

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



OPTIMÁLNY ČAS NA VÝMENU AUTA:
POHĽAD Z RÔZNYCH PERSPEKTÍV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**OPTIMÁLNY ČAS NA VÝMENU AUTA:
POHĽAD Z RÔZNYCH PERSPEKTÍV**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Dr. Zuzana Chladná



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Matúš Metes
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Optimálny čas na výmenu auta: pohľad z rôznych perspektív
Optimal time to replace a car from different points of view

Cieľ: Cieľom práce je uvážiť rôzne alternatívy, ktoré výmenu auta ovplyvňujú. Zameranie bude na znehodnocovanie auta v dôsledku jeho veku s prihliadnutím aj na možnosť výmeny za ekonomicky a ekologicky výhodnejší model.

Vedúci: RNDr. Zuzana Chladná, Dr.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 29.01.2014

Dátum schválenia: 10.02.2014
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

PodĎakovanie Na tomto mieste by som sa veľmi rád poĎakoval mojej vedúcej diplomovej práce Dr. Zuzane Chladnej za množstvo času, ktoré mi venovala pri konzultáciách. Ďakujem za mnohé návrhy, ochotu, pomoc a všetky cenné rady a pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce.

Tiež nemôžem vynechať moju rodinu a snúbenicu a spolužiačku Lindu Vodislavskú, ktorej Ďakujem za spríjemnenie času a morálnu podporu v období, kedy sme obaja písali naše diplomové práce.

Abstrakt

METES, Matúš: Optimálny čas na výmenu auta: pohľad z rôznych perspektív [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Dr. Zuzana Chladná, Bratislava, 2015, 68 s.

Cieľom tejto diplomovej práce je skúmať úlohu optimálnej výmeny auta. Úlohu namodelujeme s použitím teórie optimálneho riadenia v ktorej minimalizujeme náklady spojené s vlastnením auta. V prvej časti práce predstavíme náš vlastný deterministický model optimálneho riadenia. Vychádzajúc zo základnej formulácie, v ktorej môžeme automobil vymeniť za nový typ, tento model postupne modifikujeme a skúmame zmenu optimálnej výmeny pre možnosť kúpy ojazdeného vozidla, iného typu auta alebo ekologickejšieho vozidla. V závere prvej časti doplníme funkciu užitočnosti v účelovej funkcii. Druhá časť je venovaná stochastickému modelu. Pri jeho riešení zohľadňujeme náhodnosť vývoja cien pohonných hmôt a náhodnú kazivosť vozidla. Výsledky získané z oboch častí interpretujeme a porovnáme pre jednotlivé štyri typy skúmaných modelov áut.

Kľúčové slová: optimálna výmena auta, teória optimálneho riadenia, geometrický Brownov pohyb, reálne opcie, Monte Carlo simulácie, Least Squares Monte Carlo, stochastická úloha

Abstract

Abstract METES, Matúš: Optimal car replacement time from different points of view [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Dr. Zuzana Chladná, Bratislava, 2015, 68 p.

The aim of this diploma thesis is to study the optimal car replacement problem. We formulate the problem using optimal control theory where the objective is to minimize the costs associated with car ownership. In the first part of the thesis we introduce our own deterministic optimal control model. Starting from the basic formulation which allows us to replace the car for a new type, we gradually modify this model and examine the change of optimal car replacement time when the possibility to buy a used car, another type of car or eco friendly car is enabled. Finally, in the end of the first part we extend the model with utility function in the objective function. The second part is devoted to the stochastic model. We consider oil prices development contingency and random car defectiveness. Consequently, we interpret and compare the results obtained in both parts of this thesis for four different car types.

Keywords: optimal control problem of car replacement, optimal control theory, geometric Brownian motion, real options, Monte Carlo simulations, Least Squares Monte Carlo, stochastic problem

Obsah

Zoznam obrázkov	9
Zoznam tabuliek	10
Úvod	11
1 Deterministická úloha optimálneho riadenia	14
1.1 Metódy riešenia úlohy optimálneho riadenia	17
2 Optimálna výmena auta ako deterministická úloha	19
2.1 Deterministická úloha optimálnej výmeny auta	20
2.2 Nové či ojazdené?	23
2.3 Vplyv funkcie užitočnosti na optimálnu výmenu auta	26
2.4 Výmena za iný typ automobilu	28
2.4.1 Numerické výsledky výmeny auta za iný model	30
2.4.2 Numerické výsledky výmeny auta za úsporný automobil	31
3 Stochastická úloha optimálneho riadenia	34
3.1 Diskrétna náhodná premenná	34
3.2 Spojitá náhodná premenná	35
3.2.1 Finančné opcie	35
3.2.2 Reálne opcie	36
3.2.3 Oceňovanie amerických reálnych opciách pomocou simulácií	36
3.2.4 Monte Carlo simulácie metódou najmenších štvorcov	37
3.2.5 LSM na príklade	38
3.2.6 Geometrický Brownov pohyb	42
4 Optimálna výmena auta ako stochastická úloha	44
4.1 Vplyv kazivosti auta na optimálnu výmenu auta	44
4.2 Vplyv ceny pohonných hmôt na optimálnu výmenu auta	46
4.2.1 Modelovanie cien pohonných hmôt	47
4.2.2 Model optimálnej výmeny auta pri stochastických cenách	48

4.2.3	Algoritmus riešenia stochastickej úlohy	49
4.2.4	Numerické riešenie pre lineárne vozidlo	52
4.2.5	Numerické riešenie pre vybrané vozidlá	53
4.2.6	Numerické riešenie so zmenou spotreby a počtu prejdených km .	55
4.2.7	Numerické riešenie Hondy Civic pri rozhodovaní viackrát ročne .	59
4.2.8	Numerické riešenie výmeny za úsporný automobil	61
	Záver	65
	Zoznam použitej literatúry	67

Zoznam obrázkov

1	Skutočná cena PHM za obdobie 2010-2015	48
2	Simulované ceny PHM počas 30 rokov	50
3	Predaj lineárneho vozidla vzhľadom na ceny PHM	53
4	Predaj Volva XC90 vzhľadom na ceny PHM	54
5	Predaj Škody Fabia vzhľadom na ceny PHM pri klesajúcej spotrebe . . .	56
6	Predaj Hondy Civic vzhľadom na ceny PHM pri vyššom počte km . . .	56
7	Predaj Hondy Civic vzhľadom na ceny PHM pri rastúcej spotrebe . . .	57
8	Predaj Volva XC90 vzhľadom na ceny PHM pri vyššom počte km . . .	58
9	Predaj Volva XC90 vzhľadom na ceny PHM pri rastúcej spotrebe . . .	59
10	Simulovaná cena PHM vzhľadom na bariéru pre Hondu Civic	59
11	Predaj Hondy Civic vzhľadom na ceny PHM polročne	60
12	Predaj Hondy Civic vzhľadom na ceny PHM štvrťročne	61
13	Simulovaná cena PHM vzhľadom na bariéru pre Hondu Civic štvrťročne	61
14	Výmena Škody Fabia za úsporné vozidlo vzhľadom na ceny PHM . . .	62
15	Výmena Hondy Civic za úsporné vozidlo vzhľadom na ceny PHM . . .	63
16	Výmena Volva XC90 za úsporné vozidlo vzhľadom na ceny PHM . . .	63

Zoznam tabuliek

1	Vybrané vozidlá	20
2	Nákladová funkcia $\varphi(i)$ a hodnotová funkcia $\psi(i)$ v €	22
3	Optimálny počet rokov držania áut pred predajom	23
4	Priradenie riadenia podľa veku auta	24
5	Optimálnej výmena auta s možnosťou kúpiť staršie vozidlo	26
6	Optimálna výmena auta s funkciou $U(x, y)$	29
7	Pomocné funkcie pre výmenu auta za iné vozidlo	29
8	Optimálna výmena auta s možnosťou vymeniť za iné vozidlo	31
9	Optimálny vek vozidla pred výmenou za úsporné v rokoch	32
10	Simulácie vývoja cien akcie v €	39
11	Tabuľka výplat v čase $t = 2$	41
12	Tabuľka výplat v čase $t = 3$	41
13	Optimálna výmena auta s náhodnosťou kazivosti pre Škodu Fabiu	46
14	Optimálna výmena auta s náhodnosťou kazivosti pre Hondu Civic	47
15	Optimálna výmena auta s náhodnosťou kazivosti pre Volvo XC90	48
16	Odhadnuté parametre GBP PHM	49
17	Tabuľka hodnôt funkcií pre lineárne vozidlo	52

Úvod

V našej diplomovej práci sa budeme zaoberať dilemou, ktorú rieši pravdepodobne každý šofér alebo majiteľ auta. Kedy je načas, aby som si kúpil nové auto? Kedy je optimálne staré auto vymeniť za nové, prípadne ojazdené? Kedy je pre mňa ekonomicky najvhodnejšie auto vymeniť? Odpoveď na tieto otázky nie je jednoduchá ani jednoznačná a je podmienená viacerými faktormi.

Cieľom diplomovej práce je pokúsiť sa hľadať riešenie naznačeného problému vhodnou optimalizáciou na príklade vybraných modelov áut. Túžbou majiteľa je už pri jeho kúpe auto maximálne využívať pri minimálnych nákladoch na jeho réžiu a opravu. Preto potenciálni majitelia nového auta zohľadňujú pri kúpe viaceré kritériá:

- *Cena auta*: Cenu auta je možné považovať za rozhodujúci faktor, ktorý je podmienený finančnými možnosťami kupujúceho. Už tento faktor nemusí byť jednoznačný. Napriek nízkej počiatkovej investícii, náklady na jeho neskorší servis a opravy môžu kupujúceho ovplyvniť.
- *Typ pohonnej hmoty*: Dlhodobo je síce diesel lacnejší ako benzín, ale vstupná investícia do dieslového motora je vyššia ako do toho benzínového. Ktorá je tá správna cesta? Vznetový (dieslový) alebo zážihový (benzínový) motor?
- *Ročné náklady na auto*: Prezutie pneumatík, zákonné poistenie, každoročná prehliadka v servise, výmena olejov či filtrov. Týmto nevyhnutným investíciám sa nevyhne žiaden motorista. Náklady na ne sa však u rôznych značiek áut môžu líšiť. Do úvah o optimálnej výmene auta ich preto musíme zahrnúť.
- *Spotreba*: Nižšia spotreba veľakrát znamená slabší motor a teda nižší pôžitok z jazdy. Na druhej strane, implikuje tiež nižšie prevádzkové náklady. Vyššia spotreba zase znamená vyššie výdavky na pohonné hmoty.
- *Ročné ubúdanie hodnoty auta*: Niektoré značky a modely majú výrazne nadstretlené ceny nad skutočnú hodnotu auta a už v prvom roku po kúpe cena takého auta rapídne klesá. Do úvahy preto prichádza možnosť kúpiť ojazdené vozidlo. Aj z toho však vyplýva ďalšia otázka: koľkoročné auto kúpiť?

- *Bezpečnosť*: Dlhodobou jednotkou v bezpečnosti je v rebríčku Volvo, no odráža sa to aj na jeho cene. Na druhej strane, malé ľahké autíčko s nízkou spotrebou predstavuje bezpečnostnú hrozbu pre svojich pasažierov, lebo pri nožnej havárii neposkytne dostatočnú ochranu.
- *Komfort*: V reči motorových fajšmekrov, Bentley vodičovi poskytne vyšší úžitok minimálne z pocitového hľadiska ako Mercedes a Mercedes zas vyšší úžitok ako Škoda. Hlavne pre ženské pokolenie je zas výhodou autíčko, s ktorým sa ľahko parkuje alebo ktoré má parkovacieho asistenta.
- *Znečistenie životného prostredia*: Eko šoféri si radi priplatia za nižšie emisie alebo už spomínanú nižšiu spotrebu. Za ekologickosť vozidla si však musíme priplatiť.
- *Farba*: Jeden z rozhodujúcich faktorov, ktorý však cenu a kúpu konkrétneho vozidla zvyčajne neovplyvňuje. Jedine že by ste si chceli namiešať svoj vlastný odtieň Ferrari.

Ako vidíme, rozhodnutie o kúpe auta závisí od veľkého množstva parametrov, ktoré je však problematické vyčíslieť či stanoviť ich hodnotu. V našej práci priblížime a pokúsime sa analyzovať problém optimálnej výmeny automobilu pomocou najpodstatnejších vlastností ovplyvňujúcich naše rozhodovanie. Pracovať budeme s konkrétnymi príkladmi a modelmi áut. Rozhodovanie, kde na jednej strane stojí užitočnosť a na tej druhej cena či náklady, naznačuje, že sa bude jednať o optimalizačné úlohy, pri ktorých sa v každom kroku rozhodujeme, čo spravíme - kúpime, predáme, vymeníme za novší alebo úplne iný model. Pomôžeme si vlastným modelom - nie však auta, ale modelom optimálneho riadenia, ktorý si predstavíme v ďalších častiach tejto diplomovej práce. Do modelu sa v jednotlivých častiach pokúsime postupne zahrnúť viaceré aspekty, aby sme sa čo najviac priblížili reálnej situácii.

Diplomová práca je rozdelená do štyroch kapitol. V prvej kapitole si predstavíme deterministickú úlohu optimálneho riadenia, jej členenie ako aj metódy riešenia.

V Kapitole 2 túto úlohu implementujeme do nášho problému optimálnej výmeny auta. Numericky vyrátame optimálny vek auta pred predajom doplnením funkcie užitočnosti, alebo možnosťou vymeniť automobil za iný typ. Klasifikáciu a metódy riešenia

úlohy stochastického dynamického programovania si priblížime v Kapitole 3. V Kapitole 4 tieto poznatky použijeme pri numerickej analýze, pri diskretnom vývoji kazivosti pre každé auto, ale aj spojitom vývoji cien pohonných hmôt.

1 Deterministická úloha optimálneho riadenia

Na úvod našej práce si predstavíme úlohu optimálneho riadenia. Úloha optimálneho riadenia predstavuje oporný bod v našom ďalšom skúmaní. Pri spracovaní tejto časti našej diplomovej práce sme vychádzali najmä z [5].

Uvažujme systém, ktorý treba riadiť počas k -etáp. Pod pojmom etapa zvyčajne rozumieme isté časové obdobie. Premennou x_i , $i = 0, \dots, k$ nazveme stavovú premennú. Táto premenná nám umožňuje popísať stav, v akom sa systém v danej etape nachádza. Hodnota stavovej premennej na začiatku systému (x_0) je známa. Stav systému sa v každej etape mení, a to v závislosti od riadiacej premennej, ktorú označíme u_i , $i = 0, \dots, k-1$. Hodnota stavovej premennej x_i je určená jednoznačne stavovou rovnicou $x_{i+1} = f_i(x_i, u_i)$. Úlohou optimálneho riadenia bude maximalizovať hodnotu účelovej funkcie $f_i^0(x_i, u_i)$. Označme X_i množinu prípustných stavov a U_i je množina prípustných riadení v každej etape. Hodnotu koncového stavu (x_k) obmedzíme množinou C . Zaveďme úlohu optimálneho riadenia v štandardnom tvare:

$$\begin{aligned} \max_{u_i \in U_i} \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i), \\ x_{i+1} = f_i(x_i, u_i), \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \\ x_0 = x_0, \\ x_k \in C, \\ u_i \in U_i, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \\ x_i \in X_i. \end{aligned} \tag{1}$$

Ako je vidieť zo štandardnej úlohy optimálneho riadenia (1) vzhľadom na stavovú rovnicu $f_i(x_i, u_i)$ bude x_i jednoznačne určené v každej etape systému. Riadenie u_i je v každej iterácii obmedzené v závislosti od stavovej rovnice $f_i(x_i, u_i)$, aby stavová premenná ostala v prípustnej množine X_i . Riešením tejto úlohy je množina riadení $\hat{U} = \{u_0, u_1, \dots, u_{k-1}\}$ a množina jej odozvy, teda stavov $\hat{X} = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k\}$.

Štandardnú úlohu optimálneho riadenia je možné podľa [5] jednoznačne klasifikovať v závislosti od nasledovných kritérií:

- *Typ účelovej funkcie*

- Typ účelovej a riadiacej funkcie v závislosti od času i
- Typ koncovej podmienky
- Ohraničenia
- Počet etáp
- Rozmer premenných
- Náhodnosť

Typ účelovej funkcie

Okrem štandardného typu účelovej funkcie závislej od x_i a u_i môže byť účelová funkcia nahradená alebo obohatená o funkciu závislú od koncového stavu x_k . Preto rozlišujeme tri druhy účelových funkcií:

1. *Lagrangeova úloha*: v tejto úlohe maximalizujeme $\sum_{k-1}^{i=0} f_i^0(x_i, u_i)$.
2. *Mayerova úloha*: v tejto úlohe maximalizujeme len $\phi(x_k)$.
3. *Bolzova úloha*: táto úloha je kombináciou dvoch predošlých typov úloh, preto maximalizujeme $\sum_{k-1}^{i=0} f_i^0(x_i, u_i) + \phi(x_k)$.

Typ účelovej a riadiacej funkcie v závislosti od času i

Od času i závisia v každom okamihu riadiace x_i a stavové premenné u_i . Čas i môže však mať vplyv aj na účelové a riadiace funkcie, a preto v závislosti prítomnosti času i klasifikujeme dva typy úloh:

1. *Autonómna úloha*: v tejto úlohe ani účelová funkcia, ani stavová rovnica nezávisia priamo od času i . Príkladom môže byť $f_i^0(x_i, u_i) = x_i^2 - u_i^3$ a $f_i(x_i, u_i) = x_i + 2u_i$ pre všetky $i = 0, 1, \dots, k - 1$.
2. *Neautonómna úloha*: v tejto úlohe aspoň jedna buď účelová funkcia alebo stavová rovnica závisí priamo od času i . Príkladom môže byť $f_i(x_i, u_i) = x_i + 2u_i - i$ pre všetky $i = 0, 1, \dots, k - 1$.

