

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE FAKULTA
MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Aproximácie cien dlhopisov a presnosť vstupných dát pri
kalibrácii

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**Aproximácie cien dlhopisov a presnosť vstupných dát pri
kalibrácii**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.



ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Viktor Pojzl
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Aproximácie cien dlhopisov a presnosť vstupných dát pri kalibrácii /
Approximation of bond prices and the accuracy of the input data for calibration

Cieľ: Ceny dlhopisov (a teda aj výnosové krivky) sa v short rate modeloch dajú v explicitnom tvare vyjadriť len v niektorých špeciálnych prípadoch. Pre ostatné je potrebné hľadať aproximáciu - numerickú alebo analytickú, my sa budeme zaoberať analytickými aproxiáciami. Pri konštrukcii aproximácie sa snažíme, aby bola čo najpresnejšia. Pri kalibrácii však používame dáta s určitou presnosťou - napríklad úrokové miery kótované na tri desatinné miesta. Otázkou teda je, aké zvýšenie presnosti aproximácie (pravdepodobne za cenu zložitejšieho predpisu) je ešte užitočné a aké je už za hranicou presnosti vstupných dát. Na simulovaných dátach budeme testovať jednotlivé aproximácie a sledovať presnosť, s akou odhadneme parametre a ako dobre fitujeme výnosové krivky.

Vedúci: RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 29.01.2014

Dátum schválenia: 10.02.2014
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Pod'akovanie Touto cestou by som sa chcel poďakovať vedúcej diplomovej práce RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za jej odbornú pomoc, ochotu, pripomienky a cenné rady pri písaní tejto diplomovej práce.

Abstrakt

Pojzl, Viktor: Aproximácie cien dlhopisov a presnosť vstupných dát pri kalibrácii [Diplomová práca].

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.

Školiteľ: RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2015, 55 s.

V našej práci sa zaoberáme odhadovaním modelov krátkodobej úrokovej miery. Používame pri tom štyri analytické aproximačné formule pre cenu dlhopisu v CKLS modeli, nakoľko explicitné riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu v tomto modeli nie je známe. Pracujeme s vygenerovanými dátami CIR modelu, v ktorom toto explicitné riešenie existuje. Kalibrujeme rizikovo neutrálne parametre CKLS modelu pre vygenerované dáta CIR modelu pomocou aproximačných formúl. Cieľom práce je zistiť, aký vplyv má zaokrúhľovanie vygenerovaných dát na kalibráciu, otestovať jednotlivé aproximácie pri zaokrúhlených dátach a sledovať presnosť, s akou odhadujeme parametre a fitujeme výnosové krivky.

Kľúčové slová: úroková miera, výnosová krivka, dlhopis, jednofaktorový model, CKLS model, Vašíčkov model, CIR model, analytická aproximácia.

Abstract

Pojzl, Viktor: Approximation of bond prices and the accuracy of the input data for calibration [Master's thesis].

Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics.

Supervisor: RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2015, 55 p.

In our Master's thesis we deal with estimating short rate models. We use four analytical approximation formulas for the zero-coupon bond price in CKLS model, because the explicit solution of partial differential equation for the bond price is not known in this model. We work with generated data of CIR model, in which the explicit solution exists. We calibrate risk neutral parameters of CKLS model for the generated data of CIR model using the approximation formulas. The aim of this work is to find out, what impact has the rounding of generated data on the calibration, to test various approximations for the rounded data and to monitor the accuracy with which we estimate the parameters and fit the yield curves.

Keywords: interest rate, yield curve, bond, one-factor model, CKLS model, Vasicek model, CIR model, analytic approximation.

Obsah

Úvod	8
1 Základné pojmy pri oceňovaní dlhopisov	9
1.1 Časová štruktúra úrokových mier	9
1.2 Stochastický proces	11
2 Jednofaktorové modely	13
2.1 Short rate modely a oceňovanie dlhopisov	13
2.2 Vašíčkov model	15
2.3 CIR model	17
2.4 CKLS model	18
2.5 Aproximácie cien dlhopisov CKLS modelu	20
3 Presnosť vstupných dát pri kalibrácii	23
3.1 Prvá aproximačná formula	25
3.2 Druhá aproximačná formula	34
3.3 Tretia aproximačná formula	39
3.4 Štvrtá aproximačná formula	42
3.5 Reálne dáta	47
Záver	50
Zoznam použitej literatúry	51
Príloha	53

Úvod

Jednou z najdôležitejších súčastí oceňovania finančných derivátov je práve vývoj úrokových mier. Základným derivátom úrokovej miery je tzv. diskontný dlhopis. Pre potrebu čo najlepšieho predpovedania vývoja úrokových mier, a teda aj stále presnejšieho oceňovania derivátov sa modely úrokových mier neustále zdokonaľujú. Tieto modely sú definované pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice pre okamžitú úrokovú mieru. Rôzne medzibankové sadzby ako napríklad EURIBOR sú zaokruhľované na 3 desatinné miesta.

V našej práci sa budeme venovať jednofaktorovému modelu, ktorý navrhli Chan, Karolyi, Longstaff a Sanders (CKLS) s volatilitou úmernou mocnine krátkodobej úrokovej miery. Tento model je zovšeobecnením viacerých modelov, ako napríklad Vašíčkovho modelu s konštantnou volatilitou alebo Cox-Ingersoll-Rossovho (CIR) modelu s volatilitou úmernou druhej odmocnine krátkodobej úrokovej miery. Pre tieto modely vieme cenu dlhopisu a teda aj časovú štruktúru úrokových mier (výnosové krivky) vyjadriť v explicitnom tvare. Pre ostatné modely, ako aj pre CKLS model, ktorému sa budeme venovať, je potrebné hľadať aproximáciu.

V diplomovej práci sa v prvých dvoch kapitolách venujeme teórii, kde popisujeme základné pojmy, stochastický kalkulus, modely ako aj metódy kalibrácie. V poslednej tretej kapitole sme testovali na simulovaných dátach CIR modelu presnosť aproximačných formúl pre cenu dlhopisu v CKLS modely. Nakalibrovaný CKLS model ako aj jeho parametre sme porovnali s nasimulovanými CIR dátami. Presnosť týchto formúl sme ďalej testovali na dátach, ktoré sme zaokrúhlili na 5 desatinných miest. Výsledky pre tieto aproximácie sme potom porovnávali. Na konci poslednej kapitoly sme aproximovali ročné reálne dáta.

1 Základné pojmy pri oceňovaní dlhopisov

V tejto kapitole sa budeme venovať časovej štruktúre úrokových mier. Úroková miera je nevyhnutná pri oceňovaní finančných derivátov. Taktiež definujeme stochastický kalkulus, ktorý využijeme pri oceňovaní dlhopisov. Vysvetlíme pojem okamžitej úrokovej miery a výnosových kriviek. Čerpali sme najmä z [9], [17].

1.1 Časová štruktúra úrokových mier

Dlhopis (cenný papier) je derivát úrokovej miery, ktorý držiteľovi v čase splatnosti (maturity) T prinesie dohodnutú sumu (nominálnu hodnotu) a vo vopred dohodnutých obdobiach bude vyplácať výnosy (kupóny). Nech má dlhopis nominálnu hodnotu 1 a nevypláca kupóny - Bezkupónový dlhopis. Ďalej nech $P(t, T)$ je cena dlhopisu v čase t , ak jeho maturita je v čase T a $R(t, T)$ je úroková miera s maturitou T v čase t .

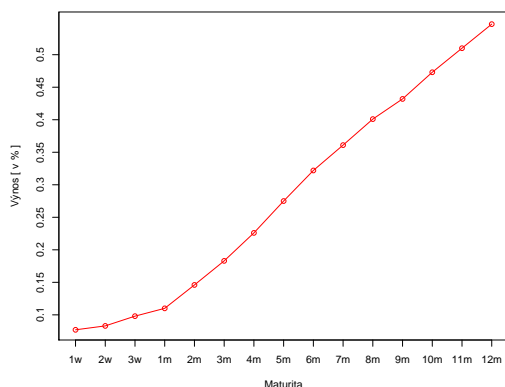
Potom pre cenu dlhopisu platí:

$$P(t, T) = \exp^{-R(t, T)(T-t)}. \quad (1)$$

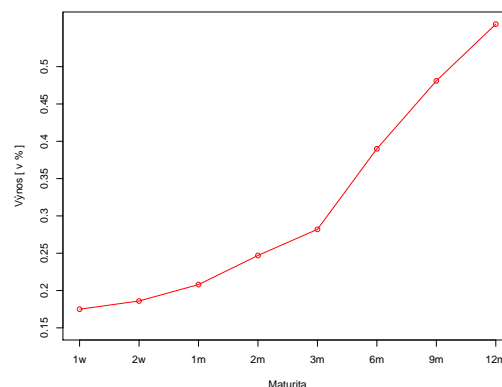
Časovú štruktúru úrokových mier dostaneme zo vzťahu (1) vyjadrením $R(t, T)$:

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{(T-t)}. \quad (2)$$

Časová štruktúra úrokových mier (výnosová krivka) je závislosť úrokových mier od maturity príslušného dlhopisu. Príklady výnosových kriviek sú na obrázkoch 1 a 2.



Obr. 1: Výnosová krivka zo dňa 10.12.2012. Zdroj [4].



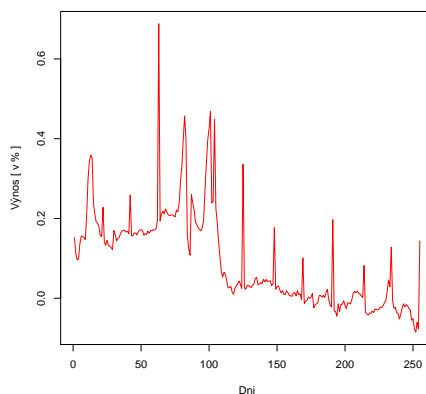
Obr. 2: Výnosová krivka zo dňa 10.01.2014. Zdroj [4].

Začiatkom výnosovej krivky je okamžitá úroková miera (short-rate) $r(t)$ a je to úroková miera pre dlhopis s okamžitou splatnosťou. Vyjadríme ju ako limitu zo vzťahu (2), kde $T \rightarrow t^+$:

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T) = R(t, t). \quad (3)$$

Je to úroková miera na veľmi krátky čas (nekonečne krátky), ktorá sa aproximuje úrokovou mierou s krátkou dobou do splatnosti. Takouto úrokovou mierou je EONIA (Euro Overnight Index Average), no pre jej veľké fluktuácie sa miesto nej používajú úrokové miery s dobou do splatnosti napríklad 1 mesiac.

Obr. 3: Vývoj sadzby EONIA počas roku 2014. Zdroj: [4].



1.2 Stochastický proces

Základným nástrojom, ktorý je využívaný na popísanie stochastického vývoja ceny derivátu je Markovov proces. Špeciálnym typom Markovovho procesu je Wienerov proces, ktorého zovšeobecnením je Brownov pohyb. V tejto časti definujeme tieto pojmy a navyše uvedieme Itóovu lemu, ktorá je nevyhnutná pri odvodení parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu a umožňuje nám počítať diferenciál náhodných funkcií.

Definícia 1.1. *Stochastický proces je t - parametrický systém náhodných premenných $\{X(t), t \in I\}$, kde I je interval alebo diskretná množina.*

Definícia 1.2. *Markovov proces je náhodný proces, kde pre danú hodnotu $X(s)$, nasledujúce hodnoty $X(t)$ pre $t > s$ môžu závisieť len od hodnoty $X(s)$, nie od predchádzajúcich hodnôt $X(v)$, $v < s$.*

Definícia 1.3. *Wienerov proces $\{W(t), t \geq 0\}$ je náhodný proces, pre ktorý platí:*

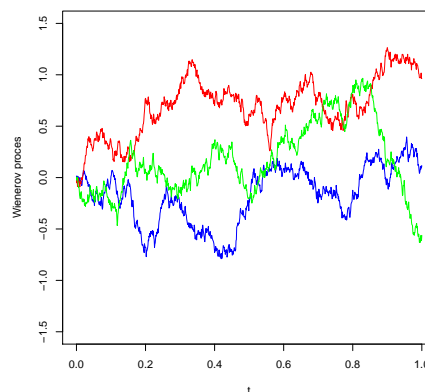
(i) $W(0) = 0$.

(ii) *prírastky $W(t + \Delta) - W(t) \sim N(0; \Delta)$.*

(iii) *prírastky $W(t_1) - W(t_0)$, $W(t_2) - W(t_1)$, ..., $W(t_k) - W(t_{k-1})$ sú nezávislé pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$.*

(iv) *trajektórie sú spojité.*

Obr. 4: Simulácie Wienerovho procesu



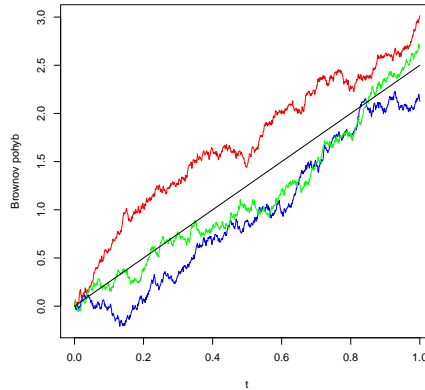
Definícia 1.4. *Brownov pohyb:*

$$x(t) = \mu t + \sigma w(t), \quad (4)$$

kde $w(t)$ je Wienerov proces.

Poznamenajme, že Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ je Wienerov proces. Na obrázku 4 sú tri realizácie Wienerovho procesu a na obrázku 5 sú tri realizácie Brownovho pohybu s parametrami $\mu = 2.5$ a $\sigma = 0.6$.

Obr. 5: Simulácie Brownovho pohybu



Lema 1.5. (*Itóova lema*). *Nech $f(x, t)$ je hladká funkcia dvoch premenných x, t , pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice:*

$$dx(t) = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw(t), \quad (5)$$

kde $\{w(t), t \geq 0\}$ je Wienerov proces. Prvý diferenciál funkcie f potom je:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt, \quad (6)$$

a teda funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dw, \quad (7)$$

V [17] sa nachádza dôkaz.

2 Jednofaktorové modely

V tejto kapitole sa budeme zaoberať jednofaktorovými short-rate modelmi ako sú Vašíčkov model, Coxov-Ingersollov-Rossov model (ďalej CIR model) a Chanov-Karolyiov-Longstaffov-Sandersov model (ďalej CKLS model). Vysvetlíme čo je to mean reversion proces a jeho vlastnosti. Vyjadríme taktiež explicitné ceny dlhopisov vo Vašíčkovom a CIR modely. Zavedieme pojem zmeny miery a analytické aproximačné formule pre cenu dlhopisu v CKLS modeli, [2], [9], [13], [15], [17].

2.1 Short rate modely a oceňovanie dlhopisov

Na modelovanie short rate $r = r(t)$ používame stochastickú diferenciálnu rovnicu:

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw(t), \quad (8)$$

kde $\mu(r, t)$ reprezentuje trend resp. drift procesu a $\sigma(r, t)$ reprezentuje stochastické fluktuácie procesu (v okolí trendovej zložky).

