

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Okamžitá úroková miera ako súčet dvoch faktorov –
zjednodušenie modelu

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Okamžitá úroková miera ako súčet dvoch faktorov –
zjednodušenie modelu

Študijný program: 1114 Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Školiteľ: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava 2015

Bc. Radoslav Šrámek



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Radoslav Šrámek
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Okamžitá úroková miera ako súčet dvoch faktorov - zjednodušenie modelu.

Cieľ: Téma nadväzuje na diplomovú prácu Jany Halgašovej z roku 2011. V nej sa okamžitá úroková miera modelovala ako súčet dvoch nepozorovateľných faktorov, dosiahla sa tak výborná zhoda s reálnymi trhovými dátami. Jeden z faktorov pritom vychádzal takmer konštantný. Cieľom diplomovej práce preto bude zistiť, či by sa model "náhodný faktor 1 + náhodný faktor 2" nedal zjednodušiť na "konštanta + náhodný faktor".

Vedúci: RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFLKAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Dátum zadania: 25.01.2012

Dátum schválenia: 26.01.2012
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie:

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu s názvom *Okamžitá úroková miera ako súčet dvoch faktorov – zjednodušenie modelu* vypracoval samostatne pod vedením školiteľa a s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava 7. 8. 2015

.....

Pod'akovanie

Touto cestou by som sa chcel pod'akovať vedúcej diplomovej práce, RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD., za odbornú pomoc, rady, pripomienky a široké vedomosti v danej problematike, za ochotu a trpezlivosť ale aj nadšenie, ktoré mi pomohli pri vypracovaní tejto diplomovej práce.

ŠRÁMEK, Radoslav: *Okamžitá úroková miera ako súčet dvoch faktorov – zjednodušenie modelu* [Diplomová práca]

Univerzita Komenského v Bratislave, Mlynská dolina, 84248 Bratislava, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.
Vedúci práce: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD
Bratislava, 2015. /37 s./

Abstrakt

V tejto práci sa zaoberáme zjednodušením modelu, ktorým sa okamžitá úroková miera modeluje ako súčet dvoch nepozorovateľných faktorov. Pokúsime sa ho zjednodušiť na model, v ktorom vystupuje súčet náhodného faktora a konštanty. V prvej fáze kalibrácie sa budeme venovať minimalizácii odchýlok trhových výnosov od teoretických. Budeme sa najskôr venovať kalibrácii Vašíčkovho modelu, kde okamžitá úroková miera bude rozložená na náhodný faktor Vašíčkovho tvaru a konštantu. Neskôr sa pokúsime kalibrovať rovnako upravený CKLS model, ktorého presnosť overíme pomocou presného riešenia CIR modelu. Preskúmame možnosti použitia metódou maximálnej vierohodnosti v druhej fáze optimalizácii. Výsledky kalibrácie otestujeme na simulovaných dátach.

Kľúčové slová: Jednofaktorové modely, CKLS model, kalibrácia, výnosové krivky

ŠRÁMEK, Radoslav: *Approximation for pricing zero-coupon bonds in two-factor interest rate models – model simplification* [Master thesis]

Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics,
Department of Applied Mathematics and Statistics.

Supervisor: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD

Bratislava, 2015. /37 p/

Abstract

The purpose of this thesis is a simplification of model in which the instantaneous interest rate is modelled as a sum of two unobservable factors. We try to simplify it to a model in which it equals the sum of a random factor and a constant. In the first phase of calibration we minimize differences between market and theoretical yields. Firstly we consider calibration of the Vašíček model where the instantaneous interest rate is decomposed into Vašíček random factor and a constant. Subsequently, equally adjusted CKLS model calibration is studied, the accuracy of which can be verified by exact CIR model solution. Finally, the thesis examines possibilities for using the maximum likelihood method in the second phase of calibration. The results of the calibration are tested on simulated data.

Key words: one-factor interest rate model, CKLS model, Vasicek model, calibration, yield curves

Obsah

Úvod.....	1
1 Základné pojmy.....	3
1.1 Deriváty úrokovej miery	3
1.2 Stochastický kalkulus	5
2. Jednofaktorové rovnovážne modely	8
2.1 Modelovanie okamžitej úrokovej miery.....	8
2.2 Parciálna diferenciálna rovnica pre cenu dlhopisu	11
2.3 Explicitné riešenia a analytická aproximácia riešenia parciálnej parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu.....	13
2.3.1 Cena dlhopisu vo Vašíčkovom modeli posunutom o konštantu	13
2.3.2 Cena dlhopisu v CIR modeli posunutom o konštantu.....	15
2.3.3. Cena dlhopisu v CKLS modeli posunutom o konštantu	17
3. Kalibrácia založená na porovnaní teoretických a trhových výnosových kriviek..	19
3.1 Kalibrácia Vašíčkovho modelu posunutého o konštantu	19
3.2 Kalibrácia CKLS modelu posunutého o konštantu	22
3.3 Testovanie kalibrácie na simulovaných dátach modelu CIR typu	24
4. Metóda maximálnej vierohodnosti použitá v druhej fáze kalibrácie	28
4.1 Metóda maximálnej vierohodnosti použitá pri odhade parametrov Vašíčkovho modelu posunutého o konštantu	28
4.2 Metóda maximálnej vierohodnosti použitá pri odhade parametrov CKLS modelu posunutého o konštantu	31
Záver	35
Literatúra	36

Úvod

V posledných desaťročiach sa intenzívne zvyšoval záujem o deriváty úrokových mier. Vyvinulo sa množstvo nástrojov a produktov založených na úrokových mierach. Finančné trhy sú dnes spojené s úrokovými mierami viac, ako kedykoľvek predtým. V ekonomike nepoznáme len jednu úrokovú mieru. Ovplyvňuje ju veľa faktorov, napríklad jedným z fundamentálnych je maturita. Vzťah medzi maturitou a výnosom dlhopisu s nulovým kupónom nazývame časová štruktúra úrokových mier.

Začiatok časovej štruktúry úrokových mier sa nazýva okamžitou úrokovou mierou alebo short rate. Modely uvažované v tejto diplomovej práci patria medzi tzv. short rate modely. V nich je short rate popísaná stochastickou diferenciálnou rovnicou a časová štruktúra úrokových mier sa počíta z cien dlhopisov, ktoré sa získajú riešením parciálnej diferenciálnej rovnice.

Práca je rozdelená na štyri časti. V prvej kapitole si priblížime niektoré nástroje, využívané pri modelovaní okamžitej úrokovej miery. Vysvetlíme si základné finančné pojmy, definujeme Wienerov proces a sformulujeme Itóovu lemu.

Druhá kapitola prináša prehľad niektorých modelov úrokových mier pomocou definície stochastického procesu modelujúceho okamžitú úrokovú mieru. Zaoberáme sa pritom modelmi, v ktorých je short rate definovaná ako súčet konštanty a náhodného procesu. Odvodíme spôsob oceňovania dlhopisov v týchto modeloch, odvodíme explicitné riešenia (tam, kde existujú), ako aj aproximáciu pre model CKLS typu.

Tretia kapitola sa venuje metódam kalibrácie short rate modelov, ktoré sa odlišujú zložitou, množstvom faktorov a možnosťami interpretácie. V našom prípade sa budeme v prvom kroku kalibrácie venovať minimalizácií odchýlok trhových výnosov od teoretických. Budeme nadväzovať na diplomovú prácu J. Halgašovej, v ktorej je short rate modelovaná ako súčet dvoch faktorov CKLS typu. My sa budeme venovať kalibrácii zjednodušeného modelu, kde okamžitá úroková miera bude rozložená na náhodný faktor CKLS tvaru a konštantu.

Výsledkom prvej fázy kalibrácie je veľmi dobrý odhad short rate, ale konštantu a náhodný faktor sú posunuté o konštantu. Preto je posledná časť venovaná

odhadovaniu parametrov metódou maximálnej vierohodnosti. Pomocou nej sa short rate pokúsime rozložiť na konštantu a CKLS faktor pomocou odhadu short rate z predchádzajúceho kroku.

1 Základné pojmy

V tejto kapitole zavedieme pojmy dlhopis, predstavíme si ho ako derivát úrokovej miery. Podrobnejšie sa danej problematike venujú autori v knihách [1], [2] a [3]. Oboznámime sa so základnými nástrojmi stochastického kalkulu, ktorý budeme využívať. Tými sú Wienerov proces a Itóova lema. Podrobnejšie informácie o stochastickom kalkule sa dajú nájsť napríklad v [12].

1.1 Deriváty úrokovej miery

Na obchodovanie s úrokovou mierou slúži viacero jej derivátov, s ktorými sa obchoduje na trhoch po celom svete. Najzákladnejšia forma derivátu na úrokovú mieru je dlhopis. Emitent sa pri emisii bezkupónového dlhopisu zaväzuje vyplatiť v určitý deň v budúcnosti jeho nominálnu hodnotu. Rozdiel nominálnej a predajnej ceny je tzv. diskont. Cenu takéhoto dlhopisu, kde t je dnešný čas a T je čas splatnosti dlhopisu, budeme označovať $P(t, T)$, kde $t \leq T$. Za normálnych okolností je predajná cena dlhopisu nižšia ako jej nominálna hodnota. Bez ujmy na všeobecnosti budeme pracovať s dlhopismi, ktoré v čase splatnosti vyplatia jednu peňažnú jednotku, teda $P(T, T) = 1$.

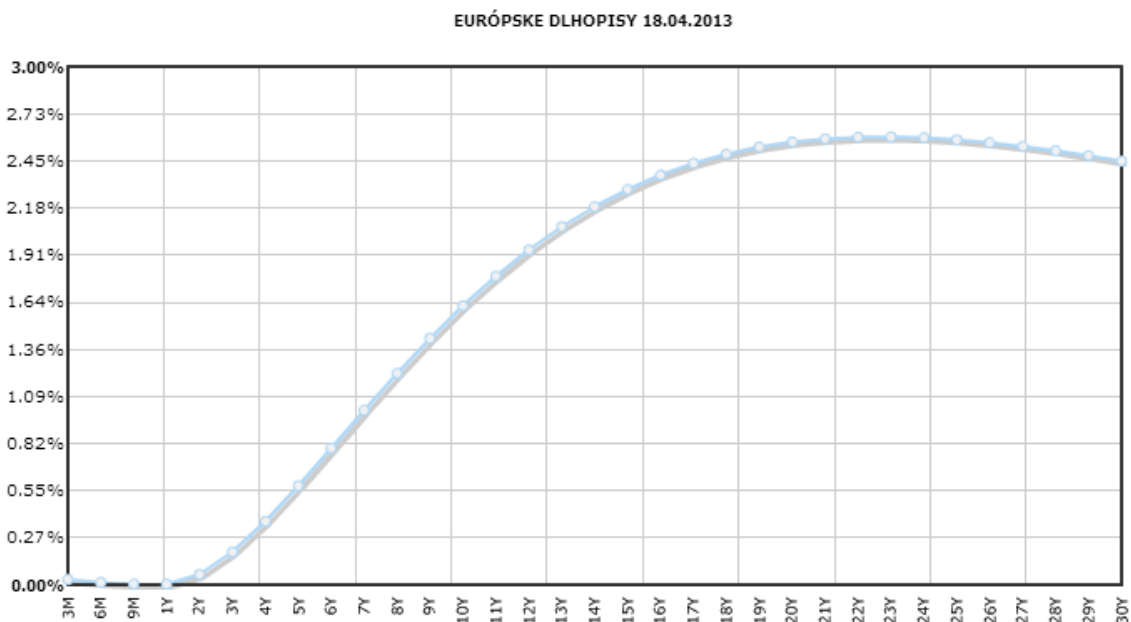
Okamžitú cenu dlhopisu môžeme vyjadriť ako

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, \quad (1.1.1)$$

kde $R(t, T)$ je úroková miera. Z toho vyplýva, že časová štruktúra úrokových mier vyjadrujúca závislosť medzi úrokovou mierou a časom zostávajúcim do splatnosti príslušného dlhopisu sa pomocou ceny dlhopisu dá vyjadriť ako

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t}. \quad (1.1.2)$$

Bezakupónový dlhopis sa zaväzuje vyplatiť presnú sumu v dopredu určenom čase. Úroková miera teda vyjadruje poplatok za využívanie peňazí od súčasnosti až do času maturity T . Na obrázku 1 uvádzame príklad časovej štruktúry úrokových mier.