Typ koncovej podmienky

V tomto kritériu budeme sledovať obmedzenie na koncovú podmienku x_i , teda podľa štandardnej úlohy budeme sledovať množinu C . Dostaneme nasledujúce tri typy úloh:

1. *Úloha s pevným koncom*: v tejto úlohe je pevný koniec x_i jednoznačne určený a množina C obsahuje jediný bod, napríklad $x_k = 10$.
2. *Úloha s voľným koncom*: v tejto úlohe nemáme obmedzenie na koncový stav x_i . Napríklad množina C môže byť množinou reálnych čísel R .
3. *Úloha s čiastočne pevným koncom*: do tejto kategórie patria všetky ostatné typy úloh, ktoré nemajú jednoznačne určený pevný alebo voľný koniec.

Ohraničenia

Nie každá úloha optimálneho riadenia musí mať dané ohraničenia na jednotlivé riadiace a stavové premenné. V takomto prípade nahrádzajú ohraničenia na tieto premenné definičné obory jednotlivých funkcií $f_i(x_i, u_i)$ a $f_i^0(x_i, u_i)$. Rozčleniť úlohy podľa typu ohraničenia môžeme nasledovne:

1. *Úloha s ohraničením*: v tomto prípade sú množiny X_i a U_i pevne dané pre všetky $i = 0, 1, \dots, k - 1$.
2. *Úloha bez ohraničení na riadenie*: množina U_i nemá obmedzenie, a preto môže byť napríklad $U_i = R$ pre všetky $i = 0, 1, \dots, k - 1$.
3. *Úloha bez ohraničení na stav*: množina X_i nemá obmedzenie, a preto by napríklad $X_i = R$ pre všetky $i = 0, 1, \dots, k - 1$.
4. *Úloha bez ohraničení na riadenie a stav*: tento prípad nemá obmedzenie ani na riadenie, ani na stav, a preto napríklad $U_i = R, X_i = R$ pre všetky $i = 0, 1, \dots, k - 1$.

Počet etáp

Každý systém riadime počas k -etáp. Počet etáp môže byť známy, neznámy alebo dokonca nekonečný. Na základe toho členíme úlohy do troch kategórií:

1. *Úloha s pevným časom*: v tejto úlohe je počet etáp k pevne daný. Napríklad $k = 30$.
2. *Úloha s voľným časom*: v tejto úlohe je počet etáp k neznámy, ale konečný. Označujeme $k = T$.
3. *Úloha s nekonečným časovým horizontom*: počet etáp je nekonečný. Teda $k = \infty$.

Rozmer premenných

Štandardne sme uvádzali jednozložkové riadiace a stavové premenné. Vo všeobecnosti môžu byť tieto premenné aj vektory, teda viaczložkové, a tak budeme rozlišovať:

1. *Jednorozmerná úloha*: x_i aj $u_i \in R$, pre všetky $i = 0, 1, \dots, k - 1$.
2. *Viacrozmerná úloha*: x_i alebo $u_i \in R^n$, ak $n \geq 2$ a pre všetky $i = 0, 1, \dots, k - 1$.

Náhodnosť

Posledným zo základných delení pre naše úlohy je rozlíšiť, či sú naše premenné jednoznačne určené, alebo ich vývoj je ovplyvnený nejakým náhodným faktorom. Preto budeme rozlišovať:

1. *Deterministická úloha*: V tejto úlohe sú parametre určené vopred, ich hodnoty vo všetkých etapách sú známe už v čase 0.
2. *Stochastická úloha*: V tejto úlohe je hodnota stavovej premennej závislá od vývoja jednej či viacerých náhodných premenných. Napríklad stavová rovnica by vyzerala $x_{i+1} = x_i + 2u_i + z_i$, kde z_i je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnotu 1 s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$, a hodnotu 0 s pravdepodobnosťou taktiež $\frac{1}{2}$.

1.1 Metódy riešenia úlohy optimálneho riadenia

Vráťme sa k štandardnej úlohe optimálneho riadenia (1). Existuje viacero prístupov ako úlohu optimálneho riadenia riešiť. V našom prípade budeme riešiť úlohu pomocou metódy dynamického programovania. Tento postup je podrobne popísaný v [5]. Pre

deterministickú úlohu s pevným časom odvodíme *Bellmanovu rovnicu dynamického programovania* nasledovne:

$$\begin{aligned}
 V_j(x) &= \max_{u_j \in \Gamma_j(x)} [f_j^0(x, u) + V_{j+1}(f_j(x, u))], \\
 j &= 0, \dots, k-1, \\
 x &\in X_j, \\
 V_k(x) &= \begin{cases} 0, & \text{pre } x \in C, \\ -\infty, & \text{pre } x \notin C. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Funkcia V sa nazýva hodnotová funkcia a funkcia $\Gamma_j(x)$ je prípustná množina riadení v každom čase j . Koncovú hodnotu hodnotovej funkcie V_k určíme pre všetky prípustné stavy $x \in X_j$, v závislosti od toho, či stav $x \in C$ alebo $x \notin C$. Pri minimalizačnej úlohe sa hodnota koncovej hodnotovej funkcie V_k zmení na $+\infty$ pre $x \notin C$. Formulácie v tvare (2) nám umožňuje nájsť hodnotu optimálneho riadenia rekurzívne, tzv. spätnou indukciou. Po stanovení hodnotovej funkcie v poslednej etape k pre všetky $x \in X_i$ nám algoritmus pokračuje spätne, čím vyrátame $V_j(x)$ pre všetky $j = 0, \dots, k-1$. V každom čase j si pri vyrátaní $V_j(x)$ pamätáme optimálne \hat{u} pre všetky $x \in X_j$. Následne použitím x_0 , stavovej rovnice $f_i(x_i, u_i)$ a \hat{u}_i pre dané \hat{x}_i vyrátaných vyrátame optimálne množiny \hat{U} a \hat{X} . Schému takeého výpočtu možno zhrnúť do nasledovných krokov:

Krok 1 Výpočet koncovej hodnotovej funkcie V_k pre všetky možné stavy $x \in X_j$.

Krok 2 Vytvorenie vonkajšieho cyklu pre časy $j = (k-1) : (-1) : t_0$ a vnútorného cyklu pre všetky stavy $x \in X_j$ a všetky riadenia $u \in U_j$. V každom kroku pre dané riadenie u vyrátame hodnotovú funkciu $V_j(x)$ a vyberáme maximálne $V_j(x)$ z už vypočítaných hodnôt v závislosti od riadenia u . Informáciu o zvolenej stratégii u pre daný čas j si uchováme. Hodnotovú funkciu $V_j(x)$ nastavíme na maximálnu vyrátanú hodnotu.

Krok 3 Vo finálnej fáze je pre každý čas j , stav x stanovená optimálna stratégia u . Množiny \hat{U} a \hat{X} vypočítame s použitím počiatočnej podmienky a stavovej rovnice $f_j(x, u)$.

2 Optimálna výmena auta ako deterministická úloha

V tejto časti naformulujeme základný problém optimálnej výmeny auta ako úlohu optimálneho riadenia. Uvažujme jednotlivca (alebo firmu), ktorý sa počas vopred stanoveného časového horizontu môže každý rok rozhodnúť, či si svoje súčasné auto ponechá, alebo ho predá a kúpi si nové. Predpokladajme, že jednotlivec sa rozhoduje racionálne a len na základe očakávaných nákladov spojených s jednotlivým rozhodnutím. Z uvedených alternatív volí teda tú, ktorá minimalizuje celkové náklady spojené s vlastníctvom a prevádzkou auta. Náklady pozostávajú z investičných a prevádzkových výdavkov. Investičné výdavky predstavujú náklady spojené s predajom a kúpou auta. Prevádzkové výdavky reprezentujú náklady na opravy či poistenie. V našom príklade budeme predpokladať, že na začiatku sledovaného obdobia máme nové auto. Označme $\psi(0)$ hodnotu nového auta. Funkcia $\psi(i)$ označuje hodnotu auta starého i rokov. Predpokladáme, že vek auta znižuje jeho hodnotu, t.j. že funkcia $\psi(i)$ je klesajúca. Prevádzkové náklady popíšeme pomocou funkcie $\varphi(i)$, ktorá predstavuje náklady na auto vo veku i až $(i+1)$ rokov. Predpokladáme, že pre i -ročné auto sú funkcie $\psi(i)$ a $\varphi(i)$ v sledovanom období vopred známe. Ďalej predpokladajme, že auto môžeme predáť a ihneď vymeniť za nové len na konci každého roka. Model optimálnej výmeny auta môžeme teda zapísať v tvare úlohy optimálneho riadenia nasledovne:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(1+r)^{i+1}} [\varphi(x_i) + (\psi(0) - \psi(x_i + 1))u_i], \\
 & x_{i+1} = (1 - u_i)(x_i + 1), \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \\
 & x_0 = 0, \\
 & u_i \in U_i, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \\
 & x_i \in X_i, \quad i = 0, 1, \dots, k-1.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Riadiaca premenná u_i nám určuje, aké rozhodnutie sme sa rozhodli vykonať na konci i -teho roka. V základnej úlohe uvažujeme len dve hodnoty riadenia: možnosť auto predáť ($u_i = 1$) alebo nepredáť ($u_i = 0$). Stavová premenná x_i označuje vek vozidla. Množina X_i stanovuje prípustný vek pre uvažované vozidlo. Napríklad ak chceme vlastniť len auto, ktoré má najviac 7 rokov, definujeme $X_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

V úlohe (3) sme tiež zohľadnili časovú hodnotu peňazí: náklady vyplatené v rôznych etapách diskontujeme mierou r .

Úloha (3) je sformulovaná ako úloha optimálneho riadenia v štandardnom tvare. Ide o Lagrangeovu, autonómnu úlohu s ohraničením, s pevným časom a pevným koncom, ktorá je jednorozmerná a diskrétna. V ďalších častiach budeme riešiť úlohu (3) pre konkrétne typy áut.

2.1 Deterministická úloha optimálnej výmeny auta

V tejto časti budeme riešiť úlohu (3) pre vybrané typy vozidiel. V troch rôznych kategóriách áut sme si zvolili po jednom zástupcovi. Dostupnosť dát bolo jedno z hlavných kritérií pre zvolené automobily. Náš výber ovplyvnil aj fakt, že vybrané autá sú na trhu už dlhšiu dobu (10 rokov) v rovnakej verzii, čo nám uľahčuje odhadnúť ich zostatkovú hodnotu. Konkrétne typy áut, ako aj ich zaradenie do jednotlivých vybraných kategórií sú zobrazené v Tabuľke 1.

<i>Kategória</i>	<i>Konkrétny typ vozidla</i>
<i>malé automobily</i>	Škoda Fabia 1.2 12V HTP 51 kW (70 k)
<i>nižšia stredná trieda automobilov</i>	Honda Civic 5D 1.8 MT sport
<i>terénne automobily</i>	Volvo XC 90 Summum

Tabuľka 1: Vybrané vozidlá

Úlohu (3) budeme riešiť za predpokladu, že funkcie $\psi(i)$, $\varphi(i)$ a diskontná úroková miera r sú známe v každom čase $i = 0, \dots, k$. Časový horizont k zvolíme 30 rokov. Hodnotu úrokovej miery r odhadneme na úrovni 3%. Množinu prípustných stavov obmedzíme na $X_i = \{0, 1, \dots, 9\}$, čo znamená, že vlastniť nemôžeme staršie ako 9 ročné auto a teda po 10 rokoch auto musíme predať. V prípade vlastníctva staršieho ako 9 ročného vozidla sa ukazuje, že zostatková cena u väčšiny automobilov je veľmi nízka, či dokonca nulová. Z tohto dôvodu sme obmedzili maximálny vek vozidla na 9 rokov.

Prvým krokom v stanovení optimálneho veku, v ktorom auto vymeniť, je zistiť zostatkovú hodnotu vozidla v každom roku, teda hodnotu funkcie $\psi(i)$ pre všetky $i = 0, \dots, k$. Zostatkovú hodnotu sme sa pokúsili odhadnúť pomocou percentuálneho

úbytku hodnoty vozidla, avšak tieto údaje boli veľmi nepresné a často viedli k takmer nulovým hodnotám vozidiel. Preto sme sa rozhodli vyhľadať hodnoty z internetových portálov predajcov áut. Vyhľadane ceny pre jednotlivé typy automobilov sme dostali ako priemer cien všetkých predávaných automobilov daného typu a veku. Dáta sme čerpali z internetového portálu *www.autobazar.eu* [1]. Odhadnuté hodnoty funkcie $\psi(i)$ pre vybrané typy vozidiel sú uvedené v Tabuľke 2.

Druhou, pravdepodobne komplikovanejšou úlohou, bolo zistiť nákladovú funkciu $\varphi(i)$. Túto funkciu sme navrhli odhadnúť nasledujúcim tvare:

$$\varphi(x_i) = Ns(x_i) + Sp(x_i) \frac{km(i)}{100} P(i). \quad (4)$$

Funkcia $Ns(x_i)$ označuje náklady na servis vozidla starého (x_i) rokov. $Sp(x_i)$ vyjadruje spotrebu daného auta, ktorá je rastúcou funkciou veku vozidla. Funkcie $km(i)$ a $P(i)$ sú závislé od času i a predstavujú počet prejdených kilometrov a priemernú cenu pohonnej hmoty (PHM) v danom roku. Predpokladali sme, že počas sledovaného obdobia prejde auto priemerne 20 000 km každý rok a cena PHM ostáva konštantná na hodnote 1,429€/l pri benzíne a 1,319€/l pri naftě. Tieto hodnoty sme odhadli na základe priemernej ceny benzínu, respektíve nafty v období troch rokov zo stránky *statdat.statistics.sk* [12]. Pri výpočte $Ns(x_i)$ sme využili informácie získané z portálu *http://www.abcauto.sk* [11]. Pri štandardnej jazde je odhadnutá výmena zimných aj letných pneumatík po každých 40 000 km. Technické a emisné kontroly sú povinné u nového auta po štyroch rokoch a u vozidiel starších ako štyri roky každé dva roky. Zo stránok jednotlivých značiek áut sme odhadli ceny pravidelných prehliadok v autorizovaných servisoch, ako aj odporúčané výmeny súčiastok. Dostávame tak hodnoty pre dve funkcie $\psi(i)$ a $\varphi(i)$, ktoré zobrazíme v Tabuľke 2.

Po získaní týchto dvoch funkcií môžeme použitím teórie optimálneho riadenia a hodnotovej funkcie $V_j(x)$ vyrátať optimálnu množinu riadení \hat{U} počas sledovaného obdobia 30 rokov. Množina \hat{U} bude pozostávať z hodnôt 1 a 0, ktoré nám stanovujú, či je výhodné v danom roku auto predať, a teda vymeniť za nové, alebo v daný rok auto nepredať. Úlohu (3) riešime pomocou Bellmanovej rovnice dynamického programovania, ktorú možno vyjadriť v tvare:

Ročník	Vek vozidla (i)	Škoda Fabia		Honda Civic		Volvo XC90	
		$\psi(i)$	$\varphi(i)$	$\psi(i)$	$\varphi(i)$	$\psi(i)$	$\varphi(i)$
2014	0	9900	1663	16990	1798	45340	2330
2013	1	9299	1749	13990	1855	36450	2384
2012	2	8290	1899	11900	2113	31990	2784
2011	3	6900	2143	10890	2583	23840	3294
2010	4	6300	1928	10500	2228	20700	2974
2009	5	5500	2133	8999	2483	17990	3657
2008	6	5100	2028	6900	2328	13990	3383
2007	7	3600	2272	6590	2683	11490	3974
2006	8	3400	2257	5950	2628	10950	4309
2005	9	3000	2341	2990	2583	9000	4273
2004	10	2900	2286	2900	2528	7990	4635
2003	11	2590	2729	2900	3183	6990	5744

Tabuľka 2: Nákladová funkcia $\varphi(i)$ a hodnotová funkcia $\psi(i)$ v €

$$\begin{aligned}
 V_j(x) &= \min_{u_j \in \{0,1\}} [[\varphi(x) + (\psi(0) - \psi(x+1))u_j] \\
 &\quad + \frac{1}{1+r} V_{j+1}((1-u_j)(x+1))], \\
 j &= \{0, \dots, 29\}, \\
 x &\in \{0, 1, \dots, 9\}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Podmienka na koncový stav je daná nasledovne:

$$V_{30}(x) = \begin{cases} \varphi(x) - \psi(x+1), & \text{pre } x \in \{0, 1, \dots, 9\}, \\ \infty, & \text{pre } x \notin \{0, 1, \dots, 9\}. \end{cases} \tag{6}$$

K úlohe (5) sme doplnili koncovú podmienku (6), ktorá hovorí, že na konci sledovaného obdobia 30 rokov auto vždy predáme. Úlohu (5) s podmienkou (6) sme implementovali v Matlabe. Výsledky sú zosumarizované v Tabuľke 3. V prvom stĺpci je uvedený typ vozidla, v druhom stĺpci je optimálny vek auta pred predajom. V poslednom stĺpci sú zhrnuté celkové vynaložené náklady na prevádzkovanie a výmenu auta počas 30 rokov pri optimálnom rozhodovaní.

Výsledky ukazujú, že vozidlo Škoda Fabia je optimálne vymeniť za nové už po prvom roku používania. Dôvodom takéhoto výsledku je pravdepodobne malý rozdiel medzi cenou nového auta a cenou auta rok starého v porovnaní s pomerne veľkým rastom nákladom s prevádzkou auta. Na druhej strane, optimálna výmena pre zástupcu z kategórie terénnych áut, Volvo XC90, je až po 10 rokoch: optimálne je teda držať takýto typ vozidla čo najdlhšie. Pripomeňme, že 9 rokov bola nami stanovená hranica maximálneho veku vozidla, ktorý vlastníme. Jedným z dôvodov takého výsledku je vysoká cena nového vozidla, ktorá po dvoch rokoch stratí na hodnote takmer polovicu, zatiaľ čo ročné prevádzkové náklady sa veľmi nezvýšia.