Mean reversion model([2],[17])

Je to model, pri ktorom sa r približuje k dlhodobu rovnovážnej hodnote. Teda drift stochastickej diferenciálnej rovnice bude zmenený a jej predpis bude:

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma(r)dw, \quad (9)$$

kde $\kappa, \theta > 0$ sú konštanty, je nazývaný aj Ornstein-Uhlenbeckov proces. V ďalších kapitolách sa budeme zaoberať práve mean reversion modelmi a popíšeme si tri modely, ktorých spoločnou stochastickou diferenciálnou rovnicou bude:

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma r^\gamma dw, \quad (10)$$

pričom

- pre Vašíčkov model je konštantná volatilita $\sigma(r, t) = \sigma$, a teda $\gamma = 0$,
- pre CIR model je volatilita v tvare $\sigma(r, t) = \sigma\sqrt{r}$, a teda $\gamma = 1/2$,
- pre CKLS model je volatilita vo všeobecnom tvare $\sigma(r, t) = \sigma r^\gamma$.

a teda Vašíčkov model a CIR model sú špeciálne prípady CKLS modelu.

Teraz odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu. Postupovať budeme podľa [17]. V prvom kroku z Itóovej lemy dostávame:

$$\begin{aligned} dP &= \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu(r, t) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2(r, t) \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \sigma(r, t) \frac{\partial P}{\partial r} dw = \\ &= \mu_D(r, t) dt + \sigma_D(r, t) dw, \end{aligned} \quad (11)$$

kde $\mu_D(r, t)$ označuje drift ceny dlhopisu, $\sigma_D(r, t)$ je volatilita ceny dlhopisu.

Majme ďalej portfólio, ktoré sa skladá z jedného dlhopisu s maturitou T_1 a s Δ dlhopisov s maturitou T_2 .

Hodnota π tohto portfólia je:

$$\pi = P(r, t, T_1) + \Delta P(r, t, T_2). \quad (12)$$

A teda jeho zmena $d\pi$ je:

$$\begin{aligned} d\pi &= dP(r, t, T_1) + \Delta dP(r, t, T_2) = \\ &= (\mu_D(r, t, T_1) + \Delta \mu_D(r, t, T_2)) dt + (\sigma_D(r, t, T_1) + \Delta \sigma_D(r, t, T_2)) dw. \end{aligned} \quad (13)$$

Ďalej chceme získať bezrizikové portfólio, čiže sa zbavíme stochastickej časti voľbou pomeru medzi počtami dlhopisov Δ tak, že platí:

$$\Delta = - \frac{\sigma_D(r, t, T_1)}{\sigma_D(r, t, T_2)}. \quad (14)$$

Ostala nám iba deterministická časť portfólia:

$$d\pi = \left(\mu_D(r, t, T_1) - \frac{\sigma_D(r, t, T_1)}{\sigma_D(r, t, T_2)} \mu_D(r, t, T_2) \right) dt. \quad (15)$$

Vylúčme ďalej možnosť arbitráže, a teda výnos portfólia sa musí rovnať okamžitej bezrizikovej úrokovej miere r . Dostávame:

$$r\pi = \mu_D(r, t, T_1) - \frac{\sigma_D(r, t, T_1)}{\sigma_D(r, t, T_2)} \mu_D(r, t, T_2). \quad (16)$$

Dosadíme hodnotu portfólia π a pomeru Δ :

$$r \left(P(r, t, T_1) - \frac{\sigma_D(r, t, T_1)}{\sigma_D(r, t, T_2)} P(r, t, T_2) \right) = \mu_D(r, t, T_1) - \frac{\sigma_D(r, t, T_1)}{\sigma_D(r, t, T_2)} \mu_D(r, t, T_2). \quad (17)$$

Musí platiť rovnosť:

$$\frac{\mu_D(r, t, T_1) - rP(r, t, T_1)}{\sigma_D(r, t, T_1)} = \frac{\mu_D(r, t, T_2) - rP(r, t, T_2)}{\sigma_D(r, t, T_2)}. \quad (18)$$

Teda pre ľubovoľnú maturitu je splnená identita funkciou $\lambda(r, t)$, tzv. trhová cena rizika:

$$\lambda(r, t) = \frac{\mu_D(r, t, T) - rP(r, t, T)}{\sigma_D(r, t, T)}. \quad (19)$$

Nakoniec dosadíme funkcie μ_D a σ_D do (19) a dostávame PDR pre cenu dlhopisu $P(r, t, T)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu(r, t) - \lambda(r, t)\sigma(r, t)) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2(r, t)}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0. \quad (20)$$

V dobe splatnosti je cena dlhopisu rovná jednotke a teda terminálová podmienka má tvar $P(r, T, T) = 1$ pre každé $r > 0$.

2.2 Vašíčkov model

Vašíčkov model [19] je najjednoduchší short-rate model, ktorý pripúšťa s nenulovou pravdepodobnosťou aj záporné úrokové miery. Stochastická diferenciálna rovnica má tvar:

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma dw, \quad (21)$$

ďalej trhová cena rizika $\lambda(r, t) = \lambda$ a $\tau = T - t$ potom z rovnice (11) PDR pre cenu dlhopisu má tvar:

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad (22)$$

spĺňa začiatočnú podmienku $P(r, 0) = 1$ pre každé $r > 0$.

Explicitné riešenie pre cenu dlhopisu, hľadáme podľa [17] v tvare:

$$P(r, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r}, \quad (23)$$

a teda funkcie A , B budú spĺňať začiatočné podmienky $A(0) = 1$ a $B(0) = 0$.

Najprv si vypočítame derivácie vystupujúce v (22):

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = (\dot{A} - A\dot{B}r) e^{-Br}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -ABe^{-Br}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = AB^2e^{-Br}, \quad (26)$$

a potom ich dosadíme do (22):

$$\left(A\dot{B}r - \dot{A} \right) - (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma) AB + \frac{\sigma^2}{2} AB^2 - rA = 0. \quad (27)$$

Teraz po preskupení a spojení členov obsahujúcich r a tých čo r neobsahujú máme:

$$rA \left(\dot{B} + \kappa B - 1 \right) + \left(-\dot{A} - (\kappa\theta - \lambda\sigma) AB + \frac{\sigma^2}{2} AB^2 \right) = 0. \quad (28)$$

Táto rovnosť je splnená pre všetky r ak sú obe zátvorky rovné nule:

$$\begin{aligned} \dot{B} + \kappa B - 1 &= 0, \\ -\dot{A} - (\kappa\theta - \lambda\sigma) AB + \frac{\sigma^2}{2} AB^2 &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Pre B máme obyčajnú diferenciálnu rovnicu so začiatočnou podmienkou $B(0) = 0$ v tvare:

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}. \quad (30)$$

Ďalej integrovaním rovnice pre A dostávame:

$$\ln A = \int \frac{d \ln A}{d\tau} = \int \frac{\sigma^2}{2} B^2 - (\kappa\theta - \lambda\sigma) B d\tau. \quad (31)$$

Vypočítaním integrálu, dosadením funkcie B a využitím začiatkovej podmienky $A(0) = 1$ dostávame:

$$\ln A(\tau) = (B - \tau) R_\infty - \frac{\sigma^2 B^2}{4\kappa}, \quad (32)$$

kde

$$R_\infty = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}. \quad (33)$$

Vo Vašíčkovom modeli časovú štruktúru úrokových mier dostávame zo vzťahu (2).

Platí:

$$\begin{aligned} R(t, T) &= -\frac{\ln A(\tau)}{\tau} + \frac{B(\tau)}{\tau} r \\ &= \left(1 - \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau}\right) R_\infty + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3\tau} (1 - e^{-\kappa\tau})^2 + \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau} r. \end{aligned} \quad (34)$$

2.3 CIR model

CIR model [2] už nepripúšťa záporné úrokové miery pretože volatilita CIR modelu je $\sigma\sqrt{r}$. Stochastická diferenciálna rovnica má tvar:

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma\sqrt{r} dw, \quad (35)$$

ďalej trhová cena rizika $\lambda(r, t) = \lambda\sqrt{r}$ a $\tau = T - t$ potom z rovnice (11) PDR pre cenu dlhopisu má tvar:

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma r) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2 r}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad (36)$$

spĺňa začiatočnú podmienku $P(r, 0) = 1$ pre každé $r > 0$.

Explicitné riešenie pre cenu dlhopisu je v tvare:

$$P(r, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r}, \quad (37)$$

Opäť nájdeme riešenie tejto rovnice, pričom budeme sledovať postup z [17].

$$A(\tau) = \left(\frac{2\phi_2 e^{(\phi_1 + \phi_2)\tau/2}}{(\phi_1 + \phi_2)(e^{\phi_2\tau} - 1) + 2\phi_2} \right)^{\phi_3}, \quad (38)$$

$$B(\tau) = \frac{2(e^{\phi_2\tau} - 1)}{(\phi_1 + \phi_2)(e^{\phi_2\tau} - 1) + 2\phi_2}, \quad (39)$$

kde

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \kappa + \lambda\sigma, \\ \phi_2 &= \sqrt{\phi_1^2 + 2\sigma^2}, \\ \phi_3 &= \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Rovnako ako vo Vašíčkovom modeli časovú štruktúru úrokových mier dostávame zo vzťahu (2). Platí:

$$\begin{aligned} R(t, T) &= -\frac{\ln A(\tau)}{\tau} + \frac{B(\tau)}{\tau}r \\ &= -\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2\tau} \ln \left(\frac{2\phi_2 e^{(\phi_1 + \phi_2)\tau/2}}{(\phi_1 + \phi_2)(e^{\phi_2\tau} - 1) + 2\phi_2} \right) + \frac{1}{\tau} \frac{2(e^{\phi_2\tau} - 1)}{(\phi_1 + \phi_2)(e^{\phi_2\tau} - 1) + 2\phi_2} r. \end{aligned} \quad (40)$$

2.4 CKLS model

Zovšeobecnením prvých dvoch spomínaných modelov je CKLS model [6]. Stochastická diferenciálna rovnica má tvar:

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma r^\gamma dw, \quad (41)$$

môžeme ju napísať aj v tvare:

$$dr = (\alpha + \beta r) dt + \sigma r^\gamma dw, \quad (42)$$

kde $\alpha = \kappa\theta$ a $\beta = -\kappa$.

Zmena reálnej na rizikovo neutrálnu mieru

Máme dve možnosti akými môžeme vyjadriť stochastickú diferenciálnu rovnicu pre popis okamžitej úrokovej miery. Prvou je vyjadrenie v reálnej pravdepodobnostnej miere, ako sme to robili doteraz. Druhou a pre oceňovanie derivátov výhodnejšou možnosťou je vyjadrenie v rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere. Takto sa „zbavíme“ jedného parametra.

Konkrétnejšie sa problematike zmeny miery zaoberá napríklad knižka [9]. Zjednodušené vieme zmenu miery opísať ako prechod od vychýleného Wienerovho procesu v reálnej miere P k štandardnému Wienerovmu procesu v rizikovo neutrálnej miere Q . Podľa Girsanovovej vety z [9] platí:

$$d\tilde{w}(t) = dw(t) + \lambda(r)dt, \quad \text{a teda} \quad dw(t) = d\tilde{w}(t) - \lambda(r)dt, \quad (43)$$

pričom zápis v rizikovo neutrálnej miere označuje vlnovka. Rovnicu (42) v miere P vieme napísať v miere Q ako:

$$dr = (\alpha + \beta r - \lambda \sigma r^\gamma) dt + \sigma r^\gamma d\tilde{w}, \quad (44)$$

Pre drift teda platí:

$$(\text{rizikovo neutrálny drift}) = (\text{reálny drift}) - (\text{trhová cena rizika}) * (\text{volatilita}).$$

Vzťah (44) vieme prepísať na:

$$dr = (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} r) dt + \sigma r^\gamma d\tilde{w}, \quad (45)$$

kde trhová cena rizika udáva závislosť medzi reálnymi a rizikovo neutrálnymi parametrami

$$\lambda(r) = \frac{(\alpha - \tilde{\alpha}) + (\beta - \tilde{\beta})r}{\sigma r^\gamma}. \quad (46)$$

Pre Vašíčkov model máme teda v rizikovo neutrálnej miere Q stochastickú diferenciálnu rovnicu tvaru:

$$dr = (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} r) dt + \sigma d\tilde{w}, \quad (47)$$

kde $\tilde{\alpha} = \kappa\theta - \lambda\sigma$ a $\tilde{\beta} = -\kappa$.

Pre CIR model dostávame v rizikovo neutrálnej miere Q stochastickú diferenciálnu rovnicu tvaru:

$$dr = (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} r) dt + \sigma\sqrt{r}d\tilde{w}, \quad (48)$$

kde $\tilde{\alpha} = \kappa\theta$ a $\tilde{\beta} = -\kappa - \lambda\sigma$.

Pre jednoduchosť budeme ďalej značiť zápis v rizikovo neutrálnej miere bez vlnovky.

2.5 Aproximácie cien dlhopisov CKLS modelu

Približné analytické riešenia pre ceny dlhopisov navrhli Choi a Wirjanto v článku [7]. Okamžitá úroková miera r v rizikovo neutrálnej miere CKLS modelu je daná stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dr = (\alpha + \beta r) dt + \sigma r^\gamma dw. \quad (49)$$

Cena dlhopisu s časom do doby splatnosti $\tau = T - t$ pre CKLS model je potom zo vzťahu (20) a vzťahu medzi reálnymi a rizikovo neutrálnymi parametrami riešením parciálnej diferenciálnej rovnice:

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\alpha + \beta r) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad (50)$$

s podmienkou $P(r, 0) = 1$ pre každé $r > 0$.

Vo všeobecnosti neexistuje riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice (50) pre cenu dlhopisu. Existuje iba pri voľbe parametra $\gamma = 0$ (Vašíčkov model, kapitola 2.2) a $\gamma = 1/2$ (CIR model, kapitola 2.3).

Vo Vašíčkovom modeli, keď $\gamma = 0$ v rovnici (50), existuje explicitné riešenie ceny dlhopisu $P_{vas}(\tau; r)$ v tzv. uzavretej forme:

$$\ln P_{vas}(\tau, r) = \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} \right) \left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right) + \frac{\sigma^2}{4\beta^3} (1 - e^{\beta\tau})^2 + \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} r. \quad (51)$$

Substitúciou volatility $\sigma r^{2\gamma}$ za σ v riešení P_{vas} z (51) dostávame prvú aproximáciu ceny dlhopisu v CKLS modeli P_{ap1} :

$$\ln P_{ap1}(\tau, r) = \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{2\beta^2} \right) \left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right) + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{4\beta^3} (1 - e^{\beta\tau})^2 + \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} r. \quad (52)$$

Táto aproximácia bola navrhnutá v článku [16], v ktorom je ďalej vyjadrená chyba aproximácie vo forme vety.