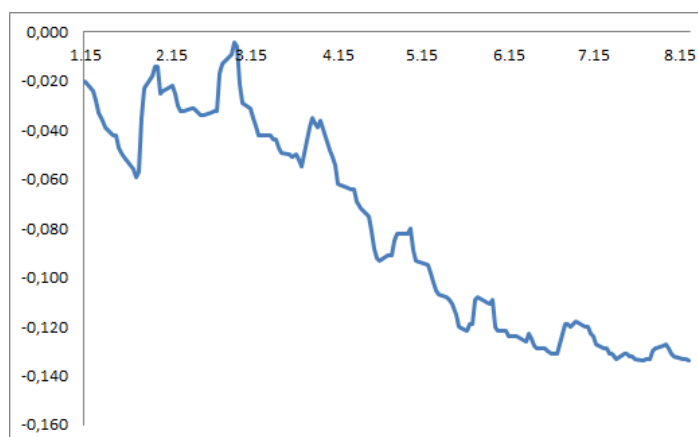


Zdroj: ECB

Obr 1. Časová štruktúra úrokových mier pre dlhopisy s rôznou dĺžkou splatnosti

Zdroj www.ecb.europa.eu/

Poznamenajme, že predpoklad o tom, že predajná cena dlhopisu je nižšia ako jeho nominálna hodnota, znamená podľa (1.1.2) predpoklad o kladnosti úrokových mier. Toto je naozaj štandardná situácia, môžeme sa však stretnúť aj so zápornými úrokovými mierami, ako to ilustrujeme na obrázku 2.



Obr 2. Priebeh jednotýždňového Euriboru (obdobie 1/2015-8/2015)

Zdroj <http://www.global-rates.com/>

Začiatok výnosovej krivky predstavuje tzv. okamžitú úrokovú mieru. Ak označíme jej hodnotu v čase t ako r_t , matematicky ju môžeme definovať ako

$$r_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} R(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\Delta t} \ln P(t, t + \Delta t). \quad (1.1.3)$$

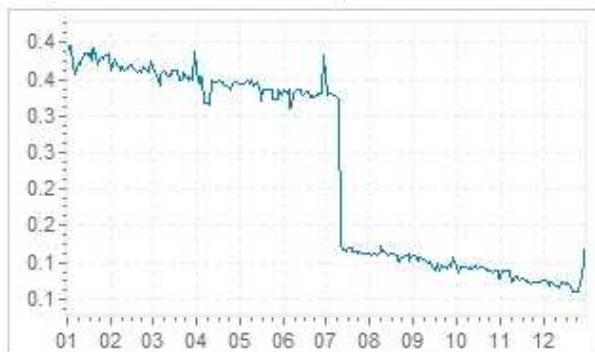
Pri využití faktu, že $P(t, t) = 1$ a z definície derivácie vyplýva, že okamžitú úrokovú mieru môžeme vyjadriť ako

$$r_t = -\left. \frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T) \right|_{T=t}. \quad (1.1.4)$$

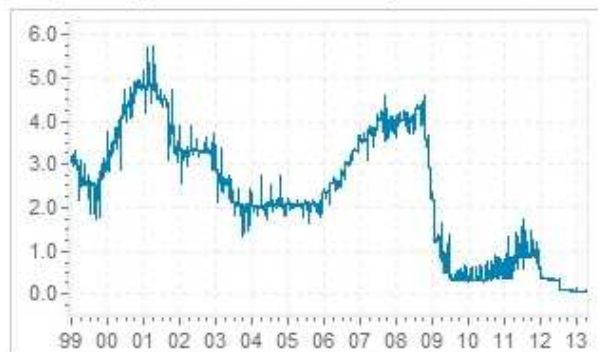
Na obrázku 3 je znázornený priebeh európskej krátkodobej (overnight) sadzby Eonia.

Graphs - Eonia historic interest rates

Graph Eonia interest rate development 2012



Graph of long-term Eonia rate development



Obr. 3 Priebeh okamžitej úrokovej mier Eonia z roku 2012 (vľavo) a jej dlhodobý trend (vpravo). Zdroj: www.global-rates.com

1.2 Stochastický kalkulus

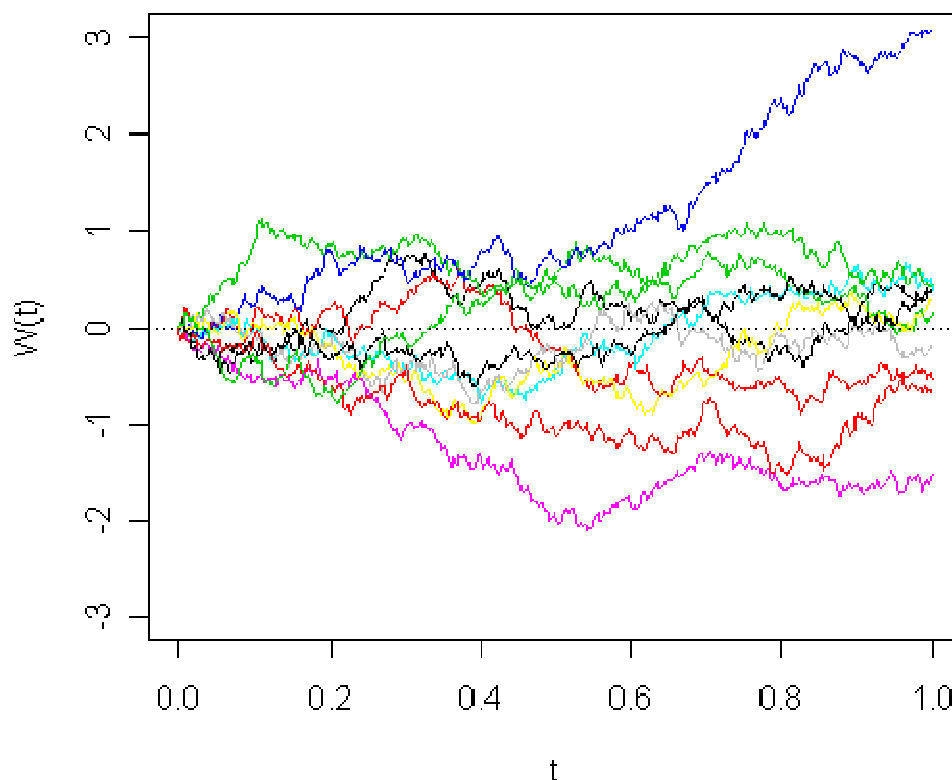
V nasledujúcej kapitole si priblížime niektoré nástroje, využívané pri modelovaní okamžitej úrokovej miery. Wienerov proces budeme potrebovať pri definovaní náhodného procesu, ktorým sa modeluje okamžitá úroková miera. Itoóvu lemu využijeme pri odvodení parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu.

Definícia 1.2.1 Brownov pohyb $\{X(t), t \geq 0\}$ je t -parametrický systém náhodných veličín, pričom

1. všetky prírastky $X(t + \Delta) - X(t)$ majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu\Delta$ a disperziou (alebo aj varianciou) $\sigma^2\Delta$,

2. pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$ sú prírastky $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa bodu 1.,
3. $X(0) = 0$.

Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ sa nazývame Wienerov proces.



Obr. 4 Priebeh Brownovho pohybu s rôznymi parametrami

Nasledujúce tvrdenie dáva predpis pre diferenciál funkcie definovanej pomocou transformácie procesu, pre ktorý je známa stochastická diferenciálna rovnica, ktorú spĺňa.

Lema 1.2.2 (Itóova lema) Nech $f(x, t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dr = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw, \tag{1.2.2}$$

kde w je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2(x,t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt, \quad (1.2.3)$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x,t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma^2(x,t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x,t) \frac{\partial f}{\partial x} dw. \quad (1.2.4)$$

2. Jednofaktorové rovnovážne modely

Nasledujúca kapitola prináša prehľad niektorých modelov úrokových mier, ich definíciu stochastického procesu modelujúceho okamžitú úrokovú mieru. Odvodíme spôsob oceňovania dlhopisov v týchto modeloch, explicitné riešenia v prípadoch, kedy existujú, ako aj aproximáciu pre všeobecnejší prípad, v ktorom explicitné riešenie dostupné nie je. Týmto témam sa podrobne venujú práce [14], [13], [8].

2.1 Modelovanie okamžitej úrokovej miery

V tejto práci sa zaoberáme zjednodušením dvojrozmerného rovnovážneho modelu na jednorozmerný model posunutý o konštantu. Uvažujme najskôr základný jednofaktorový model.

Predpokladajme, že okamžitú úrokovú mieru r_t charakterizujeme stochastickou diferenciálnou rovnicou, ktorú vo všeobecnom tvare zapisujeme

$$dr = \mu(t, r)dt + \sigma(t, r)dw \quad (2.1.1)$$

Rovnica je rozdelená na deterministickú a stochastickú zložku, kde $\mu(t, r)$ označujeme ako trend (drift) vo vývoji úrokovej miery a $\sigma(t, r)$ charakterizuje fluktuáciu okolo trendovej zložky $\mu(t, r)$.

Obvyklou voľbou driftovej funkcie je $\mu(t, r) = \kappa(\theta - r)$, kde κ, θ sú kladné konštanty. Parameter θ nazývame limitnou úrokovou mierou a κ rýchlosťou reverzie alebo aj rýchlosťou návratu k limitnej úrokovej miere. Stochastické procesy s touto formou deterministickej časti sa zvyknú označovať aj ako Ornstein-Uhlenbeckove mean reversion procesy. Podstata driftu v tvare $\mu(t, r) = \kappa(\theta - r)$ spočíva v tom, že stredná hodnota úrokovej miery je potom priťahovaná k rovnovážnej hodnote θ , pričom sila tohto priťahovania je daná parametrom κ .

Špeciálnou voľbou funkcie $\sigma(t, r)$ dostávame známe modely

- Vašíčkov model [13] pre $\sigma(t, r) = \sigma$

- Cox-Ingersol-Rossov model (ďalej CIR) [14] pre $\sigma(t, r) = \sigma\sqrt{r}$
- Chan – Karilyi – Longstaff – Sandersov (ďalej CKLS model) [8] pre $\sigma(t, r) = \sigma r^\gamma$, kde $\gamma \geq 0$. Všimnime si, že špeciálnou voľbou parametra γ dostaneme Vašíčkov $\gamma = 0$, a CIR ($\gamma = \frac{1}{2}$) model.

