

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Modely šírenia nákazy na finančných trhoch

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2015

Bc. Véronique SVITKOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Modely šírenia nákazy na finančných trhoch

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr. Ing. Pavol Jurča, PhD.

Bratislava 2015

Bc. Véronique SVITKOVÁ

Pod'akovanie Touto cestou sa chcem poďakovať svojmu vedúcemu diplomovej práce, Mgr. Ing. Pavlovi Jurčovi, PhD. za ochotu, pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za ich trpezlivosť a podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

SVITKOVÁ, Veronique: Modely šírenia nákazy na finančných trhoch [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Ing. Pavol Jurča, PhD., 2015, 73 s.

Práca sa zaoberá slovenským medzibankovým trhom a skúmaním jeho odolnosti voči šíreniu nákazy prostredníctvom medzibankových expozícií. Keďže údaje o expozíciách nie sú verejne prístupnou informáciou, vyvstáva potreba ich generovať. Na základe vlastností medzibankových sietí v literatúre a skutočných údajov poskytnutých Národnou bankou Slovenska, bude v práci navrhnutý autorov algoritmus využívajúci náhodné grafy na generovanie tzv. matice bilaterálnych expozícií. Následne sa v práci pristúpi k modelovaniu šírenia nákazy celým bankovým sektorom spôsobenej bankrotom jednej banky a k skúmaniu odolnosti medzibankovej siete na finančný šok.

Kľúčové slová: Nákaza, zlyhanie banky, medzibanková sieť, matica bilaterálnych expozícií, bezškálové siete

Abstract

SVITKOVÁ, Veronique: Contagion models of financial markets [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Ing. Pavol Jurča, PhD., Bratislava, 2015, 73p.

The thesis deals with the Slovak interbank market and investigates its resilience against contagion spreading by means of interbank exposures. Because the exposure data are not publicly available, a necessity to generate these arises. On the basis of properties of interbank networks in literature and real data provided by the National Bank of Slovakia, an author's algorithm is proposed with the help of random graphs in order to generate so-called matrices of bilateral exposures. Hence, modeling of contagion spreading throughout the whole banking sector caused by a single bank failure and studying the resilience of interbank market against a financial shock is approached.

Keywords: Contagion, bank failure, interbank networks, matrix of bilateral exposures, scale-free graphs

Obsah

Úvod	9
1 Medzibanková sieť	12
1.1 Spôsoby analýzy siete	13
1.2 Údaje	14
2 Statická analýza	17
2.1 Základné pojmy teórie grafov	17
2.1.1 Zadanie grafu	18
2.1.2 Vlastnosti vrcholov	20
2.1.3 Vlastnosti grafu	23
2.1.4 Centralita vrcholov	24
2.2 Komplexné siete	25
2.3 Empirické vlastnosti v literatúre	27
3 Generovanie matice bilaterálnych expozícií	31
3.1 Prehľad literatúry	31
3.2 Metodológia	34
3.2.1 Výstavba algoritmu	36
3.2.2 Kalibrácia parametrov	44
4 Dynamická analýza	49
4.1 Model šírenia nákazy	50
4.1.1 Parametre modelu	51
4.1.2 Schéma modelu	52
4.2 Výsledky	53
Záver	60
Literatúra	61
Príloha A	66

Príloha B

70

Úvod

Finančný sektor zažil za posledné roky prevratné zmeny. Boli sme svedkami svetovej finančnej krízy, ktorá predstavovala podľa popredných ekonómov najhoršiu od čias Veľkej hospodárskej krízy z 30.-tych rokov minulého storočia a odhalila mnohé nedostatky bankového podnikania [11]. Bankrot alebo nevyhnutnosť poskytnutia štátnej pomoci v prípade vysokého počtu bánk, medzi najznámejšími pád americkej investičnej banky Lehman Brothers v roku 2008, oslabil svetovú ekonomiku a utlmil globálny dopyt. Jednou z reakcií bolo rozhodnutie zaviesť nový regulatórny rámec Bazilej III v roku 2010 predstaviteľmi skupiny G20, ktorý o.i. stanovuje prísnejšie podmienky na kapitál a opatrenia pre vytvorenie dodatočnej kapitálovej rezervy určenej na čerpanie práve v období krízy [12].

Nedávne udalosti vzbudzujú stále vyšší záujem regulátorov, ale i verejnosti o stabilitu finančného sektora; najmä jeho odolnosť voči rôznorodým exogénnym vplyvom či už zo zahraničia, alebo domáceho trhu. V tejto práci sa zameriame práve na bankový trh, ktorý má na finančnom trhu najväčší podiel. Hoci NBS [42] označila slovenský bankový sektor v roku 2009 za celkovo stabilný, cieľom práce bude skúmať slovenský trh medzi bankami navzájom. Zameriame sa na expozície, ktoré medzi sebou majú banky so sídlom v SR, pričom pod pojmom expozícia budeme rozumieť pohľadávku, teda úver či vklad banky v iných bankách. Záznamy o expozíciách uchovávame v podobe matice bilaterálnych expozícií.

Prvým našim cieľom bude naštudovať už existujúce prístupy k tejto problematike používané v zahraničí. Na základe takto získaných vedomostí a ďalších poznatkov budeme mať za cieľ skúmanie štruktúry prepojenia medzi jednotlivými finančnými inštitúciami slovenského bankového trhu. Tieto vzťahy budeme potrebovať kvôli dosiahnutiu hlavného cieľu tejto práce, a to posúdenia robustnosti siete slovenského bankového systému voči riziku šírenia nákazy spôsobenej krachom jednej banky pomocou simuláčnych techník.

V práci nás bude zaujímať, akými spôsobmi sa môže finančná nákaza v podobe opakovaného bankrotovania bánk šíriť, pričom sa zameriame na kreditný kanál. Kreditné (úverové) riziko totiž môže viesť k „domino efektu, kedy bankrot banky vyústi

do zlyhania ďalších bánk, aj keď tie neboli priamo zasiahnuté úvodným šokom.“ [1] To nastáva, ak nevyplatenie záväzku bankrotujúcej banky spôsobí jej veriteľovi takú stratu, ktorú nedokáže vykryť vlastnými zdrojmi a nie je schopný tak splniť kapitálové povinnosti uložené regulátorom.

Údaje o vzájomných medzibankových expozíciách však nie sú verejne dostupnou informáciou a menia sa z obdobia na obdobie, preto je nutné expozície určitým spôsobom generovať. Náhodné grafy sa ukážu ako vhodný prostriedok. Predstavíme vlastný algoritmus, ktorý generuje sieť bánk s prislúchajúcou maticou bilaterálnych expozícií. V skutočnosti tak budeme generovať orientovaný ohodnotený graf spĺňajúci určité charakteristiky. Generovanie expozícií navyše prináša výhodu vyššej robustnosti výsledkov, ako by tomu bolo v prípade skúmania skutočnej siete expozícií pozorovanej v konkrétnom období, ako aj skúmať dopad zmien pre pozmenenú štruktúru expozícií bánk.

Analýza založená na rozsiahlej simulačnej štúdii zaoberajúca sa medzibankovými expozíciami slovenských bánk je prvou svojho druhu, dosiaľ uskutočňovali rôzne záťažové testy (*stress testing*) len samotné banky, Národná banka Slovenska, Európska centrálna banka či Európska banková autorita (napr. [4], [34]). V prvej kapitole preto bližšie popíšeme medzibankovú sieť, akým spôsobom ju budeme skúmať a s akými údajmi budeme pracovať. Keďže vzájomné expozície bánk musíme generovať, v Kapitole 2 poskytneme čitateľovi prehľad relevantných poznatkov z teórie grafov. Jej významnou súčasťou je aj podkapitola o charakteristikách iných národných medzibankových sietí, ktoré slúžia predovšetkým na identifikáciu kľúčových vlastností siete a na kalibráciu algoritmu generovania expozícií. V tretej kapitole pristúpime ku generovaniu sietí a matíc bilaterálnych expozícií, t.j. popíšeme algoritmus, predstavíme jeho správanie, zhodnotíme výhody a nevýhody. Taktiež poskytneme prehľad, ako iní autori prekonali bariéru nedostupnosti dát. Posledná, štvrtá kapitola sa bude venovať tzv. dynamickej analýze, kde budeme simulovať idiosynkratické šoky (t.j. zlyhania jednotlivých bánk) a skúmať odolnosť vygenerovaných medzibankových systémov. Uvedieme analýzu citlivosti modelu v závislosti od vstupných parametrov a vybraných dôležitých vlastností siete. V neposlednom rade zavedieme do modelu ako dodatočný kanál šírenia

rizika popri skutočných stratách zo zlyhaných expozícií aj neistotu týkajúcu sa skutočnej výšky straty, ktorá môže v praxi ešte viac prehĺbiť negatívny dopad šírenia nákazy. Okrem toho budeme testovať dopad prípadného zvýšenia významu medzibankového trhu na možné straty spôsobené šírením nákazy v dôsledku zlyhanej banky.

1 Medzibanková sieť

Finančný systém pozostáva z mnohých sietí a subjektov. Medzi najvýznamnejšie nepochybne patrí sieť bánk, ktorá je aj predmetom skúmania tejto práce. Banky sú prepojené či už priamo vzájomnými expozíciami (napr. úvermi, vkladmi v iných bankách), alebo nepriamo, napr. vystavením sa podobným rizikám, a to v dôsledku podobnej štruktúry investícií, či dokonca vystavením sa rovnakému veriteľovi.

Bezprostredné vzťahy bánk možno pozorovať na úrovni medzibankových úverov, depozitov, jednodňových obchodov s likviditou, transakcií cez centralizované systémy (napr. americký Fedwire, clearingové domy) atď. O dvojici bánk tak môžeme jednoznačne povedať, že existuje medzi nimi konkrétny (úverový, transakčný...) vzťah. Nevyplatenie dohodnutého záväzku banky má tak priamy dopad na banku, ktorá záväzok poskytla.

Na druhej strane, nepriame vzťahy znamenajú, že banky sú vystavené spoločným rizikovým faktorom, hoci priamy vzťah medzi nimi nemusí existovať. Príkladom nepriameho vplyvu banky na banku môže byť vplyv prostredníctvom kolaterálu na úveroch v podobe nehnuteľností. V prípade hromadného zlyhania úverov sa tak každá banka snaží predať svoj kolaterál, na trhu sa ponuka nehnuteľností zvýši, ich cena poklesne a spustí sa špirála klesajúcich cien, kedy banka získa za kolaterál menej ako očakávala. To, že začali ponúkať na predaj nehnuteľnosti aj iné banky, tak malo dopad vzájomne na všetky predávajúce banky. Nepriamo sa bánk dotýka aj neistota prameniaca z bonity ich protistrán. Banky môžu nadobudnúť celkovú nevoľu požičovať, hromadia likviditu, pričom iné banky trpia jej nedostatkom, hoci ony samé nemuseli šírenie neistoty zapríčiniť [15].

Charakter a druh vzťahov medzi bankami tak určujú, prostredníctvom akých kanálov sa môže šíriť nákaza, t.j. ako môže zlyhanie jednej banky ovplyvniť zlyhávanie ďalších bánk v systéme. Medzi najčastejšie kanály patrí [23]:

- **kreditný kanál** - banky bankrotujú na základe nevyplatených (zlyhaných) medzibankových expozícií
- **likviditný kanál** - banky sa stávajú nelikvidnými, ak ich likvidné aktíva (napr.

hotovosť, pôžičky, štátne dlhopisy) nie sú dostatočné na pokrytie splatných záväzkov

- **kanál cien aktív** - štátne dlhopisy, kolaterály či iné aktíva sa predávajú za nižšie ceny ako banky očakávali a prichádzajú o tak časť majetku

Prehľadný zoznam kanálov šírenia nákazy ponúka Upper v [9]. V priaznivých časoch sa vzájomnou prepojenosťou riziko prerozdeľuje, kdežto v čase krízy môže byť mediátorom finančných šokov, vedúcim až k bankrotu banky [15]. Nákaza sa nemusí šíriť výhradne jedným kanálom, môže nastať aj ich kombinácia.

V tejto práci sa primárne zameriame na šírenie nákazy prostredníctvom kreditného kanálu, kedy jedna (vopred zvolená) banka zbankrotuje, zlyhajú jej expozície voči iným bankám a to následne ovplyvní jej veriteľov. Zostrojíme aj druhý model, do ktorého navyše doplníme neistotu bánk o splatení celého záväzku, ktorý voči nim majú banky zasiahnute bankrotom inej banky. Hoci sa v práci špecializujeme iba na úvery a vklady medzi bankami, vnímame to ako dôležitý aspekt skúmania zdrojov prenosu nákazy a jeho samostatné analyzovanie môže priniesť informáciu o signifikantnosti a dosahu tohto kanálu. Analyzovanie bankovej siete tak pomáha regulátorom nielen lepšie pochopiť, ako sa sieť správa, ale aj napomáha pri vytváraní účinnejších opatrení v snahe zmierniť vyššie uvedené systémové riziká.

1.1 Spôsobý analýzy siete

V literatúre zaoberajúcou sa analýzou medzibankovej siete sa najčastejšie stretávame s dvomi prístupmi: so statickou analýzou (*static network analysis*) a dynamickou analýzou (*dynamic network analysis*) [15], [23].

Statická analýza sa zaoberá štruktúrou finančných sietí, ich topologickými vlastnosťami, môže napr. identifikovať kľúčové inštitúcie. Na medzibankovú sieť sa často hľadí ako na orientovaný graf, kde vrcholy grafu tvoria banky a hrany (šípy v prípade ohodnotených grafov) transakcie či expozície medzi nimi. Teória grafov tak ponúka priestor na skúmanie vlastností siete ako takej alebo charakteristík jednotlivých vrcho-

lov. Motiváciou pre skúmanie vlastností medzibankovej siete je fakt, že jej štruktúra významne ovplyvňuje rozsah nákazy v prípade zlyhania niektorej z bánk [23], [19].



Obr. 1: Štruktúra bankového sektora v Českej republike k 2. štvrtroku 2012. Hrúbka hrany reprezentuje absolútnu hodnotu expozície medzi danými dvoma vrcholmi - bankami. Zdroj: [23]

Na druhej strane, **dynamická analýza** sa zaoberá analýzou mechanizmu prenášania šokov (nákazy), skúma odolnosť systému v stresových podmienkach simuláciou prvotných šokov na jednu alebo viaceré inštitúcie. Pri tejto analýze sa využíva sekvenčný prístup: V prvom kole zasiahnuté banky utrpia stratu na svojich aktívach, čo má za následok pokles ich kapitálu a následne, v prípade jeho poklesu pod kritickú (regulačné stanovenú hranicu), zbankrotujú. Ich veriteľom spôsobia straty na pohľadávkach voči už zlyhaným bankám, a to sa opäť odrazí aj na znížení kapitálu týchto veriteľov. Nákaza sa tak šíri systémom ďalej a ovplyvňuje súvahy a príslušné ukazovatele ostatných bánk. Mechanizmus sa zastaví, ak v danom kroku už nebankrotuje žiadna banka.

Keďže údaje o bilaterálnych expozíciách bánk nie sú verejné, v Kapitole 2 zhrnieme výsledky statickej analýzy vykonanej na medzibankových sieťach v okolitých krajinách. Následne po vygenerovaní vzájomných expozícií slovenských bánk uvedieme v Kap. 4 dynamickú analýzu na slovenskej sieti bánk.

1.2 Údaje

Medzibanková sieť sa dá skúmať z rôznych pohľadov - na národnej úrovni, t.j. berú sa do úvahy len vzťahy bánk v rámci jednej krajiny ([23], [35]), príp. aj s vplyvom

zahraničných ([19]); na európskej úrovni, často sledované len na najväčších inštitúciách [15]; či na bankách podelených do sektorov ([1]). v našom prípade sa obmedzíme na modelovanie štruktúry iba bánk so sídlom v Slovenskej republike, ktorých je momentálne 13 [6]. Pobočky zahraničných bánk nezahŕňame, nakoľko nemajú žiaden kapitál.

Skúmanie vzťahov jednotlivých bánk, či už v rámci jednej krajiny alebo viacerých, si vyžaduje zväčša citlivé informácie, ktoré nie sú bežne dostupné. Banky sú však povinné uverejňovať výročné správy obsahujúce údaje zo súvahy a výkazu ziskov a strát. V členských štátoch EÚ zverejňujú banky niektoré informácie v zmysle platnej regulácie dokonca štvrťročne. V týchto správach sa nachádzajú agregované údaje, napr. celkové pohľadávky voči bankám. Z nich však nie je možné jednoznačne určiť výšku jednotlivých expozícií banky voči ostatným bankám.

Banka	Aktíva	Vlastné zdroje	Kapitálová primeranosť
ČSOB Banka	5 943 722	523 616	16.80%
ČSOB Stavebná sporiteľňa	237 147	25 835	20.56%
OTP Banka	1 486 861	112 632	12.76%
Poštová banka	4 087 562	512 176	15.98%
Prima banka	1 837 200	147 111	14%
Privatbanka	615 808	46 528	12.11%
Prvá stavebná sporiteľňa	2 540 463	200 922	12.88%
Sberbank	2 033 295	188 339	13.35%
SĽSP	12 587 522	1 041 904	25%
SZRB	548 658	285 701	49.41%
Tatra banka	9 935 229	860 337	15.97%
VÚB banka	11 205 200	1 017 519	16.16%
Wüstenrot	372 031	31 680	16.48%

Tabuľka 1: Údaje aktuálne k 30.9.2014, aktíva a vlastné zdroje sú uvedené v tisícoch. Zdroj: výkazy dostupné na stránkach bánk

V tejto práci sa zameriavame na pohľadávky, ktoré banky medzi sebou majú, nakoľko chceme sledovať finančnú stabilitu bankového systému v závislosti od kreditného

rizika. Jednotlivé expozície voči bankám budeme generovať vlastným algoritmom popísanom v Kap. 3, do ktorého zahrnieme aj reálne údaje bánk o stave aktív, vlastných zdrojov a kapitálovej primeranosti aktuálnych k 30.9.2014. Tieto informácie sme čerpali z individuálnych účtovných závierok dostupných na internetových stránkach bánk a sú zhrnuté v Tab. 1. Generované údaje sme porovnávali aj so skutočnými expozíciami, ktoré sme mali dostupné z NBS, pre potreby lepšej kalibrácie algoritmu. Nakoľko sú ale dôverné, bližšie ich neuvádzame.

2 Statická analýza

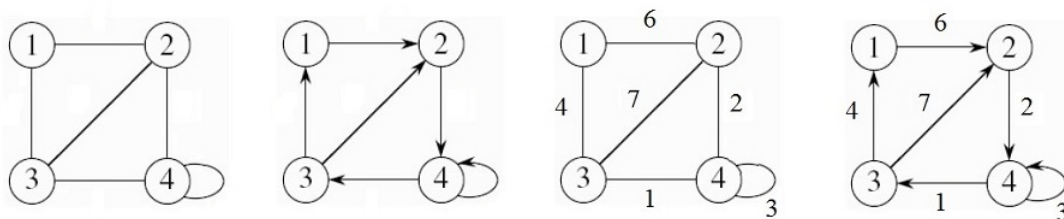
Statická analýza predpokladá skúmanie medzibankovej siete bez akýchkoľvek simulácií šokov prenášaných medzi bankami; sústreďuje sa na popísanie rizika na základe definovania charakteristík jednotlivých bánk či celej siete - napr. počtu prepojení, hustoty siete či tendencie bánk zhlukovať sa. Nerobí žiadne predpoklady na správanie inštitúcií, slúži predovšetkým na prehľadné, štylizované sumarizovanie architektúry siete. K motivácii pre skúmanie štruktúry medzibankovej siete prispieva aj fakt, že významne ovplyvňuje pravdepodobnosť a rozsah nákazy [23].