<i>Vybrané vozidlo</i>	<i>Optimálny vek predaja</i>	<i>Náklady počas 30 rokov</i>
Škoda Fabia	<i>po 1 roku</i>	34 829€
Honda Civic	<i>po 8 rokoch</i>	53 895€
Volvo XC 90	<i>po 10 rokoch</i>	90 937€

Tabuľka 3: Optimálny počet rokov držania áut pred predajom

Riešenie základnej úlohy (3) nás inšpirovalo uvážiť niekoľko modifikácií. Cieľom navrhnutých rozšírení bolo priblížiť problematiku optimálnej výmeny auta čo najviac k reálnej situácii. Rozšírenia základnej úlohy (3) sme rozdelili do troch častí:

1. Doplnenie možnosti kúpiť staršie vozidlo rovnakej značky
2. Vplyv funkcie užitočnosti
3. Výmena za iný automobil

Jednotlivé varianty podrobne predstavíme a analyzujeme v nasledujúcich častiach.

2.2 Nové či ojazdené?

V tejto časti práce predstavíme prvú modifikáciu úlohy (3). Množinu prípustných riešení U_i rozšírime o možnosť kúpiť v každej iterácii (v každom roku) aj iné ako nové auto. Na základe analýzy dát zo stránky www.automagazin.sk sme zistili, že v rozmedzí desiatich rokov od zakúpenia sú najčastejšie predávané jedno-, troj- a päťročné autá.

Preto sa v našom modeli obmedzíme len na kúpu nového, ročného, trojročného a päťročného auta. Zavedieme si pomocnú funkciu $g(u_i)$, ktorá nám slúži na popis zmeny stavu vzhľadom k zvolenému riadeniu u_i . Hodnoty funkcie $g(u_i)$, ako aj jednotlivé možnosti riadenia sú zhrnuté v Tabuľke 4.

<i>Typ vymeneného auta</i>	<i>Riadenie u_i</i>	<i>Funkcia $g(u_i)$</i>
<i>Nevymením auto</i>	0	0
<i>Nové auto</i>	1	0
<i>Ročné auto</i>	2	1
<i>Trojročné auto</i>	3	3
<i>Päťročné auto</i>	4	5

Tabuľka 4: Priradenie riadenia podľa veku auta

Základná úloha (3) sa modifikuje na:

$$\begin{aligned}
 \min \sum_{i=0}^{29} \frac{1}{(1+r)^{i+1}} [\varphi(x_i) + (\psi(g(u_i)) - \psi(x_i + 1)) \text{sign}(u_i)], \\
 x_{i+1} = (1 - \text{sign}(u_i))(x_i + 1) + g(u_i), \quad i = 0, 1, \dots, 29, \\
 x_0 = 0, \\
 u_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad i = 0, 1, \dots, 29, \\
 x_i \in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad i = 0, 1, \dots, 29.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Vidíme, že úloha (7) sa líši úlohy (3) nielen množinou prípustných riadení, ale došlo k úprave účelovej funkcie aj stavovej rovnice. Úlohu (7) riešime pomocou Bellmanovej rovnice dynamického programovania:

$$\begin{aligned}
V_j(x) &= \min_{u_j \in \{0,1,2,3,4\}} [[\varphi(x) + (\psi(g(u_j)) - \psi(x+1))\text{sign}(u_i)] + \\
&\quad + \frac{1}{(1+r)} V_{j+1}((1 - \text{sign}(u_i))(x+1) + g(u_i))], \\
j &= \{0, \dots, 29\}, \\
x &\in \{0, 1, \dots, 9\}, \\
V_{30}(x) &= \begin{cases} \varphi(x) - \psi(x+1), & \text{pre } x \in \{0, 1, \dots, 9\}, \\ \infty, & \text{pre } x \notin \{0, 1, \dots, 9\}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{8}$$

S využitím hodnôt funkcií $\psi(i)$ a $\varphi(i)$ definovaných v Tabuľke 2 sme úlohu (8) implementovali v Matlabe. Výsledky numerickej analýzy sú zobrazené v Tabuľke 5. Táto tabuľka zobrazuje optimálne riadenie a vek auta počas desiatich rokov s tým, že na začiatku vlastnime nové auto. Prvý stĺpec Tabuľky 5 zobrazuje čas i v rokoch. Pre každý typ vozidla v prvom stĺpci uvádzame vek auta v danom roku i , ktorý sa mení v závislosti od toho, či na konci roka auto vymieňame za iný model, t.j. od riadenia u_i , zobrazených v druhom stĺpci pre každý typ vozidla.

Pre prvé skúmané auto, Škodu Fabiu, sme už pri úlohe (3) vyrátali, že optimálne bude auto každý rok predať a hneď kúpiť nové. Vidíme, že možnosť kúpiť staršie auto naše rozhodovanie neovplyvní a ostávame pri možnosti auto meniť každý rok za nové. Pre zvyšné dva modely áut sme dostali iné výsledky. Pre Hondu Civic sa zdá výhodné vlastniť práve trojročné auto: hneď v prvom roku je optimálne vymeniť nové auto, ktoré vlastnime, za trojročné. Túto výmenu opakujeme každý rok, aby sme každý rok jazdili na trojročnom aute. Je to pravdepodobne spôsobené porovnateľnými ročnými prevádzkovými nákladmi a výrazne nižšou cenou oproti novej Honde Civic. Štvrtý rok je kritický pre ročné náklady (opotrebovanie pneumatík, vyšší servis, STK, EK), a zrejme je teda výhodné auto predať ešte pred týmto rokom. Najextrémnejší prístup riešenia vychádza u najdrahšieho modelu z troch skúmaných áut - Volva XC90. V tomto prípade v prvom roku vymeníme nové Volvo za čo najstaršie, v našom prípade päťročné, a držíme ho, dokiaľ to je možné. Nakoľko sme stanovili maximálny vek povolený auta na deväť rokov, tak auto tesne pred jeho desiatym rokom predáme a vymeníme opäť za päťročné. Vďaka možnosti kúpiť staršie auto sme získali iné výsledky ako v pôvodnom prípade pre vozidla Honda Civic a Volvo XC90. Pri týchto dvoch vozidlách sme dospeli

aj k nižším celkovým nákladom počas sledovaného obdobia 30 rokov. Tieto hodnoty sú zobrazené v poslednom riadku Tabuľky 5. Keďže pre Škodu Fabiu sme rozhodovanie nezmenili, tak celkové náklady ostanú rovnaké.

Čas v rokoch (i)	Škoda Fabia		Honda Civic		Volvo XC90	
	Vek auta	Riadenie u_i	Vek auta	Riadenie u_i	Vek auta	Riadenie u_i
0	0	1	0	3	0	4
1	0	1	3	3	5	0
2	0	1	3	3	6	0
3	0	1	3	3	7	0
4	0	1	3	3	8	0
5	0	1	3	3	9	4
6	0	1	3	3	5	0
7	0	1	3	3	6	0
8	0	1	3	3	7	0
9	0	1	3	3	8	0
10	0	1	3	3	9	4
11	0	-	3	-	5	-
Celkové náklady	34 829€		40 184€		58 576€	

Tabuľka 5: Optimálnej výmena auta s možnosťou kúpiť staršie vozidlo

2.3 Vplyv funkcie užitočnosti na optimálnu výmenu auta

V nasledujúcej časti sa pokúsime zistiť, akú úlohu pri optimálnej výmene auta zohrávajú preferencie majiteľa vzhľadom k nákladom plynúcim z jeho vlastníctva a veku vozidla. Výsledky úlohy (3) poukazujú na to, že pri drahších vozidlách čisto z ekonomického hľadiska nie je výhodné auto vymeniť pokiaľ nenadobudne maximálny možný vek. Je však napríklad deväťročné auto rovnako prospešné, bezpečné a užitočné ako nové auto? Tieto veličiny sa nedajú jednoznačne ohodnotiť: do hry tak vstupujú osobné preferencie majiteľa auta. Zavedieme preto funkciu užitočnosti $U(x, y)$, ktorá reprezentuje, aký úžitok má majiteľ z x rokov starého vozidla vyjadrujúceho ročné náklady vo výške y . Budeme predpokladať, že funkcia $U(x, y)$ je klesajúca funkcia vzhľadom na obe premenné x, y , keďže zo staršieho a nákladnejšieho auta máme menší úžitok. Vhod-

nou funkciou sa nám zdá byť Cobb-Douglasova funkcia. Úžitok z vlastnenia auta preto definujeme predpisom:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -x^\alpha y^\beta, \\ \alpha + \beta &\leq 1, \\ \alpha &> 0, \\ \beta &> 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Parameter α vyjadruje vplyv veku vozidla na celkovú užitočnosť majiteľa. Čím je parameter α väčší, teda bližšie k jednotke, tým je rozhodnutie majiteľa o výmene auta viac ovplyvnené vekom auta. Parameter β zohľadňuje vzťah majiteľa k jeho peňaženke. Väčšia hodnota parametra β znamená väčší dôraz pri rozhodovaní o výmene auta na celkové náklady oproti veku vozidla. Znamienko *mínus* vo funkcii (9) vyjadruje klesajúcu uspokojenosť majiteľa pri zvyšovaní veku vozidla a pri zvyšovaní celkových nákladov. Kým v základnej úlohe (3) minimalizujeme celkové náklady (y), v úlohe (10) budeme maximalizovať funkciu $U(x, y)$ a dostávame nasledujúcu úlohu:

$$\begin{aligned} \max \sum_{i=0}^{29} \frac{1}{(1+r)^{i+1}} U(x_i, y_i), \\ x_{i+1} &= (1 - u_i)(x_i + 1), \quad i = 0, 1, \dots, 29, \\ x_0 &= 0, \\ u_i &\in \{0, 1\}, \quad i = 0, 1, \dots, 29, \\ x_i &\in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad i = 0, 1, \dots, 29. \end{aligned} \tag{10}$$

Dosadením (9) do úlohy (10) dostávame:

$$\begin{aligned} \max \sum_{i=0}^{29} -\frac{1}{(1+r)^{i+1}} x_i^\alpha [\varphi(x_i) + (\psi(0) - \psi(x_i + 1))u_i]^\beta, \\ x_{i+1} &= (1 - u_i)(x_i + 1), \quad i = 0, 1, \dots, 29, \\ x_0 &= 0, \\ u_i &\in \{0, 1\}, \quad i = 0, 1, \dots, 29, \\ x_i &\in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad i = 0, 1, \dots, 29. \end{aligned} \tag{11}$$

Oproti základnej úlohe (3) ostáva stavová rovnica rovnaká. Zmena nastáva len pri účelovej funkcii. Úlohu (11) opäť riešime s využitím Bellmanovej rovnice dynamického programovania:

$$\begin{aligned}
 V_j(x) &= \max_{u_j \in \{0,1\}} [-x^\alpha [\varphi(x) + (\psi(0) - \psi(x+1))u_j]^\beta \\
 &\quad + \frac{1}{(1+r)} V_{j+1}((1-u_j)(x+1))] \\
 j &= \{0, \dots, 29\}, \\
 x &\in \{0, 1, \dots, 9\}, \\
 V_{30}(x) &= \begin{cases} -x^\alpha [\varphi(x) - \psi(x+1)]^\beta, & \text{pre } x \in \{0, 1, \dots, 9\}, \\ -\infty, & \text{pre } x \notin \{0, 1, \dots, 9\}. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Úlohu (12) riešime pri rôznych parametroch α a β . Výsledky numerickej analýzy sú zhrnuté v Tabuľke 6. Scenár 1, zodpovedá riešeniu úlohy (12) pri $\beta = 0$. V tomto scenári zohľadňujeme čisto vek vozidla. Na druhej strane, v poslednom Scenári 11, sme parameter α nastavili na hodnotu 1: v tomto prípade je naše rozhodnutie ovplyvnené len celkovými nákladmi. Riešenie pri Scenári 11 je teda identické s riešením úlohy (3). Pre vozidlo Škoda Fabia bolo už pred použitím funkcie užitočnosti optimálne auto vymeniť každý rok. Zapracovaním $U(x, y)$, teda zvýšením vplyvu veku vozidla, sa optimálne riadenie nezmenilo. V prípade zvyšných dvoch automobilov sa optimálne riadenie mení v závislosti od nastavenia parametrov. Pri Scenári 9 dostávame zaujímavé výsledky optimálnej výmeny: Hondu Civic predáme po 3 rokoch a Volvo XC90 až po 7 rokoch.

2.4 Výmena za iný typ automobilu

V tejto časti našej práce uvážime výmenu počítaťne vlastneného automobilu nielen za nové rovnaké vozidlo, ale umožníme výmenu za iný model. Rovnako ako pri predchádzajúcich úlohách budeme hľadať optimálny čas výmeny počas 30 ročného obdobia. Na konci sledovaného obdobia automobil, ktorý vlastníme, predáme. Predpokladajme, že na začiatku v čase $i = 0$ máme nové vozidlo A a na konci každého roka sa môžeme rozhodnúť, či si ho ponecháme, vymeníme za nové vozidlo A alebo za iné vozidlo B. Celkovo budeme teda potrebovať šesť riadení, ktoré sú bližšie popísané v Tabuľke 7. V

<i>Parametre</i>		<i>Optimálny vek auta pred predajom</i>			
<i>Scenáre</i>	α	β	<i>Škoda Fabia</i>	<i>Honda Civic</i>	<i>Volvo XC90</i>
1	1	0	po 1 roku	po 1 roku	po 1 roku
2	0.9	0.1	po 1 roku	po 1 roku	po 1 roku
3	0.8	0.2	po 1 roku	po 1 roku	po 1 roku
4	0.7	0.3	po 1 roku	po 1 roku	po 1 roku
5	0.6	0.4	po 1 roku	po 1 roku	po 1 roku
6	0.5	0.5	po 1 roku	po 1 roku	po 1 roku
7	0.4	0.6	po 1 roku	po 1 roku	po 2 rokoch
8	0.3	0.7	po 1 roku	po 1 roku	po 2 rokoch
9	0.2	0.8	po 1 roku	po 4 rokoch	po 8 rokoch
10	0.1	0.9	po 1 roku	po 4 rokoch	po 10 rokoch
11	0	1	po 1 roku	po 8 rokoch	po 10 rokoch

Tabuľka 6: Optimálna výmena auta s funkciou $U(x, y)$

tejto tabuľke sú zobrazené aj hodnoty pomocných funkcií $g_1(u_i), g_2(u_i)$ a $g_3(u_i)$, ktoré budú slúžiť pri zostavovaní úlohy optimálneho riadenia. Ďalej predpokladáme, že každý automobil môžeme držať nanajviš deväť rokov, podobne ako v úlohe (3).

<i>Riadenie</i> u_i	$g_1(u_i)$	$g_2(u_i)$	$g_3(u_i)$	<i>Dôsledky riadenia na výmenu auta</i>
0	0	0	1	Vlastním A a nemením
1	1	0	0	Vlastním A a mením za nové A
2	0	1	0	Vlastním A a mením za nové B
3	0	0	1	Vlastním B a nemením
4	0	1	0	Vlastním B a mením za nové B
5	1	0	0	Vlastním B a mením za nové A

Tabuľka 7: Pomocné funkcie pre výmenu auta za iné vozidlo

Základnú úlohu (3) modifikujeme tak, že zdvojnásobíme povolený rozsah stavov x_i na 18, kde hodnoty $x_1 - x_9$ popisujú vek vozidla A. Stavov $x_{10} - x_{18}$ udávajú vek vozidla B, ktoré vlastníme, zväčšený o deväť rokov. Úlohu (3) preto upravíme nasledovne:

$$\begin{aligned}
\min \sum_{i=0}^{29} \frac{1}{(1+r)^{i+1}} & [\varphi(x_i) + (\psi(0) - \psi(x_i + 1))g_1(u_i) + (\psi(10) - \psi(x_i + 1))g_2(u_i)], \\
x_{i+1} &= g_3(u_i)(x_i + 1) + 10g_1(u_i), \quad i = 0, 1, \dots, 29, \\
x_0 &= 0, \\
u_i &= \begin{cases} \{0, 1, 2\}, & \text{pre } x_i \in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad i = 0, 1, \dots, 29, \\ \{3, 4, 5\}, & \text{pre } x_i \in \{10, 11, \dots, 18\}, \quad i = 0, 1, \dots, 29, \end{cases} \\
x_i &\in \{0, 1, \dots, 18\}, \quad i = 0, 1, \dots, 29.
\end{aligned} \tag{13}$$

Poznamenajme, že riadenie u_i musíme obmedziť vzhľadom na stav, v ktorom sa nachádzame. Teda pri vlastníci vozidla A nemôžeme uskutočniť riadenie $u_i = 3$, $u_i = 4$ ani $u_i = 5$, keďže nevlastníme vozidlo B. Na riešenie úlohy (13) zostrojíme Bellmanovu rovnicu dynamického programovania, ktorú následne riešime v Matlabe:

$$\begin{aligned}
V_j(x) &= \min_{u_j \in \Gamma_j(x)} [[\varphi(x) + (\psi(0) - \psi(x + 1))g_1(u_j) + (\psi(10) - \psi(x + 1))g_2(u_j)] \\
&\quad + \frac{1}{(1+r)} V_{j+1}(g_3(u_j)(x + 1) + 10g_1(u_j))], \\
\Gamma_j(x) &= \begin{cases} \{0, 1, 2\}, & \text{pre } x \in \{0, 1, \dots, 9\}, \\ \{3, 4, 5\}, & \text{pre } x \in \{10, 11, \dots, 18\}, \end{cases} \\
j &= \{0, \dots, 29\}, \\
x &\in \{0, 1, \dots, 18\}, \\
V_{30}(x) &= \begin{cases} \varphi(x) - \psi(x + 1), & \text{pre } x \in \{0, 1, \dots, 18\}, \\ \infty, & \text{pre } x \notin \{0, 1, \dots, 18\}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{14}$$

2.4.1 Numerické výsledky výmeny auta za iný model

V tejto časti sa pozrieme na naše tri automobily a počas 30 rokov budeme sledovať rozhodovanie v závislosti od voľby automobilov A a B. Výsledky sú zosumarizované v Tabuľke 8.