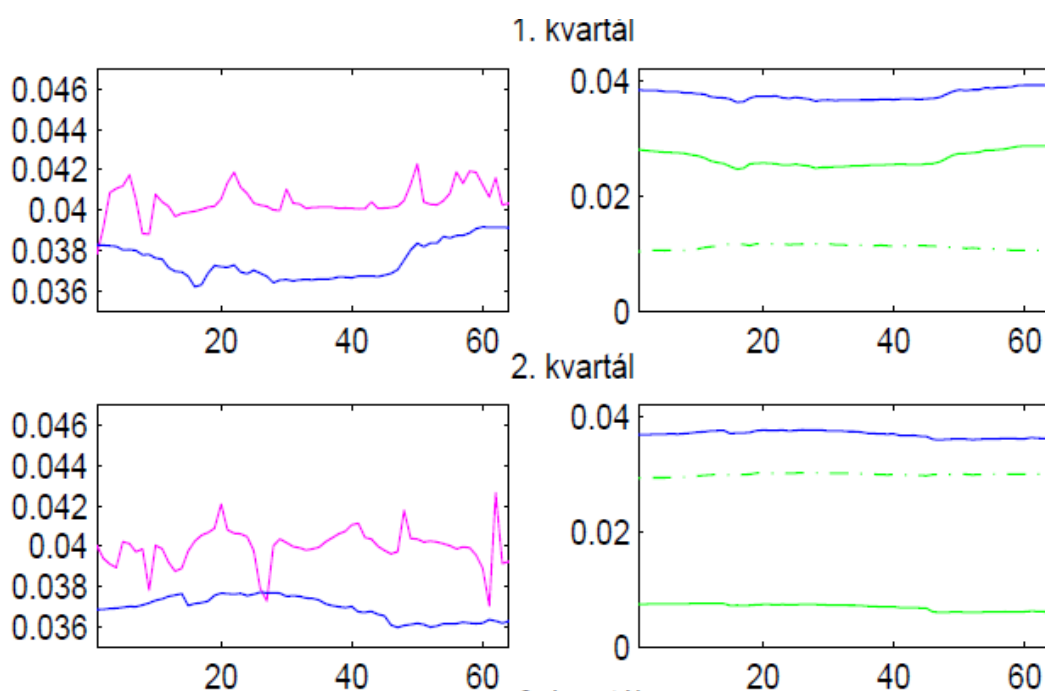
V diplomovej práci [6] sa autorka zaoberá modelom, v ktorom je okamžitá úroková miera súčtom dvoch náhodných faktorov. CKLS tvaru, teda $r = r_1 + r_2$, pričom

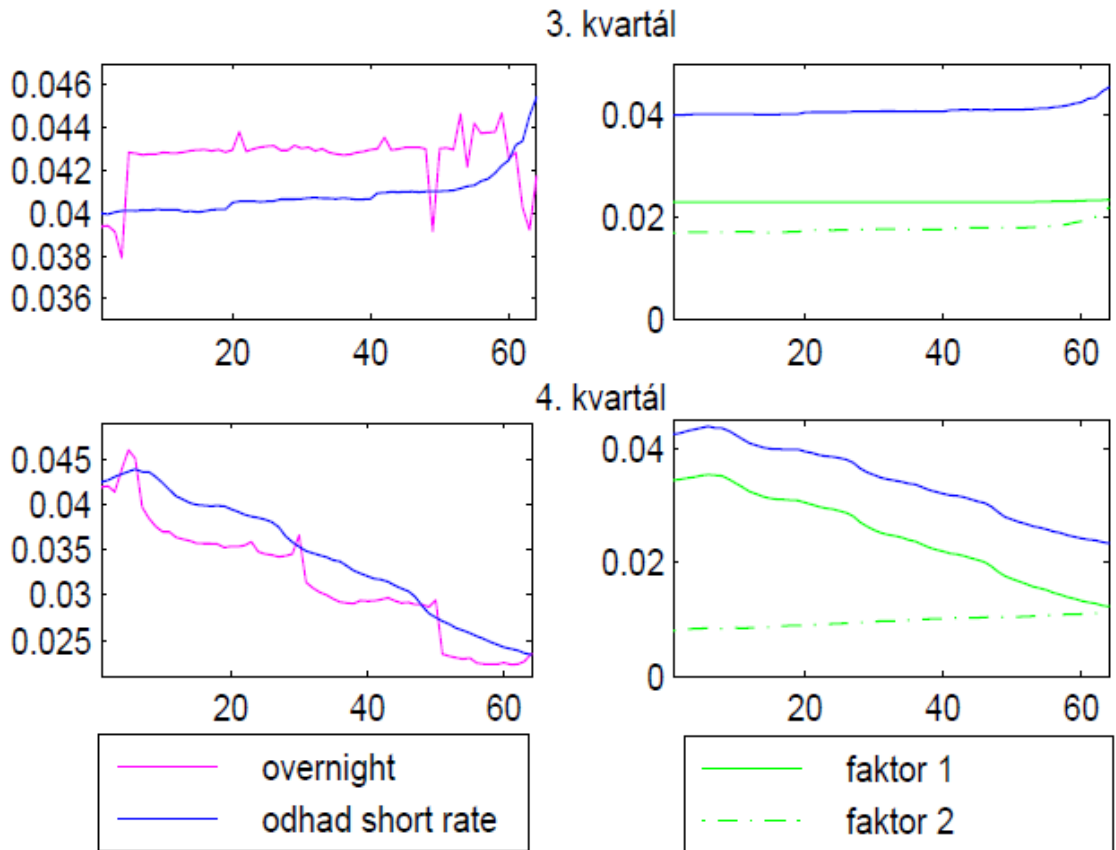
$$dr_1 = \kappa_1(\theta_1 - r_1) + \sigma_1 r_1^{2\gamma} dw_1,$$

$$dr_2 = \kappa_2(\theta_2 - r_2) + \sigma_2 r_2^{2\gamma} dw_2,$$

$$cov(dw_1, dw_2) = \rho dt, \text{ kde } \rho \in (-1, 1).$$

Výsledky odhadov týchto faktorov pre jednotlivé kvartály preberáme z uvedenej diplomovej práce na obrázku 5.





Obr.5 Porovnanie reálnej úrokovej miery overnight s odhadnutým priebehom short-rate a odhad faktorového rozkladu pre jednotlivé kvartály roku 2008 [6].

Môžeme si všimnúť, že jeden z procesov vychádza takmer konštantný a odhadnutý priebeh okamžitej úrokovej miery je určený priebehom druhého faktora. Toto je viditeľné predovšetkým v poslednom kvartáli.

Tieto výsledky vedú k navrhnutiu jednoduchšieho modelu, v ktorom je okamžitá úroková miera r súčtom konštanty a pomocného procesu \tilde{r} , ktorý je charakterizovaný stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$r = \tilde{r} + k \quad (2.1.2)$$

$$d\tilde{r} = \mu(t, \tilde{r})dt + \sigma(t, \tilde{r})dw.$$

Zjednodušenie modelu uvedeného v diplomovej práci [6] zodpovedá

$$d\tilde{r} = \kappa(\theta - \tilde{r})dt + \sigma\tilde{r}^\gamma dw.$$

Poznamenajme ešte, že vo svojej pôvodnej formulácii CIR a CKLS model nepripúšťajú, na rozdiel od Vašíčkovho modelu, záporné úrokové miery. Toto sa dlho

považovalo za ich výhodu, avšak (ako sme videli v kapitole 1) v súčasnosti je možné pozorovať aj úrokové miery, ktoré sú záporné. Ak v modeli (2.1.2) zvolíme konštantu k zápornú, tak proces r bude môcť nadobúdať aj záporné hodnoty. Tým spojíme výhodnosť nekonštantnej volatility (pre $\gamma > 0$) a možnosti modelovať záporné úrokové miery (ktoré by sme bez pridania konštanty mali len v prípade $\gamma = 0$)

2.2 Parciálna diferenciálna rovnica pre cenu dlhopisu

V nasledujúcej časti sa budeme venovať odvodeniu parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu hodnoty dlhopisu s maturitou v čase T v modeli (2.1.2). Táto cena bude závisieť od maturity T , času t a procesu \tilde{r} , teda $P = P(\tilde{r}, t, T)$, pričom T uvažujeme ako parameter a \tilde{r}, t ako nezávislé premenné. Z Itóovej lemy dostávame stochastickú diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial \tilde{r}} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{r}^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial P}{\partial \tilde{r}} dw = \mu_B(t, \tilde{r}) dt + \sigma_B(t, \tilde{r}) dw, \quad (2.2.1)$$

sme pre zjednodušenie zápisu označili

$$\mu_B(t, \tilde{r}) = \kappa(\theta - \tilde{r}), \quad \sigma_B = \sigma \tilde{r}^\gamma. \quad (2.2.2)$$

Ďalej zostrojíme portfólio pozostávajúce z dvoch dlhopisov s rôznymi maturitami. Portfólio bude pozostávať z jedného dlhopisu s maturitou T_1 a z Δ dlhopisov s maturitou T_2 . Hodnota portfólia je teda

$$\pi = P(r, t, T_1) + \Delta P(r, t, T_2). \quad (2.2.3)$$

Zmenu jeho hodnoty potom popisuje rovnica

$$d\pi = dP(\tilde{r}, t, T_1) + \Delta dP(\tilde{r}, t, T_2) \quad (2.2.4)$$

$$= (\mu_B(t, \tilde{r}, T_1) + \Delta \mu_B(t, \tilde{r}, T_2)) dt + \Delta (\sigma_B(t, \tilde{r}, T_1) + \sigma_B(t, \tilde{r}, T_2)) dw. \quad (2.2.5)$$

Ak zvolíme vhodný pomer počtu dlhopisov Δ ako

$$\Delta = -\frac{\sigma_B(t, \tilde{r}, T_1)}{\sigma_B(t, \tilde{r}, T_2)}, \quad (2.2.6)$$

tak eliminujeme v rovnici (2.2.5) náhodnú zložku a zostáva nám len jej deterministická časť

$$d\pi = (\mu_B(t, \tilde{r}, T_1) - \frac{\sigma_B(t, \tilde{r}, T_1)}{\sigma_B(t, \tilde{r}, T_2)} \mu_B(t, \tilde{r}, T_2)) dt. \quad (2.2.7)$$

Aby sme vylúčili arbitrážnu príležitosť, výnos takéhoto portfólia sa musí rovnať aktuálnej hodnote okamžitej úrokovej miery, teda musí platiť

$$d\pi = r\pi dt = (\tilde{r} + k)\pi dt$$

$$(\mu_B(t, \tilde{r}, T_1) - \frac{\sigma_B(t, \tilde{r}, T_1)}{\sigma_B(t, \tilde{r}, T_2)} \mu_B(t, \tilde{r}, T_2)) = (\tilde{r} + k)\pi \quad (2.2.8)$$

a po dosadení hodnoty portfólia π

$$\begin{aligned} & \mu_B(t, \tilde{r}, T_1) - \frac{\sigma_B(t, \tilde{r}, T_1)}{\sigma_B(t, \tilde{r}, T_2)} \mu_B(t, \tilde{r}, T_2) \\ &= (\tilde{r} + k)(P(\tilde{r}, t, T_1) - \frac{\sigma_B(t, \tilde{r}, T_1)}{\sigma_B(t, \tilde{r}, T_2)} P(\tilde{r}, t, T_2)). \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Potom z (2.2.9) vyplýva, že musí platiť

$$\frac{\mu_B(t, \tilde{r}, T_1) - (\tilde{r} + k)P(\tilde{r}, t, T_1)}{\sigma_B(t, \tilde{r}, T_1)} = \frac{\mu_B(t, \tilde{r}, T_2) - (\tilde{r} + k)P(\tilde{r}, t, T_2)}{\sigma_B(t, \tilde{r}, T_2)}. \quad (2.2.10)$$

Predpokládame, že maturity T_1 a T_2 môžu byť ľubovoľné, preto z rovnosti (2.2.10) vyplýva, že existuje taká funkcia $\lambda(\tilde{r}, t)$, že

$$\lambda(\tilde{r}, t) = \frac{\mu_B(t, \tilde{r}, T) - (\tilde{r} + k)P(\tilde{r}, t, T)}{\sigma_B(t, \tilde{r}, T)} \quad (2.2.11)$$

pre ľubovoľnú maturitu T .

Funkcia λ sa nazýva trhovú cenu rizika a vyjadruje nárast výnosu dlhopisu v porovnaní s bezrizikovou úrokovou mierou.

