

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



FINANČNÉ MODELOVANIE - VYBRANÉ PROBLÉMY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

FINANČNÉ MODELOVANIE - VYBRANÉ PROBLÉMY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.



ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Mária Mészárosová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Finančné modelovanie – vybrané problémy
Financial modelling - selected problems

Cieľ: Vašíčkov (1977) a Cox-Ingersoll-Rossov model (1985) sú jednoduché short rate modely, pre ktoré je známe explicitné vyjadrenie ceny dlhopisu. Napriek tomu, že ide o dlho známe modely: V publikácii zo série research and working papers spoločnosti Egar technology sa tvrdí, že všeobecne v literatúre uvádzané pravdepodobnostné rozdelenie úrokových mier v CIR modeli (necentrálny chýkvrát) je nesprávne. V DP sa na tento výpočet pozrieme. Pôvodný Vašíčkov článok uvádza tvrdenie o priebehu výnosov bez dôkazu. Pritom nejde o tvrdenie, ktoré by bolo okamžite zrejmé. V diplomovej práci toto tvrdenie dokážeme. Ďalším populárnym spôsobom fitovania výnosových kriviek je model Nelsona a Siegela (1987). Pri interpretácii jeho koeficientov v knihe (Nawalkha et al., 2005) sa uvádza tvrdenie o konvexnosti/konkávnosti výnosovej krivky, ktorého interpretácia ani správnosť nie je jasná. V diplomovej práci sa toto objasní. Posledná časť diplomovej práce sa bude zaoberať opciami typu "chooser options", pre ktoré je v článku (Martinkute-Kauline, 2012) uvedených niekoľko poznámok o závislosti ceny opcie od parametrov. Sú však ilustrované len graficky pre zvolené parametre, v diplomovej práci sa budú študovať analyticky.

Vedúci: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 29.01.2014

Dátum schválenia: 10.02.2014
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie Chcela by som sa poďakovať doc. RNDr. Beáte Stehlíkovej, mojej školiteľke, za neuveriteľnú ochotu a za skvelé rady pri písaní tejto práce. Ďalej ďakujem Martinovi Hurbanovi za trpezlivosť a Marte Mészárosovej za originálne ilustrácie.

Abstrakt

MÉSZÁROSOVÁ, Mária: Finančné modelovanie - vybrané problémy [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2015, 57s.

Cieľom tejto práce je skúmať vybrané problémy z oblasti finančného modelovania. Práca sa zaoberá modelmi úrokových mier - Cox-Ingersoll-Rossov, Vašíčkov a Nelson-Siegelov model a chooser opciami. V každej zo skúmaných oblastí je uvedené doplnenie bežne dostupnej literatúry, prípadne jej korektúra.

Kľúčové slová: Cox-Ingersoll-Rossov model, Vašíčkov model, Nelson-Siegelov model, výnosová krivka, chooser opcie

Abstract

MÉSZÁROSOVÁ, Mária: Financial modelling [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2015, 57p.

Aim of this thesis is to analyse selected problems from the area of financial modelling. It deals with interest rate models - Cox-Ingersoll-Ross model, Vašíček model, Nelson-Siegel model and chooser options. A completion or a correction of the available literature is presented in each of the analysed areas.

Keywords: Cox-Ingersoll-Ross model, Vašíček model, Nelson-Siegel model, yield curve, chooser options

Obsah

Úvod	8
1 Pravdepodobnostné rozdelenie CIR procesu	9
1.1 Pravdepodobnostné rozdelenie náhodného procesu a Fokker-Planckova rovnica	10
1.2 Charakteristická funkcia náhodnej premennej a Fourierova transformácia	12
1.3 Cox-Ingersoll-Rossov proces	13
1.4 Pravdepodobnostné rozdelenie CIR procesu	13
1.4.1 Fourierova transformácia	14
1.4.2 Riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice	15
1.4.3 Výpočet momentov	18
1.4.4 Rozdelenie necentrálny chí-kvadrát	20
2 Vašíčkov model úrokových mier	24
2.1 Ornstein-Uhlenbeckov proces	24
2.2 Deriváty úrokovej miery a oceňovanie dlhopisu	25
2.3 Výnosová krivka pre Vašíčkov model	28
2.4 Priebeh výnosovej krivky vo Vašíčkovom modeli	30
3 Nelson-Siegelov model	35
3.1 Výnosové krivky v Nelson-Siegelovom modeli	35
3.2 Konvexnosť a konkávnosť výnosovej krivky	36
3.2.1 Interpretácia 1: globálna konvexnosť a konkávnosť	36
3.2.2 Interpretácia 2: existencia lokálneho extrému	38
3.2.3 Klasifikácia konvexnosti a konkávnosti	40
4 Chooser opcie	45
4.1 Závislosť ceny chooser opcie od času voľby	46
4.2 Závislosť ceny chooser opcie od expiračnej ceny	49
Záver	54
Zoznam použitej literatúry	55

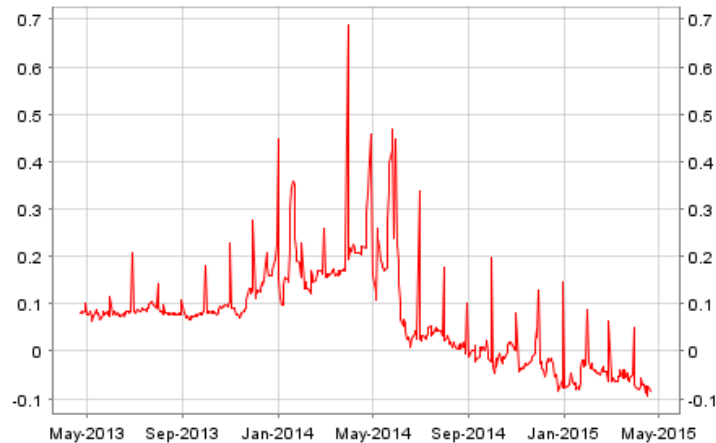
Úvod

Využitie matematiky vo financiách, konkrétne vo finančnom modelovaní, robí matematiku zaujímavejšou a atraktívnejšou. Predtým možno nikomu nič nehovoriace vzorce získavajú zmysel a aplikáciu v reálnom svete a motivujú ľudí zaujímajúcich sa o financie naštudovať si teóriu položenú na matematických základoch. Rozmach internetu spôsobil, že v dnešnej dobe má človek prístup k neuveriteľnému množstvu informácií, finančné modelovanie nevynímajúc. Žiaľ, nie všetky zdroje sa opierajú o dávno overené a správne matematické metódy a nie všetky zdroje ponúkajú kompletnú „pravdu“. Nájdeme diery v dôkazoch tvrdení, v horšom prípade žiadne dôkazy. V tejto diplomovej práci sa budeme zaoberať práve takýmito problémami, kde počas dopĺňania nedokonalých tvrdení a ich dokazovania alebo opravovania prejdeme množstvom oblastí matematiky a teórie financií.

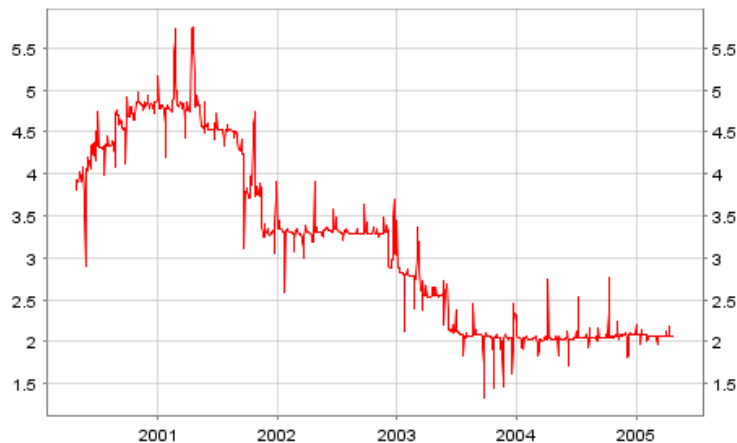
Diplomová práca je rozdelená do štyroch kapitol. V prvej kapitole budeme skúmať všeobecne známy Cox-Ingersoll-Rossov proces a budeme hľadať jeho pravdepodobnostné rozdelenie. Druhá kapitola sa zaoberá Vašíčkovým modelom a hlavne odvodením tvaru jeho výnosovej krivky. V tretej kapitole sa pozrieme na Nelson-Siegelov model a uvedieme klasifikciu pre konvexnosť a konkávnosť jeho kriviek. Posledná, štvrtá kapitola, skúma exotické opcie, konkrétne chooser opcie a popisuje ich závislosť od vybraných ukazovateľov.

1 Pravdepodobnostné rozdelenie CIR procesu

Vývoj úrokovej miery má nepochybniteľne náhodný charakter. Obrázok (obr.1) ilustruje vývoj nočnej medzibankovej úrokovej miery EONIA v období od apríla 2013 po apríl 2015 a v období od apríla 2000 po apríl 2005. Na jej modelovanie je preto vhodným nástrojom stochastický kalkulus.



Obr. 1: Euro OverNight Index Average 2013-2015 [9]



Obr. 2: Euro OverNight Index Average 2000-2005 [9]

Ďalšou finančnou veličinou, o ktorej sa dá predpokladať, že je náhodná, je volatilita na finančnom trhu, napríklad na trhu s akciami a ich derivátmi. Nízka volatilita zodpovedá stabilným obdobiam, kým v nestabilných je volatilita vysoká. Kvantitatívne to vyjadruje napríklad VIX (pozri obr.3), Chicago Board Options Exchange Market Vo-

latility Index, ktorý meria implikovanú volatilitu opcií na index S&P500 a tým pádom trhové očakávania o volatilitu na akciovom trhu [5].



Obr. 3: Priebeh CBOE VolatilityIndex za obdobie 11/2014-04/2015 [5]

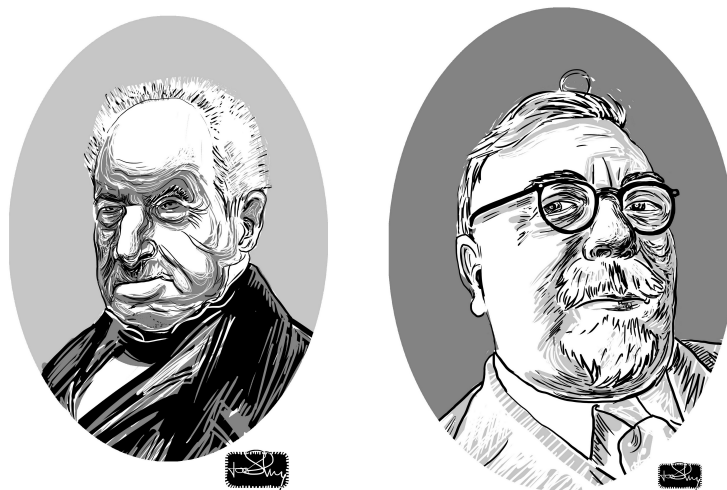
1.1 Pravdepodobnostné rozdelenie náhodného procesu a Fokker-Planckova rovnica

Definujme najskôr základné pojmy stochastického kalkulu, s ktorými budeme pracovať v tejto kapitole.

Stochastický proces je systémom náhodných premenných $\{X(t), t \in \tau\}$ definovaných na pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{A}, P) a indexovaných parametrom t , kde $t \in \tau$. Pokiaľ τ je diskretná množina, stochastický proces nazývame diskretný; v prípade, že ide o interval, stochastický proces je spojitý. Parameter t zvyčajne popisuje čas.

Brownov pohyb $\{X(t), t \geq 0\}$ je stochastický proces, pričom

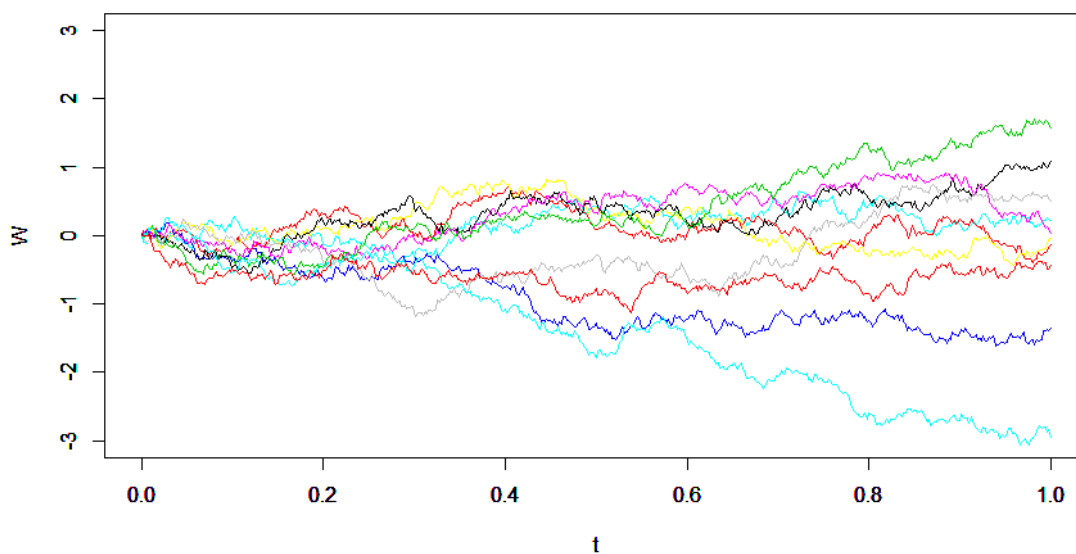
1. všetky prírastky $X(t + \Delta) - X(t)$ majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu\Delta$ a varianciou $\sigma^2\Delta$,
2. všetky trajektórie sú spojité v premennej $t \geq 0$ s pravdepodobnosťou 1
3. pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ sú prírastky $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1)$, ..., $X(t_n) - X(t_{n-1})$ nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa bodu 1.,
4. $X(0) = 0$



Obr. 4: Brown a Wiener [23]

Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ nazývame **Wienerov proces** [31].

Nech $a(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $b(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{nm}$ sú merateľné funkcie, W je m -rozmerný



Obr. 5: Desať realizácií Wienerovho procesu s časovým krokom 1/500

Wienerov proces a X_0 je náhodná premenná v \mathbb{R}^n , nezávislá od W . Potom stochastický proces X je riešením **stochastickej diferenciálnej rovnice**

$$\begin{aligned} dX &= a(X) dt + b(X) dW, \\ X(0) &= X_0, \end{aligned} \tag{1}$$

ak je s pravdepodobnosťou 1 rovný zodpovedajúcemu Itóovmu procesu

$$X(t) = X_0 + \int_0^t a(X(s)) ds + \int_0^t a(b(s)) dW s.v.$$

Navyše, a nazývame drift a b je difúzia [28]. Ďalej budeme pokračovať s jednorozmernými procesmi, ktorých hodnota v čase 0 je konštantná, teda $X(0) = x_0 = \textit{konšt.}$

Kumulatívna distribučná funkcia $G = G(X, t) = P(X(t) < x | X(0) = x_0)$ procesu $X(t)$, $t \geq 0$, ktorý spĺňa stochastickú diferenciálnu rovnicu (1) môže byť vypočítaná pomocou funkcie hustoty $p = \frac{\partial G}{\partial x}$, ktorá je riešením **Fokker-Planckovej rovnice**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2 p) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu p), \\ p(x, 0) &= \delta(x - x_0). \end{aligned} \quad (2)$$

Pomocou $\delta(x - x_0)$ sme označili tzv. Diracovu deltu funkciu lokalizovanú v bode x_0 [31].

1.2 Charakteristická funkcia náhodnej premennej a Fourierova transformácia

Charakteristickou funkciou náhodnej premennej X nazývame funkciu

$$\varphi_X(t) := E e^{itX},$$

pričom $i^2 = -1$ a $t \in \mathbb{R}$. Jednou z vlastností charakteristickej funkcie je aj jednoznačnosť. Nech X a Y sú náhodné premenné. Potom

$$\phi_X(t) = \phi_Y(t) \Rightarrow X \stackrel{d}{=} Y,$$

čiže charakteristická funkcia jednoznačne určuje rozdelenie náhodnej premennej [11].

