $F(x) = P[X \leq x]$ a $G(y) = P[Y \leq y]$ a združenou distribučnou funkciou $H(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$. Ku každej dvojici reálnych čísel (x, y) vieme priradiť trojicu $(F(x), G(y), H(x, y))$. Treba si uvedomiť, že každé hodnoty z nich ležia v intervale $[0, 1]$. Ak to celé zhrnieme, tak ku každej dvojici reálnych čísel (x, y) priradíme $(F(x), G(y))$, ktoré leži v jednotkovom štvorci $[0, 1] \times [0, 1]$.

Teraz si zdefinujeme základné pojmy. Označenie \mathbb{R} bude značiť reálnu os $(-\infty, \infty)$ a $\bar{\mathbb{R}}$ bude označovať rozšírenú reálnu os $[-\infty, \infty]$. Ďalej $\bar{\mathbb{R}}^2$ bude označovať rozšírenú rovinu reálnych čísel $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$. Obdĺžnik v $\bar{\mathbb{R}}^2$ definujeme ako *kartézsky súčin* B dvoch uzavretých intervalov: $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Vrcholy obdĺžnika sú body (x_1, y_1) , (x_1, y_2) , (x_2, y_1) a (x_2, y_2) . Jednotkový štvorec \mathbf{I}^2 je súčinom $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$, kde $\mathbf{I} = [0, 1]$. Takzvaná *binárna reálna funkcia* H je funkcia, ktorej definičný obor $\mathcal{D}(H)$ je podmnožina $\bar{\mathbb{R}}^2$ a obor hodnôt $\mathcal{H}(H)$ je podmnožina \mathbb{R} .

Definícia 1.1.1.

Nech S_1 a S_2 sú neprázdne podmnožiny $\bar{\mathbb{R}}$ a nech H je binárna reálna funkcia, ktorej obor hodnôt je $\mathcal{H}(H) = S_1 \times S_2$. Nech $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ je množina všetkých možných vrcholov, ktoré sú z $\mathcal{H}(H)$. Potom *H-objem* B je daný ako

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1). \quad (1)$$

Ak zdefinujeme rád prvých diferencií z H na obdĺžniku B ako

$$\Delta_{x_1}^{x_2} H(x, y) = H(x_2, y) - H(x_1, y) \quad \Delta_{y_1}^{y_2} H(x, y) = H(x, y_2) - H(x, y_1),$$

tak potom H-objem z B vieme napísať ako rád druhých diferencií z H na B , a to

$$V_H(B) = \Delta_{y_1}^{y_2} \Delta_{x_1}^{x_2} H(x, y).$$

Definícia 1.1.2.

Hovoríme, že binárna reálna funkcia H je *2-rastúca*, ak $V_H(B) \geq 0$ pre všetky obdĺžniky B , ktorých vrcholy ležia v $\mathcal{D}(H)$.

Ak je H 2-rastúca, tak budeme H-objem B označovať ako *H-mieru* B. Treba si uvedomiť, že *2-rastúca* neznamená a ani neimplikuje, že H je neklesajúca v každej premennej. Znázorníme si to na príklade.

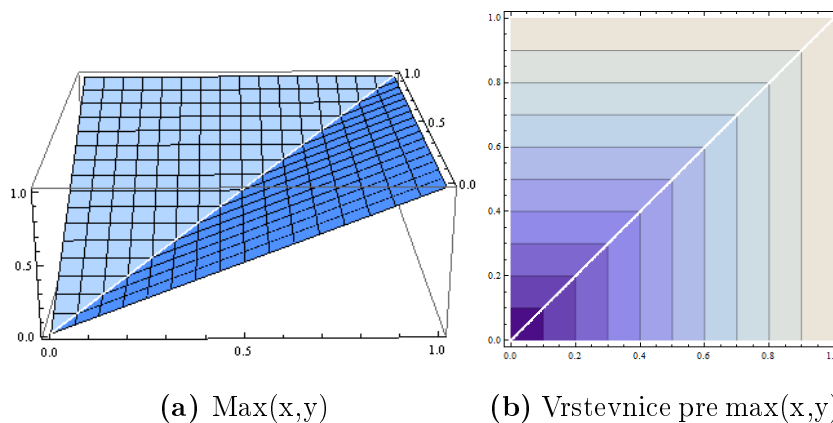
Príklad 1.1.1.

Nech $H(x, y) = \max(x, y)$ je definovaná na \mathbf{I}^2 . Aj keď je H neklesajúca v x aj y , tak je H nie je 2-rastúca, pretože napríklad

$$V_H(\mathbf{I}^2) = \max(1, 1) - \max(1, 0) - \max(0, 1) + \max(0, 0) = -1,$$

a teda $V_H(\mathbf{I}^2) \leq 0$. Čiže H nie je 2-rastúca.

Nasledujúca lema bude užitočná pri zavedení spojitosti kopúl a subkopúl.



Obr. 1: Príklad 1.1.1.

Lema 1.1.1.

Nech S_1 a S_2 sú neprázdne podmnožiny $\bar{\mathbb{R}}$ a nech H je 2-rastúca funkcia s definičným oborom $S_1 \times S_2$. Nech x_1, x_2 sú z S_1 také, že $x_1 \leq x_2$ a nech y_1, y_2 sú z S_2 s podmienkou $y_1 \leq y_2$. Potom funkcia $t \mapsto H(t, y_2) - H(t, y_1)$ je neklesajúca na S_1 a funkcia

$t \mapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$ je neklesajúca na S_2 .

Definícia 1.1.3.

Predpokladajme, že S_1 má najmenší prvok a_1 a S_2 má najmenší prvok a_2 . Hovoríme, že funkcia $H : S_1 \times S_2 \mapsto \mathbb{R}$ je *ukotvená* ak $H(x, a_2) = 0 = H(x, a_1) \quad \forall (x, y) \in S_1 \times S_2$.

Lema 1.1.2.

Nech S_1 a S_2 sú neprázdne podmnožiny v $\bar{\mathbb{R}}$ a nech H je ukotvená 2-rastúca funkcia s $\mathcal{D}(H) = S_1 \times S_2$. Potom H je neklesajúca v každej premennej.

Dôkaz:

Označme a_1, a_2 ako najmenšie prvky v S_1, S_2 . Teraz označme $x_1 = a_1$ a $y_1 = a_2$ v Leme 1.1.1. a teda dostávame požadovaný výsledok. ■

Definícia 1.1.4.

Predpokladajme, že S_1 má najväčší prvok b_1 a S_2 má najväčší prvok b_2 . Potom funkcia $H : S_1 \times S_2 \mapsto \mathbb{R}$ má marginálne distribučné funkcie F, G , ktoré sú funkcie dané ako :

$$\mathcal{H}(F) = S_1 \text{ a } F(x) = H(x, b_2) \quad \forall x \in S_1;$$

$$\mathcal{H}(G) = S_2 \text{ a } F(x) = H(b_1, y) \quad \forall y \in S_2.$$

Ukážeme si to na príklade.

Príklad 1.1.2.

Nech H je funkcia definovaná na $[-1, 1] \times [0, \infty]$ ako

$$H(x, y) = \frac{(x+1)(e^y - 1)}{x + 2e^y - 1}.$$

Vidíme, že H je ukotvená, pretože $H(x, 0) = \frac{(x+1)(0)}{x+1} = 0$ a $H(1, y) = \frac{(0)(e^y-1)}{2e^y-2} = 0$.

Marginálne distribučné funkcie pre H sú F, G , ktoré vypočítame :

$$F(x) = H(x, \infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(e^y - 1)}{x + 2e^y - 1} \stackrel{LHospital}{=} \frac{(x+1)e^y}{2e^y} = \frac{x+1}{2};$$

$$G(y) = H(1, y) = \frac{2(e^y - 1)}{2e^y} = 1 - e^{-y}.$$

Túto kapitolu ukončíme s poznámkou, ktorá sa bude týkať ukotvených 2-rastúcich funkcií s marginálnymi distribučnými funkciami.

Poznámka 1.1.1.

Nech S_1, S_2 sú neprázdne podmnožiny v $\bar{\mathbb{R}}$ a nech H je ukotvená 2-rastúca funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami, ktorých definičný obor je $S_1 \times S_2$. Nech (x_1, y_1) a (x_2, y_2) patria $S_1 \times S_2$. Potom

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

2 Kopule

V tejto kapitole si zadefinujeme kopule. Preberieme dôležité vety, lemy a príklady, ktoré nám neskôr pomôžu pri konštrukcii kopúl. Celá kapitola je spracovaná na základe [4].

2.1 Kopule - teoretická rovina

Ako prvé si musíme zadefinovať subkopuly.

Definícia 2.1.1.

Dvojdimenziálna subkopula, alebo skrátene len *subkopula*, je funkcia C' s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. $\mathcal{D}(C') = S_1 \times S_2$, kde S_1 sú podmnožiny \mathbf{I} obsahujúce 0 a 1.

2. C' je ukotvená a 2-rastúca

3. $\forall u \in S_1, \forall v \in S_2$ platí:

$$C'(u, 1) = u \quad a \quad C'(1, v) = v. \quad (2)$$

Treba si uvedomiť, že pre všetky (u, v) z $\mathcal{D}(C')$ platí: $0 \leq C'(u, v) \leq 1$ a teda je aj $\mathcal{H}(C')$ podmnožina \mathbf{I} .

Nasledujúca definícia tvorí jeden zo základov pre teóriu kopúl.

Definícia 2.1.2.

Dvojdimenziálnou kopulou, skrátene *kopulou*, voláme subkopulu C , ktorej $\mathcal{D}(C)$ je \mathbf{I} .

Podobne ako subkopula, aj kopula má špeciálne vlastnosti, a to nasledovné:

1. Pre všetky u, v z \mathbf{I} platí

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v) \quad (3)$$

$$C(u, 1) = u \quad a \quad C(1, v) = v; \quad (4)$$

2. Pre všetky u_1, u_2, v_1, v_2 z \mathbf{I} také, že $u_1 \leq u_2$ a $v_1 \leq v_2$ platí

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \quad (5)$$

Poznámka 2.1.1.

Nech C' je subkopula. Potom pre každé (u, v) z $\mathcal{D}(C')$ platí:

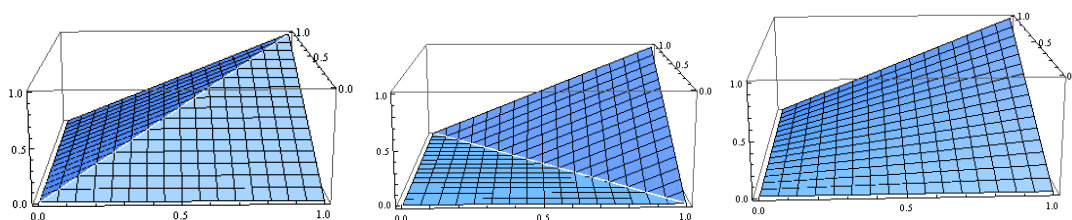
$$\max(u + v - 1, 0) \leq C'(u, v) \leq \min(u, v). \quad (6)$$

Keďže každá kopula je subkopula, poznámka 2.1.1. platí aj pre kopule.

Ľahko sa dá overiť, že obe strany sú kopule. Označíme ich ako $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ a $M(u, v) = \min(u, v)$. Potom pre každú kopulu C a každé (u, v) v \mathbf{I}^2 platí:

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v). \quad (7)$$

Nerovnosť (7) je kopula verzia *Fréchet-Hoeffding bounds* nerovnice, ktorú budeme neskôr využívať. M budeme volať hornou Fréchet-Hoeffding hranicou a W dolnou Fréchet-Hoeffding hranicou. Treťou dôležitou kopulou, ktorú budeme potrebovať je *súčinová* kopula $\Pi(u, v) = uv$.



Obr. 2: Grafy kopúl M, Π, W

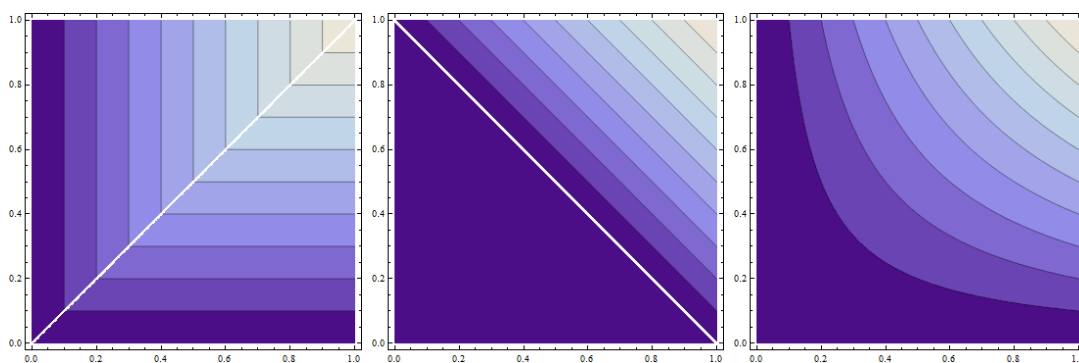
Často používaný typ grafu kopúl je *vrstevnicový* graf, ktorý zachytáva vrtevnice daného grafu. V prípade kopúl je to na množine \mathbf{I}^2 dané ako $C(u, v) = c$, pre konštanty c v \mathbf{I} . V nasledujúcom obrázku si ukážeme vrstevnicové grafy pre všetky 3 spomínané kopule. Teraz si zdefinujeme nasledovnú vetu, ktorá bude hovoriť o spojitosti kopúl a subkopúl cez *Lipschitzovskú* podmienku na \mathbf{I}^2 .

Veta 2.1.1.

Nech C' je subkopula. Potom ak pre každé $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ z $\mathcal{D}(C')$ platí

$$|C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|, \quad (8)$$

tak je C' rovnomerne spojitá na jej definičnom obore.



Obr. 3: Vstevnicové grafy kopúl M,II,W

Ďalej budeme pokračovať dvoma vetami týkajúcimi sa parciálnych derivácií kopúl.

Veta 2.1.2.

Nech C je kopula. Pre akékoľvek v v \mathbf{I} , parciálna derivácia $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ existuje pre takmer všetky u a pre také u a v platí

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \leq 1. \quad (9)$$

Podobne, pre akékoľvek u v \mathbf{I} , parciálna derivácia $\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ existuje pre takmer všetky v a pre také u a v platí

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \leq 1. \quad (10)$$

Naviac, funkcie $u \mapsto \frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ a $v \mapsto \frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ sú definované a neklesajúce takmer všade v \mathbf{I} .

Nasledujúca veta sa bude týkať druhých derivácií.

Veta 2.1.3.

Nech C je kopula. Ak $\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ a $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$ sú spojité na \mathbf{I}^2 a $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ existuje pre všetky $u \in (u, v)$ keď $v = 0$, potom $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ a $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial v \partial u}$ existujú v $(0, 1)^2$ a $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial v \partial u}$.