V jednotlivých stĺpcoch Tabuľky 8 sú zobrazené riadenia pre dvojicu automobilov.

Čas v rokoch (i)	Riadenie u_i pre		Riadenie u_i pre		Riadenie u_i pre	
	$A=Škoda$	$A=Honda$	$A=Škoda$	$A=Volvo$	$A=Honda$	$A=Volvo$
	$B=Honda$	$B=Škoda$	$B=Volvo$	$B=Škoda$	$B=Volvo$	$B=Honda$
0	1	2	1	2	0	2
1	1	4	1	4	0	3
2	1	4	1	4	0	3
3	1	4	1	4	0	3
4	1	4	1	4	0	3
5	1	4	1	4	0	3
6	1	4	1	4	0	3
7	1	4	1	4	1	3
8	1	4	1	4	0	4
9	1	4	1	4	0	3
10	1	4	1	4	0	3
11	1	4	1	4	0	3

Tabuľka 8: Optimálna výmena auta s možnosťou vymeniť za iné vozidlo

Napríklad stĺpec $A=Škoda$ a $B=Honda$ reprezentuje, že za vozidlo A je zvolená Škoda Fabia, teda v čase 0 vlastnime nové vozidlo Škoda Fabia. Vozidlo B je Honda Civic a tak máme možnosť Škodu Fabiu vymeniť aj za tento model. Ako je vidieť na výsledkoch, rozhodujeme sa tak, aby sme držané vozidlo okamžite vymenili za lacnejší automobil a následne sa rozhodovali rovnako ako pri úlohe (3). Keď sa pozrieme na stĺpec $A=Honda$ a $B=Volvo$, tak je vidieť, že výmenu za Volvo neberieme do úvahy. Naopak, ak $A=Volvo$ a $B=Honda$, tak v prvom roku vozidlo Volvo XC90 vymeníme za vozidlo Honda Civic a tento automobil ôsmy rok vymeníme za novú Hondu Civic. Výsledky sú preto po výmene za lacnejší automobil identické s rozhodovaním v Tabuľke 3. V ďalšej podkapitole sa pozrieme na túto úlohu (13) z pohľadu výmeny nášho automobilu za iný, úsporný automobil s nižšou spotrebou.

2.4.2 Numerické výsledky výmeny auta za úsporný automobil

V tejto časti zavedieme nový typ úsporného automobilu a budeme sledovať, pri akej nákupnej cene nového úsporného automobilu sa nám oplatí *pôvodné* auto vymeniť za úsporné. Vývoj nákladov úsporného automobilu odhadneme nasledovne:

$$\varphi(x_i) = 100 + 50x_i + 3.5 \frac{20000}{100} P(i). \quad (15)$$

Nákladová funkcia (15) sa oproti (4) zmení v spotrebe, kde predpokladáme konštantnú hodnotu 3,5 l/100km. Cena benzínu $P(i)$ je konštantná na úrovni 1,323€/l a budeme predpokladať, že ročné náklady rastú lineárnou rýchlosťou 50€/rok. Ďalej predpokladajme, že auto stráca na hodnote v prvom roku 15% a následne po 10% z aktuálnej hodnoty auta v každom roku. Tieto údaje sme dostali ako priemerné poklesy cien u nami sledovaných troch automobilov. Pre rôzne ceny nového úsporného automobilu sme riešili Bellamnovu RDP (14) v Matlabe. Jej výsledky sú zobrazené v Tabuľke 9.

Nové úsporné vozidlo	Škoda Fabia		Honda Civic		Volvo XC90	
	Výmena za úsporné	Úsporné za nové úsporné	Výmena za úsporné	Úsporné za nové úsporné	Výmena za úsporné	Úsporné za nové úsporné
3 000 €	po 1 roku	po 4 rokoch	po 1 roku	po 4 rokoch	po 1 roku	po 4 rokoch
5 000 €	po 1 roku	po 7 rokoch	po 1 roku	po 7 rokoch	po 1 roku	po 7 rokoch
10 000 €	po 1 roku	po 8 rokoch	po 1 roku	po 8 rokoch	po 1 roku	po 8 rokoch
12 300 €	po 1 roku	po 8 rokoch	po 1 roku	po 8 rokoch	po 1 roku	po 8 rokoch
12 400 €	nevymením	-	po 1 roku	po 8 rokoch	po 1 roku	po 8 rokoch
24 200 €	nevymením	-	po 1 roku	po 8 rokoch	po 1 roku	po 8 rokoch
24 300 €	nevymením	-	po 7 rokoch	po 8 rokoch	po 1 roku	po 8 rokoch
26 800 €	nevymením	-	po 8 rokoch	po 8 rokoch	po 1 roku	po 8 rokoch
26 900 €	nevymením	-	nevymením	-	po 1 roku	po 8 rokoch
61 800 €	nevymením	-	nevymením	-	po 1 roku	po 8 rokoch
61 900 €	nevymením	-	nevymením	-	po 9 rokoch	po 8 rokoch
68 900 €	nevymením	-	nevymením	-	po 9 rokoch	po 8 rokoch
69 000 €	nevymením	-	nevymením	-	nevymením	-

Tabuľka 9: Optimálny vek vozidla pred výmenou za úsporné v rokoch

Ako je vidieť na výsledkoch v Tabuľke 9, zostrojili sme pre každý automobil viaceré scenáre, pri ktorých auto vymeníme za úsporné okamžite alebo vôbec. Z výsledkov vieme odhadnúť hraničné ceny úsporných vozidiel, pri ktorých môžeme uvažovať o ich (ne)výmene. Pokiaľ vlastnime Škodu Fabia a cena nového úsporného vozidla je vyššia ako 12 400 €, tak sa nám neoplatí nad jeho kúpou uvažovať. Pre Hondu Civic je táto

suma na úrovni 26 900 €, a pre Volvo XC90 až na hodnote 69 000 €. Tieto hraničné ceny použijeme v ďalšej kapitole, pri výpočte bariér pre jednotlivé ceny PHM.

3 Stochastická úloha optimálneho riadenia

V tejto časti našej práce sa budeme zaoberať úlohami, v ktorých hodnota stavovej premeny závisí aj od náhodných udalostí, ktorých vývoj vopred nepoznáme. Budeme však predpokladať, že poznáme pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej premennej, ktorá ovplyvňuje vývoj sledovaného systému. Úlohou je opäť nájsť optimálne riadenie \hat{U} , tentokrát však požadujeme, aby optimálne rozhodovanie zohľadňovalo informáciu o hodnote realizácie náhodnej premennej dostupnú v čase rozhodnutia. V nasledujúcich dvoch častiach si predstavíme dve verzie stochastickej úlohy optimálneho riadenia: rozlíšime diskretnú a spojitú náhodnú premennú.

3.1 Diskrétna náhodná premenná

Ide o špeciálny prípad úlohy optimálneho riadenia, v ktorej vývoj stavovej premennej v každej iterácii je ovplyvnený diskretnou náhodnou premennou. Označme z_i hodnotu tejto diskretnéj náhodnej premennej. Uvedomme si, že hodnotu z_i pri výbere riadenia u_i nepoznáme. Nakoľko hodnotu účelovej funkcie ovplyvňuje náhodná premenná, podľa [5] sa úloha (1) modifikuje do tvaru:

$$\begin{aligned} \max E \left[\sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i, z_i) \right], \\ x_{i+1} = f_i(x_i, u_i, z_i), \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \\ x_0 = x_0, \\ x_k \in C, \\ u_i \in U_i, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \\ z_i \in Z_i, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \\ x_i \in X_i, \quad i = 0, 1, \dots, k-1. \end{aligned} \tag{16}$$

Symbolom E sme označili strednú hodnotu. Keďže sa jedná o stochastickú úlohu s diskretnou náhodnou premennou, množina Z_i obsahuje konečne veľa prvkov. Tento predpoklad nám umožňuje riešiť úlohu (16) pomocou Bellmanovej rovnice dynamického programovania, ktorá je podrobne vysvetlená aj v [5]:

$$\begin{aligned}
V_j(x) &= \max_{u \in i} E_j[f_j^0(x, u, z_j) + V_{j+1}(f_j(x, u, z_j))], \\
j &= 0, \dots, k-1, \\
x &\in X_j, \\
V_k(x) &= \begin{cases} 0, & \text{pre } x \in C, \\ -\infty, & \text{pre } x \notin C. \end{cases}
\end{aligned} \tag{17}$$

Je dôležité si uvedomiť, že kľúčovým bodom v riešení úlohy (17) je výpočet strednej hodnoty. Diskrétny charakter náhodnej premennej nám výpočet značne zjednodušuje. Pri výpočte strednej hodnoty totiž môžeme vychádzať priamo z jej definície.

3.2 Spojitá náhodná premenná

V tejto časti sa opäť pozrieme na úlohu optimálneho riadenia s náhodnou premennou, avšak v tomto prípade budeme predpokladať, že vývoj možno popísať pomocou spojitého rozdelenia. Tento predpoklad nám sťažuje riešenie úlohy (17): výpočet strednej hodnoty vyžaduje aplikovať sofistikovanejšie postupy. V našej práci pri riešení úlohy (17) využijeme postupy známe z teórie oceňovania finančných či reálnych opcií, ktoré si podrobne predstavíme v nasledujúcich častiach. Najprv sa v krátkosti zmienime o finančných a reálnych opciách. Následne si predstavíme jednu metódu na výpočet stanovenia hodnoty opcie, použiteľnej pre výpočet ceny finančných aj reálnych opcií.

3.2.1 Finančné opcie

Pojem opcie (z angličtiny možnosť, právo) sa vyskytoval už od staroveku, kedy šikovní obchodníci dávno pred naším letopočtom predávali právo (teda predávali opcie) prenajať si ich pôdu o rok neskôr [13]. Títo nájomcovia právo prenajatia využili jedine v prípade, že sa im to oplátilo - v prípade priaznivých podmienok v podobe počasia, kedy by si uplatnili svoju opciu. V prípade nepriaznivého počasia alebo inej živeľnej katastrofy im toto právo prepadlo (opciu si neuplatnili), avšak nemuseli zaplatiť za nájom pôdy. V súčasnosti je pojem opcia spätý najmä s právom kúpiť či predať akcie.

Presná definícia finančnej opcie je nasledovná [9]:

Opčný derivát je právo, nie však povinnosť obchodníka kúpiť (predať) finančný nástroj, prípadne iné aktívum, za vopred dohodnutú cenu K (strike price) v deň splatnosti T .

Opcie, okrem rozdelenia podľa práva kúpiť a práva predať, rozlišujeme aj podľa toho, či danú opciu môžeme uplatniť kedykoľvek do doby splatnosti T - vtedy hovoríme o *amerických opciách*, alebo opciu môžeme uplatniť jedine v čase splatnosti T - v tomto prípade pôjde o *európske opcie*.

3.2.2 Reálne opcie

Podľa [3] v reálnom svete môžeme každú situáciu, v ktorej sa potrebujeme rozhodnúť pri istej neurčitosti popísať reálnou opciou. Príkladom reálnej opcie môže byť rozhodovanie o najvyššom dosiahnutom stupni vzdelania (viď [10]). V prípade, že sa rozhodneme ďalej študovať, vzdáme sa možnosti pracovať a teda získať mzdu za túto prácu. V prípade, že sa tak rozhodneme, budeme očakávať vyšší zárobok po absolvovaní vyššieho vzdelania. V časti 4.2 si ukážeme, že pomocou oceňovania reálnych opcií dokážeme vypočítať optimálne riadenie \hat{U} aplikované aj na náš príklad optimálnej výmeny auta.

3.2.3 Oceňovanie amerických reálnych opciách pomocou simulácií

V tejto podkapitole sa bližšie pozrieme na problematiku oceňovania amerických opcií. Základom teórie oceňovania finančných opcií je postup navrhnutý Blackom a Scholesom, 1973. Tento prístup však nie je všeobecne aplikovateľný na problémy reálnych opcií. V ďalšej časti si preto priblížime postup navrhnutý Longstaffom a Schwartzom v roku 2001 [8], ktorý má širšie využitie.

Monte Carlo simulácia bola sformulovaná a následne aj využitá počas druhej svetovej vojny a teda má za sebou viac ako sedemdesiatročnú históriu [4]. Na základe názvu tejto metódy si väčšina ľudí predstaví hazardných hráčov v luxusných kasínach. Predsa len názov má niečo spoločné s kasínom. Pri výskume neutrónov a možnosti prenikania rôznymi látkami objavili vedci problém. Zistiť, aké percento neutrónov prejde cez nádobu plnú vody. Tento problém sa nedal vyriešiť ani teoreticky, ani prakticky z dôvodov neznámych pravdepodobností zrážok neutrónov s atómami vodíka alebo kyslíka,

množstva energie, ktorú neutrón stratí počas zrážky, priemerného času medzi dvoma zrážkami neutrónov a mnohých iných vlastností. Dvaja výskumníci Neumann a Ulam prišli s nápadom využiť históriu života neutrónu, inak nazvanú aj metódu *rulety kolesa*. Odtiaľ pochádza názov metóda Monte Carlo. Zakladá sa na generovaní hodnôt z rôznych pravdepodobnostných rozdelení, pričom získané výstupné hodnoty sú nezávislé a náhodné. Po vygenerovaní veľkého počtu (N) simulácií sa snažíme zistiť pravdepodobnostné rozdelenie výstupných veličín. Princípom Monte Carlo simulácií je teda určiť náhodnú veličinu, ktorá je daná ako funkcia viacerých náhodných veličín. Na priblíženie tejto metódy si ukážeme krátky príklad, kde je vidieť, ako metóda funguje. Simuláciu pohybujúceho sa neutrónu vo vode a narážajúceho do atómov vodíka a kyslíka nevieme presne určiť, ale vieme, že ak neutrón narazí do atómu vodíka, tak v jednom zo sto prípadov bude neutrón týmto atómom pohltený. Pre určenie scenára neutrónu si predstavme ruletu, ktorá má 100 políčok, pričom jedno je červené a ostatných 99 políčok je čiernych. Pokiaľ sa ruleta zastaví na červenom políčku, neutrón bude pohltený. Pokiaľ padne ruleta na čierne políčko, roztočíme druhú ruletu, kde budú červené a čierne políčka vyznačovať smer a rýchlosť, prípadne okamžitú zrážku s iným atómom neutrónu v závislosti od známych pravdepodobností. V skutočnosti by sme potrebovali obrovské množstvo ruliet na určenie presného pohybu jednej simulácie neutrónu a to reálne nie je možné. Vieme však tieto rulety naprogramovať v počítačových softvéroch.

Metóda Monte Carlo simulácií sa stala veľmi obľúbenou aj pri oceňovaní rôznych finančných derivátov. Pri výpočte ceny európskej opcie je výpočet jednoduchší ako pri odvodzovaní pomocou Black-Scholesových vzorcov. Naším cieľom však bude použiť nie európske, ale americké opcie, keďže problematika výmeny auta je možná vo všetkých časoch $t \in \{t_0, T\}$. Poznamenajme, že určenie hodnoty finančných či reálnych opcí pomocou Monte Carlo simulácií nie je priamočiare. Trvalo pomerne dlhú dobu, kým sa vymyslela metóda oceňovania derivátov pomocou simulácií. Podarilo sa to až v roku 2001 autorom Longstaff a Schwartz. Ich metódu si predstavíme v nasledujúcej časti.

3.2.4 Monte Carlo simulácie metódou najmenších štvorcov

Jednou z najproblematickejších úloh oceňovania finančných derivátov je práve oceňovanie amerických typov derivátov. V tejto časti si priblížime oceňovanie pomocou

Monte Carlo simulácií. Pre presnejšie pochopenie tejto metódy pripomenieme, že držiteľ americkej opcie v každom čase porovnáva okamžitú výplatu v prípade, že by opciu v danom okamihu predal, s očakávanou výplatom v prípade, že by opciu naďalej držal a nepredával. Opciu sa rozhodne predáť, ak okamžitá výplata je vyššia ako očakávaná výplata a ponechanie si opcie v budúcnosti. Preto optimálna stratégia je podmienená očakávanými výplatami v prípade, že opciu nepredáme a pokračujeme v jej držaní. Toto podmienené očakávanie môže byť odhadnuté zo simulácií metódou najmenších štvorcov. Podľa [8] je podstata tohto prístupu odhadnúť hodnoty realizovaných výplat pozostávajúcich z držania opcie na funkcie hodnôt stavových premenných. Odhadnutá očakávaná funkcia v každom čase nám posluží na určenie kompletnej optimálnej stratégie v každom kroku, ako aj na určenie ceny americkej opcie. Algoritmus sleduje vonkajšie iterácie ako rovnica dynamického programovania a metóda regresie je použitá vo vnútri algoritmu. Táto technika sa nazýva Monte Carlo simulácie metódou najmenších štvorcov (LSM - Least Squares Monte Carlo)[8].

3.2.5 LSM na príklade

Ako sme už uviedli v predchádzajúcej časti, LSM metóda sa snaží nájsť optimálnu stratégiu až do vypršania času T sledovaním jednotlivých výplat v každom čase. Pre priblíženie si ukážeme metódu LSM na konkrétnom príklade podobne ako túto metódu priblížili vo svojej práci Longstaff a Schwartz [8].