Veta 2.1 (16, Theorem 4). *Nech $\ln P_{ap1}$ je riešenie aproximácie dané rovnicou (52) a $\ln P_{ex}$ je presná cena dlhopisu daná rovnicou (50). Potom*

$$\ln P_{ap1}(\tau, r) - \ln P_{ex}(\tau, r) = c_4(r)\tau^4 + O(\tau^4),$$

ak $\tau \rightarrow 0^+$ kde

$$c_4(r) = -\frac{1}{24}\gamma r^{2\gamma-2}\sigma^2[2\alpha r + 2\beta r^2 - (2\gamma - 1)r^{2\gamma}\sigma^2].$$

Ďalšou aproximáciou, ktorá bola navrhnutá v literatúre je $\ln P_{ap2}$. Pridávame taktiež chybu tejto aproximácie.

Veta 2.2 (15, Theorem 2,3). *Majme analytické približné riešenie $\ln P_{ap2}$ dané rovnosťou:*

$$\begin{aligned} \ln P_{ap2}(\tau, r) = & -rB + \frac{\alpha}{\beta}(\tau - B) + (r^{2\gamma} + q\tau) \frac{\sigma^2}{4\beta} \left[B^2 + \frac{2}{\beta}(\tau - B) \right] \\ & - q \frac{\sigma^2}{8\beta^2} \left[B^2(2\beta\tau - 1) - 2B \left(2\tau - \frac{3}{\beta} \right) + 2\tau^2 - \frac{6\tau}{\beta} \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

kde

$$q(r) = \gamma(2\gamma - 1)\sigma^2 r^{2(2\gamma-1)} + 2\gamma r^{2\gamma-1}(\alpha + \beta r)$$

a

$$B(\tau) = (e^{\beta\tau} - 1)/\beta$$

Nech ďalej $\ln P_{ex}$ je presná cena dlhopisu daná rovnicou (50). Potom

$$\ln P_{ap2}(\tau, r) - \ln P_{ex}(\tau, r) = c_5(r)\tau^5 + O(\tau^5),$$

ak $\tau \rightarrow 0^+$ kde

$$\begin{aligned} c_5(r) = & -\frac{1}{120}\gamma r^{2(\gamma-2)}\sigma^2 \left[2\alpha^2(2\gamma - 1)r^2 + 4\beta^2\gamma r^4 - 8r^{3+2\gamma}\sigma^2 \right. \\ & + 2\beta(1 - 5\gamma + 6\gamma^2)r^{2(1+\gamma)}\sigma^2 + \sigma^4 r^{4\gamma}(2\gamma - 1)^2(4\gamma - 3) \\ & \left. + 2\alpha r \left(\beta(4\gamma - 1)r^2 + (2\gamma - 1)(3\gamma - 2)r^{2\gamma}\sigma^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (54)$$

Lepšia presnosť však prináša zložitejší predpis. Takto je to aj pri poslednej navrhovanej aproximácii z článku [15], ktorou je $\ln P_{ap3}$.

Veta 2.3 (15, Theorem 4). *Nech $\ln P_{ex}$ je presná cena dlhopisu daná rovnicou (50). Definujme aproximáciu $\ln P_{ap3}$ danú formulou:*

$$\ln P_{ap3}(\tau, r) = \ln P_{ap2}(\tau, r) - c_5(r)\tau^5 - c_6(r)\tau^6, \quad (55)$$

kde $\ln P_{ap2}$ je daná rovnicou (53), $c_5(r)$ je daná rovnicou (54) vo Vete (2.2) a

$$c_6(r) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \sigma^2 r^{2\gamma} \ddot{c}_5(r) + (\alpha + \beta r) \dot{c}_5(r) - k_5(r) \right),$$

pričom \dot{c}_5 a \ddot{c}_5 sú prvou a druhou deriváciou c_5 podľa r a k_5 má tvar:

$$\begin{aligned} k_5(r) = & -\frac{1}{120} \gamma r^{2(\gamma-2)} \sigma^2 \left[6\alpha^2 \beta (2\gamma - 1) r^2 + 12\beta^3 \gamma r^4 - 10(1 - 2\gamma)^2 r^{1+4\gamma} \sigma^4 \right. \\ & + 6\beta^2 \sigma^2 (1 - 5\gamma + 6\gamma^2) r^{2(1+\gamma)} \\ & + \beta \sigma^2 r^{2\gamma} (-10(5 + 2\gamma) r^3 + 3(1 - 2\gamma)^2 (4\gamma - 3) r^{2\gamma} \sigma^2) \\ & \left. + 2\alpha r \left(3\beta^2 (4\gamma - 1) r^2 + 3\beta (2 - 7\gamma + 6\gamma^2) r^{2\gamma} \sigma^2 - 5(2\gamma - 1) r^{2\gamma+1} \sigma^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

Potom rozdiel medzi aproximáciou $\ln P_{ap3}$ danou rovnicou (55) a presným riešením $\ln P_{ex}$ splňa

$$\ln P_{ap3}(\tau, r) - \ln P_{ex}(\tau, r) = O(\tau^6),$$

ak $\tau \rightarrow 0^+$.

3 Presnosť vstupných dát pri kalibrácii

Reálne dáta (napr. EURIBOR) sú kótované na tri desatinné miesta. Sú uvádzané v percentách na stránke [4] ako vidíme na obrázku 6. Preto budeme zaokrúhľovať dáta vyjadrené v tvare desatinných čísel na päť desatinných miest. V tejto kapitole budeme na simulovaných dátach testovať aproximácie a sledovať, ako dobre fitujeme výnosové krivky pri takomto zaokrúhlení.

Ako sme už spomenuli, budeme pracovať so simulovanými dátami, a to konkrétne s vygenerovanými dátami CIR modelu. Pre tieto dáta ďalej vygenerujeme výnosové krivky a následne budeme kalibrovať CKLS model pomocou rôznych aproximačných formúl (viď podkapitoly 3.1, 3.2). Programujeme v programe R.

Obr. 6: Euribor.Zdroj [20].

Current rate (by day)	
04-10-2015	0.079%
04-09-2015	0.081%
04-08-2015	0.081%
04-07-2015	0.085%
04-02-2015	0.086%
04-01-2015	0.088%
03-31-2015	0.087%
03-30-2015	0.087%
03-27-2015	0.088%
03-26-2015	0.089%

Najprv popíšeme generovanie CIR modelu. Ako prvé si nastavíme generátor náhodných čísel na hodnotu napr. 31 a zvolíme premenné podľa článku [7]:

```
set.seed(31)
# parametre modelu
alpha_exact = 0.00315;
beta_exact = -0.0555;
sigma_exact = 0.0894;

n = 252/4; # štvrtročné dáta
tau = (1:12)/12; # maturity 1-12 mesiacov
```

```
m = length(tau);
dt = 1/252;      #časový krok
```

Ďalej vygenerujeme okamžitú úrokovú mieru v CIR modeli pomocou Euler-Marujamovej diskretizácie:

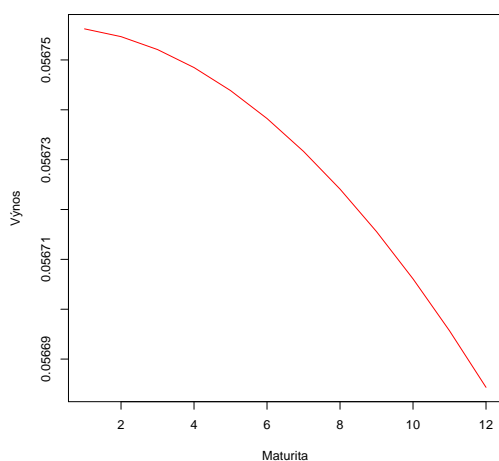
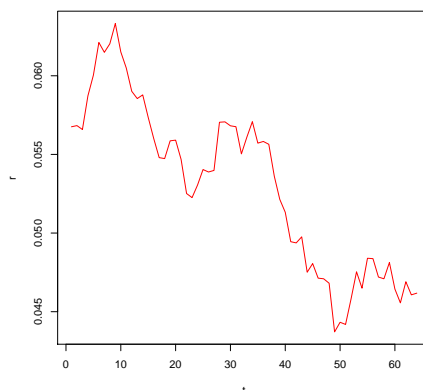
```
# generovanie short-rate CIR modelu
r = rep(0,n);
r[1] = -alpha_exact/beta_exact
for (i in 1:n) {
  dw = sqrt(dt)*rnorm(1)
  dr = (alpha_exact+beta_exact*r[i])*dt+sigma_exact*sqrt(r[i])*dw
  r[i+1] = max(0,r[i]+dr)
}
```

Časovú štruktúru úrokových mier podľa (40) teraz naprogramujeme takto:

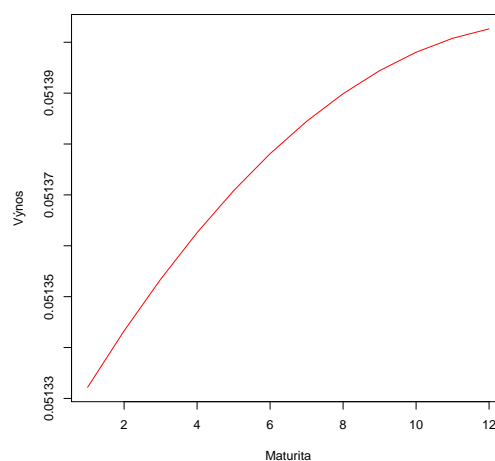
```
# generovanie výnosových kriviek CIR modelu
yields=matrix(nrow=n,ncol=m);

theta=sqrt(beta_exact^2+2*sigma_exact^2);
for (i in 1:n){
  for (j in 1:m){
    fB=-2*(exp(theta*tau[j])-1)/((theta-beta_exact)*...
      (exp(theta*tau[j])-1)+2*theta);
    fA=(2*alpha_exact/(sigma_exact^2))*...
      log(2*theta*exp((theta-beta_exact)*...
      tau[j]/2)/((theta-beta_exact)*...
      (exp(theta*tau[j])-1)+2*theta));
    lnP=fA+fB*r[i];
    yields[i,j]=-lnP/tau[j];
  }
}
```

Trhová cena rizika berieme nulovú, tzn. reálna a rizikovo neutrálna miera sú rovnaké.

Obr. 7: Priebeh r 

Obr. 8: Výnosová krivka CIR modelu v čase 1



Obr. 9: Výnosová krivka CIR modelu v čase 40

3.1 Prvá aproximačná formula

Riešením parciálnej diferenciálnej rovnice (50), ak ide o Vašíčkov model, teda $\gamma = 0$ má riešenie P_{vas} tvar (51) po substitúcii $\sigma r^{2\gamma}$ za σ v riešení P_{vas} dostávame prvú aproximáciu ceny dlhopisu v CKLS modeli P_{ap1} danú rovnicou (52).

V tejto časti budeme kalibrovať CKLS model s aproximáciou ceny dlhopisu (52) pre simulované dáta a porovnávať takto nakalibrovaný CKLS model s CKLS modelom, ktorý bude fitovaný zo zaokrúhlených dát na 5 desatinné miesta. Opäť uvádzame časti R-kového kódu, pričom c_0, c_1 a c_2 sú členy z rovnice (58) a využívame funkciu $\mathbf{lm}()$ popísané v [8]. Táto implementácia pomocou lineárnej regresie je podľa [18], v pôvodnom

článku [16] bola trochu iná.

```

# účelová funkcia
u1 = function(beta, gamma) {

y=rep(0, N);
x1=rep(0, N);
x2=rep(0, N);
weights_reg=rep(0, N);

ind=0;
for (i in 1:n){
  for (j in 1:m){
    ind=ind+1;

    c0=r[i]*(1-exp(beta*tau[j]))/beta;
    c1=((1-exp(beta*tau[j]))/beta+tau[j])/beta;
    c2aux=((1-exp(beta*tau[j]))/beta + tau[j] +...
           (1-exp(beta*tau[j]))^2/2/beta)/2/(beta^2);
    c2=(r[i]^(2*gamma))*c2aux;

    y[ind]=-c0-yields[i, j]*tau[j];
    x1[ind]=c1;
    x2[ind]=c2;

    weight_data=tau[j]^2;
    weights_reg[ind]=weight_data/(tau[j]^2);
  }
}

lmfit=lm(y ~ 0 + x1 + x2, weights=weights_reg)

sqrt(sum((lmfit$residuals*weights_reg)^2))
}

```

Budeme kalibrovať CKLS model pomocou účelovej funkcie, a teda hľadať parametre, ktoré budú minimalizovať túto funkciu. Metóda je založená na zhode teoretických a reálnych výnosových kriviek. Účelová funkcia má tvar:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \sigma, r_i) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega_{ij} (R_{ap1}(\tau_j, r_i) - R_{ij})^2, \quad (57)$$

kde R_{ij} sú výnosy s maturitou τ_j v i -tom dni, $R_{ap1}(\tau_j, r_i)$ sú výnosy pre j -tu maturitu τ_j a okamžitú úrokovú mieru r_i v i -tom dni, kde $j = 1, \dots, m$ a $i = 1, \dots, n$. ω_{ij} označujú váhy.

Optimalizujeme α a σ^2 lineárnou regresiou, ktorej kód je popísaný vyššie. Pre fixované hodnoty β a γ sa rovnica (52) za účelom regresie dá prepísať na:

$$\ln P_{ap1}(\tau, r) = c_0(\tau, r) + \alpha c_1(\tau, r) + \sigma^2 c_2(\tau, r), \quad (58)$$

kde

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} r, \\ c_1 &= \frac{1}{\beta} \left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right), \\ c_2 &= \frac{r^{2\gamma}}{2\beta^2} \left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta\tau})^2}{2\beta} \right). \end{aligned}$$

Minimalizujeme teda účelovú funkciu:

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, \sigma, r_i) &= \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega_{ij} \left[-\frac{\ln P_{ap1}(\tau_j, r_i)}{\tau_j} - R_{ij} \right]^2 \\ &= \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega_{ij} \left[\frac{-c_0(\tau, r) - \alpha c_1(\tau, r) - \sigma^2 c_2(\tau, r)}{\tau_j} - R_{ij} \right]^2 \\ &= \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} [c_0(\tau, r) + \alpha c_1(\tau, r) + \sigma^2 c_2(\tau, r) + R_{ij} \tau_j]^2, \end{aligned} \quad (59)$$

čo je úloha váženej lineárnej regresie.

Za r zobereme hodnoty short-rate CIR modelu zo začiatku tejto kapitoly. Váhy zvolíme $\omega_{ij} = \tau_j^2$, zafixujeme parametre γ , β a získame tak optimálne hodnoty α a σ^2 . Spätným dosadením týchto hodnôt do (52) dostaneme jednorozmernú optimalizačnú úlohu. Optimalizujeme vzhľadom na β vo vhodnom rozsahu parametra γ . Zo začiatku sme volili $\gamma \in (0, 5)$ pre lepšie identifikovanie minima. β sme hľadali na intervale $(-1, 1)$.

V prvom kroku urobíme jednorozmernú optimalizáciu pozdĺž účelovej funkcie. Takto získame γ a β , kód jednorozmernej optimalizácie je popísaný nižšie. Na obrázkoch 12 a 13 vidíme už konkrétne hodnoty γ pre presné a zaokrúhlené dáta. Pre tieto γ vieme jednoducho vyčísliť aj hodnoty β .