2.2 Kopule - Sklarova veta

Táto veta je jedna z najdôležitejších v teórii kopúl a je základom pre veľa aplikácií v štatistike. Objasňuje úlohu kopúl vo vzťahu medzi viacrozmernou distribučnou funkciou a jej jednorozmernými marginálnymi funkciami.

Najprv si ale pripomenieme základné definície z pravdepodobnosti.

Definícia 2.2.1.

Distribučná funkcia je funkcia F s definičným oborom $\bar{\mathbb{R}}$ taká, že

- F je neklesajúca,
- $F(-\infty) = 0$ a $F(\infty) = 1$.

Ako príklad si uvedieme rovnomerné rozdelenie, pretože ho neskôr využijeme.

Príklad 2.2.1.

Pre akékoľvek čísla a, b z \mathbb{R} s podmienkou $a < b$, rovnomerné rozdelenie na $[a, b]$ je distribučná funkcia R_{ab} dané ako

$$R_{ab}(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\infty, a) \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b] \\ 1 & x \in (b, \infty] \end{cases}$$

Definícia 2.2.2.

Združená distribučná funkcia je funkcia H s definičným oborom \mathbb{R}^2 taká, že

- H je 2-rastúca,
- $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$ a $H(\infty, \infty) = 1$.

Pretože H je ukotvená a $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$, tak má H marginálne distribučné funkcie dané ako $F(x) = H(x, \infty)$ a $G(y) = H(\infty, y)$

Príklad 2.2.1.

Nech H je funkcia s definičným oborom \mathbb{R}^2 daná ako

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1} & (x, y) \in [-1, 1] \times [0, \infty] \\ 1 - e^{-y} & (x, y) \in [1, \infty] \times [0, \infty] \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Ukázať, že H je združená distribučná funkcia nechávame na čitateľovi. Stačí iba overiť, že je H 2-rastúca a druhú vlastnosť z definície (2.2.2.). Teda H je združená distribučná funkcia. Marginálne distribučné funkcie F a G sú dané ako

$$G(y) = \begin{cases} 0 & y \in [-\infty, 0) \\ 1 - e^{-y} & y \in [0, \infty] \end{cases} \quad \text{a } F = R_{-1,1}$$

Teraz sa dostávame k definovaniu Sklarovej vety.

Veta 2.2.1.

Nech H je združená distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami F a G . Potom existuje kopula C taká, že pre všetky $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$ platí

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \quad (11)$$

Ak sú F a G spojité, potom je C jednoznačná, inak je C jednoznačne určená na $\mathcal{H}(F) \times \mathcal{H}(G)$. Na druhej strane, ak C je kopula a F a G sú distribučné funkcie, potom funkcia H definovaná ako (11) je združená distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami F a G .

Táto veta sa prvýkrát objavila v roku 1959 a vtedajší pojem kopula znamenal *couples* a teda "párovala" združené distribučné funkcie na jednorozmerné marginálne distribučné funkcie. Teraz si zavedieme Sklarovu vetu pre n-rozmerné združené distribučné funkcie a ukážeme si aj pravdepodobnostný náhľad do kopúl.

Veta 2.2.2.

Ak $H : [-\infty, \infty]^n \rightarrow [0, 1]$ je n-rozmerná združená distribučná funkcia s 1-rozmernými marginálnymi distribučnými funkciami $F_1, \dots, F_n : [-\infty, \infty] \rightarrow [0, 1]$, potom existuje

n-kopula C taká, že platí:

$$H(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (12)$$

pre všetky $x \in \mathbb{R}^n$. Ak sú F_1, \dots, F_n spojité, potom je kopula C jednoznačná, inak je C jednoznačne určená na $\mathcal{H}(F_1) \times \dots \times \mathcal{H}(F_n)$.

Pre akékoľvek 1-rozmerné distribučné funkcie F_1, \dots, F_n a akúkoľvek n-kopulu C je funkcia H , daná vzťahom (12), n-rozmernou distribučnou funkciou s 1-rozmernými marginálnymi distribučnými funkciami F_1, \dots, F_n .

Teraz si ukážeme pravdepodobnostnú charakterizáciu troch kopúl Π , W a M . Pre udalosti E_1, \dots, E_n v tvare $E_i = \{X_i \leq x\}$, nech sú $P(E_1), \dots, P(E_n)$ ich príslušné pravdepodobnosti. Čo vieme povedať o pravdepodobnosti prieniku $\cap_{i=1}^n E_i$?

Pravdepodobnosť $P(E_1 \cap \dots \cap E_n)$ vieme získať pomocou vety 2.2.2. využitím kopúl ako

$$P(E_1 \cap \dots \cap E_n) = C(P(E_1), \dots, P(E_n)).$$

Kedže vieme, že $W \leq C \leq M$, tak pre akúkoľvek kopulu C máme najlepší odhad

$$W(P(E_1), \dots, P(E_n)) \leq P(E_1 \cap \dots \cap E_n) \leq M(P(E_1), \dots, P(E_n)).$$

Ak sú udalosti E_1, \dots, E_n združené nezávislé, potom $C = \Pi$ a platí:

$$P(E_1 \cap \dots \cap E_n) = \Pi(P(E_1), \dots, P(E_n))$$

Teraz si ukážeme príklady kopúl na základe vlastností zo štatistiky a pravdepodobnosti.

Príklad 2.2.2.

Nezávislosť náhodných premenných sa dá vyjadriť súčinovou kopulou Π , čo znamená, že akákoľvek n-tica (X_1, \dots, X_n) n nezávislých náhodných premenných má združenú distribučnú funkciu

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i).$$

Ako druhú kopulu máme minimovú kopulu, M . Minimum popisuje náhodné premenné, ktoré sú úplne pozitívne závislé v tom zmysle, že v náhodnom vektore (X_1, \dots, X_n) každé

X_i sa dá vyjadriť vo forme $X_i = f_i(X_1)$, kde f_i je reálna funkcia rastúca na rozsahu X_1 . Potom

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x) = M(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)).$$

Nasleduje dôležitá vlastnosť binárnych kopúl.

Poznámka 2.2.1.

Nech $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je binárna združená funkcia a nech I_C je množina *idempotentných prvkov*. Potom C je binárna kopula práve vtedy, keď I_C je komplement zjednotenia $\cup_{k \in K}]a_k, b_k[$ disjunktných otvorených neprázdnych podintervalov $]a_k, b_k[$ z $[0, 1]$ a

$$C(x, y) = \begin{cases} a_k + (b_k - a_k)C_k\left(\frac{x-a_k}{b_k-a_k}, \frac{y-a_k}{b_k-a_k}\right) & (x, y) \in]a_k, b_k[^2 \\ \text{Min}(x, y) & \text{inak,} \end{cases}$$

kde každé $C_k : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je binárna kopula s netriviálnym idempotentným prvkom, čo znamená, že C je ordinálny súčet kopúl C_k .

Poznámka 2.2.2.

Pre n -kopule $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ a pre akékoľvek $x, y \in [0, 1]^n$ platí

$$|C(x) - C(y)| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

a teda C je *1-Lipschitzovská* a preto spojitá združená funkcia.

Lema 2.2.2.

Nech C' je subkopula. Potom existuje kopula C taká, že $C(u, v) = C'(u, v)$ pre všetky $(u, v) \in \mathcal{D}(C')$, čiže to znamená, že akákoľvek subkopula vie byť rozšírená na kopulu. Rozšírenie je vo všeobecnosti nejednoznačné.

Dôkaz:

Pozri Nelsen(2006).

Príklad 2.2.3.

Nech máme bod $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Ďalej nech máme distribučnú funkciu

$$H(x, y) = \begin{cases} 0 & x < a \text{ alebo } y < b \\ 1 & x \geq a \text{ alebo } y \geq b. \end{cases}$$

Hranice funkcie $H(x, y)$ sú jednotkové funkcie ϵ_a a ϵ_b , dané ako

$$\epsilon_k = \begin{cases} 0 & x \in [-\infty, k) \\ 1 & x \in [k, \infty]. \end{cases}$$

Ak aplikujeme Lemu 2.2.1., dostávame subkopulu C' s definičným oborom $[0, 1] \times [0, 1]$ takú, že $C'(0, 0) = C'(1, 0) = C'(0, 1) = 0$ a $C'(1, 1) = 1$. Roršírenie C' na kopulu C pomocou Lemy 2.2.2. je kopula $C(u, v) = uv$.

Teraz si zdefinujeme *kvázi-inverzné* funkcie distribučných funkcií.

Definícia 2.2.3.

Nech F je distribučná funkcia. Potom *kvázi-inverzná* funkcia k funkcii F je funkcia F^{-1} s definičným oborom \mathbf{I} taká, že

- ak t patrí $\mathcal{H}(F)$, potom $F^{-1}(t)$ je akékoľvek číslo x z $\bar{\mathbb{R}}$ také, že $F(x) = t$, čo znamená, že

$$F(F^{-1}(t)) = t;$$

- ak t nepatrí $\mathcal{H}(F)$, potom

$$F^{-1}(t) = \inf\{x | F(x) \geq t\} = \sup\{x | F(x) \leq t\}.$$

Ak je F ostro rastúca, potom je kvázi-inverzná funkcia totožná s klasickou inverznou funkciou.

Dôsledok 2.2.1.

Nech H, F, G a C' spĺňajú Lemu 2.2.1. a nech F^{-1} a G^{-1} sú kvázi-inverzné funkcie k F a G . Potom pre akékoľvek $(u, v) \in \mathcal{D}(C')$ platí

$$C'(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)). \quad (13)$$

Ak F a G sú spojité, dôsledok platí aj pre kopule a dáva nám metódu konštrukcie kopúl pomocou združených distribučných funkcií.

Uvedieme príklad.

Príklad 2.2.4.

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1} & (x, y) \in [-1, 1] \times [0, \infty] \\ 1 - e^{-y} & (x, y) \in [1, \infty] \times [0, \infty] \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Marginálne distribučné funkcie F a G sú dané ako $F = H(x, \infty)$, $G = H(\infty, y)$ a teda dostávame:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & x \in [-1, 1] \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

a

$$G(y) = \begin{cases} 0 & y \in [-\infty, 0) \\ 1 - e^{-y} & y \in [0, \infty]. \end{cases}$$

Kvázi-inverzné funkcie sú následne dané jednoducho ako $F^{-1}(u) = 2u - 1$ a $G^{-1}(v) = -\ln(1 - v)$ pre $(u, v) \in \mathbf{I}$. Keďže platí, že $\mathcal{H}(F) = \mathcal{H}(G) = \mathbf{I}$, tak potom kopula C je daná ako

$$C = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) = \frac{(2u - 1 + 1)(e^{-\ln(1-v)} - 1)}{2u - 1 + 2e^{-\ln(1-v)} - 1} = \frac{uv}{u - uv + v}.$$

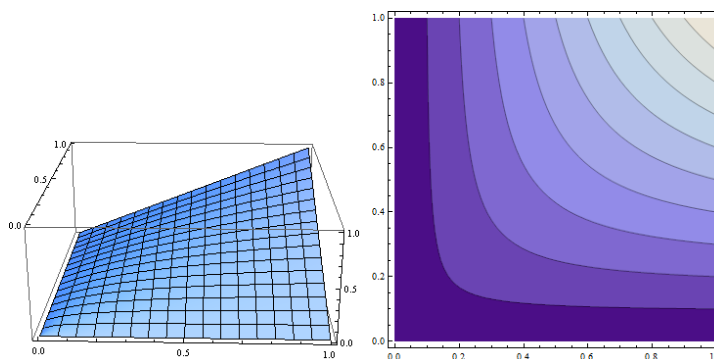
Príklad 2.2.5.

Ukážeme si konštrukciu kopula funkcie na *Gumbelovom* dvojrozmernom exponenciálnom rozdelení, ktoré je dané ako

$$H_\theta(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y+\theta xy)} & x, y \geq 0 \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$$

kde $\theta \in [0, 1]$. Podobne ako v predchádzajúcom príklade sa dajú ľahko odvodiť marginálne distribučné funkcie F, G a z nich kvázi-inverzné funkcie $F^{-1}(u) = -\ln(1 - u)$ a $G^{-1}(v) = -\ln(1 - v)$ pre $(u, v) \in \mathbf{I}$. Teda kopula bude zadaná ako

$$C_\theta(u, v) = u + v - 1 + (1 - u)(1 - v)e^{-\theta \ln(1-u)\ln(1-v)}.$$



Obr. 4: Graf a vstevnicový graf pre príklad 2.2.3.

2.3 Kopule a náhodné premenné

V tejto kapitole budeme používať označenie veľkých písmen, ako napríklad X a Y , ktoré budú reprezentovať náhodné premenné a malé písmená x a y ich hodnoty. Následne bude platiť, že F je distribučná funkcia náhodnej premennej X , keď pre všetky $x \in \bar{\mathbb{R}}$ platí, že $F(x) = P[X \leq x]$.

Teraz zdefinujeme Sklarovu vetu v pojmoch náhodných premenných.

Veta 2.3.1.

Nech X a Y sú náhodné premenné s distribučnými funkciami F a G a združenou distribučnou funkciou H . Potom existuje kopula C taká, že vzťah (11) platí. Ak sú F a G spojité, potom je C jednoznačná. Inak je kopula C jednoznačne určená na $\mathcal{H}(F) \times \mathcal{H}(G)$.

Kopulu zo Sklarovej vety v náhodných premenných budeme označovať C_{XY} . Nasledujúcou vetou ukážeme, že takzvaná *súčinová kopula* $\Pi(u, v) = uv$ charakterizuje nezávislé náhodné premenné, keď sú ich distribučné funkcie spojité.

Veta 2.3.2.

Nech X a Y sú spojité náhodné premenné. Potom X a Y sú nezávislé vtedy a len vtedy, keď $C_{XY} = \Pi$.

Veta 2.3.3.

Nech X a Y sú spojité náhodné premenné s kopulou C_{XY} . Ak α a β sú ostro rastúce

na $\mathcal{H}(X)$ a $\mathcal{H}(Y)$, potom $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$. Teda C_{XY} je invariantná vzhľadom na ostrú rastúcosť transformácií X a Y .

Ak je aspoň jedna z dvojice α, β klesajúca, dostávame nasledujúcu lemu o transformácii kopule.

Lema 2.3.1.

Nech X a Y sú spojité náhodné premenné s kopulou C_{XY} . Nech α a β sú ostro monotónne na $\mathcal{H}(X)$ a $\mathcal{H}(Y)$. Potom

- Ak α je ostro rastúca a β je ostro klesajúca, potom

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v).$$

- Ak α je ostro klesajúca a β je ostro rastúca, potom

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v).$$

- Ak α je ostro klesajúca aj β je ostro klesajúca, potom

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v).$$

Teraz si pripomenieme zopár poznatkov, ktoré budú v ďalších častiach dôležité. Každá združená distribučná funkcia H stanovuje pravdepodobnostnú mieru na \mathbb{R}^2 ako $V_H((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = H(x, y)$. Každá kopula C určuje pravdepodobnostnú mieru na \mathbf{I}^2 ako $V_C([0, u] \times [0, v]) = C(u, v)$.