Uvažujme americkú put opciu na akciu S bez dividend so strike price 102€. Hodnota akcie S_0 je rovná 100€, a sledované obdobie nech sú tri časové jednotky (predpokladajme tri roky, pričom opciu môžeme využiť len na konci každého roku). Znamená to, že v každom z troch časových jednotiek môžeme uplatniť put opciu a teda predáť akciu za 102€. V prípade ceny opcie nižšej ako 2€, by sme opciu uplatnili okamžite, čo vyplýva z kladnej výplaty (výplata v čase 0 = 102 - 100 - *cena opcie*). Bezriziková úroková miera nech je 3% a úlohou bude pomocou LSM metódy odhadnúť cenu opcie. Pre jednoduchosť nasimulujeme desať rôznych scenárov vývoja ceny akcie. Predpokladajme, že cenu akcie možno modelovať pomocou geometrického Brownovho pohybu s parametrami μ a σ . Nasimulované ceny akcie počas troch rokov sú zobrazené v Tabuľke 10.

<i>Simulácia</i>	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	100	101.515	99.870	101.463
2	100	99.577	99.744	103.136
3	100	102.964	102.981	101.421
4	100	97.529	101.498	103.437
5	100	101.019	102.168	101.519
6	100	99.374	100.612	98.386
7	100	101.859	97.652	97.810
8	100	100.677	98.447	102.881
9	100	96.516	99.789	99.502
10	100	100.665	100.651	98.225

Tabuľka 10: Simulácie vývoja cien akcie v €

Algoritmus je rekurzívny, to znamená, že najskôr vypočítame hodnotu v konečnom čase a postupne sa približujeme k času 0. Pozrieme sa preto na situáciu v čase $t = 3$, teda v čase splatnosti opcie. V tomto čase už s určitosťou vieme povedať, či si opciu uplatníme (teda výplata je kladná) alebo neuplatníme. Z našich nasimulovaných cien je zrejmé, že si uplatníme opcie v simuláciách s číslom 1, 3, 5, 6, 7, 9 a 10. V simuláciách s číslom 2, 4 a 8 sa nám neoplatí predať akciu za cenu 102€, teda opciu neuplatníme. V poslednom časovom kroku je rozhodnutie o uplatnení americkej opcie rovnaké ako v prípade európskej opcie. Výplaty pre jednotlivé simulácie zistíme ako rozdiel expiračnej ceny (strike price) a hodnoty akcie v danom čase. Teda pri simulácii napríklad s číslom 7 by bola výplata rovná 4.19€. Posuňme sa teraz do času $t = 2$. Vidíme, že tu má držiteľ opcie komplikovanejšie rozhodovanie: môže buď opciu uplatniť okamžite alebo počká, a opciu uplatní neskôr s potenciálom ešte vyššieho zisku. Keďže úroková miera predstavuje 3%, výplatu o rok pri porovnávaní s dnešnou musíme odúročiť. Opäť vyberieme len simulácie, o ktorých môžeme tvrdiť, že sú ziskové (1, 2, 4, 6, 7, 8, 9 a 10) a vložíme hodnoty výplat v prípade, že opcie uplatníme, do vektora X . Zostrojíme aj vektor Y , a to ako hodnotu výplat týchto simulácií v čase $t = 2$ v prípade, že opciu teraz neuplatníme. Na odhadnutie strednej hodnoty výplat v čase $t = 2$ spravíme kvad-

ratickú regresiu vektora Y závislého od vektora X , X^2 a konštanty ¹. Teda hľadáme koeficienty regresnej rovnice v tvare a_0, a_1, a_2 :

$$Y = a_0 + a_1X + a_2X^2. \quad (18)$$

Hodnoty parametrov a_0, a_1, a_2 dostaneme riešením nasledujúcich lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n Y_i &= na_0 + a_1 \sum_{i=0}^n X_i + a_2 \sum_{i=0}^n X_i^2, \\ \sum_{i=0}^n Y_i X_i &= a_0 \sum_{i=0}^n X_i + a_1 \sum_{i=0}^n X_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n X_i^3, \\ \sum_{i=0}^n Y_i X_i^2 &= a_0 \sum_{i=0}^n X_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n X_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^n X_i^4, \end{aligned} \quad (19)$$

kde n je počet meraní. V našom prípade pri $n = 8$ (keďže máme osem ziskových simulácií, ktoré vyberáme) vyrátame koeficienty regresie pomocou riešenia (19), a dostaneme nasledujúci odhad:

$$Y = 2055 - 41.035X + 0.205X^2. \quad (20)$$

Táto odhadnutá funkcia (20) bude slúžiť na výpočet strednej hodnoty výplaty v prípade, že opciu v čase $t = 2$ neuplatníme. Tieto hodnoty porovnáme a zobrazíme si ich v Tabuľke 11. V tabuľke taktiež zobrazíme naše rozhodnutie, ako aj výplatu jednotlivých stratégií.

Po tejto iterácii sa presunieme do času $t = 1$, kde máme pozitívne výplaty z okamžitého uplatnenia opcie až v deviatich simuláciách (vo všetkých okrem čísla 3). Opäť zostrojíme vektor Y ako vektor hodnôt výplat v prípade, že opciu neuplatníme. Podobne ako v predchádzajúcej iterácii do vektoru Y ukladáme výplaty opcií odúročené v závislosti od času využitia. Použitím kvadratickej regresie odhadneme koeficienty a dostaneme nasledovné:

¹Voľba vhodnej funkcie regresnej rovnice je podobne popísaná aj v práci Longstaffa a Schwartza [8].

<i>Porovnávanie výplat stratégií v čase $t = 2$</i>			<i>Naše rozhodnutie</i>	
<i>Simulácia</i>	<i>Pri uplatnení opcie</i>	<i>Pri neuplatnení opcie</i>	<i>Čas uplatnenia</i>	<i>Výplata opcie</i>
1	2.130	1.458	$t = 2$	2.130
2	2.256	1.473	$t = 2$	2.256
4	0.502	1.857	$t = 3$	0
6	1.388	1.505	$t = 3$	3.614
7	4.348	2.664	$t = 2$	4.348
8	3.553	1.999	$t = 2$	3.553
9	2.211	1.467	$t = 2$	2.211
10	1.349	1.514	$t = 3$	2.498

Tabuľka 11: Tabuľka výplat v čase $t = 2$

$$Y = 2111.8 - 43.0302X + 0.2193X^2 \quad (21)$$

Podobne ako v čase $t = 2$ vyrátame strednú hodnotu výplat v prípade, že opciu neuplatníme, porovnáme ju s výplatou uplatnenia a zobrazíme naše rozhodnutie so skutočnými výplatami v Tabuľke 12.

<i>Porovnávanie výplat stratégií v čase $t = 1$</i>			<i>Naše rozhodnutie</i>	
<i>Simulácia</i>	<i>Pri uplatnení opcie</i>	<i>Pri neuplatnení opcie</i>	<i>Čas uplatnenia</i>	<i>Výplata opcie</i>
1	0.485	3.485	$t = 2$	2.130
2	2.423	1.414	$t = 1$	2.423
4	4.471	1.016	$t = 1$	4.471
5	0.981	2.797	$t = 3$	0
6	2.626	1.292	$t = 3$	3.614
7	0.141	4.024	$t = 2$	4.348
8	1.323	2.387	$t = 2$	3.553
9	5.484	1.499	$t = 1$	5.484
10	1.345	2.373	$t = 3$	2.498

Tabuľka 12: Tabuľka výplat v čase $t = 3$

V tomto okamihu máme vyrátanú optimálnu stratégiu v každom okamihu pre každú simuláciu a odhadnutú cenu opcie vyrátame ako priemer odúročených výplat všetkých desiatich simulácií. Teda priemer odúročených čísel zobrazených v stĺpci Výplata

opcie v Tabuľke 12. Vyrátanú cenu odhadneme na 2.759€, čo korešponduje s naším predpokladom, že cena opcie musí byť vyššia ako 2€.

3.2.6 Geometrický Brownov pohyb

V teórii oceňovania finančných derivátov sa tradične na modelovanie stochastického podkladového procesu využíva tzv. geometrický Brownov pohyb v tvare:

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t dW_t. \quad (22)$$

V rovnici (22) označujeme μ ako strednú hodnotu pohybu a σ je jeho disperzia. Symbolom dW_t sme označili inkrement tzv. Wienerovho procesu.

Podľa [13] je Wienerov proces ($w(t), t \geq 0$) definovaný pomocou nasledujúcich štyroch vlastností:

1. *Začína v 0*: $w(t) = 0$.
2. *Prírastky sú z normálneho rozdelenia*: prírastky $w(t + \Delta) - w(t)$ sú z normálneho rozdelenia a ich stredná hodnota je rovná 0 a disperzia je rovná Δ .
3. *Nezávislosť prírástkov*: pre všetky $i \in 0, 1, n$ sú prírastky $w(t_i) - w(t_{i-1})$ nezávislé.
4. *Spojitosť trajektórií*: trajektórie tohto procesu sú spojité.

Z vlastností Wienerovho procesu vieme, že $w(t) \sim N(0, t)$. Pre ďalšie výpočty je potrebný odhad parametrov μ a σ . Z časového radu P_t je potrebné vypočítať priemer a disperziu výnosov časového radu V_t , ktorý je zostrojený nasledovne:

$$V_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}. \quad (23)$$

Po vyrátaní priemeru m a disperzie s^2 výnosov, odhadneme parametre geometrického Brownovho pohybu (GBP) podľa [13] nasledovne:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m}{\Delta t}, \\ \sigma &= \sqrt{\frac{s^2}{\Delta t}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Parameter Δt reprezentuje časovú zmenu v časovom rade. Po odhadnutí parametrov GBP pomocou rovnice (24) dokážeme simulovať vývoj cien na nasledujúce obdobie.

4 Optimálna výmena auta ako stochastická úloha

V tejto kapitole diplomovej práce sa pozrieme na problematiku optimálnej výmeny auta ako na úlohu stochastického dynamického programovania. V prvej časti kapitoly budeme analyzovať vplyv kazivosti auta na optimálny čas výmeny auta. Kazivosť popíšeme pomocou diskkrétnej premennej pre konkrétne auto v jednotlivých rokoch. V druhej časti sa zameriame na spojitý vývoj cien pohonných hmôt (ďalej len PHM) a ich vplyv na optimálne rozhodovanie.

4.1 Vplyv kazivosti auta na optimálnu výmenu auta

V tejto časti predstavíme modifikáciu modelu (3), v ktorej uvažíme faktor náhodnej kazivosti auta. Kazivosť auta reprezentujeme pomocou diskkrétnej náhodnej premennej. Nakoľko kazivosť auta nie je rovnako pravdepodobná pre nové a staršie, napríklad päťročné auto, definujeme pravdepodobnosť pokazenia sa auta ako funkciu $p_j(x)$, ktorej hodnota je závislá od veku vozidla x . Indexom j označíme typ škody: rozlíšime tri úrovne kazivosti, vzhľadom na veľkosť nákladov $C(j)$ potrebných na ich odstránenie. Naše rozhodovanie o optimálnej výmene auta bude ovplyvňovať veľkosť škody $C(j)$, ktorá môže nastať, ale aj pravdepodobnosť $p_j(x)$ pre jednotlivé stupne kazivosti a vek auta. Preto sa na tento problém pozrieme osobitne u každého skúmaného auta s rôznymi scenármi pre spomínané parametre. Všeobecne pre každé auto budeme predpokladať tri rôzne typy škôd, a pôvodnú úlohu (3) modifikujeme pomocou (16) na:

$$\begin{aligned}
& \min E \left[\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(1+r)^{i+1}} [\varphi(x_i) + C(x_i) + (\psi(0) - \psi(x_i + 1))u_i] \right] \\
& x_{i+1} = (1 - u_i)(x_i + 1), \quad i = 0, 1, \dots, 29, \\
& C(x) = \begin{cases} C(1), & \text{s pravd. } p_1(x), \\ C(2), & \text{s pravd. } p_2(x), \\ C(3), & \text{s pravd. } p_3(x), \end{cases} \quad (25) \\
& x_0 = 0, \\
& u_i \in \{0, 1\}, \quad i = 0, 1, \dots, 29, \\
& x_i \in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad i = 0, 1, \dots, 29.
\end{aligned}$$

Úloha (25) je diskretnou úlohou stochastického dynamického programovania. Riešime ju pomocou Bellmanovej rovnice dynamického programovania, ktorá v tomto prípade vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}
V_j(x) &= \min_{u_j \in \{0,1\}} [E[\varphi(x) + C(x) + (\psi(0) - \psi(x + 1))u_j|x] \\
&\quad + \frac{1}{(1+r)} E[V_{j+1}((1 - u_j)(x + 1))|x]] \\
& j = \{0, \dots, 29\}, \\
& x \in \{0, 1, \dots, 9\}, \\
V_{30}(x) &= \begin{cases} E[\varphi(x) + C(x) - \psi(x + 1)|x], & \text{pre } x \in \{0, 1, \dots, 9\}, \\ \infty, & \text{pre } x \notin \{0, 1, \dots, 9\}. \end{cases} \quad (26)
\end{aligned}$$

Výsledky numerických experimentov sú zobrazené v Tabuľke 13 pre Škodu Fabiu, v Tabuľke 14 pre Hondu Civic a pre Volvo XC90 v Tabuľke 15. V jednotlivých tabuľkách je zobrazený optimálny vek auta pred predajom pre rôzne scenáre pravdepodobnosti $p_j(x)$ závislé od veku auta x a pre rôzne veľkosti kazu $C(x)$.

V prvých piatich scenároch sme odhadli premenné $p_j(x)$ a $C(x)$ pre Škodu Fabia tak, že s pribúdajúcim vekom vozidla stúpa pravdepodobnosť väčšieho kazu. V ďalších dvoch menej reálnych scenároch sme predpokladali vyššiu škodu (teda väčší kaz) na novších ako na starších vozidlách. Výsledky analýzy ukazujú, že ani výrazná kazivosť auta nemá vplyv na optimálny čas výmeny Škody Fabia. V prvých piatich scenároch je

optimálne auto vymeniť za nové každý rok. Pre zvyšné dva scenáre je optimálne auto nevymieňať, nakoľko sa nám nové auto môže skôr pokaziť ako auto ojazdené.

Pre vozidlo Honda Civic sme našli hodnoty kazivosti, pri ktorých auto vymieňame každý rok. Sú zobrazené v Scenári 3 a 7. Vidíme, že výška nákladov spojená s kazivosťou musí byť relatívne vysoká v porovnaní s hodnotou auta.

Aby sme docielili každoročné vymieňanie Volva XC90, museli by byť náklady na odstránenie kazivosti pomerne vysoké. Takýto jav je uvedený v Scenári 8. Pre 5 ročné auto by bol kaz s pravdepodobnosťou 30% o veľkosti štvrtiny hodnoty nového auta. Tento jav je nereálny a tak usúdime, že dané vozidlo nebude optimálne vymieňať prvých 7 rokov.

<i>Scenáre</i>	<i>Pravdepodobnosť kazu</i>			<i>Veľkosť kazu</i>			<i>Optimálna výmena</i>
	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$C(1)$	$C(2)$	$C(3)$	
1	0.02x	0.015x	1-0.035x	800	600	50	po 1 roku
2	0.02x	0.015x	1-0.035x	1500	600	50	po 1 roku
3	0.02x	0.015x	1-0.035x	3000	1500	200	po 1 roku
4	0.06x	0.03x	1-0.09x	800	600	50	po 1 roku
5	0.06x	0.03x	1-0.09x	1500	600	50	po 1 roku
6	0.06x	0.03x	1-0.09x	100	600	1000	po 2 rokoch
7	0.06x	0.03x	1-0.09x	500	400	2000	po 10 rokoch

Tabuľka 13: Optimálna výmena auta s náhodnosťou kazivosti pre Škodu Fabiu

4.2 Vplyv ceny pohonných hmôt na optimálnu výmenu auta

Keďže našou úlohou je nájsť čas na optimálnu výmenu auta, musíme skúmať aj možnosti zmeny vonkajších faktorov, ktoré môžu ovplyvniť celkový výsledok. V tejto časti práce sa zameriame na analýzu vplyvu vývoja pohonných hmôt (PHM) na optimálnu výmenu auta. V predchádzajúcich kapitolách sme zohľadňovali zvyšovanie spotreby auta s vyšším vekom, avšak cenu PHM sme brali ako priemernú hodnotu za posledné tri roky. Prvým krokom v našom skúmaní bude analýza vývoja cien PHM. Získané odhady následne využijeme pri výpočte optimálnej výmeny auta pomocou simulácií.