Po dosadení μ_B a σ_B definovaných v (2.2.2) do (2.2.11) dostávame rovnicu

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mu(t, \tilde{r}) - \lambda(\tilde{r}, t)\sigma(t, \tilde{r}) \frac{\partial P}{\partial \tilde{r}} + \frac{\sigma^2(\tilde{r}, t)}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{r}^2} - (\tilde{r} + k)P = 0, \quad (2.2.12)$$

ktorá musí byť splnená pre každé $t \in (0, T)$ a $\tilde{r} > 0$. Keďže oceňujeme dlhopis, ktorý v čase T vyplatí jednu peňažnú jednotku, k rovnici sa pridáva koncová podmienka $P(\tilde{r}, T, T) = 1$ pre každé $\tilde{r} > 0$.

2.3 Explicitné riešenia a analytická aproximácia riešenia parciálnej parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu

Pripomeňme si jednofaktorové modely okamžitej úrokovej miery uvedené v kapitole 2.1. Okamžitá úroková miera r je v nich modelovaná stochastickými diferenciálnymi rovnicami

- $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma w$ vo Vašíčkovom modeli,
- $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma(t, r)\sqrt{r}dw$ v CIR modeli,
- $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw$ v CKLS modeli.

Z kapitoly 2.2 vieme, že po určení trhovej ceny rizika $\lambda(r, t)$ dostaneme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu (zoberieme $k = 0$, potom $r = \tilde{r}$).

Ak vo Vašíčkovom modeli zvolíme konštantnú trhovú cenu rizika $\lambda(r, t) = \lambda$ a v CIR modeli trhovú cenu rizika $\lambda(r, t) = \lambda\sqrt{r}$, vieme nájsť explicitné riešenie pre cenu dlhopisu. Toto je spravené napríklad v [1] a [3]. Použijeme teraz tento postup na nájdenie cien dlhopisov v našom modeli $r = \tilde{r} + k$, pričom za \tilde{r} zoberieme proces Vašíčkovho typu $d\tilde{r} = \kappa(\theta - \tilde{r})dt + \sigma dw$ a konštantnú trhovú cenu rizika λ , resp proces CIR $d\tilde{r} = \kappa(\theta - \tilde{r})dt + \sigma(t, \tilde{r})\sqrt{\tilde{r}}dw$ a trhovú cenu rizika rovnú $\lambda\sqrt{\tilde{r}}$.

V klasickom CKLS modeli s volatilitou $\sigma(t, r) = \sigma r^\gamma$ nie je pre $\gamma \neq 0$ a $\gamma \neq \frac{1}{2}$ známe explicitné riešenie pre cenu dlhopisu. Jednou z možností približného výpočtu je použitie približnej analytickej formuly. Tento prístup použijeme v našom modeli, kde je faktor CKLS posunutý o konštantu.

2.3.1 Cena dlhopisu vo Vašíčkovom modeli posunutom o konštantu

Uvažujeme najskôr model Vašíčkovho typu, v ktorom je cena dlhopisu riešením rovnice

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\alpha + \beta \tilde{r}) \frac{\partial P}{\partial \tilde{r}} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{r}^2} - (\tilde{r} + k)P = 0, \quad (2.3.1.1)$$

kde $\tau \in (0, T >)$, $\tilde{r} \in R$ s počiatočnou podmienkou $P(\tilde{r}, 0) = 1$, pričom $\alpha = \kappa\theta - \lambda\sigma$ a $\beta = -\kappa$ a čas sme transformovali na čas zostávajúci do splatnosti dlhopisu ktorý je definovaný vzťahom $\tau = T - t$.

Snažíme sa nájsť riešenie v tvare

$$P(r, \tau) = X(\tau)e^{-Y(\tau)\tilde{r}}, \quad (2.3.1.2)$$

pričom funkcie X a Y spĺňajú počiatočné podmienky $X(0) = 1$ a $Y(0) = 0$. Tie zaručia splnenie začiatočnej podmienky $P(\tilde{r}, 0) = 1$. Najprv vypočítame derivácie, ktoré vystupujú v parciálnej diferenciálnej rovnici (2.3.1.1):

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = e^{-Y\tilde{r}}(\dot{X} - XY\dot{\tilde{r}}), \quad \frac{\partial P}{\partial \tilde{r}} = -XYe^{-Y\tilde{r}}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{r}^2} = XY^2e^{-Y\tilde{r}}. \quad (2.3.1.3)$$

Tie následne dosadíme do (2.3.1.1) a dostaneme

$$\exp\left\{-Y\tilde{r}\left[-(\dot{X} - XY\dot{\tilde{r}}) + \frac{\sigma^2}{2}XY^2 - (\alpha + \beta\tilde{r})XY - (\tilde{r} + k)X\right]\right\} = 0.$$

Ďalej dáme dohromady členy, ktoré obsahujú \tilde{r} a ostatné členy:

$$-\dot{X} + \frac{\sigma^2}{2}XY^2 - \alpha XY - kX + \tilde{r}[\dot{Y} - \beta Y - 1]X = 0$$

Aby platila rovnosť, obe skupiny členov (obsahujúce \tilde{r} a ostatné) sa musia rovnať nule. Dostávame

$$-\dot{X} + \frac{\sigma^2}{2}XY^2 - \alpha XY - kX = 0, \quad (2.3.1.4)$$

$$\dot{Y} - \beta Y - 1 = 0. \quad (2.3.1.5)$$

Obyčajná diferenciálna rovnica (2.3.1.5) pre Y je lineárna nehomogénna obyčajná diferenciálna rovnica. Jej vyriešením a po dosadení počiatočnej podmienky $Y(0) = 0$ dostávame

$$Y(\tau) = \frac{e^{\beta\tau} - 1}{\beta}. \quad (2.3.1.6)$$

Úpravou rovnice (2.3.1.5) do tvaru

$$\frac{\dot{X}}{X} = \frac{\sigma^2}{2} Y^2 - \alpha Y - k,$$

dosadením už nájdenej funkciu Y , a následným integrovaním dostaneme

$$\begin{aligned} \ln X &= \int \frac{d \ln Y}{d\tau} = \int \left(\frac{\sigma^2}{2} Y^2 - \alpha Y - k \right) d\tau \\ &= \frac{\sigma^2}{2\beta^2} \int (e^{2\beta\tau} - 2e^{\beta\tau} + 1) d\tau - \frac{\alpha}{\beta} \int (e^{\beta\tau} - 1) d\tau - \int k d\tau \end{aligned} \quad (2.3.1.7)$$

Výpočtom uvedených integrálov a dopočítaní integračnej konštanty z počiatocnej podmienky $X(0) = 1$ dostávame

$$\ln X = \frac{\sigma^2}{2\beta^2} \left(\frac{e^{2\beta\tau}}{2\beta} - \frac{2e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right) - \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{e^{\beta\tau}}{\beta} - \tau \right) - k\tau + \frac{3\sigma^2}{4\beta^3} + \frac{\alpha}{\beta^2}. \quad (2.3.1.8)$$

Cena dlhopisu má teda tvar (2.3.1.2), funkcie $X(\tau)$ a $Y(\tau)$ sú definované vzťahmi (2.3.1.8) a (2.3.1.6).

2.3.2 Cena dlhopisu v CIR modeli posunutom o konštantu

Vyriešime parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu v modeli CIR typu

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\alpha + \beta \tilde{r}) \frac{\partial P}{\partial \tilde{r}} + \frac{\sigma^2}{2} \tilde{r} \frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{r}^2} - (\tilde{r} + k)P = 0, \quad (2.3.2.1)$$

ktorá má byť splnená pre $\tau \in (0, T >, \tilde{r} > 0$, kde $\alpha = \kappa\theta, \beta = -\kappa - \lambda\theta$ a počiatocná podmienka je $P(\tilde{r}, 0) = 1$.

Riešenie budeme znovu hľadať v tvare (2.3.1.2), pričom funkcie X, Y budú spĺňať počiatocné podmienky $X(0) = 1$ a $Y(0) = 0$. Dosadením parciálnych derivácií (2.3.1.3) do rovnice (2.3.2.1) a zoskupením členov obsahujúcich \tilde{r} a ostatných členov, analogicky ako v modeli Vašíčkovho typu, dostávame:

$$\dot{X} - \beta XY - kX = 0, \quad (2.3.2.2)$$

$$\dot{Y} - \beta Y + \frac{\sigma^2}{2} Y^2 - 1 = 0. \quad (2.3.2.3)$$

Ide znovu o systém obyčajných diferenciálnych rovníc. Z druhej rovnice vypočítame funkciu Y . Je to separovateľná diferenciálna rovnica, preto musí platiť

$$\frac{dY}{-\frac{\sigma^2}{2}Y^2 + \beta Y + 1} = d\tau. \quad (2.3.2.4)$$

Pre zjednodušenie zápisu položíme $\varphi = \sqrt{\beta^2 + 2\sigma^2}$, potom

$$\frac{1}{-\frac{\sigma^2}{2}Y^2 + \beta Y + 1} = -\frac{2}{\sigma^2} \frac{1}{\left(Y - \frac{\beta - \varphi}{\sigma^2}\right)\left(Y - \frac{\beta + \varphi}{\sigma^2}\right)} = -\frac{1}{\varphi} \left(\frac{1}{\left(Y - \frac{\beta + \varphi}{\sigma^2}\right)} - \frac{1}{\left(Y - \frac{\beta - \varphi}{\sigma^2}\right)} \right). \quad (2.3.2.5)$$

Integrovaním (2.3.2.4) dostávame vzťah pre všeobecné riešenie

$$-\frac{1}{\varphi} \ln \left(\frac{Y - \frac{\beta + \varphi}{\sigma^2}}{Y - \frac{\beta - \varphi}{\sigma^2}} \right) = \tau + c_1, \quad (2.3.2.6)$$

kde c_1 je konštanta. Rovnosť (2.3.2.6) ešte prepíšme na tvar

$$\frac{Y - \frac{\beta - \varphi}{\sigma^2}}{Y - \frac{\beta + \varphi}{\sigma^2}} = e^{\varphi\tau} c_2, \quad (2.3.2.7)$$

kde c_2 je konštanta.

Dopočítame konštantu c_2 z počiatočnej podmienky $Y(0) = 0$, čiže dostaneme $c_2 = \frac{\beta - \varphi}{\beta + \varphi}$. Funkciu $Y(\tau)$ vieme napísať ako

$$Y(\tau) = \frac{\frac{\varphi - \beta}{\sigma^2}(e^{\varphi\tau} - 1)}{1 - \frac{\beta - \varphi}{\beta + \varphi}e^{\varphi\tau}} = \frac{2(e^{\varphi\tau} - 1)}{(\varphi - \beta)(e^{\varphi\tau} - 1) + 2\varphi}. \quad (2.3.2.8)$$

Funkciu X potom jednoducho dopočítame integráciou rovnice (2.3.2.2):

$$\ln(X) = -\int_0^\tau \alpha Y(s) + k ds = \left(\frac{2\varphi e^{\frac{(\varphi - \beta)\tau}{2}}}{(\varphi - \beta)(e^{\varphi\tau} - 1) + 2\varphi} \right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}} - k\tau. \quad (2.3.2.9)$$

V klasickom CKLS modeli s volatilitou $\sigma(t, r) = \sigma r^\gamma$ nie je pre $\gamma \neq 0$, $\gamma \neq 1/2$ známe explicitné riešenie pre cenu dlhopisu. Jednou z možností približného výpočtu je použitie približnej analytickej formuly. Tento prístup použijeme v našom modeli, kde je faktor CKLS posunutý o konštantu.