Charakteristickú funkciu náhodnej premennej vieme získať Fourierovou transformáciou funkcie hustoty náhodnej premennej [27]. Keďže hustota $p(t, y(t))$ náhodného procesu $y(t)$ je riešením Fokker-Planckovej rovnice (2), aplikáciou Fourierovej transformácie na (2) získame transformovanú rovnicu, ktorej riešením bude tentokrát charakteristická funkcia náhodného procesu $y(t)$. Nech $f(t, \omega)$ je charakteristická funkcia náhodného procesu $y(t)$. Získať ju vieme nasledovne:

$$f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega y} p(t, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y} p(t, y) dy = \mathcal{F}(-\omega). \quad (3)$$

Pre potreby tejto práce budeme využívať nasledujúce vlastnosti Fourierovej transformácie: Nech $f(x)$ je funkcia a $\hat{f}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ivx} dx$ jej Fourierova transformácia. Potom platia nasledujúce vzťahy [10]:

$f(x)$	$\hat{f}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ivx} dx$
$a \cdot f(x)$	$a \cdot \hat{f}(v)$
$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$	$(iv)^n \hat{f}(v)$
$x^n f(x)$	$i^n \frac{d^n \hat{f}(v)}{dv^n}$

Tabuľka 1: Prevodová tabuľka pre Fourierovu transformáciu

1.3 Cox-Ingersoll-Rossov proces

V roku 1985 John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll a Stephen A. Ross predstavili tzv. CIR model popisujúci správanie sa okamžitej úrokovej miery $y(t)$ ako riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice [6]

$$\begin{aligned} dy(t) &= k(\eta - y(t)) dt + \theta \sqrt{y(t)} dW_t \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \quad (4)$$

kde η , θ a k sú konštanty. Rýchlosť, akou sa úroková miera prispôbuje dlhodobému priemeru η , je označená k a volatilitu reprezentuje θ . V tomto modeli sa drift aj volatilita menia s meniacou sa hodnotou okamžitej úrokovej miery. Variancia je úmerná odmocnине aktuálnej úrokovej miery, čiže nárast úrokovej miery spôsobí nárast variancie. Toto zaručuje aj nezápornosť úrokovej miery. V čase navrhnutia tohto modelu, ako aj v nedávnej minulosti nadobúdali úrokové miery naozaj také hodnoty, že možnosť záporných úrokových mier sa považovala za nevýhodu modelu. V súčasnosti to už neplatí (pozri obr.1 na začiatku kapitoly). Poznamenajme ešte, tiež v súvislosti s úvodom kapitoly a tam uvedeným indexom volatility, že v tzv. Hestonovom modeli cien akcií [12] sa druhá mocnina volatility akcie modeluje presne procesom (4).

1.4 Pravdepodobnostné rozdelenie CIR procesu

V literatúre sa ku Cox-Ingersoll-Rossovmu procesu uvádza, že má rozdelenie necentrálny chí kvadrát. Toto tvrdenie nájdeme napríklad v [4], [34] alebo [21]. Na druhej

strane článok spoločnosti *Egar Technology* uvádza dôkaz o tom, že CIR proces nemá rozdelenie necentrálny chí-kvadrát.

Nasledujúce výpočty budú robené na základe článku Marka Ioffeho [13], ktorý v ňom uvádza len čiastkové výsledky. Naším cieľom bude zistiť, či sa mýli Ioffe alebo samotní Cox, Ingersoll a Ross, ktorí tvrdenie o rozdelení „svojho“ procesu uvádzajú aj v pôvodnom článku [6].



Obr. 6: Cox



Obr. 7: Ingersoll



Obr. 8: Ross [23]

1.4.1 Fourierova transformácia

Aplikovaním Fourierovej transformácie, a využitím jej linearity [10], na pravú stranu Fokker-Planckovej rovnice pre CIR proces získame:

$$\mathcal{F} \left[-\frac{\partial}{\partial y} (k(\eta - y)p) \right] (v) + \frac{1}{2} \mathcal{F} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\theta^2 yp) \right] (v). \quad (5)$$

Z tabuľkovej vlastnosti pre deriváciu [10] a s opätovným využitím linearity vieme výraz (5) upraviť na tvar

$$\begin{aligned} & -iv\mathcal{F} [k\eta p - kyp] (v) + \frac{1}{2} (iv)^2 \mathcal{F} [\theta^2 yp] (v) \\ & = -ivk \{ \eta \mathcal{F} [p] (v) - \mathcal{F} [yp] (v) \} - \frac{1}{2} v^2 \theta^2 \mathcal{F} [yp] (v). \end{aligned} \quad (6)$$

Zo vzťahu pre násobok argumentu (dualita s deriváciou (tab.1)) a s využitím definície (3) získame ďalšími úpravami výrazu (6):

$$\begin{aligned} & -ivk\eta\mathcal{F}[p](v) + i^2vk\frac{d\mathcal{F}[p]}{dv}(v) - \frac{1}{2}v^2\theta^2i\frac{d\mathcal{F}[p]}{dv}(v) \\ & = -ivk\eta f(t, -v) - vk\frac{\partial f(t, -v)}{\partial v} - \frac{1}{2}iv^2\theta^2\frac{\partial f(t, -v)}{\partial v}. \end{aligned}$$

Jednoduchými úpravami sa dostaneme až k tvaru:

$$\begin{aligned} & ik\eta\omega f(t, \omega) - \omega k\frac{\partial f(t, \omega)}{\partial \omega} + \frac{1}{2}i\omega^2\theta^2\frac{\partial f(t, \omega)}{\partial \omega} \\ & = \frac{\partial f(t, \omega)}{\partial \omega} \left(-\omega k + \frac{1}{2}i\omega^2\theta^2 \right) + ik\eta\omega f(t, \omega). \end{aligned} \quad (7)$$

Fourierova transformácia ľavej strany (2) nám dáva

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial p(t, y)}{\partial t} \right] (v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega y} \frac{\partial p(t, y)}{\partial t} dy = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} p e^{i\omega y} dy = \frac{\partial f(t, \omega)}{\partial t}. \quad (8)$$

Spojením vzťahov (8) a (7) sme získali kvázilineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu v premenných t a ω a k nej zodpovedajúcu počiatočnú podmienku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} & = ik\eta\omega f + \left(-k\omega + \frac{1}{2}i\theta^2\omega^2 \right) \frac{\partial f}{\partial \omega} \\ f(0, \omega) & = e^{i\omega y_0}, \end{aligned} \quad (9)$$

ktorú sme získali nasledujúcim spôsobom:

$$f(0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega y} p(0, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega y} \delta(y - y_0) dy = e^{i\omega y_0}.$$

1.4.2 Riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice

Ideou riešenia tejto kvázilineárnej rovnice je konštrukcia pomocnej lineárnej rovnice, ktorá bude mať tvar

$$-\frac{\partial z}{\partial t} - \left(k\omega - \frac{1}{2}i\theta^2\omega^2 \right) \frac{\partial z}{\partial \omega} - ik\eta\omega f \frac{\partial z}{\partial f} = 0, \quad (10)$$

pričom neznámou v tejto funkcii je $z(t, \omega, f)$.

Podľa *Tvrdenia 3.2.* z [30] platí, že ak $z(t, \omega, f)$ je hladkým riešením (10) a f je hladká funkcia, a zároveň platí, že $z(t, \omega, f(t, \omega))$ je konštantné pre každé $t \in \mathbb{R}^+$, $\omega \in \mathbb{R}$ a $\frac{\partial z}{\partial f} \neq 0$ pre každé $t \in \mathbb{R}^+$, $\omega \in \mathbb{R}$, potom f je riešením rovnice (9) na $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Ďalej, podľa *Tvrdenia 3.1.* [30] je funkcia z riešením rovnice (10) práve vtedy, keď je

funkcia z konštantná na každej charakteristike, čiže na každom riešení charakteristického systému.

Charakteristickým systémom rovnice (10) je:

$$\dot{\omega} = -\omega k + \frac{1}{2}i\omega^2\theta^2$$

$$\dot{t} = -1$$

$$\dot{f} = -ik\omega\eta f$$

Najskôr pomocou prvých dvoch rovníc získame vzťah pre prvý integrál:

$$\frac{\dot{\omega}}{\dot{t}} = \omega k - \frac{1}{2}i\omega^2\theta^2$$

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega \left(k - \frac{1}{2}i\theta^2\omega\right)} = \dot{t}.$$

Po zintegrování racionálnej funkcie na ľavej strane získame:

$$tk - \ln \left| \frac{\omega}{k - \frac{1}{2}i\theta^2\omega} \right| = c_1,$$

kde $c_1 \in \mathbb{R}$. Prvý integrál má teda tvar

$$p = tk - \ln \left| \frac{\omega}{k - \frac{1}{2}i\theta^2\omega} \right|. \quad (11)$$

Teraz sa pozrieme na prvú a tretiu rovnicu charakteristického systému, ich podiel nám dáva:

$$\frac{\dot{\omega}}{\dot{f}} = \frac{k - \frac{1}{2}i\theta^2\omega}{ik\eta f},$$

$$\frac{\dot{f}}{f} = \frac{ik\eta}{k - \frac{1}{2}i\theta^2\omega} \dot{\omega}$$

Po zintegrování tejto rovnice dostávame druhý integrál

$$q = \frac{2k\eta}{\theta^2} \ln \left(1 + \frac{1}{2}c_1 i \theta^2 e^{kt} \right) - f = c_2. \quad (12)$$

Pre zjednodušenie označme:

$$\alpha = \frac{2k\eta}{\theta^2}, \quad (13)$$

$$\beta = \frac{\theta^2}{k}. \quad (14)$$

Integrály (11) a (12) sú konštantné na charakteristikách, po použití substitúcie (13) ich vieme ešte viac zjednodušiť

$$p = tk - \ln \frac{\omega}{1 - \frac{1}{2}i\beta\omega} + \ln k = tk - \ln \frac{\omega}{1 - \frac{1}{2}i\beta\omega}$$

$$q = \ln k^{-\alpha} + \ln \left(1 - \frac{1}{2}i\beta\omega\right)^{-\alpha} - \ln f = \ln \left(1 - \frac{1}{2}i\beta\omega\right)^{-\alpha} - \ln f,$$

keďže k je konštantné.

Všeobecné riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice v teda je

$$z(t, \omega, f) = \Phi \left(tk - \ln \frac{\omega}{1 - \frac{1}{2}i\beta\omega}, \ln \left(1 - \frac{1}{2}i\beta\omega\right)^{-\alpha} - \ln f \right), \quad (15)$$

kde Φ je ľubovoľná hladká funkcia dvoch premenných.

Podľa spomínaného *Tvrdenia 3.2* [30], ak položíme všeobecné riešenie pomocnej rovnice (15) rovné konštante, napr. nule, potom získané f bude hľadaným riešením rovnice (9). Funkciu Φ určíme z podmienky $f(0, \omega) = e^{i\omega y_0}$. Dosadením $t = 0$ do (15) dostaneme

$$\Phi \left(\ln \frac{1 - \frac{1}{2}i\beta\omega}{\omega}, \ln \left(1 - \frac{1}{2}i\beta\omega\right)^{-\alpha} - i\omega y_0 \right) = 0.$$

Hľadáme takú funkciu Φ , pre ktorú bude platiť, že $\Phi(p, q) = 0$. Máme:

$$e^q = e^{\ln(1 - \frac{1}{2}i\beta\omega)^{-\alpha} - i\omega y_0} = e^{-i\omega y_0} \left(1 - \frac{1}{2}i\beta\omega\right)^{-\alpha}. \quad (16)$$

Teraz z e^p vyjadrime ω :

$$e^p = \frac{1 - \frac{1}{2}i\beta\omega}{\omega},$$

$$\omega = \frac{1}{e^p + \frac{1}{2}i\beta}. \quad (17)$$

Z (16) a (17) dostávame:

$$0 = e^q - e^{-\frac{iy_0}{e^p + \frac{1}{2}i\beta}} \left(1 - \frac{1}{2}i\beta \frac{1}{e^p + \frac{1}{2}i\beta}\right)^{-\alpha},$$

Z čoho vidíme, že hľadaná funkcia $\Phi(p, q)$ je

$$\Phi(p, q) = e^q - e^{-\frac{iy_0}{e^p + \frac{1}{2}i\beta}} \left(1 - \frac{1}{2}i\beta \frac{1}{e^p + \frac{1}{2}i\beta}\right)^{-\alpha}.$$

Po dosadení tejto funkcie Φ do všeobecného riešenia (15) pomocnej rovnice (10) si vieme vyjadriť explicitné riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice (9):

$$f(t, \omega) = \left(1 - \frac{1}{2}i\beta\omega\right)^{-\alpha} e^{\frac{iy_0 e^{-kt}}{\omega^{-1} - \frac{1}{2}i\beta(1-e^{-kt})}} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}i\beta e^{-kt}}{\omega^{-1} - \frac{1}{2}i\beta(1-e^{-kt})}\right)^{\alpha}. \quad (18)$$

Môžeme si všimnúť, že toto riešenie (18) je totožné s riešením z článku M. Ioffeho [13]. Keďže neskôr budeme pracovať s $f(t, 0)$, prenásobme zlomky vo funkcii (18) špeciálnou jednotkou v tvare $\frac{\omega}{\omega}$. Dostávame:

$$f(t, \omega) = \left(1 - \frac{1}{2}i\beta\omega\right)^{-\alpha} e^{\frac{iy_0\omega e^{-kt}}{1 - \frac{1}{2}i\beta\omega(1-e^{-kt})}} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}i\beta\omega e^{-kt}}{1 - \frac{1}{2}i\beta\omega(1-e^{-kt})}\right)^{\alpha}. \quad (19)$$

1.4.3 Výpočet momentov

Napriek tomu, že výpočet momentov nie je nutný na zistenie pravdepodobnostného rozdelenia CIR procesu, pozrieme sa na tento postup. Hodnota momentov nám napovie, či nami získané riešenia sú zhodné so strednou hodnotou a disperziou uvádzanou v pôvodnom článku autorov Cox, Ingersoll a Ross [6].

Funkcia $f(t, \omega)$ (19) je charakteristickou funkciou rozdelenia úrokovej miery $y(t)$. Momenty náhodnej premennej $y(t)$ vieme nájsť použitím vzorca [11]:

$$E\left(y(t)^k\right) = (-i)^k \left. \frac{df(t, \omega)^k}{d\omega} \right|_{\omega=0} \quad (20)$$

a teda vieme získať strednú hodnotu a varianciu $y(t)$. Výpočet momentov nám značne zjednoduší počítanie s logaritmom charakteristickej funkcie:

$$\ln f(t, \omega) = -\alpha \ln \left(1 - \frac{1}{2}i\beta\omega\right) + \frac{iy_0\omega e^{-kt}}{1 - \frac{1}{2}i\beta\omega(1-e^{-kt})} + \ln \left(1 - \frac{\frac{1}{2}i\beta\omega e^{-kt}}{\frac{1}{2}i\beta\omega(e^{-tk} - 1) + 1}\right)^{\alpha}. \quad (21)$$

Deriváciou tejto rovnice (21) podľa ω získame:

$$\frac{1}{f(t, \omega)} \frac{\partial f(t, \omega)}{\partial \omega} = \frac{1}{2}i\alpha\beta(1 - e^{-tk}) + iy_0 e^{-tk}.$$

Všimnime si, že $f(t, 0) = 1$. Potom

$$E(y) = -i \left. \frac{\partial f(t, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = \frac{1}{2}\alpha\beta(1 - e^{-tk}) + y_0 e^{-tk}. \quad (22)$$

Varianciu budeme počítat taktiež pomocou logaritmu charakteristickej funkcie (21).

Označme si navyše

$$A(t, \omega) = \frac{iy_0\omega e^{-tk}}{1 - \frac{1}{2}i\beta\omega(1 - e^{-tk})}.$$

Derivácia (21) potom vyzerá ako

$$\frac{1}{f(t, \omega)} \frac{\partial f(t, \omega)}{\partial \omega} = \frac{\frac{1}{2}i\alpha\beta}{1 - \frac{1}{2}i\beta\omega} + \frac{\partial A(t, \omega)}{\partial \omega} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}\alpha\beta}{y_0 - \frac{1}{2}A(t, \omega)\beta} \right). \quad (23)$$

Derivovaním (23) sa vieme dopracovať ku vzťahu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(t, \omega)^2} \left(f(t, \omega) \frac{\partial^2 f(t, \omega)}{\partial \omega^2} - \left(\frac{\partial f(t, \omega)}{\partial \omega} \right)^2 \right) \\ &= \frac{\frac{1}{4}\alpha\beta^2}{(1 - \frac{1}{2}i\beta\omega)^2} - \left(\frac{\partial A(t, \omega)}{\partial \omega} \right)^2 \frac{\frac{1}{4}\alpha\beta^2}{(y_0 - \frac{1}{2}A(t, \omega)\beta)^2} + \frac{\partial^2 A(t, \omega)}{\partial \omega^2} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}\alpha\beta}{y_0 - \frac{1}{2}A(t, \omega)\beta} \right). \end{aligned}$$

Podme sa pozrieť ako vyzerajú derivácie $A(t, \omega)$. Pre zjednodušenie zavedme substitúciu

$$\begin{aligned} a(t) &= iy_0 e^{-tk}, \\ b(t) &= \frac{1}{2}i\beta (1 - e^{-tk}), \end{aligned}$$

kde $a(t)$ a $b(t)$ už nezávisia od ω . Derivácie pre $\omega = 0$ potom vyzerajú nasledovne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(t, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} &= \frac{a(t)}{(1 - b(t)\omega)^2} \Big|_{\omega=0} = a(t), \\ \frac{\partial^2 A(t, \omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega=0} &= \frac{2a(t)b(t)}{(1 - b(t)\omega)^3} \Big|_{\omega=0} = 2a(t)b(t). \end{aligned}$$

Všimnime si ešte, že $A(t, \omega) \Big|_{\omega=0} = 0$. Potom po použití vzorca (20) a dosadení do známeho vzorca pre výpočet variancie [11],

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2, \quad (24)$$

ľahko spočítame, že

$$\text{Var}(y(t)) = \frac{1}{4}\alpha\beta^2 (1 - e^{-2kt}) + y_0\beta \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{y_0} \right) e^{-kt} (1 - e^{-kt}). \quad (25)$$

Výpočet momentov z charakteristickej funkcie sme používali sledujúc článok M. Ioffeho [13]. Existuje však aj iný spôsob ako sa dopracovať k strednej hodnote náhodného procesu $y(t)$, a to aplikovaním strednej hodnoty na celú rovnicu pre CIR proces (4) [1]:

$$dy(t) = k(\eta - y(t))dt + \theta\sqrt{y(t)}dW_t \quad /E[.] \quad (26)$$

$$dE[y(t)] = k(\eta - E[y(t)])dt + 0. \quad (27)$$

V rovnici (27) sme využili, že stredná hodnota prírastku Brownovho pohybu je nulová. Táto rovnica (27) je obyčajnou diferenciálnou rovnicou, s počiatočnou podmienkou

$$E[y(0)] = y_0,$$

ktorej riešenie nám dáva rovnaký výsledok ako v prípade výpočtu z charakteristickej funkcie, teda:

$$E[y(t)] = y_0 e^{-kt} + \eta(1 - e^{-kt}).$$

Podobne by sme sa vedeli prepracovať aj k variancii procesu $y(t)$, ktorú by sme znova ráтали použitím vzorca (24) a riešením stochastickej diferenciálnej rovnice.

