

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



VÝPOČTOVÉ ASPEKTY OBÁLKOVEJ ANALÝZY DÁT

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

VÝPOČTOVÉ ASPEKTY OBÁLKOVEJ ANALÝZY DÁT

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114. Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. RNDr. Margeréta Halická, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

- Meno a priezvisko študenta:** Bc. Radomír Profant
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
- Názov:** Výpočtové aspekty obálkovej analýzy dát. / *Computational aspects of data envelopment analysis.*
- Cieľ:** Analyzovať výpočtové aspekty riešenia úloh lineárneho programovania vznikajúcich pri obálkovej analýze dát. Spracovať prehľad používaných postupov v dostupných DEA softvéroch so zameraním na použité metódy, modely, veľkosti úloh a poskytované údaje. Na základe tejto analýzy rozšíriť webovú aplikáciu vzniknutú na základe bakalárskej práce autora (Profant: Návrh a vypracovanie webového rozhrania pre interaktívnu možnosť riešenia DEA úloh) do konkurencie schopnej podoby.
- Vedúci:** doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 29.01.2014
- Dátum schválenia:** 10.02.2014
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Podakovanie Touto cestou sa chcem poďakovať svojej vedúcej diplomovej práce Doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc. za ochotu, pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Zároveň sa chcem poďakovať prof. RNDr. Daniel Ševčovičovi CSc. za technickú pomoc pri ukladaní aplikácie na server katedry a cenné rady pri používaní programovacích jazykov. Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za ich trpezlivosť a podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

PROFANT, Radomír: Výpočtové aspekty obáľkovej analýzy dát [Diplomové práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Margeréta Halická, CSc., Bratislava, 2015, 74 s.

V diplomovej práci sa zaoberáme výpočtovými aspektami obáľkovej analýzy dát, spracovaníu prehľadu dostupných DEA softvérov a na základe dosiahnutých poznatkov rozšíreníu vzniknutej webovej aplikácie bakalárskej práce autora (Profant: Návrh a vypracovanie webového rozhrania pre interaktívnu možnosť riešenia DEA úloh) do konkurencie schopnej podoby. V práci sú zadanované a vysvetlené všetky modely použité vo webovej aplikácii spolu s ich vlastnosťami a rozšíreniami. Práca okrem toho obsahuje vysvetlenie funkčnosti a spôsobu programovania autorom vytvorenej webovej aplikácie pomocou schém a názorných obrázkov. Súčasťou práce je porovnanie dostupných softvérov, ktoré sa používajú pri výpočtoch v oblasti DEA modelov a nami vytvoreného softvéru.

Kľúčové slová: DEA (Data Envelopment Analysis), DEA softvér, webová aplikácia

Abstract

PROFANT, Radomír: Computational aspects of data envelopment analysis [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics;

Supervisor: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2015, 74 p.

The diploma thesis deals with the computational aspects of data envelopment analysis, processing of overview of the available DEA software and the extension of the web application of the author's bachelor thesis (PROFANT: Design and develop web interface for interacting possibility of solving DEA task) into a competitive form, based on the achieved knowledge. The work contains definitions and explanations of all the models used in the web application together with their characteristics and extensions. In addition, the work explains the functionality and the method of programming of the created web application using diagrams and illustrative images. It also includes a comparison of the available software used in the calculation of the DEA models and our created software.

Keywords: DEA (Data Envelopment Analysis), DEA software, web application

Obsah

Zoznam obrázkov	9
Zoznam tabuliek	10
Úvod	11
1 Úvod do DEA modelov	13
1.1 Základné označenia a predpoklady	13
1.2 Množina produkčných možností	14
1.3 Efektívna hranica	17
1.4 Efektívny vzor	18
2 CCR model	20
2.1 Pseudoefektivita	24
2.2 Vlastnosti CCR modelu	25
2.3 Interpretácia výsledkov CCR modelu	27
3 BCC model	27
3.1 Rozsahová efektivita	31
3.2 Vlastnosti BCC modelu	31
3.3 Interpretácia výsledkov BCC modelu	32
4 Aditívny model	32
4.1 Aditívny model s váhami	36
4.2 Efektivita v Aditívnom modeli	37
4.3 Vlastnosti aditívneho modelu	37
4.4 Interpretácia výsledkov aditívneho modelu	38
5 SBM model	39
5.1 Vstupný a výstupný SBM model	43
5.2 Vlastnosti SBM modelu	44
5.3 Interpretácia výsledkov v SBM modeli	45

6 AR model	46
6.1 Vlastnosti AR modelu	48
6.2 Interpretácia výsledkov v AR-CCR modeli	49
7 Rozšírenia modelov	50
7.1 Superefektivita	50
7.2 Malmquistov index	50
8 Prehľad dostupných DEA softvérov	54
8.1 Komerčné DEA softvéry	54
8.1.1 DEA-Solver-Pro	54
8.1.2 Frontier Analyst	55
8.1.3 OnFront	57
8.1.4 Warwick DEA	57
8.2 Nekomerčné DEA softvéry	58
8.2.1 DEA Excel Solver	58
8.2.2 EMS: Efficiency Measurement System	59
8.2.3 PIONEER	60
9 Webová aplikácia	63
9.1 Vývoj webovej aplikácie	63
9.2 Funkcionalita webovej aplikácie	66
9.3 Vzorové príklady	69
Záver	70
Zoznam použitej literatúry	72

Zoznam obrázkov

1	Efektívne a neefektívne útvary v prípade VRS	18
2	DEA-Solver-Pro	55
3	Frontier analyst	56
4	OnFront	58
5	Warwick DEA	59
6	DEA Excel Solver	60
7	EMS:Efficiency Measurement System	61
8	PIONEER	62
9	Schéma webovej aplikácie	64
10	Hierarchia webovej stránky	65
11	Schéma programovania modelov	67
12	Dea softvér	68

Zoznam tabuliek

1	Interpretácia riešení $(CCR - I - OM)_o$	21
2	Interpretácia riešení $(CCR - I - MM)_o$	22
3	Interpretácia riešení $(CCR - O - OM)_o$	23
4	Interpretácia riešení $(CCR - I - MM)_o$	23
5	Výstup z CCR vstupného modelu	28
6	Výstup z CCR výstupného modelu	28
7	Výstup z BCC vstupného modelu	33
8	Výstup z BCC výstupného modelu	33
9	Výstup z aditívneho modelu	38
10	Výstup z SBM modelu	45
11	Výstup z AR-CCR modelu	49

Úvod

DEA (Data Envelopment Analysis) je relatívne nový „dáta orientovaný“ prostriedok multikriteriálneho manažmentu. Jedná sa o teóriu, ktorá umožňuje navzájom porovnávať výkonnosť resp. efektívnosť skupiny odborných subjektov, nazývaných DMU (Decision making units), v preklade rozhodovacie útvary (jednotky). Príkladom týchto útvarov môžu byť pobočky obchodných reťazcov, filiálky bánk, školy alebo zdravotnícke zariadenia.

DEA teória sa venuje hlavne vyhodnocovaniu efektivity v rámci homogénnej skupiny jednotiek. Intuitívne nám môže byť jasné, čo slovo efektívnosť znamená. Slovo efektívnosť v slovníku cudzích slov predstavuje vyjadrenie konkrétneho účinku alebo efektu, to znamená že ide o praktickú účinnosť nejakej činnosti. Z matematického hľadiska predstavuje DEA teória jednoduchú aplikáciu matematického resp. lineárneho programovania, pretože každý model je vo svojej podstate optimalizačný problém.

Za posledné roky sme sa mohli stretnúť s početnými aplikáciami tejto teórie v rôznorodých oblastiach operačného výskumu po celom svete. Teória DEA je používaná hlavne ekonómami, manažérmi a odborníkmi z oblasti operačného výskumu a aplikovaná v rôznorodých sférach spoločnosti ako napríklad obchod, štátna správa, zdravotníctvo, školstvo, marketing alebo šport.

DEA teória bola prvýkrát prezentovaná v sedemdesiatych rokoch minulého storočia, opierala sa však o článok Farrella, ktorý bol prezentovaný už roku 1957. V súčasnosti môžeme nájsť rozsiahle knižné publikácie k problematike DEA modelov, ktorých zoznam možno nájsť na stránke [8]. V slovenskom jazyku je spracovaných niekoľko bakalárskych, diplomových či dizertačných prác. Spolu s vývojom teórie prišla potreba aplikovať teóriu na konkrétne dáta za využitia počítačov. V dnešnej dobe existuje niekoľko softvérov či už komerčných, alebo nekomerčných, ktoré uľahčujú a zjednodušujú prácu, a zároveň vytvárajú priestor na hlbšiu analýzu dát. Zoznam niektorých dostupných softvérov je možné nájsť v článku Barr [2].

Cieľom tejto diplomovej práce bolo analyzovať výpočtové aspekty riešenia úloh lineárneho programovania pri obálkovej analýze dát. Rovnako sme sa venovali analyzovaniu dostupných DEA softvérov so zameraním na použité metódy, modely a veľkosti úloh.

Ďalším cieľom bolo rozšírenie bakalárskej práce Profanta [25] v oblasti tvorby webovej aplikácie pre interaktívnu možnosť riešenia DEA úloh. Úmyslom bolo rozšíriť už vytvorený softvér o nové modely a funkcie so zameraním na prehľadnú, zmysluplnú a zrozumiteľnú prezentáciu výsledkov tak, aby mohol konkurovať dostupným komerčným aj nekomerčným DEA solverom.

Prácu sme pomyselne rozdelili na dve časti, teoretickú a praktickú. V teoretickej časti uvedieme čitateľa do danej problematiky, vysvetlíme základné aj pokročilé modely, ich rozšírenia a numerické výpočty. V tejto časti sa budeme opierať hlavne o knihu Coopera, Seiforda, Toneho [3], knihu Zhua [28] a učebné texty Halickej [16] pre študentov programu Ekonomická a finančná matematika. V ďalších kapitolách uvedieme rozdelenie a popis jednotlivých dostupných softvérov. V praktickej časti sa sústredíme na popis a prezentáciu nami vytvoreného online softvéru. Zameriame sa hlavne na prezentáciu výsledkov a vysvetlenie jednotlivých častí programovania.

1 Úvod do DEA modelov

V tejto kapitole sa budeme venovať úvodu do DEA modelovania z obálkového pohľadu. Zdefinujeme dôležité ekonomické pojmy, ako efektívnosť, efektivita, DMU, množina produkčných možností, ktoré neskôr umožnia ekonomickú resp. praktickú interpretáciu modelov.

1.1 Základné označenia a predpoklady

Pojem DMU (decision making units) sme čiastočne vysvetlili v úvode. Jedná sa o útvary (jednotky), ktoré sú charakterizované vstupmi a výstupmi a majú dve dôležité vlastnosti, sú homogénne a flexibilné. Vlastnosť homogenity znamená, že útvary sú charakterizované produkciou identických alebo ekvivalentných výstupov s tým, že spotrebúvajú identické alebo ekvivalentné vstupy. Vlastnosť flexibility sa dá definovať tak, že jednotlivé vstupy resp. výstupy môžeme zamieňať za ich pomerné množstvo. Z ekonomického hľadiska však táto vlastnosť nemusí byť vždy splnená, napríklad v prípade filiálok bánk alebo reťazcov supermarketov, pretože môžeme byť určitým spôsobom limitovaní napríklad maximálnym počtom zamestnancov, alebo maximálnym vkladom na účet v banke. Útvary budeme označovať ako DMU_j , kde $j = 1, \dots, n$, hovoríme teda o j -tom útvere z danej množiny útvarov $1, \dots, n$. Útvar, o ktorom práve hovoríme budeme označovať DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$. Predpokladajme, že všetky útvary vykonávajú rovnakú činnosť. Táto činnosť je charakterizovaná m vstupmi a s výstupmi. Vstup (input) označuje vo všeobecnosti niečo, čo sa spotrebúva, resp. predstavuje nejaké náklady, napr. materiál, počet zamestnancov a pod. Výstup (output) je niečo, čo predstavuje úžitok, resp. kvalitu, napr. peniaze alebo počet spokojných zákazníkov. Hovoríme o i -tom vstupe, kde $i = 1, \dots, m$, a o r -tom výstupe, kde $r = 1, \dots, s$. Vektor hodnôt vstupov j -teho útvaru budeme označovať $x_j \in R^m$, výstupov $y_j \in R^s$. Hodnotu konkrétneho i -teho vstupu pre j -ty útvar budeme označovať x_{ij} , hodnotu r -teho výstupu pre j -ty útvar y_{rj} . Tieto hodnoty môžeme zapísať do matice vstupov

$X \in \mathbf{R}^{m \times n}$ a matice výstupov $Y \in \mathbf{R}^{s \times n}$:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & y_{s2} & \cdots & y_{sn} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

V ďalšom texte, pokiaľ nebude stanovené inak, budeme rovnako ako v [16] predpokladať:

Predpoklad 1.1. *Pre všetky $j \in 1, \dots, n$ platí, že $x_j \geq 0_m, x_j \neq 0_m, y_j \geq 0_s, y_j \neq 0_s$.*

Tento predpoklad je výsledkom ekonomického pohľadu na dáta. Uvažujeme kladné vstupy a kladné výstupy, keďže v praxi nie je možné spotrebovať záporný počet materiálu alebo zamestnať záporný počet pracovníkov, tak isto ako vyrobiť záporný počet tovaru.

1.2 Množina produkčných možností

V teórii DEA modelov poznáme dva možné prístupy k zisťovaniu efektivity, a to multiplikatívny a obáľkový, ktoré sú navzájom k sebe duálne. V našej diplomovej práci sme sa rozhodli vychádzať z obáľkového prístupu, nakoľko viac korešponduje s praktickou časťou. Tento prístup využíva pojem technológie a množiny produkčných (technologických) možností. Na základe existujúcich údajov o hodnotách vstupov a výstupov n útvarov a všeobecných vlastností množín produkčných možností sa skonštruuje určitá aproximácia množiny produkčných možností, ktorá obsahuje dáta n útvarov. Časť hranice tejto množiny sa potom definuje ako efektívna hranica a útvary na nej ležiace ako efektívne útvary. Podrobne je tento prístup analyzovaný v [16], tu uvedieme iba hlavné pojmy a vlastnosti potrebné pri interpretácii riešení jednotlivých modelov. Predpokladajme, že pre útvary $j = 1, \dots, n$ máme dáta o m vstupoch x_j a s výstupoch, ktoré

označíme y_j . Tieto útvary možno chápať ako body v priestore R^{m+s} . Všetky usporiadané dvojice vstupov a výstupov označíme pomocou množiny Z nasledovne:

$$Z = \{(x_j, y_j) \mid j = 1, \dots, n\}. \quad (3)$$

K množine Z vieme priradiť dva druhy základných množín, ktoré popisujú určitú aproximáciu množiny produkčných možností.

Prvá množina, ktorú budeme označovať M_{VRS} odpovedá tzv. variabilným výnosom z rozsahu a definujeme ju podľa [16] nasledovne:

Definícia 1.2. Pod M_{VRS} - aproximáciou množiny produkčných možností v prípade variabilných výnosov z rozsahu rozumieme najmenšiu množinu, ktorá spĺňa nasledovné axiómy:

$$(A1) \quad Z \subset M_{VRS}$$

$$(A2) \quad M_{VRS} \text{ je konvexná}$$

$$(A3) \quad \text{Ak } (x_A, y_A) \in M_{VRS}, \text{ potom } \{(x, y) \in R^{m+s} \mid x_A \leq x, y_A \geq y\} \subset M_{VRS}.$$

Prvá axióma tejto definície znamená, že všetky pozorované body zo Z patria do M . Druhá axióma v podstate hovorí, že s každými dvoma bodmi, ktoré sú v množine M_{VRS} obsahuje aj celú úsečku, ktorá ich spája, t.j. ak $(x_A, y_A), (x_B, y_B) \in M_{VRS}$, potom platí, že pre všetky $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ je aj $(\lambda x_A + (1 - \lambda)x_B, \lambda y_A + (1 - \lambda)y_B) \in M_{VRS}$. Posledná axióma hovorí, že ak $(x_A, y_A) \in M_{VRS}$, potom G obsahuje všetky body, ktoré majú oproti (x_A, y_A) väčšie (prípadne rovnaké) vstupy a menšie (prípadne rovnaké) výstupy. Táto axióma je zaujímavá aj z iného pohľadu, pripúšťa totiž aj záporné y .

Uveďme ešte analytický zápis množiny M_{VRS} . Postup ako zostrojiť túto množinu je dopodrobna popísaný v [16]. Idea spočíva vo vytvorení konvexného obalu množiny Z , pretože ten je najmenšou konvexnou množinou obsahujúcou množinu Z . Potom na tento konvexný obal aplikujeme axiómu (A3), čo znamená že do skonštruovanej množiny budú patriť aj body ležiace v konvexnom kuželi s vrcholom v príslušnom bode určenom nezápornými smermi x a nekladnými smermi y . Aproximovaná množina bude mať v analytickom zápise nasledovný tvar:

$$M_{VRS} = \{(x, y) \in R^{m+s} \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y, \lambda \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1\}. \quad (4)$$

Z postupu konštrukcie množiny M_{VRS} jednoznačne vyplývajú aj jej vlastnosti:

- M_{VRS} je uzavretá konvexná polyedrická množina.
- Každý krajný bod množiny M_{VRS} patrí do Z .
- M_{VRS} je v smeroch určených vektormi typu $(x_s, y_s) : x_s \leq 0_m, y_s \geq 0_s$ ohraničená.

V predchádzajúcich odsekoch sme sa venovali konštrukcii a vlastnostiam množiny M_{VRS} zodpovedajúcej variabilným výnosom z rozsahu. Teraz si zdefinujeme to isté aj pre konštantné výnosy z rozsahu. Príslušnú množinu odpovedajúcu konštantným výnosom z rozsahu budeme označovať M_{CRS} . Axiomatická definícia bude mať podľa [16] nasledovný tvar:

Definícia 1.3. Pod M_{CRS} - aproximáciou množiny produkčných možností v prípade konštantných výnosov z rozsahu rozumieme najmenšiu množinu, ktorá spĺňa nasledovné axiómy:

- (A1) $Z \subset M_{CRS}$
- (A2) M_{CRS} je konvexná
- (A3) Ak $(x_A, y_A) \in M_{CRS}$, potom $\{(x, y) \in R^{m+s} \mid x_A \leq x, y_A \geq y\} \subset M_{CRS}$.
- (A4) Ak $(x_A, y_A) \in M_{CRS}$, potom $(cx_A, cy_A) \in M_{CRS}$, pre každé $c > 0$

Na tejto definícii si môžeme všimnúť, že je v podstate identická s Definíciou 1.2, pridali sme však novú axiómu (A4), ktorá sa preto nazýva aj axiómou konštantných výnosov z rozsahu.

Postup ako vytvoriť analytický zápis množiny M_{CRS} je rovnaký ako tomu bolo pri množine M_{VRS} , musíme však zohľadniť navyše poslednú axiómu (A4). To geometricky znamená, že s každým bodom už skonštruovanej množiny podľa axióm (A1) - (A3) tam bude patriť aj celá polpriamka, ktorá začína v počiatku súradnej sústavy a prechádza daným bodom. Analytický zápis M_{CRS} je nasledovný:

$$M_{CRS} = \{(x, y) \in R^{m+s} \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y, \lambda \geq 0\}. \quad (5)$$

Jediným rozdielom oproti zápisu (4) je, že zmizla podmienka $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$. Množina M_{CRS} taktiež spĺňa určité vlastnosti, ktoré sú pre nás zaujímavé:

- M_{CRS} je uzavretý konvexný polyedrický kužeľ.
- Na každej krajnej polpriamke množiny M_{CRS} leží aspoň jeden bod množiny Z .

- M_{CRS} je v smeroch určených vektormi typu $(x_s, y_s) : x_s \leq 0_m, y_s \geq 0_s$ ohraničená.

Poznamenajme, že v ďalšom texte, ak budeme hovoriť o množine M , budeme tým rozumieť M_{VRS} alebo M_{CRS} .

1.3 Efektívna hranica

Keď sme sa v Kapitole 1.2 venovali konštrukciám množín M_{VRS} a M_{CRS} prišli sme na to, že sú ohraničené v smeroch $(x_s, y_s) : x_s \leq 0_m, y_s \geq 0_s$. Vieme, že pod pojmom hranica množiny M chápeme množinu takých bodov $(x, y) \in M$, pre ktoré v každom jeho okolí existuje taký bod (x_N, y_N) , ktorý nepatrí do množiny M . Hranicu potom označujeme δM .