2.3.3. Cena dlhopisu v CKLS modeli posunutom o konštantu

V prípade Vašíčkovho aj CIR procesu pre \tilde{r} sme trhovú cenu rizika zobrali tak, že $\mu(t, \tilde{r}) - \lambda(t, \tilde{r})\sigma(t, \tilde{r})$ bola lineárna funkcia $\alpha + \beta\tilde{r}$. Takúto trhovú cenu rizika budeme uvažovať aj v prípade CKLS procesu, cena dlhopisu $P(\tau, \tilde{r})$ bude teda riešením diferenciálnej rovnice

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\alpha + \beta\tilde{r})\frac{\partial P}{\partial \tilde{r}} + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{r}^2} - (\tilde{r} + k)P = 0 \quad (2.3.3.1)$$

so začiatočnou podmienkou $P(0, \tilde{r}) = 1$.

Pre tento model už explicitné riešenie k dispozícii nemáme, použijeme preto približnú analytickú formulu. Pri jej návrhu sa budeme inšpirovať približnou analytickou formulou, ktorá bola navrhnutá pre klasický CKLS model v článku [7]. Uvedieme teraz jej konštrukciu.

$$\ln P_{vas}(\tau, r) = \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\sigma^2}{2\beta^2}\right)\left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau\right) + \frac{\sigma^2}{4\beta^3}(1 - e^{\beta\tau})^2 + \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta}r, \quad (2.3.3.2)$$

čo vyplýva z kapitoly 2.3.1, ak zoberieme $k = 0$. Aproximáciu zo [7] dostaneme tak, že okamžitú hodnotu volatility σr^γ v CKLS modeli dosadíme do (2.3.3.2) namiesto konštantnej volatility σ z Vašíčkovho modelu. Tak dostaneme

$$\ln P_{ap}(\tau, r) = \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{2\beta^2}\right)\left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau\right) + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{4\beta^3}(1 - e^{\beta\tau})^2 + \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta}r. \quad (2.3.3.3)$$

O tejto aproximácii je v [7] dokázané nasledujúce tvrdenie.

Veta 2.3.3.4 [7, veta 4] Nech P_{ap} je aproximácia ceny dlhopisu v CKLS modeli daná vzťahom (2.3.3.3) a P_{ex} je presné riešenie (2.3.3.1). Potom

$$\ln P_{ap}(\tau, r) - \ln P_{ex}(\tau, r) = c_4(r)\tau^4 + o(\tau^4) \text{ pre } \tau \rightarrow 0^+ \text{ kde} \quad (2.3.3.4)$$

$$c_4(r) = -\frac{1}{24}\gamma r^{2\gamma-2}\sigma^2[2\alpha r + 2\beta r^2 + (2\gamma - 1)r^{2\gamma}\sigma^2].$$

Pre CKLS model posunutý o konštantu navrhujeme aproximáciu riešenia analogicky. Z kapitoly 2.3.1 vieme, že riešenie (2.3.3.1) pre $\gamma = 0$ sa dá napísať v tvare

$$\ln P(\tau, \tilde{r}) = c_0(\tau)\tilde{r} + c_1(\tau)\alpha + c_2(\tau)\sigma^2 - k\tau,$$

pričom

$$c_0 = \frac{1-e^{\beta\tau}}{\beta}, c_1 = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1-e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right), c_2 = \frac{1}{2\beta^2} \left(\frac{1-e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau + \frac{(1-e^{\beta\tau})^2}{2\beta} \right).$$

Aproximáciu pre všeobecné γ dostaneme znovu tak, že okamžitou hodnotou volatility $\sigma\tilde{r}^\gamma$ nahradíme konštantu σ v presnom riešení modelu Vašíčkovho typu. Dostaneme tak aproximáciu riešenia (2.3.3.1) v tvare

$$\ln P_{ap} = c_0(\tau)\tilde{r} + c_1(\tau)\alpha + c_2(\tau)\sigma^2\tilde{r}^{2\gamma} - k\tau,$$

pričom c_0, c_1, c_2 zostávajú nezmenené. Túto aproximáciu budeme využívať v nasledujúcej kapitole pri kalibrácii.

3. Kalibrácia založená na porovnaní teoretických a trhových výnosových kriviek

Existuje mnoho metód kalibrácie modelov úrokovej miery. V našom prípade sa budeme najskôr venovať minimalizácii odchýlok trhových výnosov od teoretických. Budeme nadväzovať na diplomovú prácu J. Halgašovej [6], a V. Mosného [8], v ktorej autori kalibráciu pretransformovali na riešenie sústavy lineárnych rovníc a riešenie optimalizačnej úlohy menšieho rozmeru. V práci [6] sa študoval dvojfaktorový model CKLS typu, v práci [8] jednofaktorový CKLS model použitím iného prístupu. V oboch prácach sa okrem parametrov modelu odhaduje aj priebeh okamžitej úrokovej miery. Takto budeme postupovať aj my. Najskôr sa budeme venovať kalibrácii Vašíčkovho modelu, kde okamžitá úroková miera bude rozložená na náhodný faktor Vašíčkovho tvaru a konštantu. Neskôr sa pokúsime kalibrovať rovnako upravený CKLS model, ktorého presnosť overíme pomocou presného riešenia CIR modelu.

Vo všeobecnosti budeme minimalizovať funkciu:

$$F(\alpha, \beta, \sigma^2, \gamma, k, \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega_{ij} (R(\tau_j, \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n) - R_{ij})^2, \quad (3.1)$$

kde R_{ij} je výnos v i -tom dni pozorovaný pre dlhopis so splatnosťou τ_j a $R(\tau_j, \tilde{r}_i)$ je výnos do splatnosti vypočítaný pomocou modelu (presné riešenie, resp. aproximácia) pre hodnotu náhodného faktora \tilde{r}_i a maturitu τ_j , ω_{ij} predstavujú jednotlivé váhy. Funkciu F minimalizujeme vzhľadom na parametre $\alpha, \beta, \sigma^2, \gamma, k$ a priebeh náhodného faktora $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n$. Podobná účelová funkcia sa študuje v [6], [7] a [8].

3.1 Kalibrácia Vašíčkovho modelu posunutého o konštantu

Pripomeňme si, že hodnoty cien bezkupónového dlhopisu môžeme zapísať v tvare

$$\ln P(\tau, \tilde{r}) = c_0(\tau)\tilde{r} + c_1(\tau)\alpha + c_2(\tau)\sigma^2 - k\tau, \quad (3.1.1)$$

pričom

$$c_0 = \frac{1-e^{\beta\tau}}{\beta}, c_1 = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1-e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right), c_2 = \frac{1}{2\beta^2} \left(\frac{1-e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau + \frac{(1-e^{\beta\tau})^2}{2\beta} \right).$$

Budeme minimalizovať účelovú funkciu (3.1), pričom medzi argumentami nie je γ , nakoľko Vašíčkov model zodpovedá fixovanej hodnote $\gamma = 0$. Minimalizovaná funkcia teda je

$$F(\alpha, \beta, \sigma^2, k, \tilde{r}_i) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega_{ij} (R(\tau_j, r_i) - R_{ij})^2 \quad (3.1.2)$$

pričom teoretický výnos vypočítame ako

$$R(\tau_j, r_i) = -\frac{\ln P(\tau_j, r_i)}{\tau_j}, \quad (3.1.3)$$

kde P je presné riešenie rovnice pre cenu dlhopisu dané vzťahom (3.1.1).

Najskôr budeme fixovať parameter β . Hodnoty všetkých ostatných premenných, ktoré sú optimálne pre danú β , dopočítame parciálnym derivovaním účelovej funkcie. Následne tieto derivácie položíme rovné nule a dostávame systém lineárny rovníc o $n + 3$ neznámých, ktorý môžeme v maticovom tvare zapísať ako

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Bloky danej matice vyzerajú nasledovne:

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1^2 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1 c_2 & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1 \tau_j \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1 c_2 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_2^2 & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_2 \tau_j \\ - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1 \tau_j & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_2 \tau_j & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} k \tau_j^2 \end{bmatrix}$$

$$B = C' = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{1j}}{\tau_j^2} c_0 c_1 & \dots & \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{nj}}{\tau_j^2} c_0 c_1 \\ \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{1j}}{\tau_j^2} c_0 c_2 & \dots & \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{nj}}{\tau_j^2} c_0 c_2 \\ \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{1j}}{\tau_j^2} c_0 \tau_j & \dots & \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{nj}}{\tau_j^2} c_0 \tau_j \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1^2 \end{bmatrix},$$

$$a = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1 R_{ij} \\ -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_2 R_{ij} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} \tau_j R_{ij} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{1j}}{\tau_j^2} c_0 R_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{nj}}{\tau_j^2} c_0 R_{nj} \end{bmatrix}, \quad x' = [\alpha, \sigma^2, k],$$

$$y = [\tilde{r}_1 \quad \dots \quad \tilde{r}_n]$$

Sústavu lineárnych rovníc riešime v softvéri SciLab použitím operátora backslash [9]. Backslash je ľavé maticové delenie: $X = A \setminus B$, kde $AX = B$. Ak A je štvorcová matica plnej hodnoty, $X = A \setminus B$ je ekvivalentná s operáciou $X = \text{inv}(A) * B$, ale výpočet je presnejší, hlavne softvérovo ekonomickejší pri práci s desatinnými číslami. Preto by sme mali v praxi využívať operátor backslash, a funkciu na výpočet inverznej matice $\text{inv}()$ sa radšej vyhnúť.

V prípade, že matica A je štvorcová, môže byť výsledok X vypočítaný buď z LU faktorizácie, alebo pomocou metódy najmenších štvorcov. Ak je číslo podmienenosti matice A menšie ako $1/(10 * \%eps)$, (kde podľa [15] $\%eps = 2^{-52}$, t. j. matica A je dobre podmienená), Scilab použije LU rozklad na riadky. Ak nie, t. j. matica A nie je dobre podmienená, X je vektor s najmenšou normou minimalizujúci normu $\|AX - B\|$, pričom sa na výpočet použije ortogonálna faktorizácia matice A (t. j. X je výsledkom lineárnej metódy najmenších štvorcov)

Po nájdení hodnôt α, σ^2 a k a priebehu \tilde{r} vieme vypočítať dosiahnutú hodnotu účelovej funkcie. Týmto postupom teda dostaneme optimálnu hodnotu účelovej funkcie pre danú β . Jednorozmernou optimalizáciou vzhľadom na β potom nájdeme minimum účelovej funkcie.

3.2 Kalibrácia CKLS modelu posunutého o konštantu

V nasledujúcej kapitole použijeme rovnakú myšlienku ako v prípade Vašíčkovho modelu, pokúsime sa ju však zovšeobecniť na CKLS model s nekonštantnou volatilitou. Použijeme pritom transformáciu, ktorú navrhol Vladimír Mosný [4], v našom prípade nastane zmena v porovnaní s jeho výpočtom v konštante, o ktorú je náhodný faktor popisujúci úrokovú mieru posunutý.

Pri výpočte cien dlhopisov využijeme vzťah z kapitoly 2, kde sme hodnotu, kde sme hodnotu dlhopisu v CKLS modeli posunutom o konštantu aproximovali pomocou Vašíčkovho modelu s upravenou volatilitou

$$\ln P_{CKLS}(\tau, \tilde{r}) = c_0(\tau)\tilde{r} + c_1(\tau)\alpha + c_2(\tau)\sigma^2\tilde{r}^{2\gamma} - k\tau, \quad (3.1.4)$$

pričom

$$c_0 = \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta}, \quad c_1 = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right),$$

$$c_2 = \frac{1}{2\beta^2} \left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta\tau})^2}{2\beta} \right).$$

Účelová funkcia (3.1) teda nadobudne tvar

$$F(\alpha, \beta, \sigma^2, \gamma, k, \tilde{r}_i) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} (-\ln P_{CKLS}(\tau_j, \tilde{r}) - R_{ij} \tau_j)^2. \quad (3.1.5)$$

Kvôli členom $\sigma^2 \tilde{r}_i^{2\gamma}$ už nevieme použiť predchádzajúci postup priamo. Položme teda $y_i = \sigma^2 \tilde{r}_i^{2\gamma}$, účelová funkcia sa nám zmenila vo vyjadrení

$$\ln P_{CKLS}(\tau_j, \tilde{r}_i) = c_0(\tau_j)\tilde{r}_i + c_1(\tau_j)\alpha + c_2(\tau_j)y_i - k\tau_j. \quad (3.1.6)$$

Pri danej úprave sa nám už premenné α , \tilde{r}_i a y_i vysupujú v účelovej funkcii ako kvadratické. Parameter σ^2 teda nebudeme počítat' priamo ale zo vzťahu $\sigma^2 = \frac{y_i}{\tilde{r}_i^{2\gamma}}$. Pri praktickom výpočte nemusia vyjsť' podiely $\frac{y_i}{\tilde{r}_i^{2\gamma}}$ konštantné, ale ak je model dobrý, mali by byť' blízko hodnote σ^2 , a teda môžeme σ^2 odhadnúť' ako ich priemer alebo medián, ako to bolo navrhnuté v práci [4].