Pracujme teda so vzťahom (4), pričom naším cieľom bude vypočítať $E(y^2)$. Za pomoci Itóovej lemy dostaneme pre $x = y^2$ stochastickú diferenciálnu rovnicu:

$$dx = [(2k\eta + \theta^2)y - 2ky^2] dt + [2y\theta\sqrt{y}] dW_t. \quad (28)$$

Na rovnicu (28) aplikujeme strednú hodnotu, využijeme vlastnosť nulovej strednej hodnoty prírastku Wienerovho procesu a dostaneme

$$dE(x) = (2k\eta + \theta^2) E(y) dt - 2kE(x) dt.$$

Strednú hodnotu $E(y)$ sme už vypočítali, dosadíme za ňu teda (22). Pre zjednodušenie notácie použijeme substitúciu $E(x) = z$. Máme:

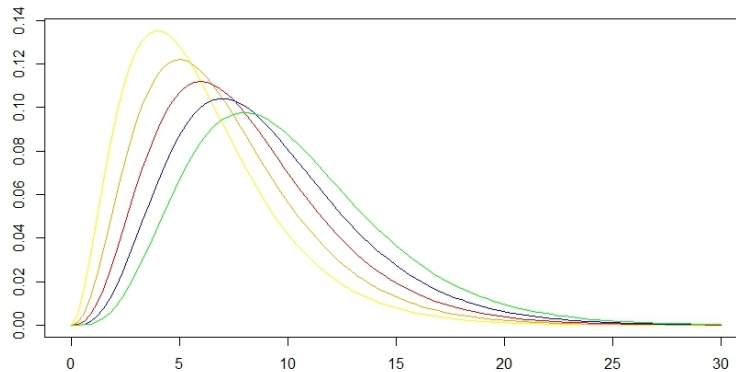
$$\frac{dz}{dt} = -2kz + (2k\eta + \theta^2)(y_0 e^{-kt} + \eta(1 - e^{-kt})). \quad (29)$$

Rovnica (29) je lineárnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu s nekonštantnou nehomogenitou, ktorú vieme vyriešiť metódou variácie konštánt. Dopracujeme sa tým k rovnakému výsledku ako (25).

1.4.4 Rozdelenie necentrálny chí-kvadrát

Ak Y_i sú navzájom nezávislé normálne rozdelené náhodné premenné s nulovou strednou hodnotou a disperziou rovnou 1, potom

$$X = \sum_{i=1}^k Y_i^2$$



Obr. 9: Hustota chí-kvadrát rozdelenia pre 6 až 10 stupňov voľnosti

má χ^2 rozdelenie s k stupňami voľnosti.

Necentrálny chí kvadrát [32] je pravdepodobnostné rozdelenie sumy n štvorcov nezávislých normálne rozdelených náhodných premenných so strednou hodnotou μ a varianciou 1. Zovšeobecnením tejto definície je definovanie rozdelenia necentrálny chí-kvadrát pomocou charakteristickej funkcie, kde môžeme uvažovať $n \in \mathbb{R}$.

Charakteristickou funkciou necentrálneho chí-kvadrátu je nasledujúca funkcia:

$$\varphi(\omega, n, \lambda) = (1 - 2i\omega)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{i\lambda}{\omega^{-1} - 2i}},$$

kde $\lambda = n\mu^2$ je parameter necentrality.

Pre násobok platí:

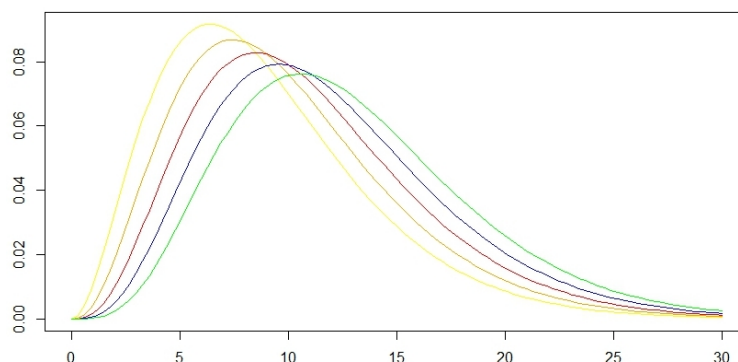
$$\varphi(a\omega, n, \lambda) = (1 - 2ia\omega)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{i\lambda}{(a\omega)^{-1} - 2i}}. \quad (30)$$

Podľa článku [6] má násobok nášho procesu (4) rozdelenie necentrálny chí-kvadrát, konkrétne:

$$2cy(t) \sim \chi^2[2q + 2, 2u], \quad (31)$$

pričom v našom označení máme:

$$\begin{aligned} c &= \frac{2k}{\theta^2(1 - e^{-kt})}, \\ u &= cy_0 e^{-kt}, \\ q &= \frac{2k\eta}{\theta^2} - 1. \end{aligned}$$



Obr. 10: Hustota necentrálneho chí-kvadrát rozdelenia pre 6 až 10 stupňov voľnosti, parameter necentrality=3

Parameter $2q + 2$ označuje počet stupňov voľnosti a $2u$ je parameter necentrality.

V článku [6] Cox, Ingersoll a Ross tvrdia, že násobok nášho $y(t)$ má necentrálny chí kvadrát rozdelenie s uvedenými parametrami (31). V praxi to znamená, že ak je to pravda, musíme byť schopní nájsť také hodnoty parametrov k, η, θ, y_0 v rovnici (18), že po ich dosadení získame rovnicu (30), ktorá závisí len od troch parametrov: λ, a, n . Porovnaním rovníc (18) a (30) získame dvojicu

$$e^{\frac{iy_0 e^{-kt}}{\omega^{-1} - \frac{1}{2}\beta i(1-e^{-kt})}} = e^{\frac{i\lambda}{(a\omega)^{-1} - 2i}} \quad (32)$$

$$\left[\frac{1 - \frac{\frac{1}{2}i\beta e^{-kt}}{\omega^{-1} - \frac{1}{2}\beta(1-e^{-kt})}}{1 - \frac{1}{2}i\beta\omega} \right]^\alpha = (1 - 2i\omega a)^{-\frac{n}{2}}, \quad (33)$$

z ktorých si vieme vyjadriť vzťahy pre parametre λ, a, n . Po ich vyjadrení a následnom dosadení do (30) by sme mali dostať rovnicu (18), ktorú sme získali Fourierovou transformáciou Fokker-Planckovej rovnice pre CIR proces.

Najskôr sa pozrieme, čo vieme dostať z (32). Porovnaním exponentov a metódou porovnávania koeficientov sa prepracujeme k vyjadreniam pre λ a a .

$$a = \frac{\beta(1 - e^{-kt})}{4} = \frac{\theta^2(1 - e^{-kt})}{4k} \quad (34)$$

$$\lambda = \frac{y_0 e^{-kt}}{a} = \frac{4y_0 e^{-kt}}{\beta(1 - e^{-kt})} = \frac{4ky_0 e^{-kt}}{\theta^2(1 - e^{-kt})}. \quad (35)$$

Z (33) hneď vidíme, že môžeme zvoliť $\alpha = \frac{n}{2}$ a potom prevrátením základu na ľavej

strane rovnice a jeho porovnaním s pravou stranou sa dostaneme ku vzťahu:

$$\frac{1 - \frac{1}{2}i\beta\omega}{\omega^{-1} - \frac{1}{2}i\beta} = \frac{1 - 2i\omega a}{\omega^{-1} - \frac{1}{2}i\beta + \frac{1}{2}i\beta e^{-kt}}. \quad (36)$$

Mark Ioffe v článku [13] tvrdí, že sú dva dôvody, prečo CIR process nemá rozdelenie necentrálny chí kvadrát. Prvým z nich je, že vo všeobecnosti, čiže pre $kt \neq \infty$, nie je možné nájsť parametre, ktoré by spĺňali (18) aj (30). Ak by sme teraz použili nesprávnu metódu porovnania čitateľa s čitateľom a menovateľa s menovateľom, dostali by sme, že $a = \frac{\beta}{4}$, čo by pre náš skôr získaný vzťah pre a (34) platilo len v prípade, že $kt = \infty$. Korektnými úpravami zlomkov v (36) však dostávame ten istý výsledok pre a , ako sme získali porovnávaním exponentov v (32).

Pre charakteristické funkcie platí vlastnosť $\varphi_X(at) = \varphi_{aX}(t)$. Čiže, ak $s = at$, tak $\varphi_X(s) = \varphi_{aX}\left(\frac{s}{a}\right)$. Ak teda známu charakteristickú funkciu pre necentrálny chí-kvadrát budeme počítat ako $\varphi\left(\frac{\omega}{a}, n, \lambda\right)$, dostaneme sa k tomu istému výsledku ako (18).

Druhým dôvodom, prečo je podľa M. Ioffeho necentrálny chí-kvadrát nesprávne rozdelenie, je nesúhlasiace grafické a numerické porovnanie distribučných funkcií necentrálneho chí-kvadrátu a distribučnej funkcie prislúchajúcej hustote (18). Na výpočet neznámej distribučnej funkcie používa numerický vzorec, do ktorého dosádza nesprávnym spôsobom vypočítané parametre necentrálneho chí-kvadrátu. Toto tým pádom vyústí do hypotézy, že numerický odhad distribučnej funkcie necentrálneho chí-kvadrátu a numerický odhad distribučnej funkcie CIR-procesu sú rôzne.

2 Vašíčkov model úrokových mier

V tejto kapitole sa budeme najskôr zaoberať Ornstein-Uhlenbeckovým procesom, ktorý tvorí základ Vašíčkovho modelu. Z derivátov úrokovej miery sa budeme venovať dlhopisu a jeho oceňovaniu, odvodieme vzorec výnosovej krivky pre Vašíčkov model a nakoniec definujeme jej priebeh.

2.1 Ornstein-Uhlenbeckov proces

Jedným zo stochastických procesov, ktoré majú široké využitie v teórii modelov úrokových mier, je aj takzvaný Ornstein-Uhlenbeckov proces $y = y(t)$, ktorý je riešením nasledujúcej stochastickej diferenciálnej rovnice:

$$dy(t) = [\phi - \kappa y(t)] dt + \beta dW(t). \quad (37)$$

Parametre ϕ , β a κ sú konštantné, pričom zároveň platí, že $\kappa > 0$. Alternatívnym zápisom (37) môže byť

$$dy(t) = \kappa [\theta - y(t)] dt + \beta dW(t), \quad (38)$$

kde sme použili jednoduchú substitúciu $\theta = \frac{\phi}{\kappa}$ [19].

Ornstein-Uhlenbeckov proces je známy svojou vlastnosťou *mean-reversion*, čo v jeho prípade znamená, že drift je kladný, keď $y(t) < \theta$ a záporný, keď $y(t) > \theta$. Proces je tým pádom stále priťahovaný smerom k rovnovážnej hodnote θ . Stochastický člen v (38) však môže zapríčiniť vzdiaľovanie sa $y(t)$ od θ . Parameter κ určuje mieru približovania sa procesu k rovnovážnej polohe a je často označovaný ako mean-reversion parameter alebo sila priťahovania k rovnovážnej hodnote [19].

O tom, že θ je skutočne rovnovážnou hodnotou, sa vieme ľahko presvedčiť pomocou výpočtu limity strednej hodnoty (38). Pre strednú hodnotu $Ey(t)$ platí

$$dE(y(t)) = E(dy(t)) = \kappa [\theta - E(y(t))] dt + E(\beta dW(t)) = \kappa [\theta - E(y(t))] dt,$$

pričom sme využili fakt, že $E(\beta dW(t)) = 0$. Riešenie nasledujúcej diferenciálnej rovnice je zrejmé:

$$\frac{d}{dt} E(y(t)) = \kappa [\theta - E(y(t))], \quad (39)$$

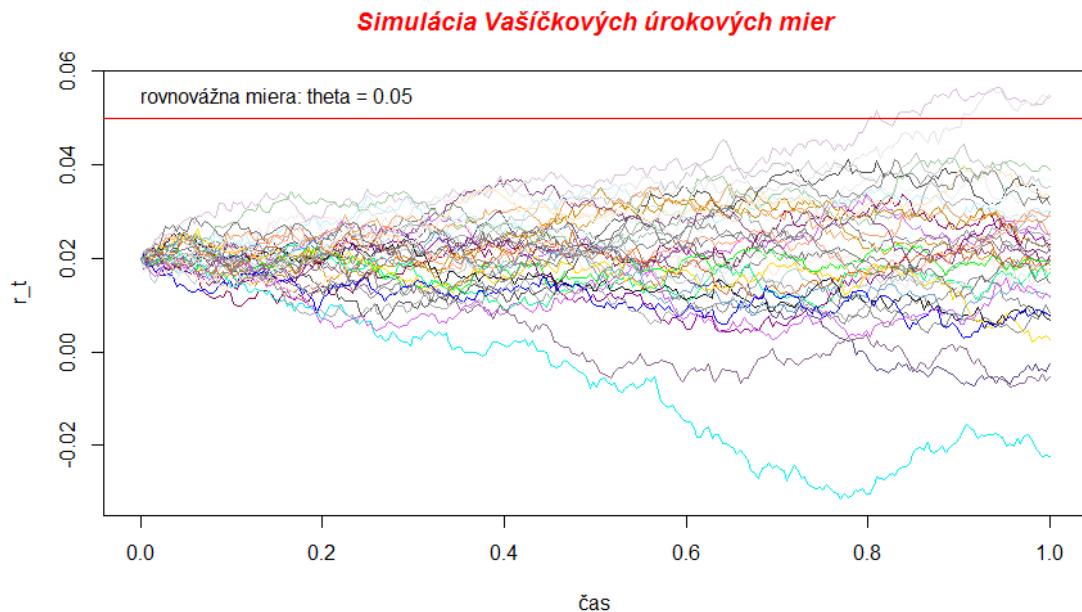
$$E(y(t)) = \theta + [E(y(0)) - \theta] e^{-\kappa t}. \quad (40)$$

Ako vidíme, z (40) je potom zjavné, že $\lim_{t \rightarrow \infty} E y(t) = \theta$.

Oldřich Vašíček, český matematik, v roku 1977 vo svojom článku *An equilibrium characterization of the term structure* [33] navrhol použiť Ornstein-Uhlenbeckov proces na modelovanie úrokovej miery. Predpokladá teda, že krátkodobá úroková miera sleduje Ornstein-Uhlenbeckov proces:

$$dy(t) = \kappa [\theta - y(t)] dt + \beta dW(t).$$

Vašíčekov model patrí medzi historicky prvé a najjednoduchšie modely vývoja okamžitej úrokovej miery. Ak je úroková miera blízka nule, volatilita je stále konštantná a proces sa preto môže s nenulovou pravdepodobnosťou dostať aj do záporných hodnôt. Na obrázku (11) môžeme vidieť simulácie s parametrami $\kappa = 0.1$, $\beta = 0.015$, $\theta = 0.05$, kde okamžitá úroková miera zachádza aj do záporných hodnôt.



Obr. 11: Trajektórie short-ratu

2.2 Deriváty úrokovej miery a oceňovanie dlhopisu

Derivát je finančný kontrakt, ktorého výnosy sú odvodené zo správania sa nejakého aktíva (dlhopis, akcia), úrokovej miery, menového kurzu alebo indexu - vo všeobecnosti

podkladového aktíva.