Pre takto zafixované hodnoty γ a β minimalizujeme účelovú funkciu a dostávame parametre α a σ^2 . Všetky parametre aj s hodnotami účelovej funkcie nájdeme v tabuľke 1 pre presné aj zaokrúhlené dáta. Vidíme taktiež, že β je v nami zvolenom intervale $(-1, 1)$.

```
# jednorozmerná optimalizácia
u2 = function(gamma) {
  optimize(u1, interval=c(-1,1), gamma, tol = .0000001)$objective
}

optimize(u2, interval=c(0,1), tol = .0000001)
```

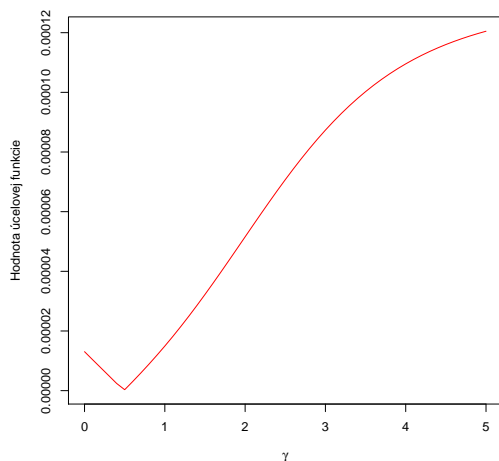
Funkcia `optimize()`, popísaná v [11], minimalizuje funkciu jednej premennej, pričom optimálna premenná je hľadaná na zvolenom intervale. Vytvorili sme teda funkciu `u2`, ktorá optimalizuje β a následne optimalizujeme funkciu `u2` a dostávame optimálnu hodnotu γ . Spätným dosadením γ do funkcie `u2` dostávame optimálnu hodnotu β .

	α	β	γ	σ	Hodnota úč. f.
Presné	0.00315	-0.05552	0.48922	0.08656	1.11e-07
Zaokrúhlené	0.00309	-0.05444	0.72647	0.1729	6.46e-05

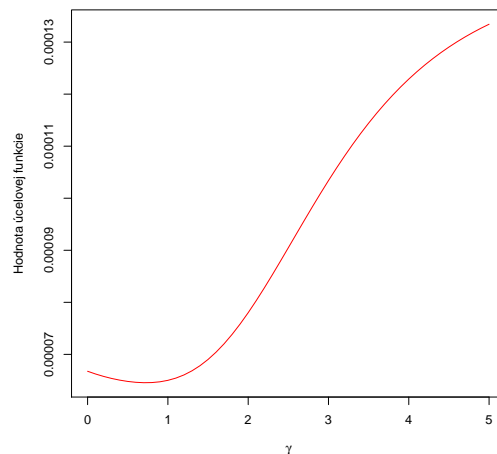
Tabuľka 1: Optimálne hodnoty α , β , γ , σ
a prislúchajúce hodnoty účelových funkcií pre presné aj zaokrúhlené dáta.

Pracovali sme so simulovanými dátami CIR modelu (teda $\gamma = 0.5$) s parametrami $\alpha = 0.00315$, $\beta = -0.0555$, $\sigma = 0.0894$. V tabuľke 1 vidíme parametre CKLS modelov, ktoré sme fitovali. Pre presné dáta sú tieto parametre takmer totožné s parametrami CIR modelu. Zaokruhlením dát na 5 desatinných miesta sa nám výrazne zmenili najmä parametre γ a σ . Na obrázkoch 14, 15, 16 a 17 sú výnosové krivky CIR modelu a nami nakalibrovaných CKLS modelov. Pre presné dáta CKLS model veľmi dobre fituje simulované dáta CIR modelu. Ako sme aj očakávali pre zaokrúhlené dáta CKLS

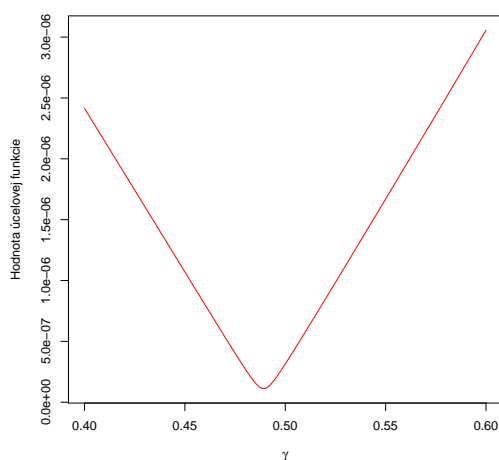
model fituje simulované dáta horšie, no stále veľmi dobre.



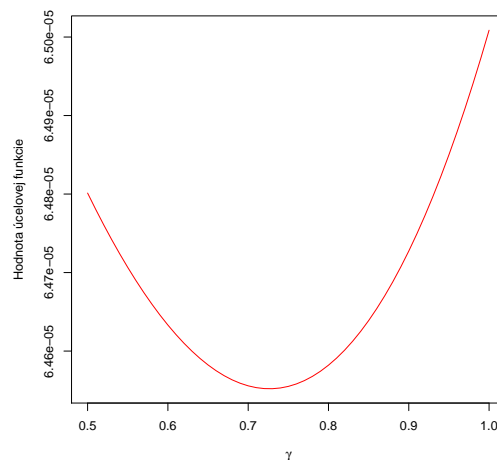
Obr. 10: Gama na intervale $(0,5)$ pre presné dáta



Obr. 11: Gama na intervale $(0,5)$ pre zaokrúhlené dáta



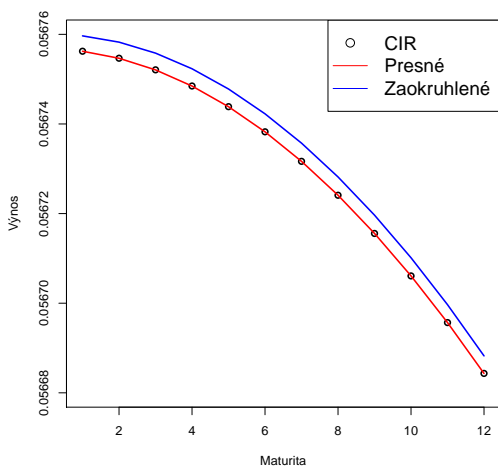
Obr. 12: Gama na zúženom intervale pre presné dáta



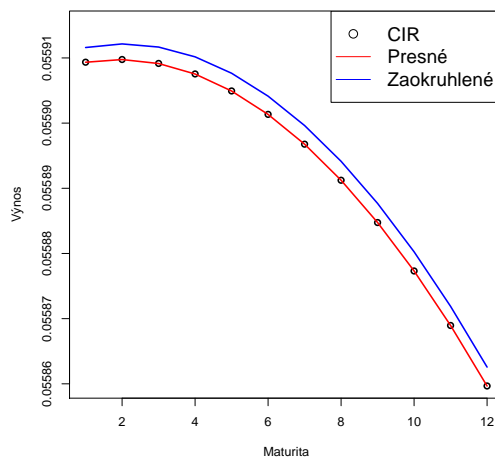
Obr. 13: Gama na zúženom intervale pre zaokrúhlené dáta

Na obrázkoch 10 a 11 sú grafy na intervale $\gamma \in (0,5)$. Vidíme, že najmenšia hodnota účelovej funkcie je nadobúdaná na intervale $\gamma \in (0,1)$ pre oba súbory dát. Po postupnom zužovaní intervalu $(0,1)$, dostávame obrázky 12 a 13.

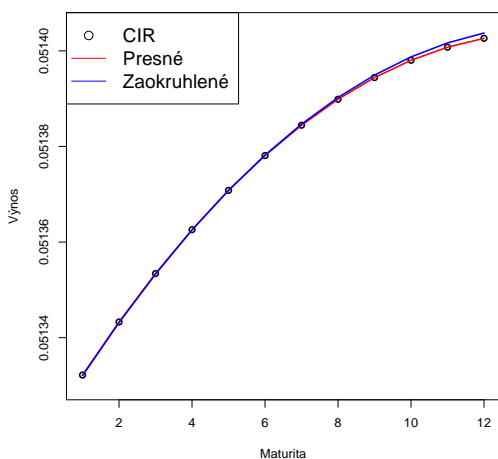
Na obrázku 12 je graf na zúženom intervale γ . Tu vidíme najmenšiu hodnotu účelovej funkcie pre $\gamma = 0.48922$. Na obrázku 13 vidíme najmenšiu hodnotu účelovej funkcie pre $\gamma = 0.72648$.



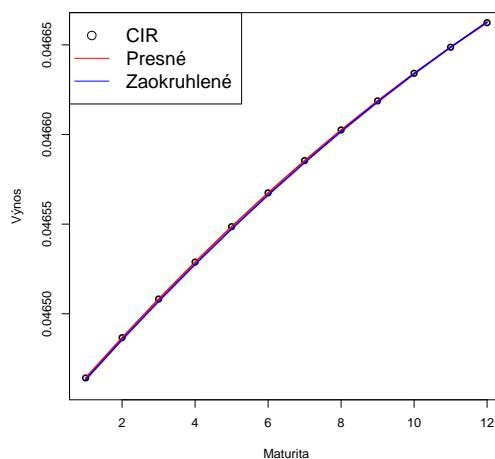
Obr. 14: Výnosové krivky v čase 1



Obr. 15: Výnosové krivky v čase 20

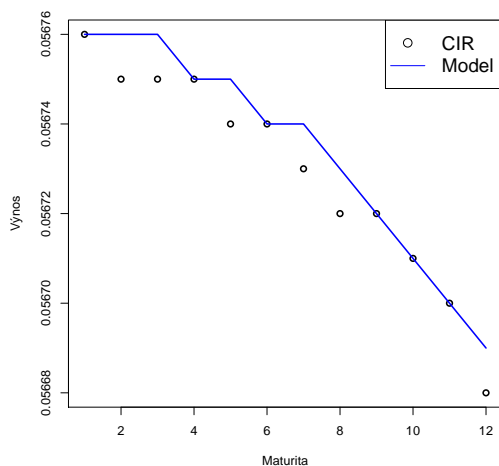


Obr. 16: Výnosové krivky v čase 40

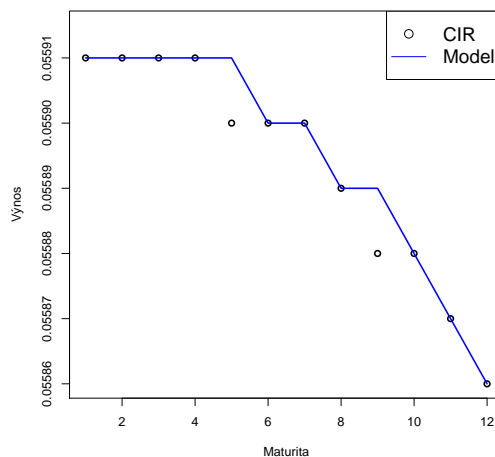


Obr. 17: Výnosové krivky v čase 60

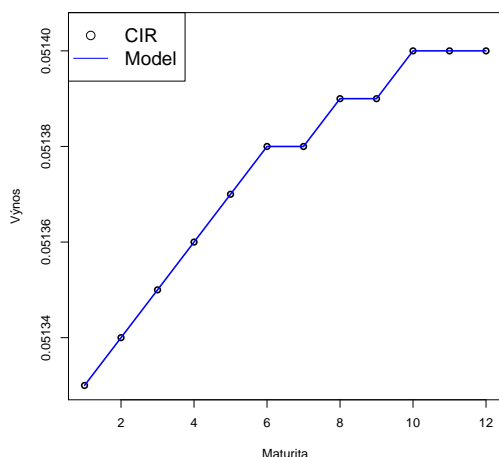
Na obrázkoch 14, 15, 16 a 17 sú výnosové krivky v rôznych časoch. Čas do splatnosti 1 mesiac až 12 mesiacov. Na obrázkoch 18, 19, 20 a 21 sú vidieť výnosové krivky zo zaokrúhlených vygenerovaných dát CIR modelu označených ako CIR a fitované výnosové krivky pre tieto dáta taktiež zaokrúhlené na 5 desatinných miest.



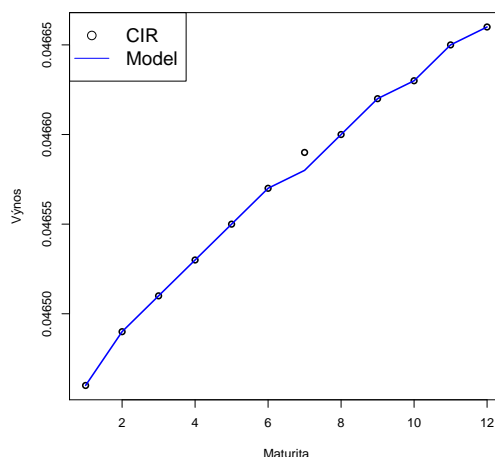
Obr. 18: Výnosové krivky v čase 1



Obr. 19: Výnosové krivky v čase 20



Obr. 20: Výnosové krivky v čase 40



Obr. 21: Výnosové krivky v čase 60

V tabuľkách 2, 3, 4, 5 môžeme vidieť, že vygenerované dáta CIR modelu sa nám líšia od prvej aproximácie až na ôsmom (resp. deviatom) desatinnom mieste. Pri zaokrúhlení na 5 desatinných miest boli nakalibrované parametre modelu α a β porovnateľné s parametrami α , β s nezaokrúhlených dát. Ale parametre γ a σ sa líšia už viditeľne. To ako sa líšia zaokrúhlené dáta od naftovaných dát vidíme opäť v tabuľkách 2 až 5. Pri zaokrúhlení na 5 desatinných miest vidíme, že tieto dáta sa líšia na šiestom desatinnom mieste od naftovaných dát.