Pre akúkoľvek kopulu C , nech

$$C(u, v) = A_C(u, v) + S_C(u, v),$$

kde

$$A_C(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} C(s, t) dt ds; \quad S_C(u, v) = C(u, v) - A_C(u, v). \quad (14)$$

Teraz zopár špeciálnych prípadov.

Ak $C = A_C$ na \mathbf{I}^2 , čo je práve vtedy, keď uvažujeme združenú distribučnú funkciu,

tak C má združenú hustotu danú $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$. Potom C je *absolútne spojitá*, zatiaľ čo ak $C = S_C$ na \mathbf{I}^2 , teda keď $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} = 0$ takmer všade na \mathbf{I}^2 , tak potom je C *singulárna*. Inak má C absolútne spojitý člen A_C a singulárny člen S_C . V takom prípade ani jeden z členov A_C, S_C nie je kopula. Uvedieme príklad.

Príklad 2.3.1.

Súčinová kopula $\Pi(u, v) = uv$ je absolútne spojitá, pretože pre všetky (u, v) v \mathbf{I}^2 ,

$$A_{\Pi(u,v)} = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Pi(s, t) dt ds = \int_0^u \int_0^v 1 dt ds = uv = \Pi(u, v),$$

a teda dostávame, že $C_{\Pi} = A_{\Pi}$.

2.4 Archimedovské kopule

V tejto časti sa budeme venovať dôležitej triede kopúl, Archimedovským kopulám. Tento typ kopúl ma široké uplatnenie pre viacero dôvodov. Keďže sú jednoznačne určené svojím generátorom, preto do tejto triedy patrí veľká množina rôznych kopúl. V tretej kapitole z Nielsen(2006) sa ukázalo, že združené a marginálne distribučné funkcie z triedy *Ali-Mikhail-Haq* spĺňajú vzťah

$$\frac{1 - H(x, y)}{H(x, y)} = \frac{1 - F(x)}{F(x)} + \frac{1 - G(y)}{G(y)} + (1 - \theta) \frac{1 - F(x)}{F(x)} \frac{1 - G(y)}{G(y)}.$$

S menšou pomocou sa to dá prepísať na

$$1 + (1 - \theta) \frac{1 - H(x, y)}{H(x, y)} = \left[1 + (1 - \theta) \frac{1 - F(x)}{F(x)} \right] \left[1 + (1 - \theta) \frac{1 - G(y)}{G(y)} \right],$$

a teda platí, že $\lambda(H(x, y)) = \lambda(F(x))\lambda(G(y))$, kde $\lambda(t) = 1 + (1 - \theta)\frac{1-t}{t}$. Teda môžeme napísať, že $\lambda(H(x, y)) = \lambda(F(x))\lambda(G(y))$ platí pre funkciu λ , ktorá musí byť kladná na intervale $(0, 1)$. Potom pre $\varphi(t) = -\ln\lambda(t)$ vieme taktiež napísať H ako sumu marginálnych funkcií F a G ako $\varphi(H(x, y)) = \varphi(F(x)) + \varphi(G(y))$ a pre kopule

$$\varphi(C(u, v)) = \varphi(u) + \varphi(v) \quad (15)$$

Keďže nás zaujíma výraz, ktorým by sme konštruovali kopula funkcie, chceme vyriešiť vzťah $\varphi(C(u, v)) = \varphi(u) + \varphi(v)$, a teda pre $C(u, v)$ máme $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ pre dobre zadaný inverz φ^{-1} .

Definícia 2.4.1.

Nech φ je spojitá, ostro klesajúca funkcia z \mathbf{I} do $[0, \infty]$ taká, že $\varphi(1) = 0$. *Pseudo-inverzná* funkcie φ je funkcia $\varphi^{[-1]}$ s $\mathcal{D}(\varphi^{[-1]}) = [0, \infty]$ a $\mathcal{H}(\varphi^{[-1]}) = \mathbf{I}$ daná ako

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases} \quad (16)$$

Všimnime si, že $\varphi^{[-1]}$ je spojitá a nerastúca na $[0, \infty]$ a ostro klesajúca na $[0, \varphi(0)]$. Navyše platí $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ na \mathbf{I} a

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ \varphi(0) & \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases}$$

a teda $\varphi(\varphi^{-1}(t)) = \min(t, \varphi(0))$. Ak $\varphi(0) = \infty$, tak potom $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Lema 2.4.1.

Nech φ je spojitá, ostro klesajúca funkcia z \mathbf{I} do $[0, \infty]$ taká, že $\varphi(1) = 0$ a nech $\varphi^{[-1]}$ je pseudo-inverz funkcie φ definovaný ako (16). Nech C je funkcia z \mathbf{I}^2 do \mathbf{I} daná ako

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (17)$$

Potom C spĺňa ohraničenia (3) a (4) pre kopule.

Veta 2.4.1.

Nech φ je spojitá, ostro klesajúca funkcia z \mathbf{I} do $[0, \infty]$ taká, že $\varphi(1) = 0$ a nech $\varphi^{[-1]}$ je pseudo-inverzná funkcia k φ . Potom funkcia C z \mathbf{I}^2 do \mathbf{I} daná vzťahom (17) je kopula funkcia práve vtedy, ak φ je konvexná.

Dôkaz:

Pozri Nelsen (2006).

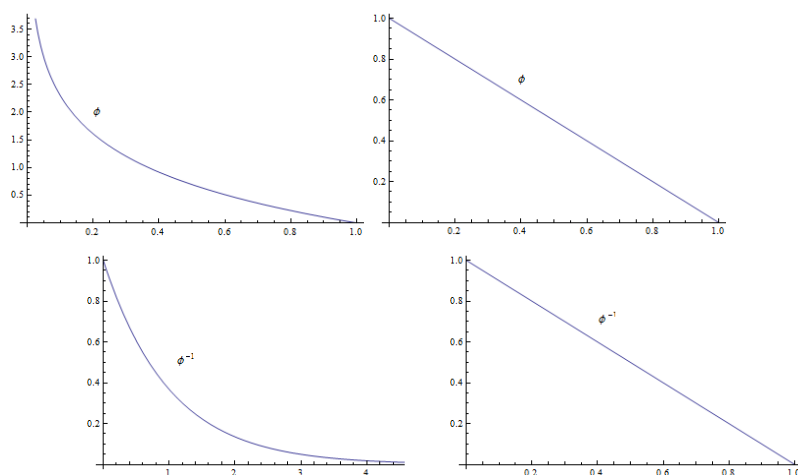
Funkciu φ voláme *aditívnym generátorom* kopule. Archimedovské kopule sú také asociatívne kopule, ktoré spĺňajú nerovnosť $C(x, x) < x$ pre všetky x z intervalu $]0, 1[$. Každú Archimedovskú kopulu možno reprezentovať funkciou $\varphi : [0, 1 \rightarrow \infty]$, ktorá je ostro klesajúca funkcia, $\varphi(1) = 0$ a

$$C(x, y) = \varphi^{-1}(\min(\varphi(0), \varphi(x) + \varphi(y)))$$

Uvedieme si príklad.

Príklad 2.4.1.

1. nech $\varphi(t) = -\ln(t)$ pre $t \in [0, 1]$. Keďže platí, že $\varphi(0) = \infty$, φ je striktná, a preto platí, že $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1} = e^{-t}$ a generovanie kopula funkcie pomocou vzťahu (17) nám dáva $C(u, v) = e^{-[(-\ln(u)) + (-\ln(v))]} = uv = \Pi(u, v)$. Preto je Π Archimedovská kopula.
2. nech $\varphi(t) = 1 - t$ pre $t \in [0, 1]$. Potom $\varphi^{[-1]}(t) = 1 - t$ pre $t \in [0, 1]$. a 0 pre $t > 1$, teda $\varphi^{[-1]} = \max(1 - t, 0)$. Použitím vzťahu (17) dostávame kopulu $C(u, v) = \max(u + v - 1, 0) = W(u, v)$. Preto je W taktiež Archimedovská.



Obr. 5: Generátory z príkladu 2.4.1.

Veta 2.4.2.

Nech C je Archimedovská kopula s generátorom φ . Potom

1. C je symetrická, teda $C(u, v) = C(v, u)$ pre všetky u, v z \mathbf{I} .
2. C je asociatívna, teda $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$ pre všetky u, v, w z \mathbf{I}
3. Ak pre konštantu c platí $c > 0$, potom $c\varphi$ je taktiež generátor.

2.5 Eliptické kopule

V tejto časti si spomenieme niečo málo o eliptických kopuliach.

Ako prvú spomenieme *Gaussovú*, častejšie pomenovanú ako *normálnu*, kopulu. Za predpokladu korelácie medzi náhodnými premennými, ktorú označíme R , je definovaná na základe Sklarovej vety vzťahom

$$C_R^{Gauss}(u, v) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)),$$

kde Φ^{-1} je inverzná funkcia k distribučnej funkcii normovaného normálneho rozdelenia Φ , Φ_R je dvojrozmerná združená distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia pri korelácii R .

Studentova kopula vychádza zo studentovho rozdelenia a je definovaná ako

$$C_{R,\nu}^{Student}(u, v) = t_{R,\nu}(t_\nu^{-1}(u), t_\nu^{-1}(v)),$$

kde t_ν^{-1} je inverzná funkcia k distribučnej funkcii studentovho rozdelenia, ν označuje počet stupňov voľnosti, $t_{R,\nu}$ je dvojrozmerná združená distribučná funkcia normovaného studentovho rozdelenia s koreláciou R a stupňami voľnosti ν .

Zmenou počtu stupňov voľnosti sa menia chvostové závislosti združenej distribučnej funkcie. Ak je počet stupňov voľnosti malý, pravdepodobnosť výskytu extrémnych hodnôt je veľká, chvosty sú ťažšie. Pri veľkom počte stupňov voľnosti sa Studentova kopula podobá na normálnu kopulu.

3 Jednparametrické triedy kopúl - vlastnosti

Ako sme si mohli všimnúť na príkladoch, Archimedovské kopule môžu byť generované pomocou vety o konvexnosti φ (veta 2.4.1.), len musíme nájsť také funkcie, ktoré by boli generátormi a teda spojitú, klesajúcu konvexnú funkciu φ z \mathbf{I} do $[0, \infty]$ s vlastnosťou $\varphi(1) = 0$.

V tabuľke 1 si ukážeme niektoré dôležité jednparametrické triedy Archimedovských kopúl s ich aditívnymi generátormi a parametrom.

Meno	$C_\theta(u, v)$	$\varphi_\theta(t)$	$\theta \in$
Pareto	$[\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1; 0)]^{-\frac{1}{\theta}}$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$
Ali - Mikhail - Haq	$\frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$	$\ln \frac{1 - \theta(1-t)}{t}$	$[-1, 1)$
Gumbel	$\exp\left(-\left[(-\ln(u))^\theta + (-\ln(v))^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right)$	$(-\ln(t))^\theta$	$[1, \infty)$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$	$-\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$
Gumbel - Barnett	$uv \exp(-\theta \ln(u) \ln(v))$	$\ln(1 - \theta \ln(t))$	$(0, 1]$

Tabuľka 1: Tabuľka jednparametrických kopúl

Prečo sa vlastne volajú Archimedovské kopule? Pripomeňme si Archimedovskú axiómu pre kladné reálne čísla. Ak a, b sú kladné reálne čísla, potom existuje celé číslo n také, že $na > b$. Archimedovské kopule sú vlastne binárne operácie na intervale \mathbf{I} , v ktorom kopula C priraďuje každej dvojici (u, v) v \mathbf{I} číslo $C(u, v)$ v \mathbf{I} .

Pripomeňme si, že množina vrstevníc pre kopulu C je daná ako

$\{(u, v) \in \mathbf{I}^2 | C(u, v) = t\}$. Pre Archimedovské kopule platí podobné. Pre $t > 0$, táto množina vrstevníc obsahuje body z vrstevnice $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(t)$ na \mathbf{I}^2 , ktorá spája body $(1, t)$ a $(t, 1)$. V praxi sa vrstevnice zapisujú ako $v = L_t(u)$, čo vedie k

$$v = L_t(u) = \varphi^{[-1]}(\varphi(t) - \varphi(u)) = \varphi^{-1}(\varphi(t) - \varphi(u)), \quad (18)$$

kde posledný krok zmeny $\varphi^{[-1]}$ na φ^{-1} platí vždy, pretože $\varphi(t) - \varphi(u)$ je z intervalu $[0, \varphi(0)]$. Pre $t = 0$ budeme $\{(u, v) \in \mathbf{I}^2 | C(u, v) = 0\}$ volať *nulovou množinou* kopule C a označíme ju $Z(C)$. Pre veľa Archimedovských kopúl sú $Z(C)$ jednoducho len 2 úsečky $\{0\} \times \mathbf{I}$ a $\mathbf{I} \times \{0\}$. Pre zvyšok ma $Z(C)$ kladný priestor a pre takú nulovú množinu je hraničná krivka $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(0)$, teda $v = L_0(u)$ a nazývame ju *nulovou krivkou*.

Lema 3.1.

Vrstevnice Archimedovských kopúl sú *konvexné* krivky.

Pozn: Obrázok pôjde.

Veta 3.1.

Nech C je Archimedovská kopula generovaná pomocou φ na Ω .

1. Pre t z $(0, 1)$ je C -miera vrstevnice $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(t)$ daná ako

$$\varphi(t) \left[\frac{1}{\varphi'(t^-)} - \frac{1}{\varphi'(t^+)} \right], \quad (19)$$

kde $\varphi'(t^-)$ a $\varphi'(t^+)$ sú jednostranné derivácie φ v t . Ak $\varphi'(t)$ existuje, potom je táto C - miera rovná 0.

2. Ak C nie je *striktná*, potom C -miera nulovej krivky $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(0)$ je rovná

$$-\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0^+)}, \quad (20)$$

a preto je rovná 0, ak $\varphi'(0^+) = -\infty$.

Dôkaz:

Pozri Nelsen (2006).

Príklad 3.1.

Nech je θ je z $(0, 1]$ a nech φ_θ a nech φ_θ je po častiach lineárna funkcia v Ω , ktorej graf spája $(0, 2 - \theta)$ do $(\frac{\theta}{2}, 1 - \frac{\theta}{2})$ a nakoniec do $(1, 0)$. Sklony oboch úsečiek sú $-\frac{2-\theta}{\theta}$ a -1 .

Ak C_θ je Archimedovská kopula generovaná pomocou φ_θ , potom na základe vzťahu (19) platí, že C_θ - miera vrstevnice $\varphi_\theta(u) + \varphi_\theta(v) = \varphi_\theta(\frac{\theta}{2})$ je

$$\left(1 - \frac{\theta}{2}\right) \left[-\frac{\theta}{2-\theta} + 1\right] = 1 - \theta,$$

a zo vzťahu (20) platí, že C_θ - miera nulovej krivky $\varphi_\theta(u) + \varphi_\theta(v) = \varphi_\theta(0)$ je θ . Keďže tieto miery dávajú dokopy 1, tak potom Archimedove kopule v tejto triede sú singulárne a podpora C_θ pozostáva z vrstevnice $\varphi_\theta(u) + \varphi_\theta(v) = \varphi_\theta(\frac{\theta}{2})$ a nulovej krivky.