My sa budeme zaoberať oceňovaním derivátov úrokovej miery. Medzi tie najjednoduchšie patria deriváty typu swap, floor, cap, dlhopisy a opcie na dlhopisy. Pri analýze týchto derivátov je potrebné zohľadniť nielen samostatné podkladové aktívum (v našom prípade úrokovú mieru), ale aj celú výnosovú krivku opisujúcu časovú štruktúru úrokových mier pre jednotlivé dĺžky doby splatnosti. Výplata (pay-off) derivátov úrokovej miery je závislá od hodnoty okamžitej úrokovej miery a od doby do splatnosti nami uvažovaných derivátov.

Bezкупónovým dlhopisom budeme nazývať kontrakt na základe ktorého nám v stanovenom čase T bude vyplatená stanovená čiastka X . Predstavuje jeden zo základných kontraktov naviazaných na podkladový proces - okamžitú úrokovú mieru. Dlhopis je dohodou zaplatiť určitú čiastku oproti príslubu obdržania vyššej čiastky v budúcnosti. Čas maturity (splatnosti) dlhopisu označujeme T , cena dlhopisu $P(t, T)$ je funkciou okamžitého času t a doby splatnosti T . Cenami dlhopisov je určená časová štruktúra úrokových mier $R(t, T)$, ktorá je definovaná vzťahom

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, \quad (41)$$

pričom $P(t, T)$ je cena dlhopisu a $R(t, T)$ je úroková miera dlhopisu v dnešný deň t a so splatnosťou v čase expirácie T . Zo vzťahu (41) vieme $R(t, T)$ vyjadriť nasledujúcim spôsobom:

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t}.$$

Okamžitá úroková miera r_t v čase t je potom úroková miera $R(t, T)$ s okamžitou splatnosťou $T = t$, teda

$$r_t = R(t, t).$$

Keďže podkladovým aktívom bezкупónového dlhopisu je úroková miera, budeme pri odvodzovaní parciálnej diferenciálnej rovnice pre jeho cenu vychádzať z nasledujúceho vzťahu:

$$dr = \mu(t, r) dt + \sigma(t, r) dw,$$

ktorý opisuje vývoj okamžitej úrokovej miery pomocou jednofaktorového modelu. Cena dlhopisu závisí od aktuálneho času t , času expirácie T a od hodnoty okamžitej úrokovej

miery r , t.j. $P = P(r, t, T)$. Neskôr sa ukáže, že cena dlhopisu závisí len od času ostávajúceho do expirácie, čiže $\tau = T - t$. Z Itóovej lemy dostávame

$$\begin{aligned} dP &= \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial P}{\partial r} dw \\ &= \mu_B(t, r) dt + \sigma_B(t, r) dw, \end{aligned}$$

kde $\mu_B(t, r)$ je drift a $\sigma_B(t, r)$ je volatilita ceny dlhopisu.

Zostavme portfólio z dlhopisov s dvoma maturitami, pričom budeme mať jeden dlhopis s maturitou T_1 a Δ dlhopisov s maturitou T_2 . Hodnota π portfólia je

$$\pi = P(r, t, T_1) + \Delta P(r, t, T_2). \quad (42)$$

Zmena hodnoty portfólia $d\pi$ je daná ako

$$d\pi = dP(r, t, T_1) + \Delta dP(r, t, T_2) \quad (43)$$

$$= (\mu_B(r, t, T_1) + \Delta \mu_B(r, t, T_2)) dt + (\sigma_B(r, t, T_1) + \Delta \sigma_B(r, t, T_2)) dw. \quad (44)$$

Vhodnou voľbou pomeru medzi počtami dlhopisov Δ ,

$$\Delta = -\frac{\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2)}, \quad (45)$$

vieme eliminovať náhodnú časť v (43) a dostaneme bezrizikové portfólio, ktoré má len deterministickú časť

$$d\pi = \left(\mu_B(r, t, T_1) - \frac{\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2)} \mu_B(r, t, T_2) \right) dt.$$

Aby sme vylúčili možnosť arbitráže, výnos tohto portfólia sa musí rovnať okamžitej bezrizikovej úrokovej miere, t.j. $d\pi = r\pi dt$, konkrétne

$$\mu_B(r, t, T_1) - \frac{\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2)} \mu_B(r, t, T_2) = r\pi.$$

Po dosadení za π z (42) a (45) dostávame

$$\mu_B(r, t, T_1) - \frac{\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2)} \mu_B(r, t, T_2) = r \left(P(r, t, T_1) - \frac{\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2)} P(r, t, T_2) \right),$$

Z čoho vyplýva rovnosť

$$\frac{\mu_B(r, t, T_1) - rP(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_1)} = \frac{\mu_B(r, t, T_2) - rP(r, t, T_2)}{\sigma_B(r, t, T_2)}.$$

Keďže maturity T_1 a T_2 boli ľubovoľné, tento výraz nemôže závisieť od maturity dlhopisu, t.j. existuje taká funkcia $\lambda(r, t)$, že je splnená identita

$$\lambda(r, t) = \frac{\mu_B(r, t, T) - rP(r, t, T)}{\sigma_B(r, t, T)} \quad (46)$$

pre ľubovoľnú maturitu T . Funkcia $\lambda(r, t)$ sa nazýva trhovú cenu rizika, pretože vyjadruje očakávaný nárast výnosu dlhopisu na jednotku rizika.

Dosadením μ_B a σ_B do (46) dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu $P(r, t, T)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu(r, t) - \lambda(r, t)\sigma(r, t))\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2(r, t)}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0$$

Hodnota dlhopisu v okamihu splatnosti je rovná jednotke bez ohľadu na aktuálnu hodnotu okamžitej úrokovej miery. Funkcia $P(r, T, T)$ teda musí spĺňať terminálovú podmienku [31]

$$P(r, T, T) = 1 \text{ pre každé } r > 0.$$

2.3 Výnosová krivka pre Vašíčekov model

Vašíček [33] opisuje okamžitú úrokovú mieru prostredníctvom jednofaktorového modelu

$$dy(t) = \kappa[\theta - y(t)]dt + \beta dW(t).$$

Cenu dlhopisu budeme hľadať ako funkciu okamžitej úrokovej miery r a času τ , ktorý zostáva do splatnosti, t.j. $\tau = T - t$. Funkcia $P(r, \tau)$ potom spĺňa parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad (47)$$

so začiatočnou podmienkou $P(r, 0) = 1$ pre každé $r > 0$. Pre konštantnú trhovú cenu rizika λ budeme riešenie hľadať v tvare

$$P(r, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r},$$



Obr. 12: Oldřich Vašíček [23]

pričom funkcie A,B budú spĺňať začiatočné podmienky $A(0) = 1$ a $B(0) = 0$. Derivácie vystupujúce v rovnici vyzerajú nasledovne:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\tau} &= e^{-Br} \left(\dot{A} - A\dot{B}r \right), \\ \frac{\partial P}{\partial r} &= -BAe^{-Br}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} &= B^2 Ae^{-Br}.\end{aligned}$$

Po dosadení derivácií do parciálnej diferenciálnej rovnice (47) dostávame

$$-\left(\dot{A} - A\dot{B}r \right) + \frac{\sigma^2}{2} B^2 A - (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma) AB - rA = 0.$$

Združiac členy obsahujúce r a neobsahujúce r máme

$$\left(-\dot{A} + \frac{\sigma^2}{2} AB^2 - (\kappa\theta - \lambda\sigma) AB \right) + rA \left(\dot{B} + \kappa B - 1 \right) = 0.$$

Aby bola táto rovnosť splnená pre všetky r , obe zátvorky musia byť identicky nulové, teda:

$$\begin{aligned}-\dot{A} + \frac{\sigma^2}{2} AB^2 - (\kappa\theta - \lambda\sigma) AB &= 0, \\ \dot{B} + \kappa B - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Obyčajná diferenciálna rovnica pre B je lineárna a preto jej riešenie spĺňajúce začiatočnú podmienku $B(0) = 0$ je možné nájsť v tvare

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}.$$

Keď poznáme funkciu B, vieme vypočítať A. Integrovaním rovnice pre A dostávame

$$\ln A = \int \frac{d \ln A}{d\tau} = \int \frac{\sigma^2}{2} B^2 - (\kappa\theta - \lambda\sigma) B d\tau.$$

Dosadením funkcie $B(\tau)$, vypočítaním integrálu a využitím podmienky $A(0) = 1$ dostaneme

$$\ln A(\tau) = \left[\frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa\tau}) - \tau \right] R_\infty - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (1 - e^{-\kappa\tau})^2,$$

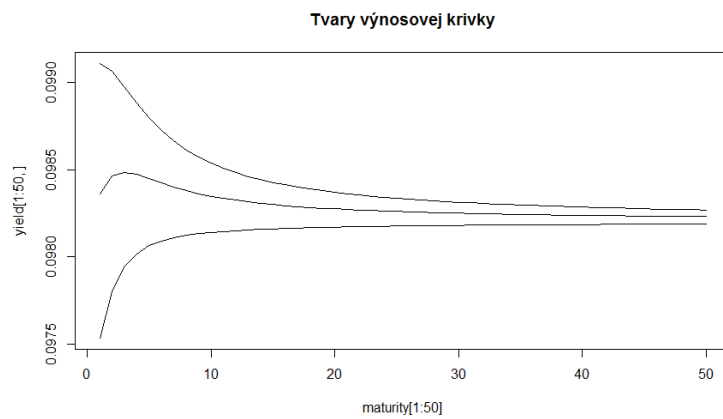
kde

$$R_\infty = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}. \quad (48)$$

Ak použijeme zápis $R(r, t, t + \tau)$ pre časovú štruktúru úrokových mier v čase t so splatnosťou v čase $t + \tau$, pričom okamžitá úroková miera je r , tak potom sa $R(r, t, t + \tau)$ pre Vašíčkov model dá vyjadriť ako

$$R(r, t, t + \tau) = -\frac{\ln P(r, \tau)}{\tau} \quad (49)$$

$$= \left(1 - \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau}\right) R_\infty + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} \frac{(1 - e^{-\kappa\tau})^2}{\tau} + \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau} r \quad (50)$$



Obr. 13: Rôzne tvary výnosovej krivky pre Vašíčkov model pri rôznych hodnotách r

2.4 Priebeh výnosovej krivky vo Vašíčkovom modeli

Na obrázku (obr.13) vidíme, že výnosové krivky majú spoločnú limitu. To je vlastnosť, ktorá sa štandardne v literatúre uvádza [7], [15] a dá sa jednoducho overiť výpočtom limity výrazu (50) pre $\tau \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(r, t, t + \tau) &= \left(1 - \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau}\right) \left(\theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right) + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} \frac{(1 - e^{-\kappa\tau})^2}{\tau} + \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau} r \\ &= \left(\theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right), \end{aligned}$$

keďže vidíme, že

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau}\right) = 0 \quad \text{a tiež} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\frac{(1 - e^{-\kappa\tau})^2}{\tau}\right) = 0.$$

Toto súčasne vysvetľuje obvyklé značenie R_∞ pre konštantu (48).

Takisto vieme vypočítať limitu pre $\tau \rightarrow 0$, ktorá by sa logicky mala rovnať okamžitej

úrokovej miere r . Takto to naozaj vyjde, ako vidno z nasledujúcich výpočtov:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau} &\stackrel{L.H.}{=} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\kappa e^{-\kappa\tau}}{\kappa} = \lim_{\tau \rightarrow 0} e^{-\kappa\tau} = 1, \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-\kappa\tau^2})}{\tau} &\stackrel{L.H.}{=} \lim_{\tau \rightarrow 0} 2(1 - e^{-\kappa\tau}) \kappa e^{-\kappa\tau} = 0 \end{aligned}$$

a po dosadení máme:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} R(r, t, t + \tau) = r.$$

Vašíček vo svojom článku [33] uvádza tvar výnosových kriviek svojho modelu, avšak bez dôkazu. Tvrdí, že výnosová krivka bezkupónového dlhopisu bude mať jeden z nasledujúcich troch možných priebehov v závislosti od parametrov modelu a aktuálnej okamžitej úrokovej miery:

- ak $r < R_\infty - \frac{\sigma^2}{4\kappa^2}$, výnosová krivka je rastúca;
- ak $r > R_\infty + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}$, výnosová krivka je klesajúca
- pre ostatné hodnoty r je výnosová krivka vypuklá (angl. humped), t.j. rastúca v T až do maturity T^* a potom klesajúca pre vyššie hodnoty maturity.

Rovnako bez dôkazu sa toto tvrdenie obvykle uvádza v literatúre, napr. v [29], [17]. Podarilo sa nám však nájsť odvodenie v knihe *Fixed Income Modelling* od Clausa Munka, v ktorom však chýba jeden krok dôkazu. V tejto časti práce uvedieme dôkaz aj s dôkazom tvrdenia, ktoré v [24] nebolo uvedené.

Výnosová krivka bezkupónového dlhopisu je daná nasledovne:

$$\begin{aligned} R(r, t, T) &= \frac{a(T-t)}{T-t} + \frac{b(T-t)}{T-t} r, \\ &= R_\infty + \frac{b(T-t)}{T-t} \left(\frac{\sigma^2}{4\kappa} b(T-t) + r - R_\infty \right), \end{aligned}$$

pričom sme zaviedli substitúciu

$$\begin{aligned} a(T-t) = a(\tau) &= \frac{\kappa\tau - (1 - e^{-\kappa\tau})}{\kappa} R_\infty + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (1 - e^{-\kappa\tau})^2, \\ b(T-t) = b(\tau) &= \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}. \end{aligned}$$

Zaujímá nás vzťah medzi výnosom a časom do maturity, teda funkcia $Y(\tau) = R(r, t, t + \tau)$. Definovaním funkcie $h(\tau) = \frac{b(\tau)}{\tau}$ dostávame

$$Y(\tau) = R_\infty + h(\tau) \left(\frac{\sigma^2}{4\kappa} b(\tau) + r - R_\infty \right). \quad (51)$$

Výraz (51) vieme zderivovať:

$$Y'(\tau) = h'(\tau) \left(\frac{\sigma^2}{4\kappa} b(\tau) + r - R_\infty \right) + h(\tau) e^{-\kappa\tau} \frac{\sigma^2}{4\kappa},$$

pričom sme využili skutočnosť, že $b'(\tau) = e^{-\kappa\tau}$.

Definujme pomocnú funkciu:

$$g(\tau) = b(\tau) + \frac{h(\tau) e^{-\kappa\tau}}{h'(\tau)}. \quad (52)$$

Teraz vieme prepísať $Y'(\tau)$ nasledovne:

$$Y'(\tau) = h'(\tau) \left(r - R_\infty + \frac{\sigma^2}{4\kappa} g(\tau) \right). \quad (53)$$

Najskôr zistíme, aký má priebeh funkcia $h'(\tau)$. Derivácia $h(\tau)$ vyzerá ako

$$h'(\tau) = \frac{e^{-\kappa\tau} \tau - b(\tau)}{\tau^2},$$

čo je záporné, keď $e^{-\kappa\tau} < b(\tau)$, alebo ekvivalentne, ak $1 + \kappa\tau < e^{\kappa\tau}$. To je splnené pre všetky $\tau > 0$. Priebeh funkcie $g(\tau)$ sa dá nájsť „by differentiation and tedious manipulations“, a preto dôkaz nedokončuje. Nakoniec sa však ukáže, že to vôbec nie je „také zlé“.