<i>Scenáre</i>	<i>Pravdepodobnosť kazu</i>			<i>Veľkosť kazu</i>			<i>Optimálna výmena</i>
	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$C(1)$	$C(2)$	$C(3)$	
1	0.02x	0.015x	1-0.035x	1000	400	50	po 7 rokoch
2	0.02x	0.015x	1-0.035x	1250	800	50	po 4 rokoch
3	0.02x	0.015x	1-0.035x	3000	1500	200	po 1 roku
4	0.06x	0.03x	1-0.09x	1000	400	50	po 8 rokoch
5	0.06x	0.03x	1-0.09x	1250	800	50	po 7 rokoch
6	0.06x	0.03x	1-0.09x	3000	1500	200	po 7 rokoch
7	0.06x	0.03x	1-0.09x	4000	1500	200	po 1 roku

Tabuľka 14: Optimálna výmena auta s náhodnosťou kazivosti pre Hondu Civic

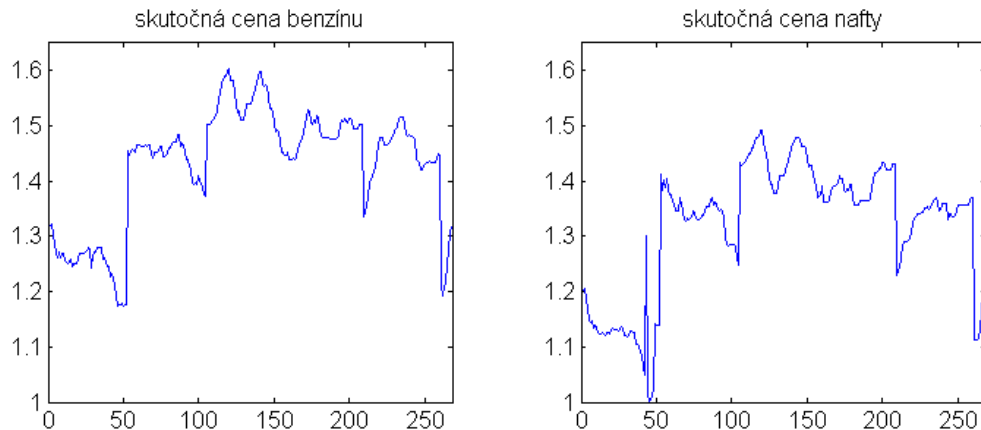
4.2.1 Modelovanie cien pohonných hmôt

V tejto časti sa zameriame na modelovanie cien pohonných hmôt, ktoré priamo vstupujú do nákladovej funkcie auta a opäť budeme uvažovať vybrané autá. Sústredíme sa na vývoj ceny *benzínu natural 95 oktánový* (benzín) a ceny *motorovej nafty* (nafta). Poznamenajme, že benzín je palivo pre Škodu Fabiu a Hondu Civic a nafta pre Volvo XC90. Cenu benzínu a nafty tvorí približne z polovice spotrebná daň a daň z pridanej hodnoty. Zvyšnú polovicu tvorí veľkoobchodná cena týchto komodít, ktorá je podobne ako akcie kotovaná na burze. Rozhodli sme sa preto s týmito komoditami pracovať ako s akciami, a tak budeme predpokladať, že cena benzínu a nafty sa vyvíja geometrickým Brownovým pohybom. Na odhadnutie parametrov μ a σ sme použili historické týždenné dáta z obdobia piatich rokov zo stránky *statdat.statistics.sk*. Vývoj cien benzínu a nafty v období 2010-2015 je zobrazený na Obr. 1.

Získané údaje o vývoji cien PHM sme následne analyzovali podľa postupu uvedeného v časti **3.2.6**. V Tabuľke 16 sú zobrazené hodnoty odhadnutých parametrov GBP pre oba typy pohonných hmôt. Tieto údaje budú slúžiť ako podklad k výpočtu nákladovej funkcie v každom roku, keďže nákladová funkcia sa skladá z fixných ročných nákladov (ktoré sa s pribúdajúcim vekom vozidla menia) a nákladov na palivo, do ktorých priamo vstupuje spotreba auta a tiež konečná cena PHM.

Scenáre	Pravdepodobnosť kazu			Veľkosť kazu			Optimálna výmena
	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$C(1)$	$C(2)$	$C(3)$	
1	0.02x	0.015x	1-0.035x	2000	1500	200	po 10 rokoch
2	0.02x	0.015x	1-0.035x	4000	2000	500	po 10 rokoch
3	0.02x	0.015x	1-0.035x	8000	2000	500	po 8 rokoch
4	0.06x	0.03x	1-0.09x	2000	1500	200	po 10 rokoch
5	0.06x	0.03x	1-0.09x	4000	2000	500	po 10 rokoch
6	0.06x	0.03x	1-0.09x	8000	2000	500	po 9 rokoch
7	0.06x	0.03x	1-0.09x	10000	4000	500	po 8 rokoch
8	0.06x	0.03x	1-0.09x	13500	2000	500	po 1 roku

Tabuľka 15: Optimálna výmena auta s náhodnosťou kazivosti pre Volvo XC90



Obr. 1: Skutočná cena PHM za obdobie 2010-2015

4.2.2 Model optimálnej výmeny auta pri stochastických cenách

V základnej úlohe (3) sme predpokladali konštantnú, vopred známu cenu PHM, ktorá vstupovala do výpočtu nákladovej funkcie $\varphi(i)$. V tejto časti práce budeme predpokladať, že ceny PHM sa budú vyvíjať podľa GBP, ktorého parametre sme odhadli v časti 4.2.1. Priebeh cien z 10 000 simulácií je znázornený na Obr. 2.

Označme symbolom $P^j(i)$ cenu PHM v i -tej časovej perióde a j -tej simulácii. Hodnotu nákladovej funkcie (4) odvodíme z vysimulovaných cien $P^j(i)$ podľa vzťahu:

<i>Odhadnuté parametre</i>	<i>Benzín</i>	<i>Nafta</i>
μ	0.00044213	0.0018
σ	0.1494	0.2278

Tabuľka 16: Odhadnuté parametre GBP PHM

$$\varphi^j(x_i, i) = Ns(x_i) + Sp(x_i) \frac{km}{100} P^j(i). \quad (27)$$

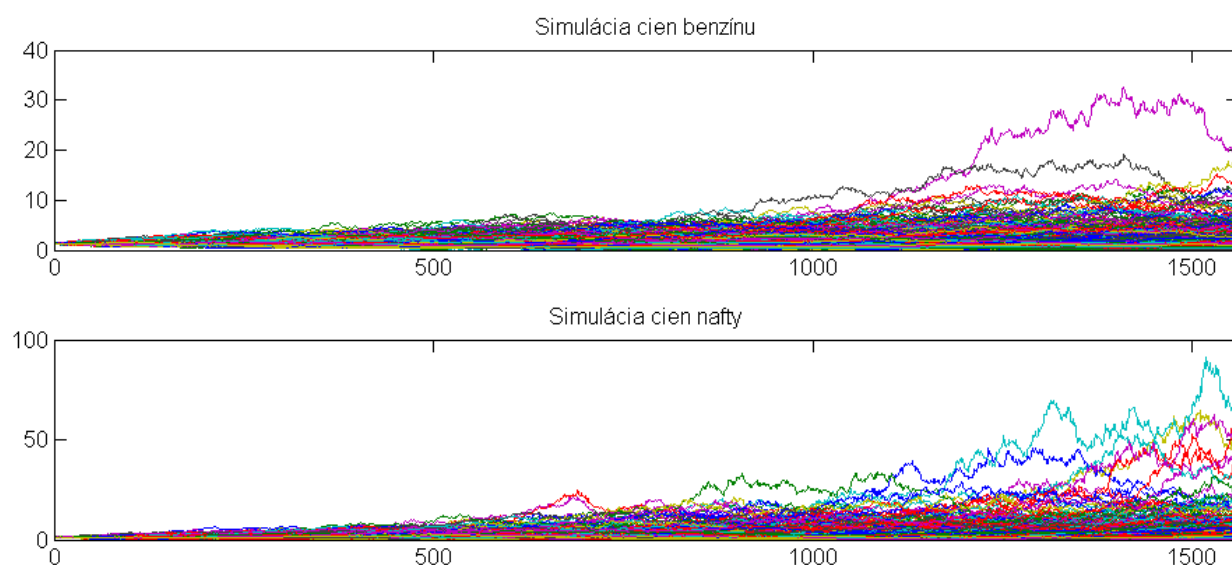
Predpokladáme, že počet prejdených kilometrov ostáva naďalej na hodnote 20 000 km ročne. Pri predpoklade stochastického vývoja cien PHM sa základná úloha (3) modifikuje nasledovne:

$$\begin{aligned} \min E \left[\sum_{i=0}^{29} \frac{1}{(1+r)^{i+1}} [Ns(x_i) + Sp(x_i) \frac{km}{100} P_i + (\psi(0) - \psi(x_i + 1))u_i] \right], \\ x_{i+1} = (1 - u_i)(x_i + 1), \quad i = 0, 1, \dots, 29, \\ P_{i+1} = P_i \exp\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma W_i\right), \quad W_i \sim N(0, 1), \\ P_0 = P0, \\ x_0 = 0, \\ u_i \in \{0, 1\}, \quad i = 0, 1, \dots, 29, \\ x_i \in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad i = 0, 1, \dots, 29. \end{aligned} \quad (28)$$

Vidíme, že predpoklad stochastického vývoja ceny PHM si vynútil zavedenie novej stavovej premennej P_i . Stavová rovnica pre túto novú premennú je výsledkom diskretizácie procesu GBP z časti **3.2.6** (viď [13]). Počiatočnú hodnotu pre novú stavovú premennú P_i , nastavíme na poslednú zistenú hodnotu zo sledovaných dát. Model použijeme osobitne pre cenu benzínu a cenu nafty. Táto hodnota zodpovedá 1,323€/l pri benzíne a 1,214€/l pri nafte.

4.2.3 Algoritmus riešenia stochastickej úlohy

Pri riešení úlohy (28) využijeme modifikovanú verziu LSM metódy. Je dôležité si uvedomiť, že problém optimálnej výmeny auta možno interpretovať ako úlohu s reálnou



Obr. 2: Simulované ceny PHM počas 30 rokov

opciou. Možnosť vymeniť auto je vlastne právo, nie však povinnosť vymeniť auto v ľubovoľnom časovom okamihu počas sledovaného obdobia. Podkladovým procesom je v našom prípade cena PHM. Problém optimálnej výmeny auta však nemôžeme popísať pomocou štandardnej americkej opcie: rozhodnutie uplatniť opciu, teda vymeniť auto, nás neprivedie ku vopred dohodnutej cene. V našom prípade ide skôr o tzv. *option to swicht* známu najmä z teórie reálnych opcií. Uplatnenie každého typu reálnej opcie nám umožňuje prepínať sa medzi jednotlivými alternatívami, podľa aktuálneho vývoja podkladového aktíva.

Štandardný algoritmus na oceňovanie klasickej americkej opcie, ktorý sme predstavili v časti **3.2.5**, si vyžiadal rozšírenie o výpočet odhadnutej strednej hodnoty aj v prípade, že auto predáme. Navyše, náš priestor stavových premenných je dvojrozmerný. Pri navrhovaní vhodnej modifikácie algoritmu sme vychádzali z práce [6]. Výsledky algoritmu môžeme zhrnúť do piatich krokov, ktoré sú prehľadne zobrazené v súhrne na nasledujúcej strane.

ALGORITMUS NA VÝPOČET OPTIMÁLNEJ VÝMENY AUTA
PRI STOCHASTICKOM VÝVOJI CIEN PHM

Krok 1 Simulácia M scenárov cien $\{P^j(i)\}_{j \in M}$ na intervale $i \in [t_0, k]$. Parameter t_0 reprezentuje prvú iteráciu, a k poslednú iteráciu systému. Tieto ceny sú nasimulované podľa parametrov zobrazených v Tabuľke 10.

Krok 2 Výpočet nákladovej funkcie $\varphi^j(x_i, i)$ podľa (27) závislej aj od jednotlivých simulácií j pre jednotlivé ceny $P^j(i)$.

Krok 3 Výpočet koncovej hodnotovej funkcie $V_k^j(x_k)$ pre čas $i = k$ pre všetky simulácie j a všetky stavy $x \in X_i$ podľa základnej Bellmanovej rovnice (5).

Krok 4 Vytvorenie vonkajšieho cyklu pre časy $t = k : (-1) : t_0$ a vnútorného cyklu pre všetky stavy $x \in X_i$:

- Výpočet hodnoty jednotlivých funkcií Pr^j a Ne^j ako hodnotových funkcií pre možnosť auto predať ($Pr^j, u = 1$) alebo nepredať ($Ne^j, u = 0$) pre všetky simulácie j a daný čas i a vek vozidla x .
- Výpočet koeficientov $(\alpha_1^{Pr}, \alpha_2^{Pr}, \alpha_3^{Pr}, \alpha_1^{Ne}, \alpha_2^{Ne}, \alpha_3^{Ne})$ kvadratickej regrese pre jednotlivé funkcie Pr^j a Ne^j ako funkcie závislej od ceny P^j .
- Odhad hodnoty funkcií OPr^j a ONe^j pre jednotlivé j použitím vyrátaných koeficientov a nasimulovaných cien P^j ako funkciu odhadov pre auto predať (OPr^j) a nepredať (ONe^j).
- Porovnanie odhadnutých hodnôt OPr^j a ONe^j pre jednotlivé simulácie j . Menšia z nich bude v tomto kroku optimálna (keďže úlohu minimalizujeme). Informáciu o zvolenej stratégii ($u = 1$ alebo $u = 0$) pre daný čas i a vek vozidla x si uchováme. Hodnotovú funkciu $V_i^j(x_i)$ nahradíme Pr^j alebo Ne^j podľa zvolenej stratégie.

Krok 5 Vo finálnej fáze existuje pre každý čas i , stav x ako aj cenu PHM $P(i)$ optimálna stratégia.

4.2.4 Numerické riešenie pre lineárne vozidlo

Algoritmus predstavený v časti 4.2.3 sme naprogramovali v matematickom softvéri Matlab. Funkčnosť algoritmu demonštrujeme najprv pre modelový prípad, tzv. *lineárne vozidlo*. Ide o teoretický model vozidla: jeho pomenovanie bolo inšpirované predpokladom linearity fixných ročných nákladov $Ns(x_i)$, spotreby $Sp(x_i)$ a zostatkovej hodnoty $\psi(x_i)$. Hodnoty týchto funkcií sú zobrazené v Tabuľke 17. Ostatné parametre úlohy zostávajú na pôvodných hodnotách: dĺžka sledovaného časového obdobia je 30 rokov a predpokladáme, že nemôžeme vlastniť staršie ako deväťročné auto.

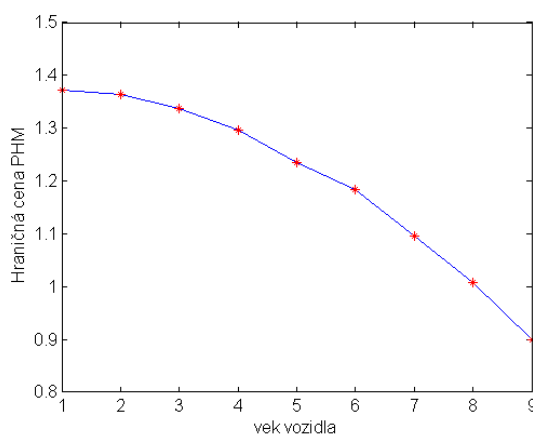
Vek vozidla (i)	Fixné náklady v €	Spotreba v $\frac{l}{100km}$	Hodnota vozidla v €
1	0	5.0	15 000
2	20	5.1	14 000
4	40	5.2	13 000
5	60	5.3	12 000
6	80	5.4	11 000
7	100	5.5	10 000
8	120	5.6	9 000
9	140	5.7	8 000
10	160	5.8	7 000
11	180	5.9	6 000

Tabuľka 17: Tabuľka hodnôt funkcií pre lineárne vozidlo

S využitím algoritmu z časti 4.2.3 môžeme vypočítať optimálne stratégie pre každý čas i a stav x . Nakoľko naša úloha nie je jednorozmerná v stavovej premennej grafická interpretácia získaných výsledkov je pomerne obtiažna. Jednou z možností, ako sa s týmto problémom vysporiadať, je skúmať, ako sa mení bariérová cena PHM s narastajúcim vekom vozidla v čase. Túto situáciu sme znázornili na Obr. 3: znázornená krivka tu reprezentuje bariéru pre cenu benzínu (predpokladali sme, že lineárne vozidlo jazdí na benzín). Ak je aktuálna cena pod touto bariérou, optimálnym rozhodnutím je dané vozidlo ešte nepredať. Posledný desiaty rok nezobrazujeme, nakoľko je zrejmé, že pri akejkoľvek cene benzínu auto predáme, keďže staršie vozidlo na základe zadefinovaných podmienok vlastniť nemôžeme. S pribúdajúcim časom a vekom vozidla je vidieť,

že bariéra klesá, čo je ovplyvnené najmä vyššiu spotrebou $Sp(i)$. Výmenou za nové vozidlo túto zložku nákladovej funkcie podstatne znížime.

Realita je však iná: sledované automobily nemôžeme považovať za lineárne vozidlá. S výsledkami sa oboznámime v nasledujúcej časti.



Obr. 3: Predaj lineárneho vozidla vzhľadom na ceny PHM

4.2.5 Numerické riešenie pre vybrané vozidlá

V tejto časti sa opäť pozrieme na stratégiu výmeny vzhľadom na stochastický vývoj cien PHM pre nami vybrané tri autá a ich funkcie $\varphi(i)$ a $\psi(i)$, zobrazené v Tabuľke 2. Výsledky pre jednotlivé automobily si prezrieme po jednom a nie v súhrnnej tabuľke.

Škoda Fabia

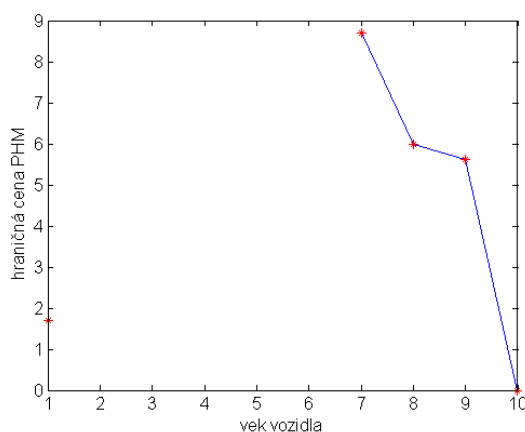
Pri riešení úlohy (3) sme zistili, že optimálna výmena auta pre Škodu Fabiu je každý rok. V prípade uváženia stochastického vývoja cien PHM výsledky numerickej analýzy naznačujú, že cena benzínu neovplyvňuje naše rozhodnutie: Škodu Fabiu bez ohľadu na cenu PHM vymeníme za nové. Dôvodom môže byť nízky rozdiel ceny medzi novým a použitým automobilom. Zmena spotreby, ktorá je pri viacročnom aute razantne vyššia ako u nového auta, môže mať tiež význam. Cenovú bariéru z tohto dôvodu nezobrazujeme. V ďalšej časti našej diplomovej práce sa skúsime pozrieť na to, ako by nižšia zmena spotreby, prípade nižší počet ročne prejdých kilometrov (spotreba by mala menší vplyv na náklady), ovplyvnila naše optimálne rozhodovanie.