Prejdime teraz k parciálnym deriváciám, obdobne ako pri Vašíčkovom modeli. V tomto prípade dostávame sústavu rovníc o rozmeroch $2n + 2 \times 2n + 2$, ktorú budeme riešiť operátorom backslash. Túto sústavu môžeme zapísať v maticovom tvare nasledovne:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B' & D_1 & D_2 \\ C' & D_2 & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \tilde{r} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

pričom jednotlivé bloky sú

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1^2 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1 c_2 \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1 c_2 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} k \tau_j^2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{1j}}{\tau_j^2} c_0 c_1 & \dots & \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{nj}}{\tau_j^2} c_0 c_1 \\ -\sum_{j=1}^m \frac{\omega_{1j}}{\tau_j^2} c_0 \tau_j & \dots & -\sum_{j=1}^m \frac{\omega_{nj}}{\tau_j^2} c_0 \tau_j \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{1j}}{\tau_j^2} c_1 c_2 & \dots & \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{nj}}{\tau_j^2} c_1 c_2 \\ -\sum_{j=1}^m \frac{\omega_{1j}}{\tau_j^2} c_2 \tau_j & \dots & -\sum_{j=1}^m \frac{\omega_{nj}}{\tau_j^2} c_2 \tau_j \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1^2 \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_2^2 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_0 c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_0 c_2 \end{bmatrix},$$

$$a = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1 R_{ij} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} \tau_j R_{ij} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{1j}}{\tau_j^2} c_0 R_{1j}, \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{nj}}{\tau_j^2} c_0 R_{nj} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{1j}}{\tau_j^2} c_2 R_{1j}, \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{nj}}{\tau_j^2} c_2 R_{nj} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{r} = [\tilde{r}_1 \quad \dots \quad \tilde{r}_n]', \quad y = [y_1 \quad \dots \quad y_n]'.$$

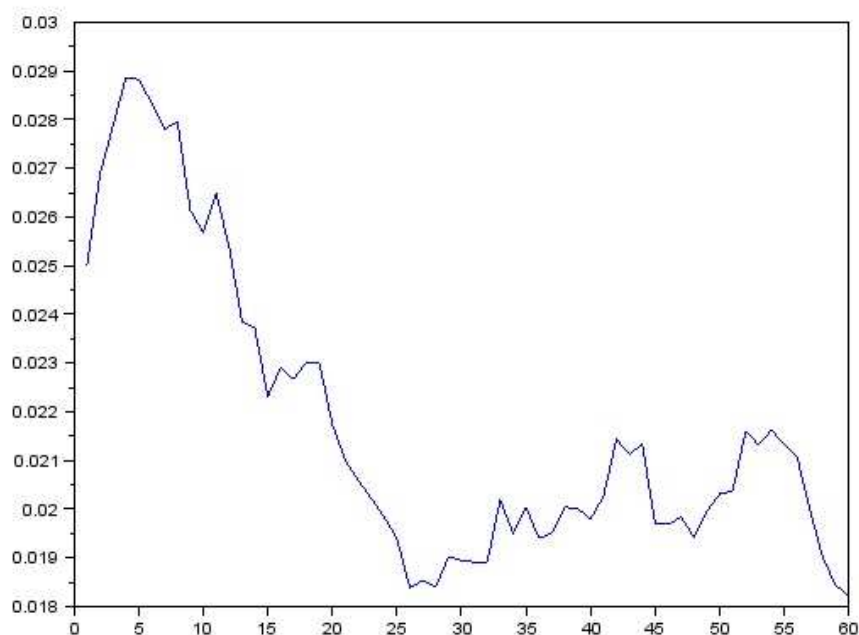
3.3 Testovanie kalibrácie na simulovaných dátach modelu CIR typu

Algoritmus navrhnutý v predchádzajúcej kapitole otestujeme na simulovaných dátach. Pre CIR model posunutý o konštantu máme k dispozícii presné vzorce na výpočet cien dlhopisov, a teda aj úrokových mier. Priebeh náhodného procesu \tilde{r} odhadneme diskretizáciou stochastického procesu. K vygenerovaným hodnotám dopočítame výnosové krivky pomocou presného riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu daného vzťahmi (2.3.1.2), (2.3.2.8) a (2.3.2.9). Tieto výnosové krivky budú potom vstupom do kalibrácie. Vďaka tomu, že dáta sú získané simulačne, budeme môcť späťne skontrolovať presnosť odhadov našich parametrov.

Pre vygenerované dáta použijeme vstupné parametre uvedené v tabuľke 1. Generovať budeme denné dáta, pričom výstupom bude časový rad dĺžky 60, čo je približne jeden kvartál. Získaný priebeh úrokovej miery je zobrazený na obrázku 6.

α	β	σ	k
0.00016069	-0.0007638	0.06689	0.005

Tab.1 Vstupné parametre pre generované dáta

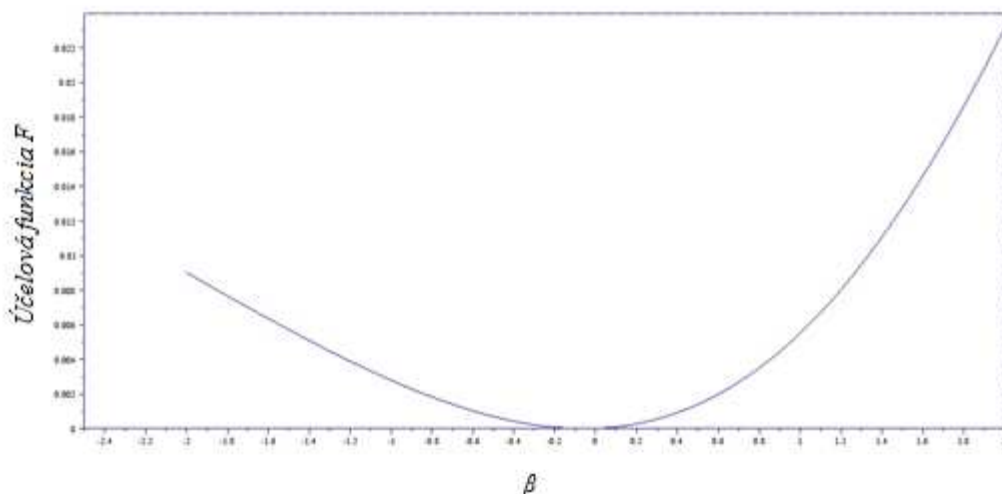


Obr.6 Vygenerovaný priebeh okamžitej úrokovej miery tabuľky 1.

Na vstupe máme známy vektor splatností τ s dĺžkou m . V našom prípade budeme skúmať 1 až 12 mesačné splatnosti. Výpočtom cien dlhopisov pomocou presného riešenia (2.3.1.2), (2.3.2.8) a (2.3.2.9). Získame trhové výnosy R_{ij} kde index $i = 1, \dots, n$ označuje počet dní (v našom prípade $n = 60$) a $j = 1, \dots, m$ sú indexy jednotlivé splatnosti dlhopisov (v našom prípade $m = 12$).

Pri použití algoritmu z kapitoly 3.2 fixujeme najskôr parameter $\gamma = 0,5$. To znamená, že odhadujeme CIR model posunutý o konštantu. Potom zopakujeme výpočet pre niekoľko ďalších hodnôt γ . Pre fixovanú γ postupujeme nasledovne:

Pre každú hodnotu parametra β dostávame optimálnu hodnotu účelovej funkcie, t. j. najmenšiu hodnotu účelovej funkcie, ktorá je dosiahnuteľná pre danú β . Závislosť tejto optimálnej hodnoty od β je znázornená na obr. 7.

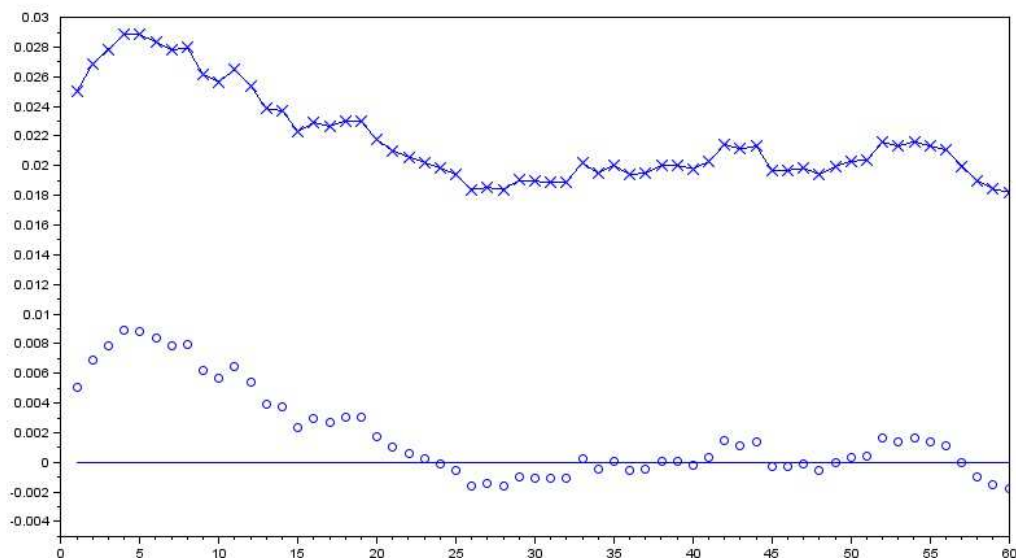


Obr.7 Graf optimálnej hodnoty účelovej funkcie v závislosti od parametra β pre vygenerované dáta

Minimalizáciu tejto funkcie jednej premennej získame odhad β a následne (riešením sústavy rovníc ešte raz pre odhadnutú hodnotu β) odhady α , y , \tilde{r} a posunu k .

Pokračujeme výpočtom parametra σ^2 , ktorý odhadneme ako priemer hodnôt $\frac{y_i}{r_i^{2\gamma}}$.

Nakoniec vypočítame okamžitú úrokovú mieru, ktorá vznikne ako súčet $\tilde{r} + k$. Na obrázku 8 vidíme vygenerovanú okamžitú úrokovú mieru, odhad \tilde{r} , ako aj odhad $\tilde{r} + k$, t. j. odhad okamžitej úrokovej miery, ktoré sme dostali pri fixovaní $\gamma = 0,5$.