Pretože sme v (A3) a v Definíciách 1.2 a 1.3 dopustili, aby $y < 0$, body, kde platí že $y = 0$ nie sú súčasťou hranice. Hranicu teraz rozložíme na dve časti, ktoré definujeme podľa [16] nasledovne:

Definícia 1.4.

- Pod hranicou efektívnosti H_E rozumieme množinu

$$H_E := \{(x, y) \in \delta M \mid \nexists (\bar{x}, \bar{y}) \in M : (\bar{x}, \bar{y}) \neq (x, y), \bar{x} \leq x, \bar{y} \geq y\}. \quad (6)$$

- Pod hranicou pseudoefektívnosti H_P rozumieme množinu

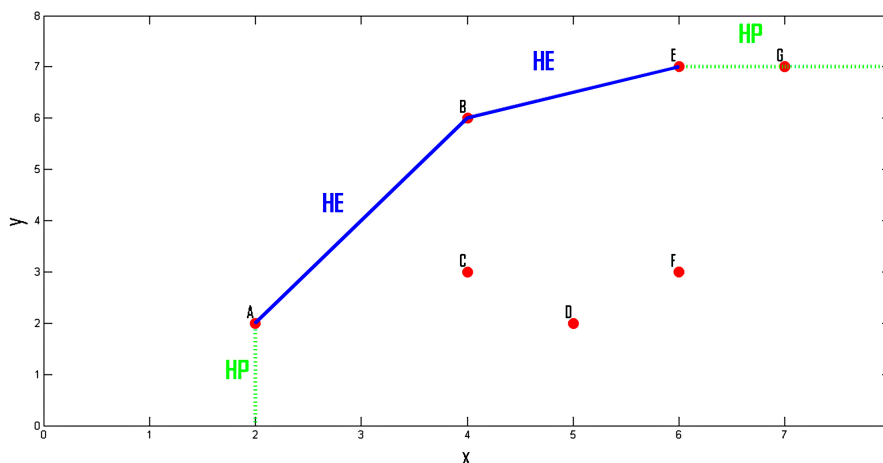
$$H_P := \{(x, y) \in \delta M \mid \exists (\bar{x}, \bar{y}) \in M : (\bar{x}, \bar{y}) \neq (x, y), \bar{x} \leq x, \bar{y} \geq y\}. \quad (7)$$

Na základe tejto definície potom môžeme jednotlivé $(x_o, y_o) \in M$ klasifikovať nasledovne:

- Bod $(x_o, y_o) \in M$ nazývame efektívny v M , ak (x_o, y_o) je z hranice efektívnosti H_E .
- Bod $(x_o, y_o) \in M$ nazývame pseudoefektívny v M , ak (x_o, y_o) je z hranice pseudoefektívnosti H_P .
- Bod $(x_o, y_o) \in M$ nazývame neefektívny v M , ak (x_o, y_o) je zvnútra M alebo z pseudoefektívnej hranice H_P .

Poznamenajme, že definícia hranice efektívnosti a efektívnych bodov v M je v súlade s Pareto-efektívnosťou vzhľadom na množinu M a preferenciu minimalizácie vstupov a maximalizácie výstupov. Bližšie súvislosti sú objasnené v [16].

Na Obrázku 1 vidíme príklad množiny produkčných možností pre variabilné výnosy z rozsahu generované bodmi A až G . Úsečky AB a BE tvoria jej efektívnu hranicu.



Obr. 1: Efektívne a neefektívne útvary v prípade VRS

1.4 Efektívny vzor

Hlavným cieľom konkrétnych DEA modelov je zistiť, ktoré $DMU \in Z$ sú efektívne, teda ktoré ležia na hranici efektívnosti množiny M . V prípade neefektívnych $DMU \in Z$ je však potreba nejako odmerať túto neefektívnosť resp. mieru neefektívnosti. Zatiaľ čo efektívnosť je vlastnosť, ktorá je jednoznačne definovaná polohou útvaru na hranici efektívnosti H_E pre M_{VRS} alebo M_{CRS} , miera neefektívnosti nie je jednoznačne určená a každý model sa s týmto problémom snaží vysporiadať svojim spôsobom. V tejto práci budeme mieru neefektívnosti nazývať efektivitou resp. mierou efektivity.

Pomocou obáľkového prístupu vieme všetkým útvarom priradiť takzvané fiktívne efektívne útvary, ktoré môžu slúžiť ako vzor pre daný útvar. Vzor a efektívny vzor sú v [16] definované nasledovne:

Definícia 1.5. *Nech $(x_o, y_o) \in M$. Pod vzorom bodu (x_o, y_o) v množine M rozumieme ľubovoľný bod $(x^v, y^v) \in M$ taký, že $x^v \leq x_o$ a $y^v \geq y_o$. Ak je vzor (x^v, y^v) efektívnym*

bodom v množine M , tak ho nazývame efektívnym vzorom.

Je triviálne určiť efektívny vzor pre bod $(x_o, y_o) \in M$, ktorý je efektívnym bodom v M , pretože tento bod nemá žiadne vzory resp. sám si je vzorom. Ako však určiť efektívne vzory pre neefektívne útvary? Rozličné modely si volia rozličné spôsoby výberu efektívneho vzoru. Toto v praxi môže spôsobiť, že pre jednotlivé modely dostávame rozličné miery efektivity, čo môže byť veľakrát metúce pri interpretácií výsledkov. V každom prípade, efektivita by mala byť bezrozmernou veličinou, ktorá je definovaná na intervale $\langle 0, 1 \rangle$, tak aby efektívny útvar mal efektivitu rovnú 1, čo nám pomôže pri interpretácií výsledkov, lebo budeme vedieť povedať, na koľko percent daná jednotka pracuje, a potom sa už môžeme zamerať na príslušné kroky určené na zlepšenie tejto jednotky. Definíciu efektivity uvedieme zvlášť pre každý zo základných modelov uvedených v ďalších kapitolách.

Za základné modely budeme považovať CCR, BCC a aditívny model (ozn. AD). Prvé dva spomenuté modely patria do kategórie takzvaných orientovaných modelov, čo súvisí s určitou preferenciou vstupov resp. výstupov pri výbere efektívneho útvaru. CCR model sa zároveň viaže na konštantné výnosy z rozsahu, zatiaľ čo BCC model je jeho analógia pre variabilné výnosy z rozsahu. AD model vystupuje v obidvoch verziách, teda aj pre CRS, aj pre VRS a patrí do skupiny neorientovaných modelov, keďže sa neriadi žiadnou preferenciou na vstupy alebo výstupy. Pri uvádzaní jednotlivých modelov a definícií sa budeme opierať o monografie [6], [3] a [28] ako aj o učebný text [16].

2 CCR model

CCR model patrí medzi najpožívanejšie modely v teórii DEA modelov. Od svojho vzniku, v roku 1978, dokázal nájsť uplatnenie v praktických prípadoch hodnotenia efektivity v rozličných sférach. Zadefinujeme znenie vstupného aj výstupného modelu a budeme ich prezentovať v obidvoch tvaroch, a to v obáľkovom aj multiplikatívnom.

CCR model, tak ako sme spomenuli v úvode, zodpovedá konštantným výnosom z rozsahu, viaže sa teda na príslušnú množinu M_{CRS} definovanú v Kapitole 1.2. Útvar, označený týmto modelom ako efektívny, leží na hranici efektívnosti množiny M_{CRS} . Efektivitu budeme vo všeobecnosti označovať E_o pre $o \in \{1, \dots, n\}$. Pri definíciách efektivity tohto modelu budeme využívať koeficient radiálneho skracovania vstupov θ^* , resp. koeficient radiálneho predlžovania výstupov ψ^* ako:

$$E = \theta^* = \frac{1}{\psi^*}, \quad (8)$$

kde θ^* a ψ^* majú nasledovný analytický zápis:

$$\theta^* = \min\{\theta \mid (\theta x_o, y_o) \in M_{CRS}\}, \quad (9)$$

$$\psi^* = \max\{\psi \mid (x_o, \psi y_o) \in M_{CRS}\}. \quad (10)$$

Na základe týchto zápisov rozlišujeme vstupný a výstupný model. Pri vstupnom modeli maximálne skracujeme vstupy pri nezmenšených hodnotách výstupov. Pri výstupnom modeli maximálne predlžujeme výstupy pri nezväčšených hodnotách vstupov. Vzhľadom na analytický zápis množiny M_{CRS} podľa vzťahu (5) definujeme vstupný a neskôr aj výstupný obáľkový model aj s príslušnými definíciami efektivity nasledovne:

Definícia 2.1. [16] (*Vstupný obáľkový CCR model*) Pod vstupným CCR modelom v obáľkovom zápise, označenie (CCR – I – OM) aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu:

$$(CCR - I - OM)_o: \quad \min_{\theta, \lambda, s^x, s^y} \theta \quad (11)$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^x = \theta x_o, \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^y = y_o, \quad (13)$$

$$\lambda \geq 0_n, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s. \quad (14)$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie budeme označovať θ_o^* .

Interpretácia riešení tohoto modelu je uvedená v Tabuľke 1: Definícia 2.1 sa oproti

Tabuľka 1: Interpretácia riešení $(CCR - I - OM)_o$

Požiadavky na s^{x^*}, s^{y^*}	Požiadavky na θ_o^*	DMU_o je	θ_o^* vyjadruje
$\forall_{s^{x^*}, s^{y^*} opt.r.} : (s^{x^*}, s^{y^*}) = (0, 0)$	$\theta_o^* = 1$	efektívne	efektivitu
$\forall_{s^{x^*}, s^{y^*} opt.r.} : (s^{x^*}, s^{y^*}) = (0, 0)$	$\theta_o^* < 1$	neefektívne	efektivitu
$\exists_{s^{x^*}, s^{y^*} opt.r.} : (s^{x^*}, s^{y^*}) \neq (0, 0)$	$\theta_o^* = 1$	pseudoefektívne	pseudoefektivitu
$\exists_{s^{x^*}, s^{y^*} opt.r.} : (s^{x^*}, s^{y^*}) \neq (0, 0)$	$\theta_o^* < 1$	neefektívne	pseudoefektivitu

štandardnej definícii uvádzanej v knihe [3] líši pridaním doplnkových premenných s^x, s^y . Tieto nezáporné doplnkové premenné (angl. slacks) sme pridali, aby sme dostali ohraničenia v tvare rovnosti. Doplnkové premenné však majú aj hlbší matematický význam, ktorý odhalíme neskôr. Zatiaľ si ich však môžeme interpretovať z ekonomického pohľadu, kde s^x môžeme chápať ako nejakú nadmernú spotrebu vstupov a s^y ako určité nedostatky pri výstupoch napr. stratenú výrobu, ktoré hodnota θ^* nezachytila.

Hore uvedený model je v obáľkovej forme ako úloha lineárneho programovania (LP), ktorý chápeme ako primárnu úlohu. Podľa silnej vety o dualite uvedenej napr. v [24] vieme povedať, že ak existuje optimálne riešenie primárnej úlohy, potom existuje optimálne riešenie aj pre duálnu úlohu a hodnoty účelových funkcií sa rovnajú. Zdefinujeme duálny model k obáľkovému modelu, ktorý budeme nazývať multiplikatívny:

Definícia 2.2. (*Vstupný multiplikatívny CCR model*) Pod vstupným CCR modelom v multiplikatívnom zápise, označenie $(CCR - I - MM)_o$, aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu:

$$(CCR - I - MM)_o: \quad \max_{u, v} u^T y_o \quad (15)$$

$$s. t. \quad v^T x_o = 1, \quad (16)$$

$$u^T y_j - v^T x_j \leq 0, j = 1, \dots, n \quad (17)$$

$$u \geq 0_s, v \geq 0_m. \quad (18)$$

Účelovú funkciu budeme označovať $U_o(u, v) := u^T y_o$ a jej optimálnu hodnotu U_o^* .

Tabuľka 2: Interpretácia riešení $(CCR - I - MM)_o$

Požiadavky na u^*, v^*	Požiadavky na U_o^*	DMU_o je	U_o^* vyjadruje
$\exists_{u^*, v^* opt.r.} : (u^*, v^*) > (0, 0)$	$U_o^* = 1$	efektívne	efektivitu
$\exists_{u^*, v^* opt.r.} : (u^*, v^*) > (0, 0)$	$U_o^* < 1$	neefektívne	efektivitu
$\nexists_{u^*, v^* opt.r.} : (u^*, v^*) > (0, 0)$	$U_o^* = 1$	pseudoefektívne	pseudoefektivitu
$\nexists_{u^*, v^* opt.r.} : (u^*, v^*) > (0, 0)$	$U_o^* < 1$	neefektívne	pseudoefektivitu

Interpretácia riešenia $(CCR - I - MM)_o$ je zrejmá z Tabuľky 4. Všimnime si, že v účelovej funkcii duálneho modelu vystupujú premenné u, v , ktoré sa nazývajú váhy, kde u vyjadruje váhy pre výstupy a v vyjadruje váhy pre vstupy. V účelovej funkcii vstupného modelu potom maximalizujeme vážený súčet výstupov pri normalizovanej hodnote váženého súčtu vstupov. Analogicky vo výstupnom modeli minimalizujeme vážený súčet vstupov pri normalizovanej hodnote váženého súčtu výstupov.

Definície pre CCR výstupný model sú analogické a uvedieme ich v nasledovnom tvare:

Definícia 2.3. (*Výstupný obáľkový CCR model*) Pod výstupným CCR modelom v obáľkovom zápise, označenie $(CCR - O - OM)$ aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu:

$$(CCR - O - OM)_o: \quad \min_{\Psi, \lambda, s^x, s^y} \Psi \quad (19)$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^x = x_o, \quad (20)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^y = \Psi y_o, \quad (21)$$

$$\lambda \geq 0_n, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s. \quad (22)$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie budeme označovať Ψ_o^* .

Definícia 2.4. (*Výstupný multiplikatívny CCR model*) Pod výstupným CCR modelom v multiplikatívnom zápise, označenie $(CCR - O - MM)$, aplikovaným na DMU_o , kde

$o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu::

$$(CCR - O - MM)_o: \quad \min_{u,v} v^T x_o \quad (23)$$

$$s.t. \quad u^T y_o = 1, \quad (24)$$

$$u^T y_j - v^T x_j \leq 0, j = 1, \dots, n \quad (25)$$

$$u \geq 0_s, v \geq 0_m. \quad (26)$$

Účelovú funkciu budeme označovať $V_o(u, v) := v^T x_o$ a jej optimálnu hodnotu V_o^* .

Interpretácia riešení výstupného CCR obáľkového a multiplikatívneho modelu sú zrejme z Tabuliek 3 a 4.

Tabuľka 3: Interpretácia riešení $(CCR - O - OM)_o$

Požiadavky na s^{x^*}, s^{y^*}	Požiadavky na Ψ_o^*	DMU_o je	$\frac{1}{\Psi_o^*}$ vyjadruje
$\forall_{s^{x^*}, s^{y^*} opt.r.} : (s^{x^*}, s^{y^*}) = (0, 0)$	$\Psi_o^* = 1$	efektívne	efektivitu
$\forall_{s^{x^*}, s^{y^*} opt.r.} : (s^{x^*}, s^{y^*}) = (0, 0)$	$\Psi_o^* < 1$	neefektívne	efektivitu
$\exists_{s^{x^*}, s^{y^*} opt.r.} : (s^{x^*}, s^{y^*}) \neq (0, 0)$	$\Psi_o^* = 1$	pseudoejektívne	pseudoejektivitu
$\exists_{s^{x^*}, s^{y^*} opt.r.} : (s^{x^*}, s^{y^*}) \neq (0, 0)$	$\Psi_o^* < 1$	neefektívne	pseudoejektivitu

Tabuľka 4: Interpretácia riešení $(CCR - I - MM)_o$

Požiadavky na u^*, v^*	Požiadavky na V_o^*	DMU_o je	$\frac{1}{V_o^*}$ vyjadruje
$\exists_{u^*, v^* opt.r.} : (u^*, v^*) > (0, 0)$	$V_o^* = 1$	efektívne	efektivitu
$\exists_{u^*, v^* opt.r.} : (u^*, v^*) > (0, 0)$	$V_o^* < 1$	neefektívne	efektivitu
$\nexists_{u^*, v^* opt.r.} : (u^*, v^*) > (0, 0)$	$V_o^* = 1$	pseudoejektívne	pseudoejektivitu
$\nexists_{u^*, v^* opt.r.} : (u^*, v^*) > (0, 0)$	$V_o^* < 1$	neefektívne	pseudoejektivitu

CCR model sme si definovali z pohľadov vstupov a výstupov pre primárnu aj duálnu úlohu. Keďže sa jedná o úlohy lineárneho programovania, mohlo by nás zaujímať, ako súvisí primárna úloha s duálnou. Podľa komplementarity úloh LP definovanej v [24] môžeme sformulovať nasledovnú vetu v tvare ekvivalencie, ktorá je aj s dôkazom uvedená v [16].

Veta 2.5. $\exists_{(u^*, v^*) opt.r. (MM)} : u^* > 0, v^* > 0 \Leftrightarrow \forall_{s^{x^*}, s^{y^*} opt.r. (OM)} : s^{x^*} = 0, s^{y^*} = 0.$

2.1 Pseudoefektivita

Pri určovaní efektivity CCR modelu máme problém, ako určiť či optimálna hodnota účelovej funkcie vyjadruje efektivitu alebo pseudoefektivitu. V podstate hľadáme nejaký numerický výpočet, ako overiť Vetu 2.5. Existuje niekoľko spôsobov, ako to urobiť.

Metóda vnútorného bodu je osvedčený spôsob, pretože jej aplikáciou získame optimálne riešenia primárnej, a súčasne aj duálnej úlohy $(u^*, v^*, s^{x*}, s^{y*})$, ktoré sú navzájom ostro komplementárne, to znamená že práve jeden činiteľ v každom z komplementárnych súčinov $v_i^* s_i^{x*}$, $i = 1, \dots, m$ a $u_r^* s_r^{y*}$, $r = 1, \dots, s$ je nulový. Podľa toho, ktorý z modelov sme riešili rozlíšujeme niekoľko prípadov:

1. Obáľková forma modelu:

- Ak sme dostali $(s^{x*}, s^{y*}) \neq 0$, dostávame podľa Vety 2.5 pseudoefektivitu.
- Ak sme dostali $(s^{x*}, s^{y*}) = 0$, tak z ostrej komplementarity dostaneme, že (u^*, v^*) neobsahuje žiadny nulový prvok, teda $(u^*, v^*) > 0$. Je splnená podmienka vo Vete 2.5 a identifikovali sme efektivitu.

2. Multiplikatívna forma modelu:

- Ak sme dostali $u^* > 0, v^* > 0$, dostávame podľa Vety 2.5 efektivitu.
- Ak sme dostali nejakú zložku vektora (u^*, v^*) nulovú, tak z ostrej komplementarity dostaneme príslušnú zložku vektora (s^{x*}, s^{y*}) nenulovú. Nie je teda splnená podmienka vo Vete 2.5, ide o pseudoefektivitu.

Nasledujúce dve metódy nie sú závislé od spôsobu riešenia úlohy lineárneho programovania, a teda môžu byť riešené aj simplexovou metódou.

Prvou z nich je tzv. **epsilonová metóda**. Pri multiplikatívnom modeli zmeníme ohraničenia $u^* > 0, v^* > 0$ na ohraničenia v tvare $u^* > \epsilon e, v^* > \epsilon e$, kde ϵ je veľmi malé číslo a e je vektor samých jednotiek. Pri obáľkovom modeli sa situácia komplikuje, keďže musíme zmeniť celú účelovú funkciu. Účelová funkcia pre vstupne orientovaný model bude v tvare: $\min_{\theta, \lambda} \theta - \epsilon(s^{xT} e + s^{yT} e)$, pre výstupne orientovaný model: $\min_{\psi, \lambda} \psi + \epsilon(s^{xT} e + s^{yT} e)$. Odhaľovanie pseudoefektivity pomocou tejto metódy má veľa nevýhod, pretože zvyčajne nevieme spoľahlivo určiť hodnotu ϵ . Ak bude ϵ príliš veľké, úloha v

obáľkovom modeli by sa mohla stať neohraničenou, ak by naopak ϵ bolo príliš malé, mohli by sme mať problém s numerickými výpočtami.