Často využívaným spôsobom je reprezentovanie medzibankovej siete orientovaným ohodnoteným grafom, kde vrcholy grafu tvoria banky a šípy expozície medzi nimi. Ak napr. banka A poskytla úver banke B , v grafe bude medzi nimi existovať šíp vychádzajúci z banky A do banky B , ktorého váha bude predstavovať objem daného úveru. Vzájomná prepojenosť bánk sa tak dá vyjadriť napr. pomocou hustoty grafu, priemerneho koeficientu zhlukovania, priemernej vzdialenosti vrcholov a ďalšími charakteristikami siete.

Keďže budeme používať pojmy z teórie grafov, v nasledujúcej podkapitole túto odbornú terminológiu objasníme. Budeme vychádzať z [16], [24].

2.1 Základné pojmy teórie grafov

Pod pojmom **graf** voľne rozumieme množinu **vrcholov** a **hrán**, ktoré ich spájajú. Dva rôzne vrcholy, ktoré sú spojené hranou, nazývame **susedné**. Ak potrebujeme vystihnúť aj poradie vrcholov v hrane, orientovanú hranu nazývame **šíp**. Grafy, ktoré obsahujú len šípy, nie hrany, budem nazývať **orientované grafy** (*directed graphs*). V literatúre bývajú označované aj ako **digrafy**. Ak budeme uvažovať aj váhy na hranách/šípoch, hovoríme o **ohodnotených** alebo **vážených grafoch** (*weighted graphs*). V literatúre sa často môžeme stretnúť s pojmom **sieť** (*network*) rôzne chápaným (ohodnotený graf, ohodnotený orientovaný graf,...), ktorým tu budeme myslieť sieť v praktickom význame (sieť bánk).



Obr. 2: Príklad rôznych kombinácií ohodnotenia a orientovanosti grafov, ktoré v našej práci budeme používať, zľava: (a) nevážený, neorientovaný, (b) nevážený, orientovaný, (c) vážený, neorientovaný, (d) vážený, orientovaný graf

2.1.1 Zadanie grafu

Graf sa môže zadávať rôznymi spôsobmi, my budeme využívať zadávanie prostredníctvom matice susednosti. Okrem toho sa môžeme stretnúť aj s maticou incidencie, zoznamom hrán či zoznamom susedných vrcholov.

Definícia 2.1. (*adjacency matrix*) Nech V je množina vrcholov grafu a $|V|$ počet prvkov množiny V . Potom matica A je $|V| \times |V|$ **matica susednosti** a má elementy:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak vrcholy } v_i \text{ a } v_j \text{ sú susedné} \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

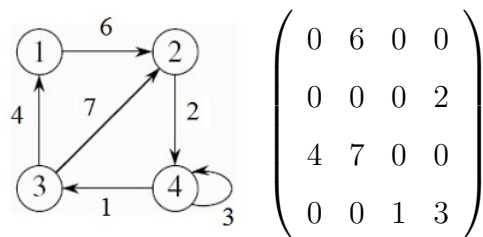
Všimnime si, že pri neorientovaných grafoch je každá hrana spájajúca susedné vrcholy v_i a v_j zapísaná v matici susednosti dvakrát, raz ako a_{ij} a druhýkrát ako a_{ji} .

Definícia 2.2. (*weighted adjacency matrix*) Nech V je množina vrcholov ohodnoteného grafu a $|V|$ počet prvkov množiny V . Potom matica W je $|V| \times |V|$ **vážená matica susednosti** a má elementy:

$$w_{ij} = \begin{cases} \text{kladné} & \text{ak existuje hrana/šíp vychádzajúci z } v_i \text{ a prichádzajúci do } v_j \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$$

kde kladné w_{ij} predstavuje váhu väzby medzi vrcholmi i a j .

Aplikujme dané pojmy teraz na systém medzibankových expozícií, ktorý sme načrtli na začiatku kapitoly. Vzhľadom na to, že v grafe chceme zachovať informáciu o výškach expozícií, bude ohodnotený. Každá expozícia potrebuje aj smer, ktorý vyjadruje, ktorá banka očakáva peniaze zo splatenia pohľadávky a ktorá banka jej ju splatí, preto je

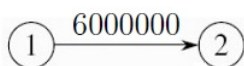


Obr. 3: Príklad orientovaného ohodnoteného grafu a jeho matice susednosti

graf aj orientovaný. Prislúchajúca matica susednosti W obsahuje váhy, ktoré predstavujú výšku expozície. Ak medzi bankami (v danom smere) neexistuje expozícia, váha je nulová. Keďže nepripúšťame, aby banky mali pohľadávky samé voči sebe, hlavná diagonála ostáva nulová. Ak je expozícií v jednom smere viac, sčítavajú sa a váha potom vyjadruje ich súčet.

banka	1	2	3	...	13
1	0	6000000	17000000	...	1315000
2	3000	0	0	...	0
3	1070000	980000	0	...	74000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
13	2000	0	6780000	...	0

Obr. 4: Príklad matice bilaterálnych expozícií X



Obr. 5: Expozícia x_{12}

Potom prvok x_{ij} reprezentuje výšku expozície i -tej banky voči j -tej, voľne povedané koľko banka i požičala banke j . Príklad z Obr. 4: $x_{12} = 6\,000\,000$ znamená, že banka 1 poskytla banke 2 napr. úvery v celkovej výške 6 mil.€. Túto maticu ďalej nazývame **maticou bilaterálnych expozícií**.

V nasledujúcich podkapitolách priblížime niektoré vlastnosti vrcholov a grafov, zameriame sa na ohodnotenú a orientovanú grafy, miestami pre lepšie priblíženie aj na iné typy grafov. Pre ostatné typy grafov možno nájsť formulácie vlastností v Prílohe A.

2.1.2 Vlastnosti vrcholov

Koľko má jedna banka expozícií voči iným? Koľko iných bánk má expozície voči nej? V akom objeme? Aj na tieto otázky možno odpovedať prostredníctvom nasledujúcich vlastností.

Definícia 2.3. (*degree*) **Stupeň** k_v vrchola v definujeme v neorientovanom grafe ako počet hrán spojených s vrcholom v :

$$k_v = \sum_j a_{vj}. \quad (1)$$

Definícia 2.4. (*outdegree, indegree*) V orientovanom grafe rozlišujeme **prichádzajúci stupeň** k_v^{in} vrchola v ako počet do neho prichádzajúcich šípov a **odchádzajúci stupeň** k_v^{out} vrchola v ako počet z neho vychádzajúcich šípov:

$$k_v^{in} = \sum_i a_{iv}, \quad (2)$$

$$k_v^{out} = \sum_j a_{vj}. \quad (3)$$

Keďže matica bilaterálnych expozícií obsahuje vážené prepojenia, vyvstáva potreba definovať analógiu pojmu „stupeň“ aj pre ohodnotenú grafy, a to nasledovne:

Definícia 2.5. (*strength*) V ohodnotenom neorientovanom grafe chápeme pod **silou** s_v vrchola v vážený stupeň, t.j. súčet váh hrán spojených s vrcholom v :

$$s_v = \sum_j a_{vj}w_{vj}. \quad (4)$$

Analogicky sú definované aj **prichádzajúca sila** s_v^{in} a **odchádzajúca sila** s_v^{out} vrchola v v prípade ohodnotených orientovaných grafov:

$$s_v^{in} = \sum_i a_{iv}w_{iv}, \quad (5)$$

$$s_v^{out} = \sum_j a_{vj}w_{vj}. \quad (6)$$

V prípade matice bilaterálnych expozícií tak odchádzajúca sila predstavuje objem expozícií, voči ktorým je banka vystavená (súčet v riadku), a prichádzajúca sila objem expozícií, ktorý musí splatiť (súčet v stĺpci). Prichádzajúce a odchádzajúce stupne nám

dávajú informáciu o počte bánk, ktoré majú voči danej banke expozície, resp. ona voči nim.

So stupňami sa ešte často viaže aj **rozdelenie stupňov** (*degree distribution*), t.j. aké zastúpenie majú tie-ktoré stupne v rámci grafu. Pre orientované grafy sú analogicky zavedené **rozdelenie prichádzajúcich stupňov** (*in-degree distribution*) a **rozdelenie odchádzajúcich stupňov** (*out-degree distribution*), obdobne pre ohodnotené grafy so silami.

Špeciálnym prípadom sú vrcholy (banky), ktoré nemajú žiadne spojenie s iným vrcholom grafu.

Definícia 2.6. (*disconnected node*) Vrchol, ktorý nie je spojený hranou alebo šípmom so žiadnym iným vrcholom grafu, budeme volať **nedosiahnuteľným vrcholom**, t.j. má stupeň/silu nula.

Definícia 2.7. (*geodesic, distance*) V grafe definujeme **vzdialenosť** $d(x, y)$ vrcholov x a y ako dĺžku najkratšej x - y cesty¹, ak taká medzi nimi existuje; inak kladieme $d(x, y) = \infty$. Pod **dĺžkou** rozumieme súčet váh šípov cesty.

Vzdialenosť v neohodnotenom grafe udáva minimálny počet bánk, ktoré musia byť zasiahnute, aby sa nákaza rozšírila z jednej banky na druhú.

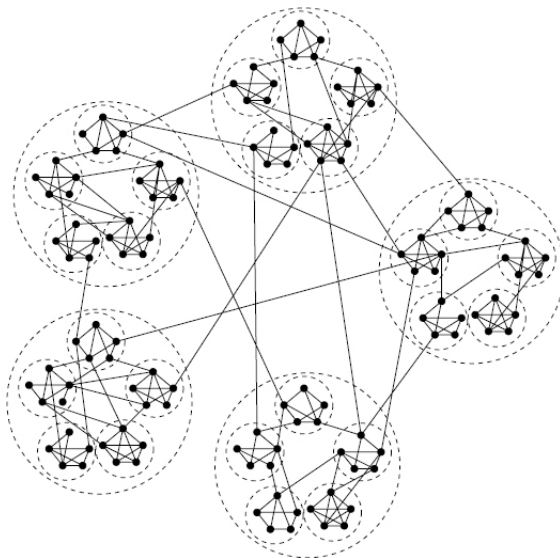
Mierou, ktorá zachytáva, ako veľmi majú vrcholy grafu tendenciu sa zhlukovať, je koeficient zhlukovania. Ten zachytáva vlastnosť tranzitivity, t.j. ak existuje prepojenie medzi bankou A a B a medzi bankou B a C , tak aj banky A a C sú prepojené. Skupiny vrcholov, ktoré sú vysoko prepojené, nazývame zhluky, pozri Obr. 6.

V orientovanom ohodnotenom grafe teória nie je jednotná ohľadom definovania koeficientu zhlukovania². Prístupy sa líšia najmä pri zohľadňovaní váh a smerov šípov v grafoch. V našej práci používame definíciu podľa Barrata v [16]³:

¹Cestou nazývame sled, v ktorom sa žiadny vrchol neopakuje. Sled je alternujúca postupnosť vrcholov a šípov grafu začínajúca a končiaca vrcholom (vrchol-šíp-vrchol-šíp-...-vrchol), pričom každý šíp skutočne spája v grafe vrcholy, ktoré sú uvedené pred a za ním v slede.

²Ioannis a Eleni v [43] uvádzajú až 6 zozbierných rôznych definícií váženého koeficientu zhlukovania, zatiaľ čo Fagiolo v [22] navrhuje niekoľko verzií koeficientu podľa typu zoradenia šípov, ktoré doň vstupujú.

³hoci ju pôvodne použil len na vážené neorientované grafy

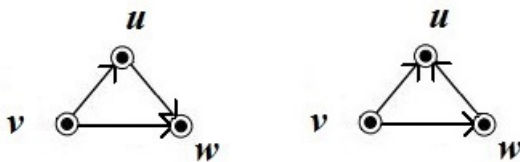


Obr. 6: Príklad zhlukovania siete s 5 veľkými zhlukmi s menšími podzhlukmi. Zhluky predstavujú skupiny vrcholov, ktoré sú medzi sebou vysoko prepojené. Zdroj: [26].

Definícia 2.8. (*clustering coefficient*) Nech k_v^{out} je počet šípov vychádzajúcich z vrchola v . Nech s_v je súčet jeho prichádzajúcej a odchádzajúcej sily. Pre vrcholy s $k_v^{out} = 0$ alebo $k_v^{out} = 1$ položíme $C_v = 0$. Pre $k_v^{out} > 1$ definujme potom **koeficient zhlukovania vrchola v** ako:

$$C_v = \frac{1}{s_v(k_v^{out} - 1)} \sum_{j,h} \frac{w_{vj} + w_{vh}}{2} a_{vj} a_{vh} a_{jh}. \quad (7)$$

Hodnoty koeficientu zhlukovania sa nachádzajú v intervale $[0,1]$. Vo všeobecnosti platí: čím vyšší koeficient, tým vyššia je miera zhlukovania pri vrchole (tým vyššia je pravdepodobnosť, že pre ľubovoľné dve banky a, b , voči ktorým má banka expozíciu, bude existovať aj expozícia banky a voči banke b).

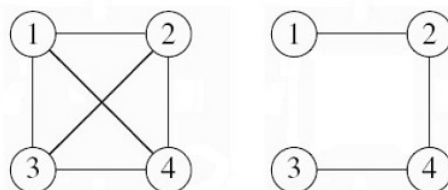


Obr. 7: Trojice, ktoré vstupujú do koeficientu zhlukovania vo vzťahu (7)

2.1.3 Vlastnosti grafu

Definícia 2.9. (*connected graph*) Graf sa nazýva **súvislý**, ak pre každé dva vrcholy u a v existuje u - v sled⁴; inak sa nazýva **nesúvislý**.

Definícia 2.10. (*complete graph*) Graf sa nazýva **kompletný**, ak sú každé dva rôzne vrcholy susedné (teda obsahuje všetky možné hrany).



Obr. 8: Príklad kompletného (vľavo) a súvislého neorientovaného grafu (vpravo), v orientovaných by v tomto prípade bolo potrebné každé spojenie v oboch smeroch

Súvislý graf tak predstavuje graf, v ktorom sa možno dostať z každého vrcholu do všetkých ostatných vrcholov. V reálnom svete sú kompletné grafy skôr ojedinelé.

Definícia 2.11. (*density*) **Hustotu** siete definujeme ako podiel počtu šípov E v grafe a celkovému počtu všetkých možných šípov, kde počet vrcholov označujeme n .

$$D_G = \frac{E}{n(n-1)} \quad (8)$$

Hustota grafu sa nachádza medzi 0 a 1, pričom platí, že čím hustejší je graf, tým bližšie je jeho hustota k 1. Ak $D_G = 1$, ide o kompletný graf. Hustota nám tak dáva obraz o „zahustenosti“ medzibankovej siete, ako veľa je expozícií na trhu.

Definícia 2.12. (*average path length*) **Priemernú vzdialenosť** definujeme ako priemer vzdialeností (najkratších ciest) všetkých dvojíc rôznych vrcholov grafu.

$$l_G = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} d(i, j). \quad (9)$$

⁴Sled je alternujúca postupnosť vrcholov šípov grafu začínajúca a končiaca vrcholom (vrchol-šíp-vrchol-šíp-...-vrchol), pričom každý šíp skutočne spája v grafe vrcholy, ktoré sú uvedené pred a za ním v slede.

Definícia 2.13. (*average clustering coefficient*) **Priemerný koeficient zhlukovania** grafu je potom priemer koeficientov zhlukovania všetkých jeho vrcholov, kde n je počet vrcholov grafu.

$$C_G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i. \quad (10)$$

Podobne, priemerný koeficient zhlukovania siete predstavuje priemernú pravdepodobnosť, že ak pre ľubovoľnú banku vyberieme dve banky a, b , voči ktorým má expozície, bude existovať aj expozícia banky a voči banke b .

2.1.4 Centralita vrcholov

V reálnych sieťach sa často zvykne určovať aj dôležitosť vrcholov, tzv. centralita, ktorá však môže byť rôzne počítaná v závislosti od toho, čo potrebujeme skúmať [3], [23], [27], [33], [45], [47], [49]. Keďže centrality spomínáme len informatívne, neuvádzame ich presné vzorce.

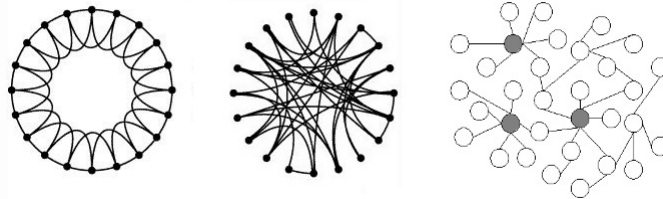
Najzákladnejšou centralitou je **centralita meraná stupňom vrcholu** (*degree centrality*). Ďalším príkladom je **stredová medzipoloha** (*betweenness centrality*), ktorá meria, koľko najkratších ciest prechádza cez daný vrchol. Vrcholy s vysokou stredovou medzipolohou sú obyčajne dôležitými prostredníkmi, napr. medzi zhlukmi. **Blízkosť polohy v strede** alebo *closeness centrality* dáva informáciu o priemernej vzdialenosti vrchola od ostatných vrcholov - počítame ju ako $1/(\text{priemer dĺžok najkratších ciest vedúcich z daného vrchola do všetkých ostatných})$. Napokon uvádzame aj **centralitu meranú vlastným vektorom** prislúchajúcemu najväčšiemu vlastnému číslu (*eigenvector centrality*) a predstavuje skóre, ktoré je tým vyššie, čím viac má vrchol prepojení a čím viac tých prepojení je s vrcholmi, ktoré majú tiež vysoké skóre.



Obr. 9: Rozdielne vrcholy s najvyšším skóre podľa použitej centrality, naľavo vrcholy s najvyššou stredovou medzipolohou, v strede s najvyššou blízkosťou polohy v strede a napravo s najvyššou centralitou meranou vlastným vektorom. Zdroj: [3].

2.2 Komplexné siete

V poslednom období čoraz viac vystupujú do popredia tzv. komplexné siete, ktoré reálnejšie popisujú tak veľké a zložité siete ako je World Wide Web, sociálne siete, či medziľudské vzťahy [2]. Zo začiatku pracovala teória grafov s **regulárnymi grafmi** (*regular graphs*), ktoré sa vyznačujú rovnakým stupňom pre všetky vrcholy. Od 50.-tych rokov sa veľké, rozsiahle grafy začali označovať ako **náhodné grafy** (*random graphs*), kde prepojenie medzi dvoma vrcholmi vznikalo s určitou (konštantnou) pravdepodobnosťou. Často sa zvyknú označovať aj Erdős-Rényi grafy, podľa ich priekopníkov. Neskôr však vedci spozorovali opakované štruktúry či vlastnosti reálnych sietí, ktoré bolo nutné premietnuť aj do tvorby hrán grafov. Prepojenia vrcholov nevznikali na báze jednoduchej náhody, ale na základe určitých preferencií, čo viedlo k vzniku tzv. bezškálových sietí.