Lema 3.2.

Nech C je Archimedovská kopula generovaná pomocou φ v Ω . Nech $K_C(t)$ označuje C -mieru množiny $\{(u, v) \in \mathbf{I}^2 | C(u, v) \leq t\}$ alebo ekvivalentne množiny $\{(u, v) \in \mathbf{I}^2 | \varphi(u) + \varphi(v) \geq \varphi(t)\}$. Potom pre akékoľvek t v \mathbf{I} platí

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}. \quad (21)$$

Nasledúci dôsledok bude dôležitý pri definovaní takzvaného *Kendall Tau*.

Dôsledok 3.1.

Nech C je Archimedovská kopula generovaná pomocou φ v Ω . Nech $K'_C(s, t)$ označuje C -mieru množiny $\{(u, v) \in \mathbf{I}^2 | u \geq s, C(u, v) \leq t\}$. Potom pre akékoľvek s, t z \mathbf{I} platí

$$K'_C(s, t) = \begin{cases} s & s \leq t \\ t - \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{\varphi'(t^+)} & s > t. \end{cases} \quad (22)$$

Dôsledok 3.2.

Nech U a V sú náhodné premenné s rovnomerným rozdelením v intervale $(0, 1)$, ktorých združená distribučná funkcia je Archimedovská kopula C generovaná pomocou φ v Ω . Potom funkcia K_C daná vzťahom (21) je distribučná funkcia náhodnej premennej $C(u, v)$ a navyše, funkcia K'_C daná vzťahom (22) je združená distribučná funkcia U a $C(u, v)$.

4 Modelovanie vývoja indexu PX

V tejto kapitole sa budeme venovať praktickej časti aplikácie kopúl. Ako české aktívum sme si zvolili index pražskej burzy v období od 1.1.2010 do 31.12.2014. Následne budú aplikované poznatky z časových radov, ktorých základnú znalosť u čitateľa predpokladáme. Všetky aplikácie budú vykonávané v programe *R*.

4.1 ARMA modely

Predtým, ako budeme používať kopule, musia byť na dáta aplikované ARMA modely a musia sa reziduá testovať na podmienenú homoskedasticitu. Naše dáta predstavujú 3 časové rady. Konkrétne sú to denné výnosy indexu pražskej burzy v oboch menách a ako tretí časový rad sú denné výnosy menového kurzu *EUR/CZK*, čo znamená, že sme použili transformáciu $\frac{1}{x}$, pretože pôvodný menový kurz *CZK/EUR* pre veľmi malé čísla sa nedal použiť.

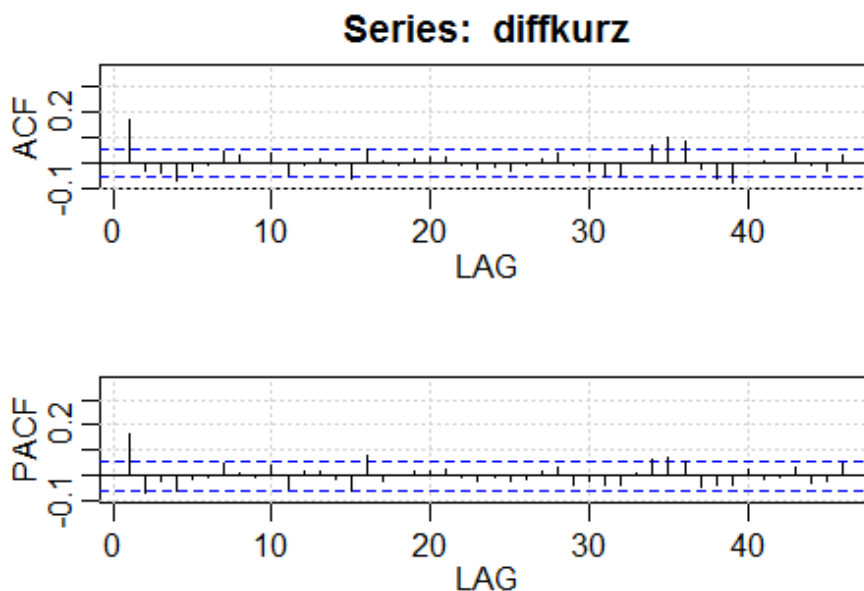
Ako prvé sme dáta zlogarimovali, aby sme zmenšili rozptyl a použili *Dickey – Fuller* test jednotkového koreňa. V tabuľke si vypíšeme hodnoty testovacích štatistík pre diferencovaním a po diferencovaní ako aj kritické hodnoty na úrovni 5%.

Dáta	TS pred dif.	KH 5%	TS po dif.	KH 5% po dif.
PX czk	-2,4835	-3,41	-25,5404	-1,95
Px eur	-2,7289	-3,41	-24,1544	-1,95
Kurz	-2,8119	-3,41	-24,2696	-1,95

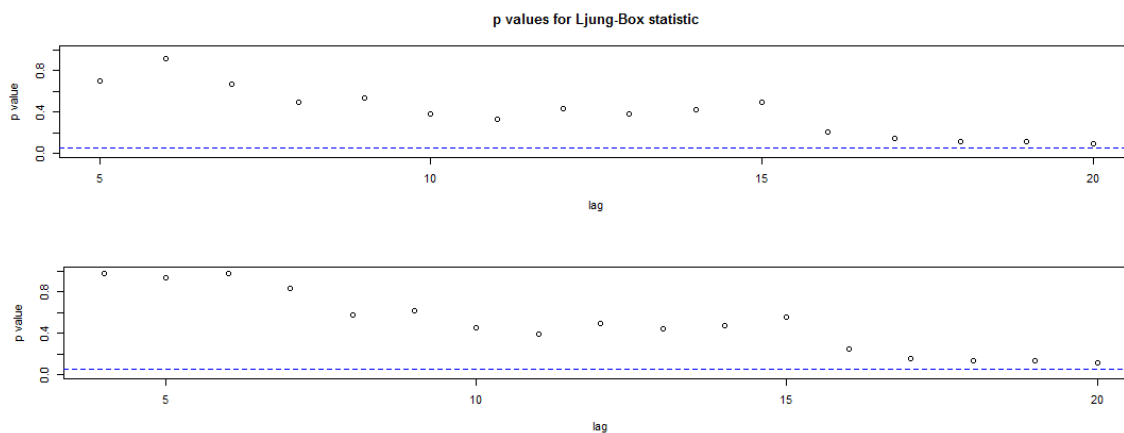
Na základe testu sme nulovú hypotézu prítomnosti jednotkového koreňa nezamietli, pretože hodnota testovacej štatistiky bola vo všetkých 3 časových radoch väčšia ako kritická hodnota na hladine významnosti 5%, a preto sme dáta diferencovali. Následne tieto dáta už vyhovovali a ďalší test nulovú hypotézu zamietol. Podotýkame, že všetky doterajšie zmeny boli aplikované na všetky 3 časové rady.

Ako prvý si rozanalizujeme časový rad indexu pražskej burzy v českých korunách. Pre určenie ARMA modelu sme sa pozreli na autokorelácie. Z testovaných modelov nám najviac vyhovovali modely *arma(2, 2)* a *ma(3)*.

Obr. 6: Autokorelácie pre PXinCZK



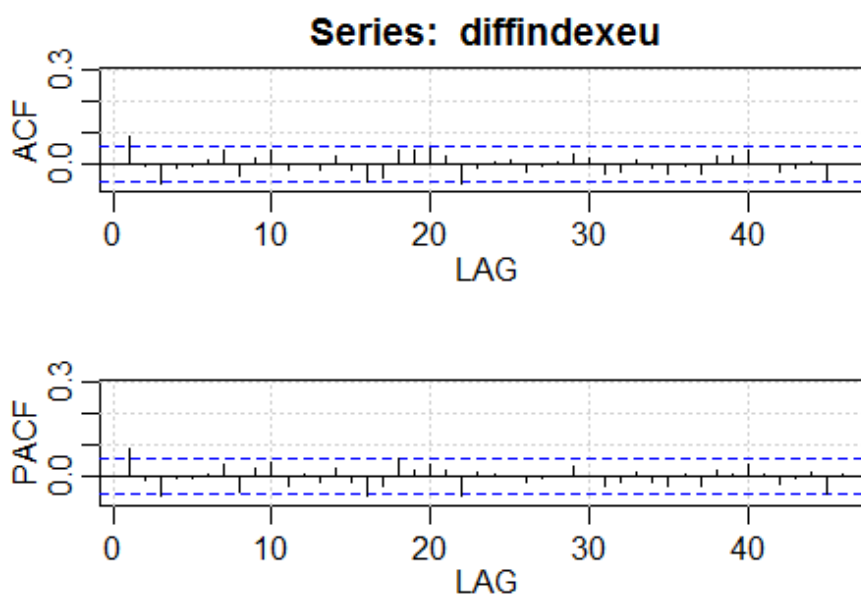
Obr. 7: Ljung-Box p-value pre arma(2,2) a ma(3)



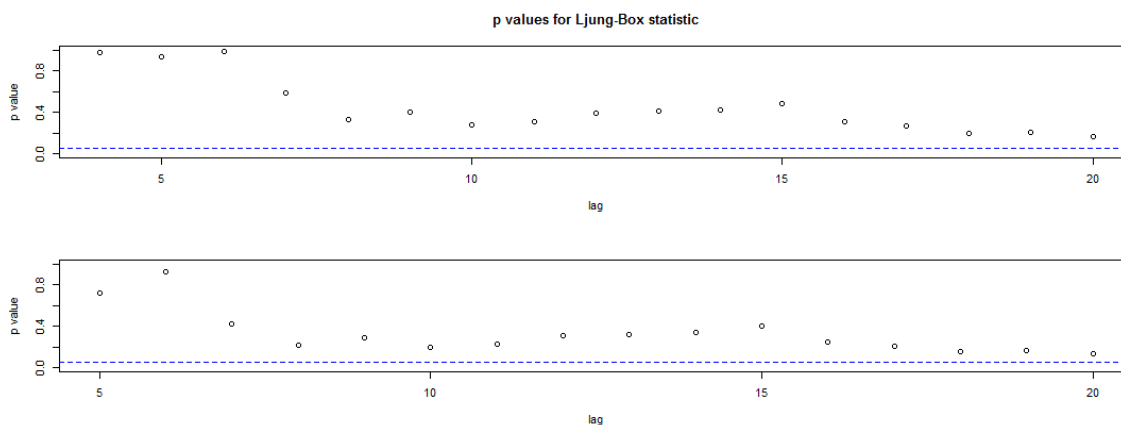
Na základe p-hodnôt Ljung-Boxovej štatistiky vidíme, že oba modely sú vyhovujúce. Porovnaním Akaikeho informačného kritéria, ktoré pre arma(2,2) vyšlo $-7,940414$ a pre ma(3) $-7,94183$ sme dospeli k voľbe modelu $ma(3)$.

Ako nasledujúci časový si rad zoberieme index pražskej burzy v eurách. Rovnako ako v predchádzajúcom prípade sa pozrieme na autokorelácie. V tomto prípade pre

Obr. 8: Autokorelácie pre PXinEUR



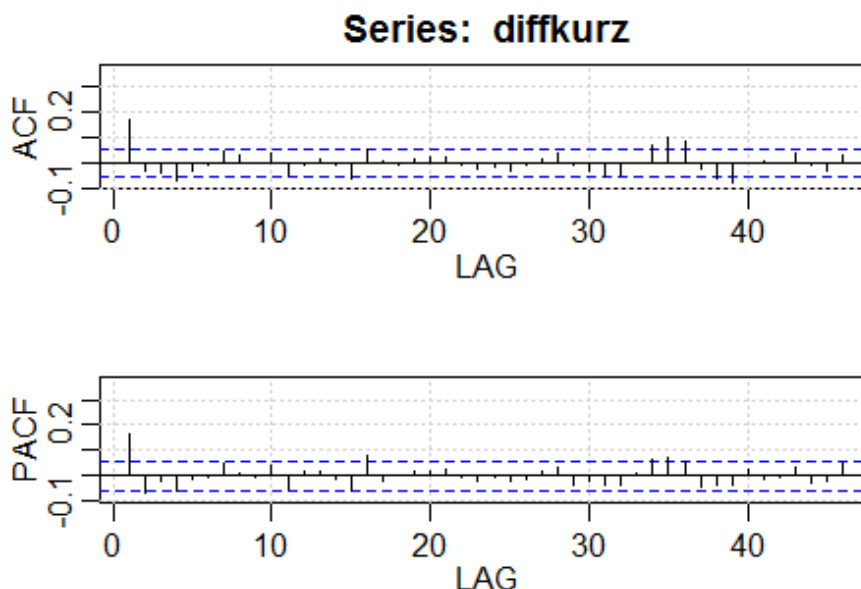
Obr. 9: Ljung-Box p-value pre $ar(3)$ a $arma(3,1)$



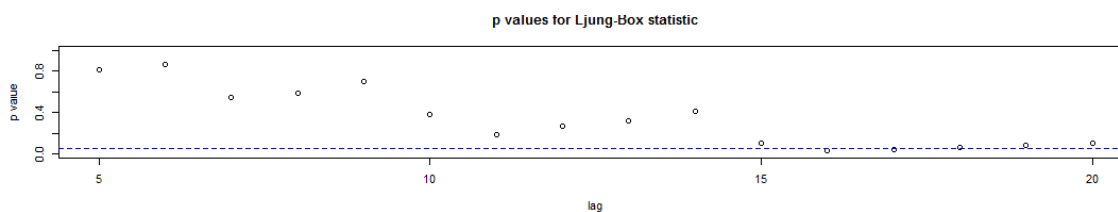
testované modely nám najviac vyhovovali $ar(3)$ a $arma(3,1)$. Porovnaním Akaikeho informačných kritérií, ktoré vyšli $-7,866864$ a $-7,865283$ sme sa rozhodli pre $ar(3)$ model.

Posledným časovým radom je menový kurz *EUR/CZK*. Zobrazíme si autokorelácie. Ako jediný model zo široké spektra modelov, nám vyhovoval model $AR(4)$.

Obr. 10: Autokorelácie pre Rate



Obr. 11: Ljung-Box p-value pre ar(4)



Ljung-boxové hodnoty p -value pre neskoršie posunutia síce nie sú nad úrovňou 5%, ale keďže sa týkajú až veľmi ďalekých posunutí, tak sme zhodnili použitie modelu ako postačujúce.