Poslednou metódou, ktorej sa budeme venovať je **dvojfázová metóda**. Táto metóda sa dá dobre aplikovať na obáľkový model. Ukážeme použitie tejto metódy na vstupne orientovanom obáľkovom CCR modeli ($(CCR - I - OM)_o$). Najprv klasicky vyriešime danú úlohu lineárneho programovania. Ak v nájdenom riešení $(\theta^*, \lambda^*, s^{x*}, s^{y*})$ zistíme, že $(s^{x*}, s^{y*}) = 0$, budeme pokračovať v riešení tejto úlohy druhou fázou. Druhá fáza riešenia znamená, že zafixujeme $\theta = \theta^*$, pretože už poznáme optimálne riešenie a spomedzi optimálnych riešení potom hľadáme také, ktoré má maximálny súčet doplnkových premenných, budeme teda riešiť nasledovnú úlohu:

$$(CCR - I - OM - II)_o: \quad \max_{\lambda, s^x, s^y} e^T s^x + e^T s^y \quad (27)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^x = \theta^* x_o, \quad (28)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^y = y_o, \quad (29)$$

$$\lambda \geq 0_n, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s. \quad (30)$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie označíme \tilde{H} a optimálne riešenie označíme $(\tilde{\lambda}, \tilde{s}^x, \tilde{s}^y)$. Riešenie potom interpretujeme nasledovným spôsobom. Ak $\tilde{H} > 0$, tak niektorá zložka vektora $(\tilde{s}^x, \tilde{s}^y)$ musela výjsť kladná. Podmienka vo Vete 2.5 nie je splnená, pretože nájdený vektor doplnkových premenných je aj riešením pôvodnej úlohy, našli sme pseudoefektivitu. Ak $\tilde{H} = 0$, tak doplnkové premenné sú nezáporné, a teda platí, že $(\tilde{s}^x, \tilde{s}^y) = 0$, identifikovali sme efektivitu.

V **našej webovej aplikácii** budeme riešenie DEA modelov implementovať v programovacom jazyku Octave, ktorý pomocou vstavenej funkcie „glpk“ rieši úlohy lineárneho programovania metódou vnútorného bodu.

2.2 Vlastnosti CCR modelu

V tejto kapitole si popíšeme niekoľko základných vlastností, ktoré oddelíme do jednotlivých odsekov. Vlastnosti si vysvetlíme a uvedieme len slovne, bez zdĺhavých definícií a dôkazov, ktoré si čitateľ môže nájsť korektne matematicky zapísané v [16].

Podľa predchádzajúcich kapitol by malo byť intuitívne jasné, že vstupný a výstupný CCR model nejakou spolu súvisia. Obidva modely sme definovali analogicky a je zrejmé, že dokážeme vstupný model previesť na výstupný a naopak. Ide v podstate len o pre násobenie vstupného modelu $\frac{1}{\theta}$ a označenie $\bar{\lambda} := \frac{\lambda}{\theta}, \psi := \frac{1}{\theta}$. Pri prevode výstupného modelu na vstupný je táto operácia samozrejme analogická, teda predelenie hodnotou $\psi > 0$ a označenie $\theta := \frac{\bar{\lambda}}{\psi}, \theta = \frac{1}{\psi}$. Dôsledkom týchto prevodov je, že medzi optimálnou hodnotou θ^* vstupného CCR modelu a optimálnou hodnotou ψ^* výstupného CCR modelu pre DMU_o je nasledovný vzťah:

$$\theta^* = \frac{1}{\psi^*}. \quad (31)$$

Navyše ak (θ, λ) je prípustným riešením $(CCR - I - OM)$ modelu pre DMU_o , potom $(\frac{1}{\theta}, \lambda)$ je prípustným riešením $(CCR - O - OM)$ a naopak, ak $(\psi, \bar{\lambda})$ pre $\psi > 0$ je prípustným riešením $(CCR - O - OM)$ modelu pre DMU_o , potom $(\frac{1}{\psi}, \frac{\bar{\lambda}}{\psi})$ je prípustným riešením $(CCR - I - OM)$ pre DMU_o .

Na začiatku kapitoly o CCR modeli sme hovorili o radiálnom skracovaní vstupov alebo naťahovaní výstupov, zároveň sme definovali θ^* a ψ^* ako koeficienty maximálneho skrátania vstupov resp. maximálneho natiahnutia výstupov. Vzhľadom na to môžeme $(\theta^* x_o, y_o)$ označiť ako vstupnú, $(x_o, \psi^* y_o)$ ako výstupnú projekciu bodu (x_o, y_o) na hranicu δM_{CRS} . Problémom však môže byť že projekcia, či už vstupná alebo výstupná nebude z H_E (hranice efektívnosti), ale z H_P (hranice psedoeffectívnosti). V takomto prípade projekcia nie je efektívnym vzorom. Ak chceme nájsť efektívny vzor musíme použiť dvojfázovú metódu, a potom $(\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j^*, \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^*)$ dáva efektívny vzor. Toto je hlavný dôvod prečo sme v našej **webovej aplikácii** implementovali aj dvojfázovú metódu.

Ďalšou vlastnosťou DEA modelov je invariantnosť. Model je invariantný vzhľadom na určitú transformáciu vstupných údajov, ak po tejto transformácii ostane nezmenené rozdelenie jednotlivých DMU na efektívne a neefektívne a pre každé DMU ostane nezmenená optimálna hodnota účelovej funkcie. Rozlišujeme dva základné druhy invariantnosti, invariantnosť vzhľadom na posun a invariantnosť vzhľadom na zmenu jednotiek. CCR model je invariantný vzhľadom na zmenu jednotiek, nie je však invariantný na posun.

V Kapitole 1.4 sme uviedli požiadavku na efektivitu, aby to bola bezrozmerná veli-

čina na intervale $\langle 0, 1 \rangle$. Treba povedať, že optimálna hodnota účelovej funkcie θ^* resp. $\frac{1}{\psi^*}$ už tieto vlastnosti spĺňa, preto ju môžeme priamo chápať ako efektivitu resp. mieru efektivity.

Poslednou vlastnosťou, ktorou sa budeme zaoberať je monotónnosť z pohľadu miery efektivity. Miera efektivity je monotónna, ak u neefektívnych útvarov zvýšenie niektorého vstupu alebo zníženie niektorého výstupu, pri nezmenených hodnotách ostatných vstupov a výstupov, znamená zníženie hodnoty miery efektivity. Miera efektivity pre CCR model nie je monotónna, pretože neidentifikuje všetky zdroje neefektivity. V prípade, že nejaká neefektívnosť nebola zachytená v miere efektivity, tak takáto miera bola označená ako pseudoeffektivita. O veľkosti nepostihnutých zdrojov neefektívnosti napovedajú nenulové zložky vektorov s^x, s^y získané v druhej fáze riešenia podľa tretieho odseku v Kapitole 2.1.

2.3 Interpretácia výsledkov CCR modelu

Vhľadom na to, že v praktickej časti vytvárame aplikáciu na riešenie konkrétnych úloh, musíme vedieť interpretovať ich riešenia. V praxi nás pre CCR model bude zaujímať jeho optimálne riešenie resp. riešenie dvojfázovou metódou, ktoré je uvedené v Kapitole 2.1. V nasledujúcich Tabuľkách 5 a 6 sme prehľadne zhrnuli výsledky pre CCR vstupný a výstupný model. V stĺpci vysvetlenie sme kvôli prehľadnosti vynechali slovíčko optimálne.

Naša webová aplikácia poskytuje pri CCR modeli všetky hodnoty uvedené v Tabuľke 5 a 6. Pod rezervou sa v aplikácii rozumie vždy absolútna rezerva. Hodnota doplnkovej premennej sa rovná absolútnej rezerve iba pri výstupoch vo vstupnom modeli a iba pri vstupoch vo výstupnom modeli.

3 BCC model

BCC model je ďalším dôležitým modelom DEA analýzy. Ide v podstate o model, ktorý je analógiou k CCR modelu pre variabilné výnosy z rozsahu. Útvar, ktorý označíme za efektívny pomocou tohto modelu, leží na hranici efektívnosti množiny M_{VRS} , ktorú sme definovali v Kapitole 1.2. Platí aj analógia zápisov (9) a (10) v CCR modeli pre

Tabuľka 5: Výstup z CCR vstupného modelu

Premenná	Vysvetlenie	Model	Fáza
θ^*	hodnota úč. funkcie, (pseudo)efektivita	OM	I
U^*	hodnota úč. funkcie, (pseudo)efektivita	MM	I
u^*	hodnota váh vstupov	MM	I
v^*	hodnota váh výstupov	MM	I
(θ^*x_o, y_o)	projekcia v smere vstupov	OM	I
λ^*	referencia na efektívny vzor	OM	II
s_x^*	nezohľadnené rezervy pri vstupoch	OM	II
s_y^*	absolútne rezervy pri výstupoch	OM	II
$(\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j^*, \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^*)$	efektívny vzor	OM	II
$x_o - \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j^*$	absolútne rezervy vo vstupoch	OM	II

Tabuľka 6: Výstup z CCR výstupného modelu

Premenná	Vysvetlenie	Model	Fáza
$\frac{1}{\psi^*}$	prevrátená hodnota úč. f., (pseudo)efektivita	OM	I
$\frac{1}{V^*}$	prevrátená hodnota úč. f., (pseudo)efektivita	MM	I
u^*	hodnota váh vstupov	MM	I
v^*	hodnota váh výstupov	MM	I
(x_o, ψ^*y_o)	projekcia v smere výstupov	OM	II
λ^*	referencia na efektívny vzor	OM	II
s_x^*	absolútne rezervy pri vstupoch	OM	II
s_y^*	nezohľadnené rezervy pri výstupoch	OM	II
$(\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j^*, \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^*)$	efektívny vzor	OM	II
$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^* - y_o$	absolútne rezervy vo výstupoch	OM	II

koeficienty θ^*, ψ^* :

$$\theta^* = \min\{\theta \mid (\theta x_o, y_o) \in M_{VRS}\}, \quad (32)$$

$$\psi^* = \max\{\psi \mid (x_o, \psi y_o) \in M_{VRS}\}. \quad (33)$$

Na základe týchto zápisov vieme definovať obáľkový BCC model, ktorý sa od CCR modelu líši len pridaním ohraničenia $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$. V duálnom (multiplikatívnom) modeli sa táto zmena potom prejaví pribudnutím voľnej premennej $z \in R$. Definície BCC vstupného a výstupného modelu v obáľkovej a multiplikatívnej forme uvedieme podľa [16] nasledovne:

Definícia 3.1. (*Vstupný obáľkový BCC model*) Pod vstupným BCC modelom v obáľkovom zápise, označenie $(BCC - I - OM)$ aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu:

$$(BCC - I - OM)_o: \quad \min_{\theta, \lambda, s^x, s^y} \theta \quad (34)$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^x = \theta x_o, \quad (35)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^y = y_o, \quad (36)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda \geq 0_n \quad (37)$$

$$\lambda \geq 0_n, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s. \quad (38)$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie budeme označovať θ_o^* .

(*Vstupný multiplikatívny BCC model*) Pod vstupným BCC modelom v multiplikatívnom zápise, označenie $(BCC - I - MM)$ aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu:

$$(BCC - I - MM)_o: \quad \max_{u, v, z} u^T y_o + z \quad (39)$$

$$s.t. \quad v^T x_o = 1, \quad (40)$$

$$u^T y_j - v^T x_j + z \leq 0, j = 1, \dots, n \quad (41)$$

$$u \geq 0_s, v \geq 0_m, z \in R. \quad (42)$$

Účelovú funkciu budeme označovať $U_o(u, v) := u^T y_o + z$ a jej optimálnu hodnotu U_o^* .

(*Výstupný obáľkový BCC model*) Pod výstupným BCC modelom v obáľkovom zápise, označenie $(BCC - O - OM)$ aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme

úlohu:

$$(BCC - O - OM)_o: \quad \max_{\Psi, \lambda, s^x, s^y} \Psi \quad (43)$$

$$s. t. \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^x = x_o, \quad (44)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^y = \Psi y_o, \quad (45)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda \geq 0_n \quad (46)$$

$$\lambda \geq 0_n, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s. \quad (47)$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie budeme označovať Ψ_o^* .

(Výstupný multiplikatívny BCC model) Pod výstupným BCC modelom v multiplikatívnom zápise, označenie $(BCC-O-MM)$ aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu::

$$(BCC - O - MM)_o: \quad \max_{u, v, z} v^T x_o - z \quad (48)$$

$$s. t. \quad u^T y_o = 1, \quad (49)$$

$$u^T y_j - v^T x_j + z \leq 0, j = 1, \dots, n \quad (50)$$

$$u \geq 0_s, v \geq 0_m, z \in R. \quad (51)$$

Účelovú funkciu budeme označovať $V_o(u, v) := v^T x_o - z$ a jej optimálnu hodnotu V_o^* .

Poznámka 3.2. Optimálne riešenie pri BCC modeloch interpretujeme analogicky ako v prípade CCR modelov. Efektivitu (pseudoeffektivitu) určuje optimálna hodnota účelovej funkcie pri vstupnom modeli a pri výstupnom modeli je to jej prevrátená hodnota. Na vylúčenie pseudoeffektivity môžeme použiť jeden z postupov uvedených v Kapitole 2.1 .

Multiplikátor odpovedajúci ohraňovaniu $\sum \lambda_j = 1$ v obáľkovom modeli interpretujeme ako voľnú premennú z v multiplikatívnom modeli. Tento multiplikátor môžeme interpretovať aj ako váhu pre dodatočný vstup resp. výstup, ktorý nadobúda hodnotu 1 pre každé DMU . Pri voľnej premennej z pre vstupný model nie je dôležité s akým znamienkom vstupuje do vzťahov (39) a (41), dôraz však kladieme na to, aby to bolo rovnaké znamienko. Pri voľnej premennej z v prípade výstupného modelu je zase dôležité, aby vo vzťahoch (49) a (51) bolo znamienko rozdielne.

3.1 Rozsahová efektívita

Pri *VRS* sa jednotlivé *DMU* porovnávajú iba s tými *VRS* efektívnymi, ktoré majú približne rovnaké vstupy a výstupy, pri *CRS* sa porovnávajú so všetkými *CRS* efektívnymi, bez ohľadu na ich veľkosť. Naskytá sa nám otázka, aký typ výnosov z rozsahu zvoliť pri analýze konkrétnych dát? V praxi sa tento problém rieši napríklad tak, že sa na dáta aplikujú obidva prístupy. Použijeme model využívajúci *CRS* a k nemu analogický model využívajúci *VRS*, získané hodnoty potom porovnáme pomocou tzv. rozsahovej efektivity (*SE*). Vzorec pre rozsahovú efektívitu je nasledovný:

$$SE = \frac{E_{CRS}}{E_{VRS}} \leq 1. \quad (52)$$

SE určuje, aká pomerná časť neefektivity E_{CRS} jednotlivého *DMU* je spôsobená tým, že *DMU* operuje na nevhodnom výnose z rozsahu. Ďalšie techniky na určovanie vhodných výnosov z rozsahu môžeme nájsť v [5].

O výnosoch z rozsahu veľa napovie aj znamienko v optimálnej hodnote voľnej premennej z^* . Podľa [16], ak $z^* = 0$, efektívny vzor pre testované *DMU*_o leží na časti hranice odpovedajúcej konštantným výnosom z rozsahu. Ak $z^* > 0$, tak na časti hranice odpovedajúcej neklesajúcim výnosom z rozsahu, ak $z^* < 0$, tak nerastúcim výnosom z rozsahu. Rovnako vieme interpretovať hodnotu $\sum \lambda_j^*$ získanú z CCR modelu. Ak $\sum \lambda_j^* = 1$, tak efektívny vzor pre testované *DMU*_o pre variabilné výnosy z rozsahu leží na časti hranice odpovedajúcej konštantným výnosom z rozsahu, ak je $\sum \lambda_j^* < 1$, tak na časti hranice odpovedajúcej neklesajúcim výnosom z rozsahu, ak $\sum \lambda_j^* > 1$, tak nerastúcim výnosom z rozsahu.

3.2 Vlastnosti BCC modelu

V tejto kapitole uvedieme základné a pre našu prácu dôležité vlastnosti BCC modelu, ktoré nie sú všetky totožné s CCR modelom, akoby sa mohlo na prvý pohľad zdať. Opäť budeme vlastnosti uvádzať bez dôkazov a matematických viet, v prípade záujmu si ich čitateľ môže nájsť v [16].

O efektivite BCC modelu vieme v porovnaní s CCR modelom povedať, že $E_{BCC} \geq E_{CCR}$. To vyplýva z konštrukcií množín M_{CRS} a M_{VRS} , pretože platí, že $M_{CRS} \supset M_{VRS}$. Geometricky si to môžeme vysvetliť tak, že ak aplikujeme rovnaký druh projekcie na

ľubovoľný útvar, tak ten to bude mať ďalej k hranici efektívnosti množiny M_{CRS} ako ku hranici množiny M_{VRS} .

Rozdiel BCC modelu v porovnaní s CCR modelom je v tom, že už neplatí vzťah (31). Vo všeobecnosti môže nastať prípad, že θ^* môže vyjadrovať efektívnosť a $\frac{1}{\psi^*}$ pseudoefektívnosť, dokonca sa môžeme stretnúť aj s prípadom, že $\theta^* < 1$ a $\frac{1}{\psi^*} = 1$.

Modely BCC, tak ako aj CCR, sú invariantné vzhľadom na zmenu jednotiek. Model BCC vstupne orientovaný je invariantný vzhľadom na posun výstupov, ale nie je invariantný vzhľadom na posun vstupov. Pri posunoch zachováva klasifikáciu útvarov na efektívne a neefektívne. Model BCC výstupne orientovaný je invariantný vzhľadom na posun vstupov, ale nie je invariantný vzhľadom na posun výstupov. Pri posunoch tak isto zachováva klasifikáciu útvarov na efektívne a neefektívne.

Posledná nami uvedená vlastnosť pre BCC model sa týka monotónnosti. Rovnako ako pri CCR modeli aj pri BCC modeloch miera efektívnosti nie je monotónna.

3.3 Interpretácia výsledkov BCC modelu

Interpretácia výsledkov sa oproti CCR modelu zmení v chápaní optimálnej hodnoty účelovej funkcie (efektívnosti), ktorá vyplýva z druhého odseku v Kapitole 3.2 a v pridaní voľnej premennej z . Interpretácia výsledkov je uvedená v Tabuľkách 7 a 8.