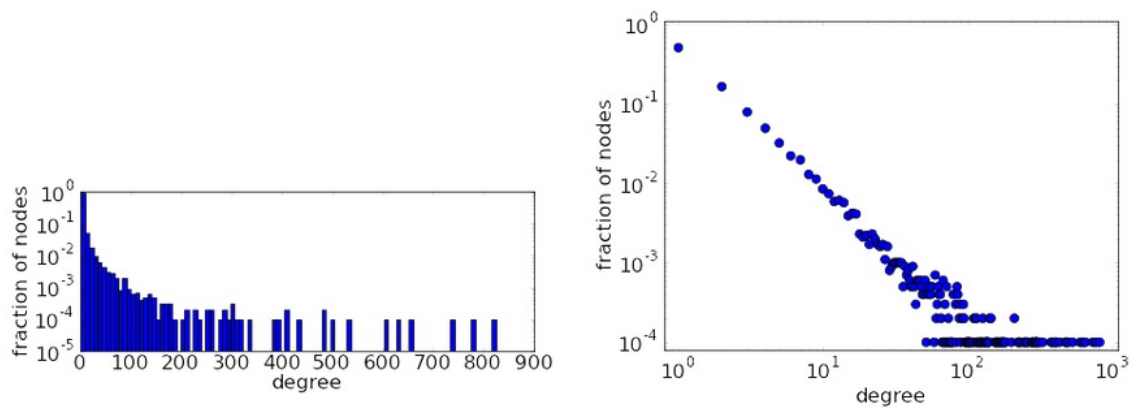
Obr. 10: Príklad (zľava) regulárneho grafu, náhodného grafu a bezškálového grafu (s vyznačenými hubmi). Zdroj: [40].

Bezškálové siete (*scale-free networks*) sa dostali do popredia mnohých vedeckých prác, napr. [13]. Bezškálové rozdelenia stupňov sa objavujú v reálnych sieťach ako World Wide Web, citácie diel, grafy telefonických volaní, v metabolických sieťach, elektronických okruhoch, atď. [2], [32]. Rôzne zložité systémy majú spoločnú jednu vlastnosť: niektoré vrcholy majú veľké množstvo prepojení s inými vrcholmi, tzv. huby (tzv. *hubs*), zatiaľ čo väčšina len s niekoľkými. To sa vzťahuje aj na medzibankové siete, kde sa stretávame s tým, že malý počet bánk má veľa expozícií voči ostatným bankám a ostatné banky majú iba zopár expozícií [23].

Rozdelenie stupňov vrcholov v bezškálových stupňoch spĺňa mocninový zákon (*power-law*). Distribučnú funkciu stupňov vrcholov možno potom zapísať ako

$$P(k) = \beta k^{-\alpha}, \quad (11)$$

kde k je stupeň vrchola. Na logaritmickej škále sú funkčné hodnoty usporiadané na priamke (pozri Obr. 11). Pre tieto distribučné funkcie sú príznačné ťažké chvosty, t.j. existujú vrcholy s extrémne vysokými stupňami (vyššie spomínané huby). Práve tie spôsobujú v bezškálových sieťach nízku priemernú vzdialenosť vrcholov, nakoľko spájajú veľmi veľa slabo prepojených vrcholov a teda výrazne znižujú vzdialenosti medzi nimi [2], [31]. Bezškálové siete sa vyznačujú aj nízkym koeficientom zhukovania, čo možno vysvetliť prítomnosťou veľkého množstva vrcholov, ktoré majú len malý počet prepojení, a teda nevzniká priestor pre zhuky navzájom husto prepojených vrcholov [2], [31].



Obr. 11: Distribučná funkcia $P(k) = k^{-\alpha}$, kde $\alpha = 2$. Rozdelenie stupňov bezškálových sietí na logaritmickej škále tvorí približne priamku. Zdroj: [30], [48].

Tieto siete sa zvyknú nazývať bezškálovými, hoci bezškálovosť sa vzťahuje len na rozdelenie stupňov vrcholov grafu. Bezškálové preto, lebo priblíženie akejkoľvek časti distribučnej funkcie nemení jej tvar: $P(ak) = a^{-\alpha}P(k)$ [30].

Barabási a Bonabeau v [13] zdôrazňujú, že tieto siete vykazujú výbornú robustnosť voči náhodným zlyhaniam vrcholov; náhodné odstránenie vrcholov eliminuje najmä malé vrcholy, keďže je ich oveľa viac ako vysoko prepojených vrcholov. Tie majú málo prepojení v porovnaní s hubami, preto sieť až tak nenarušia. Zato však škoda, ktorá vznikne pri odpojení veľkého vrcholu, môže byť katastrofická.

2.3 Empirické vlastnosti v literatúre

Nasledujúca podkapitola zhrňa poznatky statických analýz, ktoré autori vykonali na národných či európskych medzibankových sieťach. Cieľom bude identifikovať dôležité charakteristiky siete potrebné na vybudovanie vlastného algoritmu generovania slovenskej siete bánk a jej matice bilaterálnych expozícií.

Hneď na začiatku treba poznamenať, že nie všetky práce s tematikou medzibankových sietí pracujú so skutočnými údajmi o tej-ktorej národnej sieti. Mnohí autori v nich údaje simulovali rôznymi spôsobmi (častým spôsobom simulácie nedostupných dát je princíp maximalizácie entropie, kedy autori predpokladajú, že banka svoje expozície rozdeľuje čo najrovnomernejšie medzi ostatné banky, viac v Kap. 3), čo ovplyvňuje napr. hustotu siete. Preto sa ďalej zameriame predovšetkým na závery podložené skutočnými informáciami o expozíciách bánk.

Základným údajom je samotná veľkosť siete, t.j. počet začlenených bánk (príp. bankových zoskupení) v analýze a množstvo prepojení, ktoré medzi nimi existuje. Do analýzy českej medzibankovej siete [23] bolo zapojených 31 až 40 bánk⁵, v Taliansku [35] až 789, v Rakúsku [17] 900 bánk. V európskych analýzach Európsky výbor pre systémové riziká (ESRB) [15] zahrnul 53 veľkých bánk, zatiaľ čo Európska centrálna banka v [5] skúmala až 1530 bánk. Už teraz môžeme vidieť, že počet bánk v jednotlivých publikáciách výrazne kolíše, čo sa môže prejaviť aj na ďalších charakteristikách.

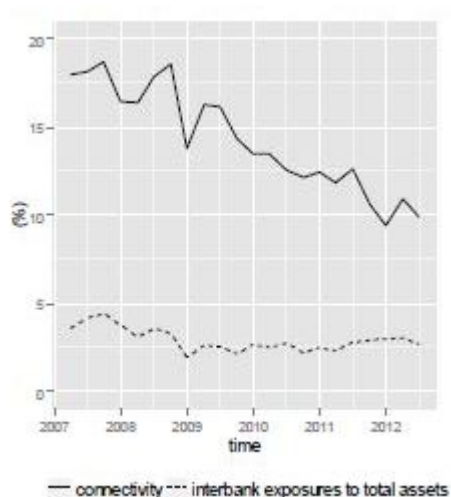
Podľa ESRB [15] veľké európske banky vykazujú **hustotu siete** rovnú 34%⁶, kým Česká národná banka potvrdila len 10%-nú hustotu prepojení medzi svojimi bankami [23]⁷. To môže byť spôsobené tým, že spomínané európske banky patrili k najväčším v Európe, preto môžu mať vyššiu tendenciu obchodovať medzi sebou, zatiaľ čo české sú veľmi heterogénne a kapitálové zdroje mohli hľadať u iných zahraničných bánk.

Ďalšou pozorovanou charakteristikou, ktorú siete vykazujú, je **bezškálovosť** ([15], [17], [23]). Takéto siete sú citlivé na zmeny v inštitúciách, ktoré sú pre ne centrálné

⁵počet bánk varioval v čase kvôli konsolidáciám bánk, kde dcérska banka a jej expozície neboli zahrnuté do dát [23, s. 28]

⁶avšak pre údaje zahŕňajúce iba medzibankové úvery

⁷hustota udaná ESRB ku koncu roka 2011, v Českej republike k júnu 2012

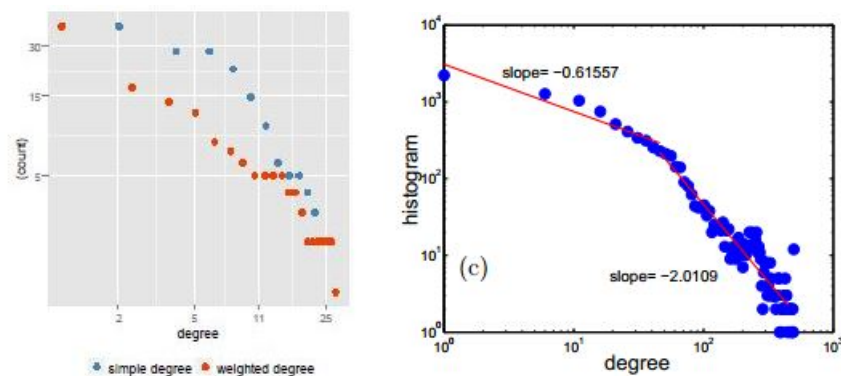


Obr. 12: V pozorovaných rokoch 2007-2012 hustota prepojení českých bánk s postupom času klesala, s výrazným skokom v krízovom roku 2008, kým podiel expozícií k aktívam ostal celkom stabilný. Dôvodom mohlo byť to, že si banky postupne vytvárali a uchovávali expozície už len voči užšiemu okruhu bánk, a to v časoch, keď Európa bojovala s krízou. Relatívne stabilný objem expozícií mohol nasvedčovať, že banky si udržali finančnú stabilitu a nepotrebovali výrazný prísun likvidity. Zdroj: [23].

(vrcholy s vysokými stupňami), obyčajne reprezentované veľkými bankami s mnohými prepojeniami v sieti. Bezškálovosť najčastejšie pozorujeme na rozdelení stupňov vrcholov; no vyskytla sa aj pri rozdelení celkových aktív bánk či centralít vrcholov grafov [23].

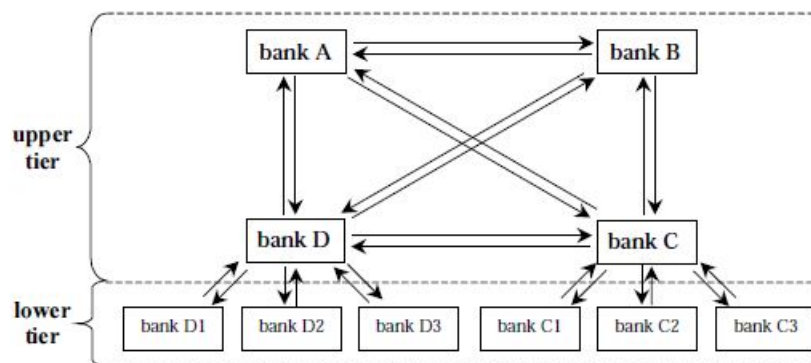
Na Obr. 13 môžeme pre Českú republiku spozorovať veľkú rôznorodosť bánk, so stupňami medzi cca. 5-25. Obdobne je to pre rakúsku medzibankovú sieť: rozdelenie stupňov taktiež vykazuje bezškálovosť, hoci Boss et al. [17] distribučnú funkciu fitovali dvomi mocninovými funkciami (podobne aj rozdelenie prchádzajúcich a odchádzajúcich stupňov).

Vo viacerých krajinách bola potvrdená **stupňovitá štruktúra** bánk (*tiered networks*), napr. v Rakúsku [17], [28], Nemecku [1], [20], v Taliansku [18], Holandsku [19], Belgicku [21], v Českej republike [23]. Zvyčajne sa jedná o dvojstupňovú štruktúru, kedy banky z nižšej vrstvy (často menšie banky) majú prepojenia len na banky z vyššej vrstvy (obyčajne veľké banky), pričom tie medzi sebou obchodujú pomerne veľa. Môžeme sa stretnúť aj s označením **centrálno-periférny model** (*core-periphery*) [20].



Obr. 13: (naľavo) Rozdelenie stupňov vrcholov v českej medzibankovej sieti na logaritmickú škálu. Vypočítané pre váženú aj neváženú sieť, pričom váhy boli normalizované, aby sa zmestili do priestoru grafu. Zdroj: [23]. (napravo) Rozdelenie stupňov vrcholov v rakúskej medzibankovej sieti. Zdroj: [17]. Oba grafy uvádzajú rozdelenie stupňov pre neorientované grafy.

V Rakúsku a Nemecku je to ešte výraznejšie, nakoľko ich bankový systém je z historických dôvodov rozdelený do sektorov podľa druhov bánk a tie obchodujú výrazne medzi sebou.



Obr. 14: Dvojvrstvová štruktúra nemeckého medzibankového systému. Zdroj: [1].

Táto štruktúra vnáša do medzibankových sietí tzv. **vlastnosť malého sveta** (*small-world property*), kde sa nachádzajú zhluky vzájomne vysoko prepojených vrcholov [23]. Vďaka nim, aj keď ich môže byť len pár, sa medzi vrcholmi vytvárajú skratky, ktoré radikálne znižujú vzdialenosti medzi vrcholmi a preto je celková priemerná vzdialenosť nízka. Zhluky zas naopak zvyšujú koeficient zhlukovania.

Priemerný koeficient zhlukovania uvádza len Česká republika, a to počas sle-

dovaných rokov 2007-2012 medzi 52% a 37% (rátaný podľa vzťahu (10)), Rakúsko zas **globálny koeficient zhlukovania** (definovaný v Prílohe A)⁸), kde dosiahol hodnotu iba 12%. To môže byť spôsobené špecifickou trojstupňovitou štruktúrou bánk, kde malé banky sú prepojené len na svoje sektorové aj geografické materské banky [17].

Priemerná vzdialenosť bola charakteristikou, ktorá dosahovala vo všetkých štúdiách pomerne jednotný výsledok - banky boli od seba vzdialené 1 až 2 banky, čo mohlo byť zapríčinené najmä efektom malého sveta v spojení s centrálno-periférnym modelom [5], [15], [17], [23].

Pre prehľadnosť zhrnieme numerické výsledky v nasledujúcej tabuľke:

Geograf. oblasť	Priemerná vzdialenosť	Koeficient zhlukovania	Alfa-in	Alfa-out
Česká republika	1.9-2.6	35%-52%	-	-
Rakúsko	2.59	12%	1.01, 1.73 ⁹	3.11, 0.69
Európa (ESRB)	1.73	67%	3.5	3.02
Európa (ECB)	2.51	12.6%	-	-

Tabuľka 2: Výsledky pre vybrané charakteristiky medzibankovej siete, pod pojmom Alfa-in rozumieme koeficient mocninovej distribučnej funkcie prichádzajúcich šípov tvaru $P(k) = \beta k^{-\alpha}$, analogicky pre Alfa-out vychádzajúcich šípov.

Uvedené vlastnosti medzibankových sietí budeme považovať za kľúčové pre tvorbu algoritmu v nadchádzajúcej kapitole. V rámci štúdií boli najčastejšie spomínané, hoci neboli jediné a nedefinujú medzibankovú sieť jednoznačne. Výhodou výberu daných vlastností je, že sme v prvom rade zúžili oblasť charakteristík, na ktoré sa budeme zamieravať. Nevýhody však vidíme v malom počte relevantných národných analýz obsahujúcich ich numerické hodnoty a to, že patria k rôznym časovým obdobiam, pričom nevieme, akú hodnotu majú dnes.

⁸Boss et al. vo svojej štúdii na rakúskych bankách zahrnuli nielen domáce banky, ale agregovali aj zahraničný bankový sektor a rakúsku centrálnu banku, s celkovým počtom 900 bánk, kde cca. 90% vzťahov získali priamo zo súvah či hlavného registra úverov, zvyšok simulovali lokálnou maximalizáciou entropie. Koeficient zhlukovania sa počítal na neváženej neorientovanej matici, kde $A_{ij} = A_{ji} = 1$, ak existovala expozícia medzi bankami i, j .

3 Generovanie matice bilaterálnych expozícií

V predošlej kapitole sme ukázali, že medzibankovú štruktúru expozícií možno popísať maticou bilaterálnych expozícií. Taktiež sme ukázali, aké charakteristiky grafov a vrcholov sú pre nás kľúčové, podľa ktorých budeme zostavovať algoritmus generujúci matice expozícií. Z Kap. 2.2 sme získali rámcový prehľad hodnôt, ktoré nadobúdali pre iné geografické oblasti, zhrnuté v Tab. 2. Pre potreby voľby správnych parametrov si pomôžeme aj hodnotami vlastností reálnych slovenských medzibankových expozícií, získaných z NBS.

V ďalšom kroku teda chceme preskúmať medzibankovú sieť z pohľadu dynamickej analýzy, t.j. pozorovať správanie siete v stresových situáciách simulovaných šokov. Sledovať ju však nebudeme na reálnych údajoch zodpovedajúcich momentálnej skutočnej medzibankovej sieti SR, ale na vygenerovaných údajoch. Expozície sa z obdobia na obdobie môžu líšiť, preto nie je našim cieľom dáta simulovať, nakoľko sa nám tak otvára priestor pre skúmanie siete v rôznych podmienkach a získame robustnejšie výsledky.

Ako tejto kapitole sa budeme venovať nasledujúcim otázkam: Ako generovať sieť expozícií tak, aby si sieť zachovala skutočne štruktúru medzibankovej siete (a nie ľubovoľne náhodnej)?

Ako ju čo najviac priblížiť slovenskej štruktúre?

3.1 Prehľad literatúry

V literatúre sa kladie veľký dôraz na fakt, že dopad nákazy úzko súvisí so štruktúrou medzibankového trhu. Rôzna štruktúra vedie k rôznym výsledkom, viď napr. [35]. Kľúčový pohľad na šírenie nákazy poskytli Allen a Gale [10], ktorí ako prví dali základ skúmaniu závislosti šírenia nákazy od stavby siete. Skúmali tri typy bankových sietí: prvú s kompletným grafom (každá banka je prepojená s každou), druhú, kde sú banky prepojené len s určitými „susediacimi“ bankami, a tretiu s dvoma samostatnými trhmi bánk. Ukazujú, že kompletná štruktúra poskytuje najvyššiu ochranu proti neočakávaným likviditným šokom zasahujúcim individuálnu banku vďaka diverzifikačnému efektu. Mistrulli však v [35] ukazuje, že tomu tak nemusí byť vždy a pre vyššiu hod-

notu straty v prípade zlyhania (*loss given default, LGD*) kompletne siete utŕžili väčšiu škodu ako nekompletne. Freixas zas vniesol pohľad o čosi bližší mnohým národným štruktúram, a to prácou na sieťach s *money-center* bankami v [25].