Pred použitím kopúl sa filtrované dáta, teda reziduá, pomocou ARMA modelov testujú na podmienenú homoskedasticitu, na ktorú použijeme *Ljung-Box Q-test*, ktorý je v programe R implementovaný ako funkcia *Box.test*, ktorej vstup sú štvorce reziduí. Ako výstup testu je hodnota p -value. V prípadoch indexu pražskej burzy v českých korunách a eurách nám test hypotézu H_0 zamietol, pričom p -value bola v oboch

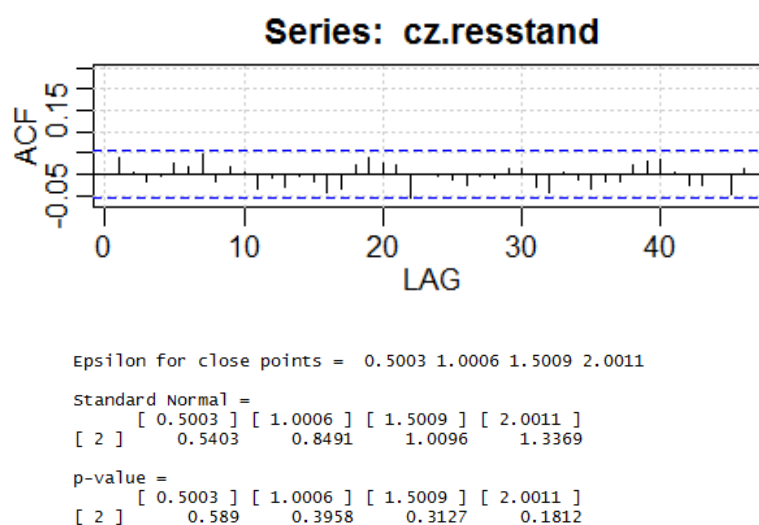
prípadoch skoro nulová, presnejšie $2,2 \cdot 10^{-16}$ a preto musíme dáta filtrovať GARCH modelmi. V prípade menového kurzu hypotéza H_0 nebola zamietnutá, pretože *p-value* vyšla 0,7763, a preto sú dáta dostatočne filtrované daným AR(4) modelom.

4.2 ARCH/GARCH modely

Posledným krokom pred aplikovaním kopúl je filtrácia dát pražskej burzy pomocou *ARCH/GARCH* modelov a príslušných testov, ktoré nám vyhodnotia správnosť použitia modelu.

Na hľadanie správneho *ARCH/GARCH* modelu budeme používať knižnicu *fGarch* a z nej príslušný príkaz *garchFit*, ktorého vstupy sú naše pretransformované dáta a rad GARCH modelu, ktorý chceme testovať. Po nájdení správneho modelu sa budú testovať štandardizované reziduá pomocou BDS testu z knižnice *tseries*, ktorého výstup je znova *p-value*, ktorá nám povie, či sú reziduá vhodné, nezávislé a rovnako rozdelené, v skratke i.i.d. .

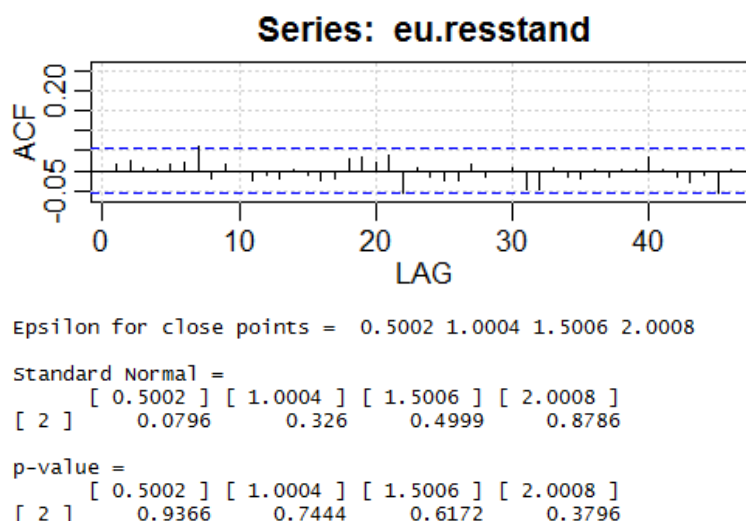
Ako prvý časový rad si rozoberieme index pražskej burzy v českých korunách. Je všeobecne známe, že model *garch(1, 1)* vo veľa prípadoch funguje. Rozhodli sme sa priamo túto skutočnosť otestovať. Správnosť modelu otestujeme pomocou 3 vecí. Reziduá by nemali obsahovať autokoreláciu, BDS test nám potvrdí správnosť reziduí pomocou hodnôt *p-value* a *box.test* nám na záver potvrdí homoskedasticitu. Zobrazíme si výstupy všetkých dvoch testov:



Obr. 12: Testovanie správnosti modelu *garch(1,1)*

Hodnota p -value pre štvorce reziduí použitím *box.test* nám vyšla 0.3487. Vidíme, že model $garch(1,1)$ sa ukázal ako správny a ďalej budeme preto používať reziduá z tohto modelu.

Druhý a posledný časový rad, ktorý musíme filtrovať pomocou *ARCH/GARCH* modelov bude časový rad indexu pražskej burzy v eurách. Pre tento rad nám ale model $garch(1,1)$ nebol vyhovujúci, pretože reziduá vykazovali autokoreláciu. Zvyšovanie rádu taktiež nepomáhalo. Nakoniec sa ako najvhodnejší model ukázal až kombinácia modelov $garch(1,1)$ a $arma(3,1)$. Zobrazíme si výstupy oboch testov:



Obr. 13: Testovanie správnosti modelu $arma(3,1)+garch(1,1)$

Pre tento model je hodnota p -value pre štvorce reziduí z *box.test* rovná 0.577. Vďaka tomu je kombinovaný model $arma(3,1)+garch(1,1)$ vyhodnotený ako správny a ďalej budeme preto používať reziduá z tohto modelu.

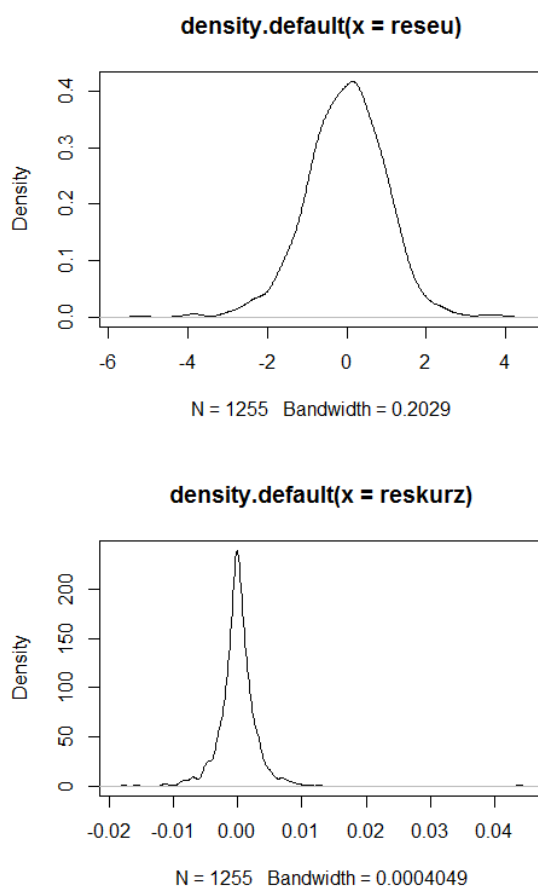
Teraz si vytvoríme párové dáta a pozrieme sa na ich vzájomnú koreláciu, ktorá nám napovie, pre ktoré párové dáta budeme používať a hľadať najlepšiu kopulu. Jedny párové dáta budú index pražskej burzy v českých korunách spolu s menovým kurzom a druhé párové dáta budú index pražskej burzy v eurách s menovým kurzom.

Korelácia prvých spomínaných párových dát vyšla záporná, ale veľmi malá, presnejšie

-0.0577467 . Ohľadom druhých párov vyšla korelácia podobne záporná, ale o trochu lepšia, konkrétne -0.2021563 . Keďže sa snažíme zachytiť určitú závislosť rizikových faktorov, tak sme sa rozhodli použiť dáta, ktoré vykazujú väčšiu koreláciu.

4.3 Marginálne rozdelenia

V tejto časti si ukážeme, aké majú naše filtrované dáta rozdelenia.



Obr. 14: Hustoty filtrovaných dát

Z vykreslených hustôt budeme testovať normálne a studentovo rozdelenie. Pomocou *Shapiro – Wilk* testu, ktorý je v programe R implementovaný ako *shapiro.test*, sme zamietli normalitu, pretože hodnoty p-value vyšli $1.205 \cdot 10^{-8}$ a $2.2 \cdot 10^{-16}$. Ako druhý test normality sme zvolili *Pearson chi-kvadrát test*. Pomocou príkazu *pearson.test* sme dostali p-value hodnoty 0.02689 a $2.2 \cdot 10^{-16}$, a preto sme znova zamietli normálne rozdelenie.

Ako druhé testujeme studentovo rozdelenie. Použitím príkazu *ks.test.t* dostávame p-value hodnoty 0.8308 a 0.0004034, a teda sme dospeli k záveru, že by oba rady mohli mať studentovo rozdelenie. V prípade filtrovaných dát menového kurzu by mohol byť problém testovať celý rad, pretože aj veľmi malá výchylka môže spôsobiť zamietnutie testov. Z výsledku *ks.test.t* testu si môžeme všimnúť ten rozdiel pri testovaní normality, ktorá úplne zamietnutá, zatiaľ čo pri testovaní studentovho rozdelenia vidíme náznaky, že by to predsa len mohlo byť spomínané rozdelenie.

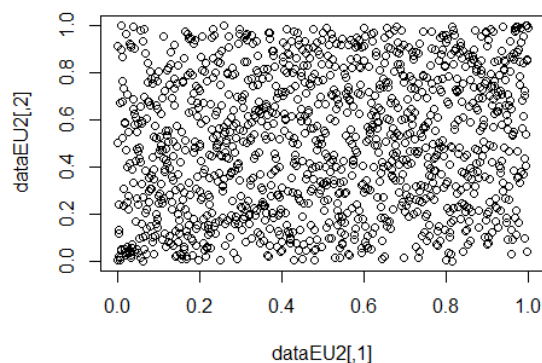
Vybrali sme si náhodne 400 filtrovaných dát a pozreli sa na výsledky *ks.test.t* testu a taktiež na výsledky testu normality pomocou spomínaných dvoch testov. Hodnoty sú tentokrát priaznivé, konkrétne 0.1325 pre testovanie studentovho rozdelenia, $6.903 \cdot 10^{-12}$ a $3.663 \cdot 10^{-15}$ pre testovanie normality. Dospeli sme k záveru, že filtrované dáta menového kurzu sú skutočne pomerne blízke studentovmu rozdeleniu.

4.4 Fitovanie kopúl

V tejto časti sa budeme venovať aplikácii kopúl na naše dáta. Uvidíme, ktorá kopula sa na naše dáta hodí najlepšie, ako aj vlastností našich dát. Testovať budeme viacero kopúl. Potrebovať na to budeme knižnicu *copula*.

Ako prvé si ale transformujeme filtrované dáta pomocou empirickej distribučnej funkcie na vektor s rovnomerným rozdelením pomocou funkcie *apply*, a potom si naše dáta pretransformujeme, aby závislosť bola kladná, pretože niektoré kopule nevedia zachytiť zápornú závislosť. Transformáciou bude odčítanie druhého stĺpca našich dát od jednotky, čím sa korelácia zmení len v znamienku. Pozrieme sa, ako vyzerajú naše dáta.

Obr. 15: Graf našich dát



Keďže dáta nevykazujú signifikantnú závislosť, tak je možnosť aj aplikácia nie len Archimedovských, ale aj eliptických kopúl.

Pri aplikácii kopúl budeme používať hlavne implementované funkcie *fitCopula* a následne sa pozrieme funkciou *gofCopula* na kvalitu fitovania kopule. Odhad parametrom bude robený metódou *mpl*, teda *maximum pseudo-likelihood*. Ako prvé budeme aplikovať *eliptické* kopule, Gaussovskú a Studentovu. Odhadneme parameter a pozrieme sa na hodnotu štatistiky, ktorá nám hovorí, aká je miera vzdialenosti medzi testovanou a empirickou kopulou, a zároveň sa pozrieme na *p-value*. Hodnoty výstupov sú následovné:

Kopula	Štatistika	Parameter	P-value
Normálna	0,02	0,192	0,4341
Studentova	0.0267	0,165	0,1374

Ako môžeme vidieť, ani jedna z kopúl nebola zle nafitovaná. Dokonca normálna kopula sa ukazuje ako veľmi dobre aplikovaná kopula. Za dobre odhadnutý považujeme aj parameter. Hodnota štatistiky tiež zatiaľ uprednostňuje normálnu kopulu.

Rovnaký postup použijeme aj v prípade Archimedovských kopúl. Testované budú celkovo 4 kopule. Gumbelova, ktorá výborne modeluje hornú chvostovú závislosť. Claytonova, ktorá je asymetrická so silnou dolnou chvostovou závislosťou, ale slabšou hornou závislosťou. Frankova, ktorá je symetrická, teda rovnako modeluje hornú ako aj dolnú chvostovú závislosť. Je podobná k normálnej kopule, len slabšie modeluje spomínané závislosti. Aplikovaná bola ešte aj Ali-Mikhail-Haq(AMH) kopula. Hodnoty výstupov po aplikácii funkcií sú:

Kopula	Štatistika	Parameter	P-value
Gumbelova	0,0365	1,117	0,06943
Frankova	0,0232	1,02	0,2033
AMH	0,0216	0,463	0,2852
Claytonova	0,0272	0,245	0,2143

Ako si môžeme všimnúť, najhoršie zo všetkých vyšla Gumbelova kopula. Z toho by sme mohli zamietnúť, že naše dáta majú signifikantnú hornú chvostovú závislosť. Ostatné kopule sú dobre namodelované. Môžeme povedať, že ako celkovo najlepšia kopula pre naše dáta sa ukazuje normálna kopula.

Môžeme si ale položiť nasledujúce otázky. Mohlo aplikovanie *GARCH* modelov zhladiť závislosť medzi dátami? Zmenili by sa výsledky, pokiaľ by sme aplikovali kopule už po *ARMA* modeloch? Čo ak si dáta rozdelíme na viac častí podľa ich priebehu a odstránime extrémne prípady? Rozoberieme si teda aj prípady, kedy dáta rozdelíme na 2 časti a pozrieme sa na aplikáciu kopúl a ich výsledky.

5 Modelovanie - špeciálne prípady

V tejto kapitole sa pozrieme na prípady, kde možná transformácia dát mohla zmeniť výsledky fitovania kopúl alebo si dáta rozdelíme na časti odstránením dát, kde sa extrémne zmenily hodnoty dát na krátkom časovom intervale.

5.1 Pomocou ARMA modelov

Ako prvý prípad si zoberieme stav, kedy budeme používať kopule hneď po filtrácii pomocou *ARMA* modelov. Podobne ako v predchádzajúcej kapitole aplikujeme na dáta logaritmus a po nezamietnutí nulovej hypotézy o jednotkovom koreni dáta diferencujeme.