4 Aditívny model

V predchádzajúcich kapitolách sme opísali vstupný resp. výstupný CCR a BBC model. Pri vstupnom modeli sme spokojní s výstupmi a snažíme sa radiálne skrátiť vstupy. Pri výstupnom modeli je to analogické, čiže sme spokojní so vstupmi a snažíme sa radiálne predĺžiť výstupy. V niektorých situáciách však nemusí byť vhodné preferovať vstupy pred výstupmi, či naopak. Vtedy musíme využiť neorientované modely, ktoré sa nezameriavajú ani na vstupy, ani na výstupy. Takýmto modelom je aj aditívny model, na ktorý sa opäť pozrieme najprv cez obálkový prístup. Aditívny model hľadá efektívny vzor spomedzi všetkých možných efektívnych vzorov tak, aby sa maximalizoval súčet doplnkových premenných (slackov), čo môžeme analyticky zapísať nasledovne:

$$\max_{s^x, s^y} \{e^T s^x + e^T s^y \mid (x_o - s^x, y_o + s^y) \in M, \quad s^x \geq 0_m, \quad s^y \geq 0_s\}. \quad (53)$$

Tabuľka 7: Výstup z BCC vstupného modelu

Premenná	Vysvetlenie	Model	Fáza
θ^*	hodnota úč. funkcie, (pseudo)efektivita	OM	I
U^*	účelová funkcia	MM	I
z^*	voľná premenná výnosov z rozsahu	I-MM	I
u^*	hodnota váh vstupov	MM	I
v^*	hodnota váh výstupov	MM	I
(θ^*x_o, y_o)	projekcia v smere vstupov	OM	I
λ^*	referencia na efektívny vzor	OM	II
s_x^*	nezohľadnené rezervy pri vstupoch	OM	II
s_y^*	absolútne rezervy pri výstupoch	OM	II
$(\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j^*, \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^*)$	efektívny vzor	OM	II
$x_o - \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j^*$	absolútne rezervy vo vstupoch	OM	II

Tabuľka 8: Výstup z BCC výstupného modelu

Premenná	Vysvetlenie	Model	Fáza
Ψ^*	hodnota úč. funkcie, (pseudo)efektivita	OM	I
$\frac{1}{V^*}$	prevrátená hodnota úč. f.	MM	I
z^*	voľná premenná výnosov z rozsahu	I-MM	I
u^*	hodnota váh vstupov	MM	I
v^*	hodnota váh výstupov	MM	I
(x_o, ψ^*y_o)	projekcia v smere výstupov	OM	II
λ^*	referencia na efektívny vzor	OM	II
s_x^*	absolútne rezervy pri vstupoch	OM	II
s_y^*	nezohľadnené rezervy pri výstupoch	OM	II
$(\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j^*, \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^*)$	efektívny vzor	OM	II
$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^* - y_o$	absolútne rezervy vo výstupoch	OM	II

Testovaný bod sa snažíme posunúť v smere zmenšenia vstupov a zväčšenia výstupov maximálne tak, aby po tomto posune ešte zostal v množine M . V prípade, že množina $M = M_{CRS}$, model odpovedá konštantným výnosom z rozsahu. V prípade, že $M = M_{VRS}$, model odpovedá variabilným výnosom z rozsahu. Využitím analytického zápisu množín M_{CRS} a M_{VRS} podľa vzťahov (4) a (5) môžeme sformulovať aditívny model v obálkovej forme odpovedajúci CRS a VRS aj s definíciou efektivity v tvare, ako môžeme nájsť v [16] nasledovne:

Definícia 4.1. (*Aditívny obáľkový CRS model*) Pod aditívnym modelom v obáľkovom zápise odpovedajúcim konštantným výnosom z rozsahu, označenie $(AD - OM - CRS)$, aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu:

$$(AD - OM - CRS)_o: \quad \min_{\lambda, s^x, s^y} -(e_m^T s^x + e_s^T s^y) \quad (54)$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^x = x_o, \quad (55)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^y = y_o, \quad (56)$$

$$\lambda \geq 0_n, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s. \quad (57)$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie budeme označovať A_o^{*CRS} .

Definícia 4.2. (*Aditívny obáľkový VRS model*) Pod aditívnym modelom v obáľkovom zápise odpovedajúcim variabilným výnosom z rozsahu, označenie $(AD - OM - VRS)$, aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu:

$$(AD - OM - VRS)_o: \quad \min_{\lambda, s^x, s^y} -(e_m^T s^x + e_s^T s^y) \quad (58)$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^x = x_o, \quad (59)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^y = y_o, \quad (60)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad (61)$$

$$\lambda \geq 0_n, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s. \quad (62)$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie budeme označovať A_o^{*VRS} .

Definícia 4.3. Ak pre optimálnu hodnotu úlohy $(AD - OM - CRS/VRS)_o$ platí, že $A_o^* = 0$, útvar DMU_o je efektívny. V opačnom prípade t.j., ak pre optimálnu hodnotu úlohy $(AD - OM - CRS/VRS)_o$ platí, že $A_o^* \neq 0$, útvar DMU_o je neefektívny.

Útvar je efektívny v zmysle Definície 4.3, len ak je efektívny aj v zmysle pareto-efektívnosti. Pri neorientovaných modeloch neuvažujeme pseudoefektivitu, pretože každým vzorom je vždy bod na efektívnej hranici t.j. efektívny vzor. Ak by to tak nebolo, potom optimálne riešenie $\lambda^*, s^{x*}, s^{y*}$ a vzor, ktorým je $(\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j^*, \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^*) = (x_o - s^{x*}, y_o + s^{y*})$ by bolo možné vyjadriť ako kombináciu niektorých efektívnych útvarov a doplnkovej premennej, ktorá by nás posunula na hranicu efektívnosti pozdĺž hranice pseudoefektívnosti. Definície 4.1 a 4.2 sú úlohami lineárneho programovania, preto k nim vieme zostrojiť duálnu úlohu nasledovne:

Definícia 4.4. (Aditívny multiplikatívny CRS model) Pod aditívnym modelom v multiplikatívnom zápise odpovedajúcim konštantným výnosom z rozsahu, označenie $(AD - OM - CRS)$, aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu:

$$(AD - MM - CRS)_o: \quad \max_{u,v} u^T y_o - v^T x_o \quad (63)$$

$$s.t. \quad u^T y_j - v^T x_j \leq 0, j = 1, \dots, n \quad (64)$$

$$u \geq e_s, v \geq e_m. \quad (65)$$

Účelovú funkciu budeme označovať $A_o(u, v) := u^T y_o - v^T x_o$ a jej optimálnu hodnotu A_o^* .

Definícia 4.5. (Aditívny multiplikatívny VRS model) Pod aditívnym modelom v multiplikatívnom zápise odpovedajúcim variabilným výnosom z rozsahu, označenie $(AD - OM - VRS)$, aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu::

$$(AD - MM - VRS)_o: \quad \max_{u,v,z} u^T y_o - v^T x_o + z \quad (66)$$

$$s.t. \quad u^T y_j - v^T x_j + z \leq 0, j = 1, \dots, n \quad (67)$$

$$u \geq e_s, v \geq e_m, z_o \in R. \quad (68)$$

Účelovú funkciu budeme označovať $A_o(u, v) := u^T y_o - v^T x_o + z$ a jej optimálnu hodnotu A_o^* .

Definícia efektivity je pre multiplikatívny model rovnaká ako pre obáľkový (vid' Definíciu 4.3).

Ak sme pri aditívnom modeli uvažovali VRS, tak si možno všimnúť analógiu s CCR a BCC modelom. V obáľkovej forme sa pridalo ohraňenie $\sum \lambda_j = 1$ a v multiplikatívnej forme voľná premenná z .

4.1 Aditívny model s váhami

Pri obáľkovom aditívnom modeli s váhami uvažujeme účelovú funkciu v tvare $(w^x)^T s^x + (w^y)^T s^y$, kde $w^x > 0, w^y > 0$ sú vopred zvolené vektory označované ako slackové váhy. V pôvodnom obáľkovom modeli $(AD-OM-CRS/VRS)_o$ bola účelová funkcia v tvare $e_m^T s^x + e_s^T s^y$, teda obyčajný súčet slackov. Táto zmena sa potom prejaví v ohraňeniach multiplikatívneho modelu $(AD-MM-CRS/VRS)_o$ zmenou podmienky $u \geq e_s, v \geq e_m$ na podmienku $u \geq w_y, v \geq w_x$. Účelom tejto modifikácie je vhodnejším výberom slackových váh zabezpečiť nezávislosť účelovej funkcie od voľby jednotiek, v ktorých sú vyjadrené jednotlivé vstupy a výstupy. Takýmto vhodným výberom je voľba váh v tvare:

$$w_i^x = \frac{1}{(m+s)R_i^x}, \quad i = 1, \dots, m \quad (69)$$

$$w_r^y = \frac{1}{(m+s)R_r^y}, \quad r = 1, \dots, s. \quad (70)$$

kde R_i^x, R_r^y sa napríklad rovná:

$$(a) \quad R_i^x = \max_j x_{ij}, \quad R_i^x = \max_j y_{rj},$$

$$(b) \quad R_i^x = \frac{1}{n} \sum_j x_{ij}, \quad R_i^x = \frac{1}{n} \sum_j y_{rj},$$

$$(c) \quad R_i^x = \max_j x_{ij} - \min_j x_{ij}, \quad R_i^x = \max_j y_{rj} - \min_j y_{rj},$$

(d) R_i^x je štandardná odchýlka i -teha vstupu R_r^y r -teho výstupu, t.j.

$$R_i^x = \sigma_i^x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}, \quad \bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij},$$

$$R_r^y = \sigma_r^y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_{rj} - \bar{y}_r)^2}, \quad \bar{y}_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{rj}.$$

V našej webovej aplikácii sme použili voľbu váh podľa poslednej možnosti (d).

4.2 Efektivita v Aditívnom modeli

Na rozdiel od CCR a BCC modelov, kde sme hodnotu účelovej funkcie mali v intervale $(0, 1)$ pri vstupnom modeli, alebo sme ju vedeli veľmi rýchlo a jednoducho upraviť do tohto intervalu pri výstupnom modeli, v aditívnom modeli je hodnota účelovej funkcie v intervale $(-\infty, 0)$. Aby sme vedeli rozumne interpretovať výsledky, musíme nejakým spôsobom preškálovať hodnotu účelovej funkcie do intervalu $(0, 1)$. Označme si optimálnu hodnotu účelovej funkcie β^* , podľa [27] máme niekoľko spôsobov škálovania:

$$E_O = e^{\beta^*} \quad (71)$$

$$E_P = \frac{1}{m+s} \left(\sum_i^m \frac{\hat{x}_i}{x_{io}^*} + \sum_j^s \frac{y_{jo}^*}{\hat{y}_j} \right) \quad (72)$$

$$E_D = \max \left\{ \frac{u^{*T} y_o + z^*}{v^{*T} x_o}, \frac{u^{*T} y_o}{v^{*T} x_o - z^*} \right\}. \quad (73)$$

V našej webovej aplikácii poskytujeme výpočet hodnoty E_P , pričom usporiadaná dvojica (\hat{x}, \hat{y}) je efektívny vzor pre DMU_o a výraz E_P sa dá interpretovať ako priemer parciálnych efektívít.

4.3 Vlastnosti aditívneho modelu

O niektorých vlastnostiach aditívneho modelu sme hovorili už v predchádzajúcich kapitolách. V tejto kapitole si v niekoľkých odstavcoch zhrnieme tie najdôležitejšie a pridáme ďalšie. Dopodrobna sú vlastnosti AD modelu zhrnuté v [16].

V úvode kapitoly 4 sme definovali jednotlivé modely a ich účelovú funkciu sme označili A_o^* , tá môže nadobúdať hodnoty z intervalu $(-\infty, 0)$. Optimálna hodnota tejto účelovej funkcie zároveň zachytáva všetku neefektívnosť. Útvar sa vždy posúva na hranicu efektívnosti, pretože do účelovej funkcie vstupujú hodnoty všetkých doplnkových premenných.

Čo sa týka invariantnosti, aditívny model nie je invariantný na zmenu jednotiek, zachováva sa však klasifikácia útvarov na efektívne a neefektívne. Aditívny model s váhami, pri voľbe váh uvedených v Kapitole 4.1 (a)-(d) je invariantný na zmenu jednotiek. Aditívny model s VRS je invariantný vzhľadom na posun, zatiaľ čo model s CRS nie je invariantný vzhľadom na posun.

Poslednou skúmanou vlastnosťou aditívneho modelu je monotónnosť, pretože optimálna hodnota účelovej funkcie, rovnako ako miery podľa vzorcov (71) a (72) sú monotónne.

4.4 Interpretácia výsledkov aditívneho modelu

Pri interpretácii výsledkov sa oproti CCR a BCC modelu zmenila účelová funkcia, ktorá má teraz označenie A^* a používa sa pri CRS aj VRS pre obáľkový, aj multiplikatívny model. Zároveň pribudla jedna voľná premenná v multiplikatívnom modeli pre VRS, ktorá sa označuje z_o . Prehľadne je interpretácia výsledkov aditívneho modelu spracovaná v Tabuľke 9:

Tabuľka 9: Výstup z aditívneho modelu

Premenná	Vysvetlenie	Model
A^*	hodnota účelovej funkcie	OM/MM-CRS/VRS
Ep	dopočítaná hodnota ef. podľa (72)	OM/MM-CRS/VRS
$(\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j^*, \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^*) = (\hat{x}, \hat{y})$	efektívny vzor	OM-CRS/VRS
s^{x^*}	absolútne rezervy vo vstupoch	OM-CRS/VRS
s^{y^*}	absolútne rezervy vo výstupoch	OM-CRS/VRS
λ^*	referencia na efektívny vzor	OM-CRS/VRS
u^*	hodnota váh vstupov	MM-CRS/VRS
v^*	hodnota váh výstupov	MM-CRS/VRS
z^*	voľná premenná výnosov z rozsahu	MM-VRS

5 SBM model

V predošlých kapitolách sme sa venovali CCR, BCC a aditívnemu modelu, ktoré sú jednoduché a pomerne dobre známe. V tejto kapitole sa budeme venovať SBM modelu, ktorý bol predstavený Tonem v roku 2000.

SBM alebo „slack based measure“ model vznikol na základe snahy odstrániť problémy, ktoré vznikli pri aditívnom modeli. Aditívny model síce spoľahlivo odlišuje efektívne útvary od neefektívnych, problémom však zostáva miera efektivity, pretože nie je z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Účelová funkcia aditívneho modelu spĺňa podmienku monotónnosti, čo je výhodou oproti CCR alebo BCC, nespĺňa však podmienku invariantnosti vzhľadom na zmenu jednotiek, čo je problém. Ako riešenie týchto problémov vznikol SBM model, kde sa oproti aditívnemu modelu zmenila iba účelová funkcia. Pri definícii SBM modelu budeme vychádzať z knihy [3]. Najprv si sformulujeme základný model, z ktorého budeme vychádzať pri formulácii ostatných modelov.

Definícia 5.1. (SBM) Pod SBM modelom, označenie (SBM), aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu matematického programovania:

$$(SBM)_o: \quad \min_{\lambda, s^x, s^y} \rho = \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^x}{x_{io}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^y}{y_{ro}}} \quad (74)$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^x = x_o, \quad (75)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^y = y_o, \quad (76)$$

$$\lambda \geq 0_n, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s. \quad (77)$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie budeme označovať ρ_o^* .

Treba si všimnúť, že podmienky prípustnosti tohoto modelu sú rovnaké ako podmienky prípustnosti pre aditívny model odpovedajúci CRS. Práve sformulovaný model sa teda logicky viaže na množinu M_{CRS} . Pre množinu M_{VRS} dostávame model pre VRS, čo sa v podstate prejaví iba pridaním podmienky $\sum \lambda_j = 1$.

Uveďme si ešte definíciu efektivity útvaru podľa SBM modelu v tvare [16]. Táto definícia bude platiť pre všetky typy SBM modelov, ktoré ďalej uvedieme v tejto kapitole.

Definícia 5.2. *SBM-mierou efektívnosti útvaru $DMU_o = (x_o, y_o)$ nazveme optimálnu hodnotu účelovej funkcie úlohy (SBM) v bode (x_o, y_o) . Útvar $DMU_o = (x_o, y_o)$ je SBM-efektívny, ak pre jeho SBM-mieru efektívnosti platí: $\rho^* = 1$.*

Poznamenajme, že SBM model predpokladá kladné vstupy aj výstupy. V [3] je navrhnuté ako postupovať v prípade nulovej hodnoty v dátach. V **našej webovej aplikácii** sme tak isto predpokladali kladnosť vstupných a výstupných dát.

Skúsme sa pozrieť na tento model bližšie, predpokladajme, že $(s^{x*}, s^{y*}, \lambda^*)$ je optimálne riešenie úlohy (SBM). Optimálne rezervy si prepíšme do nasledovného tvaru:

$$s^{x*} = x_o - \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j^* \quad (78)$$

$$s^{y*} = \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^* - y_o. \quad (79)$$

Dosaďme tieto výrazy (78), (79) do účelovej funkcie a dostaneme účelovú funkciu v tvare:

$$\rho^* = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{(\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j^*)_i}{x_{io}}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{(\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^*)_r}{y_{io}}}. \quad (80)$$

Pre nás sú zaujímavé výrazy $\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j^*$ a $\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^*$, pretože predstavujú efektívny vzor. Čitateľ resp. menovateľ vieme interpretovať ako aritmetický priemer pomerov ideálnych vstupov resp. výstupov ku skutočným vstupom resp. výstupom.

V Definícii 5.1 sme definovali model v zlomkovom tvare, ktorý je však veľmi zložitý na riešenie. Oveľa jednoduchšou voľbou je riešiť úlohu lineárneho programovania. Do hĺbky je postup prevodu na úlohu LP vysvetlený v knihe [3], my si uvedieme len hlavnú ideu odvodenia: Účelovú funkciu vynásobíme číslom $t > 0$. Po tejto úprave sme dostali homogénnosť a môžeme normalizovať vstupy v účelovej funkcii. Dostaneme nasledovný

model, ktorý však ešte stále nie je úlohou lineárneho programovania:

$$(SBM)_o: \quad \min_{\lambda, t, s^x, s^y} \tau = t - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{ts_i^x}{x_{io}} \quad (81)$$

$$\text{s.t.} \quad t + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{ts_r^y}{y_{ro}} = 1, \quad (82)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^x = x_o, \quad (83)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^y = y_o, \quad (84)$$

$$\lambda \geq 0_n, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s, t > 0. \quad (85)$$

Aby sme dostali úlohu LP musíme v predchádzajúcom modeli nejakým spôsobom odstrániť dva problémy, súčiny ts_i^x , ts_r^y a ostrú podmienku $t > 0$. Prvý problém odstránime tak, že ohraničenia (83), (84) pre násobíme premennou t . Vzniknutých súčinov sa potom zbavíme veľmi ľahko substitúciou:

$$S^x = ts^x, \quad S^y = ts^y, \quad \Lambda = t\lambda. \quad (86)$$

Problém s ostrou nerovnosťou $t > 0$ vyriešime tak, že ju vypustíme. Na to aby sme to mohli urobiť musíme dokázať, že ju nepotrebujeme. Ak pripustíme, že $t > 0$ dostávame konflikt v nerovnosti (83). Ak by sa $t = 0$, potom z ohraničení (83), (84) a kladnosti vektorov x, y dostávame, že $S^x = 0, S^y = 0, \Lambda = 0$, čo je ale spor s ohraničením (82). Naše tvrdenie sme dokázali a konečne môžeme definovať SBM model ako úlohu lineárneho programovania. Model definujeme z pohľadu CRS aj VRS.

Definícia 5.3. *(SBM-OM-LP-CRS)* Pod SBM modelom v obálkovom tvare odpovedajúcim konštantným výnosom z rozsahu, označenie *(SBM – OM – LP – CRS)*,

aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu:

$$(SBM - OM - LP - CRS)_o: \quad \min_{\lambda, t, S^x, S^y} \tau = t - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{S_i^x}{x_{io}} \quad (87)$$

$$s.t. \quad t + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{S_r^y}{y_{ro}} = 1, \quad (88)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \Lambda_j + S^x = t x_o, \quad (89)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \Lambda_j - S^y = t y_o, \quad (90)$$

$$\Lambda \geq 0_n, S^x \geq 0_m, S^y \geq 0_s. \quad (91)$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie budeme označovať τ_o^{CRS*} .

Definícia 5.4. (*SBM-OM-LP-VRS*) Pod SBM modelom v obálkovom tvare odpovedajúcim variabilným výnosom z rozsahu, označenie (*SBM-OM-LP-VRS*), aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu:

$$(SBM - OM - LP - VRS)_o: \quad \min_{\lambda, t, S^x, S^y} \tau = t - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{S_i^x}{x_{io}} \quad (92)$$

$$s.t. \quad t + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{S_r^y}{y_{ro}} = 1, \quad (93)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \Lambda_j + S^x = t x_o, \quad (94)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \Lambda_j - S^y = t y_o, \quad (95)$$

$$\sum_{j=1}^n \Lambda_j = t, \quad (96)$$

$$\Lambda \geq 0_n, S^x \geq 0_m, S^y \geq 0_s. \quad (97)$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie budeme označovať τ_o^{VRS*} .

Vo všeobecnosti majú úlohy lineárneho programovania svoj duálny protajšok. Najprv si uveďme poznámku resp. zjednodušenie, ktoré nám pomôže pri zápise úlohy (*SBM-LP-CRS/VRS*)_o do duálneho tvaru:

Poznámka 5.5. Pre ľubovoľný kladný vektor $x \in R^n$ zavedme podľa [16] označenie

$$\frac{1}{x} := \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n} \right)^T.$$

Definícia 5.6. (*SBM-MM-LP-CRS*) Pod SBM modelom v multiplikatívnom tvare odpovedajúcim konštantným výnosom z rozsahu, označenie (*SBM – MM – LP – CRS*), aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu:

$$(SBM - MM - LP - CRS)_o: \quad \max_{\theta \in R, v \in R^m, u \in R^s} \theta = 1 + u^T y_o - v^T x_o \quad (98)$$

$$s.t. \quad u^T y_j - v^T x_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (99)$$

$$v \geq \frac{1}{m} \frac{1}{x_o}, \quad (100)$$

$$u \geq (1 + u^T y_o - v^T x_o) \frac{1}{s} \frac{1}{y_o}. \quad (101)$$

$$(102)$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie budeme označovať θ_o^{CRS*} .