Spomínané štúdie však poskytujú viac teoretický pohľad ako empirický, preto mnoho autorov v poslednom období upriamilo svoju pozornosť na simulácie komplexných modelov, postavené na reálnejších predpokladoch a údajoch. Viaceré štúdie boli vykonané na národných bankových systémoch, napr. v Austrálii [14], Belgicku [21], v Brazílii [7], v Českej republike [23], v Holandsku [19], v Nemecku [1], v Rakúsku [17], vo Švajčiarsku [29], v Taliansku [35], Veľkej Británii [38], [39] či Európskym výborom pre systémové riziká [15]. Mnohí autori z nich mali k dispozícii citlivé dáta o expozíciách a svoj výskum prevádzali na nich ([7], [14], [15], [23], [35]). Tí, čo ich nemali, siahli napríklad po voľne dostupných dátach zo súvah, kde sa nachádzajú celkové objemy expozícií banky voči iným bankám, a dáta o jednotlivých expozíciách odhadovali pomocou nich. Súvahové údaje im tak poskytli súčty riadkov a_i a stĺpcov l_j matice bilaterálnych expozícií, bez informácie o samotných elementoch matice x_{ij} :

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = a_i \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} = l_j \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & 0 & x_{23} & \dots & x_{2N} \\ x_{31} & x_{32} & 0 & \dots & x_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & x_{N3} & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_N \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 & \dots & l_N \end{matrix}$$

Niektorí autori použili aj ďalšie informácie (napr. o najväčších expozíciách), ktoré sa zbierajú v reportoch vo Veľkej Británii či Holandsku¹⁰, a odhadovali už len ostávajúce

¹⁰viacerí autori kombinovali agregované dáta zo súvah bánk s inými dostupnými zdrojmi, napr. vo Veľkej Británii zbiera United Kingdom's Financial Services Authority (FSA) informácie o veľ-

neznáme prvky matice (ako urobili v [1], [19]). Vo všeobecnosti má tento systém viac neznámych ako lineárnych rovníc, nemá jednoznačné riešenie a je nutné urobiť ďalšie predpoklady.

Jednou z možností je **princíp maximalizácie entropie** (ME), ktorý využili napr. [1], [17], [21], [29], [41] a kde sa agregované expozície rozdelia čo najviac rovnomerne medzi všetkých N bánk¹¹, čím sa predpokladá, že banky si svoje expozície čo najviac diverzifikujú. Entropiu možno chápať ako akúsi mieru prekvapenia a čím vyššiu ju požadujeme, tým rovnomernejšie potrebujeme rozložiť váhy na jednotlivé výstupy. Maximálna entropia tak predstavuje absolútnu nezáujatosť voči vzťahom a štruktúre medzi bankami. Aj v prípade obohatenej matice X o dodatočné informácie je možné použiť prístup s entropiou, ale už v inom tvare, viď [19]. Samotnú maticu je možné potom spočítať tzv. RAS algoritmom [19]. Detailnejší prehľad metodológie ME a jej rozšírenia na dodatočné dáta spracoval Upper v [9].

Nevýhodou tohto prístupu je však práve zanedbanie vnútornej štruktúry medzibankových expozícií. Na sieť sa tak pozerá ako na kompletný graf, kde má každý s každým expozíciu, hoci v mnohých krajinách bola potvrdená schéma centrálnych a periférnych bánk so špecifickým spôsobom komunikácie. Navyše, Mistrulli v [35] v talianskom bankovom sektore ukazuje porovnaním simulácií na reálnych dátach a dátach získaných maximalizáciou entropie, že maximalizácia entropie v priemere podceňuje alebo, naopak, preceňuje rozsah nákazy.

Iným smerom sa uberali v [38] či [39], kde siete modelovali ako **náhodné grafy**. Gai a Kapadia generovali siete medzibankových expozícií jednoduchým spôsobom - pozreli sa na každý jeden možný šíp a ponechali ho s pravdepodobnosťou p , čím získali náhodné grafy s binomickým rozdelením stupňov. Následne náhodne (nezávislo od počtu šípov) prideliť každému vrcholu aktíva, ktoré potom rovnomerne rozdelili medzi prichádzajúce šípy ako ich váhy [38]. Zvoleným prístupom generovania mnohých a mnohých matíc sa naskytáva príležitosť neskúmať len jedno momentálne rozpoloženie bánk a ich vzťahov,

kých expozíciách, kde anglické banky uvádzajú 20 najväčších expozícií a každú expozíciu presahujúcu 10% kapitálu Tier 1 [41], v Holandsku banky odovzdávajú De Nederlandsche Bank (DNB) spolu so súvahami aj dáta o veľkých expozíciách, t.j. expozíciách väčších ako 3% ich vlastných zdrojov [19]

¹¹ošetrenie núl na diagonále popísali napr. Upper a Worms v [1]

ale testovať odolnosť siete v rôznorodých podmienkach.

Krause a Giansante zašli ďalej a siete zhotovovali s bezškálovou štruktúrou. Generovali náhodnú orientovanú sieť - bezškálovú, podľa Alberta a Barabásiho [36], kde počet prichádzajúcich a vychádzajúcich šípov bol korelovaný s celkovými aktívami banky. Váhy šípov stanovili ako $x_{ij} = a_{ij} \frac{L_j B_i}{\sum_i L_i}$, kde a_{ij} pochádzalo z matice susednosti generovanej siete, L_j predstavovalo objem úverov poskytnutých banke j od iných bánk a B_i zas objem úverov, ktoré banka i poskytla ostatným. Banka i tak poskytla tým vyšší úver banke j , čím viac ona sama požičiavala iným bankám alebo čím viac získala prijímajúca banka od ostatných. Pre detailnejšie informácie odkážeme čitateľa na [39].

Spomenieme ešte prácu Hałaja and Koka (oboch z ECB), ktorí v roku 2013 publikovali [8], kde predstavili tzv. *Systemic Probability Index*, ktorý každej z 89 zahrnutých veľkých európskych bánk pripisuje pravdepodobnosť, s akou sa po zbankrotovaní danej banky bude v systéme šíriť nákaza. V neváženej verzii¹² $SPI_i = \frac{\sum_{j=1}^N TA_j P_{ij}^{(\infty)}}{\sum_{j=1}^N TA_j}$, kde TA_j predstavuje celkové aktíva banky j a $P_{ij}^{(\infty)}$ pravdepodobnosť, že banka j skrachuje po páde banky i na nekonečnom časovom horizonte. Autori vychádzajú z pravdepodobnostnej mapy vytvorenej na základe geografického členenia celkových expozícií a aktivít bánk, a výšku expozície určujú (rovnomerne) náhodne ako podiel záväzkov banky. V danej vzorke sa však nenachádzala ani jedna slovenská banka a nemáme zatiaľ žiadne informácie o aktívnom používaní tohto indexu.

V našej práci sme sa rozhodli pre modelovanie sietí prostredníctvom náhodných grafov, ktorých parametre sme kalibrovali podľa reálnych dát slovenského medzibankového trhu. Na pozadí sme vygenerované siete pod chvíľou porovnávali aj so získanými poznatkami z iných krajín.

3.2 Metodológia

V Kap. 2.2 sme určili kľúčové vlastnosti, ktoré sa pokúsime zachytiť v našom algoritme - bezškálovosť, vlastnosť malého sveta, centrálnu-periférny model, s pomocou

¹²vytvorili dve verzie indexu, prvá (nevážená) predstavuje limitný pravdepodobnostný index a druhá (vážená) rýchlosť, s akou sa index ustáli v ekvilibriu

grafových vlastností priemerného koeficientu zhlukovania, priemernej vzdialenosti či hustoty hrán. V predchádzajúcej podkapitole sme uviedli prístupy, ktoré využívali autori v zahraničných publikáciách. Zvolili sme prístup k modelu medzibankovej siete ako k náhodného grafu, do ktorého zahrnieme identifikované kľúčové charakteristiky. Najskôr v krátkosti predstavíme základné kroky výstavby modelu, následne jednotlivé časti rozvedieme a na záver kapitoly model nakalibrujeme s použitím poznatkov z Kap. 2.2 a reálnych údajov slovenských medzibankových expozícií. Uvedieme predpoklady, ktoré sme v modeli použili, ich

Medzibankovú sieť sme v 2. kapitole reprezentovali orientovaným, ohodnoteným grafom. V našom algoritme však najskôr začneme neorientovaným, neohodnoteným grafom, ktorý budeme postupne upravovať na základe týchto predpokladov:

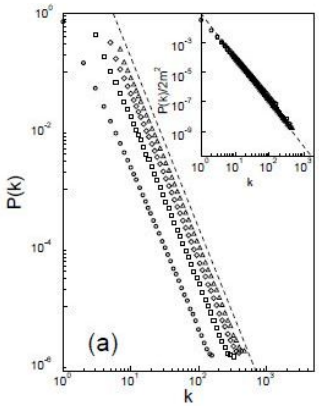
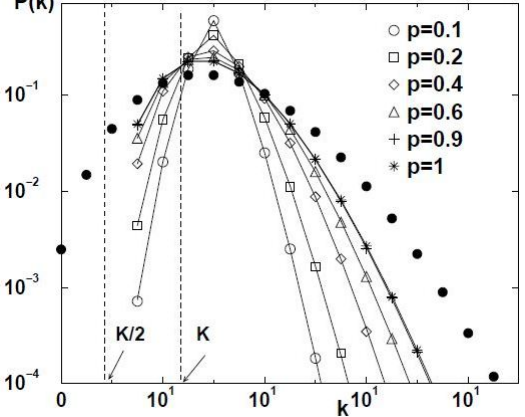
1. (*vygenerovanie bezškálového grafu s vlastnosťou malého sveta*) Vytvoríme graf, ktorý skĺbi bezškálovosť rozdelenia stupňov a efekt malého sveta, t.j. nízku priemernú vzdialenosť a vysoký priemerný koeficient zhlukovania, vychádzajúc z algoritmu Klemma a Eguíla [44].
2. (*usmernenie hrán*) Hranám grafu zadáme smer s ohľadom na stupne vrcholov, čím získame orientovaný graf.
3. (*priradenie údajov o bankách*) K vrcholom priradíme konkrétne slovenské banky, t.j. ich aktíva, vlastné zdroje, kapitálovú primeranosť a celkové expozície voči bankám. Predpokladáme, že čím viac bude mať banka prichádzajúcich šípov, tým väčšie väčšie aktíva bude vlastniť. Objem jej celkových expozícií voči bankám určíme z (inverznej) distribučnej funkcie expozícií voči aktívam.
4. (*ohodnotenie expozícií*) Ohodnotíme jednotlivé šípy v grafe, a tým získame orientovaný, ohodnotený graf medzibankovej siete. Predpokladáme, že banka rozdelí svoje expozície voči iným bankám úmerne podľa ich veľkosti.

Hoci generovanie medzibankovej siete pomocou náhodných grafov patrí tiež k zaužívanej praxi, nie sme si vedomí inej publikácie, ktorá by do medzibankových sietí okrem bezškálovosti prinášala aj často pozorovanú vlastnosť malého sveta, v čom vidíme aj prínos tejto práce.

3.2.1 Výstavba algoritmu

1. Bezškálový graf s vlastnosťou malého sveta

Z druhej kapitoly vieme, že mnoho národných medzibankových sietí je bezškálových, t.j. obsahujú veľa vrcholov, ktoré majú malý stupeň a malý počet vrcholov s vysokými stupňami, ktoré rozdeleniu stupňov vytvárajú ťažké chvosty. Bezškálové siete sa zároveň vyznačujú nízkou priemernou vzdialenosťou a nízkym koeficientom zhukovania (pozri Kap. 2.1.4). Zároveň sme však mohli pozorovať aj vlastnosť malého sveta, ktorú do sietí vnášalo práve viacero vrstiev bánk - vrstva s niekoľkými centrálnymi, veľmi dobre navzájom prepojenými, a ďalšia vrstva ostatných bánk na periférii, ktoré mali expozičné len voči centrálnym. Tieto siete však, hoci tiež vynikajú nízkou priemernou vzdialenosťou, vykazujú vysoký priemerný koeficient zhukovania narozdiel od bezškálových sietí. Jeho príčinou sú práve zhuky vysoko prepojených vrcholov. Ich rozdelenie stupňov sa taktiež líši, „malé svety“ nemajú bezškálové rozdelenie, ale zvonové so špicom okolo priemerného stupňa.

Bezškálové siete	Malé svety
nízka priemerná vzdialenosť	nízka priemerná vzdialenosť
nízky koeficient zhukovania	vysoký koeficient zhukovania
rozdelenie stupňov 	rozdelenie stupňov 

Tabuľka 3: Vlastnosti bezškálových sietí a sietí s vlastnosťou malého sveta. Zdroj: [2]

Ako teda generovať sieť, ktorá bude niesť niektoré charakteristiky bezškálových sietí a niektoré sietí s vlastnosťou malého sveta (vysoký koeficient zhukovania, nízka prie-

merná vzdialenosť, bezškálové rozdelenie stupňov)? Na namodelovanie danej kombinácie sieťových vlastností použijeme algoritmus podľa Klemma a Eguíla [44], ktorý kombinuje vysokú mieru zhlukovania s prednostným napájaním (*preferential attachment*) bezškálového modelu. Pomocou parametru μ sa totiž určuje, či sa vrchol pripojí k niektorému „aktívnemu“ vrcholu (medzi aktívnymi sa algoritmus snaží udržať vrcholy s vyššími stupňami, buduje zhluky) alebo „neaktívnemu“ (na základe prednostného napájania pravdepodobnosť výberu daného vrcholu závisí úmerne od stupňa vrcholu; buduje huby) [31], [44].

Výslednú maticu susednosti si označíme ako maticu A . Algoritmus vyzerá nasledovne:


```

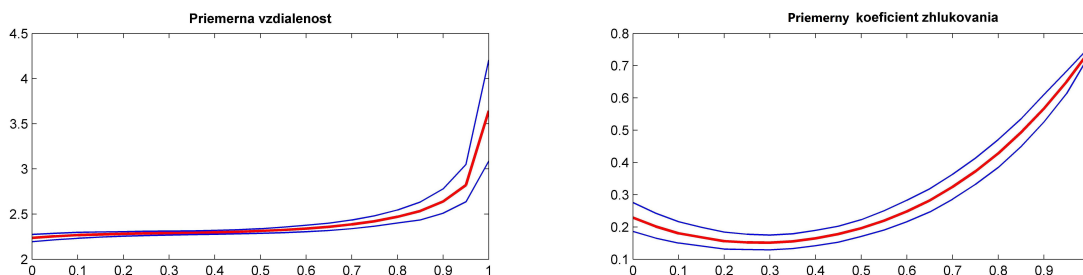
Aktivne_vrcholy = {1, 2, ..., m}
Neaktivne_vrcholy = ∅
inicializuj maticu A
for  $i = 1$  až  $m$  do
    for  $j = i+1$  až  $m$  do
        | vytvor v matici A hrany  $i \rightarrow j, j \rightarrow i$ 
    end
end
for  $i = m+1$  až  $N$  do
    for všetky  $j$  v Aktivne_vrcholy do
        |  $chance =$  rovnomerná náhodná premenná z intervalu  $[0,1]$ 
        if  $\mu > chance$  or Neaktivne_vrcholy = ∅ then
            | vytvor v matici A hrany  $i \rightarrow j, j \rightarrow i$ 
        else
            while  $j$ -ta hrana nie je vytvorená do
                | náhodne zvol  $j$  spomedzi Neaktivne_vrcholy
                |  $chance =$  rovnomerná náhodná premenná z intervalu  $[0,1]$ 
                |  $E =$  sum(stupne všetkých Neaktivne_vrcholy)
                |  $k_j =$  stupeň vrcholu  $j$ 
                if  $k_j/E > chance$  then
                    | vytvor v matici A hrany  $i \rightarrow j, j \rightarrow i$ 
                end
            end
        end
    end
    pridaj  $i$  do Aktivne_vrcholy
    while nie je vybratý vrchol, ktorý bude deaktivovaný do
        | náhodne zvol  $j$  z Aktivne_vrcholy
        |  $k_j =$  stupeň vrchola  $j$ 
        |  $pd = (1/k_j)/\text{sum}(1/k_j)$ 
        |  $chance =$  rovnomerná náhodná premenná z intervalu  $[0,1]$ 
        if  $pd > chance$  then
            | odstráň  $j$  z Aktivne_vrcholy
            | pridaj  $j$  do Neaktivne_vrcholy
        end
    end
end

```

Algoritmus patrí k tzv. rastúcim, t.j. postupne rastie počet vrcholov grafu. Po celý čas sú vrcholy rozdelené do dvoch množín - na aktívne a neaktívne. Na začiatku sa

vytvorí kompletný graf prvých m vrcholov, ktoré označíme za aktívne. Zvyšné $N - m$ sa pridávajú postupne po jednom. V každej iterácii pridania vrcholu sa deje nasledovné: (i) Novému vrcholu sa vytvára m hrán, s pravdepodobnosťou μ vznikne hrana s vrcholom zo zoznamu aktívnych vrcholov¹³, s pravdepodobnosťou $1 - \mu$ s niektorým z neaktívnych vrcholov. (ii) Nový vrchol sa pridá medzi aktívne. (iii) Jeden z aktívnych vrcholov sa stane neaktívnym, pričom náchyľnejšie na deaktivovanie sú vrcholy s nižším stupňom.

Obmieňaním μ sa model pohybuje medzi bezškálovým modelom a modelom s vysokým koeficientom zhľukovania, pozri Obr. 15. Ak $\mu = 0$, nový vrchol spájame s neaktívnymi vrcholmi podľa prednostného napájania a dostávame model Barabásiho a Alberta [2], pre ktorý je príznačná nízka priemerná vzdialenosť a nízky priemerný koeficient zhľukovania. Ak $\mu = 1$, vrchol napájame na všetky aktívne vrcholy, ktoré sú medzi sebou úplne prepojené, tvoria zhľuk a tak prispievajú k vyššiemu priemernému koeficientu zhľukovania, pričom priemerná vzdialenosť sa stále zachováva nízka.