Vyjadrime explicitne funkciu $g(\tau)$ z (52):

$$g(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} + \frac{\tau(1 - e^{-\kappa\tau})}{\kappa\tau - e^{\kappa\tau} + 1}$$

a jej deriváciu:

$$g'(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau - e^{\kappa\tau} + 1} - \frac{\tau(\kappa - \kappa e^{\kappa\tau})(1 - e^{-\kappa\tau})}{(\kappa\tau - e^{\kappa\tau} + 1)^2} + e^{-\kappa\tau} + \frac{\kappa\tau e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau - e^{\kappa\tau} + 1}.$$

Aby sme sa vyhli práci so zlomkami, prenásobme $g'(\tau)$ výrazom $(\kappa\tau - e^{\kappa\tau} + 1)^2 > 0$ a predpokladajme, že $g'(\tau) > 0$. Dostaneme nerovnicu

$$\begin{aligned} & (1 - e^{-\kappa\tau})(\kappa\tau - e^{\kappa\tau} + 1) - \tau(\kappa - \kappa e^{\kappa\tau})(1 - e^{-\kappa\tau}) \\ & + e^{-\kappa\tau}(\kappa\tau - e^{\kappa\tau} + 1)^2 + \kappa\tau e^{-\kappa\tau}(\kappa\tau - e^{\kappa\tau} + 1) > 0. \end{aligned}$$

Všetky zátvorky roznásobíme a jednotlivé členy nerovnosti premiestnime tak, aby bolo pred nimi znamienko plus. Dostaneme sa nasledujúcej nerovnosti:

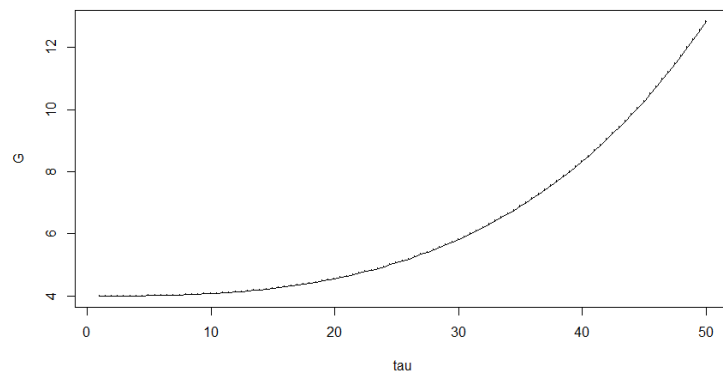
$$\begin{aligned} & \kappa\tau + 2 + \kappa\tau e^{\kappa\tau} + 4\kappa\tau e^{-\kappa\tau} + 2\kappa^2\tau^2 e^{-\kappa\tau} + e^{\kappa\tau} + e^{-\kappa\tau} > \\ & 5\kappa\tau + 2 + \kappa\tau e^{-\kappa\tau} + e^{\kappa\tau} + e^{-\kappa\tau}, \end{aligned}$$

z ktorej vieme eliminovať niekoľko členov:

$$\kappa\tau e^{\kappa\tau} + 3\kappa\tau e^{-\kappa\tau} + 2\kappa^2\tau^2 e^{-\kappa\tau} > 4\kappa\tau.$$

Keďže $\kappa\tau > 0$, môžeme nerovnicu týmto členom vydeliť:

$$e^{\kappa\tau} + e^{-\kappa\tau} (3 + 2\kappa\tau) > 4. \quad (54)$$



Obr. 14: Priebeh funkcie $G(\tau)$ pre parameter $\kappa = 0,05$

Na obrázku 14 je priebeh ľavej strany (54) ako funkcie τ pre zvolené hodnoty $\beta > 0$. Analyticky dokážeme nerovnosť (54) tak, že definujeme funkciu

$$G(\tau) = e^{\kappa\tau} + e^{-\kappa\tau} (3 + 2\kappa\tau),$$

a dokážeme, že $G(\tau) > 4$ pre $\tau > 0$. Platí:

$$G'(\tau) = \kappa e^{\kappa\tau} - e^{-\kappa\tau} (\kappa + 2\kappa^2\tau),$$

$$G'(0) = 0.$$

Funkcia $G'(\tau)$ bude kladná pre všetky τ , ak bude rastúca v τ , čiže ak $G''(\tau) > 0$. Vypočítame druhú deriváciu:

$$G''(\tau) = \kappa^2 (e^{\kappa\tau} - e^{-\kappa\tau}) + 2\kappa^3\tau e^{-\kappa\tau}.$$

Už treba len ukázať, že $e^{\kappa\tau} - e^{-\kappa\tau} > 0$ pre všetky $\tau > 0$:

$$e^{\kappa\tau} - e^{-\kappa\tau} \Big|_{\tau=0} = 0,$$

$$\frac{d}{d\tau} (e^{\kappa\tau} - e^{-\kappa\tau}) = k (e^{\kappa\tau} + e^{-\kappa\tau}) > 0, \quad \forall \tau > 0.$$

Ukázali sme teda, že $G(\tau)$ je rastúca, z čoho vyplýva, že $G(\tau) > 4$ pre $\tau > 0$. Teraz už môžeme pokračovať v dôkaze podľa Munkovej knihy [24].

Vráťme sa k rovnici (53). Vieme, že ľavá zátvorka bude vždy záporná. Pravú zátvorku ovplyvňuje priebeh funkcie $g(\tau)$, o ktorej sme zistili, že je rastúca. Vieme vypočítať jej limity:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} g(\tau) = -\frac{2}{\kappa} \text{ a } \lim_{\tau \rightarrow \infty} g(\tau) = \frac{1}{\kappa}.$$

Potom môžeme vyvodiť záver, že ak $r - R_\infty + \frac{\sigma^2}{4\kappa^2} < 0$, výraz v pravej zátvorke v (53) bude záporný pre všetky τ . Tým pádom bude $Y'(\tau) > 0$ pre všetky τ a teda výnosová krivka bude rastúca. Podobne bude platiť, že ak $r - R_\infty + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} > 0$, výnosová krivka bude klesajúca. Pre zvyšné hodnoty r bude výraz napravo v (53) záporný pre $\tau \in [0, \tau^*)$ a kladný pre $\tau > \tau^*$, kde τ^* je jednoznačne dané rovnicou

$$r - R_\infty + \frac{\sigma^2}{4\kappa} g(\tau^*) = 0.$$

V tomto prípade bude výnosová krivka vypuklá.

3 Nelson-Siegelov model

Model Nelsona a Siegela z roku 1987 pomocou jedného exponenciálneho výrazu aproximuje časovú štruktúru úrokových mier. Výhodou tohto modelu je, že odhadovanej úrokovej miere prisudzuje asymptotické správanie sa pre veľké maturity. Pozrime sa, ako vyzerá predpis pre forwardovú výnosovú krivku. Táto krivka znázorňuje závislosť forwardových výnosností od doby splatnosti dlhopisu. Nelson a Siegel ju definujú nasledovne:

$$f(t) = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-t/\beta} + \alpha_3 \frac{t}{\beta} e^{-t/\beta}.$$

Tomu zodpovedajúca výnosová krivka Nelsona a Siegela [25]

$$y(t) = \frac{\int_0^t f(s) ds}{t}.$$

3.1 Výnosové krivky v Nelson-Siegelovom modeli

Model Nelsona a Siegela pre výnosy bezkupónového dlhopisu vyzerá teda nasledovne:

$$y(t) = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{\beta}{t} (1 - e^{-t/\beta}) - \alpha_3 e^{-t/\beta}. \quad (55)$$

Tento model je teda založený na štyroch parametroch. V literatúre sa stretávame s vlastnosťami a s opisom vplyvu jednotlivých parametrov na tvar výnosovej krivky. Väčšina zdrojov (napr. [20], [14]) sa zhoduje na nasledujúcich, ktoré sa dajú jednoducho dokázať:

- $\alpha_1 + \alpha_2$ je okamžitá úroková miera, t.j. $\alpha_1 + \alpha_2 = y(0) = f(0)$.

Priamym dosadením a s využitím l'Hospitalovho pravidla vieme spočítať, že

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} y(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) \beta \frac{1 - e^{-t/\beta}}{t} - \alpha_3 e^{-t/\beta} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_+ (\alpha_2 + \alpha_3) e^{-t/\beta} - \alpha_3 e^{-t/\beta} = \alpha_1 + \alpha_2, \end{aligned}$$

podobne aj pre forwardovú krivku, kde stačí len dosadiť:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_1 + \alpha_2 e^{-t/\beta} + \frac{\alpha_3}{\beta} t e^{-t/\beta} = \alpha_1 + \alpha_2.$$

- α_1 predstavuje asymptotickú hodnotu časovej štruktúry úrokových mier aj forwardových mier, t.j. $\alpha_1 = y(\infty) = f(\infty)$.

V tomto prípade máme:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{\beta}{t} (1 - e^{-t/\beta}) - \alpha_3 e^{-t/\beta} = \alpha_1,$$

$$\lim_{f \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{f \rightarrow \infty} \alpha_1 + \alpha_2 e^{-t/\beta} + \alpha_3 \frac{t}{\beta} e^{-t/\beta} = \alpha_1.$$

- $-\alpha_2$ môže byť interpretované ako rozdiel medzi počiatočnou hodnotou štruktúry úrokových mier aj forwardových mier a ich hodnotou v nekonečne.
- $\beta > 0$ je rýchlosť konvergenie časovej štruktúry smerom k asymptotickej hodnote. Nižšie hodnoty β „urýchľujú“ konvergenciu.

3.2 Konvexnosť a konkávnosť výnosovej krivky

V knihe *Interest Rate Risk Modeling : The Fixed Income Valuation Course* [25] sa však okrem horeuvedených vlastností stretávame aj s nasledujúcou vlastnosťou:

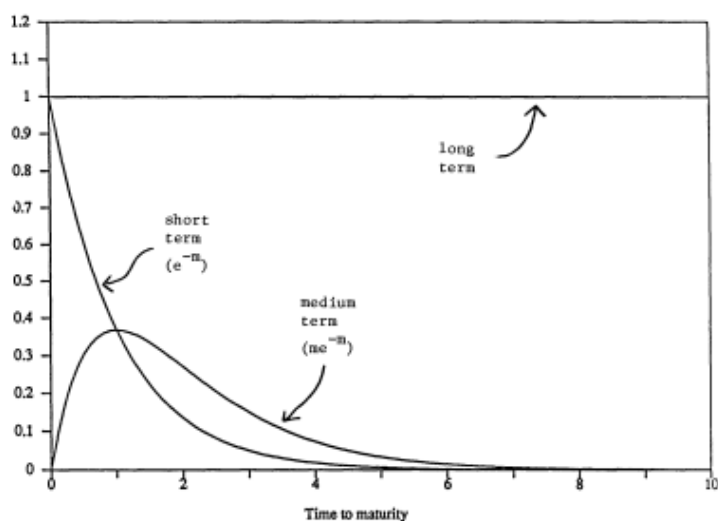
- α_3 ovplyvňuje zakrivenie výnosovej krivky. Keď $\alpha_3 > 0$, výnosová krivka dosahuje maximum, čo ústi do konkávneho tvaru; keď $\alpha_3 < 0$, výnosová krivka smerujúca do minima vytvára konvexný tvar.

K tomuto tvrdeniu sme v uvedenej knihe [25] nenašli dôkaz. Ilustrované je len obrázkom (obr. 15). Nie je ani celkom jasné, ako matematicky presne toto tvrdenie sformulovať. Uvedieme dve možné interpretácie, pričom ukážeme, že ani jedna z nich neplatí. Následne odvodíme klasifikáciu konvexnosti/konkávosti výnosovej krivky v závislosti od parametrov.

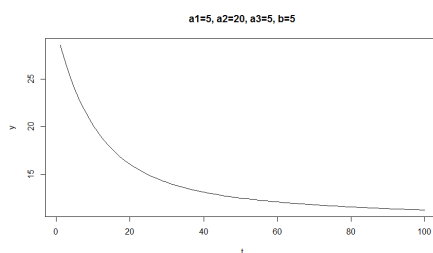
3.2.1 Interpretácia 1: globálna konvexnosť a konkávnosť

Tvrdenia „čo ústi do konkávneho tvaru“ a „vytvára konvexný tvar“ by sa mohli interpretovať ako konkávnosť, resp. konvexnosť na celom definičnom obore $t > 0$.

Na obrázku (obr.16) vidíme, že pre zvolené parametre to neplatí ($\alpha_3 > 0$, ale priebeh je konvexný). V nasledujúcej časti ukážeme, že to nemôže platiť pre žiadnu kombináciu parametrov. Budeme uvažovať tvrdenie o konvexnosti „keď $\alpha_3 < 0$, výnosová krivka



Obr. 15: Vplyv parametrov na zmenu tvaru výnosovej krivky [26]



Obr. 16: Konvexný tvar výnosovej krivky pre $\alpha_3 > 0$

smerujúca do minima vytvára konvexný tvar“ (tvrdenie o konkávnosti bolo analogické). Predpokladajme teda, že výnosová krivka má počas celého priebehu konvexný tvar, má jedno minimum v bode $t^* > 0$ a, ako sme už ukázali, konečnú limitu pre $t \rightarrow \infty$. Pre $t > t^*$ je druhá derivácia kladná, $y''(t) > 0$, z čoho vyplýva, že prvá derivácia, $y'(t)$, je rastúca. Znamená to potom, že keď zvolíme $t_1 = t^* + 1$, tak $y'(t_1) > y'(t^*) = 0$. Označme si $D = y'(t_1)$. Potom podľa vety o strednej hodnote [16] pre $\forall t_2 > t_1$:

$$y(t_2) - y(t_1) = y'(\xi)(t_2 - t_1),$$

pre nejaké $\xi \in (t_1, t_2)$, ktoré môže závisieť od t_2 . Keďže $y'(t)$ je rastúca funkcia, platí, že $y'(\xi) > D$. Vieme teda napísať:

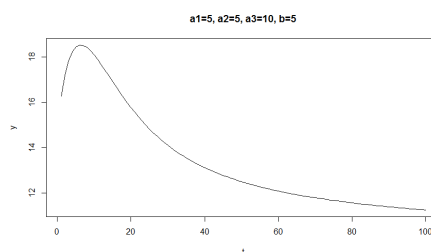
$$y(t_2) - y(t_1) = y'(\xi)(t_2 - t_1) > D(t_2 - t_1).$$

Všimnime si, že $y(t_2) - y(t_1)$ je ohraničené, lebo $y(t_2)$ má limitu pre $t_2 \rightarrow \infty$. Na druhej strane, ak $t_2 \rightarrow \infty$, aj $D(t_2 - t_1) \rightarrow \infty$, čo zjavne vedie k sporu. Ukázali sme teda,

že ak má výnosová krivka konečnú limitu pre maturity idúce do nekonečna, nemôže mať pre všetky maturity konvexný tvar. Poznamenajme, že tento dôkaz je založený na dôkaze vety (Corollary 7) v diplomovej práci [18], kde sa veľmi podobným spôsobom, pomocou vety o strednej hodnote dokazuje správanie určitej funkcie v nekonečne.

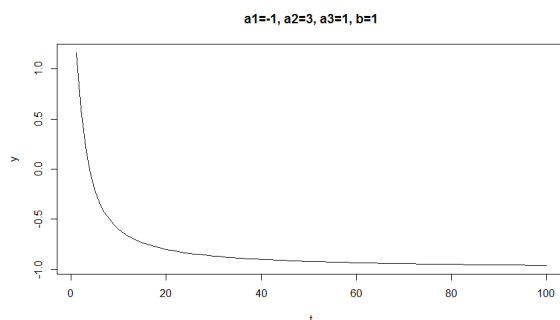
3.2.2 Interpretácia 2: existencia lokálneho extrému

Inou interpretáciou tvrdenia „keď $\alpha_3 > 0$, výnosová krivka dosahuje maximum, čo ústi do konkávneho tvaru“, by mohlo byť to, že výnosová krivka nadobúda lokálne maximum a v okolí tohto maxima je konkávna, pozri (obr.17).

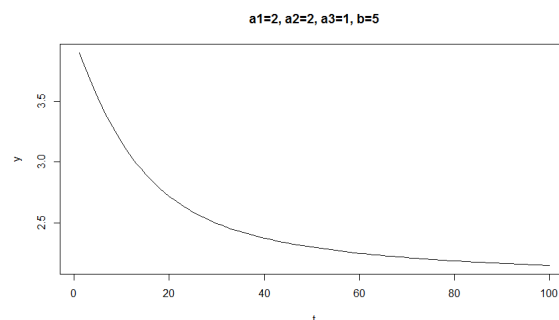


Obr. 17: Konkávny tvar výnosovej krivky pre $\alpha_3 > 0$

Zvoľme si $\alpha_3 = 1$. Potom výnosová krivka Nelsona a Siegela môže vyzeráť ako na obrázkoch 18 a 19.



Obr. 18: $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 1, \beta = 1$



Obr. 19: $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \beta = 5$

Graficky sa zdá, že výnosová krivka je pre všetky $t > 0$ klesajúca a konvexná. Dokážeme (pre parametre z obr.18, prípad obr.19 by sa dokazoval rovnako) tieto vlastnosti analyticky.

Pozrime sa na derivácie (55):

$$y'(t) = (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{e^{-t/\beta}}{t} + \alpha_3 \frac{e^{-t/\beta}}{\beta} - (\alpha_2 + \alpha_3) \beta \frac{1 - e^{-t/\beta}}{t^2},$$

označme si

$$g(t) = (\alpha_2 + \alpha_3) (\beta t - \beta^2 e^{t/\beta} + \beta^2) + \alpha_3 t^2,$$

pričom $g(t)$ má rovnaké znamienko ako $y'(t)$, keďže $y'(t) = \frac{e^{-t/\beta}}{\beta t^2} g(t)$. Druhá derivácia (55):

$$y''(t) = -(\alpha_2 + \alpha_3) \frac{e^{-t/\beta}}{\beta t} - 2(\alpha_2 + \alpha_3) \frac{e^{-t/\beta}}{t^2} - \alpha_3 \frac{e^{-t/\beta}}{\beta^2} + 2(\alpha_2 + \alpha_3) \frac{\beta(1 - e^{-t/\beta})}{t^3}, \quad (56)$$

tiež si označme:

$$h(t) = (\alpha_2 + \alpha_3) (-\beta t^2 - 2\beta^2 t + 2\beta^3 e^{t/\beta} - 2\beta^3) - \alpha_3 t^3,$$

pričom $h(t)$ má rovnaké znamienko ako $y''(t)$, keďže $y''(t) = \frac{e^{-t/\beta}}{\beta^2 t^3} h(t)$.