Definícia 5.7. (*SBM-MM-LP-VRS*) Pod SBM modelom v multiplikatívnom tvare odpovedajúcim variabilným výnosom z rozsahu, označenie (*SBM – MM – LP – VRS*), aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu:

$$(SBM - MM - LP - VRS)_o: \quad \max_{\theta, z \in R, v \in R^m, u \in R^s} \theta = 1 + u^T y_o - v^T x_o + z \quad (103)$$

$$s.t. \quad u^T y_j - v^T x_j + z \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (104)$$

$$v \geq \frac{1}{m} \frac{1}{x_o}, \quad (105)$$

$$u \geq (1 + u^T y_o - v^T x_o) \frac{1}{s} \frac{1}{y_o}. \quad (106)$$

$$(107)$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie budeme označovať θ_o^{VRS*} .

5.1 Vstupný a výstupný SBM model

O vstupom SBM modeli hovoríme vtedy, keď zjednodušíme pôvodný (SBM) model tým, že berieme do úvahy iba jeho čitateľ. O výstupnom hovoríme vtedy, keď do úvahy berieme len menovateľ pôvodného modelu. Modely uvedieme v nasledovnom tvare:

Definícia 5.8. (*SBM-I*) Pod SBM vstupným modelom, označenie (*SBM – I*), apliko-

vaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu matematického programovania:

$$(SBM - I)_o: \quad \min_{\lambda, s^x, s^y} \rho_I = 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^x}{x_{io}} \quad (108)$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^x = x_o, \quad (109)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^y = y_o, \quad (110)$$

$$\lambda \geq 0_n, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s. \quad (111)$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie budeme označovať $\rho_{I_o}^*$.

Definícia 5.9. (SBM-O) Pod SBM výstupným modelom, označenie (SBM - O), aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu matematického programovania:

$$(SBM - O)_o: \quad \max_{\lambda, s^x, s^y} \rho_O = 1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^y}{y_{ro}} \quad (112)$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^x = x_o, \quad (113)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^y = y_o, \quad (114)$$

$$\lambda \geq 0_n, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s. \quad (115)$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie budeme označovať ρ_o^{O*} .

Miera efektivity pri vstupoch bude priamo hodnota účelovej funkcie $\rho_{I_o}^*$, pri výstupoch to bude rovnako ako pri CCR alebo BCC prevrátená hodnota $\frac{1}{\rho_o^{O*}}$. Pri týchto modeloch treba však upozorniť na to, že tu existuje rovnaký problém s odhaľovaním pseudoefektívnych útvarov ako to bolo pri CCR a BCC modeli. Aj tieto modely existujú vo verzii pre VRS, v obálkovej forme pribudne podmienka $\sum \lambda = 1$, v multiplikatívnej voľná premenná.

5.2 Vlastnosti SBM modelu

V tejto kapitole sa zameriame na dôležité vlastnosti SBM modelu, ktoré zhrnieme v niekoľkých odsekoch. Budeme ich uvádzať bez dôkazov, dopodrobna sú uvedené v [16].

Zamerajme sa najprv na účelovú funkciu a hodnotenie efektivity. V Definíciách 5.3 a 5.4 sme definovali SBM model pre CRS a VRS. Hodnotu účelovej funkcie ρ_o^* môžeme chápať aj ako efektivitu, pretože leží na intervale $\langle 0, 1 \rangle$ a navyše $\rho_o^* = 1$ len ak je útvar efektívny. Uvedomme si, že ak $\rho_o^* = 1$, tak má nulové doplnkové premenné $s^{*x} = 0$ a $s^{*y} = 0$. Ohľadom efektivity spĺňa SBM model aj ďalšiu dôležitú vlastnosť, a to že zohľadňuje všetky druhy neefektivity a preto platí tvrdenie, že $E_{SBM} \leq E_{CCR}$. SBM efektívne jednotky sú efektívne aj z pohľadu CCR modelu, avšak CCR pseudoefektívne jednotky sú SBM neefektívne, vieme teda spoľahlivo a bez ďalších výpočtov odhaliť pseudoefektivitu.

V úvode Kapitoly 5 sme vyčítavali aditívnemu modelu, že nespĺňal vlastnosť invariantnosti na zmenu jednotiek a očakávali sme, že SBM model tento problém odstráni. SBM je invariantný vzhľadom na zmenu jednotiek, nie je však invariantný vzhľadom na posun. Tak isto sme očakávali že SBM model bude mať vlastnosť monotónnosti, čo sa aj dá ľahko overiť.

5.3 Interpretácia výsledkov v SBM modeli

Interpretáciu výsledkov sme zhrnuli do nasledujúcej Tabuľky 10.

Tabuľka 10: Výstup z SBM modelu

Premenná	Vysvetlenie	Model
ρ^*	hodnota účelovej funkcie	OM/MM-CRS/VRS
s^{x*}	absolútne rezervy vo vstupoch	OM-CRS/VRS
s^{y*}	absolútne rezervy vo výstupoch	OM-CRS/VRS
λ^*	referencia na efektívny vzor	OM-CRS/VRS
u^*	hodnota váh vstupov	MM-CRS/VRS
v^*	hodnota váh výstupov	MM-CRS/VRS
z^*	voľná premenná výnosov z rozsahu	SBM-MM-CRS/VRS
$(\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j^* \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^*) = (\hat{x}, \hat{y})$	efektívny vzor	OM-CRS/VRS

6 AR model

Assurance Region model bol vyvinutý v roku 1986 Thompsonom, Singletonom a spol. Tento model vznikol na základe potreby zahrnúť do ohraničení modelov aj obmedzenia na váhy. V predchádzajúcich modeloch sme mali jedinou podmienku na váhy, a to bola nezápornosť hodnôt vstupov resp. výstupov a ich celková nenulovosť. Potreba ohraničiť nejakým spôsobom váhy bola logickým vyústením praktického používania DEA modelov, pretože vznikali situácie, v ktorých bolo nutné obmedziť prípustné váhy, a teda aj optimálne. Takéto situácie môžu vyplynúť priamo z podstaty problému alebo ak riešením modelu (napr. CCR) získame optimálne váhy, ktorých rozdiel alebo podiel zložiek je neprimerane veľký. Ďalším problémom by mohla byť potreba zohľadniť veľký počet vstupov resp. výstupov pre relatívne malý počet *DMU*. Jednou z možností ako vzniknuté problémy odstrániť je už spomínaná možnosť pridať do modelu ohraničenia na multiplikátory. V literatúre [3] možno nájsť príklad takéhoto ohraničenia v tvare:

$$d_{1,2} \leq \frac{v_2}{v_1} \leq h_{1,2} \quad (116)$$

kde $d_{1,2}$ je dolná a $h_{1,2}$ je horná hranica, ktorú môže pomer váh $\frac{v_1}{v_2}$ nadobúdať. Takéto ohraničenia je možné pridať ku ktorémukoľvek modelu a tým zúžiť množinu multiplikátorov. Štandardne sa rozlišujú ohraničenia zvlášť pre vstupy a zvlášť pre výstupy. Všetky ohraničenia prichádzajúce do úvahy zapíšeme podľa [16] nasledovne:

$$v_j d_{j,i} \leq v_i \leq v_j h_{j,i}, \quad \forall i \in \{j+1, \dots, m\}, j \in \{j, \dots, m-1\}, \quad (117)$$

$$u_q D_{q,r} \leq u_r \leq u_q H_{q,r}, \quad \forall r \in \{q+1, \dots, s\}, q \in \{1, \dots, s-1\}, \quad (118)$$

kde $d_{j,i}$, $h_{j,i}$, $D_{q,r}$, $H_{q,r}$ sú dolné a horné hranice. Treba ešte povedať, že nie je nutné využívať všetky ohraničenia, ak niektoré ohraničenie nie je potrebné, jednoducho ho vynecháme. Ohraničenia (117), (118) môžeme rozpísať nasledovne:

$$v_j d_{j,i} - v_i \leq 0, \quad -v_j h_{j,i} + v_i \leq 0 \quad \forall i \in \{j+1, \dots, m\}, j \in \{j, \dots, m-1\},$$

$$u_q D_{q,r} - u_r \leq 0, \quad -u_q H_{q,r} + u_r \leq 0 \quad \forall r \in \{q+1, \dots, s\}, q \in \{1, \dots, s-1\}.$$

Prepisom do maticového tvaru dostaneme:

$$P^T v \leq 0_\alpha, \quad Q^T u \leq 0_\beta,$$

kde $P \in R^{m \times \alpha}$ a $Q \in R^{s \times \beta}$ sú obdĺžnikové matice, ktoré môžeme schematicky znázorniť nasledovne:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} d_{12} & -h_{12} & d_{13} & -h_{13} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & d_{23} & -h_{23} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad (119)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} D_{12} & -H_{12} & D_{13} & -H_{13} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & D_{23} & -H_{23} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (120)$$

Takéto ohraňenia je možné pridať ku ktorémukoľvek modelu v multiplikatívnom tvare. Treba však počítať s tým, že sa určitým spôsobom zmenia aj vlastnosti daného modelu. Dá sa predpokladať zníženie efektívít, úbytok počtu efektívnych aj pseudoefektívnych útvarov. Pri voľbe ohraňení však treba byť opatrný, pretože by mohla vzniknúť neprípustnosť príslušnej úlohy.

V odbornej literatúre ale aj v praxi sa ohraňenia na voľbu váh spájajú hlavne s CCR modelom, preto zadefinujeme AR-CCR model podľa [16] nasledovne:

Definícia 6.1. (*Vstupný multiplikatívny AR-CCR model*) Pod vstupným AR-CCR modelom v multiplikatívnom zápise, označenie $(AR - CCR - I - MM)$, aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu:

$$(AR - CCR - I - MM)_o: \quad \max_{u,v} u^T y_o \quad (121)$$

$$s.t. \quad v^T x_o = 1, \quad (122)$$

$$u^T y_j - v^T x_j \leq 0, j = 1, \dots, n \quad (123)$$

$$P^T v \leq 0_\alpha, Q^T u \leq 0_\beta, \quad (124)$$

$$u \geq 0_s, v \geq 0_m. \quad (125)$$

Účelovú funkciu budeme označovať $U_o^{AR}(u, v) := u^T y_o$ a jej optimálnu hodnotu U_o^{*AR} .

V tejto definícii α a β vyjadrujú počet ohraničení na vstupy, resp. výstupy a matice P, Q sú v tvare (119) a (120). Efektívnosť a efektivitu definujeme rovnako ako pre CCR model podľa Tabuľky 4. Keďže tento model je úlohou lineárneho programovania, tak k nemu vieme vytvoriť duálnu úlohu. Postup ako to urobiť je dopodrobna vysvetlený v [16], my preberieme len jeho znenie nasledovne:

Definícia 6.2. [16] (*Vstupný obáľkový AR-CCR model*) Pod vstupným AR-CCR modelom v obáľkovom zápise, označenie (*AR – CCR – I – OM*) aplikovaným na DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, rozumieme úlohu:

$$(AR - CCR - I - OM)_o: \quad \min_{\theta, \lambda, \pi, \tau, s^x, s^y} \theta \quad (126)$$

$$s.t. \quad X\lambda - P\pi + s^x = \theta x_o, \quad (127)$$

$$Y\lambda + Q\tau - s^y = y_o, \quad (128)$$

$$\lambda \geq 0_n, \pi \geq 0_\alpha, \tau \geq 0_\beta \quad (129)$$

$$s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s. \quad (130)$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie budeme označovať θ_o^{*AR} .

Premenné π a τ sú α a β rozmerné premenné, ktoré vznikli pri prevode multiplikačnej úlohy na obáľkovú. Efektivita a efektívnosť je totožná ako pri CCR modeli, ktorú je možné nájsť v Tabuľke 1. Analogicky by sme mohli definovať AR-CCR výstupný model, BCC, aditívny alebo SBM model.

V našej **webovej aplikácii** je možnosť výpočtu AR modelu pre všetky doposiaľ spomenuté modely.

6.1 Vlastnosti AR modelu

V porovnaní s CCR modelom sa tým, že sme zaviedli ohraničenia multiplikátorov, rozšíri množina produkčných možností niektorými smermi. Jednotky, ktoré boli v pôvodnom modeli efektívne, no teraz nespĺňajú ohraničenia váh sa presunú do neefektívnej oblasti. Projekciu na hranicu efektívnosti môžeme, podobne ako pri CCR modeli, definovať nasledovne:

$$\hat{x}_o = \theta^* x_o - s^{x*} + P\pi^* = X\lambda^*, \quad (131)$$

$$\hat{y}_o = y_o + s^{y*} + Q\tau^* = Y\lambda^*. \quad (132)$$

Pri AR modeli je dôležitým faktorom aj správna voľba ohraničení, pretože by sme mohli vo veľkej miere ovplyvniť výsledky. Pri voľbe ohraničení je potrebné rešpektovať veľkosti hodnôt porovnávaných dvojíc vstupov alebo výstupov. Dáta je vhodné naškálovať do intervalu $(0, 1)$, až potom je vhodné voliť ohraničenia.

Aj keď sme znížili počet jednotiek, ktoré môžu byť pseudoefektívne, treba povedať, že sme pseudoefektivitu nemuseli odstrániť úplne a musíme použiť druhú fázu. Vlastnosti monotónnosti a invariantnosti ostanú rovnaké ako pri pôvodnom modeli, čo triviálne vyplýva z povahy veci.

6.2 Interpretácia výsledkov v AR-CCR modeli

Interpretáciu výsledkov sme zhrnuli do nasledujúcej Tabuľky 11.

Tabuľka 11: Výstup z AR-CCR modelu

Premenná	Vysvetlenie	Model	Fáza
θ^{*AR}	hodnota úč. funkcie, (pseudo)efektivita	OM	I
U^{*AR}	hodnota úč. funkcie, (pseudo)efektivita	MM	I
u^*	hodnota váh vstupov	MM	I
v^*	hodnota váh výstupov	MM	I
P	matica ohraničení na váhy vstupov	MM/OM	I
Q	matica ohraničení na váhy výstupov	MM/OM	I
π^*	duálna premenná k ohr. na váhy vstupov	OM	I
τ^*	duálna premenná k ohr. na váhy výstupov	OM	I
(θ^*x_o, y_o)	projekcia v smere vstupov	OM	I
λ^*	referencia na efektívny vzor	OM	II
s_x^*	nezohľadnené rezervy pri vstupoch	OM	II
s_y^*	absolútne rezervy pri výstupoch	OM	II
$(X\lambda^* - P\pi^*, Y\lambda^* + Q\tau^*)$	efektívny vzor	OM	II
$x_o - \sum_{j=1}^n x_j\lambda_j^* + P\pi^*$	absolútne rezervy vo vstupoch	OM	II

7 Rozšírenia modelov

V predchádzajúcich kapitolách sme sa venovali definovaniu modelov a pri tom sme spomenuli aj niektoré ich vlastnosti. V tejto kapitole sa budeme zaoberať dvomi rozšíreniami základných modelov, a to superefektivite a Malmquistovho indexu.

7.1 Superefektivita

V predchádzajúcich kapitolách sme sa skôr venovali neefektívnym DMU , skúsme sa teraz zamerať na efektívne DMU a pouvažovať nad tým, čo by sa stalo, ak by sme niektorý efektívny útvar vylúčili z množiny útvarov Z ? Vylúčime teda efektívne $DMU_o \in Z$, ktoré sú z hranice M a vytvoríme novú hranicu efektivity M' . DMU_o sa spravidla ocitne mimo M' . Ďalej sprojektujeme DMU_o na hranicu M' , pomocou vybraného modelu odpovedajúcemu určitému typu výnosov z rozsahu. Superefektivitu (označenie SE) potom určíme pomocou hodnôt sprojektovaného bodu ako pomerné nezáporné číslo. Musíme byť však opatrní v prípade VRS, pretože SE nemusí byť dobre definované, pre každé efektívne DMU a vtedy kladieme $SE = \infty$. Superefektivita nám pomáha rozlíšiť medzi efektívnymi DMU pri vytváraní poradia útvarov podľa efektivity. Problém pri určovaní superefektivity môže nastať pri aditívnych modeloch, kedy musíme zmeniť znamienko pri doplnkových premenných na nekladné. Superefektivita pri aditívnych modeloch nám rovnako ako účelová funkcia padne do intervalu $(-\infty, 0)$. V **našej webovej aplikácii** poskytujeme hodnotu superefektivity pre každý efektívny útvar pri všetkých modeloch.

7.2 Malmquistov index

Doteraz sme sa zaoberali hodnotením efektivity pomocou jednotlivých modelov staticky. Pomocou výpočtu optimálnej hodnoty premenných v konkrétnom modeli vieme rozdeliť útvary na efektívne a neefektívne, určiť efektívny vzor alebo vypočítať rezervy. Ak vieme výsledky racionálne implementovať do praxe, môžeme dosiahnuť zlepšenie jednotky, čo znamená, že sa stane efektívnou. Naopak, ak sme výsledky podcenili, môže sa stať, že sa z efektívnej jednotky stane neefektívna. Z časového hľadiska je toto dôležitá skutočnosť, ktorú však pomocou nami doteraz popísaných modelov nevieme

zachytiť. Týmto problémom sa zaoberali Färe, Grosskopf, Lindgern a Ross v knihe [13]. Za účelom zachytenia zmien efektívnosti použili tzv. Malmquistov index, ktorý bol prvýkrát formulovaný Stenom Malmquistom v [21]. Malmquistov index sa tak ako aj predošlé modely dá popísať z pohľadu vstupov, výstupov pre konštantné aj variabilné výnosy z rozsahu. My index zdefinujeme z pohľadu vstupov a konštantných výnosov z rozsahu a budeme sa opierať o články [19], [12]. Pre ostatné typy sa dajú analogicky definovať pomocou jednoduchých transformácií.

Uvažujme útvar DMU_o , kde $o \in 1, \dots, n$ v dvoch po sebe nasledujúcich obdobiach $t, t + 1$. Malmquistov index má potom tvar:

$$M_o(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = F_o P_o. \quad (133)$$

Tento výraz sa nazýva aj "TFP index", alebo "Total Faktor Productivity Index". Hodnota F_o vyjadruje relatívnu zmenu efektivity jednotky DMU_o oproti ostatným jednotkám medzi obdobia t a $t + 1$. Hodnota P_o kvantifikuje zmenu hranice produkčných možností spôsobenú vývojom technológie medzi obdobia t a $t + 1$. Tieto dve premenné sú definované nasledovne:

$$F_o = \frac{D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_o^t(x^t, y^t)}, \quad (134)$$

$$P_o = \left[\frac{D_o^t(x^{t+1}, y^{t+1}) D_o^t(x^t, y^t)}{D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}) D_o^{t+1}(x^t, y^t)} \right]^{1/2}, \quad (135)$$

potom

$$M_o = \frac{D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_o^t(x^t, y^t)} \left[\frac{D_o^t(x^{t+1}, y^{t+1}) D_o^t(x^t, y^t)}{D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}) D_o^{t+1}(x^t, y^t)} \right]^{1/2}. \quad (136)$$

Funkcia D sa nazýva aj Shepardova dištančná funkcia a vyjadruje maximálne radiálne proporcionálne skrátenie vektora vstupov pri danej úrovni vektora výstupov, ktoré môžeme pohodlne počítať pomocou DEA modelov. Výpočet Malmquistovho indexu vedie k úlohám lineárneho programovania, kde musíme pre každú DMU_o počítať štyri Shepardove dištančné funkcie v časových obdobiach t a $t + 1$. Predpokladajme konštantné

výnosy z rozsahu a preferencie na vstupy, potom uvažujeme nasledovné úlohy:

$$D_o^t(x^t, y^t) = \min_{\theta, \lambda} \theta \quad (137)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_j^t \lambda_j \leq \theta x_o^t, \quad (138)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j^t \lambda_j \geq y_o^t, \quad (139)$$

$$\lambda \geq 0_n, \quad (140)$$

$$D_o^t(x^{t+1}, y^{t+1}) = \min_{\theta, \lambda} \theta \quad (141)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_j^t \lambda_j \leq \theta x_o^{t+1}, \quad (142)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j^t \lambda_j \geq y_o^{t+1}, \quad (143)$$

$$\lambda \geq 0_n, \quad (144)$$

$$D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}) = \min_{\theta, \lambda} \theta \quad (145)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_j^{t+1} \lambda_j \leq \theta x_o^{t+1}, \quad (146)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j^{t+1} \lambda_j \geq y_o^{t+1}, \quad (147)$$

$$\lambda \geq 0_n, \quad (148)$$

$$D_o^{t+1}(x^t, y^t) = \min_{\theta, \lambda} \theta \quad (149)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_j^{t+1} \lambda_j \leq \theta x_o^t, \quad (150)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j^{t+1} \lambda_j \geq y_o^t, \quad (151)$$

$$\lambda \geq 0_n. \quad (152)$$

Optimálne hodnoty vypočítané podľa týchto vzťahov potom dosadíme do (136) a dostaneme hodnotu Malmquistovho indexu. Užitočné je vypočítať aj hodnoty F_o a P_o dosadením do vzťahov (134) a (135). Dosiahnuté výsledky potom môžeme interpretovať nasledovne: pre všetky indexy (zmeny ekonomickej efektívnosti F_o , technologického

pokroku P_o a Malmquistovho indexu M_o) platí, že ak sú menšie ako jedna, tak nastalo zhoršenie pozície v danej oblasti, ak sú rovné jednej, tak pozícia zostala nezmenená a ak sú väčšie ako jedna došlo k zlepšeniu. Pri modeloch orientovaných na výstupy dostaneme hodnotu D ako prevrátenú hodnotu účelovej funkcie ψ .