Honda Civic

Pre tento automobil nám v úlohe (3) ako optimálne riadenie vyšlo auto vymeniť po siedmich rokoch držania. Ani tu cena benzínu nezmenila naše rozhodovanie. V prvých siedmich rokoch nech je cena benzínu akákoľvek, auto nevymeníme a čakáme, aby sme ho vymenili v ôsmom roku. Vtedy auto vymeníme bez ohľadu na vývoj ceny. Dôvodom takéhoto výsledku je pravdepodobne prudký pokles hodnoty auta v ôsmom a deviatom roku (prepad na 50%). Výsledkom je, že auta sa zbavíme, aby sme neprišli o veľa peňazí.

Volvo XC90

Pre najdrahšie z našich vybraných vozidiel Volvo XC90 nám v úlohe (3) ako optimálne vyšlo auto nevymeniť, pokiaľ to nie je nutné a teda ho meníme až po deviatich rokoch. Ako naznačuje cenová bariéra na Obr. 4, v tomto prípade prvých šesť rokov cena nafty rozhodovanie neovplyvní a automobil nepredávame. Pre ďalšie roky do rozhodovania vstupuje aj cena, avšak auto predáme jedine v prípade, že cena bude dosť vysoká (za 1 liter až 6-8€). V tomto prípade hodnota automobilu klesá rapídne, a tak je nové auto príliš drahé vzhľadom na ročné náklady staršieho vozidla.



Obr. 4: Predaj Volva XC90 vzhľadom na ceny PHM

Z týchto výsledkov môžeme usúdiť, že náklady na spotrebované palivo nepredstavujú významnú zložku z celkových nákladov vlastníctva motorového vozidla. Toto porovnanie nás inšpirovalo k nasledujúcej analýze citlivosti, v ktorej sme analyzovali vplyv zmeny funkcie nákladov $\varphi(i)$ (popísanej v Tabuľke 2) na optimálnu výmenu auta.

4.2.6 Numerické riešenie so zmenou spotreby a počtu prejdých km

V tejto časti našej práce sa pozrieme na to, ako by sme zareagovali v prípade iného počtu ročne prejdých kilometrov, prípadnej iného vývoja spotreby pri x -ročných automobiloch. Opäť sa pozrieme na jednotlivé automobily osobitne.

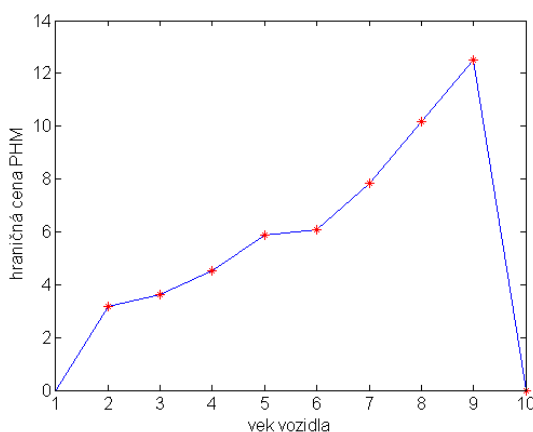
Škoda Fabia

Keďže v predchádzajúcej kapitole nám pri vozidle Škoda Fabia ako optimálne vyšlo auto predať bez ohľadu na cenu benzínu, je zrejmé, že ak by s pribúdajúcim časom rástla spotreba rýchlejšie, prípadne by auto prešlo viac kilometrov, naše rozhodnutie by to nezmenilo. Pozrieme sa preto na opačný princíp - spomalením rastu spotreby a počtu prejdých kilometrov.

- *Zmena počtu ročne prejdých kilometrov:* V prípade zvýšenia ročne prejdých kilometrov sa rozhodovanie nezmení (keďže spotreba s pribúdajúcim vekom vozidla rastie) a auto vymieňame každý rok. Dokonca ani opačným prístupom, a to znížením počtu ročne prejdých kilometrov na nulu (teda auto bude mať len fixné náklady $Ns(x_i)$), sa naše rozhodnutie nezmení a my naďalej auto vymieňame každý rok. Opäť tu výsledky ovplyvňuje malá zmena medzi novým a ročným automobilom.
- *Zmena spotreby s vekom:* V predchádzajúcich príkladoch sme pozorovali optimálnu výmenu auta, kde spotreba prvý rok stúpala o $0.3 \frac{l}{100km}$, pričom ďalšie roky rástla len veľmi pomaly. Ak by spotreba ostala konštantná na hodnote 5.8, teda staršie auto by malo vyššie len fixné náklady, rozhodnutie by to stále neovplyvnilo a optimálne je auto vymeniť každý rok. Naše rozhodovanie by sme zmenili jedine v prípade nereálneho scenára, kedy by s pribúdajúcim vekom vozidla spotreba klesala lineárne. Na Obr. 5 je zobrazený jeden zo scenárov, kedy sa spotreba vyvíja nasledovne:

$$Sp(x) = 5.8 - 0.12x \quad (29)$$

Ako je vidieť cenovú bariéru na Obr. 5, s pribúdajúcim vekom vozidla je potrebná vyššia cena benzínu, aby sme sa auto rozhodli predať z dôvodu nižších celkových nákladov. Tento scenár, ako sme už spomínali, je nereálny, a tak nepokladáme za dôležité sa ním ďalej zaoberať.

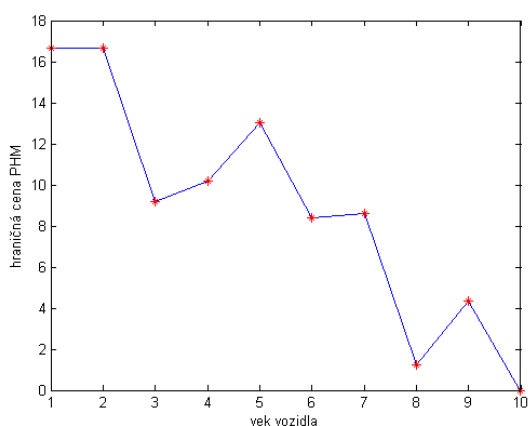


Obr. 5: Predaj Škody Fabia vzhľadom na ceny PHM pri klesajúcej spotrebe

Honda Civic

Pre automobil Honda Civic je optimálne auto nevymeniť prvých sedem rokov a následne ho vymeniť bez ohľadu na cenu benzínu. S vyššou spotrebou, prípadne s vyšším počtom prejdených kilometrov, sa celkové náklady zvýšia, čo zrejme ovplyvní rozhodnutie o optimálnej výmene auta.

- *Zmena počtu ročne prejdených kilometrov:* Pôvodne sme sledovali, že auto prejde ročne 20 000 kilometrov. Ak však prejdeme ročne štyrikrát viac kilometrov, teda 80 000km, výsledky sa podstatne zmenia. Ako je vidieť na Obr. 6, cena benzínu v tomto prípade výrazne ovplyvňuje naše rozhodnutie o tom, či auto predáme alebo nie. Bariéra zobrazená na Obr. 6 nám stano-



Obr. 6: Predaj Hondy Civic vzhľadom na ceny PHM pri vyššom počte km

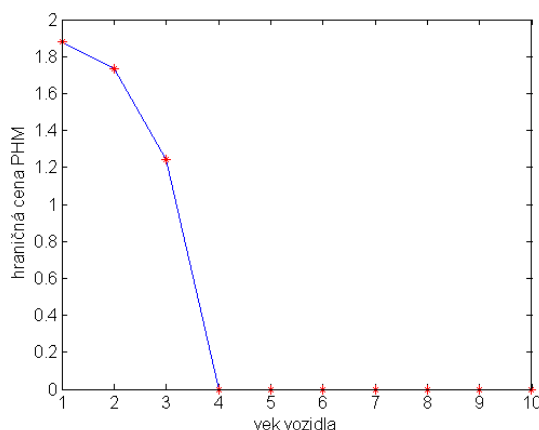
vuje, že auto predáme po prvom roku len pri veľmi extrémnom scenári - ten

je taký, že cena benzínu je vyššia ako 16€. Je vidieť, že v ôsmom roku auto takmer s určitou prednosťou predáme a deviaty rok preto nepredávame, ak je cena benzínu pod 4€. Deviaty rok sa nám totiž už neoplatí auto predávať, keďže desiaty rok ho musíme určite predať. Vidíme, že kritické hodnoty pre jednotlivé ceny PHM nie sú s každým pribúdajúcim rokom vozidla x klesajúce, a to najmä z dôvodu nelineárnych poklesov hodnoty auta a neklesajúcich fixných nákladov (štvrtý, šiesty a ôsmy rok sú finančne náročnejšie na fixné náklady).

- *Zmena spotreby s vekom*: Spotreba sa prvé dva roky mení len pozvoľna a ďalšie roky ostáva konštantná. Preto sa nám s pribúdajúcim vekom celkové náklady menia len v závislosti od meniacich sa fixných nákladov. Rozhodnutie auto vymeniť za nové by sme zmenili, ak by sa spotreba vyvíjala napríklad podľa nasledujúceho predpisu:

$$Sp(x) = 5.9 + 2.5x, \quad (30)$$

t.j. každý rok nám spotreba narastie o $2.5 \frac{l}{100km}$. Výsledky zobrazené na Obr. 7, naznačujú, že prvé štyri roky rozhodovanie o výmene auta ovplyvňuje cena benzínu a staršie ako štvorročné vozidlo sa nám oplatí vždy predať bez ohľadu na cenu PHM. Všimnime si klesajúci charakter bariérovej funkcie vzhľadom na vek vozidla. V nasledujúcich častiach sa pokúsime tento výsledok podrobnejšie preskúmať.

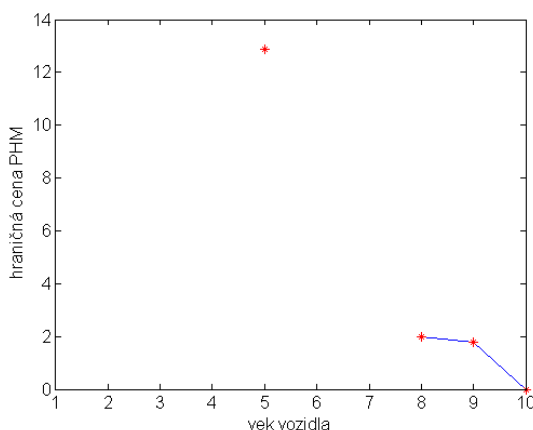


Obr. 7: Predaj Hondy Civic vzhľadom na ceny PHM pri rastúcej spotrebe

Volvo XC90

Pre automobil Volvo XC90 je optimálne auto nevymeniť dokonca prvých deväť rokov pri cenách nafty nižších ako 6€. S iným vývojom spotreby alebo s vyšším počtom prejdenných kilometrov sa celkové náklady zmenia, čo ovplyvní optimálny čas výmeny auta.

- *Zmena počtu ročne prejdenných kilometrov:* Pri ročnom prejdení 20 000 km by musela byť cena nafty veľmi vysoká, aby sa oplatilo auto predáť, a teda skúsime sledovať ročne prejdenných 80 000 km. Z bariéry zobrazenej na Obr. 8 vidíme, že novšie ako sedem ročné auto sa nám neoplatí predávať, preto v týchto miestach bariéra neexistuje. Pri starších autách sa pri ročnom prejdení štvornásobne viac kilometrov bariéra pre cenu nafty zníži.

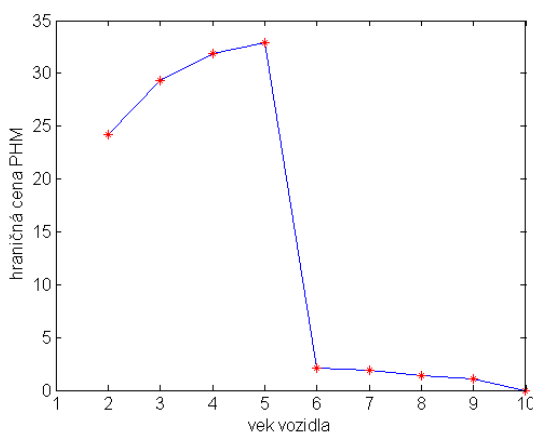


Obr. 8: Predaj Volva XC90 vzhľadom na ceny PHM pri vyššom počte km

- *Zmena spotreby s vekom:* Spotreba automobilu, podobne ako pri vozidle Honda Civic, rastie pomaly a nelineárne. Preto zostrojíme vývoj spotreby nasledovným spôsobom:

$$Sp(x) = 8.1 + 2.5x \quad (31)$$

Opäť spotreba narastie o $2.5 \frac{l}{100km}$. Cenová bariéra zobrazená na Obr. 9 hovorí o tom, že vozidlo nie staršie ako päťročné predáme len pri veľmi vysokých cenách nafty, a od piateho roku ho predávame aj pri cene nižšej.

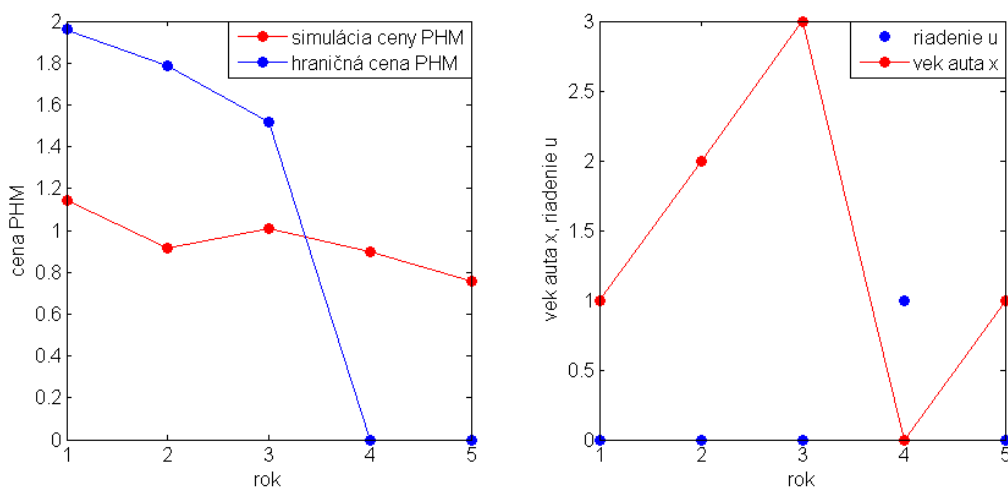


Obr. 9: Predaj Volva XC90 vzhľadom na ceny PHM pri rastúcej spotrebe

V zmysle predchádzajúcich výsledkov sa v ďalšej časti našej práce sa bližšie zameriame na prípad Hondy Civic, ktorou ročne prejdeme 20 000 km, avšak spotreba sa vyvíja podľa rovnice (30), teda podľa výsledku vyobrazeného na Obr. 7.

4.2.7 Numerické riešenie Hondy Civic pri rozhodovaní viackrát ročne

V tejto časti našej práce sa pozrieme konkrétne na automobil Honda Civic s predpokladom, že sa spotreba vyvíja podľa rovnice (30). Na úvod si zobrazíme na Obr. 10 jednu simuláciu ceny PHM a taktiež naše rozhodovanie pri takomto scenári vývoja ceny PHM.



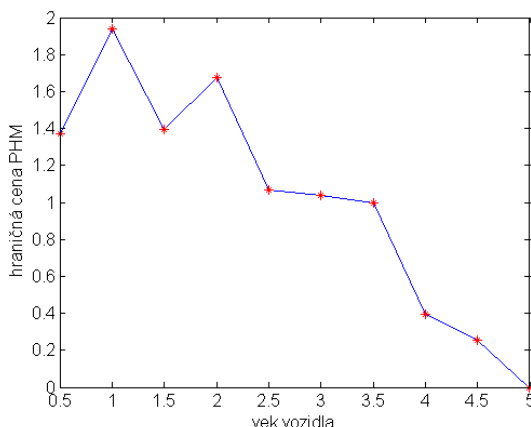
Obr. 10: Simulovaná cena PHM vzhľadom na bariéru pre Hondu Civic

Ako je vidieť na Obr. 10, simulovaná cena nám pretne bariéru medzi tretím a štvrt-

tým rokom vozidla a tak najbližší možný rok auto predáme. To nás inšpirovalo k sledovaniu piatich rokov vývoja Hondy Civic avšak budeme predpokladať, že predat auto je možné nielen na konci každého roka, ale aj častejšie (polročne či štvrťročne). Nákladovú funkciu $\varphi(i)$ ako aj hodnotovú funkciu $\psi(i)$ si počas sledovaných období rozdelíme rovnomerne. Tieto prípady si rozoberieme osobitne podľa časového kroku rozhodovania.

Polročne

Na Obr. 11 zobrazíme bariérovú cenu benzínu počas sledovaného obdobia piatich rokov, kde sa rozhodujeme každých šesť mesiacov, či auto predáme alebo nepredáme. Ako je vidieť, hodnoty v prvom, druhom a treťom roku sú identické ako pri možnosti rozhodovania každý rok. Hraničné ceny medzi ročnými rozhodovaniami (teda v polrokoch) neklesajú rovnomerne, čo môže byť opäť spôsobené nelinearitou hodnotovej funkcie auta $\psi(i)$, ako aj neklesajúcou funkciou fixných nákladov $Ns(i)$.