Pozrime sa aj analyticky na priebeh výnosovej krivky s parametrami obrázka (obr18).

Monotónnosť zistíme z prvej derivácie:

$$g(t) = (\alpha_2 + \alpha_3) (\beta t - \beta^2 e^{t/\beta} + \beta^2) + \alpha_3 t^2 = 4(t - e^t + 1) + t^2,$$

s využitím aproximácie z Taylorovho rozvoja môžeme pokračovať nasledovne:

$$g(t) = 4(t - e^t + 1) + t^2 < 4\left(t - 1 - t - \frac{t^2}{2} + 1\right) + t^2 = -t^2 < 0,$$

Čiže $y'(t) < 0$ a tým pádom $y(t)$ klesá. Konvexnosť alebo konkávnosť budeme zisťovať z druhej derivácie:

$$\begin{aligned} h(t) &= (\alpha_2 + \alpha_3) (-\beta t^2 - 2\beta^2 t + 2\beta^3 e^{t/\beta} - 2\beta^3) - \alpha_3 t^3 \\ &= 4(-t^2 - 2t + 2e^t - 2) - t^3 \\ &> 4\left(-t^2 - 2t + 2 + 2t + t^2 + \frac{t^3}{3} - 2\right) - t^3 = \frac{1}{3}t^3 > 0. \end{aligned}$$

Opäť sme použili Taylorovu aproximáciu, tentoraz do tretieho rádu, a ukázali sme, že $y''(t) > 0$, čiže y je konvexná funkcia.

3.2.3 Klasifikácia konvexnosti a konkávnosti

Závislosť konvexnosti alebo konkávnosti (aj keď nie pre všetky maturity) nebude zjavne ovplyvnená len jedným parametrom α_3 . Pozrime sa podrobnejšie na druhú deriváciu $y''(t)$ a skúsme nájsť nejaký predpis pre kombináciu parametrov určujúcich konvexnosť alebo konkávnosť výnosovej krivky.

Upravme si (56) do nasledujúceho tvaru:

$$y''(t) = (\alpha_2 + \alpha_3) \left[-\frac{e^{-t/\beta}}{\beta t} - \frac{2e^{-t/\beta}}{t^2} + \frac{2\beta(1 - e^{-t/\beta})}{t^3} \right] - \alpha_3 \frac{e^{-t/\beta}}{\beta^2}.$$

Funkcia $y(t)$ bude mať konkávny tvar, ak $y''(t) < 0$. Má platiť nerovnosť

$$(\alpha_2 + \alpha_3) \left[-\frac{e^{-t/\beta}}{\beta t} - \frac{2e^{-t/\beta}}{t^2} + \frac{2\beta(1 - e^{-t/\beta})}{t^3} \right] < \alpha_3 \frac{e^{-t/\beta}}{\beta^2},$$

ktorú pre zjednodušenie môžeme prenásobiť kladným výrazom $e^{t/\beta}$. Dostaneme

$$(\alpha_2 + \alpha_3) \left[-\frac{1}{\beta t} - \frac{2}{t^2} + \frac{2\beta}{t^3} e^{t/\beta} - \frac{2\beta}{t^3} \right] < \frac{\alpha_3}{\beta^2}. \quad (57)$$

Analogicky $y(t)$ bude mať konvexný tvar, ak $y''(t) > 0$, čo zodpovedá nerovnosti

$$(\alpha_2 + \alpha_3) \left[-\frac{1}{\beta t} - \frac{2}{t^2} + \frac{2\beta}{t^3} e^{t/\beta} - \frac{2\beta}{t^3} \right] > \frac{\alpha_3}{\beta^2}. \quad (58)$$

Najskôr dokážeme pomocné tvrdenie o výraze v hranatej zátvorke v (57) a (58).

Označme si

$$f(t, \beta) = -\frac{1}{\beta t} - \frac{2}{t^2} + \frac{2\beta}{t^3} e^{t/\beta} - \frac{2\beta}{t^3}$$

a zistíme, aké hodnoty nadobúda. Máme teda:

$$\beta t^3 f(t, \beta) = -t^2 - 2\beta t + 2\beta^2 e^{t/\beta} - 2\beta^2.$$

Skúsme si ohraničiť výraz $e^{t/\beta}$ pomocou nerovnosti získanej z Taylorovho rozvoja:

$$e^{t/\beta} > \left(1 + t/\beta + \frac{(t/\beta)^2}{2} \right).$$

Pomocou tejto nerovnosti vieme napísať

$$\frac{t^3}{\beta} f(t, \beta) > -t^2 - 2\beta t + 2\beta^2 \left(1 + \frac{t}{\beta} + \frac{t^2}{2\beta^2} \right) - 2\beta^2 = 0,$$

z čoho vyplýva, že $f(t, \beta)$ nadobúda len kladné hodnoty. To navyše znamená, že

- ak $\alpha_2 + \alpha_3 < 0$, $\alpha_3 > 0$, tak platí (57) pre každé t , a teda funkcia $y(t)$ je konkávna.
- ak $\alpha_2 + \alpha_3 > 0$, $\alpha_3 < 0$, tak platí (58) pre každé t , a teda funkcia $y(t)$ je konvexná.

Predpokladajme teraz, že $\alpha_2 + \alpha_3 > 0$ a $\alpha_3 > 0$. V tom prípade nerovnicu (57) môžeme prenásobiť kladným výrazom $\frac{t^3\beta}{\alpha_2 + \alpha_3}$ a dostaneme

$$-t^2 - 2\beta t + 2\beta^2 e^{t/\beta} - 2\beta^2 < \frac{\alpha_3}{\beta(\alpha_2 + \alpha_3)} t^3. \quad (59)$$

Pre zjednodušenie ešte nerovnicu (59) prenásobme $\frac{1}{\beta^2}$ a následne budeme môcť urobiť substitúciu $x = \frac{t}{\beta}$:

$$-\frac{t^2}{\beta^2} - 2\frac{t}{\beta} + 2e^{t/\beta} - 2 < \frac{\alpha_3}{\beta^3(\alpha_2 + \alpha_3)} t^3, \quad (60)$$

$$-x^2 - 2x + 2e^x - 2 < \frac{\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3} x^3. \quad (61)$$

Vzhľadom na to, že v tejto nerovnici vystupuje exponenciálna funkcia, ktorá rastie rýchlejšie ako ostatné členy, nevieme nájsť takú kombináciu parametrov, ktorá by zaručovala platnosť nerovnice pre všetky kladné časy t .

Vieme však nájsť dostatočnú podmienku, pri ktorej bude pre všetky t platiť nerovnosť (58). Opäť s využitím Taylorovho rozvoja aproximujeme

$$e^{t/\beta} > 1 + t/\beta + \frac{(t/\beta)^2}{2} + \frac{(t/\beta)^3}{6}. \quad (62)$$

Potom (58) sa dá zapísať (keďže $\alpha_2 + \alpha_3 > 0$) ako

$$-\left(\frac{t}{\beta}\right)^2 - \frac{2t}{\beta} + 2e^{t/\beta} - 2 > \frac{\alpha_3}{\beta_3(\alpha_2 + \alpha_3)} t^3. \quad (63)$$

Ak bude platiť

$$\begin{aligned} - (t/\beta)^2 - 2t/\beta + 2 \left(1 + t/\beta + \frac{(t/\beta)^2}{2} + \frac{(t/\beta)^3}{6} \right) - 2 &> \frac{\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3} (t/\beta)^3, \\ (t/\beta)^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3} \right) &> 0, \end{aligned}$$

t.j.

$$\frac{\alpha_2 - 2\alpha_3}{3(\alpha_2 + \alpha_3)} > 0,$$

$$\alpha_2 - 2\alpha_3 > 0,$$

tak vďaka odhadu (62) bude platiť aj (63). Dokázali sme teda, že ak $\alpha_3 > 0$, $\alpha_2 + \alpha_3 > 0$, $\alpha_2 - 2\alpha_3 > 0$, tak $y(t)$ je konvexná.

Pre $\alpha_3 > 0$ už zostáva iba prípad, keď $\alpha_2 + \alpha_3 > 0$, $\alpha_2 - 2\alpha_3 < 0$. Znovu zavedme substitúciu $x = t/\beta$. Z predchádzajúcich výpočtov vyplýva, že potrebujeme zistiť, kedy

$$-x^2 - 2x + 2e^x - 2 < \frac{\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3}x^3, \quad (64)$$

$$\text{resp. } -x^2 - 2x + 2e^x - 2 > \frac{\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3}x^3, \quad (65)$$

pričom prvá nerovnosť zodpovedá konkávnosti pre príslušné hodnoty t a druhá konvexnosti. Ekvivalentne môžeme hľadať znamienko funkcie

$$F(x) = e^x - \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{\alpha_3}{2(\alpha_2 + \alpha_3)}x^3\right), \quad x \geq 0,$$

pričom prvej nerovnosti v (64) zodpovedá $F(x) < 0$ a druhej $F(x) > 0$. Platí:

$$F(x) = \left(\frac{1}{6} - \frac{\alpha_3}{2(\alpha_2 + \alpha_3)}\right)x^3 + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad (66)$$

pričom, vzhľadom na predpoklady $\alpha_2 + \alpha_3 > 0$, $\alpha_2 - 2\alpha_3 < 0$ je koeficient pri x^3 záporný:

$$\frac{1}{6} - \frac{\alpha_3}{2(\alpha_2 + \alpha_3)} = \frac{\alpha_2 - 2\alpha_3}{6(\alpha_2 + \alpha_3)} < 0.$$

Z toho vyplýva ¹, že $F(x) < 0$ na okolí bodu $x = 0$. Naopak, z rýchlosti rastu exponenciálnej funkcie vyplýva, že $F(x) > 0$ pre „veľké“ x . To znamená, že existuje také $\tilde{x} > 0$, že $F(\tilde{x}) = 0$. Dokážeme teraz, že je len jedno. Z toho potom vyplýva, že $F(x) < 0$ pre $x < \tilde{x}$ a $F(x) > 0$ pre $x > \tilde{x}$. Pre funkciu $y(t)$ to znamená, že pre $t < \tilde{t}$ je konkávna a pre $t > \tilde{t}$ je konvexná.

Sporom, nech sú dva body $x_1, x_2 > 0$ také, že $F(x_1) = F(x_2) = 0$. Súčasne máme $F(x_0) = 0$ pre $x_0 = 0$. Podľa Rolleho vety [16] potom existuje w_1 (medzi x_0 a x_1) a w_2 (medzi x_1 a x_2) tak, že $F'(w_1) = 0$, $F'(w_2) = 0$. Ak použijeme Rolleho vetu ešte raz, existuje z (medzi w_1 a w_2) také, že $F''(z) = 0$. Lenže

$$\begin{aligned} F''(z) &= e^z - \left(1 + \frac{3\alpha_3}{(\alpha_2 + \alpha_3)}z\right) = 0 \\ \Rightarrow e^z &= 1 + \frac{3\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3}z < 1 + z, \end{aligned}$$

¹ $F(0) = F'(0) = F''(0) = 0$, $F'''(x) < 0$ na okolí nuly, teda $F''(x)$ je tam klesajúca, z čoho máme $F''(x) < 0$, atď., až sa dostaneme k tomu, že na okolí nuly je $F(x) < 0$

čo je spor, lebo $z > 0$.

Pozrime sa na priebeh funkcie $y(t)$ za predpokladu, že $\alpha_3 < 0$ a $\alpha_2 + \alpha_3 < 0$. Aby bola $y(t)$ konkávna, musí platiť

$$(\alpha_2 + \alpha_3) \left[-\frac{1}{\beta t} - \frac{2}{t^2} + \frac{2\beta}{t^3} e^{t/\beta} - \frac{2\beta}{t^3} \right] < \frac{\alpha_3}{\beta^2}.$$

Prenásobením tejto nerovnosti kladným výrazom $\frac{t^3}{\beta}$ a opätovným použitím aproximácie exponenciálnej funkcie dostaneme:

$$(\alpha_2 + \alpha_3) \left(-\frac{t^2}{\beta^2} - 2\frac{t}{\beta} + 2 + \frac{t^2}{\beta^2} + \frac{t^3}{3\beta^3} - 2 \right) < \frac{\alpha_3 t^3}{\beta^3}.$$

Po úpravách máme

$$\frac{t^3}{\beta^3} \left(\frac{\alpha_2 - 2\alpha_3}{3} \right) < 0.$$

Vidíme, že ak $\alpha_2 - 2\alpha_3 < 0$, tak $y(t)$ bude konkávna funkcia.

Ostáva už len prípad, že $\alpha_3 < 0$, $\alpha_2 + \alpha_3 < 0$ a $\alpha_2 - 2\alpha_3 > 0$. Podobne ako pri predchádzajúcej analýze, budeme vychádzať z nerovnic

$$(\alpha_2 + \alpha_3) (-x^2 - 2x + 2e^x - 2) < \alpha_3 \alpha_2 + \alpha_3 x^3, \quad (67)$$

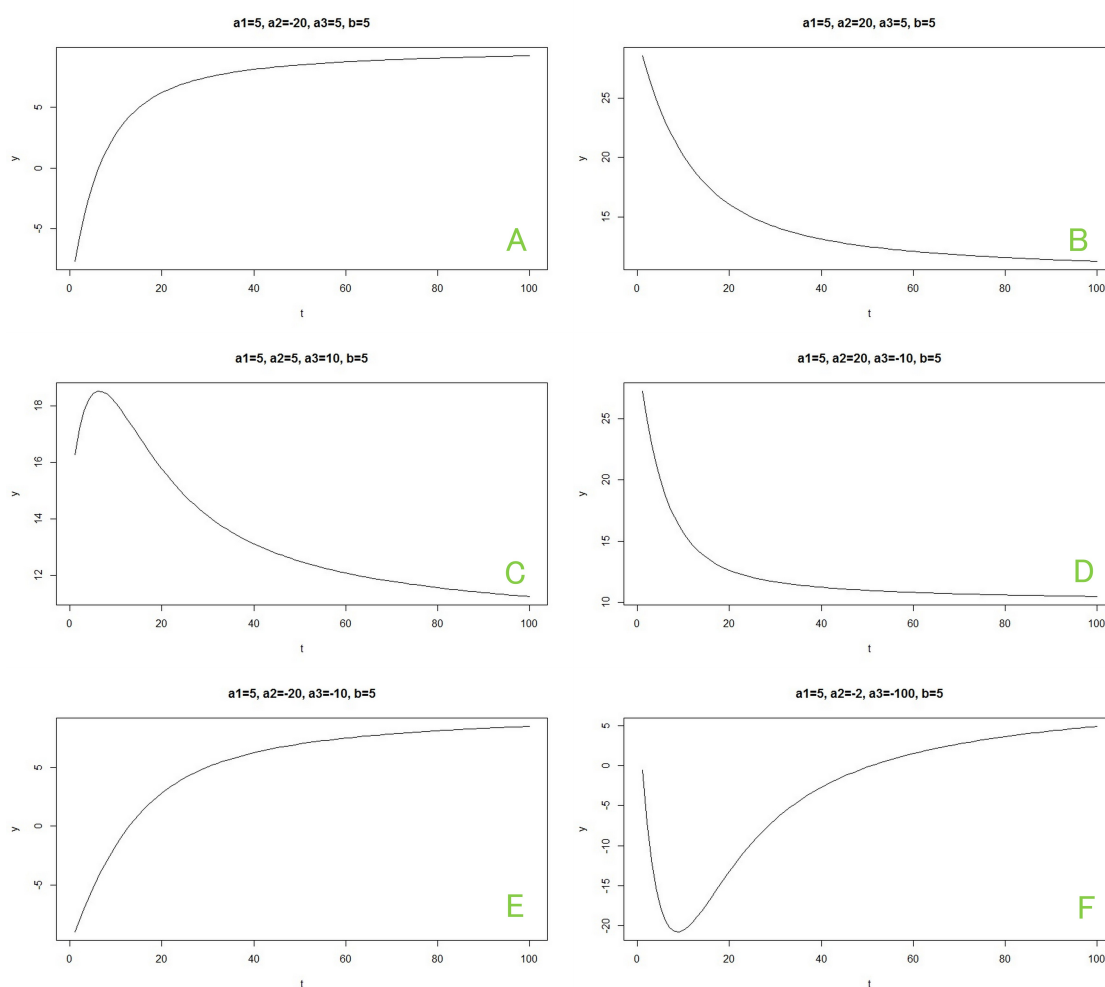
$$\text{resp. } (\alpha_2 + \alpha_3) (-x^2 - 2x + 2e^x - 2) > \alpha_3 x^3, \quad (68)$$

kde prvá nerovnica určuje podmienky pre konkávnosť a druhá pre konvexnosť. V porovnaní s predchádzajúcim prípadom, však platí, že $\alpha_2 + \alpha_3 < 0$, teda ak nerovnice (67) predelíme týmto výrazom, znamienka nerovnosti sa otočia. Pomocná funkcia $F(x)$ (66) teraz pre $F(x) > 0$ značí konkávnosť a $F(x) < 0$ zase konvexnosť. Vyšetříme znamienko koeficientu pri x^3 v (66):

$$\left(\frac{1}{6} - \frac{\alpha_3}{2(\alpha_2 + \alpha_3)} \right) = \frac{\alpha_2 - 2\alpha_3}{6(\alpha_2 + \alpha_3)} < 0,$$

keďže čitateľ je kladný a menovateľ je záporný. Funkcia $F(x)$ je tým pádom v okolí bodu nula záporná a kvôli rýchlosti rastu exponenciálnej funkcie je pre „veľké“ x kladná. Ukázali sme už, že $\hat{x} > 0$, pre ktoré platí $F(\hat{x})$ existuje len jedno. Vieme teda, že pre $t < t^*$ je $y(t)$ konvexná a pre $t > t^*$ je $y(t)$ konkávna.