Obr. 15: Správanie siete Klemma a Eguíluz [44] pre $N = 100$, $m = 5$ v závislosti od parametra μ . Pre každú hodnotu parametra generované $1000 \times$, červená predstavuje priemer z nich, modré 5%-né a 95%-né kvantily. Priemerný koeficient zhľukovania stúpa s narastajúcim parametrom μ , kým priemerná vzdialenosť ostáva nízka (hodnoty v intervale (2,4) sú stále relatívne nízke voči počtu vrcholov $N = 100$). Zdroj: autorove výpočty

2. Usmernenie hrán siete

Získali sme maticu A , ktorá je maticou susednosti pre bezškálovú sieť, ale s vyššou mierou zhľukovania ako v Barabásiho a Albertovom modeli [2]. Následne je potrebné hrany v grafe orientovať. Požadujeme, aby pre každú dvojicu vrcholov, medzi ktorými existuje hrana v matici A , ostal aj šíp, prinajmenšom jedným smerom. Podľa centrálnu-periférneho modelu vykazujú veľké banky zväčša väčší počet spojení, sú veľmi dobre

¹³to, čo tu označujeme ako μ , Klemm a Eguíluz označujú v [44] ako $1 - \mu$

prepojené medzi sebou a malé banky majú spojení menej, pričom obchodujú najmä s veľkými bankami. Tento stupňovitý systém sa môže z krajiny na krajinu líšiť napr. tým, či majú veľké banky expozície aj voči malým bankám, alebo či existujú expozície aj medzi malými bankami. Keďže táto štruktúra vzťahov je kľúčová pre verné zobrazenie reality bankového systému, nahliadli sme aj do reálnych údajov z NBS. Pre slovenskú sieť bánk platí, že veľké banky majú veľa prichádzajúcich šípov, t.j. veľa bánk má voči nim pohľadávky. Na základe toho sa budeme rozhodovať o orientácii šípu nasledovným spôsobom: Nech hrana spája v matici A vrcholy i, j . Čím menej má vrchol i , na ktorý sa pri danej hrane v matici A pozeráme (voľba vrchola nie je nijak vychýlená, rozhodli sme sa prezerat' dolnú trojuholníkovú maticu matice A , keďže je symetrická), hrán s inými vrcholmi, tým vyššia je pravdepodobnosť, že sa zachová z neho vychádzajúci šíp z i do j . Ak šíp z i do j vznikne, ešte stále môže vzniknúť aj v opačnom smere. Ak však tento šíp nevznikne, v opačnom smere z j do i vzniká automaticky, aby sa tak hrana zachovala aspoň jedným smerom. Informácie o existencii jednotlivých šípov orientovaného, ešte neohodnoteného grafu budeme zapisovať do matice C , maticu B si rezervujeme na iný typ grafu, ktorý spomenieme neskôr.

```

inicializuj maticu  $C$ 
zisti stupeň každého vrcholu
for každú hranu v matici  $A$ , ktorá existuje do
    if ak si sa už pozeral na dvojicu vrcholov  $i, j$  then
        | stop
    end
     $k^{out} =$  stupeň vrcholu  $i$ 
     $p = 1/k^{out}$ 
     $chance =$  rovnomerná náhodná premenná z intervalu  $[0,1]$ 
    if  $p > chance$  then
        | vytvor v matici  $C$  šíp  $i \rightarrow j$ 
    end
    if šíp  $i \rightarrow j$  v matici  $C$  nevznikol then
        | vytvor v matici  $C$  šíp  $j \rightarrow i$ 
    else
        |  $k^{out} =$  stupeň vrcholu  $j$ 
        |  $p = 1/k^{out}$ 
        |  $chance =$  rovnomerná náhodná premenná z intervalu  $[0,1]$ 
        | if  $p > chance$  then
            | vytvor v matici  $C$  šíp  $j \rightarrow i$ 
        | end
    end
end

```

3. Priradenie údajov o bankách

V nasledujúcom kroku vrcholom vytvoreného orientovaného grafu priradíme charakteristiky konkrétnych bánk z Tab. 1 z prvej kapitoly. Každému vrcholu sa priradí banka daná trojicou pozostávajúcou z aktív, vlastných zdrojov a kapitálovej primeranosti. Tieto údaje sú dôležité pre simulácie finančných šokov vo štvrtej kapitole, nakoľko sa podieľajú na výpočte solventnosti, príp. nesolventnosti banky.

Okrem toho priradíme ku každej banke aj objem celkových medzibankových expozícií, ktorý sa zadá ako určitý podiel aktív banky. K dispozícii máme inverznú distribučnú funkciu podielu expozícií voči domácim bankám k aktívam banky (Obr. 16), na ktorej môžeme vidieť, že slovenské banky sú vystavené iným slovenským bankám v hodnote do 14% svojich aktív.



Obr. 16: Podiel objemu expozícií voči slovenským bankám k celkovým aktívam bánk, vytvorené na základe dlhodobých dát. Zdroj: NBS.

Algoritmus zoradí najskôr vrcholy podľa prichádzajúceho stupňa, od vrcholov s najvyšším prichádzajúcim stupňom až po vrcholy s najnižším. Takisto zoradíme aj aktíva bánk. V každej iterácii prislúchajúcej priradeniu banky vrcholu algoritmus ponúka vrcholu zostávajúce aktíva, začínajúc od najväčších. T.j. prvou v poradí je banka s najvyšším počtom prichádzajúcich šípov. Jej budú ponúknuté najvyššie aktíva, ktoré prijme s pravdpodobnosťou $\frac{aktva}{maximlnedostupnaktvum} \times w$. W predstavuje škálovací parameter; čím nižšia je jeho hodnota, tým dlhšie môže trvať, kým sa danému vrcholu priradia aktíva. Ak vrchol neprijme prvé ponúknuté aktíva, budú mu ponúknuté ďalšie, stále nižšie. V okamihu, kedy sa k vrcholu priradia aktíva, sa priradia aj ostatné charakteristiky danej banky.

```

načítaj Aktiva, Vlastne_zdroje, Kapitalove_primeranosti
Distribucna_funkcia = inverzná distribučná funkcia podielu expozícií k aktívam
Zoradene_vrcholy = zoradené vrcholy grafu daného maticou susednosti C podľa
                    prichádzajúceho stupňa, od najvyššieho po najnižší
Zoradene_aktiva = zoradené Aktiva od najväčších po najmenšie
for všetky Zoradene_vrcholy do
    Max_aktivum = najväčšie aktívum v Zoradene_aktiva
    j = 1
    while nie sú priradené k vrcholu aktíva do
        p = Zoradene_aktiva(j)/Max_aktivum × w
        chance = rovnomerná náhodná premenná z intervalu [0,1]
        if p > chance then
            priraď vrcholu aktíva Zoradene_aktiva(j)
            odstráň Zoradene_aktiva(j) zo Zoradene_aktiva
        else
            j = j + 1
            if j > počet prvkov v Zoradene_aktiva then
                | j = 1
            end
        end
    end
    h = rovnomerná náhodná premenná z intervalu [0,1]
    Podiel_expozicii = Distribucna_funkcia(h)
    Celkove_expozicie = aktíva vrcholu × Podiel_expozicii
    priraď vrcholu vlastné zdroje z Vlastne_zdroje prislúchajúce aktívam vrcholu
    priraď vrcholu kapitálovú primeranosť z Kapitalove_primeranosti prislúchajúcu aktívam
    vrcholu
end

```

4. Ohodnotenie expozícií

V záverečnom kroku algoritmu oceníme jednotlivé šípy. Pre každú banku poznáme jej celkové expozície voči ostatným bankám, t.j. súčet expozícií jej odchádzajúcich šípov. Pre jednoduchosť ich prerozdélite v pomere aktív bánk, voči ktorým má banka expozície. Čím vyššia je hodnota aktív banky, tým vyšší objem úverov alebo vkladov jej poskytla iná banka zo svojich medzibankových expozícií. Tento spôsob prerozdelenia objemu expozícií je celkom pochopiteľný - banka sa poskytnutím úveru alebo vkladu do inej banky vystavuje riziku, že protistrana jej pohľadávku v prípade zlyhania nemusí

vrátiť, preto väčšie expozície má voči bankám s vyššími aktívami.

V poslednom kroku tak vznikne graf, ktorý je orientovaný aj vážený. Hodnoty jeho expozícií zapíšeme do matice susednosti D .

```

inicializuj maticu  $D$ 
for všetky banky  $i$  do
     $Susedia$  = zoznam bánk, do ktorých vedú z  $i$  jej vychádzajúce šípy
     $Aktiva\_susedov$  = vektor prislúchajúcich aktív bánk v  $Susedia$ 
    for všetky banky  $j$  v  $Susedia$  do
        | vytvor v  $D$  šíp  $i \rightarrow j$  = aktíva banky  $i \times (Aktiva\_susedov(j)/sum(Aktiva\_susedov))$ 
    end
end

```

Pre úplnosť typov grafov zavedieme aj maticu B , ktorá pre každú dvojicu bánk i, j sčítava výšku expozícií v oboch smeroch, t.j.

$$b_{ij} = d_{ij} + d_{ji}, \quad (14)$$

čím sa matica stáva symetrickou a reprezentuje neorientovaný, ohodnotený graf. V priebehu algoritmu sme tak vytvorili 4 typy grafov zadaných štyrmi maticami susednosti, na ktorých budeme kalibrovať parametre:

- sieť typu A - reprezentuje neorientovaný, neohodnotený graf daný maticou A
- sieť typu B - reprezentuje neorientovaný, ohodnotený graf daný maticou B
- sieť typu C - reprezentuje orientovaný, neohodnotený graf daný maticou C
- sieť typu D - reprezentuje orientovaný, ohodnotený graf daný maticou D.

3.2.2 Kalibrácia parametrov

V nasledujúcej podkapitole stanovíme vhodné parametre uvedeného algoritmu, pomocou ktorých budeme generovať matice bilaterálnych expozícií. Hoci sme medzibankovú sieť predstavili ako posledný typ siete, t.j. orientovanú a ohodnotenú sieť, v prehľade statickej analýzy iných krajín v Kap. 2.2 sme uviedli aj štúdie, ktoré pracovali s medzibankovým systémom ako s neorientovanou či neohodnotenou sieťou. Navyše, niektoré

vlastnosti siete s orientovanými šípami nie sú relevantné (napr. priemerná vzdialenosť vzhľadom na skutočnosť, že nemusí existovať cesta medzi všetkými vrcholmi v zmysle vzťahu definovanom v Prílohe A).

Hodnoty vlastností generovaných sietí budeme porovnávať s hodnotami vlastností počítaných na skutočných slovenských medzibankových expozíciách a s hodnotami z analýz iných národných publikácií, ktoré sú zhrnuté v Tab. 2. Cieľom je nájsť parametre μ (koriguje pohyb algoritmu medzi bezškálovou sieťou a sieťou s vlastnosťou malého sveta), m (počiatočný počet vrcholov siete, ktoré tvoria kompletný graf) a w (škálovací koeficient pri priradení aktív k vrcholu), ktoré vyhovujú dôležitým charakteristikám.

Na Obr. 18 môžeme sledovať závislosť kľúčových charakteristík siete od vstupných parametrov μ a m . Parameter w vlastnosti významne neovplyvňuje (pozri Prílohu B). Zvolili sme hodnotu 0.9, nakoľko vyššie hodnoty prispievajú k vyššej pravdepodobnosti (a tým aj rýchlejšiemu) priradeniu aktív.

Priemernú vzdialenosť vrcholov budeme sledovať prostredníctvom neorientovanej, neohodnotenej siete (odbúravajúc tak problém existencie cesty medzi každou dvojicou vrcholov). V literatúre sa často uvádzajú hodnoty okolo 1-2, aj v iných reálnych štruktúrach. Na Obr. 18 vidíme, že μ výrazne nekolíše, s hodnotu do 2. Vzhľadom na slovenský výsledok 1.721 by bolo vhodné zvoliť $\mu \approx 0.5$ a $m \geq 2$.

Priemerné koeficienty zhlukovania sledujeme na všetkých štyroch typoch sietí. Môžeme si všimnúť, že platí Klemmovo a Eguílovo „čím vyššia hodnota μ , tým vyšší je koeficient zhlukovania“. Pre neorientované siete A, B sa v slovenských pomeroch nachádzajú priemerne blízko hodnoty 40%, v Českej republike v r. 2012 klesol k 35%. Tieto hodnoty pokrýva náš algoritmus najlepšie pre hodnotu $m = 2$ ($m > 2$ tieto typy sietí nadobúdajú príliš vysoké hodnoty koeficientu zhlukovania) a opäť $\mu \approx 0.5$, čo vyhovuje aj priemerným koeficientom zhlukovania v ohodnotených grafoch typu C, D.

O exponentoch bezškálovej distribučnej funkcie (prichádzajúcich a odchádzajúcich) stupňov sme v Kap. 2.2 uviedli, že v Rakúsku sa pohybovali v rozmedzí -3.11 až -0.69, príp. ESRB okolo -3. Slovenské expozície však vykazujú len slabú bezškálovú závislosť, čo však môže byť dané aj malým počtom vrcholov. Pre hodnoty slovenského systému však $m = 2$ a $\mu \approx 0.5$ opäť vyhovujú.

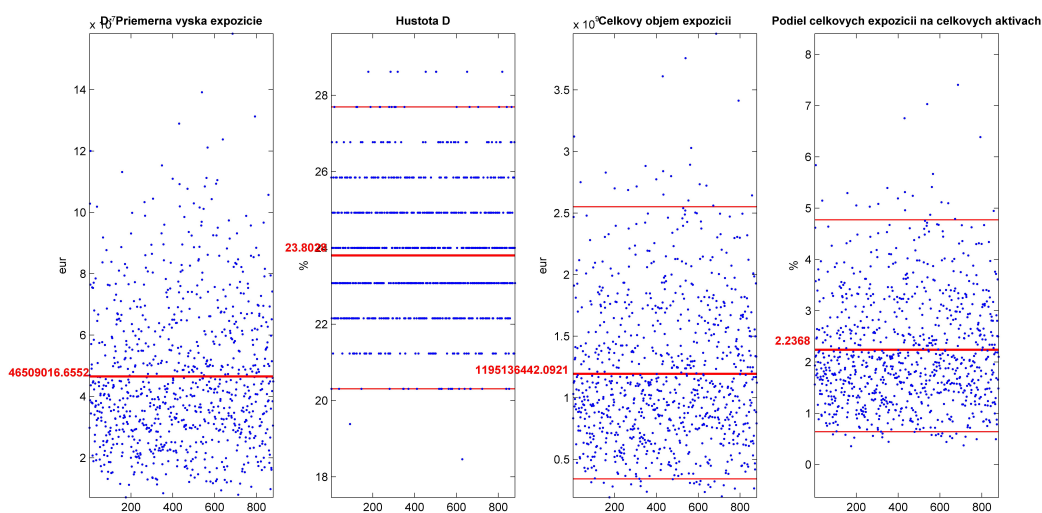
Charakteristika	Priemerná hodnota
A: priem. vzdialenosť	1.721
A: priem. koeficient zhlukovania	0.406
B: priem. koeficient zhlukovania	0.430
C: alfa (prichádzajúce stupne)	-0.446
C: alfa (odchádzajúce stupne)	-0.546
C: priem. koeficient zhlukovania	0.202
D: priem. koeficient zhlukovania	0.072

Tabuľka 4: Kľúčové charakteristiky reálnej slovenskej medzibankovej siete. Zdroj: NBS.

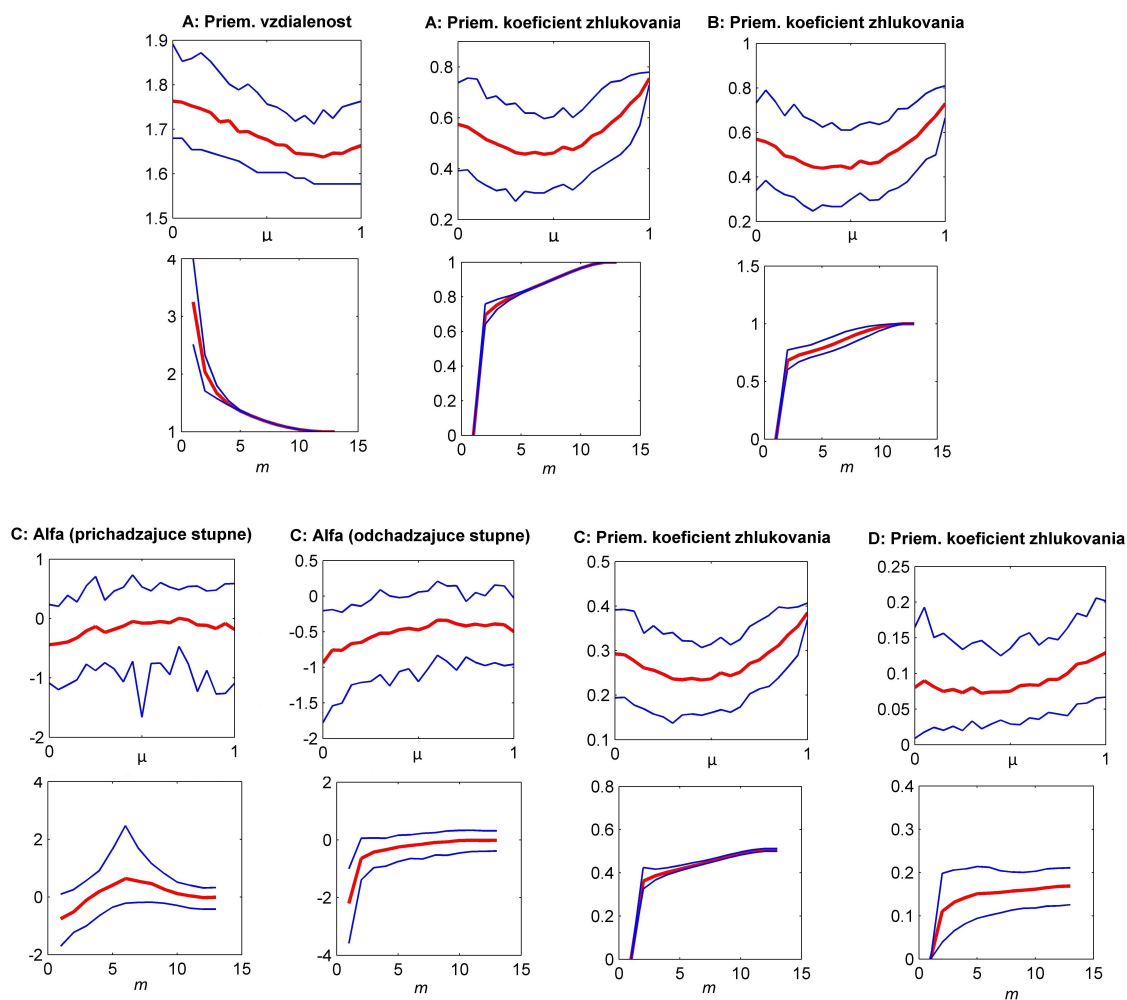
Po rozsiahlych simuláciách s rôznymi kombináciami parametrov sme sa priklonili k hodnotám $m = 3$, $\mu = 0.5$ a $w = 0.9$, v Prílohe B sa nachádza ukážka simulácií s týmito parametrami.

Na Obr. 17 možno pozorovať ďalšie charakteristiky sietí. Vygenerované siete majú priemerne hustotu siete 24% (slovenská reálna sieť 27%), celkový objem expozícií všetkých bánk okolo 1.2 mld., ktorý tvorí priemerne 2.2% celkových aktív bánk. Poznajme, že priemerná hodnota expozície je približne 6-krát vyššia, čo je spôsobené inverznou distribučnou funkciou použitou v Kap. 3.2, ktorá bola zostavená na základe dlhšieho obdobia, kedy expozície nadobúdali vyššie podiely bankových aktív. V skutočnosti tak predpokladáme niekoľkonásobne vyššie prepojenia medzi bankami, čo spôsobí, že aj výsledky analýzy šírenia nákazy v nasledujúcej kapitole budú zodpovedať náročnejším podmienkam ako v skutočnosti v súčasnosti sú.

V tejto kapitole sme našli vyhovujúcu kombináciu vstupných parametrov matice bilaterálnych expozícií, ktoré budeme používať pre jej generovanie aj v nasledujúcej kapitole dynamickej analýzy.



Obr. 17: Charakteristiky vygenerovanej siete typu D (pre $m = 2$, $\mu = 0.5$, $w = 0.9$), zľava: priemerná výška expozície, hustota siete, celkový objem expozícií v sieti, podiel celkových expozícií na aktívach bánk.



Obr. 18: (hore) Skutočné hodnoty vypočítané na údajoch z NBS, viac v Prílohe B. (dole) Závislosť sietí typu A, B, C, D od parametra μ (pre $m = 3$, $w = 0.9$) a m (pre $\mu = 0.7$, $w = 0.9$). Pre rôzne hodnoty parametra generované $1000\times$, červená je priemer z nich, modré 5%-né a 95%-né kvantily.