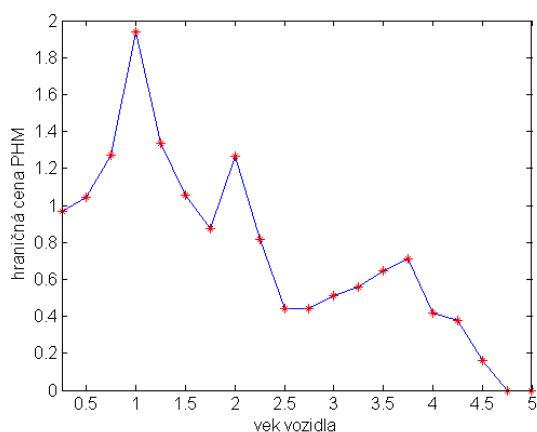


Obr. 11: Predaj Hondy Civic vzhľadom na ceny PHM polročne

Štvrťročne

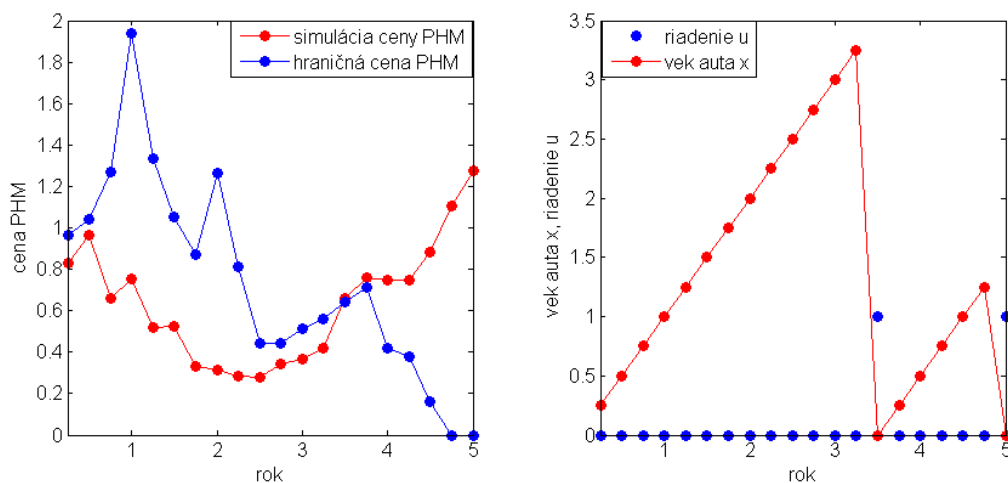
V tomto prípade, sa pozrieme na výsledky v prípade, že by sme sa rozhodovali ešte častejšie a to každé štyri mesiace. Na Obr. 12 je vidieť, že bariérové ceny neklesajú rovnomerne, a to najmä v medziročnom období.

Hodnota funkcia $\psi(i)$ a funkcia fixných nákladov $Ns(i)$ sa nevyvíjajú lineárne počas jednotlivých rokov i , avšak pri rozhodovaní viackrát ročne sme tieto funkcie rozdelili



Obr. 12: Predaj Hondy Civic vzhľadom na ceny PHM štvrťročne

rovnomerne (lineárne). Toto rozdelenie ovplyvnilo výsledky v medziročnom období, a tak môžeme usúdiť, že nelinearitou vývoja cien a nákladov dostaneme iba nelineárne výsledky. Opäť si na Obr. 13 zobrazíme jednu simuláciu ceny PHM a naše rozhodovanie pri tomto scenári vývoja. Na Obr. 13 je vidieť, ako simulovaná cena PHM pretne cenovú bariéru po tri a pol roku a tak vozidlo prvýkrát predáme práve v po tri a pol roku.



Obr. 13: Simulovaná cena PHM vzhľadom na bariéru pre Hondu Civic štvrťročne

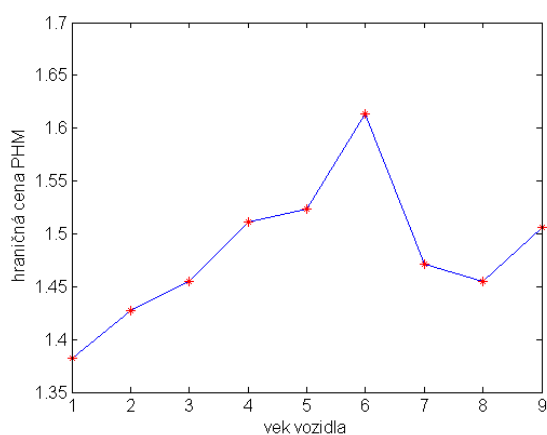
4.2.8 Numerické riešenie výmeny za úsporný automobil

V tejto časti našej práce sa skúsime pozrieť na hraničné ceny PHM, pri ktorých náš automobil vymeníme za úsporný automobil z kapitoly 2.4.2. Nákladová funkcia takéhoto úsporného automobilu sa vyvíja podľa (15). Pre všetky tri sledované automobily z

Tabuľky 1 budeme po dobu 30 rokov sledovať optimálnu výmenu za nový automobil tej istej značky s možnosťou výmeny za úsporný automobil. Úloha bude teda identická s úlohou (13), avšak cena pohonných hmôt sa bude vyvíjať podľa nami odhadnutým Brownovým pohybom. Z Tabuľky 9 sme odhadli najvyššie ceny úsporných automobilov, pri ktorých ešte naše auto vymeníme za úsporný automobil. Počas 30 rokov môžeme v každom roku naše auto vymeniť za nový model, prípadne ho vymeniť za nové úsporné vozidlo a sledovať optimálnu výmenu úsporného vozidla. Zaujímá nás bariéra pre cenu PHM, pri ktorej je optimálne x -ročné vozidlo vymeniť za nové úsporné vozidlo. Pokiaľ je cena PHM vyššia ako bariéra, automobil vymeníme za úsporný typ. Pokiaľ je cena pod vypočítanou bariérou, nad výmenou za úsporný automobil neuvažujeme. Pre jednotlivé automobily si výsledky prezentujeme osobitne.

Škoda Fabia

Pre vozidlo Škoda Fabia sme podľa Tabuľky 9 vyrátali hraničnú cenu úsporného vozidla na 12 400€. Pokiaľ je teda cena úsporného vozidla vyššia ako táto cena, pri konštantnej cene benzínu nad výmenou nerozmýšľame. V prípade ceny nižšej ako bariéra vymeníme model Škoda Fabia za úsporné vozidlo hneď v prvom roku. Na Obr. 14 vidíme bariéru pre ceny benzínu. Tieto ceny sú pri novom automobile

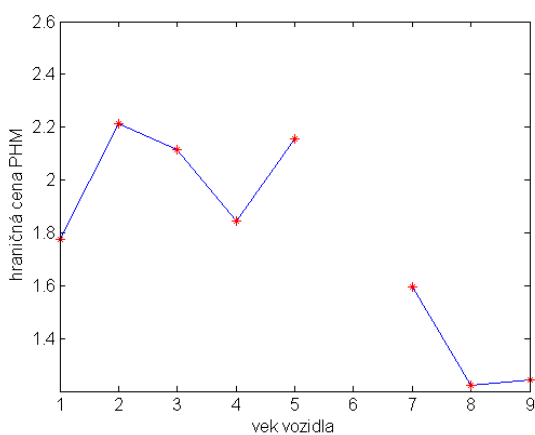


Obr. 14: Výmena Škody Fabia za úsporné vozidlo vzhľadom na ceny PHM

v prvom roku približne na úrovni priemeru ceny benzínu, avšak v ďalších rokoch rastú do vyšších hodnôt. To znamená, že napríklad na výmenu šesťročného vozidla za úsporné vozidlo v šiestom roku by cena benzínu musela byť vyššia ako 1.6€/l.

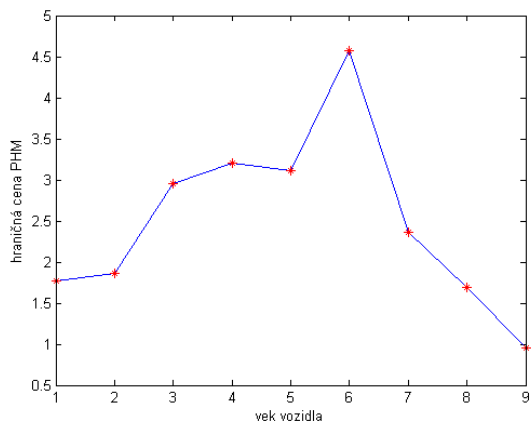
Honda Civic

Pre vozidlo Honda Civic sme pre úsporný automobil vypočítali hraničnú cenu 26 900€. Na Obr. 15 sú zobrazené výsledky bariéry pre ceny benzínu. Na rozdiel od predchádzajúceho vozidla Škoda Fabia, v tomto prípade sa nám šesťročné auto v šiestom roku neoplatí vymeniť za úsporné ani pri veľmi vysokej cene benzínu, a tak je lepšie počkať kým auto zostarne o ďalší rok. V tomto roku kritická hodnota neexistuje a tak pre tento rok bariéru nezakresľujeme. Naopak, pokiaľ vlastníme osem alebo deväť ročnú Hondu Civic, už pri cene benzínu 1.2€/l auto vymeníme za úsporné.



Obr. 15: Výmena Hondy Civic za úsporné vozidlo vzhľadom na ceny PHM

Volvo XC90



Obr. 16: Výmena Volva XC90 za úsporné vozidlo vzhľadom na ceny PHM

Najdrahšiemu zo skúmaných vozidiel bola podľa Tabuľky 9 vypočítaná hraničná cena pre úsporný automobil vo výške 69 000€. Na Obr. 16 je zobrazená bariéra pre ceny nafty pre tento typ automobilu. V šiestom roku je bariérová cena výmeny veľmi vysoká, a to najmä z dôvodu poklesu hodnoty Volvo XC90, ktorá sa nevyvíja lineárne. Naopak v ôsmom a deviatom roku je postačujúca už veľmi nízka cena nafty, aby sme vymenili sledované vozidlo Volvo XC90 za úsporný automobil.

Záver

Cieľom tejto diplomovej práce bolo skúmať a vypočítať optimálny vek auta pred predajom či výmenou v rôznych typoch úloh s použitím teórie optimálneho riadenia. Popri základnej úlohe (3) sme v práci navrhli a predstavili viaceré modifikácie, s cieľom priblížiť sa čo najviac skutočnému svetu. Pre každú z troch kategórií automobilov (malé automobily, nižšia stredná trieda automobilov a terénne automobily) sme vybrali jedného zástupcu a odhadli parametre vstupujúce do výpočtu. Práca je koncepčne rozdelená do dvoch častí. Zatiaľ čo prvej časti sme pri riešení optimálnej výmeny auta využili deterministický prístup, v druhej časti do úloh vstupuje aj stochastika.

V prvých dvoch kapitolách, zahrňujúcich deterministický prístup, sme sa po teoretickom úvode do problematiky zamerali na štandardnú úlohu optimálneho riadenia a spôsoby jej riešenia. Následne sme aplikáciou dát vytvorili základnú úlohu (3). Tá ďalej slúžila ako nosná úloha celej diplomovej práce. Základná úloha (3) ponúka majiteľovi auta možnosť v každom roku vymeniť jeho automobil za nový automobil tej istej značky. Riešením sme dostali zaujímavé výsledky, kde pri lacnejšom automobile (Škoda Fabia) automobil predávame každý rok z dôvodu nízkej zmeny ceny medzi novým a jednoročným automobilom. U drahších modelov vozidla predávame neskôr (Honda Civic po ôsmich rokoch a Volvo XC90 až po desiatich rokoch) z dôvodu väčšieho rozdielu ceny medzi novým, jednoročným a dvojročným automobilom. Základnú úlohu (3) sme postupne modifikovali dodaním možnosti vymeniť vozidlo za starší model tej istej značky, možnosti vymeniť ho za vozidlo inej značky (z nami sledovaných alebo za úsporný automobil) či doplnením funkcie užitočnosti, kde sme zohľadnili preferencie majiteľa vzhľadom na vek vozidla. Z hľadiska celkových nákladov pre Škodu Fabia ostáva optimálna výmena každý rok za nový automobil pre všetky spomenuté modifikácie. Pre Hondu Civic je optimálne vlastniť každý rok trojročné vozidlo. Automobil Volvo XC90 vymieňame hneď po prvom roku za päťročné vozidlo, a to držíme, pokiaľ je to možné. Pri možnosti vymeniť automobil za úsporný model (s nižšou spotrebou a nižšími prevádzkovými nákladmi) sme vypočítali hraničné ceny úsporných vozidiel, pri ktorých sa nám vozidlo oplatí vymeniť za úsporný model. Je zaujímavé, že hraničná cena pre Škodu Fabia je o 25% vyššia ako cena nového vozidla a pri Honde Civic a

Volve XC90 je táto cena dokonca vyššia až o 50%.

V tretej a štvrtej kapitole sme sa zamerali na vplyv stochastický premenných na optimálnu výmenu. Uvážili sme dva rôzne typy náhody: kazivosť auta a vývoj cien pohonných hmôt. Kazivosť auta sme reprezentovali pomocou diskkrétnej náhodnej premennej. Zistili sme, že kazivosť auta nemá vplyv na čas optimálnej výmeny: výsledky sa oproti úlohe (3) zmenili jedine v prípade nereálnych vývojev kazivosti u jednotlivých automobilov.

V prípade stochastického vývoja cien pohonných hmôt a jeho vplyvu na optimálnu výmenu auta sme použitím odhadnutých parametrov geometrického Brownovho pohybu nasimulovali 10 000 simulácií možných scenárov cien na najbližších 30 rokov. Využitím Monte Carlo simulačnej metódy navrhnutej Longstaffom a Schwartzom [8] sme pri zvolených parametroch a vypočítali cenovú bariéru, ktorá hovorí o tom, pri akých cenách PHM automobil nepredávame a pri akých už predávame. Oproti úlohe (3) sa výsledky nezmenili, teda cena pohonných hmôt nemá vplyv na optimálnu výmenu. V ďalšej časti sme analýzou citlivosti v prípade spotreby a počtu prejdených kilometrov sledovali vplyv na optimálnu výmenu auta. Následne sme doplnili možnosť automobil vymeniť za nový nielen na konci každého roka, ale aj polročne a štvrťročne. Na výsledkoch opäť vidíme nelineárne klesajúcu bariéru z dôvodu nelineárnych nákladových funkcií. V závere sme sa pozreli na bariérové ceny PHM, pri ktorých vymieňame automobil za úsporný.

Z výsledkov jednotlivých modelov môžeme usúdiť, že lacnejšie automobily je optimálne vymieňať častejšie. Na druhej strane, pri drahších automobiloch sa javí ako optimálne riešenie čo najviac ich opotrebovať a až potom vymeniť za novší model. Získané výsledky mohli byť ovplyvnené aj výberom reprezentanta danej cenovej kategórie. Je dôležité poznamenať, že vo výpočtoch neboli zahrnuté všetky parametre, ktoré by mohli ovplyvniť rozhodovanie majiteľa vozidla. V prípade rozšírenia práce by sme navrhovali zohľadniť v modeli bezpečnosť daného auta, komfort z jazdy, ale aj negatívny vplyv na životné prostredie. Zaujímavé výsledky by mohlo priniesť rozšírenie funkcie užitočnosti, ktorú by sme získali hlbším skúmaním jednotlivca.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Autobazár: Predajné ceny jednotlivých vybraných vozidiel. Dostupné na internete (01.03.2015):
<http://www.autobazar.eu/sk/osobne-vozidla>
- [2] Blahovský, L. (2012): *Geometrický Wienerov proces*, Bakalárska práca. Brno: Masarykova univerzita prírodovědecká fakulta, 2012. 22 s.
- [3] Dixit, A., Pindyck, R. S. (1994): *Investment Under Uncertainty*, Princeton, Princeton University Press, 1994.
- [4] Fabian, F., Kluiber, Z. (1998): *Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění*, Prospektrum, Praha, 1998.
- [5] Halická, M., Brunovský, B., Jurča, P.(2009): *Optimálne riadenie, Viacetapové rozhodovacie procesy v ekonómii a financiách*, Epos, Bratislava, 2009.
- [6] Howison, S. (2010): *Valuing power plants under emission reduction regulations and investing in new technologies: An exchange option on real options*, Diplomová práca. Oxford: University of Oxford, 2010. 52 s.
- [7] Lauko, M. (2013): *Stochastické diskkrétne úlohy optimálneho riadenia s ohraničeniami na koncový stav*, Dizertačná práca. Bratislava: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, 2013. 114 s.
- [8] Longstaff, F. A., Schwartz, E. S. (2001): *Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach*, Review of Financial Studies Springs, 14(1):113–147, 2001.
- [9] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V. (2005): *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, Bratislava, 2005.
- [10] Michnová, I. (2008): *Analýza investičného rozhodovania pri uplatnení reálnej opcie*, Diplomová práca. Bratislava: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, 2008. 45 s.

- [11] Pneumatiky: Výmena pneumatík podľa počtu prejdenných km. Dostupné na internete (01.03.2015):
<http://www.abcauto.sk/clanok/39/ako-stare-a-nebezpecne-su-vase-pneumatiky>
- [12] Statdat.statistics: Týždenné ceny pohonných hmôt na Slovensku 2010-2015. Dostupné na internete (01.03.2015):
http://statdat.statistics.sk/cognosext/cgi-bin/cognos.cgi?b_action=xts.run&m=portal/cc.xts&gohome
- [13] Stehlíková, B.: *Prednášky z Finančných derivátov*, učebné texty, dostupné na internete (01.03.2015):
<http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/fd-14.html>
- [14] Vanáková, V. (2012): *Oceňovanie reálnych opcí pomocou Monte Carlo metódy najmenších štvorcov*, Diplomová práca. Bratislava: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, 2012. 63 s.
- [15] Žatko, P. (2013): *Motoristické dilemy*, Bakalárska práca. Bratislava: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, 2013. 49 s.