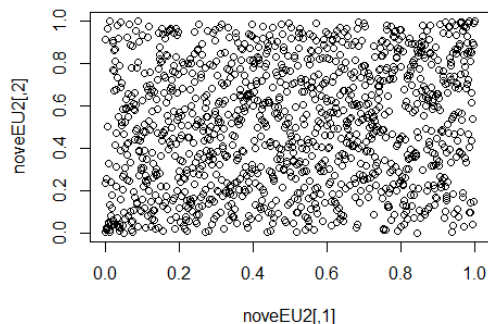
Ako ďalší krok sa budeme snažiť nájsť čo najjednoduchšie modely, obsahujúce len *AR* členy. Pre dáta menového kurzu nám predchádzajúci model vyhovuje, teda *AR*(4) model. Pre dáta indexu pražskej burzy v českých korunách i eurách je vyhovujúci model *AR*(3). Dané modely patrili k jedným z tých lepších v predchádzajúcej kapitole. Následne sa už dostávame na aplikáciu kopúl. Ešte predtým si vytvoríme párové dáta, pretransformujeme ich pomocou empirickej distribučnej funkcie a pozrieme sa na ich koreláciu. Aj v tomto prípade sú párové dáta, ktoré sú tvorené ako kombinácia indexu pražskej burzy v eurách a dáta menového kurzu, oveľa viac korelovanjšie. Konkrétne korelačný koeficient je -0.1653751 , zatiaľ čo v druhom prípade len -0.02897761 a preto aj teraz budeme aplikovať kopule na korelovanjšie dáta.

Najprv si dáta transformujeme kvôli zápornej korelácii a ako odčítanie druhého stĺpca našich dát od jednotky.

Pozorujeme, že v dátach nenastala veľká zmena, ale to neznamená, že sa nemohli zmeniť aj výsledky. Ako prvé budeme fitovať eliptické kopule. Hodnoty výstupov sú nasledovné:

Kopula	Štatistika	Parameter	P-value
Normálna	0,0284	0,198	0,1773
Studentova	0.0165	0,174	0,5989

Obr. 16: Graf dát



Ako si môžeme všimnúť, obe eliptické kopule sú vhodné, ako tomu bolo aj v prípade filtrácie dát pomocou *GARCH* modelov. Tentokrát sa normálna kopula už nejaví ako silnejšia. Odhadnuté parametre sa veľmi nezmenili, ale predsa len zmena o par stotín vedie aj k zmene kvality fitovania kopule. Pozrieme sa, čo to spraví s Archimedovskými kopulami.

Kopula	Štatistika	Parameter	P-value
Gumbelova	0,0387	1,131	0,05544
Frankova	0,0329	1,061	0,05045
AMH	0,0339	0,48	0,03946
Claytonova	0,0279	0,253	0,2303

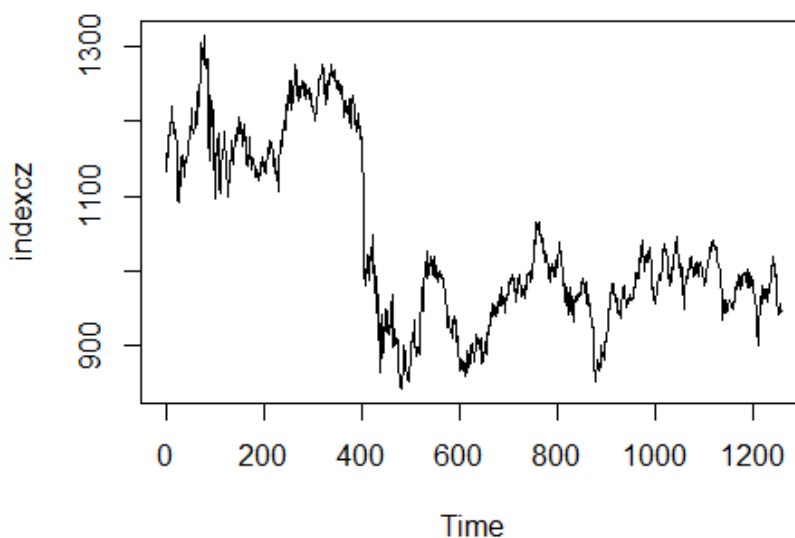
Odhanuté parametre sa tak isto veľmi nezmenili, lenže v tomto prípade aj malá zmena viedla dokonca k zamietnutiu fitovania kopule a na hladine významnosti 10 percent by sme dokonca až 4 kopule určili ako nevyhovujúce.

Pre tieto dôvody môžeme zhrnúť, že *GARCH* modely nám závislosť neporušili ani veľmi nezhladili. Dokonca použitie týchto modelov dáva lepšie výsledky v závislosti od dát, ktoré máme k dispozícii.

5.2 Rozdelenie podľa indexu

Keďže naše výsledky sa pre časový rad ako celok aj po filtrácii pomocou *GARCH* modelov alebo len pomocou *ARMA* modelov veľmi nemenia, rozhodli sme sa dáta rozdeliť na dve časti a aplikovať kopule na obe časti samostatne. Konkrétne sme dáta našich časových radov rozdelili podľa veľkého poklesu hodnoty indexu pražskej burzy na trhu. Rozhodli sme sa odstrániť 28 dát, ktoré sa nachádzajú približne v okolí spo-

Obr. 17: Priebeh hodnôt index PX v českých korunách

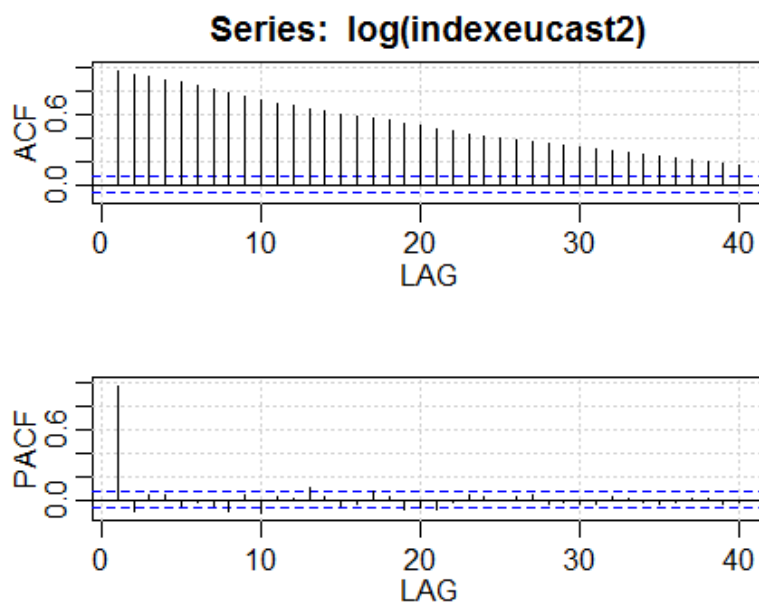


mínaného poklesu. Dostávame dokopy 6 časových radov o dĺžke 384 alebo 844 dát. Po testovaní jednotkového koreňa nám vyšlo, že všetky rady treba diferencovať a zároveň sme aplikovali logaritmus na zjemnenie rozptylu.

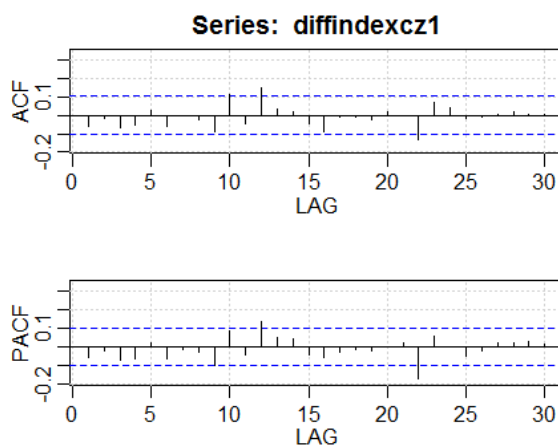
Dáta	TS pred dif.	KH 5%	TS po dif.	KH 5% po dif.
PX czk1	-3,2332	-3,42	-14,3167	-1,95
Px eur1	-3,2356	-3,42	-13,4204	-1,95
PX czk2	-3,3415	-3,41	-22,319	-1,95
Px eur2	-3,542	-3,41	-21,1031	-1,95
Kurz1	-2,5111	-3,42	-13,1334	-1,95
Kurz2	-3,0142	-3,41	-20,1858	-1,95

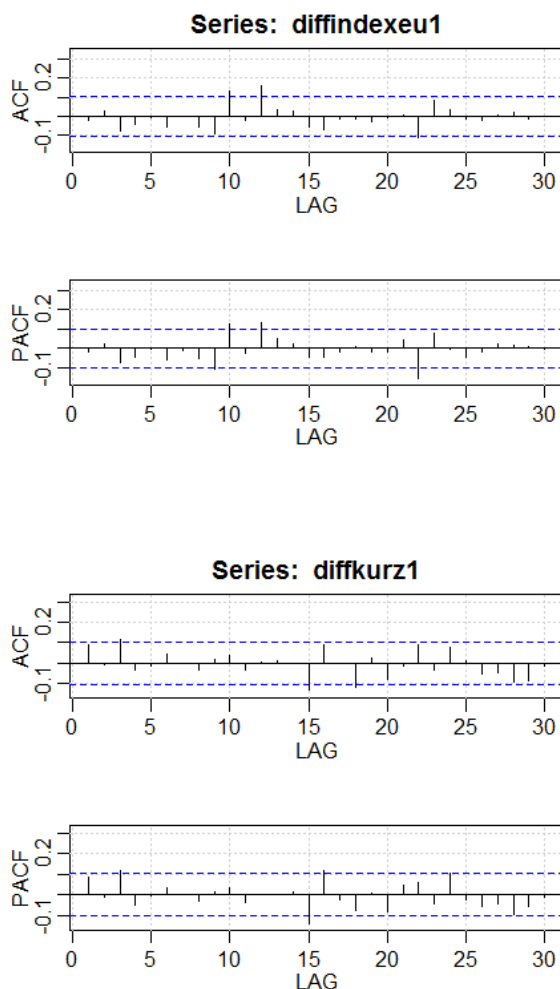
Napriek tomu, že pre druhú časť indexu pražskej burzy zamietame na hladine 5% nulovú hypotézu o prítomnosti jednotkového koreňa, tak sme dáta diferencovali kvôli priebehu autokorelácií.

Obr. 18: Autokorelácie pre PX v eurách druhej časti



Rozoberieme si najprv prvú časť, teda kratšie rady a pozrieme sa, aké *ARMA* modely sú vhodné a budeme sa ich snažiť nájsť čo najjednoduchšie. Ak bude potrebné, aplikujeme aj teóriu *GARCH* modelov. Ako prvé si vykreslíme autokorelácie, z ktorých sa dá model predurčiť.

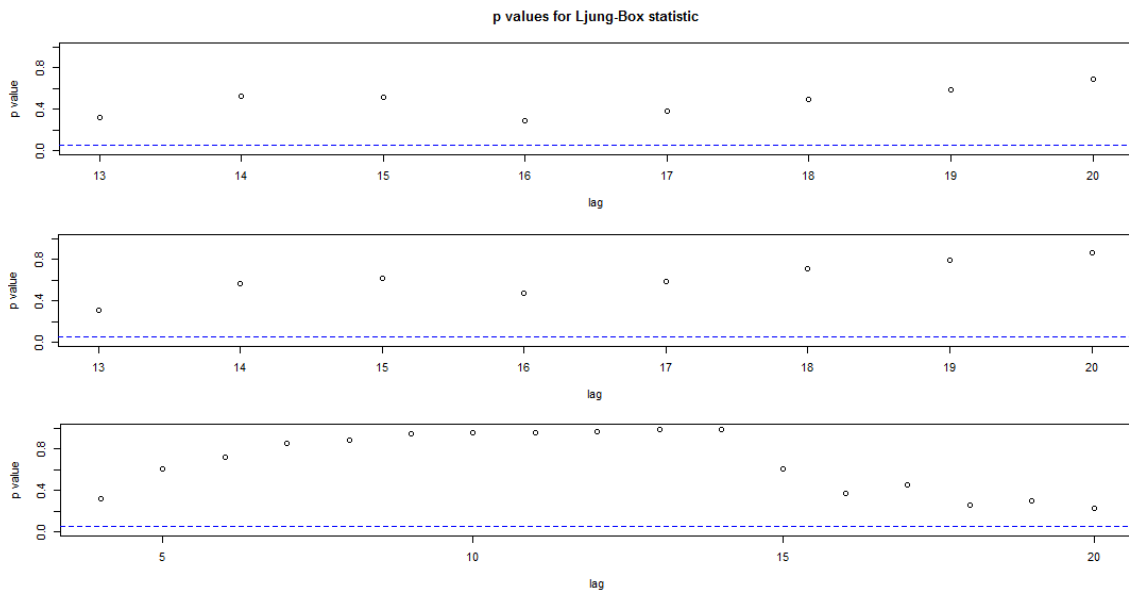




Obr. 19: Autokorelácie pre PX a pre kurz

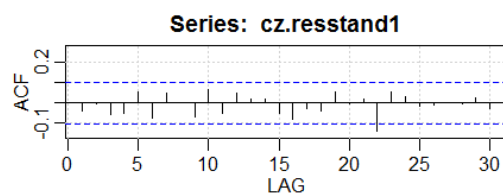
Vidíme, že pre tento prípad nebude už také jednoduché určiť modely pre index pražskej burzy v oboch menách. Výrazne autokorelácie sa prejavujú až pri desiatom posunutí, rovnako ako v prípade parciálnych autokorelácií. Môže to značiť, že vyhovujúci model bude veľkého rádu. Ohľadom kurzu to môže jednoduchšie, pretože výrazne autokorelácie sa objavujú podstatne skôr.

Predsa len sme testovali aj modely nízkeho rádu, ale všetky výrazne zlyhávali. Na oba časové rady indexu pražskej burzy najlepšie sedel až model $AR(12)$ a teda sa potvrdila prognóza očakávania vysokého rádu. Týkajúc sa časového radu menového kurzu, najlepšie vyhovoval model $AR(3)$. Zvolenie daných modelov nám potvrdila aj *Ljung – Box* štatistika.



Obr. 20: P-value pre Ljung-Boxové štatistiky v poradí pre PX a pre kurz

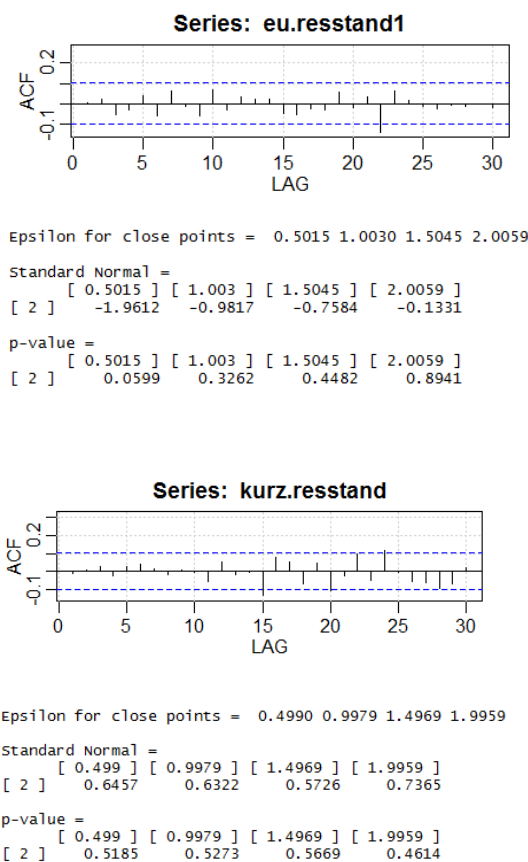
Následne testujeme štvorce reziduí na homoskedasticitu pomocou *Box.test*. Tento test nám ale vo všetkých prípadoch zamietne nulovú hypotézu, pretože hodnoty p-value boli rádovo 10^{-16} , a preto je potrebné dáta filtrovať pomocou *GARCH* modelov. Ako prvé boli otestované najviac využívané *garch(1,1)* modely. Jediný prípad, kde model zlyháva, je pri modelovaní dát menového kurzu. Ako najlepší sa v tomto prípade ukázal kombinovaný model $ar(3)+garch(1,1)$. Potvrdenie správnosti modelov nám preukázal aj *BDS test*.