Zhrnutie našich výsledkov ilustruje tabuľka 2 a priebehy výnosovej krivky zodpovedajúce jednotlivým prípadom sú na obrázku 20.



Obr. 20: Priebeh výnosovej krivky pre rôzne parametre α_2 a α_3

A	$\alpha_3 > 0, \alpha_2 + \alpha_3 < 0$	$\forall t$	konkávnosť	
B	$\alpha_3 > 0, \alpha_2 + \alpha_3 > 0, \alpha_2 - 2\alpha_3 > 0$	$\forall t$	konvexnosť	
C	$\alpha_3 > 0, \alpha_2 + \alpha_3 > 0, \alpha_2 - 2\alpha_3 < 0$	$\forall t < t^*$	konkávnosť, $\forall t > t^*$	konvexnosť
D	$\alpha_3 < 0, \alpha_2 + \alpha_3 < 0$	$\forall t$	konvexnosť	
E	$\alpha_3 < 0, \alpha_2 + \alpha_3 < 0, \alpha_2 - 2\alpha_3 < 0$	$\forall t$	konkávnosť	
F	$\alpha_3 < 0, \alpha_2 + \alpha_3 < 0, \alpha_2 - 2\alpha_3 > 0$	$\forall t < t^*$	konvexnosť, $\forall t > t^*$	konkávnosť

Tabuľka 2: Klasifikácia konvexnosti a konkávnosti

4 Chooser opcie

Štandardná chooser opcia oprávňuje jej držiteľa si vo vopred dohodnutom čase T_c v budúcnosti zvoliť, či opcia so splatnosťou v čase T je európska call opcia alebo európska put opcia, ktorej expiračná cena je E a čas do splatnosti $T - T_c$. Použijeme postup z [17] a odvodíme cenu tejto opcie pri Black-Scholesových predpokladoch. Výplata chooser opcie v čase voľby je nasledovná:

$$\begin{aligned} V(S_{T_c}, T_c) &= \max(c, c + Ee^{-r(T-T_c)} - S_{T_c}e^{-q(T-T_c)}) \\ &= c + e^{-q(T-T_c)} \max(0, Ee^{-(r-q)(T-T_c)} - S_{T_c}). \end{aligned}$$

Tým pádom je vlastne chooser opcia ekvivalentná kombinácii jednej call opcie s expiračnou cenou E a časom do expirácie T a $e^{-q(T-T_c)}$ jednotkám put opcie s expiračnou cenou $Ee^{-(r-q)(T-T_c)}$ a časom do splatnosti T_c . Toto vyjadrenie hodnoty v čase T_c je nezávislé od modelu pre cenu akcie. Pri použití konkrétneho modelu môžeme oceniť túto opciu v čase $t < T_c$.

Uvažujme Black-Scholesov model, oceňujúci finančný derivát na základe Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice [3]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0,$$

pričom $V(S, t)$ je cena opcie závislá od času a ceny podkladového aktíva, S je cena podkladového aktíva, T je čas expirácie, σ je volatilita, r je bezriziková úroková miera a q je ročná úroková miera pre dividendy. Pre odvodenie Black-Scholesovho modelu sú potrebné predpoklady o dokonale elastickom a dokonale likvidnom trhu bez transakčných nákladov. V tomto prípade sú známe vzťahy pre ceny call a put opcií:

$$\begin{aligned} V^C(S, t) &= N(d_1)S - N(d_2)Ke^{-r(T-t)} \\ V^P(S, t) &= N(-d_2)Ke^{-r(T-t)} - N(-d_1)S, \end{aligned}$$

pričom platí [3]:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right], \\ d_2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right] \end{aligned}$$

a tiež platí, že ak je zadaný payoff lineárnou kombináciou call a put opcií, cena tohoto derivátu je rovnakou lineárnou kombináciou cien príslušných call a put opcií [31]. Preto je hodnota chooser opcie v čase t rovná

$$\begin{aligned}
 V(S, 0) &= S e^{-qT} N(x) - E e^{-rT} N\left(x - \sigma\sqrt{T}\right) + e^{-q(T-T_c)} \\
 &\quad \left[E e^{-(r-q)(T-T_c)} e^{-rT_c} N\left(-y + \sigma\sqrt{T_c}\right) - S e^{-qT_c} N(-y) \right] \\
 &= S e^{-qT} N(x) - E e^{-rT} N\left(x - \sigma\sqrt{T}\right) \\
 &\quad + E e^{-rT} N\left(-y + \sigma\sqrt{T_c}\right) - S e^{-qT} N(-y),
 \end{aligned} \tag{69}$$

kde S je aktuálna cena akcia a platí [17]:

$$x = \frac{\ln \frac{S}{E} + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{70}$$

$$y = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r - q) T + \frac{\sigma^2}{2} T_c}{\sigma\sqrt{T_c}}. \tag{71}$$

4.1 Závislosť ceny chooser opcie od času voľby

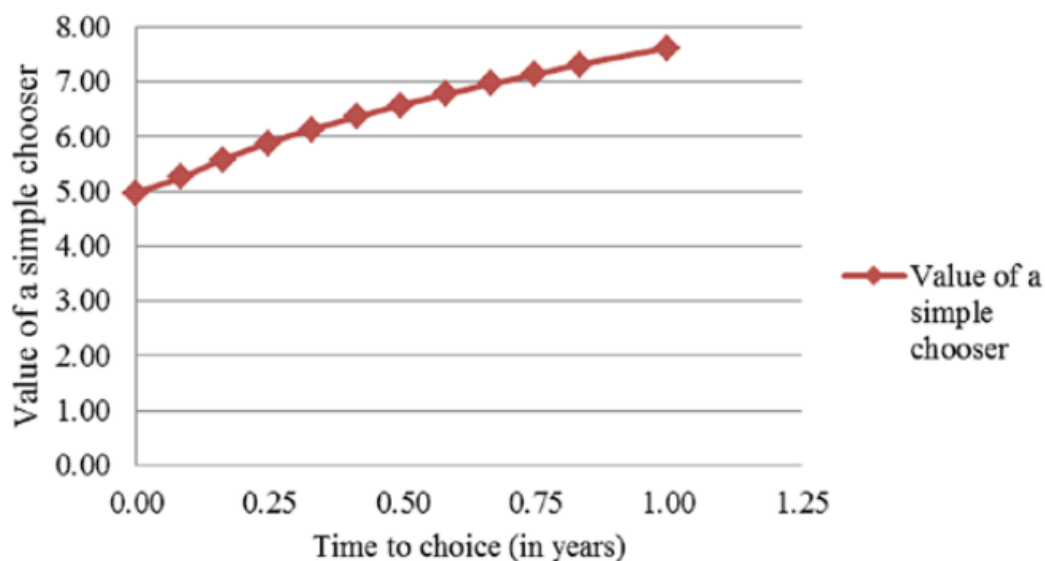
V článku *Exotic Options: A Chooser Option and Its Pricing* [22] autorka uvádza príklad:

Majme európsku chooser opciu s maturitou 1 rok. Cena podkladového aktíva je 50 EUR, rizikovo nezávislá úroková miera je 10%, výnos za dividendy je 5% a volatilita aktíva je 20%. Chooser opcia oprávňuje vybrať si v čase T_c medzi callom a putom s rovnakou expiračnou cenou $E = 50$ EUR a maturitou 1 rok. S meniacim sa časom voľby sa mení aj cena chooser opcie [22].

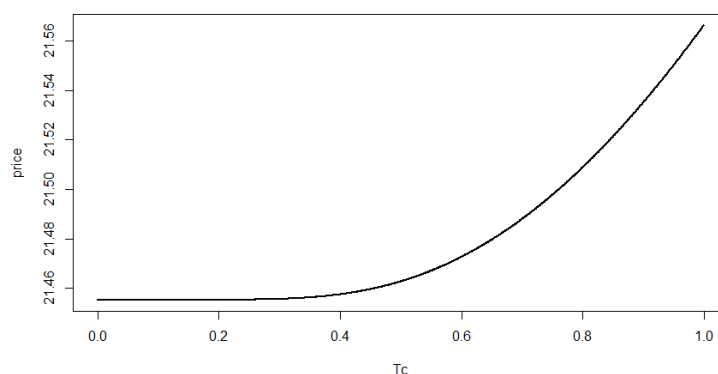
K tomuto príkladu potom je uvádzaná tabuľkami s hodnotami T_c a cenou opcie. Tieto hodnoty sú vyobrazené na nasledujúcom grafe (obr.21).

K obrázku 21 je ešte pripojený komentár, že vzťah medzi týmito dvoma pozorovanými faktormi (T_c a $V(S, 0)$) je takmer lineárny.

Keďže toto tvrdenie nie je nijak podložené ani bližšie špecifikované a je založené len na tomto jednom numerickom príklade, pozrieme sa, ako závisí cena chooser opcie od času voľby. Pokračujme v numerických ukážkach a ich grafickom znázornení. Na obrázku 22 je rovnaká závislosť znázornená pri dnešnej cene akcie rovnej $S = 70$ EUR.



Obr. 21: Grafické porovnanie vzťahu medzi časom voľby a cenou akcie, $S = 50$, $r = 0.1$, $q = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $E = 50$ [22]



Obr. 22: Grafické porovnanie vzťahu medzi časom voľby a cenou akcie, $S = 70$, $r = 0.1$, $q = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $E = 50$ [22]

Vidíme, že tvrdenie o takmer lineárnej závislosti už neplatí. Čo však majú grafy na obr. 21 a 22 spoločné, je rastúca závislosť. Tá je z finančného hľadiska logická: čím sme bližšie k času maturity (čím je T_c vyššie), tým presnejšiu informáciu máme o stave akcie v čase T . Cena opcie teda rastie, lebo bude jednoduchšie sa rozhodnúť, či opciu uplatniť ako call alebo put.

Rastúcosť ceny chooser opcie ako funkcie T_c teraz dokážeme analyticky. Budeme derivovať (69) podľa T_c . Vypočítajme najskôr čiastkové derivácie:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial T_c} &= \frac{\frac{1}{2}\sigma^3\sqrt{T_c} - \left(\ln\frac{S}{E} + (r-q)T + \frac{\sigma^2}{2}T_c\right)\frac{\sigma}{2\sqrt{T_c}}}{\sigma^2 T_c} \\ &= \frac{\sigma}{4\sqrt{T_c}} - \frac{\ln\frac{S}{E} + (r-q)T}{\sigma T_c^{\frac{3}{2}}},\end{aligned}$$

pričom vidíme, že $\frac{\partial x}{\partial T_c} = 0$. Derivácia V potom vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial T_c} &= Ee^{-rT}f\left(-y + \sigma\sqrt{T_c}\right)\left[\frac{\ln\frac{S}{E} + (r-q)T}{\sigma T_c^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sigma}{4\sqrt{T_c}}\right] \\ &\quad - Se^{-qT}f(-y)\left[\frac{\ln\frac{S}{E} + (r-q)T}{\sigma T_c^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sigma}{4\sqrt{T_c}}\right].\end{aligned}\quad (72)$$

Ako funkciu $f(t)$ sme označili hustotu normovaného normálneho rozdelenia, čiže $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$. Označme si tiež

$$A = Ee^{-rT}f\left(-y + \sigma\sqrt{T_c}\right)$$

$$B = Se^{-qT}f(-y),$$

a vypočítajme si pomocný vzťah $A - B$:

$$\begin{aligned}A - B &= Ee^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\sigma\sqrt{T_c}-y)^2}{2}} - Se^{-qT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\left[Ee^{-rT}e^{-\frac{\sigma^2 T_c - 2\sigma\sqrt{T_c}y}{2}} - Se^{-qT}\right].\end{aligned}$$

Teraz dosadíme za y (71) a dostaneme:

$$\begin{aligned}A - B &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\left[Ee^{-rT}\frac{S}{E}e^{rT}e^{-qT} - Se^{-qT}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}[Se^{-qT} - Se^{-qT}] \\ &= 0.\end{aligned}\quad (73)$$

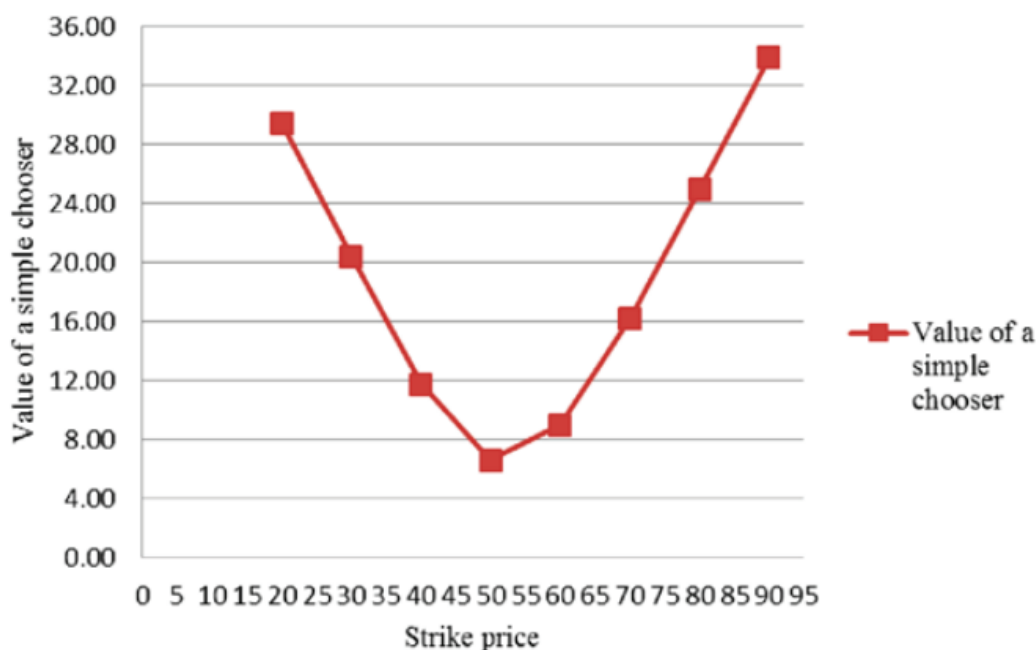
To znamená, že:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial T_c} &= \left(\left[\frac{\ln\frac{S}{E} + (r-q)T}{\sigma T_c^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sigma}{4\sqrt{T_c}}\right] - \left[\frac{\ln\frac{S}{E} + (r-q)T}{\sigma T_c^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sigma}{4\sqrt{T_c}}\right] A\right) \\ &= \frac{\sigma}{2\sqrt{T_c}}Ee^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-y+\sigma\sqrt{T_c})^2}{2}} > 0.\end{aligned}$$

Vidíme teda, že cena chooser opcie je rastúcou funkciou času voľby T_c . Avšak, vieme povedať, že je rastúca v T_c .

4.2 Závislosť ceny chooser opcie od expiračnej ceny

Ďalším zaujímavým ukazovateľom pre výšku ceny chooser opcie je podľa článku [22] aj expiračná cena. Na nasledujúcom grafe (obr.23) prebranom z [22] je zobrazená závislosť ceny chooser opcie od výšky expiračnej ceny. Na výpočet boli použité rovnaké parametre ako v podkapitole 4.1.



Obr. 23: Grafické porovnanie vzťahu medzi expiračnou cenou a cenou akcie $S = 50$, $r = 0.1$, $q = 0.05$, $\sigma = 0.2$ [22]

Pre body vyznačené na obrázku ($E = 20, 30, \dots, 90$) sú príslušné ceny uvedené v tabuľke a je z nich vypočítaná korelácia, ktorá vyšla rovná 0,21. Z tohto sa však spraví nesprávny záver, že závislosť ceny od času voľby je dôležitá (vyšla 0,99), kým závislosť od expiračnej ceny dôležitá nie je ² Pritom však práve takáto závislosť, ako je na obrázku 23, je typickým príkladom situácie, v ktorej medzi premennými je silná závislosť, ale malá, v niektorých prípadoch aj nulová, korelácia.