3 PRESNOST' VSTUPNÝCH DÁT PRI KALIBRÁCI

CIR	Presné	Zaokrúhlené	CIR	Presné	Zaokrúhlené
0.05675623	0.05675623	0.05675966	0.05590935	0.05590934	0.05591160
0.05675467	0.05675466	0.05675826	0.05590976	0.05590975	0.05591215
0.05675208	0.05675207	0.05675581	0.05590916	0.05590915	0.05591167
0.05674847	0.05674846	0.05675232	0.05590755	0.05590753	0.05591017
0.05674386	0.05674385	0.05674780	0.05590494	0.05590493	0.05590765
0.05673825	0.05673825	0.05674226	0.05590134	0.05590133	0.05590414
0.05673166	0.05673166	0.05673572	0.05589677	0.05589677	0.05589963
0.05672409	0.05672410	0.05672818	0.05589124	0.05589124	0.05589414
0.05671557	0.05671557	0.05671965	0.05588475	0.05588475	0.05588768
0.05670609	0.05670610	0.05671014	0.05587732	0.05587732	0.05588026
0.05669568	0.05669568	0.05669967	0.05586895	0.05586895	0.05587188
0.05668433	0.05668432	0.05668824	0.05585967	0.05585966	0.05586257

Tabuľka 2: Výnosy v čase 1

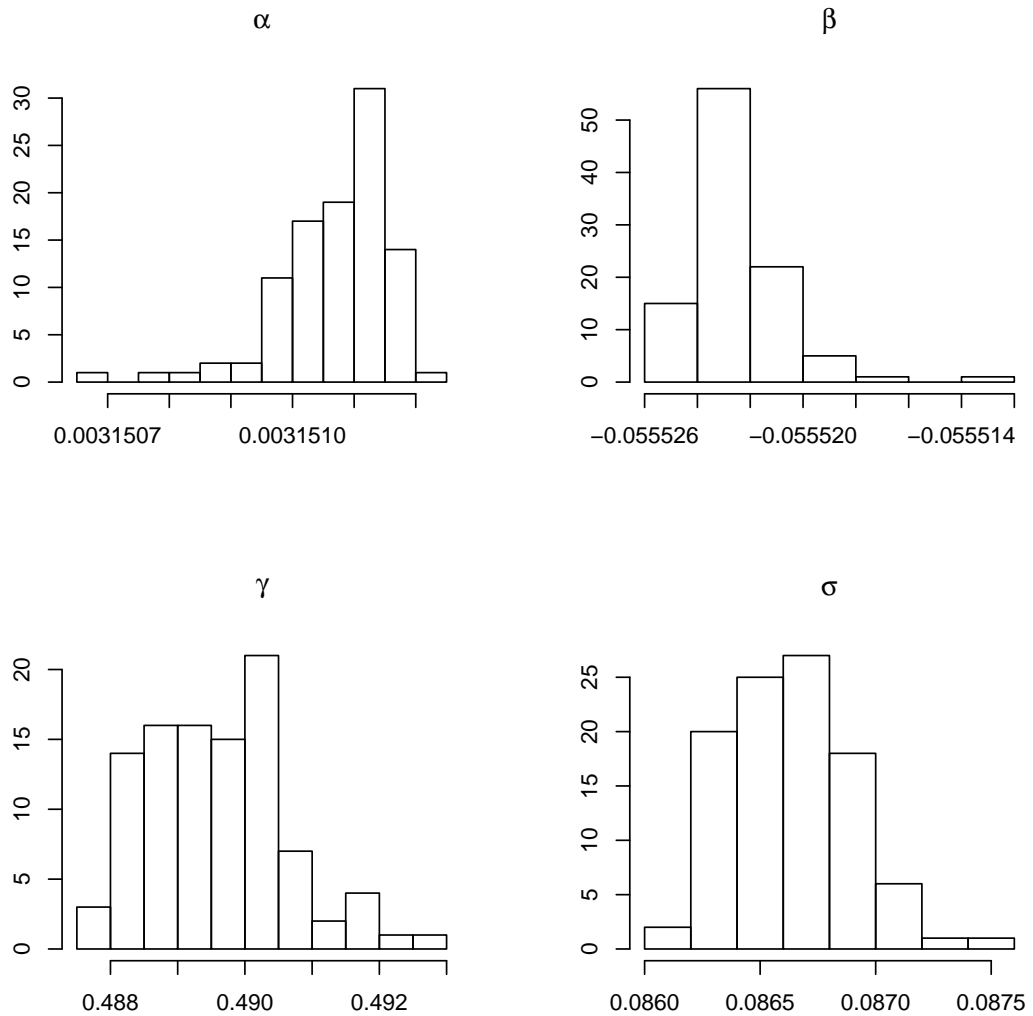
Tabuľka 3: Výnosy v čase 20

CIR	Presné	Zaokrúhlené	CIR	Presné	Zaokrúhlené
0.05133218	0.05133218	0.05133205	0.04646419	0.04646419	0.04646317
0.05134328	0.05134327	0.05134315	0.04648666	0.04648666	0.04648547
0.05135341	0.05135341	0.05135331	0.04650821	0.04650821	0.04650692
0.05136259	0.05136258	0.05136253	0.04652885	0.04652885	0.04652752
0.05137081	0.05137080	0.05137082	0.04654860	0.04654860	0.04654729
0.05137809	0.05137809	0.05137820	0.04656746	0.04656745	0.04656622
0.05138445	0.05138445	0.05138467	0.04658543	0.04658543	0.04658433
0.05138989	0.05138988	0.05139025	0.04660253	0.04660253	0.04660163
0.05139441	0.05139441	0.05139493	0.04661877	0.04661878	0.04661812
0.05139804	0.05139804	0.05139874	0.04663416	0.04663416	0.04663381
0.05140077	0.05140077	0.05140167	0.04664870	0.04664871	0.04664871
0.05140263	0.05140262	0.05140374	0.04666240	0.04666241	0.04666283

Tabuľka 4: Výnosy v čase 40

Tabuľka 5: Výnosy v čase 60

Obr. 22: Histogramy odhadov parametrov pri prvej aproximácii.



Na obrázku 22 sú histogramy odhadnutých parametrov pri 100 simuláciách CIR modelu s parametrami $\alpha = 0.00315$, $\beta = -0.0555$, $\gamma = 0.5$ a $\sigma = 0.0894$.

3.2 Druhá aproximačná formula

Ako druhú aproximáciu ceny dlhopisu v CKLS modeli sme použili P_{ap2} , ktorá je popísaná vo Vete 2.2. Táto formula obsahuje až štyri parametre, ktoré chceme naraz optimalizovať a nevieme ju napísať ani ako pri predchádzajúcej aproximácii a teda použiť lineárnu regresiu. Preto budeme pri tejto kalibrácii používať funkciu `nls()`, nelineárnu regresiu popísanú v [10]. Model nelineárnej regresie s váhami ω_{ij} vieme napísať ako:

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= f(x_{ij}, \theta) + \epsilon_{ij}/\omega_{ij}, \\ R_{ij} &= R_{ap2}(\tau_j, r_i) + \epsilon_{ij}/\omega_{ij}, \end{aligned} \quad (60)$$

kde R_{ij} sú výnosy s maturitou τ_j v i -tom dni, $R_{ap2}(\tau_j, r_i)$ sú výnosy pre j -tu maturitu τ_j a okamžitú úrokovú mieru r_i v i -tom dni, kde $j = 1, \dots, m$ a $i = 1, \dots, n$. $\epsilon_{ij}/\omega_{ij}$ sú náhodné chyby.

Minimalizujeme účelovú funkciu, ktorá má tvar:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \sigma, r_i) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega_{ij} (R_{ij} - R_{ap2}(\tau_j, r_i))^2, \quad (61)$$

Konkrétne algoritmy napríklad Gauss-Newtonov algoritmus sú popísané v [1]. Ďalej uvádzame R-kový kód druhej aproximačnej formule.

```
# druhá aproximácia
u3 ← function(alphaa, betaa, gammaa, sigmaa) {

y=rep(0, N);
x0=rep(0, N);
x1=rep(0, N);
x2=rep(0, N);
x3=rep(0, N);
weights_reg=rep(0, N);
a=0;
q=0;
B=0;
ind=0;
```

```

for (i in 1:n){
  for (j in 1:m){
    ind=ind+1;

    y[ind]=-yields[i,j]*tau[j];
    weight_data=tau[j]^2;
    weights_reg[ind]=weight_data/(tau[j]^2);

    B=(1 - exp(betaa*tau[j]))/betaa;
    q=gammaa*(2*gammaa - 1)*sigmaa^2*r[i]^(2*(2*gammaa - 1)) +...
      2*gammaa*r[i]^(2*gammaa - 1)*(alphaa + betaa*r[i]);
    a=q*tau[j] + r[i]^(2*gammaa);
    c0=r[i]*B;
    c1=(B + tau[j])/betaa*alphaa;
    c2aux=B^2 + B/betaa*2 + tau[j]/betaa*2;
    c2=a*sigmaa^2/betaa/4*c2aux
    c3aux=(B^2*(2*betaa*tau[j] - 1) + 2*B*(2*tau[j] - 3/betaa) +...
      2*tau[j]^2 - 6*tau[j]/betaa);
    c3=-q*sigmaa^2/betaa^2/8*c3aux

    x0[ind]=c0;
    x1[ind]=c1;
    x2[ind]=c2;
    x3[ind]=c3;
  }
}

x0+x1+x2+x3
}

```

Optimálne hodnoty parametrov budeme získavať nelineárnou regresiou so začiatočnými hodnotami parametrov z predchádzajúcej aproximácie.

```

#odhadnuté parametre z prvej aproximácie
alpha=0.003151;
beta=-0.05552118;
gamma=0.489215;
sigma=0.08655616;

#nelineárna regresia
nlsfit=nls(y ~ u3(alpha, beta, gamma, sigma),
  start=list(alpha, beta, gamma, sigma), trace=TRUE,
  weights=weights_reg, algorithm="port")
summary(nlsfit)

```

Váhy sme zvolili $\omega_{ij} = \tau_j$. Pri štandardnom nastavení Gauss-Newtonovho algoritmu nám úloha neskonvergovala, preto sme zvolili **port** algoritmus, pri ktorom úloha skonvergovala. Nakalibrované parametre vidíme v tabuľke 6.

	α	β	γ	σ	Hodnota úč. f.
Presné	0.00315	-0.0555	0.50001	0.08927	6.19e-08
Zaokrúhlené	0.00309	-0.05444	0.74712	0.18144	4.56e-05

Tabuľka 6: Optimálne hodnoty α , β , γ , σ
a prislúchajúce hodnoty účelových funkcií pre presné aj zaokruhlené dáta.

Ako vidieť z tabuľky 6 oproti prvej aproximačnej formule sa odhady parametrov γ a σ vylepšili. Od pôvodného vygenerovaného CIR modelu s parametrami $\alpha = 0.00315$, $\beta = -0.0555$, $\gamma = 0.5$, $\sigma = 0.0894$ sa výrazne líši iba parameter σ aj to až na štvrtom desatinnom mieste. Pri zaokrúhlených dátach sú zmeny v parametroch druhej aproximácie od prvej aproximácie taktiež v parametroch γ a σ . Hodnota účelovej funkcie sa pri nezaokrúhlených dátach zmenšila no pri zaokrúhlených zostala nezmenená. Neuvádzame grafy výnosových kriviek, keďže z tabuliek 7, 8, 9 a 10 sa dá vyčítať, že grafy by vyzerali obdobne ako grafy na obrázkoch 14, 15, 16 a 17.

3 PRESNOST' VSTUPNÝCH DÁT PRI KALIBRÁCI

CIR	Presné	Zaokrúhlené	CIR	Presné	Zaokrúhlené
0.05675623	0.05675623	0.05675961	0.05590935	0.05590934	0.05591155
0.05675467	0.05675466	0.05675819	0.05590976	0.05590975	0.05591208
0.05675208	0.05675207	0.05675573	0.05590916	0.05590914	0.05591159
0.05674847	0.05674846	0.05675224	0.05590755	0.05590753	0.05591009
0.05674386	0.05674385	0.05674773	0.05590494	0.05590492	0.05590759
0.05673825	0.05673824	0.05674222	0.05590134	0.05590133	0.05590409
0.05673166	0.05673166	0.05673569	0.05589677	0.05589677	0.05589961
0.05672409	0.05672409	0.05672817	0.05589124	0.05589123	0.05589414
0.05671557	0.05671557	0.05671966	0.05588475	0.05588475	0.05588769
0.05670609	0.05670609	0.05671016	0.05587732	0.05587732	0.05588028
0.05669568	0.05669568	0.05669968	0.05586895	0.05586895	0.05587190
0.05668433	0.05668432	0.05668824	0.05585967	0.05585966	0.05586257

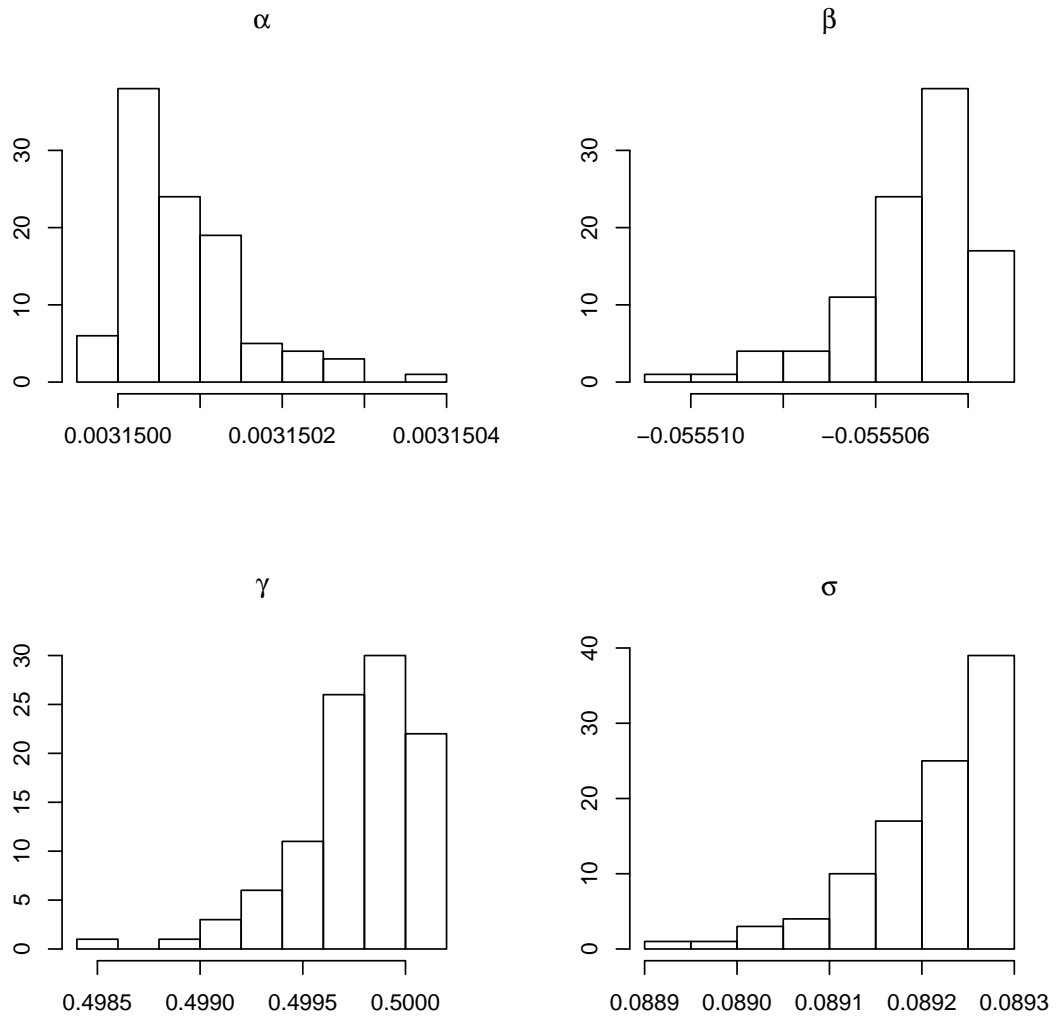
Tabuľka 7: Výnosy v čase 1

Tabuľka 8: Výnosy v čase 20

CIR	Presné	Zaokrúhlené	CIR	Presné	Zaokrúhlené
0.05133218	0.05133217	0.05133201	0.04646419	0.04646419	0.04646313
0.05134328	0.05134327	0.05134309	0.04648666	0.04648665	0.04648541
0.05135341	0.05135340	0.05135323	0.04650821	0.04650820	0.04650685
0.05136259	0.05136257	0.05136246	0.04652885	0.04652884	0.04652746
0.05137081	0.05137080	0.05137077	0.04654860	0.04654859	0.04654724
0.05137809	0.05137809	0.05137817	0.04656746	0.04656745	0.04656619
0.05138445	0.05138445	0.05138466	0.04658543	0.04658543	0.04658433
0.05138989	0.05138989	0.05139026	0.04660253	0.04660253	0.04660164
0.05139441	0.05139441	0.05139496	0.04661877	0.04661878	0.04661815
0.05139804	0.05139804	0.05139877	0.04663416	0.04663416	0.04663384
0.05140077	0.05140077	0.05140170	0.04664870	0.04664870	0.04664874
0.05140263	0.05140262	0.05140375	0.04666240	0.04666240	0.04666283

Tabuľka 9: Výnosy v čase 40

Tabuľka 10: Výnosy v čase 60

Obr. 23: Histogramy odhadov parametrov pri druhej aproximácii.