4 Dynamická analýza

Táto kapitola prezentuje výsledky simulácií v snahe odhaliť možné šírenie nákazy v slovenskom medzibankovom priestore prostredníctvom kreditného kanálu. Pri simuláciách využívame mnohonásobné generovanie sietí bánk a k nim prislúchajúcich matíc bilaterálnych expozícií pomocou vlastného algoritmu, ktorý sme popísali v Kap. 3.2.

Cieľom je otestovať odolnosť siete voči šíreniu nákazy v podobe idiosynkratického šoku (bankrotu jednej banky na úvod, ktorého dôvod neskúmame), kvantifikovať jeho dosah a skúmať správanie siete v závislosti od vstupných parametrov. Citlivostná analýza nám poskytne pohľad na medzibankovú sieť v rôznych podmienkach, ktoré môžu predstavovať obdobie krízy či inej záťaže. Na záver pridáme banke do modelu aj možnosť reagovať neistotou ohľadom vyplatenia jej pohľadávky veriteľom, čo predpokladáme, že zvýši nákazu v sieti.

Dynamická analýza medzibankovej siete je dôležitým nástrojom na skúmanie odolnosti siete voči náказe. Statická analýza štruktúry siete síce popisuje vzťahy medzi jednotlivými bankami, nevie však dostatočne zachytiť zraniteľnosť bankového systému, keďže do nej nevstupujú kapitálové ukazovatele banky ako napr. kapitálová primeranosť. Tá predstavuje podiel vlastného kapitálu k rizikovo váženým aktívam banky, t.j. primeranosť vlastných zdrojov banky vzhľadom na rizikovosť aktív, ktoré banka vlastní [12]. Skúmanie dynamického systému medzibankových expozícií v stresových situáciách navyše prispieva k lepšiemu pochopeniu tzv. systémového rizika, t.j. „rizika rozsiahleho zlyhania finančného sprostredkovania prostredníctvom domino efektov nesolventnosti“ [17]. Práve vzájomná prepojenosť finančných inštitúcií je kľúčovým komponentom systémového rizika [15].

V Kapitole 4 najskôr predstavíme model a jeho rozšírenia, s ktorými budeme pracovať, uvedieme predpoklady, ktoré použijeme, objasníme algoritmus a napokon zhodnotíme výhody a nevýhody modelov. V druhej podkapitole uvedieme výsledky všetkých troch modelov a naše závery.

4.1 Model šírenia nákazy

V práci budeme simulovať zlyhania bánk prostredníctvom **základného modelu (A)** (modeluje šírenie nákazy kreditným kanálom bez možnosti reakcie bánk), na ktorý následne nadviažeme v **preškálovanom modeli (B)**, kde všetky expozície preškálujeme, a napokon základný model rozšírime o možnosť šírenia neistoty medzi bankami v podobe **rozšíreného modelu s neistotou (C)**, kde banky reagujú v prípade, že majú expozíciu voči banke, ktorá bola zasiahnutá nákazou (ale nezlyhala).

Každý z modelov ponúka iný pohľad na medzibankovú sieť: Základný model zachytáva iba jediný vplyv nákazy, a to prostredníctvom pohľadávok medzi bankami, ktorého dopad má za cieľ preskúmať, kvantifikovať. Preškálovaný model skúma sieť v podmienkach, ktoré boli napríklad vlastné slovenskému medzibankovému systému v obdobiach pred krízou. A nakoniec, rozšírený model dopĺňa pohľad základného modelu, kde banky môžu reagovať neistotou, či im bude splatená celá výška expozície bankou oslabenou zásahom nákazy.

V základnom modeli budeme používať nasledovné predpoklady:

1. Banky zlyhávajú iba prostredníctvom expozícií voči iným bankám, pozostávajúcich z vkladov a úverov. Nezahŕňame sem napr. riziko súvisiace s likviditou či inými aktívami banky.
2. Nákaza sa šíri v krátkom časovom horizonte, preto banky na náказu nijako nereagujú pred ani po zasiahnutí (napr. zvyšovaním kapitálu v snahe udržať si kapitálovú primeranosť nad regulátormi požadovanou hodnotou). Takisto ani regulátori do systému nezasahujú. Tento predpoklad slúži na zjednodušenie modelu, v praxi však je snaha regulátorov konať ešte pred samotným bankrotom banky [1].
3. Strata v prípade zlyhania (LGD) v modeli nadobúda hodnoty 100%, 50% a 25% a je pre všetky banky konštantná. V skutočnosti do LGD vstupuje mnoho faktorov, napr. administratívne výdavky spojené s bankrotom banky, dane, vyplatenie mzdy, atď. a nie je vôbec jednoduché to odhadnúť [1].

4. Netovanie medzibankových expozícií a záväzkov nie je povolené¹⁴.
5. Do modelu nezahrňame centrálnu banku, pobočky zahraničných bánk¹⁵ ani zahraničné banky. Hoci pád banky zapríčinený zahraničnou bankou nie je v realite vylúčený, jeho modelovanie si vyžaduje dodatočné informácie a našim cieľom bolo sledovať výlučne vzťahy medzi slovenskými bankami.

4.1.1 Parametre modelu

Vstupnými parametrami vo všetkých troch modeloch sú:

- X - vopred vygenerovaná matica bilaterálnych expozícií
 - N - počet bánk
 - m - úvodný počet bánk tvoriaci kompletný graf
 - μ - smeruje model k bezškálovej sieti či sieti s vysokým koeficientom zhukovania
 - w - škálovacia váha pri priradovaní aktív
 - s - škálovací faktor expozícií, ak $s \neq 1$, nastáva model (B)
- *Aktiva*, *Vlastne_zdroje*, *Kapitalova_primeranost*, *Rizikovo_vazene_aktiva* prislúchajúce každej banke
- *Iniciator_soku* - banka, ktorá prvá zlyhá v dôsledku externých vplyvov
- *LGD* - strata v prípade zlyhania, vystupuje ako LGD%-tný podiel expozície

Rizikovo vážené aktíva sme si v našom prípade dorátavali ako podiel vlastných zdrojov a kapitálovej primeranosti.

¹⁴zníženie záväzku banky i voči banke j o záväzok banky j voči i , uvádzajú sa teda celé výšky expozícií, nie rozdiely

¹⁵Pobočky zahraničných bánk v Slovenskej republike nemajú kapitál, viac v Kap. 1.2

4.1.2 Schéma modelu

Model postupuje nasledovne: Najskôr sa určí jedna banka, ktorá zlyhá na základe exogénneho vplyvu, ktorý nami nie je bližšie špecifikovaný, a iniciuje prípadné ďalšie bankroty. Zistíme, ktoré banky voči nej majú expozíciu, tie totiž prichádzajú o svoju pohľadávku (či v plnej výške, alebo len o jej časť, rozhoduje parameter $LG D$). Sumu expozície, o ktorú prišli, odpíšu z vlastných zdrojov banky. Nanovo sa vypočítajú rizikovo vážené aktíva (odpočítame z nich celú expozíciu s rizikovou váhou 20%¹⁶) a následne aj kapitálová primeranosť¹⁷ ako pomer vlastných zdrojov k rizikovo váženým aktívam. Ak niektorej zasiahnutej banke klesla kapitálová primeranosť pod tretinu regulátormi stanovenej hranice 8%, banka bankrotuje.

```

načítaj Vlastne_zdroje, Rizikovo_vazene_aktiva, Kapitalova_primeranost bánk
načítaj maticu bilaterálnych expozícií X
bankrot banky Iniciator_soku
while počet bánk, ktoré skrachovali v poslednej iterácii > 0 do
  ZasiahnuteBanky = banky, ktoré majú expozície voči bankám, ktoré skrachovali v
  poslednej iterácii
  ZasiahnuteExp = expozície v X, ktoré majú iné banky voči ZasiahnuteBanky
  Vlastne_zdroje = Vlastne_zdroje -  $LG D \times \text{sum}(ZasiahnuteExp)$ 
  Rizikovo_vazene_aktiva = Rizikovo_vazene_aktiva -  $0.2 \times \text{sum}(ZasiahnuteExp)$ 
  Kapitalova_primeranost = Vlastne_zdroje / Rizikovo_vazene_aktiva
  for všetky ZasiahnuteBanky do
    if Kapitalova_primeranost <  $0.08/3$  then
      | banka bankrotuje
    end
  end
end

```

Tretí model (C) má v sebe zabudovanú aj reakciu na podozrenie z nevyplatenia celej expozície zasiahnutou bankou. V algoritme je nutné pamätať si aj banky, ktoré boli zasiahnute nákazou (t.j. niektorý ich veriteľ zbankrotoval), ale ony samé nezlyhali. V modeli predpokladáme, že ich reakciou je odpísanie si časti expozície z vlastných

¹⁶riziková váha stanovená na medzibankové expozície vo väčšine prípadov v hodnote 20% Nariadením (EU) 575/2013 Európskeho parlamentu a Rady, čl. 120

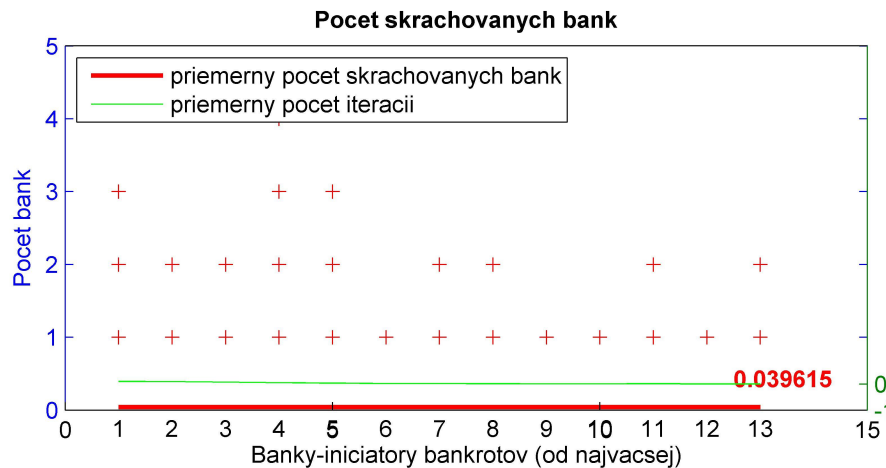
¹⁷viac sa kapitálovej primeranosti venuje [12]

zdrojov, ktorá predstavuje pomer, o koľko poklesla kapitálová primeranosť veriteľa banky.

4.2 Výsledky

V tejto časti predstavíme výsledky našich simulácií. Zakaždým sme vygenerovali 1000 sietí, pričom v každej sieti postupne po jednom zlyhala každá z 13 bánk v dôsledku exogenného vplyvu, počet scenárov bol teda 13 000. Matice bilaterálnych expozícií sme generovali so vstupmi definovanými v Kap. 3.2.1, t.j. $\mu = 0.5$, $m = 2$ a $w = 0.9$. Na väčšine grafov sme uplatnili zobrazenie v závislosti od úvodne zlyhaných bánk, zoradených od banky s najväčšími aktívami až po najmenšie banky. V tabuľkách okrem explicitne zadaných preškálovaných expozícií ($s = 2, 3$) uvažujeme základný (A) a rozšírený model s neistotou (B) ($s = 1$).

K analýze sme pristupovali z viacerých pohľadov. Na základnom modeli (A) uvedieme popis grafov a následne v tabuľkách porovnáme výsledky všetkých troch modelov (A), (B) a (C). Na záver predostrieme citlivostnú analýzu vzhľadom na parametre.



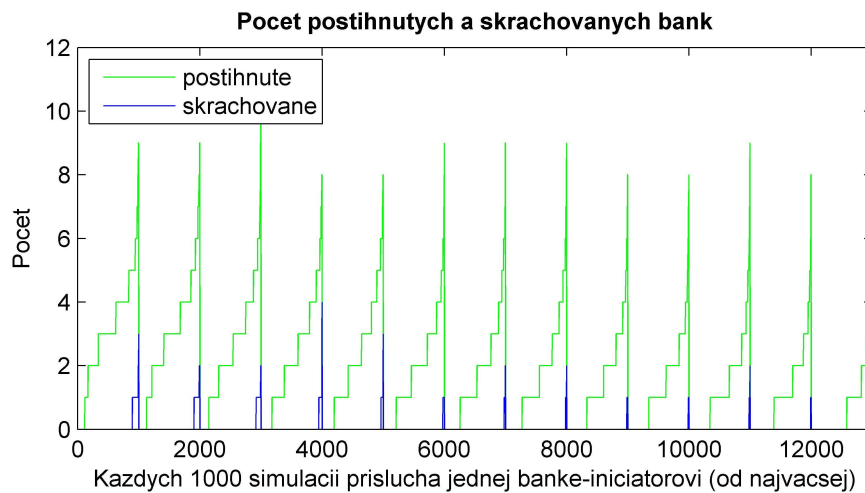
Obr. 19: Počet skrachovaných bánk v závislosti od veľkosti úvodne skrachovanej banky.

Na Obr. 19 je graf ukazujúci priemerný počet skrachovaných bánk pre model (A) ($s = 1$). Pre porovnanie uvádzame v Tab. 5 výsledky simulácií pre vyššie s (preškálovaný model (B)), s neistotou (rozšírený model (C)), príp. s inými parametrami vstupujúcimi do generovaných matíc bilaterálnych expozícií. V tabuľke môžeme nahliadnuť,

Priemerný počet skrachovaných bánk		
Parameter	Bez neistoty	S neistotou
$s = 1$	0.0396	0.0428
$s = 2$	0.1503	0.1822
$s = 3$	0.2872	0.3831
$LGD = 0.5$	0.0014	0.0020
$LGD = 0.25$	0	0
$\mu = 1$	0.0432	0.0452
$m = 6$	0.0285	0.0312

Tabuľka 5: Priemerný počet skrachovaných bánk s rôznymi vstupmi.

že model s neistotou (C) vždy poskytoval vyšší priemerný počet skrachovaných bánk, hoci počet bol pre akékoľvek hodnoty parametrov veľmi nízky. Takýto výsledok bol očakávateľný, nakoľko aj v literatúre sme sa stretávali s výsledkami svedčiacimi o malom dopade nákazy, napr. [23].



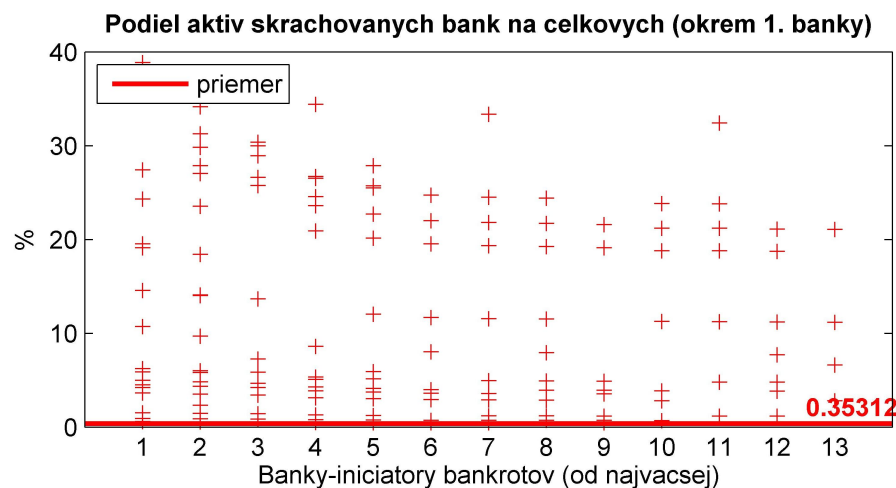
Obr. 20: Počet bánk zasiahnutých nákazov vs. počet skrachovaných bánk. Každá časť grafu predstavuje 1000 scenárov prislúchajúcich konkrétnej banke zlyhávajúcej na začiatku simulácií, zoradené od najväčšej banky po najmenšiu.

Na Obr. 6 sme skúmali rozsah nákazy v podobe pomeru bánk, ktoré v priebehu simulácií skrachovali, voči bankám, ktoré boli zasiahnute, t.j. utrpeli straty v dôsledku bankrotu jednej z jej protistrán. Predošlý výsledok nízkeho počtu skrachovaných bánk sa odráža aj na tejto štatistike s priemerným podielom 1.08% v prípade modelu (A).

Priemerný pomer skrachovaných a zasiahnutých bánk		
Parameter	Bez neistoty	S neistotou
$s = 1$	1.08%	1.15%
$s = 2$	3.92%	4.52%
$s = 3$	6.92%	8.48%
$LGD = 0.5$	0.04%	0.05%
$LGD = 0.25$	0%	0%
$\mu = 1$	1.32%	1.37%
$m = 6$	0.41%	0.45%

Tabuľka 6: Priemerný počet podiel skrachovaných bánk celkovo zasiahnutých bankách.

Vidíme, že $LGD = 25\%$ v základnom modeli nemá žiaden efekt na prenos nákazy v systéme.



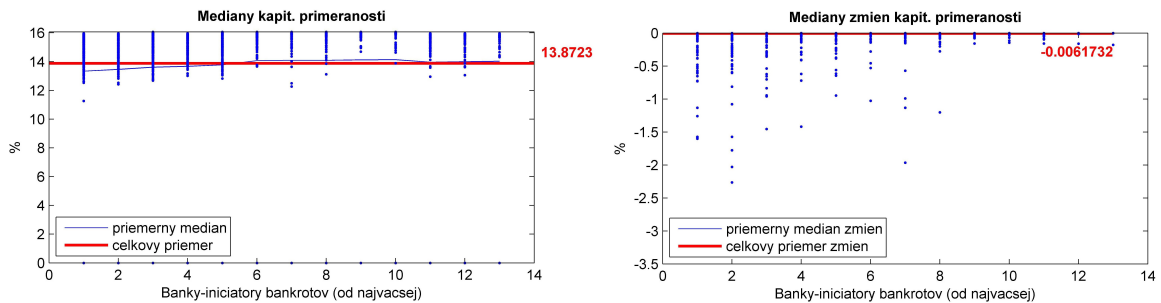
Obr. 21: Počet bánk zasiahnutých nákazov vs. počet skrachovaných bánk. Každá časť grafu predstavuje 1000 scenárov prislúchajúcich konkrétnej banke zlyhávajúcej na začiatku simulácií, zoradené od najväčšej banky po najmenšiu.

Obr. 21 vnášajú pohľad na charakter nákazy, ktorý bankroty jednotlivých bánk prinášajú. Môžeme tam spozorovať jemný trend, že čím je banka menšia, tým menšiu nákazu môže jej bankrot šíriť (v zmysle celkového objemu aktív následne zlyhaných bánk). Nízke hodnoty v Tab. 7 opäť napovedajú, že nákaza je v priemere veľmi nízka.