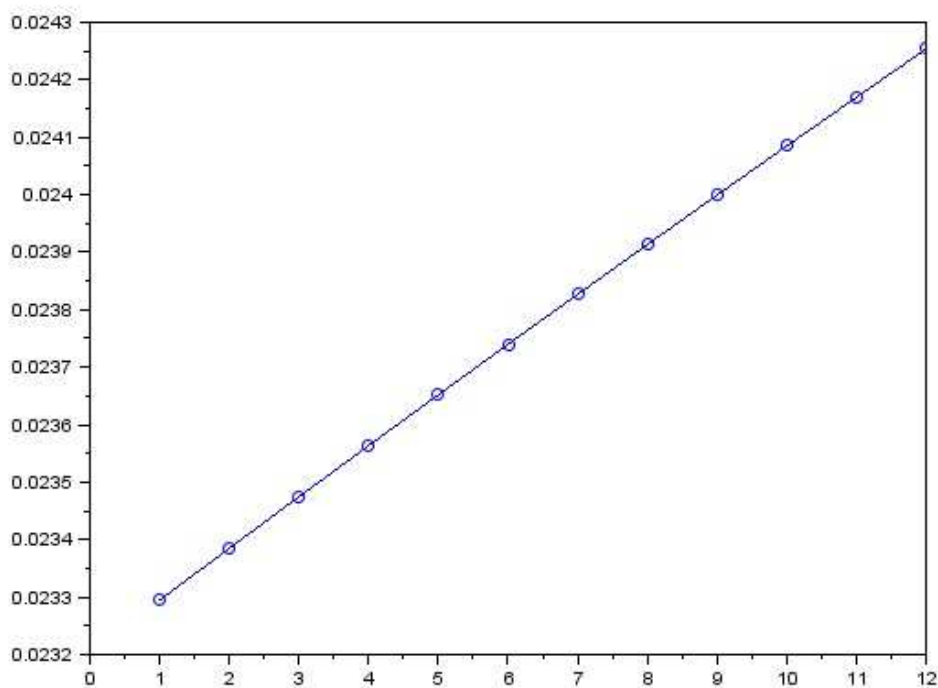


Obr. 8 Vygenerovaná short-rate (súvislá čiara), odhad \tilde{r} (značené kruhmi) a odhad $\tilde{r} + k$ (značené krížikom) pre vstupné parametre z tabuľky 1

Vidíme, že odhadnutá okamžitá úroková miera je veľmi blízka vygenerovanej. Priebeh faktora \tilde{r} však nie je ani prípustný, nakoľko CIR proces nemôže nadobúdať záporné hodnoty. Na obrázku 9 je ukážka fitovania jednej z výnosových kriviek. Napokon v tabuľke 2 uvádzame odhadnuté hodnoty parametrov, okrem $\gamma = 0,5$ aj pre niekoľko ďalších hodnôt parametra γ .

γ	α	β	σ^2	K	$F\text{-opt}$
0	0.0028120	- 0.21076	0.0001612	0.0221831	6.170D-09
0.25	0.0020041	-0.00924	0.0016685	0.0218619	2.989D-10
0.5	0.0019396	- 0.05086	0.0067149	0.0190539	2.213D-11
0.75	0.0019576	- 0.05178	0.0027954	0.0274019	1.726D-11
1	0.0019846	- 0.04976	0.2673050	0.0275539	1.757D-11

Tab.2 Hodnoty odhadov parametrov a optimálne hodnoty účelovej funkcie pre simulované dáta



Obr. 9 Porovnanie vygenerovanej (súvislá čiara) a odhadnutej štruktúry (body) úrokových mier pre simulované dáta z tab. 1

4. Metóda maximálnej vierohodnosti použitá v druhej fáze kalibrácie

Pri kalibrácii modelu založenej na minimalizácii vzdialenosti odhadovanej a reálnej výnosovej krivky sa nám nepodarilo dostať uspokojivé odhady parametrov. Čo však bolo odhadnuté veľmi presne, je okamžitá úroková miera. Pomocou metódy maximálnej vierohodnosti sa ju pokúsime rozložiť na konštantu a CKLS faktor.

S touto problematikou sa môže oboznámiť v [10].

Pokúsime sa tento problém vyriešiť metódou maximálnej vierohodnosti, ktorá je založená na náhodnom výbere X_1, \dots, X_N , pričom cieľom je určiť parametre tak, aby realizácia daných dát bola „čo najpravdepodobnejšia“. Predpokladajme, že náhodný výber pochádza z rozdelenia $f(x|\theta)$, a x_1, \dots, x_n je realizácia náhodného výberu. Funkciu vierohodnosti L , ktorá je funkciou parametra θ , definujeme ako

$$L(\theta|x) = L(\theta | x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_1, \dots, x_n|\theta). \quad (4.1)$$

Pri použití metódy maximálnej vierohodnosti za odhad parametra θ zvolíme takú hodnotu $\hat{\theta}$, pre ktorú funkcia vierohodnosti nadobúda pri daných realizáciách x_1, \dots, x_n maximum. Bežne sa miesto vierohodnostnej funkcie maximalizuje jej prirodzený logaritmus, teda

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax} \sum_{i=0}^n \ln f(x_1, \dots, x_n|\theta). \quad (4.2)$$

4.1 Metóda maximálnej vierohodnosti použitá pri odhade parametrov Vašíčkovho modelu posunutého o konštantu

Podobnému výpočtu sa venovala Simona Chattová v diplomovej práci [11], rozdiel je však v tom, že v našom prípade obsahuje model konštantu, o ktorú je náhodný proces Vašíčkovho typu posunutý. Pri našom výpočte budeme sledovať postup z [11], pričom budeme robiť potrebné zmeny.

Pripomeňme si, že máme náhodný proces \tilde{r} , daný rovnicou

$$d\tilde{r} = \kappa(\theta - \tilde{r})dt + \sigma dw, \quad (4.1.1)$$

pričom short rate r je daná vzťahom $r = \tilde{r} + c$. Preto

$$dr = d\tilde{r} = \kappa(\theta - \tilde{r})dt + \sigma dw. \quad (4.1.2)$$

Potom

$$dr = \kappa(\theta - (r - c))dt + \sigma dw = \kappa((\theta + c) - r)dt + \sigma dw. \quad (4.1.3)$$

Z prvej časti optimalizácie máme odhad okamžitej úrokovej miery r_1, \dots, r_n . Nech Δt je časový interval medzi dvoma pozorovaniami. Zavedieme si nové premenné,

$$\eta = e^{-\kappa\Delta t}, \quad (4.1.4)$$

$$v^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t}).$$

Potom pri danom r_i je rozdelenie r_{i+1} normálne so strednou hodnotou

$$\begin{aligned} E[r_{i+1} | r_i] &= \eta r_i + (1 - \eta)(\theta - c) = \\ &= -[-c - \eta(r_i - c) - \theta(1 - \eta)] \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

a disperziou

$$D[r_{i+1} | r_i] = v^2.$$

Hustota je teda

$$\begin{aligned} f(r_{i+1} | r_i) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi D[r_{i+1} | r_i]}} e^{-\frac{[r_{i+1} - E[r_{i+1} | r_i]]^2}{2D[r_{i+1} | r_i]}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} e^{-\frac{[r_{i+1} - c - \eta(r_i - c) - \theta(1 - \eta)]^2}{2v^2}}. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Hodnotu vierohodnostnej funkcie vieme napísať ako súčin hustôt náhodných premenných s normálnym rozdelením tvaru (4.1.6), teda

$$L(\eta, \theta, v^2, c) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2v^2} e^{-\frac{[r_{i+1}-c-\eta(r_i-c)-\theta(1-\eta)]^2}{2v^2}}. \quad (4.1.7)$$

Logaritmickú vierohodnostnú funkciu vieme vyjadriť v tvare

$$l(\eta, \theta, v^2, c) = \ln L(\eta, \theta, v^2, c) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi v^2) - \frac{1}{2v^2} \sum_{i=1}^{n-1} [r_{i+1} - c - \eta(r_i - c) - \theta(1 - \eta)]^2. \quad (4.1.8)$$

Hľadáme hodnoty parametrov η, θ, v^2 a c , v ktorých sa nadobúda maximum funkcie $l(\eta, \theta, v^2, c)$. Toto riešenie získame riešením vierohodnostných rovníc, teda parciálne derivácie funkcie l položíme rovné nule:

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{1-\eta}{v^2} \sum_{i=1}^{n-1} [r_{i+1} - c - \eta(r_i - c) - \theta(1 - \eta)] = 0, \quad (4.1.9)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \eta} = -\frac{1-\eta}{v^2} \sum_{i=1}^{n-1} (\theta - r_i + c) [r_{i+1} - c - \eta(r_i - c) - \theta(1 - \eta)] = 0, \quad (4.1.10)$$

$$\frac{\partial l}{\partial v^2} = -\frac{n}{v^2} + \frac{1}{v^4} \sum_{i=1}^{n-1} [r_{i+1} - c - \eta(r_i - c) - \theta(1 - \eta)]^2 = 0, \quad (4.1.11)$$

$$\frac{\partial l}{\partial c} = -\frac{1-\eta}{v^2} \sum_{i=1}^{n-1} [r_{i+1} - c - \eta(r_i - c) - \theta(1 - \eta)] = 0. \quad (4.1.12)$$

Odhady θ a v^2 vyjadríme v tvare

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n(1-\hat{\eta})} \sum_{i=1}^{n-1} (r_{i+1} - \hat{\eta}r_i) - \hat{c}, \quad (4.1.13)$$

$$v^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} [r_{i+1} - \hat{c} - \hat{\eta}(r_i - \hat{c}) - \hat{\theta}(1 - \hat{\eta})]^2, \quad (4.1.14)$$

ktorý zatiaľ neobsahuje odhady parametrov η a c .

Ďalej je potrebné dopočítať odhad parametrov η a c . Zavedieme si nasledujúce označenie, ktoré nám zjednoduší predchádzajúce vyjadrenie. Položme

$$s_x = \sum_{i=0}^n r_i, \quad s_y = \sum_{i=0}^n r_{i+1},$$

$$s_{xy} = \sum_{i=0}^n r_i r_{i+1}, \quad s_{xx} = \sum_{i=0}^n r_i^2.$$

Po niekoľkých jednoduchých algebraických úpravách dostávame vzťah pre odhad parametra η

$$\hat{\eta} = \frac{ns_{xy} - s_x s_y}{ns_{xx} - s_x^2},$$

t. j. po spätnom dosadení

$$\hat{\eta} = \left(\sum_{i=0}^n r_i \sum_{i=0}^n r_{i+1} - n \sum_{i=0}^n r_i r_{i+1} \right) \left[\left(\sum_{i=0}^n r_i \right)^2 - n \sum_{i=0}^n r_i^2 \right]^{-1} \quad (4.1.15)$$

Problém nastal až pri dopočte parametra c , ktorý z rovnice (4.1.2) vypadol, po úpravách sme dostali $0 = 0$. Toto je následok jednoduchosti Vašíčkovho modelu, ktorý počíta s konštantnou disperziou faktora \tilde{r} , nezávislou od jeho hodnoty. Nevieme teda odlíšiť posun faktora \tilde{r} o konštantu a posun koeficientu θ , ak pozorujeme krátkodobú úrokovú mieru. Dá sa to vidieť aj zo stochastickej diferenciálnej rovnice pre okamžitú úrokovú mieru r , ktorá má tvar $dr = \kappa((\theta + c) - r)dt + \sigma dw$. Vidíme že parametre θ a c vystupujú iba prostredníctvom súčtu $\theta + c$. Napriek tomu však bude pre nás tento postup užitočný, lebo nám umožní vypočítať odhady pre CKLS model v nasledujúcej kapitole.

4.2 Metóda maximálnej vierohodnosti použitá pri odhade parametrov CKLS modelu posunutého o konštantu

Uvažujme model pre okamžitú úrokovú mieru $r = \tilde{r} + c$, kde

$$d\tilde{r} = \mu(t, \tilde{r})dt + \sigma(t, \tilde{r})dw.$$

Teda

$$dr = d\tilde{r} = \kappa(\theta - \tilde{r})dt + \sigma\tilde{r}^\gamma dw = \quad (4.2.1)$$

$$\kappa(\theta - (r - c))dt + \sigma(r - c)^\gamma dw = \kappa((\theta + c) - r)dt + \sigma(r - c)^\gamma dw,$$

kde $\gamma > 0$.