Na obrázku 23 sú histogramy odhadnutých parametrov pri 100 simuláciách CIR modelu s parametrami $\alpha = 0.00315$, $\beta = -0.0555$, $\gamma = 0.5$ a $\sigma = 0.0894$.

3.3 Tretia aproximačná formula

Tretou aproximáciou ceny dlhopisu v CKLS modeli bude P_{ap2+} , ktorú dostávame z Vety 2.2 ako

$$\ln P_{ap2+}(\tau, r) = \ln P_{ap2}(\tau, r) - c_5(r)\tau^5. \quad (62)$$

kde $c_5(r)$ je daná rovnicou (54). V prílohe uvádzame člen $c_5(r)$. Používame rovnakú účelovú funkciu ako pri predchádzajúcej aproximácii. Optimálne hodnoty parametrov budeme získavať teda nelineárnou regresiou so začiatočnými hodnotami parametrov z prvej aproximácie. Získané parametre sú v tabuľke 11.

	α	β	γ	σ	Hodnota úč. f.
Presné	0.00315	-0.0555	0.50002	0.08942	6.95e-09
Zaokrúhlené	0.00309	-0.05443	0.74887	0.18281	4.56e-05

Tabuľka 11: Optimálne hodnoty $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$
a prislúchajúce hodnoty účelových funkcií pre presné aj zaokrúhlené dáta.

Ako vidieť z tabuľky 11 oproti druhej aproximačnej formule sa odhad parametra σ ešte vylepšil. Od pôvodného vygenerovaného CIR modelu sa teda parametre γ a σ líšia až na piatom desatinnom mieste. Pri zaokrúhlených dátach sa oproti druhej aproximácii zmenili parametre γ a σ a to na treťom desatinnom mieste. Vidieť opäť zmenšenie hodnoty účelovej funkcie pri nezaokrúhlených dátach, pri zaokrúhlených dátach sa hodnota účelovej funkcie nezmenila.

Výnosové krivky sú skoro totožné ako na obrázkoch 14, 15, 16, 17 a rovnaké ako na obrázkoch 18, 19, 20, 21. V tabuľkách 12, 13, 14 a 15 sú výnosy v rôznych časoch.

3 PRESNOST' VSTUPNÝCH DÁT PRI KALIBRÁCI

CIR	Presné	Zaokrúhlené	CIR	Presné	Zaokrúhlené
0.05675623	0.05675623	0.05675963	0.05590935	0.05590935	0.05591156
0.05675467	0.05675467	0.05675821	0.05590976	0.05590976	0.05591210
0.05675208	0.05675208	0.05675575	0.05590916	0.05590916	0.05591161
0.05674847	0.05674848	0.05675226	0.05590755	0.05590755	0.05591011
0.05674386	0.05674386	0.05674775	0.05590494	0.05590494	0.05590760
0.05673825	0.05673825	0.05674222	0.05590134	0.05590134	0.05590409
0.05673166	0.05673166	0.05673568	0.05589677	0.05589677	0.05589959
0.05672409	0.05672410	0.05672814	0.05589124	0.05589124	0.05589410
0.05671557	0.05671557	0.05671960	0.05588475	0.05588475	0.05588764
0.05670609	0.05670609	0.05671008	0.05587732	0.05587732	0.05588020
0.05669568	0.05669568	0.05669958	0.05586895	0.05586895	0.05587179
0.05668433	0.05668434	0.05668810	0.05585967	0.05585967	0.05586243

Tabuľka 12: Výnosy v čase 1

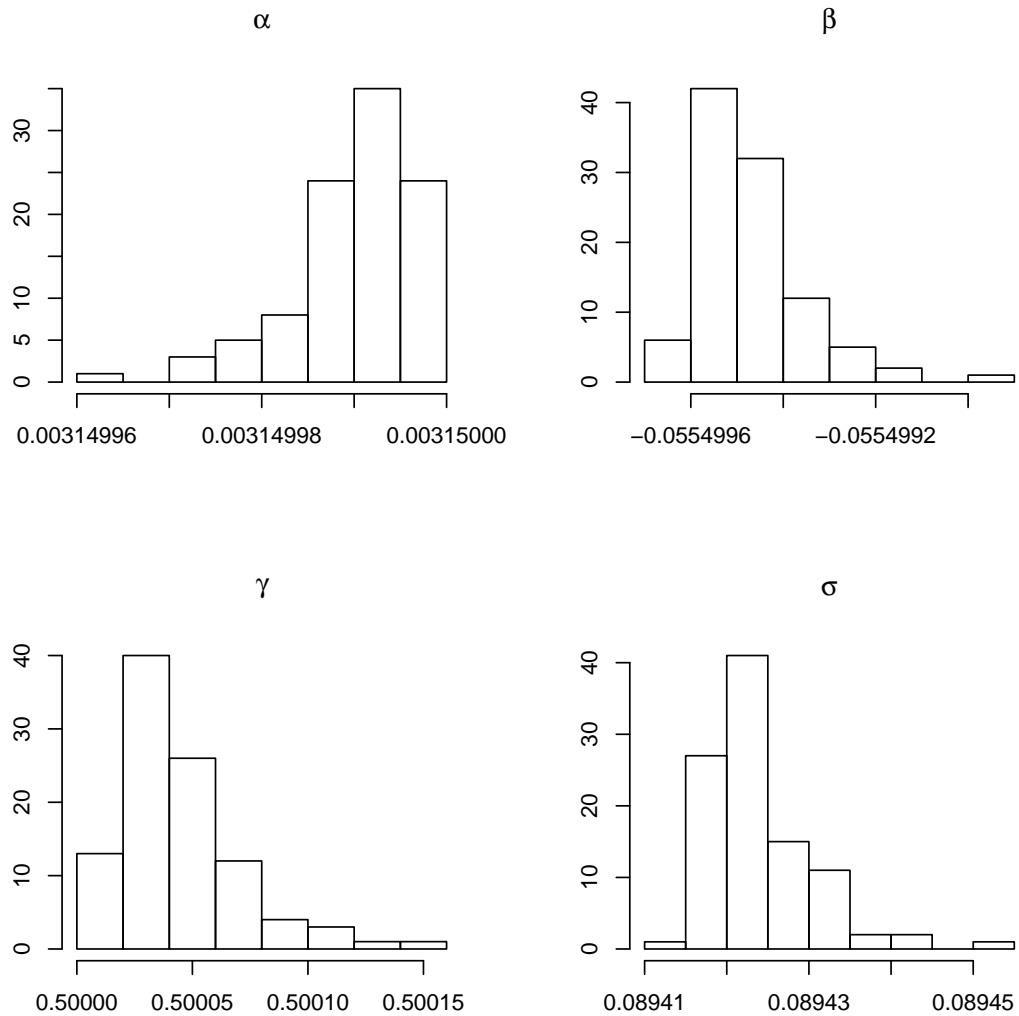
Tabuľka 13: Výnosy v čase 20

CIR	Presné	Zaokrúhlené	CIR	Presné	Zaokrúhlené
0.05133218	0.05133218	0.05133202	0.04646419	0.04646419	0.04646313
0.05134328	0.05134328	0.05134310	0.04648666	0.04648666	0.04648542
0.05135341	0.05135341	0.05135325	0.04650821	0.04650821	0.04650686
0.05136259	0.05136259	0.05136248	0.04652885	0.04652886	0.04652747
0.05137081	0.05137081	0.05137078	0.04654860	0.04654860	0.04654724
0.05137809	0.05137810	0.05137817	0.04656746	0.04656746	0.04656619
0.05138445	0.05138445	0.05138465	0.04658543	0.04658543	0.04658430
0.05138989	0.05138989	0.05139022	0.04660253	0.04660254	0.04660160
0.05139441	0.05139441	0.05139490	0.04661877	0.04661878	0.04661808
0.05139804	0.05139804	0.05139868	0.04663416	0.04663416	0.04663374
0.05140077	0.05140078	0.05140158	0.04664870	0.04664870	0.04664860
0.05140263	0.05140263	0.05140360	0.04666240	0.04666241	0.04666264

Tabuľka 14: Výnosy v čase 40

Tabuľka 15: Výnosy v čase 60

Obr. 24: Histogramy odhadov parametrov pri tretej aproximácii.



Na obrázku 24 sú histogramy odhadnutých parametrov pri 100 simuláciách CIR modelu s parametrami $\alpha = 0.00315$, $\beta = -0.0555$, $\gamma = 0.5$ a $\sigma = 0.0894$.

3.4 Štvrtá aproximačná formula

Poslednú štvrtú aproximáciu ceny dlhopisu v CKLS modeli P_{ap3} sme popísali vo Vete 2.3. Použili sme nelineárnu regresiu ako aj v predchádzajúcich aproximáciách. Členy $c_5(r)$ a $c_6(r)$ uvádzame v prílohe. Na výpočet prvej a druhej derivácie člena $c_5(r)$ sme použili funkciu `deriv()` popísanú v [3]. Použitie tejto funkcie uvádzame:

```
#prva derivacia
D(expression(c5), 'r')
#druha derivacia
D(D(expression(c5), 'r'), 'r')
```

V tabuľke 16 sú nakalibrované parametre.

	α	β	γ	σ	Hodnota úč. f.
Presné	0.00315	-0.0555	0.5	0.0894	1.49e-10
Zaokrúhlené	0.00309	-0.05443	0.74867	0.18268	4.56e-05

Tabuľka 16: Optimálne hodnoty $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$
a príslúchajúce hodnoty účelových funkcií pre presné aj zaokrúhlené dáta.

Pre presné dáta sme dostali také isté parametre, aké sme zvolili pri simulácii CIR modelu. Pre zaokrúhlené dáta sa nám mierne zmenili parametre γ a σ na štvrtom desatinnom mieste. Hodnoty účelových funkcií sa pre presné dáta zmenšila a pre zaokrúhlené dáta zostala nezmenená. V tabuľkách 12, 13, 14 a 15 sú výnosy pre rôzne časy.

3 PRESNOST' VSTUPNÝCH DÁT PRI KALIBRÁCI

CIR	Presné	Zaokrúhlené	CIR	Presné	Zaokrúhlené
0.05675623	0.05675623	0.05675963	0.05590935	0.05590935	0.05591156
0.05675467	0.05675467	0.05675821	0.05590976	0.05590976	0.05591210
0.05675208	0.05675208	0.05675575	0.05590916	0.05590916	0.05591161
0.05674847	0.05674847	0.05675226	0.05590755	0.05590755	0.05591011
0.05674386	0.05674386	0.05674775	0.05590494	0.05590494	0.05590760
0.05673825	0.05673825	0.05674222	0.05590134	0.05590134	0.05590409
0.05673166	0.05673166	0.05673568	0.05589677	0.05589677	0.05589959
0.05672409	0.05672409	0.05672814	0.05589124	0.05589124	0.05589410
0.05671557	0.05671557	0.05671960	0.05588475	0.05588475	0.05588764
0.05670609	0.05670609	0.05671008	0.05587732	0.05587732	0.05588020
0.05669568	0.05669568	0.05669958	0.05586895	0.05586895	0.05587179
0.05668433	0.05668433	0.05668810	0.05585967	0.05585967	0.05586243

Tabuľka 17: Výnosy v čase 1

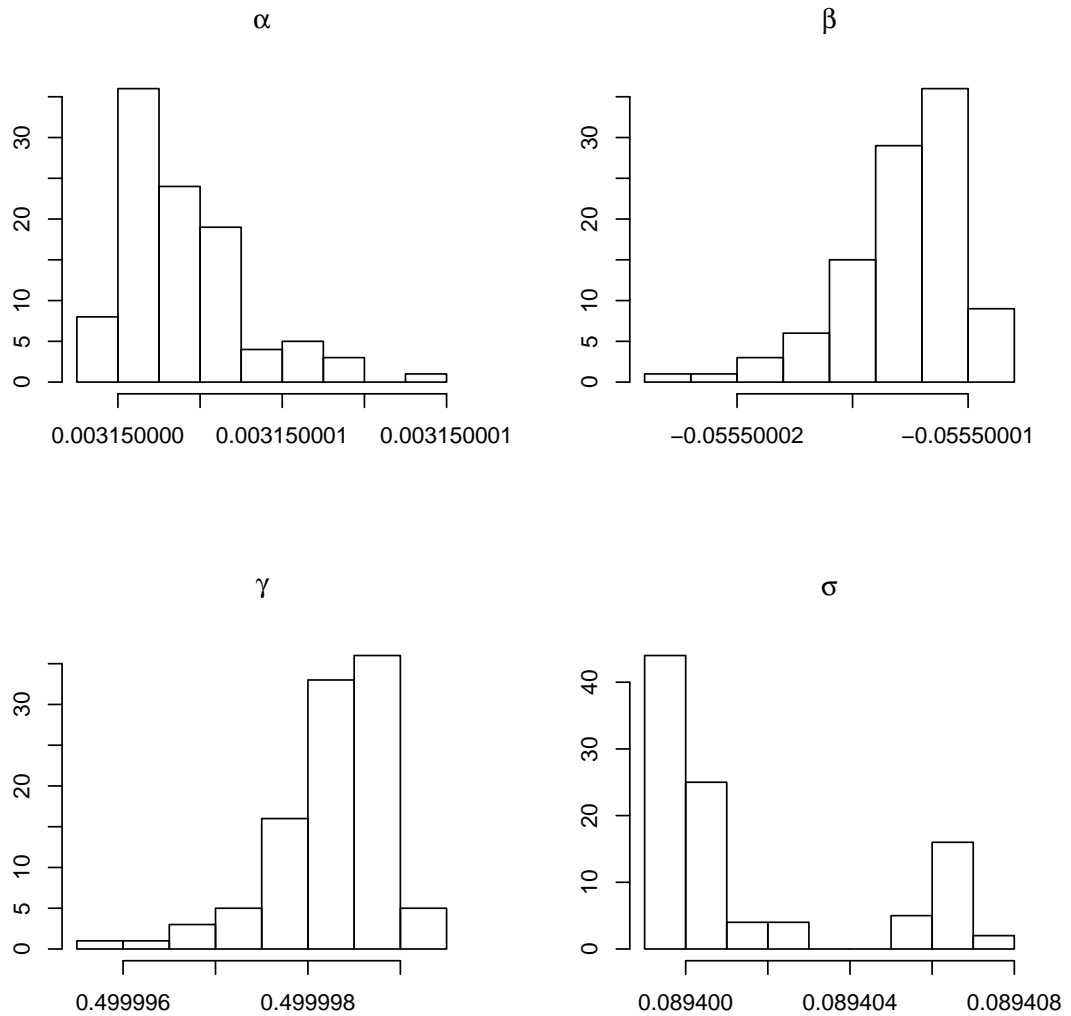
Tabuľka 18: Výnosy v čase 20

CIR	Presné	Zaokrúhlené	CIR	Presné	Zaokrúhlené
0.05133218	0.05133218	0.05133202	0.04646419	0.04646419	0.04646313
0.05134328	0.05134328	0.05134310	0.04648666	0.04648666	0.04648542
0.05135341	0.05135341	0.05135325	0.04650821	0.04650821	0.04650686
0.05136259	0.05136259	0.05136247	0.04652885	0.04652885	0.04652747
0.05137081	0.05137081	0.05137078	0.04654860	0.04654860	0.04654724
0.05137809	0.05137809	0.05137817	0.04656746	0.04656746	0.04656619
0.05138445	0.05138445	0.05138465	0.04658543	0.04658543	0.04658430
0.05138989	0.05138989	0.05139022	0.04660253	0.04660253	0.04660160
0.05139441	0.05139441	0.05139490	0.04661877	0.04661878	0.04661808
0.05139804	0.05139804	0.05139868	0.04663416	0.04663416	0.04663374
0.05140077	0.05140077	0.05140158	0.04664870	0.04664870	0.04664860
0.05140263	0.05140263	0.05140359	0.04666240	0.04666240	0.04666264

Tabuľka 19: Výnosy v čase 40

Tabuľka 20: Výnosy v čase 60

Obr. 25: Histogramy odhadov parametrov pri štvrtej aproximácii.