V **našej webovej aplikácii** poskytujeme výpočet vstupného a výstupného Malmquistovho indexu pre konštantné aj variabilné výnosy z rozsahu. Ak by sa stalo, že riešenie úlohy nie je ohraničené, tak v našej webovej aplikácii uvádzame hodnotu 0. Takýto index je potom užitočný v praxi, lebo pomáha určiť ako významne boli ovplyvnené jednotlivé jednotky určitým rozhodnutím.

8 Prehľad dostupných DEA softvérov

V úvode tejto diplomovej práce sme spomenuli, že DEA teória je rýchlo rozvíjajúcou sa oblasťou multikriteriálneho manažmentu. Doteraz sme sa v našej práci venovali teórii jednotlivých modelov, ich zneniam a odvodeniam, aby sme vedeli podľa čoho sa reálne vyhodnocuje efektivita v konkrétnych prípadoch. S nástupom počítačov sa výrazne zrýchlilo a zjednodušilo analyzovanie nejakej technológie pomocou množstva softvérov, ktoré sú určené na výpočet DEA modelov. V tejto kapitole si teda urobíme prehľad jednotlivých softvérov, ktorými sme sa inšpirovali aj pri tvorbe vlastného softvéru, ktorý rozoberieme v poslednej časti. Jednotlivé softvéry sme rozdelili na komerčné a nekomerčné a analyzovali sme ich z niekoľkých pohľadov. V prvom rade nás zaujímalo s akými modelmi dané softvéry pracujú a čo všetko dokážu vyhodnotiť. Ďalej nás zaujímalo pod akou platformou dané softvéry pracujú, užívateľské rozhranie, dostupná dokumentácia a samozrejme cena. Jednotlivé softvéry budeme hodnotiť pomocou článku [2], ktorý sa budeme snažiť doplniť o vlastné skúsenosti, ktoré však máme len pri niektorých softvéroch.

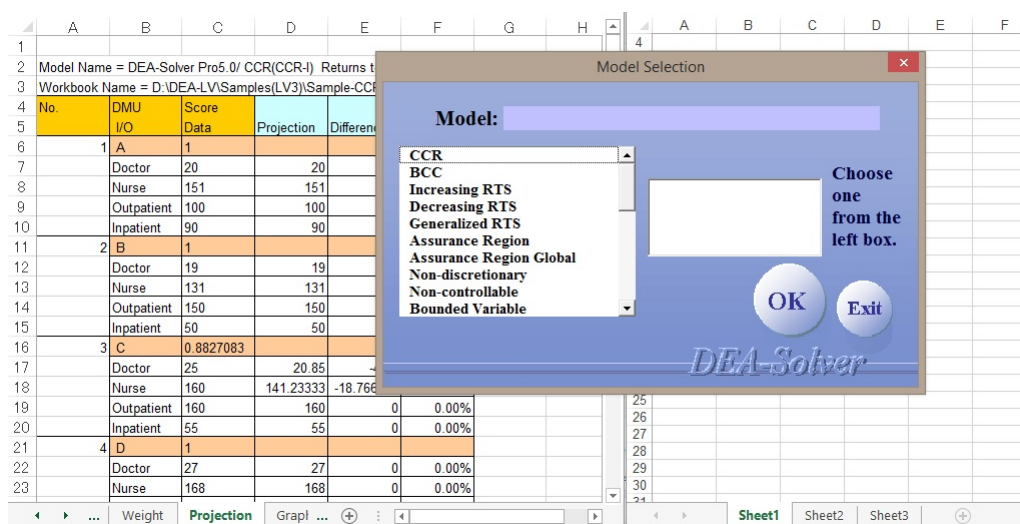
8.1 Komerčné DEA softvéry

V tejto kapitole sa budeme zaoberať komerčným DEA softvérom, konkrétne DEA-Solver-Pro, Frontier Analyst, OnFron a Warwick DEA.

8.1.1 DEA-Solver-Pro

DEA-Solver-Pro [26] je aplikácia, ktorá je dostupná pod operačným systémom Windows a konkrétne beží pod programom Microsoft Excel, z ktorého vyplýva aj užívateľské prostredie zobrazené na Obrázku 2. Vstupné dáta sa do programu zadávajú prostredníctvom hárku v programe Excel a musia mať špecifický tvar. Celý proces zadávania a voľby modelov je vytvorený pomocou okna v Exceli, ktoré poskytuje niekoľko možností pri výpočte. Táto aplikácia poskytuje voľnosť pri voľbe modelu, nakoľko si užívateľ môže zvoliť podľa dokumentácie zo 118 modelov. Výstupom je potom široká škála grafov a tabuliek, ktoré sú prehľadne spracované v jednotlivých hárkoch. Čas výpočtu sa v testovanej verzii V4.0 pohyboval v rozmedzí 5 až 17 sekúnd, čo je pomerne

veľa. Počet dát je limitovaný a hodí sa skôr na výpočet menších úloh. Dokumentácia je prehľadne spracovaná a zrozumiteľná aj pre menej technicky zdatných užívateľov. Celkovo je DEA-Solver-Pro rozšíreným softvérom v okruhu ľudí, ktorí sa zaoberajú DEA problematikou a bol použitý aj pri tvorbe niektorých kníh napr. [3]. Cena testovanej verzie V4.0 je podľa článku [2] zhruba 1300 eur. Naša skúsenosť s touto aplikáciou bola pozitívna a inšpirovala nás pri tvorbe vlastného softvéru. Zaujalo nás hlavne spektrum možností pri voľbe modelu a prehľadná a zrozumiteľná prezentácia výsledkov. Jedným z nedostatkov nami testovanej verzie V8.0 bola nekompatibilitnosť s Windows 8.1 a Microsoft Excel 2013.

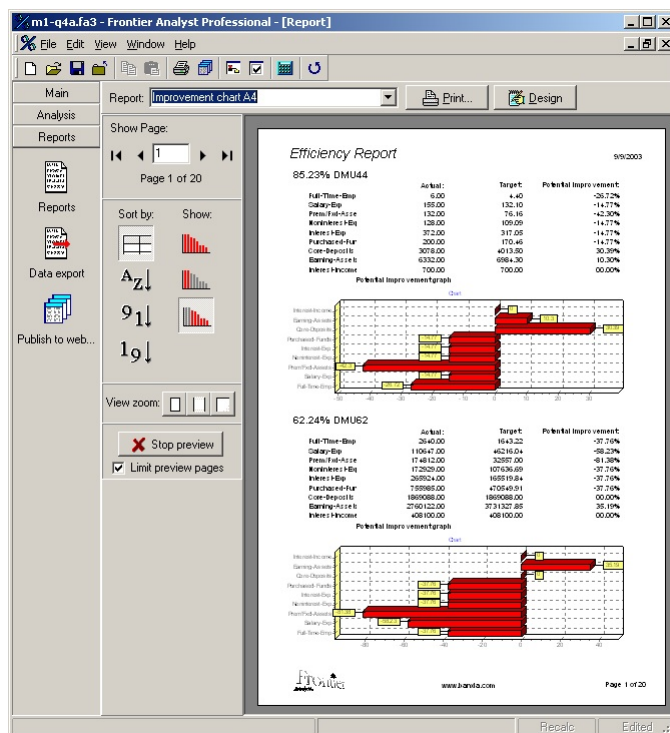


Obr. 2: DEA-Solver-Pro

8.1.2 Frontier Analyst

Frontier Analyst [1] je užívateľská aplikácia, ktorá beží pod operačným systémom Windows. V tejto aplikácii je vytvorené profesionálne užívateľské rozhranie, ktoré je názorné, zrozumiteľné a používateľ má v každom momente úplnú kontrolu nad dátami a procesmi. Toto rozhranie je zobrazené na Obrázku 3. Jednotlivé analýzy sú organizované ako projekty, ktoré obsahujú vstupné dáta, súbory z Excelu a mnoho iného. Akonáhle sú dáta vložené do projektu, zobrazujú sa ako matica, kde sa dá jednoducho pracovať s jednotlivými *DMU*, ktoré sa môžu pridávať, mazať alebo meniť. Výstupom z výpočtu je správa, na ktorej je mnoho grafov a tabuliek, ktoré ponúkajú užívateľom

analytické výsledky z rôznych pohľadov, ako napríklad hodnotenie efektivity alebo detaily o jednotlivých *DMU*. Tento program je rozšírený o ďalšie zaujímavé funkčnosti ako napríklad HTML generátor, ktorý umožňuje publikovať výsledný report na web. Dokumentácia je napísaná prehľadne a je doplnená o množstvo príkladov a vysvetlení. Aplikácia pracuje pomerne rýchlo, keďže dokázala vyhodnotiť testované dáta o 431 útvaroch za menej ako 5 sekúnd. Miernym sklamaním tejto aplikácie je, že neposkytuje takú širokú škálu výberu modelov, ako to bolo napr. u DEA-Solveru. Nami testovaná demo verzia bola intuitívna a pracovala veľmi jednoducho. Už v demo verzii bola prístupná možnosť vyhodnocovania Malmquistovho indexu, alebo superefektivity. Obrovskou výhodou tohoto softvéru je spracovanie grafov, ktoré sú názorné, prehľadné a zrozumiteľné, zároveň sa tu nachádza aj možnosť základného štatistického spracovania údajov, ako napr. histogram, maximálne alebo minimálne hodnoty. Licencie na tento produkt sa dajú zakúpiť podľa počtu používaných *DMU*, cena sa pohybuje v rozmedzí od 350 eur pre 250 *DMU* až po 2000 eur pre 2500 *DMU*.



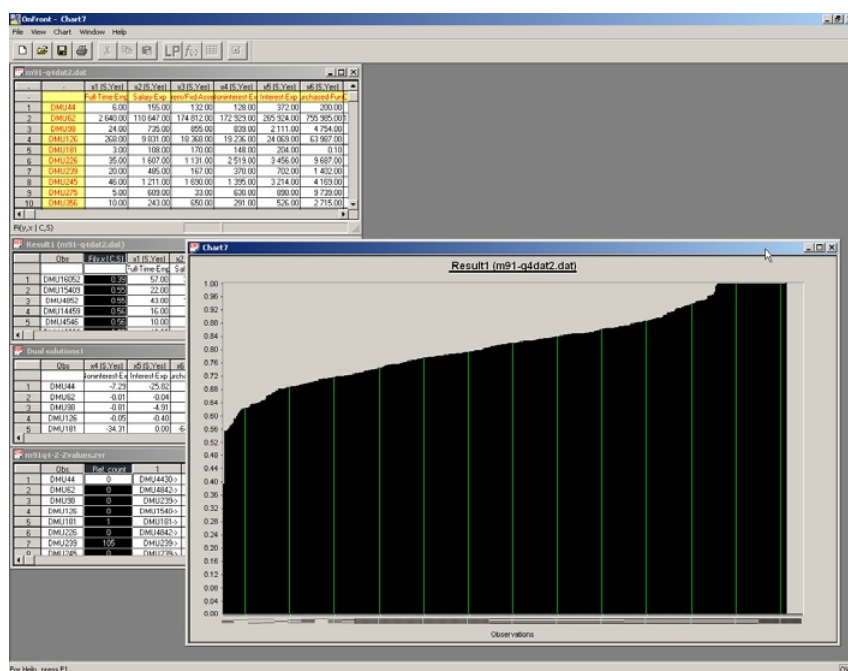
Obr. 3: Frontier analyst

8.1.3 OnFront

On Front [10] je veľmi rýchla a elegantná aplikácia, ktorá beží pod systémom Windows. Zadávanie dát je priame a funguje na báze textových súborov alebo priameho zadávania. Ďalej je potrebné označiť vstupy a výstupy pre jednotlivé *DMU*, vybrať model a formu zobrazenia výstupu, kde program poskytuje niekoľko možností. Výhodou je, že užívateľ má možnosť výberu z viacerých modelov, chýba však analýza aditívnych modelov s váhami. Zaujímavou funkcionalitou je, že OnFront dokáže spracovať viaceré efektivity do jednej tabuľky a grafu. Umožňuje teda porovnanie pre jednotlivé modely. Problémom je, že pri používaní tohto softvéru si užívateľ musí osvojiť autorovu terminológiu, ktorá nie je konzistentná so štandardnou terminológiou. Dokumentácia k tomuto softvéru je veľmi prehľadne a zrozumiteľne zapísaná a je možnosť stiahnuť si ju priamo z menu vo formáte pdf. Čas výpočtu sa pre 431 testovaných útvarov zmestil do šiestich sekúnd, čo možno hodnotiť ako dostatočne rýchly čas výpočtu. Kým ostatné softvéry sú orientované skôr na manažérske aplikácie, OnFront sa skôr orientuje na ekonomickú interpretáciu. Licencovanie je rozdelené podľa toho či sa daný softvér používa na akademickej pôde alebo pre komerčné využitie, cena sa pohybuje od 700 do 1800 eur. Ukážka zo softvéru je zobrazená na Obrázku 4.

8.1.4 Warwick DEA

Warwick DEA softver [9] bol vyvinutý na Univerzite vo Warwicku. Užívateľské rozhranie je plne grafické a používa dve okná, prvé je tabuľka dát a druhé je okno s výstupom. Dáta sa načítavajú pomocou textových súborov, ktoré sa následne zobrazujú v tabuľke. V menu sa dajú následne zvoliť jednotlivé parametre, to znamená model, orientáciu modelu, vstupné alebo výstupné parametre a mnoho iného. Selekcia modelov je limitovaná, obsahuje však tie najdôležitejšie modely. Zaujímavosťou je výpočet superefektivity alebo AR modelov, ktoré tento program ponúka. Formu výstupu si môžeme vybrať z niekoľkých možností, ktoré obsahujú zoznam útvarov s ich efektivitami, samozrejmosťou je výpočet λ alebo referenčnej množiny, efektívnych vzorov a mnoho iného. Výsledky sa dajú exportovať ako tabuľkový report alebo databáza. Softvér obsahuje podrobnú dokumentáciu doplnenú o praktické príklady a popisy. Výpočet je výrazne pomalší oproti ostatným programom, navyše dobu výpočtu výrazne



Obr. 4: OnFront

ovplyvňujú zvolené parametre. Cena tohto programu sa pohybuje v rozmedzí od 200 do 1600 eur podľa počtu *DMU*. Ukážka zo softvéru je zobrazená na Obrázku 5.

8.2 Nekomerčné DEA softvéry

V tejto kapitole sa budeme venovať nekomerčným DEA softvérom, konkrétne si rozoberieme DEA Excel Solver, EMS a PIONEER. Softvéry budeme hodnotiť podľa rovnakých kritérií ako sme hodnotili komerčné s tým rozdielom, že licencovanie týchto produktov je zadarmo.

8.2.1 DEA Excel Solver

DEA Excel solver [7] je súčasťou knihy [4] a bol vyvinutý pre potreby tejto knihy. Tento program pracuje pod systémom Windows, konkrétne pod programom Microsoft Excel. Po spustení softvéru sa objaví štandardné okno s menu, kde si užívateľ môže vybrať

The screenshot displays the 'Data Envelopment Analysis' software interface. The main window shows a list of DMU units with columns for 'FTEMP', 'SALARYEXP', 'PRMFXDASSET', and 'NONINTEX'. The right-hand pane shows the results of a peer unit analysis for DMU16052, including efficiency (39.43% radial) and a table of peer units with their respective weights and lambda values.

DMU	FTEMP	SALARYEXP	PRMFXDASSET	NONINTEX
DMU44	6.00	155.00	132.00	1
DMU62	2640.00	110647.00	174812.00	1729
DMU98	24.00	735.00	855.00	8
DMU126	268.00	9831.00	18368.00	192
DMU181	3.00	108.00	170.00	1
DMU226	35.00	1607.00	1131.00	25
DMU239	20.00	485.00	167.00	3
DMU245	46.00	1211.00	1690.00	13
DMU275	5.00	609.00	33.00	6
DMU356	10.00	243.00	650.00	2
DMU388	20.00	550.00	741.00	4
DMU408	118.00	4589.00	2320.00	82
DMU415	16.00	347.00	133.00	5
DMU423	38.00	703.00	1218.00	7
DMU452	70.00	2412.00	1659.00	20
DMU475	14.00	330.00	467.00	5
DMU562	13.00	263.00	269.00	2
DMU623	8.00	206.00	199.00	2
DMU794	59.00	1100.00	1890.00	11
DMU813	1548.00	62966.00	48276.00	825
DMU821	7.00	290.00	104.00	2
DMU864	55.00	1935.00	997.00	38
DMU876	577.00	15487.00	17115.00	283
DMU898	85.00	2770.00	2028.00	23
DMU1237	13.00	391.00	635.00	6
DMU1244	43.00	1336.00	1767.00	13
DMU1248	77.00	2262.00	2407.00	27
DMU1276	32.00	850.00	821.00	6
DMU1301	5.00	149.00	26.00	1
DMU1347	37.00	827.00	688.00	6
DMU1445	58.00	1133.00	1003.00	15
DMU1449	21.00	635.00	1448.00	13
DMU1478	8.00	261.00	264.00	2

Obr. 5: Warwick DEA

z jednotlivých modelov a akcií, ktoré chce vykonať. Uživatelské rozhranie zodpovedá hárkom a tabuľkám programu Excel, vstup a výstup z programu je teda uložený v jednotlivých hárkoch resp. tabuľkách, ktoré sú názorne zobrazené na Obrázku 6. Výber modelov je široký a ponúka aj unikátne modely, ktoré súvisia s danou knihou. Program ponúka spektrum funkcionalít ako napr. analýzu citlivosti, superefektivitu, vyhodnocovanie „benchmark“ procesov a pod. Chýba však analýza aditívnych modelov s váhami alebo analýza Malmquistovho indexu. Nami testovaná voľne dostupná verzia pracovala spoľahlivo a dokonca bola kompatibilná s Excelom 2013. Nevýhodou bol nedostatok modelov, chýbajúce vyhodnocovanie Malmquistovho indexu alebo superefektivitu, obsahovala však už modely s váhami. Čas vyriešenia bol najpomalší zo všetkých softvérov, navyše formátovanie buniek vykazovalo určité chyby. Manuál k tomuto programu je poskytnutý priamo v knihe alebo je dostupný osobitne.

8.2.2 EMS: Efficiency Measurement System

Efficiency Measurement System [11] je aplikácia určená pre akademické prostredie, ktorá bola vyvinutá na báze operačného systému Windows. Uživatelské prostredie

The image shows two Excel worksheets. The top worksheet, 'm91-q4dat1crsi.xls', is titled 'Input-Oriented CRS Model Target' and contains a table with columns for DMU No., DMU Name, and various input and output metrics. The bottom worksheet, 'm91-q4dat1zhuOut.xls', is titled 'Input-Oriented CRS' and contains a table with columns for DMU No., DMU Name, Efficiency, and various benchmarks.