Obr. 22 prezentuje stav kapitálových primeraností po uskutočnení simulácie bankrotov. V Kap. 1.2 sme uviedli kapitálové primeranosti bánk pred začatím simulácií, ktoré

Podiel aktív skrachovaných bánk na celkových aktívach		
Parameter	Bez neistoty	S neistotou
$s = 1$	0.35%	0.38%
$s = 2$	1.28%	1.54%
$s = 3$	2.58%	3.39%
$LGD = 0.5$	0.001%	0.009%
$LGD = 0.25$	0%	0%
$\mu = 1$	0.38%	0.40%
$m = 6$	0.28%	0.31%

Tabuľka 7: Priemerný počet podiel skrachovaných bánk celkovo zasiahnutých bankách. Aktíva banky spôsobujúcej šok sa do celkových aktív nezaratávajú.



Obr. 22: (vľavo) Mediány kapitálových primeraností bankovej siete po každej simulácii, (vpravo) mediány zmien kapitálových primeraností bankovej siete po každej simulácii, zmeny o percentuálne body.

sa pohybovali v rozpätí 12.11%-20.56%, s výnimkou Slovenskej záručnej a rozvojovej banky s 49.41%, a ich medián bol 15.98%. Tabuľka 8 ukazuje, že po rozšírení nákazy sa priemerne medián pohyboval medzi 13%-14%, a to aj v prípade modelu s neistotou (C). Bohatšiu informáciu nám však prinášajú zmeny kapitálovej primeranosti. Môžeme vidieť, že zdvoj- až stonásobným výškou expozícií zmeny vykazujú oveľa vyšší nárast. Zavedením neistoty sa ich priemerný medián až zniekoľkonásobil, čo mohlo ovplyvniť veľké množstvo bánk a ich kapitálových primeraností.

Uvádzame ešte analýzu z pohľadu tzv. *bailing out*, kedy sú banky „zachraňované“ štátom alebo materskými bankami. Chceli sme preskúmať, koľko by stálo priemerne

Parameter	Mediány kap. primeraností		Mediány zmien kap. primeraností	
	Bez neistoty	S neistotou	Bez neistoty	S neistotou
$s = 1$	13.9%	13.8%	-0.006%	-0.035%
$s = 2$	13.7%	13.5%	-0.036%	-0.152%
$s = 3$	13.4%	13.1%	-0.105%	-0.38%
$LGD = 0.5$	13.8%	13.6%	-0.001%	-0.016%
$LGD = 0.25$	13.8%	13.8%	-0.001%	-0.007%
$\mu = 1$	15.8%	15.7%	-0.003%	-0.018%
$m = 6$	15.7%	15.6%	-0.011%	-0.079%

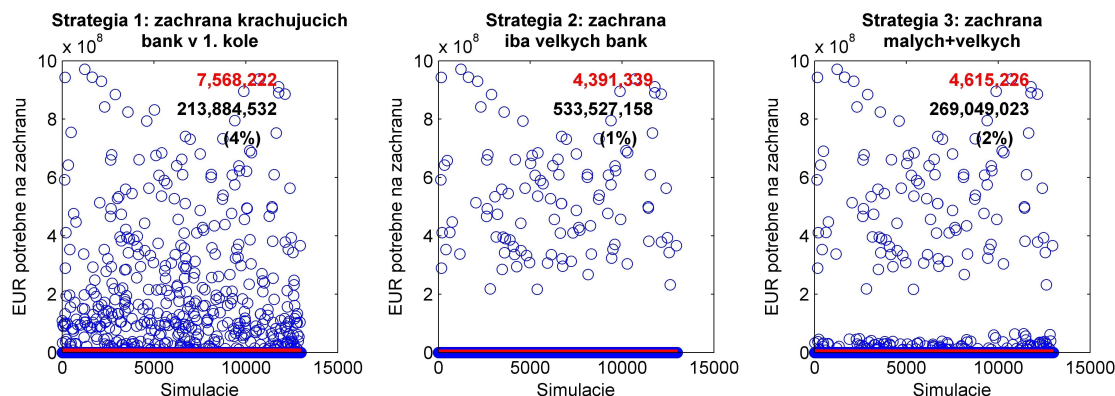
Tabuľka 8: Priemerné mediány kapitálových primeraností a zmien kapitálových primeraností po šírení nákazy, zmeny sú vyjadrené v percentuálnych bodoch.

štát, keby zachránil, t.j. dodal banke kapitál, aby dosiala kapitálovú primeranosť 8%,

1. všetky banky, ktorú budú krachovať
2. iba veľké banky (v našom prípade SĽSP, VÚB banka, Tatra banka)
3. veľké a malé banky (aktíva do 1 mld. eur), pretože tie môžu potencionálne byť spúšťačom nákazy pre veľkú banku.

Na Obr. 23 môžeme vidieť priemerné hodnoty objemu peňazí, ktoré by štát musel do bánk vložiť: červenou priemer všetkých scenárov, čiernou priemer iba tých scenárov, kde aj niektoré banky skrachovali (väčšina simulácií zahŕňala len samotný bankrot úvodnej banky). Môžeme vidieť, že v 4% prípadov, keď bolo treba zachraňovať nejaké banky, ako priemerne najlacnejšia stratégia sa prejavila stratégia záchrany všetkých bánk v prvej vlně bankrotov, ktoré tak zabránili ďalším bankrotom, aj napr. väčších bánk.

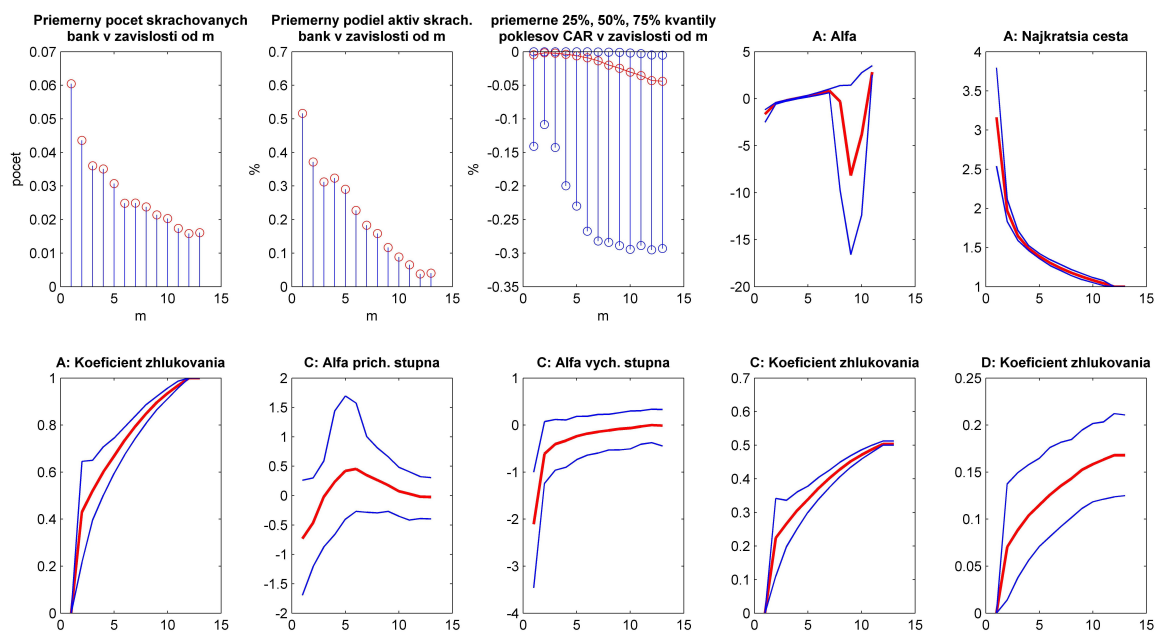
Na záver uvádzame citlivostnú analýzu vlastností siete zo statickej analýzy a informáciami získanými dynamickou analýzou. Na Obr. 24 môžeme vidieť, že čím kompletnejší je graf (m predstavuje počet vrcholov na začiatku stavby siete, ktoré budú medzi sebou úplne prepojené), tým nižší bol počet skrachovaných bánk v systéme. Hoci kapitálová primeranosť klesala s vyšším m taktiež, možno to interpretovať ako schopnosť siete lepšie absorbovať nákazu. Kapitálová primeranosť sa síce znížila a viac bánk utrpelo straty na vlastných zdrojoch, no hustejšia sieť prepojená spôsobila, že



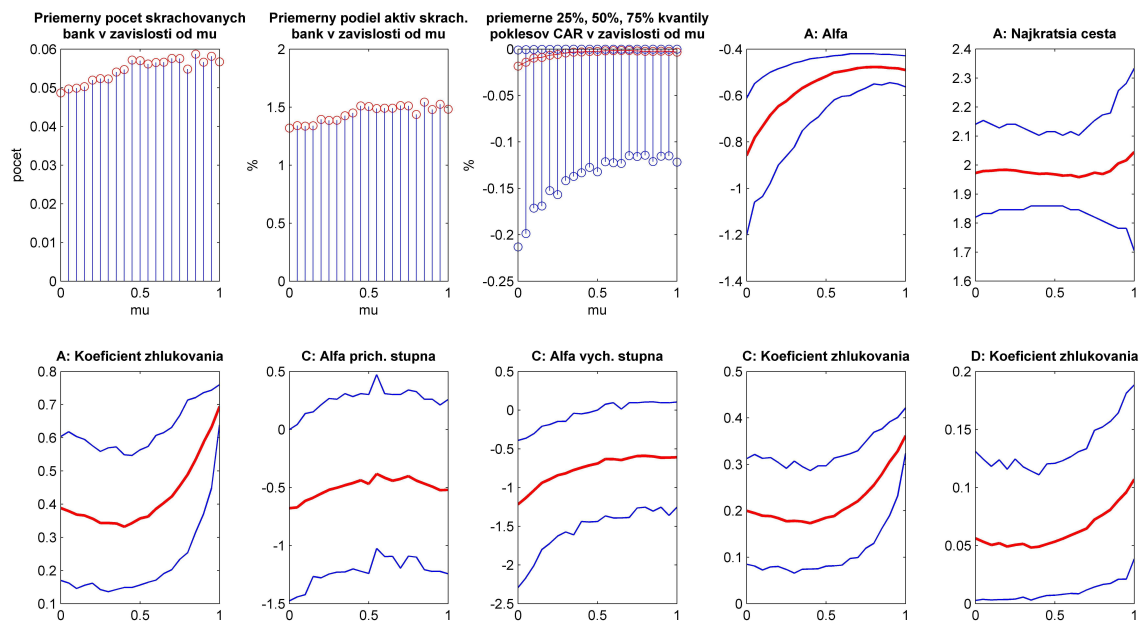
Obr. 23

celkové expozície bánk boli rozdelené medzi viacero protistrán, ich výšky klesli a preto sa jednotlivé expozície nestali tak toxickými ako v porovnaní s redšou sieťou expozícií medzi bankami.

Obrázok 25 však prezrádza opačnú závislosť parametra μ a nákazou v bankovom systéme. Čím viac mali banky tendenciu sa zhlukovať (vyššie μ), tým viac boli náchylnejšie na zlyhanie. Možno to vysvetliť tým, že vyššie zhlukovanie spôsobilo, že keď jedna banka skrachovala a ovplyvnila tým napr. dve ďalšie, bola vyššia pravdepodobnosť, že aj tie dve sú vo vzájomnom vzťahu. A preto aspoň jedna z nich prispela nákazou aj tej druhej a znásobila efekt nákazy. Hoci, podľa grafu, len mierne.



Obr. 24



Obr. 25

Záver

Cieľom práce bolo naštudovať existujúce prístupy k problematike šírenia nákazy na medzibankovom trhu, skúmať štruktúru prepojení medzi finančnými inštitúciami a nadobudnuté poznatky spolu s dostupnými údajmi použiť na analýzu robustnosti siete voči šíreniu nákazy prostredníctvom simulačných techník. V prvej kapitole sme predstavili rôzne druhy kanálov, ktorými sa môže nákaza šíriť bankovým sektorom, pričom našu pozornosť sme upriamili na kreditný kanál. Sledovanie jedného kanálu síce nedáva úplný obraz o riziku, ktorým banky čelia, avšak ponúka možnosť identifikovať následky zapríčinené výhradne daným kanálom a môže poukázať na jeho relevantnosť v širokom spektre systémového rizika.

Sieť expozícií bánk sme chápali ako orientovaný, ohodnotený graf znázorňujúci úverové a depozitné vzťahy medzi bankami, preto sme sa v druhej kapitole venovali objasneniu pojmov a poznatkov z teórie grafov a komplexných sietí. Bilaterálne vzťahy bánk však nie sú verejne dostupnou informáciou, preto bolo potrebné nájsť spôsob, ako ich vzájomné expozície generovať. V existujúcej literatúre sme preto hľadali kľúčové charakteristiky medzibankovej siete, ktoré sme zhrnuli v Kapitole 2.2. Na základe nich a dostupných informácií z NBS sme kalibrovali vlastný algoritmus generovania matice bilaterálnych vzťahov pomocou charakteristík bezškálových sietí a sietí s vlastnosťou malého sveta, pričom v nám dostupnej literatúre sme sa s podobným prístupom ku generovaniu medzibankových expozícií nestretli a prispeli tak novým algoritmom.

Na vygenerovaných sieťach expozícií sme simulovali finančné šoky v podobe zlyhaní jednotlivých slovenských bánk a skúmali odolnosť medzibankovej siete. Vykonali sme aj citlivosťnú analýzu na vstupné parametre ako i testovali sieť pri škálovaných výškach expozícií, no pri súčasnom stave bankového sektora sa riziko nákazy ukázalo ako veľmi nízke. Závěry sú uvedené v Kap. 4.1.2.

Práca s medzibankovou sieťou ponúka široké možnosti skúmania, ako možné pokračovanie navrhujeme identifikáciu dôležitých uzlov prostredníctvom rôznych centralít vrcholov a sledovať napr. koreláciu ich dôležitosti s rozsahom nákazy po ich zlyhaní.

Literatúra

- [1] Upper, Ch., Worms, A. Estimating bilateral exposures in the German interbank market: Is there a danger of contagion? *European Economic Review*, 48(4):827–849, 2004.
- [2] Albert, R., Barabási, A.-L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of modern physics*, 74(1):47, 2002.
- [3] ActivateNetworks. Who is central to a social network? It depends on your centrality measure. Dostupné na internete (14.3.2015): <http://www.activatenetworks.net/who-is-central-to-a-social-network-it-depends-on-your-centrality-measure/>.
- [4] European Banking Authority. Results of 2014 EU-wide stress test. Report, *European Banking Authority*, Október 2014. Dostupné na internete (21.4.2015): <http://www.eba.europa.eu/documents/10180/669262/2014+EU-wide+ST-aggregate+results.pdf>.
- [5] European Central Bank. Financial review June 2012. Financial review, *European Central Bank*, 2012.
- [6] Národná banka Slovenska. Banky so sídlom na území SR, 2015. Dostupné na internete (3.2.2015): <http://www.nbs.sk/sk/dohlad-nad-financnym-trhom/dohlad-nad-bankovnictvom/zoznam-uverovych-institucii/banky-so-sidlom-na-uzemi-sr>.
- [7] Cajueiro, D.O., Tabak, B.M. The role of banks in the Brazilian Interbank Market: Does bank type matter? *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(27):6825–6836, 2008.
- [8] Haľaj, G., Kok, Ch. Assessing interbank contagion using simulated networks. *Computational Management Science*, 10(2-3):157–186, 2013.
- [9] Upper, Ch. Simulation methods to assess the danger of contagion in interbank markets. *Journal of Financial Stability*, 7(3):111–125, 2011.

- [10] Allen, F., Gale, D. Financial contagion. *Journal of political economy*, 108(1):1–33, 2000.
- [11] Pendery, D. Three top economists agree 2009 worst financial crisis since great depression; risks increase if right steps are not taken. *Business Wire News*, 2009. Dostupné na internete (21.4.2015): <http://www.businesswire.com/news/home/20090213005161/en/Top-Economists-Agree-2009-Worst-Financial-Crisis#.VTY9tyG8PGc>.
- [12] Szpyrc, M., Novota, D. Bazilejské dohody o kapitáli a kapitálová primeranosť bánk v SR. *BIATEC*, 21(7):24–27, 2013.
- [13] Barabási, A.-L., Bonabeau, E. Scale-free Networks. *Scientific American*, 2003.
- [14] Tellez, Ed. Mapping the Australian Banking System Network. *RBA Bulletin*, pages 45–54, 2013.
- [15] Alves, I. et al. The structure and resilience of the European interbank market. Occasional Paper No. 3, *European Systemic Risk Board*, 2013.
- [16] Barrat, A. et al. The architecture of complex weighted networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 101(11):3747–3752, 2004.
- [17] Boss, M. et al. Network topology of the interbank market. *Quantitative Finance*, 4(6):677–684, 2004.
- [18] Iori, G. et al. A network analysis of the Italian overnight money market. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32(1):259–278, 2008.
- [19] Van Lelyveld, I., Liedorp, F. Interbank contagion in the Dutch banking sector: A sensitivity analysis. *International Journal of Central Banking*, 2(2):99–133, 2006.
- [20] Craig, B., Von Peter, G. Interbank tiering and money center banks. *Journal of Financial Intermediation*, 23(3):322–347, 2014.

- [21] Degryse, H., Nguyen, G. Interbank exposures: An empirical examination of contagion risk in the Belgian banking system. *International Journal of Central Banking*, 3(2):123–171, 2007.
- [22] Fagiolo, G. Clustering in complex directed networks. *Physical Review E*, 76(2), 2007.
- [23] Hausenblas, V., Kubicová, I., Lešánovská, J. Contagion Risk in the Czech Financial System: A Network Analysis and Simulation Approach. Working paper series 14, *Czech National Bank*, December 2012.
- [24] Plesník, J. *Grafové algoritmy*. Veda, Bratislava, 1983.
- [25] Freixas, X., Parigi, B.M., Rochet, J.-Ch. Systemic risk, interbank relations, and liquidity provision by the central bank. *Journal of money, credit and banking*, pages 611–638, 2000.
- [26] Marcus Kaiser, Matthias Goerner, and Claus C Hilgetag. Criticality of spreading dynamics in hierarchical cluster networks without inhibition. *New Journal of Physics*, 9(5):110, 2007.
- [27] Beránek, L. Síťová analýza v marketingu. In *Znalosti*, 2008. Dostupné na internete (8.2.2015): <http://znalosti2008.fiit.stuba.sk/download/articles/znalosti2008-Beranek.pdf>.
- [28] Pühr, C., Seliger, R., Sigmund, M. Contagiousness and vulnerability in the Austrian interbank market. Financial Stability Report 24, *Oesterreichische Nationalbank*, 2012.
- [29] Sheldon, G., Maurer, M. Interbank lending and systemic risk: an empirical analysis for Switzerland. *REVUE SUISSE D ECONOMIE POLITIQUE ET DE STATISTIQUE*, 134:685–704, 1998.
- [30] MathInsight. Scale-free networks. Dostupné na internete (12.3.2015): http://mathinsight.org/scale_free_network.