Na obrázku 25 sú histogramy odhadnutých parametrov pri 100 simuláciách CIR modelu s parametrami $\alpha = 0.00315$, $\beta = -0.0555$, $\gamma = 0.5$ a $\sigma = 0.0894$.

Ďalej uvádzame v tabuľkách 21, 23 výnosy pri fitovaní pre zaokruhlené dáta CIR modelu v čase 1 a 60 pre všetky aproximácie. Pre prehľadnosť sú tieto výnosy v tabuľkách 22, 24 zaokruhlené na 5 desatinných miest.

CIR	1.aprox	2.aprox	3.aprox	4.aprox
0.05675623	0.05675966	0.05675961	0.05675963	0.05675963
0.05675467	0.05675826	0.05675819	0.05675821	0.05675821
0.05675208	0.05675581	0.05675573	0.05675575	0.05675575
0.05674847	0.05675232	0.05675224	0.05675226	0.05675226
0.05674386	0.05674780	0.05674773	0.05674775	0.05674775
0.05673825	0.05674226	0.05674222	0.05674222	0.05674222
0.05673166	0.05673572	0.05673569	0.05673568	0.05673568
0.05672409	0.05672818	0.05672817	0.05672814	0.05672814
0.05671557	0.05671965	0.05671966	0.05671960	0.05671960
0.05670609	0.05671014	0.05671016	0.05671008	0.05671008
0.05669568	0.05669967	0.05669968	0.05669958	0.05669958
0.05668433	0.05668824	0.05668824	0.05668810	0.05668810

Tabuľka 21: Výnosy pri všetkých aproximáciách fitovaných zo zaokrúhlených dát CIR modelu v čase 1.

CIR	1.aprox	2.aprox	3.aprox	4.aprox
0.05676	0.05676	0.05676	0.05676	0.05676
0.05675	0.05676	0.05676	0.05676	0.05676
0.05675	0.05676	0.05676	0.05676	0.05676
0.05675	0.05675	0.05675	0.05675	0.05675
0.05674	0.05675	0.05675	0.05675	0.05675
0.05674	0.05674	0.05674	0.05674	0.05674
0.05673	0.05674	0.05674	0.05674	0.05674
0.05672	0.05673	0.05673	0.05673	0.05673
0.05672	0.05672	0.05672	0.05672	0.05672
0.05671	0.05671	0.05671	0.05671	0.05671
0.05670	0.05670	0.05670	0.05670	0.05670
0.05668	0.05669	0.05669	0.05669	0.05669

Tabuľka 22: Zaokrúhlené výnosy na 5 desatinných miest pri všetkých aproximáciách fitovaných zo zaokrúhlených dát CIR modelu v čase 1.

3 PRESNOSŤ VSTUPNÝCH DÁT PRI KALIBRÁCI

CIR	1.aprox	2.aprox	3.aprox	4.aprox
0.04646419	0.04646317	0.04646313	0.04646313	0.04646313
0.04648666	0.04648547	0.04648541	0.04648542	0.04648542
0.04650821	0.04650692	0.04650685	0.04650686	0.04650686
0.04652885	0.04652752	0.04652746	0.04652747	0.04652747
0.04654860	0.04654729	0.04654724	0.04654724	0.04654724
0.04656746	0.04656622	0.04656619	0.04656619	0.04656619
0.04658543	0.04658433	0.04658433	0.04658430	0.04658430
0.04660253	0.04660163	0.04660164	0.04660160	0.04660160
0.04661877	0.04661812	0.04661815	0.04661808	0.04661808
0.04663416	0.04663381	0.04663384	0.04663374	0.04663374
0.04664870	0.04664871	0.04664874	0.04664860	0.04664860
0.04666240	0.04666283	0.04666283	0.04666264	0.04666264

Tabuľka 23: Výnosy pri všetkých aproximáciach fitovaných zo zaokrúhlených dát CIR modelu v čase 60.

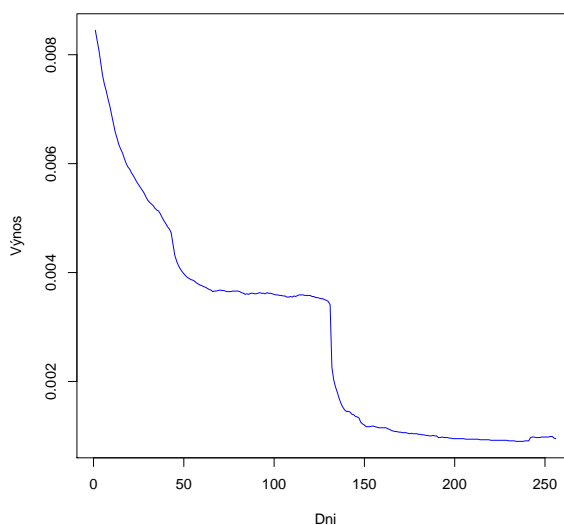
CIR	1.aprox	2.aprox	3.aprox	4.aprox
0.04646	0.04646	0.04646	0.04646	0.04646
0.04649	0.04649	0.04649	0.04649	0.04649
0.04651	0.04651	0.04651	0.04651	0.04651
0.04653	0.04653	0.04653	0.04653	0.04653
0.04655	0.04655	0.04655	0.04655	0.04655
0.04657	0.04657	0.04657	0.04657	0.04657
0.04659	0.04658	0.04658	0.04658	0.04658
0.04660	0.04660	0.04660	0.04660	0.04660
0.04662	0.04662	0.04662	0.04662	0.04662
0.04663	0.04663	0.04663	0.04663	0.04663
0.04665	0.04665	0.04665	0.04665	0.04665
0.04666	0.04666	0.04666	0.04666	0.04666

Tabuľka 24: Zaokrúhlené výnosy na 5 desatinných miest pri všetkých aproximáciach fitovaných zo zaokrúhlených dát CIR modelu v čase 60.

3.5 Reálne dáta

V tejto časti budeme kalibrovať reálne dáta z Euriboru [4] počas roku 2012. Dáta sme najprv predelili aby neboli v %. Ako okamžitú úrokovú mieru r sme použili úrokové sadzby s 3 týždňovou dobou do splatnosti, ktorých graf je na obrázku 26. Časovú štruktúru úrokových mier sme použili úrokové sadzby s 1 – 12 mesačnými dobami do splatnosti. Kalibrovali sme CKLS model podľa aproximácie $\ln P_{ap1}$, keďže na základe simulácii je táto aproximácia dostatočne presná a ostatné aproximácie neprinášali pri zaokrúhlených dátach presnejšie výsledky. Pri ostatných aproximáciách na rozdiel od simulácií vznikajú numerické problémy.

Obr. 26: Úrokové sadzby so splatnosťou 3 týždne. Zdroj: [4].



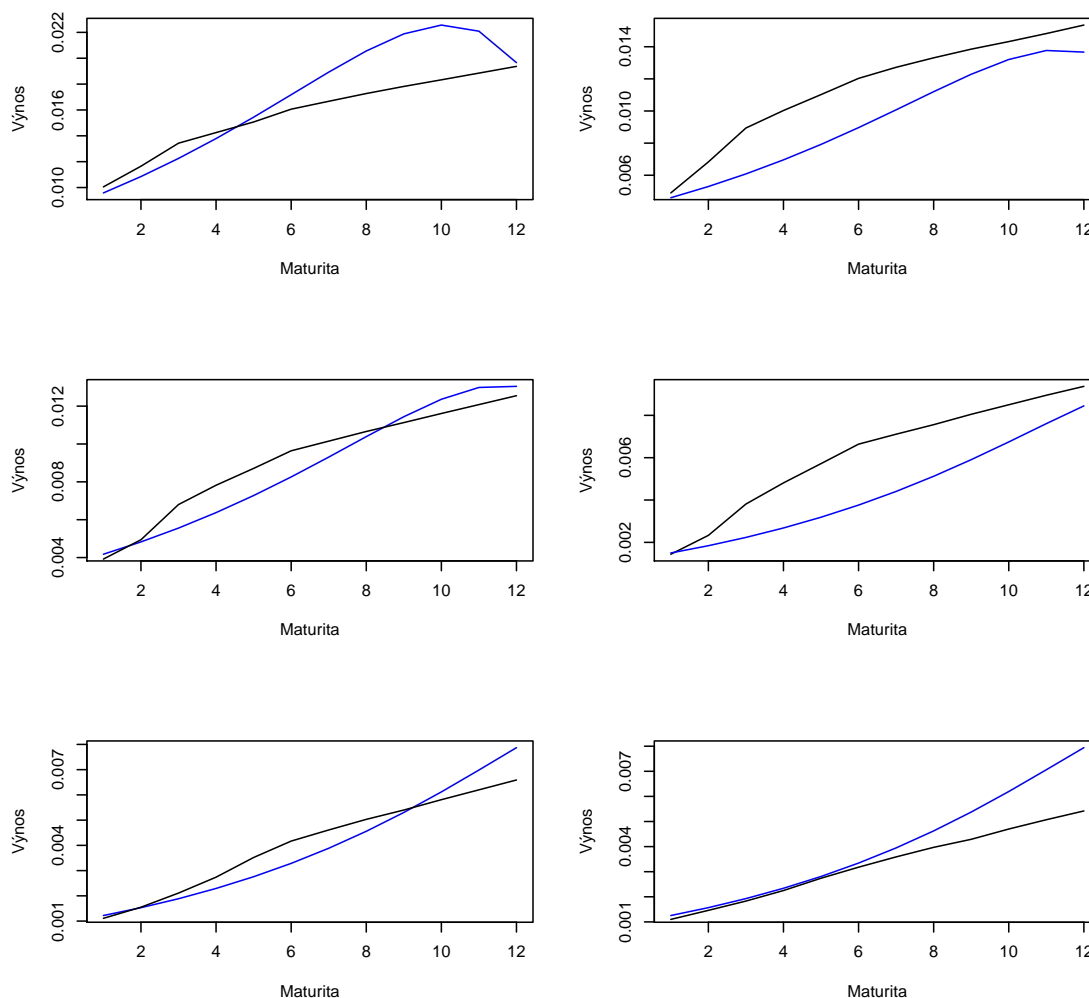
Pri hľadaní β a γ sme najprv zvolili intervaly dostatočne veľké no pri následnej kalibrácii parametrov α a σ vyšiel model ako neprípustný, keďže σ^2 pri minimalizácii účelovej funkcie $u1$ bola záporná. Následne sme teda hľadali model, ktorý bude prípustný. Pri fixovanej γ sme optimalizovali len vzhľadom na tie β , ktoré viedli k prípustnej, teda kladnej hodnote parametra σ^2 . Iným možným postupom by bolo použiť ohraničenia na parametre pri optimalizácii. V tabuľke 25 sú hodnoty parametrov ako aj hodnota účelovej funkcie prípustného modelu. O parametri β by sme očakávali, že

vyjde záporný, jeho kladná hodnota však na rozdiel od zápornosti σ^2 nie je vyslovene neprípustná. Kladná hodnota parametra α a záporná hodnota parametra β znamená, že náš proces má vlastnosť mean-reversion. Odhadované parametre sú však rizikovo neutrálne parametre, a teda ak aj proces túto vlastnosť nemá, ešte to nič nehovorí o jeho správaní pri reálnej miere.

	α	β	γ	σ	Hodnota úč. f.
Prípustná	0.00358	2.6133	0.59259	1.96826	0.0441

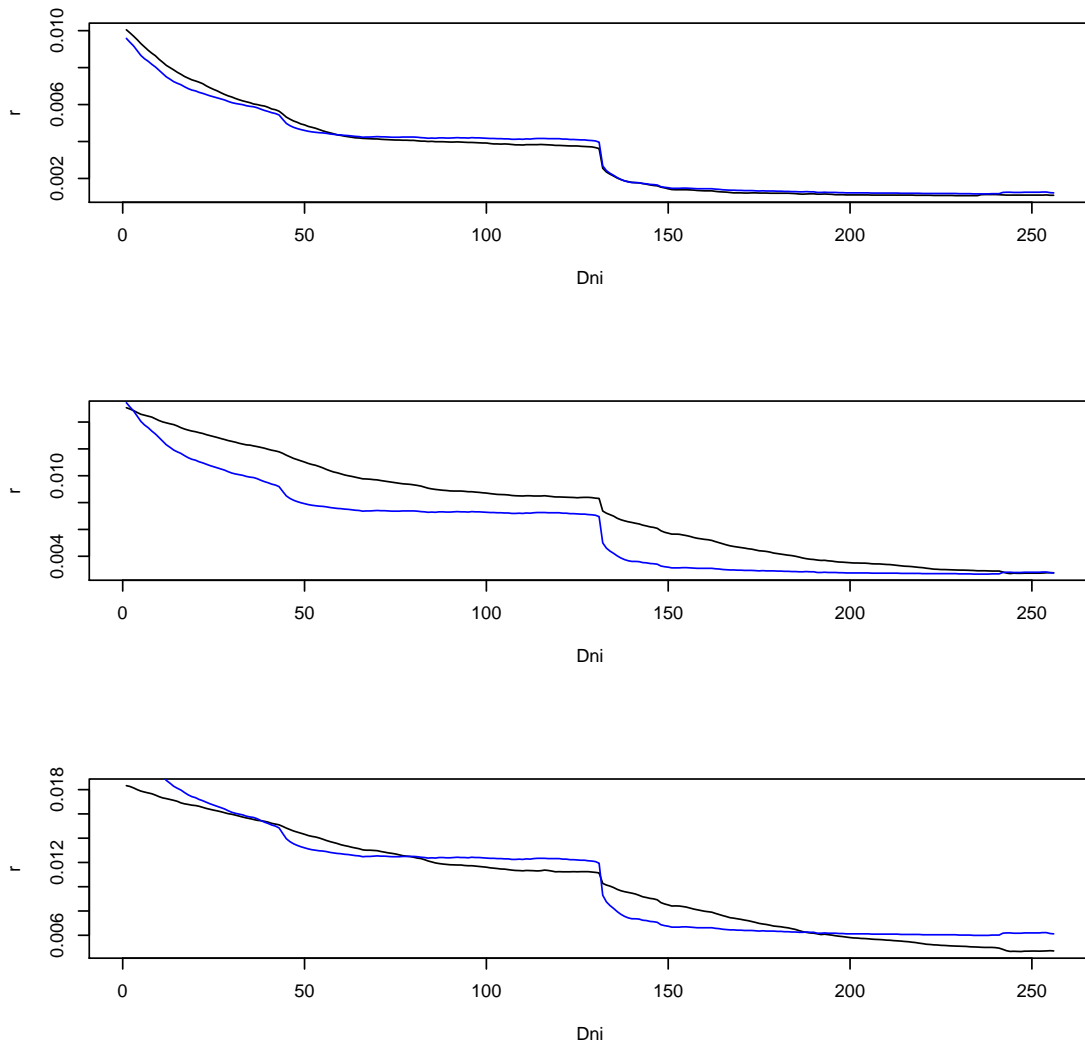
Tabuľka 25: Optimálne hodnoty α , β , γ , σ a prislúchajúca hodnota účelovej funkcie.