Stredná hodnota r_{i+1} pri danom r_i zostáva rovnaká ako v kapitole 4.1.

Podobne ako v prípade Vašíčkovho modelu zavedieme substitúciu,

$$\eta = e^{-\kappa\Delta t}, \quad v^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t}),$$

Použijeme tzv. Nowmanovu [1] aproximáciu, t. j. na intervale medzi dvoma pozorovaniami budeme volatilitu považovať za konštantnú, a to rovnú jej hodnote na začiatku intervalu. Potom bude podmienené rozdelenie r_{i+1} pri danom r_i normálne a dané hustotou

$$f(r_{i+1}|r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v^2 (r_i - c)^{2\gamma}}} e^{-\frac{[r_{i+1} - c - \eta(r_i - c) - \theta(1 - \eta)]^2}{2v^2 (r_i - c)^{2\gamma}}}. \quad (4.2.2)$$

Hodnotu vierohodnostnej funkcie vieme napísať ako súčin hustôt náhodných premenných s normálnym rozdelením, t. j.

(4.2.3)

$$L(\eta, \theta, v^2, c) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2v^2 (r_i - c)^{2\gamma}} \exp\left(-\frac{[r_{i+1} - c - \eta(r_i - c) - \theta(1 - \eta)]^2}{2v^2 (r_i - c)^{2\gamma}}\right).$$

Logaritmickú vierohodnostnú funkciu vypočítame ako

$$l(\eta, \theta, v^2, c) = \ln L(\eta, \theta, v^2, c) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi v^2 (r_i - c)^{2\gamma}) - \frac{1}{2v^2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{[r_{i+1} - c - \eta(r_i - c) - \theta(1 - \eta)]^2}{(r_i - c)^{2\gamma}}. \quad (4.2.4)$$

Parciálnym derivovaním dostávame jednotlivé vierohodnostné rovnice

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{1 - \eta}{v^2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{[r_{i+1} - c - \eta(r_i - c) - \theta(1 - \eta)]}{(r_i - c)^{2\gamma}} = 0 \quad (4.2.5)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \eta} = -\frac{1-\eta}{v^2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\theta - r_i + c)[r_{i+1} - c - \eta(r_i - c) - \theta(1-\eta)]}{(r_i - c)^{2\gamma}} = 0, \quad (4.2.6)$$

$$\frac{\partial l}{\partial v^2} = -\frac{n}{v^2} + \frac{1}{v^4} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{[r_{i+1} - c - \eta(r_i - c) - \theta(1-\eta)]^2}{(r_i - c)^{2\gamma}} = 0, \quad (4.2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial c} = & -\gamma \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{r_i - c} - \frac{1-\eta}{v^2} \sum_{i=0}^n \frac{[r_{i+1} - c - \eta(r_i - c) - \theta(1-\eta)]}{(r_i - c)^{2\gamma}} + \\ & + \frac{\gamma}{v^2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{[r_{i+1} - c - \eta(r_i - c) - \theta(1-\eta)]^2}{(r_i - c)^{2\gamma+1}} = 0. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Pre zjednodušenie výpočtov zavedieme nasledujúcu substitúciu

$$s_c = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(r_i - c)^{2\gamma}}, \quad s_x = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{r_i}{(r_i - c)^{2\gamma}}, \quad s_y = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{r_{i+1}}{(r_i - c)^{2\gamma}},$$

$$s_{xy} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{r_i r_{i+1}}{(r_i - c)^{2\gamma}}, \quad s_{xx} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{r_i^2}{(r_i - c)^{2\gamma}}.$$

Z jednotlivých rovníc tak dostávame

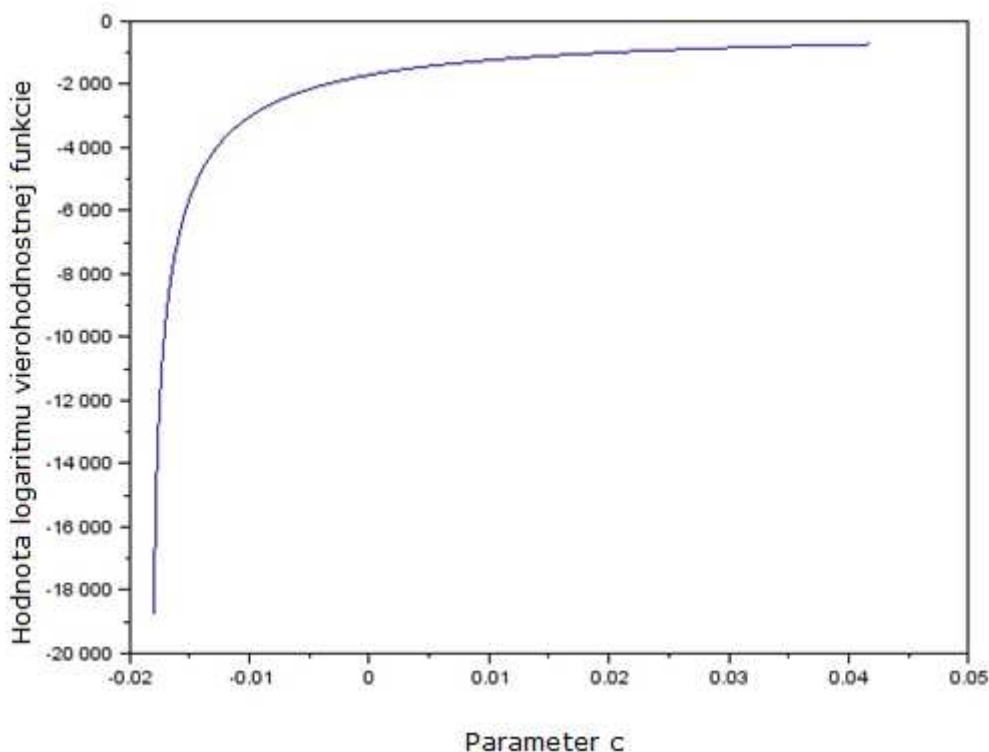
$$\hat{\eta} = \frac{s_c s_{xy} - s_x s_y}{s_c s_{xx} - s_x^2}, \quad (4.2.9)$$

$$\widehat{v^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n [r_{i+1} - \hat{c} - \hat{\eta}(r_i - \hat{c}) - \hat{\theta}(1 - \hat{\eta})]^2, \quad (4.2.10)$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{s_c(1 - \hat{\eta})} \sum_{i=0}^n (r_{i+1} - \hat{\eta}r_i) - \hat{c}. \quad (4.2.11)$$

Ak fixujeme parameter γ (napr. odhadujeme model CIR typu, kde $\gamma = \frac{1}{2}$, alebo chceme v hlavnom cykle ešte následne optimalizovať vzhľadom na γ), pre danú hodnotu c vieme vypočítať hodnoty ostatných parametrov, ako aj hodnotu logaritmu likelihood funkcie. Optimalizačná úloha sa teda redukuje na jednorozmernú optimalizáciu, hľadáme také c , ktoré optimalizuje l po dosadení η , v^2 a θ zo vzťahov (4.2.9), (4.2.10) a (4.2.11).

Použijeme teraz tento postup na vygenerované data, z ktorých sme v kapitole 3.3 získali veľmi presný odhad okamžitej úrokovej miery použitím algoritmu z kapitoly 3.2. Teraz sa pokúsime postupom z tejto kapitoly rozložiť túto úrokovú mieru na konštantu a CIR faktor (teda uvažujeme $\gamma = 0,5$). Pripomeňme si, že správna hodnota, s ktorou boli data generované, je 0,005. Funkcia l pre tieto data, teraz už iba ako funkcia jednej premennej c , je znázornená na obrázku 9.



Obr 9. Priebeh funkcie l v závislosti od c pre simulované dáta z kapitoly 3.2

Zdá sa, že l je rastúca ako funkcia v c . Možné vysvetlenie je to, že počítame vierohodnosť okamžitej úrokovej miery, ktorá je daná ako súčet CKLS procesu a konštanty c . CKLS proces nadobúda hodnoty z intervalu $(0, \infty)$. Čiže pre pozorovania r je obor možných hodnôt (c, ∞) . To znamená, že závisí od odhadovaného parametra, v takom prípade optimálne vlastnosti maximálne vierohodných odhadov neplatia. Nezávislosť oboru možných hodnôt od odhadovaných parametrov je jedným z predpokladov vety o vlastnostiach odhadov. Podrobne o danej téme pojednáva autor v [10]. Podobný príklad nájdeme v [16].

Záver

V diplomovej práci Jany Halgašovej [6] sa okamžitá úroková miera modelovala ako súčet dvoch nepozorovateľných faktorov. Jeden z faktorov vychádzal takmer konštantný. Cieľom práce bolo zistiť, či by sa nedal tento model zjednodušiť na jeden faktor a konštantu.

Venovali sme sa teda zjednodušeniu dvojrozmerného modelu CKLS na jednorozmerný, posunutý o konštantu. Okamžitá úroková miera je charakterizovaná ako súčet náhodného faktora CKLS typu a konštanty. Takýto náhodný faktor vieme charakterizovať pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice. V prípade, že disperzia procesu je závislá na veľkosti procesu, nepoznáme explicitné vyjadrenie ceny dlhopisu. Tento problém sme vyriešili pomocou analytickej aproximačnej formuly, ktorá je odvodená od ceny dlhopisu jednorozmerného Vašíčkovho modelu.

Parametre nášho modelu sme odhadovali pomocou reálnych výnosových kriviek. Tento problém sa dobre rieši systémom lineárnych rovníc. Výsledné parametre sa však nedali dobre odhadnúť, ale napriek tomu sme dostali dobrý odhad short rate. Ten slúžil ako vstup pre odhad parametrov metódou maximálnej vierohodnosti. Aj tieto pokusy však zlyhali a hľadanie konštanty sa nám nepodarilo odhadnúť.

Literatúra

- [1] Ševčovič D., Stehlíková B., Mikula K. (2009): Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov. Nakladateľstvo STU
- [2] Melicherčík I., Olšárová L., Úradníček V. (2005): Kapitoly z finančnej matematiky, Epos
- [3] Kwok, Y. K. (1998): Mathematical Models of Financial Derivatives, Springer, First edition
- [4] Mosný, V. (2012): Odhadovanie okamžitej úrokovej miery v CKLS modeli, Diplomová práca FMFI
- [5] Boušková Z. (2010): Odhadovanie okamžitej úrokovej miery z výnosových kriviek, Diplomová práca FMFI
- [6] Halgašová J. (2011): Aproximácia cien dlhopisovv dvojfaktorových modeloch úrokových mier, Diplomová práca FMFI
- [7] B. Stehlíková, B. (2013): A simple analytic approximation formula for the bond price in the Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders model. International Journal of Numerical Analysis and Modeling - Series B, Volume 4 Number 3, 224-234
- [8] Chan K. C., Karolyi G. A., Longstaff F., Sanders A. (1992): The volatility of short term interest rates: an empirical comparison of alternative models of the term structures of interest rates, Journal of Finance 47, 1209-1227
- [9] http://help.scilab.org/docs/5.5.2/en_US/backslash.html
- [10] Lamoš F., Potocký R. (1989): Pravdepodobnosť a matematická štatistika, Alfa Bratislava
- [11] Chattová S. (2013): Kalibrácia konvergenčného modelu úrokových mier Vašíčkovho typu, Diplomová práca FMFI
- [12] Oksendal, B. (2010): Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications, Universitext
- [13] Vasicek, O. A. (1977): An Equilibrium Characterization of the Term Structure. Journal of Financial Economics (5), 177-188

[14] Cox J., Ingersoll JR. J. E., Ross S. A. (1985): A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica* 53 (2), 385-407

[15] http://help.scilab.org/docs/5.5.2/en_US/percenteps.html

[16] http://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_likelihood