DMU No.	DMU Name	Full-Time-E	Salary-Exp	Prem-Fxd-I	Noninterest	Interest-Exp	Purchased-Funds	Core-Deposits	Earning-Assets
1	DMU44	4.7	146.8	121.4	118.5	352.2	189.4	3,323.0	6,818.2
2	DMU62	1,823.4	76,421.7	61,381.5	101,381.5	183,668.5	522,144.1	2,508,869.7	3,779,451.7
3	DMU98	18.8	582.8	412.6	665.3	1,674.0	3,769.8	20,269.1	37,065.7
4	DMU126	189.9	6,965.8	7,691.7	9,664.7	17,054.1	45,338.0	255,675.2	357,785.1
5	DMU181	3.0	108.0	170.0	148.0	204.0	-	1,487.0	3,267.0
6	DMU226	29.8	1,370.1	917.5	1,752.8	2,946.4	8,258.7	39,273.6	59,667.4
7	DMU239	20.0	485.0	167.0	370.0	702.0	1,402.0	8,696.0	15,951.0
8	DMU245	36.7	1,061.6	638.6	1,143.5	2,817.6	3,654.8	40,078.0	61,462.9
9	DMU275	5.0	609.0	33.0	630.0	890.0	9,739.0	359.0	16,133.0
10	DMU356	7.6	184.9	96.3	166.7	400.2	1,111.3	5,260.4	10,448.0
11	DMU388	20.0	550.0	741.0	403.0	1,948.0	843.0	15,279.0	37,325.0
12	DMU408	109.5	4,260.2	2,153.8	5,485.1	8,445.3	21,013.4	126,087.0	187,296.6
13	DMU415	9.2	272.9	104.6	266.4	863.6	1,072.8	12,681.0	21,167.0

DMU No.	DMU Name	Efficiency	Σλ	RTS	Benchmarks
1	DMU44	0.85228	0.502	Increasing	0.271 DMU4430
2	DMU62	0.62243	193.378	Decreasing	12.468 DMU4842
3	DMU98	0.75350	1.505	Decreasing	0.093 DMU239
4	DMU126	0.63507	11.469	Decreasing	1.699 DMU1540
5	DMU181	1.00000	1.000	Constant	1.000 DMU181
6	DMU226	0.76412	3.877	Decreasing	0.005 DMU4842
7	DMU239	1.00000	1.000	Constant	1.000 DMU239
8	DMU245	0.80100	2.259	Decreasing	0.910 DMU239
9	DMU275	0.84854	0.465	Increasing	0.269 DMU9377
10	DMU356	0.70598	0.517	Increasing	0.208 DMU239
11	DMU388	0.95211	2.047	Decreasing	0.034 DMU3966
12	DMU408	0.82580	7.529	Decreasing	0.388 DMU1540
13	DMU415	0.68090	1.055	Decreasing	0.193 DMU239
14	DMU423	0.84112	3.707	Decreasing	0.423 DMU4842

Obr. 6: DEA Excel Solver

je veľmi jednoduché a účelné. Užívateľom je umožnené načítavať dáta z textového súboru alebo prostredníctvom Excelovského súboru. Dáta však musia byť dopredu upravené nakoľko EMS neposkytuje editáciu priamo v prostredí programu. Výsledky sú uložené do ďalšej tabuľky, ktorú je možné uložiť do textového alebo Excel súboru. Tento solver poskytuje širokú škálu výberu modelov a poskytuje rozšírenú funkcionálnu o napr. Malmquistov index, alebo superefektivitu. K programu je rovnako dostupná dokumentácia resp. manuál. Čas riešenia je pomalší oproti natívnym softvérom, ale rýchlejší oproti softvérom na báze Excelu. Ukážka z tohto softvéru je zobrazená na Obrázku 7.

8.2.3 PIONEER

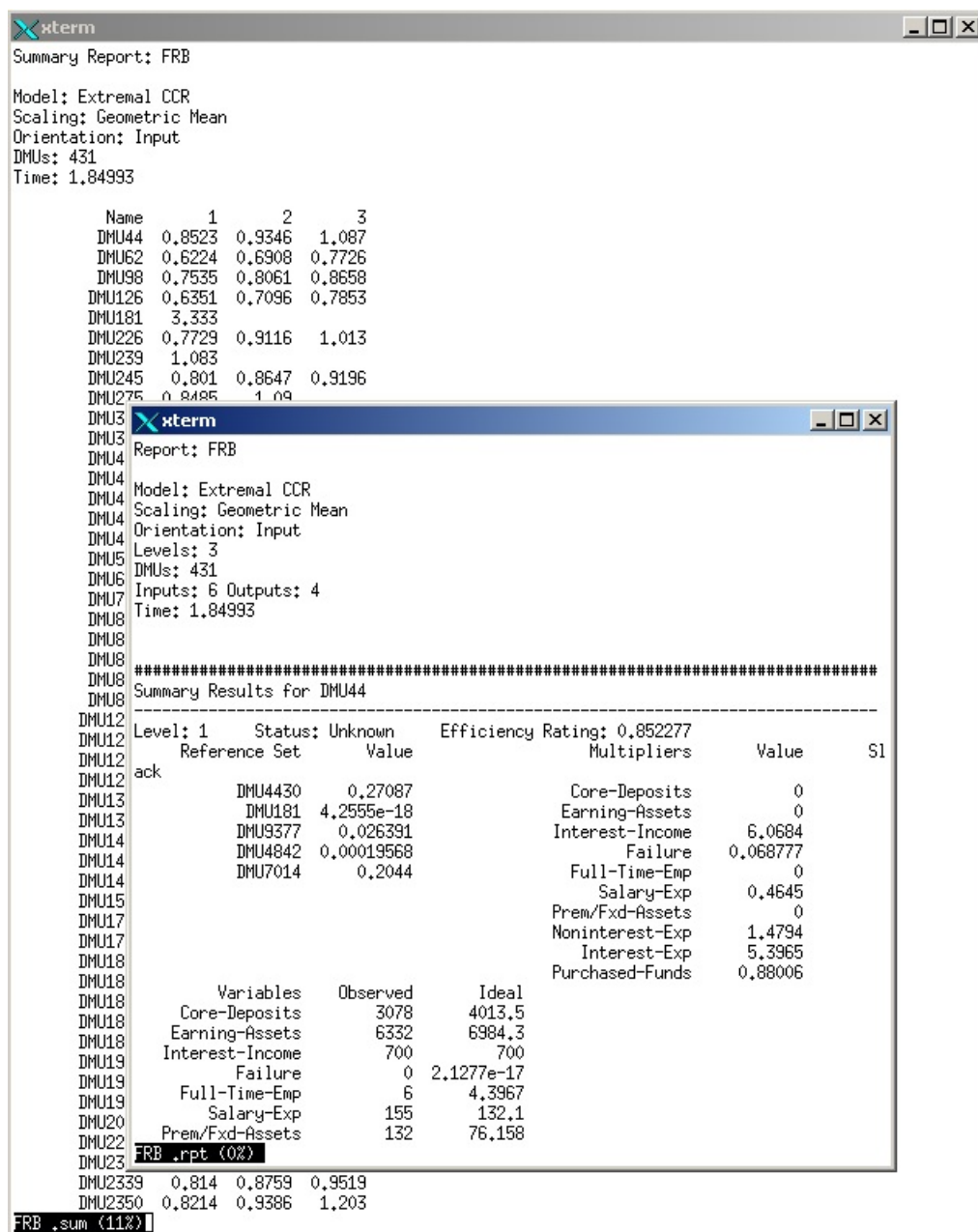
PIONEER [23] je softvér vytvorený na báze programovacieho jazyka C++ a určený na výskum. Tento softvér funguje pod operačným systémom Windows alebo Unix. Výhodou tohto programu je, že dokáže spracovať aj veľmi rozsiahle úlohy. Užívateľské

8.2 Nekomerčné DEA softvéry 8 PREHĽAD DOSTUPNÝCH DEA SOFTVÉROV

DMU	Score	FTEnr (I/R)	Salary (I/R)	PfFxp (I/R)	Nonir (I/R)	IntExp (I/R)	PurcF (I/R)	CoreC (I/R)	EamE (I/R)	IntInc (I/R)	Benchmarks	(S) FTEnr (I)	(S) Salary (I)	(S) PfFxp (I)	(S) Nonir (I)	(S) IntExp (I)	(S) PurcF (I)	(S) CoreC (I)	(S) EamE (I)	(S) IntInc (I)	
1 DMU44	85.23%	0.00	0.08	0.00	0.16	0.73	0.04	0.00	0.00	0.85	103 (0.27) 113 (0.00) 172 (0.20) 239	0.72	0.00	36.34	0.00	0.00	0.00	0.00	35.50	52.30	0.00
2 DMU62	62.24%	0.10	0.00	0.00	0.15	0.74	0.01	0.04	0.00	0.59	113 (12.47) 172 (121.96) 181 (0.14)	0.00	54.26	51.71	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	05.35	0.00
3 DMU98	75.35%	0.08	0.00	0.00	0.12	0.78	0.02	0.00	0.00	0.75	7 (0.09) 113 (0.29) 172 (1.13) 181	0.00	19.73	80.31	0.00	0.00	0.00	0.00	31.97	23.15	0.00
4 DMU126	63.51%	0.12	0.00	0.00	0.16	0.73	0.00	0.08	0.00	0.55	34 (1.70) 181 (0.01) 239 (8.66) 377	0.00	69.21	04.93	0.00	0.00	0.00	43.78	0.00	86.44	0.00
5 DMU181	132.21%	0.98	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.34	0.98	0.00		0									
6 DMU226	76.41%	0.10	0.00	0.00	0.17	0.72	0.01	0.05	0.00	0.72	113 (0.00) 172 (2.40) 181 (0.00) 239	0.00	10.61	33.85	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	49.39	0.00
7 DMU239	108.32%	0.00	0.00	0.02	0.14	0.81	0.04	0.00	0.00	1.08		109									
8 DMU245	80.10%	0.03	0.08	0.00	0.12	0.76	0.02	0.00	0.04	0.76	7 (0.91) 85 (0.00) 113 (0.40) 172	0.00	0.00	06.45	0.00	0.00	0.00	0.00	43.72	0.00	0.00
9 DMU275	84.85%	0.37	0.00	0.10	0.00	0.53	0.00	0.00	0.85	0.00	239 (0.27) 281 (0.01) 318 (0.19)	0.00	33.74	0.00	72.09	0.00	0.00	34.37	59.18	0.00	03.70
10 DMU356	70.60%	0.11	0.00	0.00	0.13	0.74	0.02	0.00	0.05	0.66	7 (0.21) 85 (0.01) 172 (0.30) 181	0.00	3.05	50.41	0.00	0.00	0.00	0.00	31.80	0.00	0.00
11 DMU388	95.21%	0.00	0.00	0.00	0.83	0.00	0.17	0.43	0.00	0.52	85 (0.03) 103 (0.52) 305 (1.49)	3.60	22.51	21.97	0.00	4.10	0.00	0.00	0.00	17.53	0.00
12 DMU408	82.58%	0.08	0.00	0.01	0.18	0.73	0.00	0.10	0.00	0.72	34 (0.39) 85 (0.40) 172 (0.50) 181	0.00	02.58	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	35.99	0.00
13 DMU415	68.09%	0.04	0.00	0.03	0.10	0.81	0.01	0.12	0.00	0.57	7 (0.19) 36 (0.01) 85 (0.03) 239 (0.65)	0.00	32.97	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	85.44	0.00
14 DMU423	84.11%	0.00	0.11	0.00	0.11	0.77	0.02	0.00	0.00	0.84	113 (0.42) 181 (0.00) 239 (0.41) 393	7.31	0.00	11.70	0.00	0.00	0.00	0.00	88.06	91.24	0.00
15 DMU452	100.30%	0.13	0.00	0.00	0.16	0.71	0.00	0.18	0.00	0.82		0									
16 DMU475	62.63%	0.00	0.10	0.00	0.18	0.69	0.03	0.04	0.00	0.59	7 (0.07) 85 (0.01) 172 (0.92) 274	0.28	0.00	80.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	12.63	0.00

Obr. 7: EMS:Efficiency Measurement System

rozhranie je plne textové a poskytuje možnosť vkladať vstupné textové súbory a umožňuje výber z množstva funkcionalít a modelov. Výstupom výpočtu sú potom tri textové súbory, ktoré obsahujú: celkový report, hodnotenie efektivity a výstup pre jednotlivé DMU, tak ako je to zobrazené na Obrázku 8.



Obr. 8: PIONEER

9 Webová aplikácia

V tejto kapitole sa budeme venovať nami vytvorenej webovej aplikácii, ktorá je z nášho pohľadu najväčším prínosom tejto diplomovej práce. Vysvetlíme si ako aplikácia funguje a čo poskytuje koncovému užívateľovi, pričom budeme rozvíjať bakalársku prácu [25]. Ukážeme si model webovej aplikácie a zameriame sa na nové funkčnosti a rozšírenia, ktoré sme doprogramovali do aplikácie, a to konkrétne výpočet SBM a AR modelov spolu s výpočtom Malmquistovho indexu. Webová aplikácia je naprogramovaná v programovacom jazyku HTML s využitím programovacieho jazyka php. Všetky matematické časti, teda DEA modely a Malmquistov index sú naprogramované v jazyku Octave, ktorý je voľne dostupný a kompatibilný s programovacím jazykom Matlab.

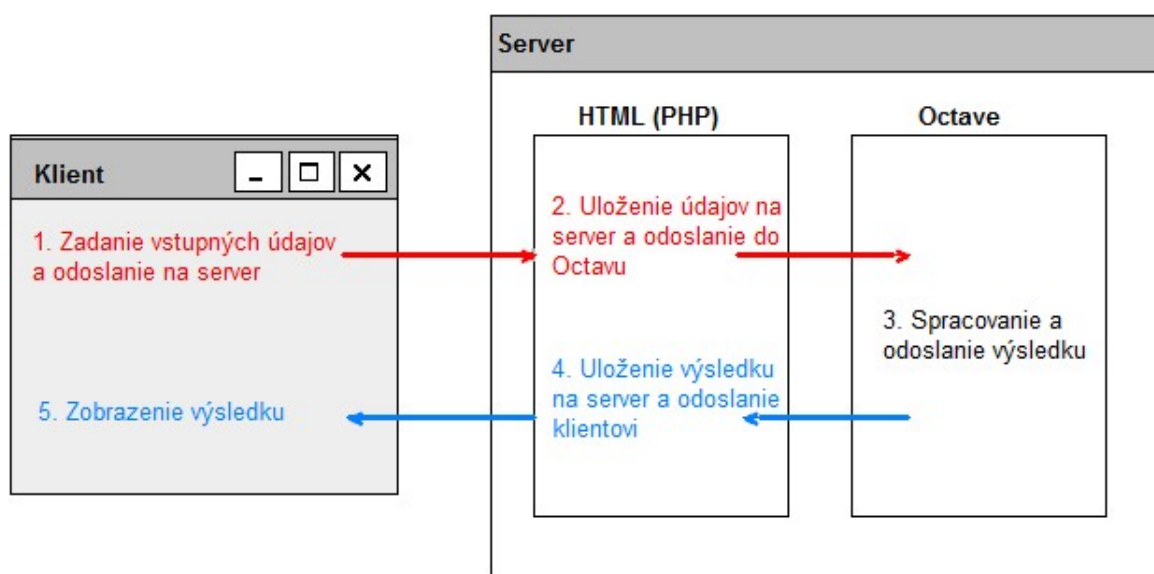
9.1 Vývoj webovej aplikácie

V tejto časti práce sa budeme venovať metodike alebo postupu, ktorý sme použili pri vývoji resp. programovaní aplikácie. Tento postup rozdelíme do niekoľkých krokov, ktoré si následne vysvetlíme. **Metotika tvorby webovej aplikácie:**

1. Schéma webovej aplikácie
2. Návrh a programovanie hierarchie a funkčných častí webu
3. Návrh a programovanie designu
4. Schéma a programovanie modelov
5. Komunikácia webu s Octave

Schéma webovej aplikácie je založená na sieťovej architektúre „klient-server“, ktorá oddeľuje server a klienta, ktorí spolu komunikujú prostredníctvom počítačovej siete. Voľne povedané, tento model počítačovej architektúry popisuje vzťah medzi dvoma počítačovými programami, klientskym programom a programom servera. V našom prípade je klientskym programom webový prehliadač (napr. Microsoft Internet Explorer), ktorý komunikuje so serverom prostredníctvom internetu. Na server sa požiadavka uloží, a pomocou nami vytvorenej aplikácie v jazyku HTML resp. php sa zavolá funkcia naprogramovaná v jazyku Octave. Pod funkciou v jazyku Octave

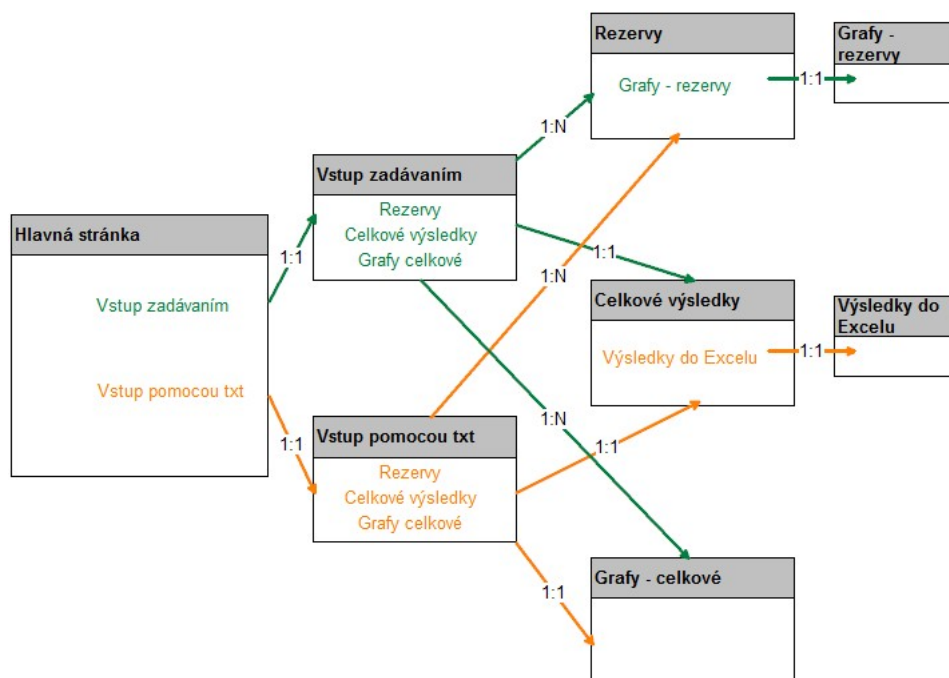
myslíme naprogramovaný DEA model, resp. Malmquistov index, ktorého vstupným parametrom je v podstate požiadavka zadaná užívateľom, ktorá je následne uložená na server. Výstupom z tejto funkcie je potom výstup konkrétneho modelu alebo Malmquistovho indexu, ktorý sa znova uloží na server a zobrazí na klientskom počítači. Následne je možná ďalšia interakcia klienta so serverom. Schéma našej webovej aplikácie je zobrazená na Obrázku 9. Na ukladanie a prenos dát medzi klientom a serverom, ale aj v rámci servera medzi Html (php) a Octave sa v našom softvéri používajú súbory vo formáte txt.