Obr. 27: Reálne a fitované(modré) výnosové krivky v 1, 50, 100, 150, 200 a 250 dni.



Na obrázku 27 sú výnosové krivky v rôznych dňoch a na obrázku 28 sú úrokové sadzby s rôznymi splatnosťami.

Obr. 28: Reálne a fitované(modré) úrokové sadzby so splatnosťou 1, 5 a 10 mesiacov.



Záver

V diplomovej práci sme sa venovali jednofaktorovému CKLS modelu. Pri tomto modeli nie je známe presné riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu. Preto je potrebné hľadať numerickú alebo analytickú aproximáciu. My sme sa zaoberali práve analytickými aproximáciami.

Cieľom práce bolo otestovať rôzne aproximácie na zaokrúhlených dátach a zistiť, či má zmysel používať presnejšie aproximácie.

Úvod bol venovaný základným pojmom z oblasti oceňovania dlhopisov. Ďalej sme sa venovali jednofaktorovým modelom úrokovej miery, ktorými sú Vašíčkov model, CIR model, ako aj ich zovšeobecnený CKLS model.

V poslednej kapitole sme využili poznatky z predchádzajúcich kapitol a na simulovaných dátach CIR modelu sme testovali štyri aproximačné formule pre cenu dlhopisu. Pri nezaokrúhlených simulovaných dátach nám presnejšie aproximácie odhadovali presnejšie parametre modelu. Výnosové krivky v tomto prípade boli výborne odhadované už pri prvej aproximačnej formule, pri ostatných sa presnosť mierne zlepšila. Čo je podstatnejšie, pri zaokrúhlených simulovaných CIR dátach na 5 desatinných miest všetky aproximácie dosahovali rovnakú presnosť. Preto prvá aproximácia, ktorej predpis je najjednoduchší je dostačujúca.

V závere sme na reálnych ročných dátach Euriboru [4] roku 2012 otestovali prvú aproximáciu. Model aproximoval reálne výnosové krivky pomerne dobre.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Bates D. M., Watts D. G.: *Nonlinear Regression Analysis and Its Applications 2nd edition*, John Wiley and Sons, New York, 2007
- [2] Cox J. C., Ingersoll Jr. J. E., Ross S. A.: *A theory of the term structure of interest rates*, *Econometrica* 53 (2), 1985, 385-407
- [3] The R Stats Package: *Symbolic and Algorithmic Derivatives of Simple Expressions*, 28.4.2015
<https://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/stats/html/deriv.html>
- [4] EMMI - European Money Markets Institute, 28.4.2015
<http://www.emmi-benchmarks.eu/>
- [5] Chernogorova T., Stehlíková B.: *A Comparison of Asymptotic Analytical Formulae with Finite-Difference Approximations for Pricing Zero Coupon Bond*, *Numerical Algorithms* 59 (4), 2012, 571-588
- [6] Chan K.C., Karolyi G.A., Longstaff F.A., Sanders A.B.: *An empirical comparison of alternative models of the short-term of interest rate*, *The Journal of Finance* 47 (3), 1992, 1209-1227
- [7] Choi Y., Wirjanto T. S.: *An analytic approximation formula for pricing zero coupon bonds*, *Finance Research Letters* 4 (2), 2007, 116-126
- [8] The R Stats Package: *Fitting Linear Models*, 28.4.2015
<https://stat.ethz.ch/R-manual/R-patched/library/stats/html/lm.html>
- [9] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Nakladateľstvo EPOS, Bratislava, 2005
- [10] The R Stats Package: *Nonlinear Least Squares*, 28.4.2015
<https://stat.ethz.ch/R-manual/R-patched/library/stats/html/nls.html>
- [11] The R Stats Package: *One Dimensional Optimization*, 28.4.2015
<https://stat.ethz.ch/R-manual/R-patched/library/stats/html/optimize.html>

- [12] Ritz Ch., Streibig J. C.: *Nonlinear Regression with R*, Springer, New York, 2008
- [13] Skinner F. : *Pricing and Hedging Interest and Credit Risk Sensitive Instruments*, Elsevier, Burlington, 2005
- [14] Smyth G. K.: *Encyclopedia of Environmetrics*, Volume 3, John Wiley and Sons, Chichester, 2002, 1405–1411
- [15] Stehlíková B., Ševčovič D.: *Approximate formulae for pricing zero-coupon bonds and their asymptotic analysis*, International Journal of Numerical Analysis and Modeling 6 (2), 2009, 274-283
- [16] Stehlíková B.: *A simple analytic approximation formula for the bond price in the Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders model*, International Journal of Numerical Analysis and Modeling 4 (3), 2013, 224-234
- [17] Stehlíková B., Ševčovič D., Mikula K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Nakladateľstvo STU, Bratislava, 2009
- [18] Stehlíková B., *osobná komunikácia*
- [19] Vašíček O.: *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Financial Economics 5, 1977, 177-188
- [20] Euribor rates - all information on Euribor, 28.4.2015
<http://www.euribor-rates.eu/>

Príloha

 $c_5(r)$

```

c5aux=2*alphaa^2*r[i]^2*(2*gammaa-1) + 4*betaa^2*gammaa*r[i]^4 - ...
8*r[i]^(3+2*gammaa)*sigmaa^2 + ...
2*betaa*r[i]^(2+2*gammaa)*sigmaa^2*(1-5*gammaa+6*gammaa^2) + ...
sigmaa^4*r[i]^(4*gammaa)*(2*gammaa-1)^2*(4*gammaa-3) + ...
2*alphaa*r[i]^3*betaa*(4*gammaa-1) + ...
2*alphaa*r[i]^(2*gammaa+1)*sigmaa^2*(2*gammaa-1)*(3*gammaa-2)

```

```

c5aux2=1/120*gammaa*r[i]^(2*(gammaa-2))*sigmaa^2*c5aux

```

```

c5=c5aux2

```

 $c_6(r)$

```

#prva derivacia c5

```

```

c5der=1/120*gammaa*(r[i]^((2*(gammaa-2))-1)*(2*(gammaa-...
2))))*sigmaa^2*(2*alphaa^2*r[i]^2*(2*gammaa-1)+...
4*betaa^2*gammaa*r[i]^4-8*r[i]^(3+2*gammaa)*sigmaa^2+...
2*betaa*r[i]^(2+2*gammaa)*sigmaa^2*(1-5*gammaa+...
6*gammaa^2)+sigmaa^4*r[i]^(4*gammaa)*(2*gammaa-...
1)^2*(4*gammaa-3)+2*alphaa*r[i]^3*betaa*(4*...
gammaa-1)+2*alphaa*r[i]^(2*gammaa+1)*sigmaa^2*...
(2*gammaa-1)*(3*gammaa-2))+1/120*gammaa*r[i]^(2*...
(gammaa-2))*sigmaa^2*(2*alphaa^2*(2*r[i])*(2*...
gammaa-1)+4*betaa^2*gammaa*(4*r[i]^3)-8*(r[i]^((3+...
2*gammaa)-1)*(3+2*gammaa))*sigmaa^2+2*betaa*...
(r[i]^((2+2*gammaa)-1)*(2+2*gammaa))*sigmaa^2*...
(1-5*gammaa+6*gammaa^2)+sigmaa^4*(r[i]^((4*gammaa)-...
1)*(4*gammaa))*(2*gammaa-1)^2*(4*gammaa-3)+...
2*alphaa*(3*r[i]^2)*betaa*(4*gammaa-1)+2*alphaa*...
(r[i]^((2*gammaa+1)-1)*(2*gammaa+1))*sigmaa^2*...
(2*gammaa-1)*(3*gammaa-2))

```

#druha derivacia c5

```

c5der2=1/120*gammaa*(r[i]^(((2*(gammaa-2))-1)-1))*((2*(gammaa-...
2))-1)*(2*(gammaa-2))*sigma^2*(2*alphaa^2*...
r[i]^2*(2*gammaa-1)+4*betaa^2*gammaa*r[i]^4-8*...
r[i]^(3+2*gammaa)*sigma^2+2*betaa*r[i]^(2+2*gammaa)*...
sigma^2*(1-5*gammaa+6*gammaa^2)+sigma^4*r[i]^(4*...
gammaa)*(2*gammaa-1)^2*(4*gammaa-3)+2*alphaa*...
r[i]^3*betaa*(4*gammaa-1)+2*alphaa*r[i]^(2*gammaa+...
1)*sigma^2*(2*gammaa-1)*(3*gammaa-2))+1/120*...
gammaa*(r[i]^((2*(gammaa-2))-1)*(2*(gammaa-2)))*...
sigma^2*(2*alphaa^2*(2*r[i]))*(2*gammaa-1)+4*...
betaa^2*gammaa*(4*r[i]^3)-8*(r[i]^((3+2*gammaa)-...
1)*(3+2*gammaa))*sigma^2+2*betaa*(r[i]^((2+...
2*gammaa)-1)*(2+2*gammaa))*sigma^2*(1-5*...
gammaa+6*gammaa^2)+sigma^4*(r[i]^((4*gammaa)-1)*...
(4*gammaa))*(2*gammaa-1)^2*(4*gammaa-3)+2*...
alphaa*(3*r[i]^2)*betaa*(4*gammaa-1)+2*alphaa*...
(r[i]^((2*gammaa+1)-1)*(2*gammaa+1))*sigma^2*...
(2*gammaa-1)*(3*gammaa-2))+1/120*gammaa*...
(r[i]^((2*(gammaa-2))-1)*(2*(gammaa-2)))*sigma^2*...
(2*alphaa^2*(2*r[i]))*(2*gammaa-1)+4*betaa^2*...
gammaa*(4*r[i]^3)-8*(r[i]^((3+2*gammaa)-1)*...
(3+2*gammaa))*sigma^2+2*betaa*(r[i]^((2+2*...
gammaa)-1)*(2+2*gammaa))*sigma^2*(1-5*...
gammaa+6*gammaa^2)+sigma^4*(r[i]^((4*gammaa)-...
1)*(4*gammaa))*(2*gammaa-1)^2*(4*gammaa-...
3)+2*alphaa*(3*r[i]^2)*betaa*(4*gammaa-1)+...
2*alphaa*(r[i]^((2*gammaa+1)-1)*(2*gammaa+...
1))*sigma^2*(2*gammaa-1)*(3*gammaa-...
2))+1/120*gammaa*r[i]^(2*(gammaa-2))*sigma^2*...
(2*alphaa^2*(2*(2*gammaa-1)+4*betaa^2*gammaa*...
(4*(3*r[i]^2))-8*(r[i]^((3+2*gammaa)-1)-1))*...

```

$$\begin{aligned}
& ((3+2*\text{gammaa})-1)*(3+2*\text{gammaa}))*\text{sigmaa}^2+\dots \\
& 2*\text{betaa}*(r[i]^{((2+2*\text{gammaa})-1)-1})*((2+2*\dots \\
& \text{gammaa})-1)*(2+2*\text{gammaa}))*\text{sigmaa}^2*(1-\dots \\
& 5*\text{gammaa}+6*\text{gammaa}^2)+\text{sigmaa}^4*(r[i]^{((4*\dots \\
& \text{gammaa})-1)-1})*((4*\text{gammaa})-1)*(4*\text{gammaa}))*\dots \\
& (2*\text{gammaa}-1)^2*(4*\text{gammaa}-3)+2*\text{alphaa}*\dots \\
& (3*(2*r[i]))*\text{betaa}*(4*\text{gammaa}-1)+2*\text{alphaa}*\dots \\
& (r[i]^{((2*\text{gammaa}+1)-1)-1})*((2*\text{gammaa}+1)-\dots \\
& 1)*(2*\text{gammaa}+1))*\text{sigmaa}^2*(2*\text{gammaa}-\dots \\
& 1)*(3*\text{gammaa}-2)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{kaux}=6*\text{alphaa}^2*\text{betaa}*r[i]^2*(2*\text{gammaa}-1)+\dots \\
& 12*\text{betaa}^3*\text{gammaa}*r[i]^4-10*r[i]^{(1+4*\text{gammaa})*\dots \\
& \text{sigmaa}^4*(1-2*\text{gammaa})+6*\text{betaa}^2*r[i]^{(2+2*\text{gammaa})*\dots \\
& \text{sigmaa}^2*(1-5*\text{gammaa}+6*\text{gammaa}^2)+\text{sigmaa}^2*\text{betaa}*\dots \\
& r[i]^{(2*\text{gammaa})*(-10*(5+2*\text{gammaa})*r[i]^3+3*\dots \\
& (1-2*\text{gammaa})^2*(4*\text{gammaa}-3)*r[i]^{(2*\text{gammaa})*\dots \\
& \text{sigmaa}^2)+2*\text{alphaa}*r[i]*(3*\text{betaa}^2*(4*\text{gammaa}-1)*\dots \\
& r[i]^{2+3*\text{betaa}*r[i]^{(2*\text{gammaa})*\text{sigmaa}^2*\dots \\
& (2-7*\text{gammaa}+6*\text{gammaa}^2)-5*(2*\text{gammaa}-1)*\dots \\
& r[i]^{(2*\text{gammaa}+1)*\text{sigmaa}^2)}
\end{aligned}$$

$$k=1/120*\text{gammaa}*r[i]^{(2*(\text{gammaa}-2))*\text{sigmaa}^2*\text{kaux}}$$

$$c6aux=1/12*\text{sigmaa}^2*r[i]^{(2*\text{gammaa})*c5der2}+\dots$$

$$1/6*(\text{alphaa}+\text{betaa}*r[i])*c5der+1/6*k$$

$$c6=c6aux$$