- [31] Prettejohn, B.J., Berryman, M.J., McDonnell, M.D. Methods for generating complex networks with selected structural properties for simulations: a review and tutorial for neuroscientists. *Frontiers in computational neuroscience*, 5, 2011.
- [32] Newman, M.E.J. The structure and function of complex networks. *SIAM review*, 45(2):167–256, 2003.
- [33] NetworkAnalyzer. Networkanalyzer Settings, 2015. Dostupné na internete (8.2.2015): <http://med.bioinf.mpi-inf.mpg.de/netanalyzer/help/2.6.1/>.
- [34] Zeman, J., Jurča, P. Macro Stress Testing of the Slovak Banking System. Working paper 1, *National Bank of Slovakia, Bratislava*, 2008. Dostupné na internete (21.4.2015): http://www.nbs.sk/_img/Documents/PUBLIK/08_kol1a.pdf.
- [35] Mistrulli, P.E. Assessing financial contagion in the interbank market: Maximum entropy versus observed interbank lending patterns. *Journal of Banking & Finance*, 35(5):1114–1127, 2011.
- [36] Barabási, A.-L., Albert, R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, 1999.
- [37] Ma, J.J., Zeng, D., Huff, R.A. Complex Network Analysis: A Comparison of Two Clustering Coefficient Definitions. *Journal of International Technology and Information Management*, 22(4):99, 2013.
- [38] Gai, P., Kapadia, S. Contagion in financial networks. Working Paper 383, *Bank of England*, Marec 2010.
- [39] Krause, A., Giansante, S. Interbank lending and the spread of bank failures: A network model of systemic risk. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 83(3):583–608, 2012.
- [40] Watts, D.J., Strogatz, S.H. Collective dynamics of small-worldTM networks. *Nature*, 393(6684):440–442, 1998.
- [41] Wells, S.J. Financial interlinkages in the United Kingdom’s interbank market and the risk of contagion. Working paper 230, *Bank of England*, 2004.

- [42] Národná Banka Slovenska. Analýzy slovenského finančného sektora za rok 2009. 2009. Dostupné na internete (21.4.2015): http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Dohlad/ORM/Analyzy/2009-2.pdf.
- [43] Ioannis, A., Eleni, T. Statistical analysis of weighted networks. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2008, 2008.
- [44] Klemm, K., Eguíluz, V.M. Growing scale-free networks with small-world behavior. *Physical Review E*, 65(5):057102, 2002.
- [45] Wikipedia. Average path length, 2014. Dostupné na internete (8.2.2015): http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Average_path_length&oldid=623787631.
- [46] Wikipedia. Clustering coefficient, 2014. Dostupné na internete (12.3.2015): http://en.wikipedia.org/wiki/Clustering_coefficient.
- [47] Wikipedia. Centrality, 2015. Dostupné na internete (8.2.2015): <http://en.wikipedia.org/wiki/Centrality>.
- [48] Wikipedia. Scale-free network, 2015. Dostupné na internete (8.2.2015): http://en.wikipedia.org/wiki/Scale-free_network.
- [49] Wolfram. Graph Measures and Metrics, 2015. Dostupné na internete (6.2.2015): <http://reference.wolfram.com/language/guide/GraphMeasures.html>.

Príloha A

Uvádzame prehľad pojmov pre všetky použité typy grafov.

(A) neorientované, neohodnotené grafy		
stupeň	degree	$k_v = \sum_j a_{vj}$
sled	sequence	alternujúca postupnosť vrcholov a hrán grafu začínajúca a končiaca vrcholom (vrchol-hrana-vrchol-hrana-...-vrchol), pričom každá hrana skutočne spája v grafe vrcholy, ktoré sú uvedené pred a za ňou v slede
cesta	path	sled, v ktorom sa žiadny vrchol neopakuje
vzdialenosť	geodesic, distance	$d(x,y)$ = počet hrán v najkratšej x-y ceste, ak taká medzi nimi existuje; inak $d(x,y) = \infty$
koeficient zhlukovania	local clustering coefficient	$C_v = \frac{2e_v}{k_v(k_v-1)}$, kde e_v je počet hrán, if k_v in $\{0,1\}$ then $C_v = 0$.
hustota	density	$D_G = \frac{2E}{n(n-1)}$, kde E je počet hrán v grafe
priemerná vzdialenosť	average path length	$l_G = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} d(i, j)$
priemerný koeficient zhlukovania	average clustering coefficient	$C_G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i$

V tabuľke uvedená definícia koeficientu zhlukovania zodpovedá definícii podľa Watta a Strogatza [40]. V [32], [37] sa možno stretnúť aj s jej graficky prijateľnejšou formou.

V literatúre sa môžeme najčastejšie stretnúť s dvomi prístupmi ku koeficientu zhlukovania grafu: prvý ako priemer lokálnych koeficientov zhlukovania uvedený v tabuľke, a druhý globálny koeficient zhlukovania [14], [46],[17], [32].

(B) neorientované, ohodnotené grafy		
sila	strength	$s_v = \sum_j a_{vj}w_{vj}$
sled	sequence	alternujúca postupnosť vrcholov a hrán grafu začínajúca a končiaca vrcholom (vrchol-hrana-vrchol-hrana-...-vrchol), pričom každá hrana skutočne spája v grafe vrcholy, ktoré sú uvedené pred a za ňou v slede
cesta	path	sled, v ktorom sa žiadny vrchol neopakuje
vzdialenosť	geodesic, distance	$d(x,y)$ = súčet váh hrán v najkratšej x-y ceste, ak taká medzi nimi existuje; inak $d(x,y) = \infty$
koeficient zhlukovania	local clustering coefficient	$C_v = \frac{1}{s_v(k_v-1)} \sum_{j,h} \frac{w_{vj}+w_{vh}}{2} a_{vj}a_{vh}a_{jh}$, kde k_v je počet susedných vrcholov, if k_v in $\{0,1\}$ then $C_v = 0$.
hustota	density	$D_G = \frac{2E}{n(n-1)}$, kde E je počet hrán v grafe
priemerná vzdialenosť	average path length	$l_G = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} d(i,j)$
priemerný koeficient zhlukovania	average clustering coefficient	$C_G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i$

Koeficient zhlukovania bol použitý podľa Barrata [16].

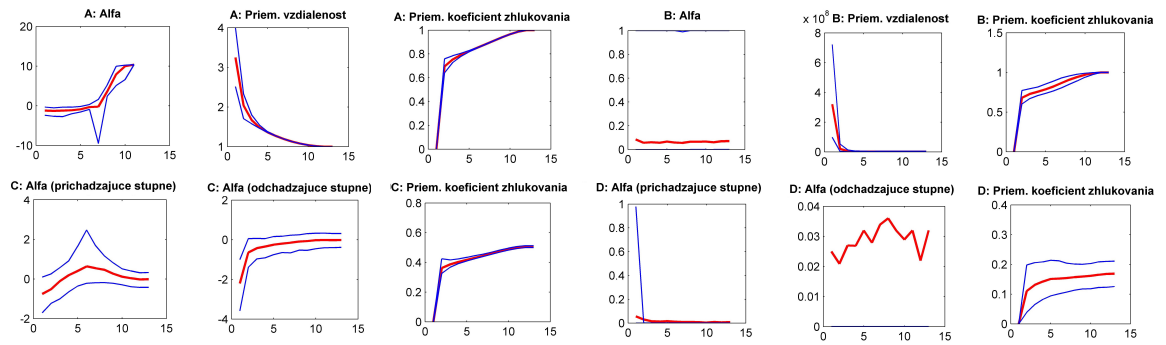
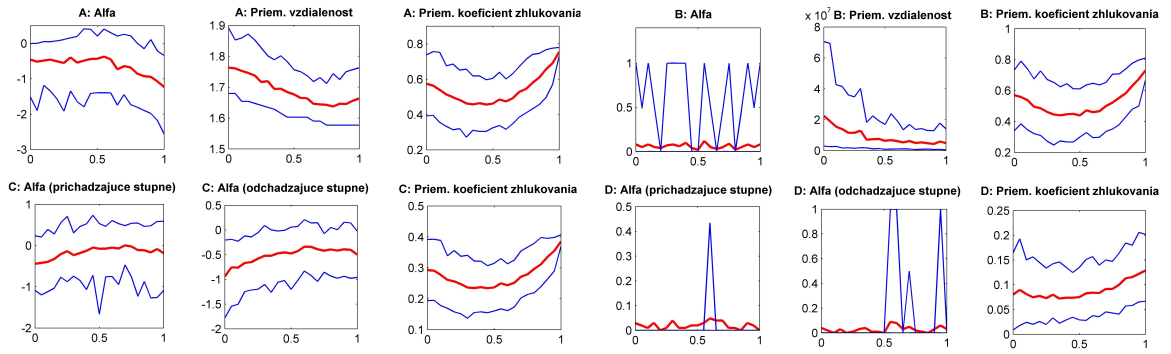
(C) orientované, neohodnotené grafy		
prichádzajúci stupeň	indegree	$k_v^{in} = \sum_i a_{iv}$
odchádzajúci stupeň	outdegree	$k_v^{out} = \sum_j a_{vj}$
sled	sequence	alternujúca postupnosť vrcholov a šípov grafu začínajúca a končiaca vrcholom (vrchol-šíp-vrchol-šíp-...-vrchol), pričom každý šíp skutočne spája v grafe vrcholy, ktoré sú uvedené pred a za ním v slede
cesta	path	sled, v ktorom sa žiadny vrchol neopakuje
vzdialenosť	geodesic, distance	$d(x,y)$ = počet šípov v najkratšej x-y ceste, ak taká medzi nimi existuje; inak $d(x,y) = \infty$
koeficient zhlukovania	local clustering coefficient	$C_v = \frac{(A+A^T)_{vv}^3}{2[k_v(k_v-1)-2A_{vv}^2]}$, kde $k_v = k_v^{in} + k_v^{out}$, X_{vv} je prvok matice na mieste (v,v)
hustota	density	$D_G = \frac{E}{n(n-1)}$, kde E je počet šípov v grafe
priemerná vzdialenosť	average path length	$l_G = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} d(i,j)$
priemerný koeficient zhlukovania	average clustering coefficient	$C_G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i$

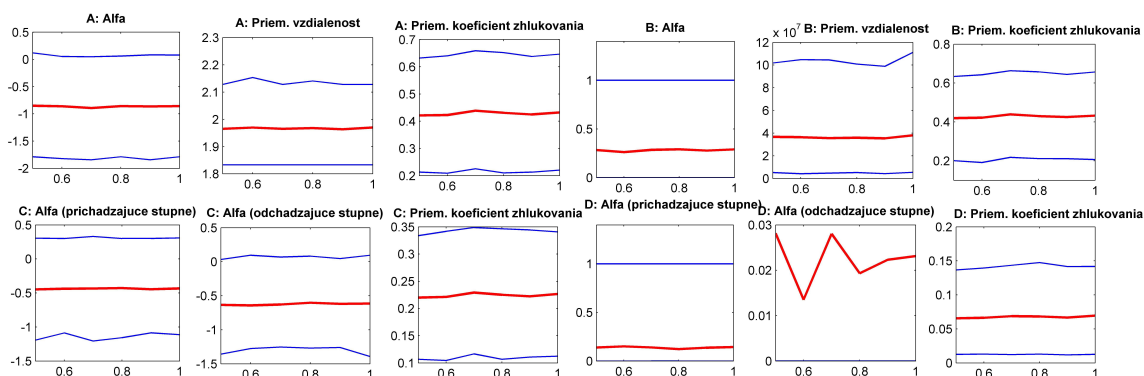
Pre tento typ matice sme použili koeficient zhlukovania definovaný Fagiolom v [22].

(D) orientované, ohodnotené grafy		
prichádzajúca sila	instrength	$s_v^{in} = \sum_i a_{iv} w_{iv}$
odchádzajúca sila	outstrength	$s_v^{out} = \sum_j a_{vj} w_{vj}$
sled	sequence	alternujúca postupnosť vrcholov a šípov grafu začínajúca a končiaca vrcholom (vrchol-šíp-vrchol-šíp-...-vrchol), pričom každý šíp skutočne spája v grafe vrcholy, ktoré sú uvedené pred a za ním v slede
cesta	path	sled, v ktorom sa žiadny vrchol neopakuje
vzdialenosť	geodesic, distance	$d(x,y)$ = súčet váh šípov v najkratšej x-y ceste, ak taká medzi nimi existuje; inak $d(x,y) = \infty$
koeficient zhlukovania	local clustering coefficient	$C_v = \frac{1}{s_v(k_v^{out}-1)} \sum_{j,h} \frac{w_{vj}+w_{vh}}{2} a_{vj} a_{vh} a_{jh}$, kde k_v^{out} je počet vychádzajúcich šípov
hustota	density	$D_G = \frac{E}{n(n-1)}$, kde E je počet šípov v grafe
priemerná vzdialenosť	average path length	$l_G = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} d(i,j)$
priemerný koeficient zhlukovania	average clustering coefficient	$C_G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i$

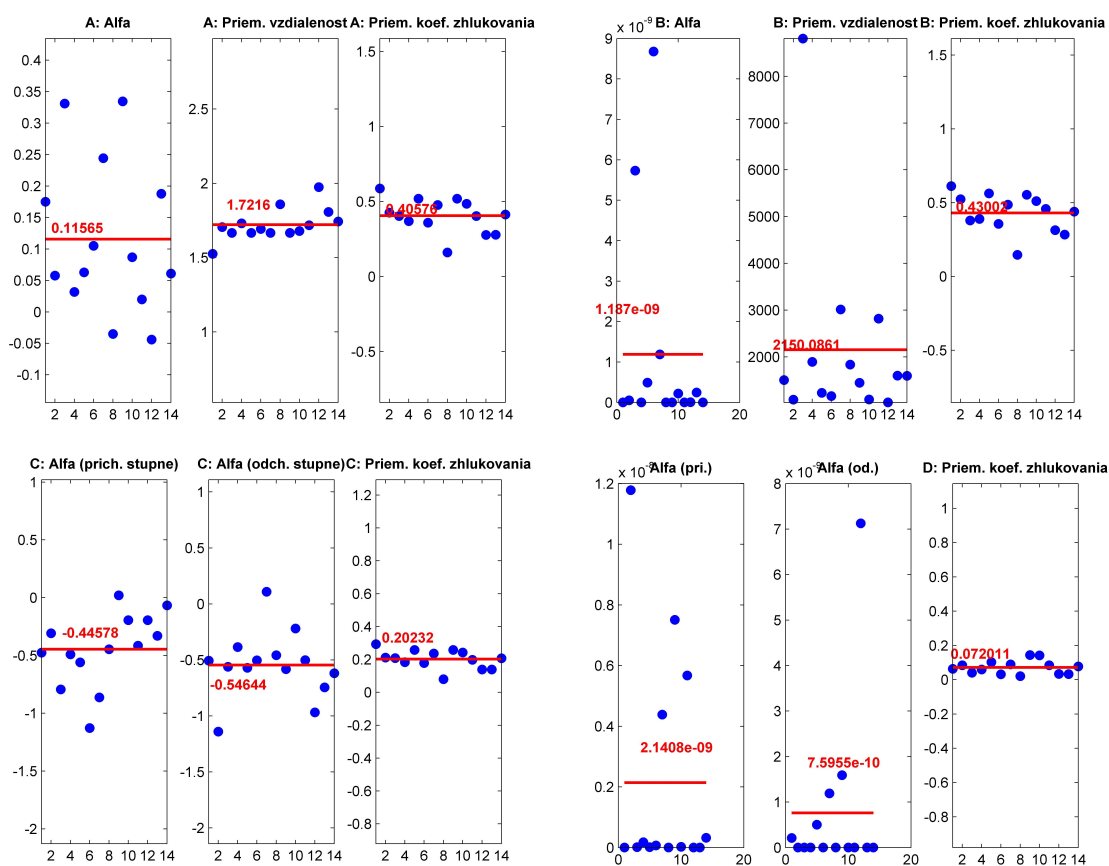
Ako bolo spomínané v podkapitole 2.1.2, zvolili sme koeficient zhlukovania podľa Barrata [16], avšak v upravenej forme na orientované grafy.

Príloha B

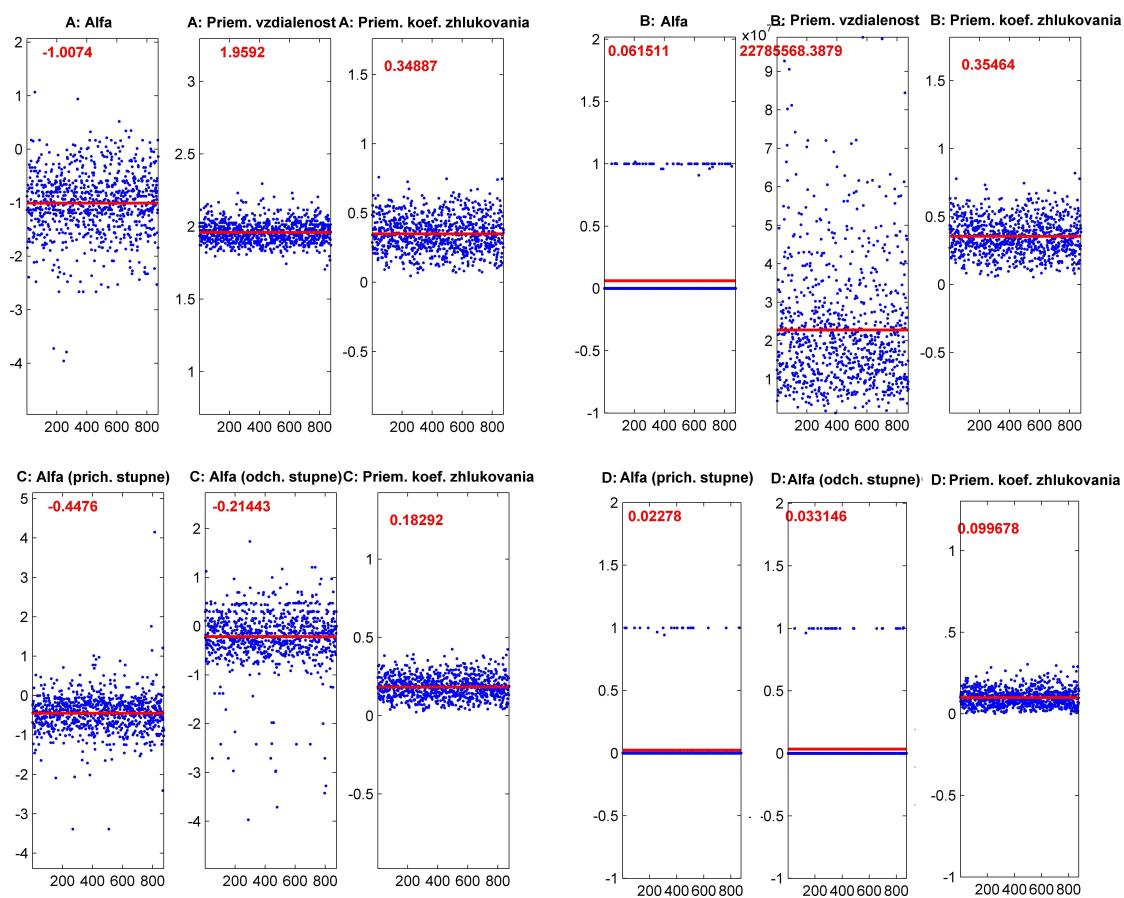




Obr. B.26: zmena w , $\mu = 0.7$, $m = 2$



Obr. B.27: Charakteristiky počítané na reálnych údajoch z NBS o slovenských medzibankových expozíciách za obdobie rokov 2011-2014.



Obr. B.28: Generované siete typu A, B, C, D $1000 \times$ pre parametre $\mu = 0.5$, $m = 2$ a $w = 0.9$.