Obr. 9: Schéma webovej aplikácie

Návrh a programovanie hierarchie a funkčných častí webu sme vytvorili na základe schémy webovej aplikácie. Najprv sme sa snažili vytvoriť logiku resp. hierarchiu používania stránky tak, aby bola zrozumiteľná a ľahko prístupná užívateľovi a zároveň čo najjednoduchšia na programovanie. Schematicky sme zobrazili zjednodušenú hierarchickú štruktúru stránky pre výpočet DEA modelov na Obrázku 10. V každom okne sú popísané odkazy na podradené stránky spolu so vzťahmi k týmto stránkam, ktoré môžu byť buď $1 : 1$ alebo $1 : N$. Tieto vzťahy sa podobajú architektúre databázových systémov, my však tieto vzťahy chápeme z pohľadu hierarchie nasledovne: ak používame vzťah $1 : 1$, tak z nadradenej stránky voláme zobrazenie podradenej stránky s parametrom celej štruktúry DEA modelu, ak používame vzťah $1 : N$, tak z nadradenej stránky voláme podradenú stránku s parametrami pre jednotlivé *DMU*, ktorých môže

byť N . Na hlavnej stránke sa pri výpočte DEA modelov môžeme rozhodnúť ako budeme zadávať údaje potrebné pre výpočet. Na základe rozhodnutia a vstupných údajov na hlavnej stránke prebehne v pozadí výpočet modelu a poskytne nám výsledky, ktoré obsahujú výpočet rezerv, celkové výsledky a grafy. Rezervy a celkové výsledky potom ponúkajú ďalšie možnosti, konkrétne zobrazenie grafov rezerv alebo možnosť stiahnuť si výstupy do súboru programu Microsoft Excel. Pre výpočet Malmquistovho indexu je hierarchia analogická s výnimkou výpočtu rezerv. Statické časti stránky sme realizovali v programovacom jazyku Html. Dynamické časti ako volanie výpočtu modelu, zobrazenia modelov, grafy a možnosť stiahnutia do Excelu sme realizovali pomocou programovacieho jazyka php. Za základ stránky sme použili template voľne dostupný na stránke [14], ktorý sme upravili podľa našich požiadaviek.



Obr. 10: Hierarchia webovej stránky

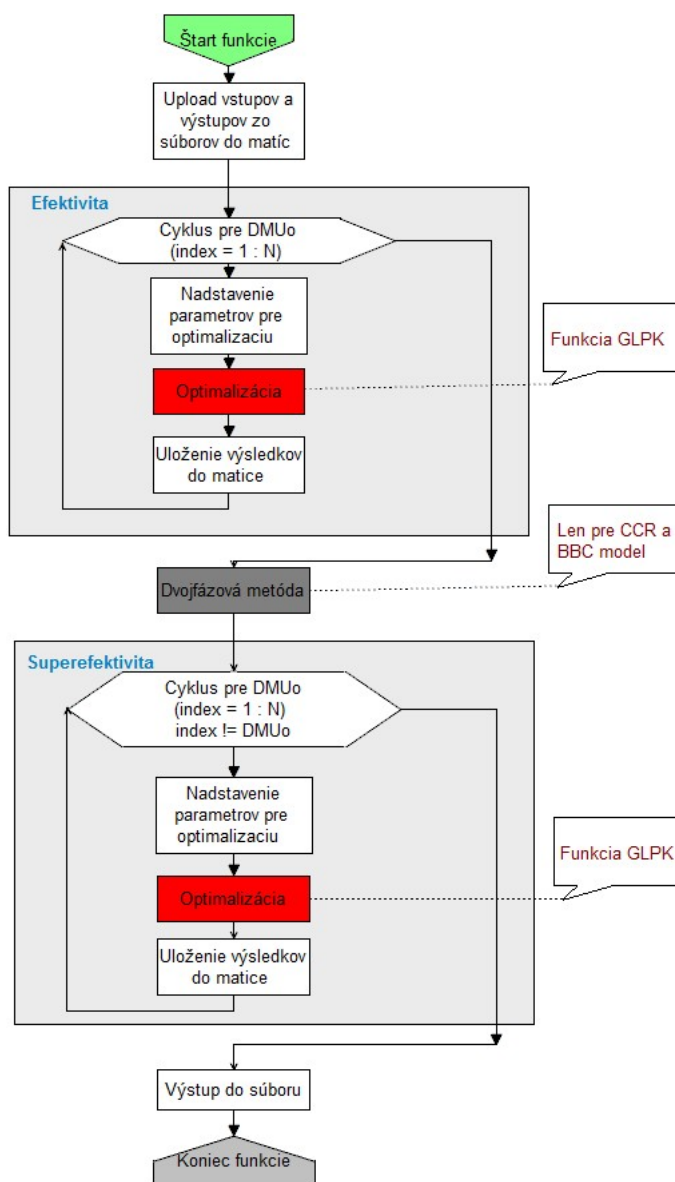
Návrh a programovanie designu sme vo veľkej miere prebrali zo stránky [14], upravili sme ju však pre naše potreby. Dizajnová štruktúra celej webovej stránky je uložená v jednom CSS súbore. Design stránky spočíva v hlavnom menu, ktoré je umiestnené napravo a poskytuje možnosti výpočtu DEA modelov a Malmquistovho indexu, doplnkovom menu, ktoré je umiestnené v hornej časti obrazovky a tzv. „výkonnej“ časti, kde sa odohráva priama interakcia s užívateľom a zobrazovanie výsledkov.

Schéma a programovanie modelov patrí medzi najdôležitejšie časti nami vytvorenej aplikácie, pretože v konečnom dôsledku poskytuje výsledky konkrétneho problému. Programovanie modelov sme realizovali v programovacom jazyku Octave a postupovali sme pomocou nami vytvorenej schémy zobrazenej na Obrázku 11. Za vstupy do modelu považujeme tri referencie na textové súbory, ktoré sú uložené na serveri, referencia na súbor so vstupmi, výstupmi a výsledkami. Cieľom je naplniť súbor s výsledkami, ktorý je potom spracovaný na strane php. Najdôležitejšou časťou schémy je optimalizácia, ktorú realizujeme pomocou funkcie „glpk“, ktorú sme detailne opísali v práci [25], treba však dodať, že optimalizácia je realizovaná metódou vnútorného bodu. Oproti schéme modelov v spomínanej práci [25] sme pridali výpočet superefektivity, ohraničení pomocou AR modelu a dvojfázovej metódy pre CCR a BCC modely. V praxi to znamená, že v každom modeli vykonávame optimalizáciu minimálne dvakrát.

Komunikáciu webu s Octave sme realizovali pomocou programovacieho jazyka php. Potrebovali sme docieľiť, aby programovací jazyk php dokázal na pozadí spustiť funkciu resp. model naprogramovaný v programovacom jazyku Octave a zobrazíť spätne výsledok na web. Tento problém sme vyriešili pomocou funkcie „exec“ v php, ktorej sme ako parameter dodali cestu k programovaciemu jazyku, meno funkcie a jej parametre. Do detailov sme vysvetlili túto funkciu v bakalárskej práci [25].

9.2 Funkcionalita webovej aplikácie

V tejto kapitole sa budeme venovať funkciám nášho softvéru, ktorú porovnáme so softvérmi rozobratými v Kapitole 8. Naša aplikácia sa skladá z troch častí, výpočet modelov, výpočet Malmquistovho indexu a príkladov. Pri výpočte modelov máme na výber zo širokého spektra modelov, konkrétne CCR a BCC vstupný, výstupný model riešený dvojfázovou metódou, aditívny model s konštantnými aj variabilnými výnosmi z rozsahu, aditívny model s váhami s konštantnými aj variabilnými výnosmi z rozsahu, SBM model s konštantnými aj variabilnými výnosmi z rozsahu, SBM model vstupný aj výstupný s konštantnými aj variabilnými výnosmi z rozsahu a AR model pre všetky spomenuté modely. Ďalej ponúkame na výber výpočet Malmquistovho indexu vstupného aj výstupného, pre konštantné aj variabilné výnosy z rozsahu. Všetky spomenuté modely a Malmquistov index sú detailne rozobraté v predchádzajúcich kapitolách prí-



Obr. 11: Schéma programovania modelov

padne v práci [16]. Vzorové príklady sú tak isto súčasťou aplikácie, je teda možnosť vyskúšať si aplikáciu pred tým, ako ju začneme na ostro používať. Používame niekoľko vzorových príkladov, ktoré sú popísané v nasledujúcej kapitole.

Veľkou výhodou v porovnaní s ostatnými aplikáciami spomenutými v Kapitole 8 je, že naša aplikácia je online a voľne dostupná na internete, netreba teda nič inštalovať a užívateľ ju môže rovno používať. Ďalšou výhodou je jej jednoduchosť, užívateľ zadá vstupné a výstupné parametre v požadovanom tvare, vyberie si model a výsledky spolu s grafmi má ihneď k dispozícii. Príklad užívateľského rozhrania sme zobrazili na

Obrázku 12.

Obr. 12: Dea softvér

Výstup z aplikácie je porovnateľný s výstupom DEA solvra, ktorý sme rozobrali v Kapitole 8.1.1. Konkrétne ako výstup z aplikácie uvažujeme pre výpočet modelov nasledovné hodnoty: hodnota efektivity, účelovej funkcie, superefektivity, hodnoty váh vstupov a výstupov, referencie na efektívny vzor, nezohľadnené vstupy a výstupy, absolútne rezervy vstupov a výstupov, efektívny vzor. Ak to model vyžaduje, poskytujeme ako výstup aj hodnotu voľnej premennej, prípadne váhy vstupov a výstupov. Pri výstupe z výpočtu Malmquistovho indexu poskytujeme hodnotu Malmquistovho indexu, hodnotu relatívnej zmeny efektivity jednotky a zmenu hranice produkčných možností. Porovnateľne s ostatnými aplikáciami je možnosť stiahnuť celý výstup do Excelu. Nevýhodou oproti ostatným aplikáciám je rýchlosť výpočtu, pretože celá komunikácia prebieha cez internet a s každou požiadavkou sa musí na pozadí servera vykonať výpočet modelu. Nevýhodou resp. problémom môže byť aj nedostupnosť internetu, užívateľ teda nemôže pracovať offline, ale musí mať prístup na internet. Určitou prekážkou môže byť aj chýbajúce zadávanie názvov jednotlivých *DMU*, ktoré sme sa kvôli prehľadnosti

rozhodli vynechať.

9.3 Vzorové príklady

Vzorové príklady v našej aplikácii sú rozdelené podľa toho, či sa týkajú výpočtu modelov alebo výpočtu Malmquistovho indexu. Prvý príklad pre výpočet modelov sme prebrali z bakalárskej práce [20], ktorý sa týka hodnotenia efektivity 7 knižníc. Príklad pozostáva z dvoch vstupov, konkrétne počet zamestnancov a počet kníh a dvoch výstupov, konkrétne počet čitateľov a počet výpožičiek. K tomuto príkladu sme pridali aj ohraničenia, aby sme demonštrovali ich použitie. Druhý príklad sa venuje hodnoteniu 106 pobočiek Slovenskej sporiteľne a je dostupný v článku [27]. V tomto príklade boli za vstupy zvolené osobné, prevádzkové a ostatné náklady a za výstupy suma všetkých typov zostatkov, celkový počet všetkých účtov, suma zostatkov všetkých typov vkladov spolu ku koncu mesiaca a počet všetkých typov účtov spolu ku koncu mesiaca. Tretí príklad sa týka hodnoteniu efektivity 7 obchodov a je dostupný v práci [15]. Vstupy v tomto príklade predstavujú počet zamestnancov a režijné náklady, výstupy zase počet zákazníkov a tržby. Štvrtý príklad sme prebrali z práce [17] a hodnotíme v ňom 19 nábytkárskych firiem. Za vstupy si autor zvolil náklady, počet zamestnancov, mzdové náklady a plochu obchodu, výstup predstavuje obrat. V poslednom príklade sme sa venovali hodnoteniu efektivity 18 futbalových klubov. Toto hodnotenie môžeme nájsť v článku [18]. Vstupy v tomto prípade predstavovali priemerné platy hráčov a trénerov, výstupy boli body v tabuľke, naplnenosť štadióna a príjmy. Pri Malmquistovom indexe sme hodnotili už spomínané príklady obchodného reťazca a nábytkárskych firiem, kde sme pridali dáta aj za druhé obdobie. Pridali sme však ešte jeden príklad, ktorý sme čerpali zo solvera [7], ktorý sa týka hodnotenia 12 nemocníc. Vstupom je počet doktorov a sestričiek, výstupom sú pacienti s nutnosťou hospitalizácie a pacienti bez nutnosti hospitalizácie.

Všetky spomenuté príklady je možné načítať do našej aplikácie bez nutnosti zadávania a vypočítavať akýmkoľvek doposiaľ spomenutým modelom resp. Malmquistovým indexom.

Záver

Cieľom diplomovej práce bolo analyzovať výpočtové aspekty riešenia úloh lineárneho programovania vznikajúcich pri obálkovej analýze dát, spracovať prehľad používaných postupov v dostupných DEA softvéroch so zameraním na použité metódy, modely, veľkosti úloh a poskytované údaje. Hlavným cieľom bolo na základe tejto analýzy rozšíriť webovú aplikáciu vzniknutú na základe bakalárskej práce [25].

Pri písaní práce sme sa snažili vychádzať z učebných textov [16] tak, aby sme vytvorili určitú nadväznosť resp. rozšírenie týchto textov. V prvých siedmich kapitolách sme sa venovali opisu teoretických poznatkov, ktoré sú neskôr prakticky využívané v nami vytvorenom softvéri. Teóriu sme začali budovať v Kapitole 1 zadefinovaním základných označení a predpokladov, vysvetlením a zadefinovaním analytického tvaru množiny produkčných možností a hranice efektívnosti. Pomocou analytického tvaru množiny produkčných možností sme v Kapitole 2 až 4 popísali základne modely, konkrétne CCR, BCC a aditívny model. V Kapitolách 5 a 6 sme popísali SBM a AR modely, ktoré sú z nášho pohľadu sofistikovanejšie. V spomenutých kapitolách sme sa nesústredili len na korektné a zrozumiteľné matematické zápisy jednotlivých modelov, ale aj na ich vlastnosti a prezentáciu výsledkov, ktorá je užitočná aj pre webovú aplikáciu, keďže v nej ponúkame ako výstup jednotlivé premenné modelov. Zároveň sme zdôraznili význam použitia metód vnútorného bodu na riešenie jednotlivých úloh lineárneho programovania pri správnej interpretácii výsledkov. Poukázali sme na potrebu požitia dvojfázovej metódy pre získanie efektívneho vzoru. Oba tieto prístupy boli implementované v našej aplikácii. V Kapitole 7 sme sa venovali určitému rozšíreniu modelov, konkrétne superefektívite a Malmquistovmu indexu, ktoré sú opäť súčasťou výsledku a neskôr ich poskytuje aj webová aplikácia. V predposlednej kapitole sme sa venovali prehľadu dostupných DEA softvérov, kde sme sa ich snažili zhodnotiť podľa určitých nami vytvorených kritérií. Toto hodnotenie bolo prínosom pre nami vytvorený softvér, ktorý opisujeme v poslednej kapitole. Posledné dve kapitoly tvoria pomyselnú praktickú časť práce.

Hlavným prínosom našej práce je bezpochyby nami vytvorená webová aplikácia, ktorá je voľne dostupná na serveri katedry na adrese:

<http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/projekty/profant/>.

Táto aplikácia poskytuje používateľom široký výber modelov, výpočet Malmquistovho indexu alebo superefektivity s prehľadným a zrozumiteľným výstupom v podobe grafov a tabuliek výsledkov. Prínosom je určite aj teoretická časť práce, kde sú vysvetlené všetky modely, ich vlastnosti a rozšírenia, ktoré môže užívateľ aplikácie použiť. Teoretická časť je teda akousi matematickou dokumentáciou resp. manuálom k aplikácii. Táto diplomová práca bola prínosom aj pre autora práce, keďže sa musel popasovať s niekoľkými programovacími jazykmi ako Octave pri tvorbe matematických modelov, Html pri programovaní statických častí aplikácie alebo php pri programovaní dynamických častí aplikácie.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Banxia Frontier Analyst, dostupné na internete (19.2.2015): <http://www.banxia.com/frontier/>
- [2] Barr, R.S.: DEA software tools and technology, A State-of-the-Art Survey, dostupné na internete (12.2.2015): <http://faculty.smu.edu/barr/pubs/tr04-05.pdf>
- [3] Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K.: Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000
- [4] Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K.: Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software, Second Edition, Springer Science+Business Media, LLC, New York, Dordrecht, Heidelberg, London, 2011
- [5] Cooper, W.W., Seiford, L. M., Zhu, J.: Handbook on Data Envelopment Analysis, Second Edition, Springer Science+Business Media, LLC, New York, Dordrecht, Heidelberg, London, 2011
- [6] Charnes, A., Cooper, W.W., and Rhodes, E.: Measuring the Efficiency of Decision-Making Units, European Journal of Operational Research, Vol.2, No.6, pp. 429-444., 1978
- [7] DEA Software - DEA Frontier, dostupné na internete (12.2.2015): <http://www.deafrontier.net/software.html>
- [8] DEA zone: A comprehensive website on Data Envelopment Analysis, dostupné na internete (12.2.2015): <http://deazone.com/en/resources/books>
- [9] DEA zone: Software, dostupné na internete (12.2.2015): <http://deazone.com/en/software>
- [10] EMQ OnFront, dostupné na internete (19.2.2015): <http://www.emq.com/>

- [11] EMS: Efficiency Measurement System, dostupné na internete (12.2.2015): <http://www.holger-scheel.de/ems/>
- [12] Fandel, P.: Je technická zmena v slovenskom poľnohospodárstve hicks-neutrálna?, Kvantitatívne metódy v ekonómii 2011, medzinárodný seminár, Slovenský raj, 2011, dostupné na internete (12.2.2015): <http://www.slpk.sk/eldo/2012/zborniky/012-12/Fandel.pdf>
- [13] Färe, R., Grosskopf, S., Russell, R.: Index Numbers Essays in Honour of Sten, Malmquist., Springer Publisher, New York, 1997
- [14] Free CSS templates, dostupné na internete (12.2.2015): <http://www.free-css.com>
- [15] Friebelová, J.: Metoda analýzy datových obalů (DEA), učebné texty, EF JU, Č. Budějovice, 2007, dostupné na internete (8.4.2015): <http://www2.ef.jcu.cz/jfrieb/prednaskykomplet/skriptaRMDEA.pdf>
- [16] Halická, M.: DEA modely, učebné texty, FMFI UK, Bratislava, 2015
- [17] Jablonský, J.: Vybrané aplikace optimalizačních modelů, VSE, Praha, dostupné na internete (8.4.2015): <http://nb.vse.cz/jablon/doc/pmm7.pdf>
- [18] Kalvelagen, E.: Efficiently solving DEA models with Gams, Amsterdam Optimization Modeling Group, Den Haag, The Netherlands, dostupné na internete (8.4.2015): <http://amsterdamoptimization.com/pdf/dea.pdf>
- [19] Klieštik, T.: Kvalifikácia efektivity činností dopravných podnikov pomocou Data Envelopment Analysis, E+M Ekonomie a management, 1 (2009), dostupné na internete (12.2.2015): <http://www.ekonomiemanagement.cz/download/13318267071add/13kliestik.pdf>
- [20] Lauko, M.: DEA analýza efektívnosti a SBM model, bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2007, dostupné na internete (8.4.2015): <http://diplomovka.sme.sk/praca/3182/deaanalyzaefektivnosti-sbm-model.php>
- [21] MALMQUIST, S.: Index Numbers and Indifference Surfaces. *Trabajos de Estadística*, Iss. 4, pp. 209-242. ISSN 0213-8190, 1953

- [22] Mlynárik, M.: DEA modely, Assurance region model, bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2007, dostupné na internete (12.2.2015): <http://vili.uniba.sk:8880/dzb/dostupne/2007-FM-qcTbZN/2007-FM-qcTbZN.pdf>
- [23] PIONEER DEA software, dostupné na internete (12.2.2015): <http://faculty.smu.edu/barr/pioneer/>
- [24] Plesník, J., Dupacová, J., Vlach, M.: Lineárne programovanie. Alfa, Bratislava, 1990
- [25] Profant, R.: Návrh a vypracovanie webového rozhrania pre interaktívnu možnosť riešenia DEA úloh, bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2013, dostupné na internete (12.2.2015): <http://www.iam.fmph.uniba.sk/efm/bakalarky/2013/profant/bakalarka.pdf>
- [26] Saitech, DEA Solver-PRO, Data Envelopment Analysis Software, dostupné na internete (19.2.2015): <http://www.saitech-inc.com/Products/Prod-DSP.asp>
- [27] Ševčovič, D., Halická, M., Brunovský, P.: DEA analysis for large structured bank branch network, Central Euro. J. of Operational Res. 9 (2001), 329-342, dostupné na internete (12.2.2015): <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/papers/cl19.pdf>
- [28] Zhu, J.: Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking. Data. Envelopment Analysis with Spreadsheets, Second Edition, Science Business Media, LLC, New York, 2009