Epsilon for close points = 0.5012 1.0023 1.5035 2.0046

Standard Normal =
 [0.5012] [1.0023] [1.5035] [2.0046]
 [2] -1.2966 -0.5343 -0.3964 -0.0355

p-value =
 [0.5012] [1.0023] [1.5035] [2.0046]
 [2] 0.1948 0.5931 0.6918 0.9717

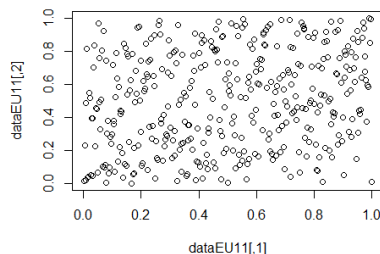


Obr. 21: Overenie správnosti modelov

Vytvoríme si párové dáta. Prvé budú tvorené kombináciou indexu pražskej burzy v českých korunách a menového kurzu. Druhé párové dáta budú tvorené kombináciou indexu pražskej burzy v eurách a menového kurzu. Vhodné dáta znova zvolíme pomocou korelačného koeficientu. Pre prvé dáta je korelačný koeficient -0.05836996 , pre druhé je rovný -0.2138104 . Zatiaľ sa stále v kombinácii indexu pražskej burzy v českých korunách a menového kurzu javí veľmi malá závislosť, a preto budeme modelovať kopule pre dáta s vyššou závislosťou.

Najprv použijeme transformáciu pomocou empirickej distribučnej funkcie. Potom si dáta transformujeme kvôli zápornej korelácii a to ako odčítanie druhého stĺpca našich dát od jednotky. Vykreslenie dát je zobrazené na obrázku 22. Vidíme, že sa dáta výrazne nezhlukujú. Po aplikácii normálnej a Studentovej kopule dostávame nasledovné výstupy:

Obr. 22: Graf dát pre prvú časť



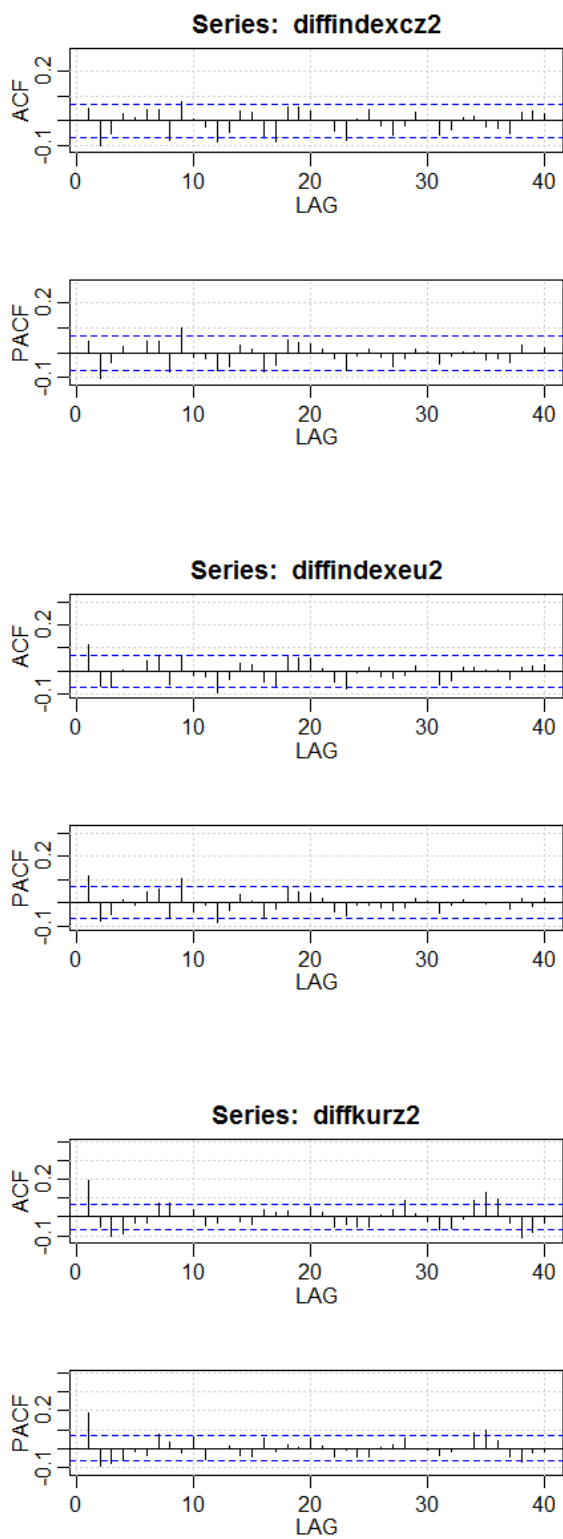
Kopula	Štatistika	Parameter	P-value
Normálna	0,0133	0,245	0,8836
Studentova	0.0232	0,206	0,2652

Už pri tomto výsledku sú šance pre lepšie fitnutie pre ostatné kopule veľmi malé, pretože normálna kopula je výborne nafitovaná. Hodnota štatistiky taktiež ukazuje veľmi dobrú aplikáciu normálnej kopule. Zobrazíme si výstupy aj pre zvyšné kopule.

Kopula	Štatistika	Parameter	P-value
Gumbelova	0,0205	1,15	0,2522
Frankova	0,0172	1,306	0,522
AMH	0,0157	0,567	0,7008
Claytonova	0,0222	0,297	0,3511

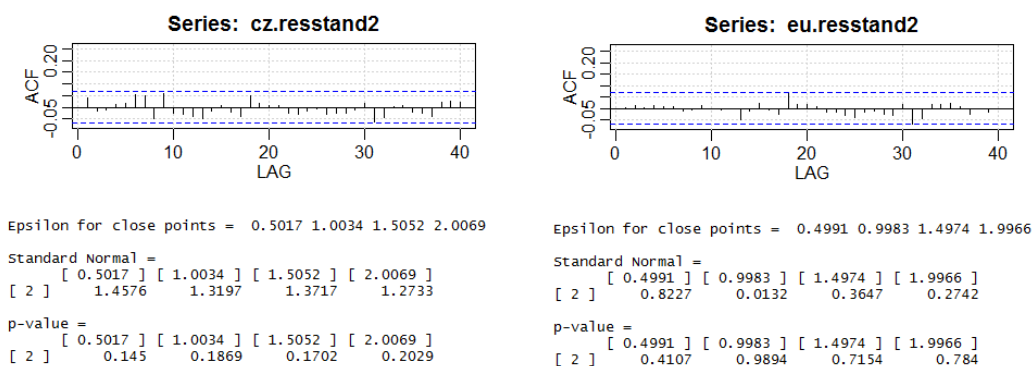
Aj po aplikovaní ostatných kopúl, stále je najlepšia normálna kopula. Veľmi dobre bola nafitovaná aj Ali-Mikhail-Haq kopula, ktorá nám možno troška napovedá, že ak je v dátach menšia chvostová závislosť, tak je to dolná. Teraz zopakujeme celý postup aj pre druhú časť našich rozdelených dát.

Ako prvý krok si určíme vhodné *ARMA* modely. Podľa autokorelácií sa dá pozorovať, že tentokrát by mohli byť vhodné aj modely s nižším rádom, ale nesmieme zabúdať, že výrazné autokorelácie sa nachádzajú aj na neskorších posunutiach, a preto budeme testovať aj rady s vyšším rádom, ak by rady s nižším zlyhali. Ostali sme prekvapení, pretože ako najvhodnejšie modely pre indexy pražskej burzy v oboch menách sa opäť



Obr. 23: Autokorelácie pre časové rady

ukázali až modely vyššieho rádu, konkrétne $MA(12)$. Pre menový kurz bol najvhodnejší $AR(4)$. Výstupy hodnôt p-value Ljung-Boxovej štatistiky potvrdili modely. Testovanie štvorcov reziduí nezamietol nulovú hypotézu iba v prípade menového kurzu, a preto je potreba modelovania $GARCH$ modelov pre index pražskej burzy v oboch menách. Ako najvhodnejší model pre index pražskej burzy v eurách sa osvedčil $garch(1,1)$ a pre index pražskej burzy v českých korunách sa ukázal najlepší kombinovaný model $arma(0,12)+garch(1,1)$. Správnosti voľby modelov zobrazíme rovnako ako v predchádzajúcich prípadoch.



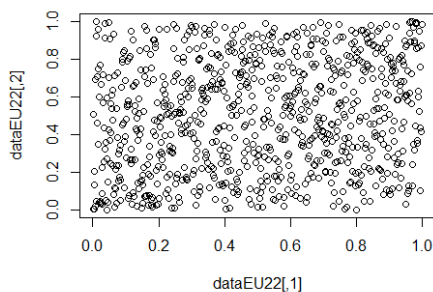
Obr. 24: Overenie správnosti modelov pre druhú časť dát

Podobne ako v minulých častiach si vytvoríme párové dáta a pozrieme sa na koreláciu dát. Korelačný koeficient pre kombináciu indexu pražskej burzy v českých korunách a menového kurzu vyšiel -0.02249383 a pre druhú dvojicu dát vyšiel -0.165239 a teda sme sa znova presvedčili, že je vhodné modelovať kopule pre druhú kombináciu dát. Ešte pred aplikáciou kopúl na dáta použijeme transformáciu pomocou empirickej distribučnej funkcie a z dôvodu zápornej korelácie odčítame druhý stĺpec našich dát od jednotky.

Nepozorujeme ani tentokrát výrazné zhlukovanie. Použitím eliptických kopúl dostávame nasledujúce výstupy.

Kopula	Štatistika	Parameter	P-value
Normálna	0,0209	0,194	0,4301
Studentova	0.0213	0,167	0,3032

Obr. 25: Graf našich dát pre druhú časť



Vhodnosť eliptických kopúl sa znova ukázala ako možná dobrá voľba, ale aplikujeme aj Archimedovské kopule.

Kopula	Štatistika	Parameter	P-value
Gumbelova	0,0283	1,123	0,1763
Frankova	0,0256	1,034	0,1454
AMH	0,0251	0,466	0,1863
Claytonova	0,0229	0,237	0,3631

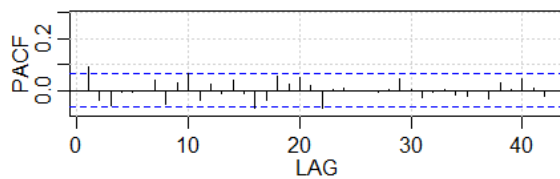
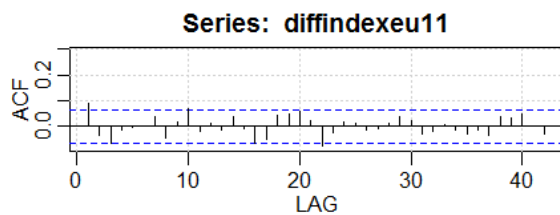
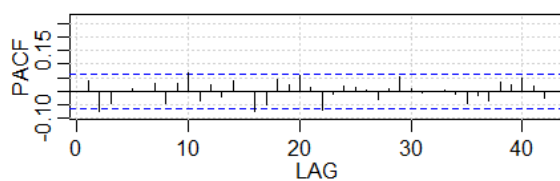
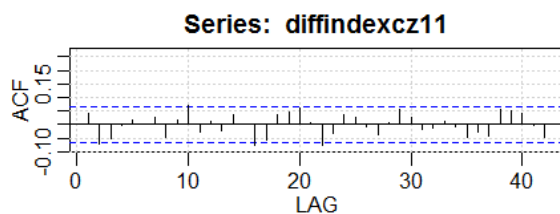
Celkovo môžeme vidieť, že najlepšia kopula znova vyšla normálna, ale dobré nafitovanie vykazuje aj Claytonova kopula, ktorá dobre modeluje dolnú chvostovú závislosť.

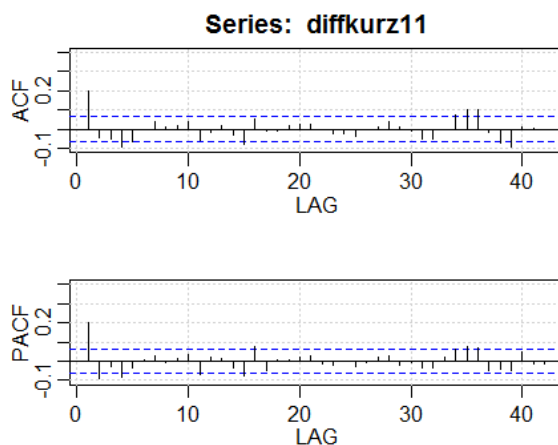
V tomto prípade sme mohli vidieť, že ak dáta rozdelíme na 2 samostatné časti podľa výrazného poklesu hodnôt indexu pražskej burzy, môžeme pozorovať zmenu v správaní sa určitých kopúl. Filtrované dáta začínajú ukazovať známky chvostových závislosti, keďže sa mení sila fitovania kopúl, ale ani v jednej časti neboli natoľko silné, aby prekonal aplikovanosť eliptických kopúl.

5.3 Rozdelenie podľa kurzu

Ako posledný prípad sme dáta rozdelili na 2 časti podľa známeho prepadu kurzu českej koruny oproti euru, ktorý sa udial v roku 2013. Odstránili sme 6 dát. Aplikujeme rovnaký postup určenia *ARMA* modelov, poprípade *GARCH* modelov a pozrieme sa ako sa zmenila chvostová závislosť filtrovaných dát a ako sa zmenili kvality fitovania kopúl.

Pred použitím *ARMA* modelov sme dáta diferencovali a použili logaritmus. Na určenie *ARMA* modelov nám znova posluží graf autokorelácií. Dostávame:

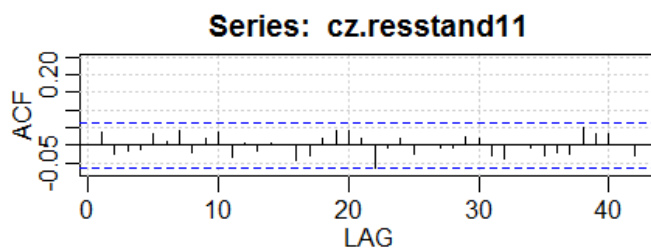




Obr. 26: Autokorelácie pre časové rady

Ako najvhodnejšie modely nám vyšli postupne $AR(3)$, $AR(3)$ a $AR(4)$ model. Reziduá ale neprešli testom podmienenej homoskedasticity a preto je potrebné použiť $GARCH$ modely.