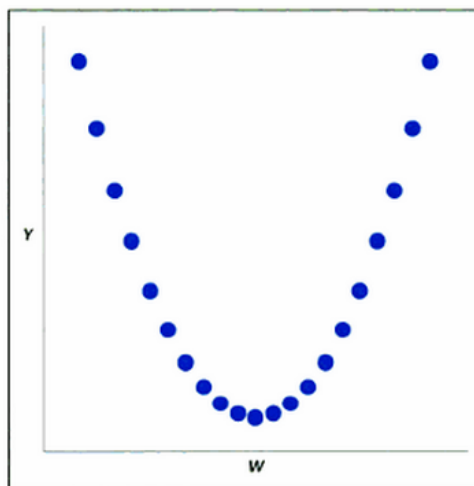
Túto skutočnosť môžeme ukázať na jednoduchom príklade uvedenom v [8]: Majme náhodnú premennú X , ktorá nadobúda hodnoty 1 alebo -1 s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$.

² The calculations made in the article showed that the price of the chooser is closely correlated with the choice time and low correlated with its strike price. So the first mentioned factor should be taken into consideration when making appropriate hedging and investing decisions [22].

Nech $Y = X^2$, tým pádom budú zjavne závislé, ale nekorelované, keďže

$$E[XY] = E[X^3] = E[X] = 0 \text{ a aj } E[X]E[Y] = 0.$$

Takúto množinu závislých, ale nekorelovaných náhodných premenných vieme vygenerovať nasledujúcim spôsobom: zvolíme náhodnú premennú X , ktorá je rovnomerne rozdelená na symetrickom intervale. Nech funkcia $f(x)$ je párna a $g(x)$ nepárna. Potom $Y = f(X)$ a $Z = g(X)$ budú nekorelované, za predpokladu, že nie sú z degenerovaného rozdelenia a existujú ich prvé a druhé momenty [8]. V literatúre sa k téme kombinácie závislosti a nekorelácie zvyčajne uvádza ako príklad obrázok, ktorý vyzerá veľmi podobne ako obr.23. Takýto nájdeme aj napríklad v [2], pozri obr.24.



Obr. 24: Ukážka dokonalej nelineárnej závislosti s nulovou koreláciou [2]

Obrázok 23 nás však vedie k myšlienke skúmať závislosť ceny chooser opcie od expiračnej ceny E . Dokážeme, že cena je konvexnou funkciou E a nájdeme expiračnú cenu, pre ktorú je minimálna. Interpretácia očakávaného priebehu je opäť logická. Keďže cena chooser opcie je tým vyššia, čím jednoduchšie je rozhodovanie sa, v tomto prípade platí, že čím vyššia expiračná cena, tým je pravdepodobnejšie, že chooser opciu úspešne uplatníme ako put, naopak, čím nižšia expiračná cena, tým je väčšia pravdepodobnosť, že sa chooser opciu oplatí uplatniť ako call. Na druhej strane, rozhodovanie sa bude ťažšie, keď E bude blízko S .

My skúsime nájsť minimum funkcie V v závislosti od E . Najskôr vypočítame čias-

tkové derivácie:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial E} &= -\frac{1}{E} \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}, \\ \frac{\partial y}{\partial E} &= -\frac{1}{E} \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}.\end{aligned}$$

Derivácia ceny chooser opcie potom vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial E} &= Se^{-qT} f(x) \left(-\frac{1}{E} \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \right) - \left[N(x - \sigma\sqrt{T}) - \frac{f(x - \sigma\sqrt{T})}{\sigma\sqrt{T}} \right] e^{-rT} \\ &+ e^{-rT} \left[N(-y + \sigma\sqrt{T_c}) + \frac{f(-y + \sigma\sqrt{T_c})}{\sigma\sqrt{T_c}} \right] - Se^{-qT} f(-y) \frac{1}{E} \frac{1}{\sigma\sqrt{T_c}}.\end{aligned}\quad (74)$$

Opäť sme ako $f(t)$ označili hustotu normovaného normálneho rozdelenia. Výraz (74) vieme ďalej upraviť na tvar:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial E} &= \left(-e^{-qT} \frac{S}{E} \frac{1}{q} \right) \left[\frac{f(x)}{\sqrt{T}} + \frac{f(-y)}{\sqrt{T_c}} \right] \\ &+ \frac{e^{-rT}}{\sigma} \left[\frac{f(x - \sigma\sqrt{T})}{\sqrt{T}} + \frac{f(-y + \sigma\sqrt{T_c})}{\sqrt{T_c}} \right] \\ &+ e^{-rT} \left[N(-y + \sigma\sqrt{T_c}) - N(x - \sigma\sqrt{T}) \right].\end{aligned}\quad (75)$$

Ďalej sa budeme zaoberať hlavne prvými dvoma riadkami v (75). Všimnime si, že členy, v ktorých vystupuje y sa nám odčítajú, keďže ide o rovnaký vzťah ako v prípade (73). Skúsme zistiť, aký je vzťah medzi členmi obsahujúcimi x . Zaveďme si pomocnú substitúciu

$$\begin{aligned}C &= -e^{-qT} \frac{S}{E} \frac{1}{q} \frac{f(x)}{\sqrt{T}}, \\ D &= e^{-rT} \frac{1}{q} \frac{f(x - \sigma\sqrt{T})}{\sqrt{T}}\end{aligned}$$

a počítajme

$$\begin{aligned}
 C + D &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-qT} \frac{S}{E} e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-rT} e^{-\frac{(x-\sigma\sqrt{T})^2}{2}} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left[e^{-qT} \frac{S}{E} - e^{-rT} e^{-\frac{\sigma^2 T - 2x\sigma\sqrt{T}}{2}} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left[e^{-qT} \frac{S}{E} - e^{-rT} e^{\frac{\sigma^2 T + (\ln \frac{S}{E} + (r-q + \frac{\sigma^2}{2} + \sigma^2 T))}{2}} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left[e^{-qT} \frac{S}{E} - e^{-rT} \frac{S}{E} e^{T(r-q)} \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Z (75) už ostalo len

$$\frac{\partial V}{\partial E} = e^{-rT} \left[N(-y + \sigma\sqrt{T_c}) - N(x - \sigma\sqrt{T}) \right]. \quad (76)$$

Keďže hľadáme extrém funkcie V , položíme (76) rovné nule. Stačí teda vyšetrovať nasledujúcu rovnosť:

$$N(-y + \sigma\sqrt{T_c}) = N(x - \sigma\sqrt{T}). \quad (77)$$

Keďže k distribučnej funkcii normálneho rozdelenia existuje inverzná funkcia $N^{-1}(t)$, môžeme ju aplikovať na rovnosť (77) a dostaneme:

$$-y + \sigma\sqrt{T_c} = x - \sigma\sqrt{T}.$$

Dosadíme za x a y :

$$\frac{-\ln \frac{S}{E} - (r-q)T + \frac{\sigma^2}{2}T_c}{\sqrt{T_c}} = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r-q - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sqrt{T}}. \quad (78)$$

Z rovnice (78) budeme chcieť postupne vyjadriť E , preto ďalej upravujeme:

$$\begin{aligned}
 \ln \frac{S}{E} \left(-\frac{1}{\sqrt{T_c}} - \frac{1}{\sqrt{T}} \right) &= \frac{(r-q - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sqrt{T}} + \frac{-\frac{\sigma^2}{2}T_c + (r-q)T}{\sqrt{T_c}} \\
 &= T(r-q) \left[\frac{1}{\sqrt{T_c}} + \frac{1}{\sqrt{T}} \right] - \frac{\sigma^2}{2} (\sqrt{T} + \sqrt{T_c}).
 \end{aligned}$$

Vyjadríme $\ln \frac{S}{E}$:

$$\begin{aligned}
 \ln \frac{S}{E} &= -T(r-q) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\sqrt{T} + \sqrt{T_c}}{\frac{1}{\sqrt{T_c}} + \frac{1}{\sqrt{T}}} \\
 &= -T(r-q) + \frac{\sigma^2}{2} \sqrt{T_c} \sqrt{T}
 \end{aligned} \quad (79)$$

Aplikujeme na (79) exponenciálnu funkciu:

$$\frac{S}{E} = e^{-T(r-q) + \frac{\sigma^2}{2}\sqrt{T_c}\sqrt{T}}$$

a hľadaný extrém vyzerá nasledovne:

$$E^* = S e^{-T(r-q) + \frac{\sigma^2}{2}\sqrt{T_c}\sqrt{T}}.$$

Dokážeme ešte, že že V je konvexná v E a tým pádom nájdený extrém E^* je minimum. Zderivujeme funkciu V druhýkrát podľa E . Keďže prvá derivácia sa dala pekne upraviť, stačí nám derivovať výraz (76). Počítajme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{\partial V}{\partial E} \right) &= \frac{\partial \left(e^{-rT} \left[N(-y + \sigma\sqrt{T_c}) - N(x - \sigma\sqrt{T}) \right] \right)}{\partial E} \\ &= \frac{e^{-rT}}{\sigma E} \left[\frac{1}{\sqrt{T_c}} f(-y + \sigma\sqrt{T_c}) + \frac{1}{\sqrt{T}} f(x - \sigma\sqrt{T}) \right]. \end{aligned}$$

Tento výsledok je zjavne nezáporný, z čoho vyplýva, že cena chooser opcie je konvexná v expiračnej cene a dosahuje minimum pre $E^* = S e^{-T(r-q) + \frac{\sigma^2}{2}\sqrt{T_c}\sqrt{T}}$. V takom prípade má chooser opcia hodnotu

$$V(E^*) = S \left\{ e^{-qT} [N(w) - N(-z)] + e^{T(q-2r) + \frac{\sigma^2}{2}\sqrt{T_c}\sqrt{T}} [N(w - \sigma\sqrt{T}) + N(-z + \sigma\sqrt{T_c})] \right\},$$

pričom

$$\begin{aligned} w = x(E^*) &= \frac{2T(r-q) + \frac{\sigma^2}{2}\sqrt{T}(\sqrt{T} - \sqrt{T_c})}{\sigma\sqrt{T}}, \\ z = y(E^*) &= \frac{2T(r-q) + \frac{\sigma^2}{2}\sqrt{T}(\sqrt{T_c} - \sqrt{T})}{\sigma\sqrt{T_c}}. \end{aligned}$$

Záver

V tejto práci sme sa venovali vybraným problémom z oblasti finančného modelovania. Zaoberali sme sa známymi modelmi úrokových mier a menej známymi exotickými opciami typu „chooser options“.

V prvej kapitole sme na základe článku M. Ioffeho [13] odvodili v literatúre uvádzané pravdepodobnostné rozdelenie pre Cox-Ingersoll-Rossov proces a zároveň sme vyvrátili tvrdenie z článku [13], ktoré uvádza, že CIR proces nemá rozdelenie necentrálny chí-kvadrát.

Ďalšou tematikou boli výnosové krivky, konkrétne ich priebeh. Pre Vašíčkov model sme spracovali prehľad problematiky a dokončili a doplnili dôkaz o tvare výnosovej krivky.

Výnosovej krivky sa týkala aj kapitola o Nelson-Siegelovom modeli, v ktorej sa skúma tvar výnosovej krivky v závislosti od parametrov modelu. V literatúre sa uvádza vplyv na správanie sa krivky v limitných prípadoch, my sme odvodili kompletnú klasifikáciu prípadov pre konvexnosť/konkávnosť výnosovej krivky v závislosti od parametrov α_2 a α_3 ; motiváciou bolo nesprávne tvrdenie v knihe [25].

Posledná kapitola pojednáva o problematike chooser opcií, kde sme vychádzali z článku [22] o vplyve času voľby a expiračnej ceny na výšku ceny chooser opcie. Zároveň sme poukázali na nesprávnosť tvrdenia o korelácii, ktoré sa v tomto článku tiež vyskytlo.

Táto diplomová práca ponúka prehľad niekoľkých metód finančného modelovania, pričom v každom z prípadov pridáva dôkaz nepodloženého tvrdenia, alebo vyvracia nesprávne tvrdenia a modifikuje ich tak, aby boli správne.

Pomyselným pokračovaním tejto práce je kontaktovať autorov, ktorých článkami sa práca primárne zaoberá, a ponúknuť im svoju verziu riešenia problematiky.

Zoznam použitej literatúry

- [1] ALLEN, G.: *Modeling with Itô Stochastic Differential Equations*, Springer, 2007
- [2] BHANDARI, M., JOENSSON, A.: *Clinical Research for Surgeons*, Thieme, 2009
- [3] BLACK, F., SCHOLES, M.: *The Pricing of Options and Financial Liabilities*, The Journal of Political Economy, 1973
- [4] CAIRNS, A. J. G.: *Interest Rate Models: An Introduction*, Princeton University Press, 2004
- [5] CBOE || Chicago Board Option Exchange, dostupné na internete (28.4.2015):
<http://www.cboe.com/>
- [6] COX, J.C., INGERSOLL, J.E., ROSS, S. A.: *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica, Volume 53 no.2, March, 1985
- [7] DIEBOLD, F. X., RUDEBUSCH, G. D.: *Yield Curve Modeling and Forecasting: The Dynamic Nelson-Siegel Approach*, Princeton University Press, 2013
- [8] DOBRUSHKIN, V. A.: *Methods in Algorithmic Analysis*, CRC Press, 2009
- [9] ECB Statistical Data Warehouse, dostupné na internete (23.4.2015)
<http://sdw.ecb.europa.eu/home.do>
- [10] ERDÉLYI, A.: *Tables of Integral Transforms 1*, McGraw-Hill, New York, 1954
- [11] GUT, A.: *An Intermediate Course in Probability*, Springer Science & Business Media, 2009
- [12] HESTON, S. L.: *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*, The Review of Financial Studies 6 (2), 1993
- [13] IOFFE, M.: *Probability Distribution of Cox-Ingersoll-Ross Process*, Egartech, dostupné na internete (18.10.2014)
http://www.egartech.com/docs/the_classical_cox.pdf

- [14] CHAN, N. H., WONG, H. Y.: *Handbook of Financial Risk Management: Simulations and Case Studies*, John Wiley & Sons, 2013
- [15] CHOUDHRY, M.: *Analysing and Interpreting the Yield Curve*, Vydavateľ John Wiley & Sons, 2011
- [16] KOLLÁR, M.: *Matematická analýza I*, prednášky, 2010
- [17] KWOK, Y. K.: *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer Science & Business Media, 2008
- [18] LACKO, V.: *Two-factor convergence model of Cox-Ingersoll-Ross type*, Diplomová práca, Univerzita Komenského, Bratislava, 2010
- [19] MALLER, R. A., MÜLLER, G., SZIYMAYER, A.: *Ornstein–Uhlenbeck Processes and Extensions*, Springer Berlin Heidelberg, 2009
- [20] MARTELLINI, L., PRIAULET, P., PRIAULET, S.: *Fixed-Income Securities: Valuation, Risk Management and Portfolio Strategies*, John Wiley & Sons, 2005
- [21] MARTIN, V., HURN S., HARRIS D.: *Econometric Modelling with Time Series: Specification, Estimation and Testing*, Cambridge University Press, 2012
- [22] MARTINKUTE-KAULINE, R.: *Exotic Options: A Chooser Option and Its Pricing*, Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, 2012
- [23] MÉSZÁROSOVÁ, M.: *Do Máriinej diplomovky*, osobný blog, dostupné na internete (22.4.2015)
[http : //tooshyarts.blogspot.sk/2015/04/do – mariinej – diplomovky.html](http://tooshyarts.blogspot.sk/2015/04/do-mariinej-diplomovky.html)
- [24] MUNK, C.: *Fixed Income Modelling*, Oxford University Press, 2011
- [25] NAWALKHA, S. K., SOTO, G. M., BELIAEVA, N. K.: *Interest Rate Risk Modelling: The Fixed Income Valuation Course*, John Wiley & Sons, 2005
- [26] NELSON, C. R., SIEGEL, A.: *Parsimonious Modelling of Yield Curves*, Journal of Bussiness 60-4, 1987

- [27] ROWLAND, T., WEISSTEIN, E.: *Characteristic Function*, MathWorld, dostupné na internete (12.12.2014)
<http://mathworld.wolfram.com/CharacteristicFunction.html>
- [28] SHALIZI, C.: *Stochastic Integrals and Stochastic Differential Equations*, Lecture Notes, dostupné na internete (23.4.2015)
<http://www.stat.cmu.edu/cshalizi/754/notes/lecture-19.pdf>
- [29] SOLLIS, R.: *Empirical Finance for Finance and Banking*, John Wiley & Sons, 2012
- [30] ŠEVČOVIČ, D.: *Parciálne diferenciálne rovnice a ich aplikácie*, Vydavateľstvo IRIS s.r.o., Bratislava, 2008
- [31] ŠEVČOVIČ, D., STEHLÍKOVÁ, B., MIKULA, K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Slovenská technická univerzita, Bratislava, 2009
- [32] TANIZAKI, H.: *Computational Methods in Statistics and Econometrics*, CRC Press, 2004
- [33] VAŠÍČEK, O.: *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Financial Economics, 1977, vol. 5, issue 2
- [34] VOSE, D.: *Risk Analysis: A Quantitative Guide*, John Wiley & Sons, 2008