Pre index pražskej burzy v českých korunách sa model $garch(1, 1)$ osvedčil, pre menový kurz bol najlepší kombinovaný model $ar(4)+garch(1, 0)$ a pre index pražskej burzy v eurách kombinovaný model $ar(3)+garch(1, 1)$. Zobrazieme si pre istotu aj overenia zvolenia dobrých modelov.



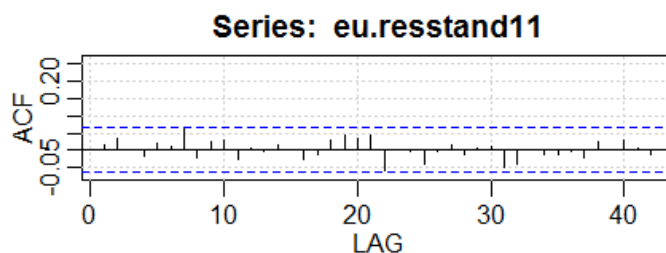
Epsilon for close points = 0.5004 1.0007 1.5011 2.0015

Standard Normal =

	[0.5004]	[1.0007]	[1.5011]	[2.0015]
[2]	-0.2973	0.1354	0.2709	0.5515

p-value =

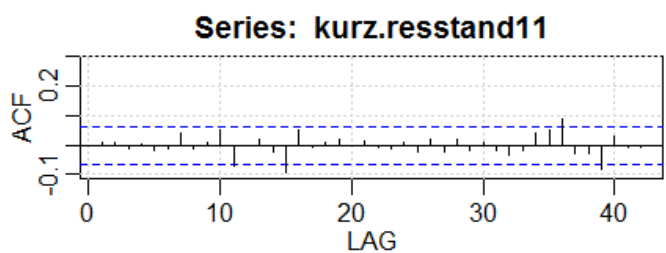
	[0.5004]	[1.0007]	[1.5011]	[2.0015]
[2]	0.7662	0.8923	0.7865	0.5813



Epsilon for close points = 0.5015 1.0030 1.5045 2.0059

Standard Normal =
 [0.5015] [1.003] [1.5045] [2.0059]
 [2] -1.9612 -0.9817 -0.7584 -0.1331

p-value =
 [0.5015] [1.003] [1.5045] [2.0059]
 [2] 0.0599 0.3262 0.4482 0.8941



Epsilon for close points = 0.5002 1.0004 1.5006 2.0007

Standard Normal =
 [0.5002] [1.0004] [1.5006] [2.0007]
 [2] 0.3674 -0.0069 -0.741 -1.1781

p-value =
 [0.5002] [1.0004] [1.5006] [2.0007]
 [2] 0.7133 0.9945 0.4587 0.2387

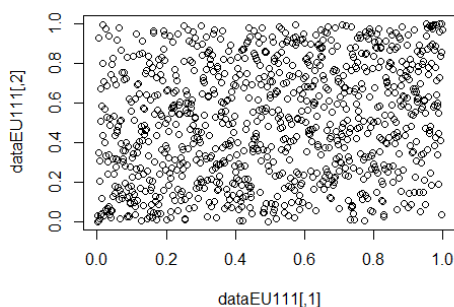
Obr. 27: Overenie správnosti modelov

Aj keď sa môže zdať, že reziduá menového kurzu obsahujú autokoreláciu, tak testovanie bieleho šumu sa preukázalo ako správne a preto sú reziduá vyhovujúce.

Nie je žiadnym prekvapením, že po vytvorení párových dát sa ukazuje kombinácia indexu pražskej burzy v eurách a menového kurzu korelovanejšia a preto pre tieto dáta budeme aplikovať kopule. Korelácia vyšla -0.2149996 a preto pretransformujeme dáta,

aby sme dostali kladnú závislosť.

Obr. 28: Graf našich dát



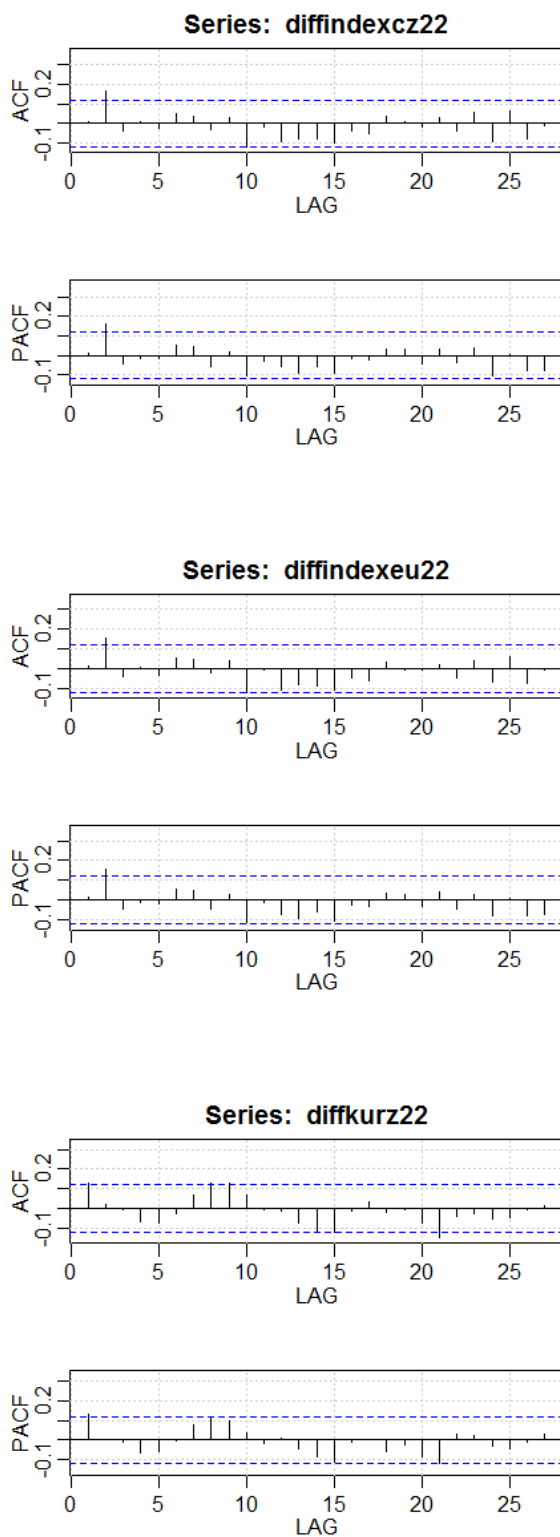
Môžeme si všimnúť, že sa zhlukovanie dát príliš nemení. Po aplikovaní všetkých kopúl dostávame nasledovné výstupy.

Kopula	Štatistika	Parameter	P-value
Normálna	0,0133	0,247	0,8756
Studentova	0.0244	0,21	0,1873
Gumbelova	0,0323	1,155	0,09341
Frankova	0,0167	1,334	0,537
AMH	0,0156	0,564	0,6978
Claytonova	0,0296	0,295	0,1603

Výrazne najlepšou kopulou je znova normálna kopula a keďže Gumbelova kopula nepreukazuje veľmi dobré nafiťovanie, tak predpokladáme slabé horné chvostové závislosti a keďže dobre aplikovaná kopula bola Ali-Mikhael-Haq kopula, môžeme zhodnotiť slabú až miernu dolnú chvostovú závislosť.

Ako poslednú časť treba ešte spraviť ten istý postup pre dáta z druhej časti. Najprv sa na dáta aplikuje logaritmus a potom sme na základe testu jednotkového koreňa použili diferencie.

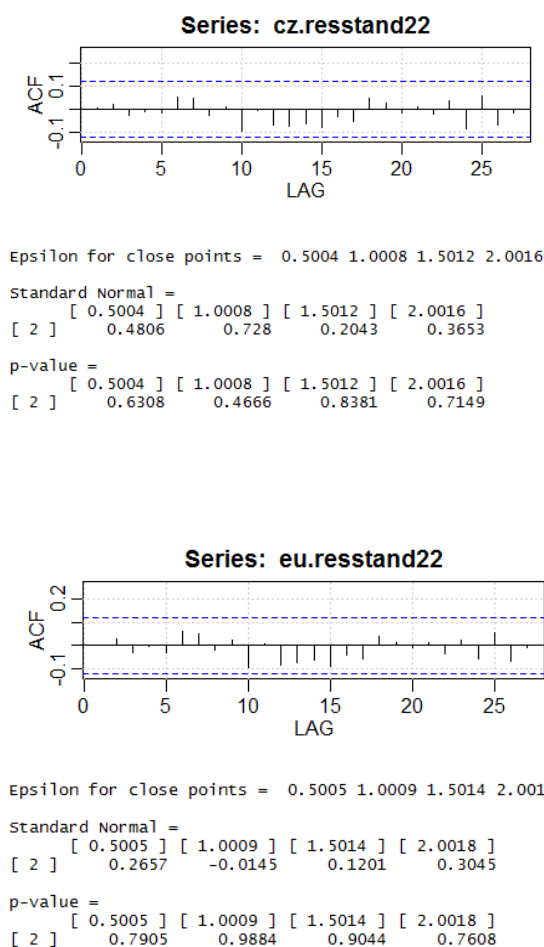
Na základe autokorelácií môžeme vidieť, že modely s nižším rádom by mohli byť vhodné. Pre každý model vyšiel najlepší $ar(2)$. Testovanie príslušných reziduí na pod-



Obr. 29: Autokorelácie pre časové rady

mienenú homoskedasticitu zlyhalo a preto je vhodné použiť *GARCH* modely alebo kombinácie s *GARCH* modelmi.

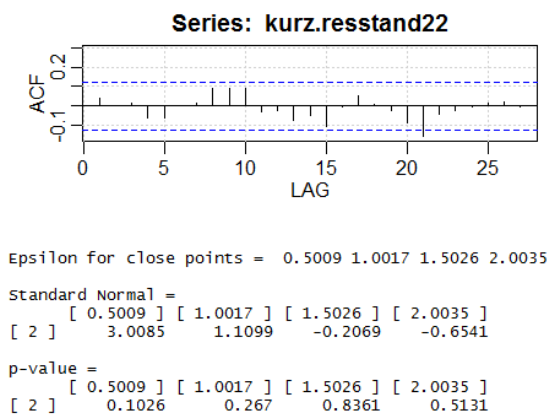
Pre index pražskej burzy v českých korunách sa najlepšie ukazovala kombinácia $ar(2)+garch(1,1)$, pre index pražskej burzy v eurách kombinácia $ar(2)+garch(1,1)$ a rovnako aj pre menový kurz kombinácia $ar(2)+garch(1,1)$. Overenie správnosti modelov sme otestovali pomocou rovnakých kritérií.



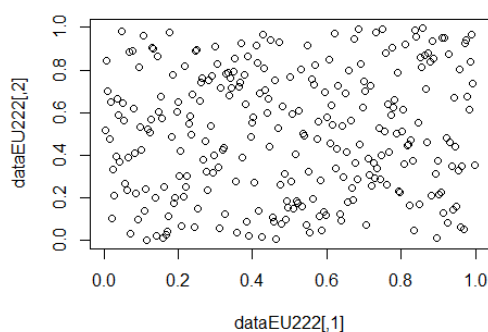
Obr. 30: Overenie správnosti modelov pre PX

Párové dáta indexu pražskej burzy v eurách spolu s menovým kurzom znova vykazujú väčšiu koreláciu a preto budeme modelovať kopule na túto kombináciu. Z dôvodu zápornej korelácie použijeme transformáciu pre získanie kladnej korelácie a pretransformujeme párové dáta pomocou empirickej distribučnej funkcie.

Vykreslíme si naše nové dáta a pozrieme sa, či očakávame zmenu v aplikáciách kopúl

**Obr. 31:** Overenie správnosti modelov pre kurz

alebo nebudeme prekvapení, ak sa eliptické kopule znova osvedčia.

Obr. 32: Graf našich dát

Môžeme si všimnúť, že v tomto prípade je hustota dát v strede o niečo menšia ako tomu bolo v ostatných prípadoch. Zostavíme si tabuľku pre výstupy z aplikácie kopúl.

Kopula	Štatistika	Parameter	P-value
Normálna	0,0211	0,089	0,3871
Studentova	0.0268	0,051	0,1494
Gumbelova	0,0196	1,059	0,5222
Frankova	0,0229	0,389	0,2832
AMH	0,0234	0,169	0,2323
Claytonova	0,0284	0,042	0,2113

Gumbelova kopula sa ukazuje ako najlepšia. Po prvý krát sa modelovanie eliptických kopúl nejavilo ako najlepšie.

Záver

V tejto práci sme sa oboznámili s problematikou kopúl a aplikovali sme ich pri modelovaní závislosti indexu PX a menového kurzu. Filtrované dáta ARMA-GARCH modelmi nejavili priveľké známky závislosti, čo sa odrazilo aj na výstupoch našej analýzy. Vo väčšine prípadov sa eliptické kopule, ktoré sa používajú v prípadoch dát s malou chvostovou závislosťou, javili ako najlepšie. Voľbu najvhodnejšej triedy kopúl neovplyvňovalo ani rozdelenie dát na rôzne časové obdobia ani zanedbanie použitia GARCH modelov.

To nás vedie k záveru, že počiatočný výber dát vo veľkej miere ovplyvnil výstupy. Za pozitívny výsledok analýzy považujeme fakt, že vo veľkej väčšine prípadov neboli zamietnuté na 5% úrovni žiadne kopule. Podrobnejšia analýza výsledkov jednotlivých štúdií sa nachádza v kapitolách 4 a 5.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Bacigál T.: *osobná komunikácia*, Slovenská Technická Univerzita, Bratislava, 2015
- [2] Komorníková M.: *osobná komunikácia*, Slovenská Technická Univerzita, Bratislava, 2015
- [3] Kresta A.: *Modelování vývoje výnosů zahraničního aktiva pro českého investora*, Řízení a modelování finančních rizik : sborník příspěvků z 5. mezinárodní vědecké konference (2010), 196-202, dostupné na internete (29.4.2015): http://www.ekf.vsb.cz/export/sites/ekf/rmfr/.content/galerie-dokumentu/2014/plne-zneni-prispevku/Kresta.Ales_1.pdf
- [4] Nelsen R.B.: *An Introduction to Copulas - Second Edition*, Springer Science+Business Media, Inc., New York, 2006
- [5] Stehlíková B.: *Časové rady - prednášky a cvičenia*, učebné texty, FMFI UK, Bratislava, 2013, dostupné na internete (29.4.2015): <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/cr13.html>
- [6] Stupňanová A.: *osobná komunikácia*, Slovenská Technická Univerzita, Bratislava, 2015