

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



UDRŽATEĽNOSŤ A MERANIE BOHATSTVA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

UDRŽATEĽNOSŤ A MERANIE BOHATSTVA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: prof. Dipl. Ing. Dr. Mikuláš Luptáčik



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Linda Vodislavská
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Udržateľnosť a meranie bohatstva / *Sustainability and Wealth Accounting*
Cieľ: Cieľom práce je spracovať najnovšiu literatúru k otázke merania blahobytu ľudí a výkonnosti ekonomiky.

Vedúci: prof. Dipl. Ing. Dr. Mikuláš Luptáčik
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 29.01.2014
Dátum schválenia: 10.02.2014

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie Na tomto mieste by som sa veľmi rada poďakovala prof. Dipl. Ing. Dr. Mikulášovi Luptáčikovi, svojmu vedúcemu diplomovej práce, za ochotu, pomoc, čas a všetky cenné rady a materiály, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce.

Tiež nemôžem vynechať moju rodinu a snúbenca a spolužiaka Matúša Metesa, ktorému ďakujem za spríjemnenie času a morálnu podporu v období, kedy sme obaja písali naše diplomové práce.

Abstrakt

VODISLAVSKÁ, Linda: Udržateľnosť a meranie bohatstva [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: prof. Dipl. Ing. Dr. Mikuláš Luptáčík, Bratislava, 2015, 68 s.

Cieľom tejto práce je prispieť do diskusie o udržateľnosti ekonomického rastu a meraní bohatstva. Prvá časť predstavuje úvod do problematiky ekonomiky životného prostredia v súvislosti s udržateľnosťou hospodárskeho rastu a súčasne prehľad existujúcej literatúry k danej téme. Vychádzajúc z prvej časti, predstavíme dva modely optimálneho riadenia so zahrnutím enviromentálneho znečistenia a neobnoviteľných prírodných zdrojov, ako aj spôsob numerického riešenia modelov a merania bohatstva počas sledovaného obdobia. V analýze sa snažíme zamerať na kvalitatívne vlastnosti modelov. Záverečná časť je venovaná aplikácii získaných poznatkov na reálne dáta Rakúska z rokov 1995 - 2012. Získané výsledky porovnávame pre rôzne počiatkové nastavenia parametrov a ekonomicky ich interpretujeme.

Kľúčové slová: udržateľnosť, meranie bohatstva, model ekonomického rastu, životné prostredie, prírodné zdroje, teória optimálneho riadenia, emisná miera produkcie, miera čerpania

Abstract

VODISLAVSKÁ, Linda: Sustainability and wealth accounting [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: prof. Dipl. Ing. Dr. Mikuláš Luptáčik, Bratislava, 2015, 68 p.

The aim of this thesis is to contribute to the discussion over sustainability and wealth accounting using tools of optimal control theory. The first part introduces the problem of environmental pollution and its relation to sustainability along with an overview of existing literature dealing with this topic. Consequently, we introduce two optimal control models with environmental pollution and nonrenewable resources included, method to solve them numerically and to account the wealth in the time horizon given. For both models, we derive various propositions in quality analysis. Final part is devoted to real data application, using Austrian data from 1995-2012. Obtained results for various parameters are compared and we interpret them economically.

Keywords: sustainability, wealth accounting, economic growth model, environment, natural resources, optimal control theory, emission rate of production, pumping rate

Obsah

Zoznam obrázkov	9
Zoznam tabuliek	10
Úvod	11
1 O meraní bohatstva, rozvoji a zdrojoch	13
1.1 Meranie bohatstva	13
1.2 Prírodné zdroje	15
1.3 Vlastnícke práva	16
1.4 Ceny zdrojov	17
1.5 Hospodársky rast	17
1.6 Udržateľný rozvoj	19
2 Prehľad literatúry	20
2.1 Prístupy k meraniu udržateľnosti	20
2.2 Udržateľnosť a meranie bohatstva v najnovšej literatúre	22
2.3 Jednoduchý model vzťahu medzi spotrebou a znečistením	27
2.4 Model hospodárskeho rastu so životným prostredím	29
3 Model so znečistením a neobnoviteľnými zdrojmi	31
3.1 Modifikovaný model hospodárskeho rastu so životným prostredím . . .	31
3.1.1 Formulácia modelu	33
3.1.2 Pontrjaginov princíp maxima a kvalitatívna analýza modelu . .	34
3.2 Model so znečistením a neobnoviteľnými prírodnými zdrojmi	37
3.2.1 Formulácia modelu	38
3.2.2 Pontrjaginov princíp maxima a kvalitatívna analýza modelu . .	39
3.3 Numerické riešenie problémov optimálneho riadenia	43
3.3.1 Klasifikácia možností numerického riešenia	43
3.3.2 Riešenie pomocou Forward-Backward Sweep Method	44
3.4 Meranie bohatstva a udržateľný rozvoj	46
4 Aplikácia na reálne dáta	48

4.1	Voľba funkcií a konštánt	48
4.1.1	Nastavenie funkcií	48
4.1.2	Ostatné konštanty	49
4.1.3	Počiatočné hodnoty	52
4.1.4	Časový horizont	52
4.2	Numerické riešenie Modelu 1	52
4.2.1	Bohatstvo počas sledovaného obdobia	55
4.3	Numerické riešenie Modelu 2	56
4.3.1	Bohatstvo počas sledovaného obdobia	60
4.3.2	Analýza senzitivity	61
	Záver	64
	Zoznam použitej literatúry	66

Zoznam obrázkov

1	Model 1: Vývoj kapitálu K	53
2	Model 1: Vývoj znečistenia W	53
3	Model 1: Vývoj tieňovej ceny kapitálu ψ_K	54
4	Model 1: Vývoj tieňovej ceny znečistenia ψ_W	54
5	Model 1: Vývoj spotreby C	55
6	Model 1: Vývoj výdavkov A	55
7	Model 1: Vývoj bohatstva sledovaný na päťdesiatročnom horizonte . . .	56
8	Model 2: Vývoj kapitálu K	57
9	Model 2: Vývoj znečistenia W	57
10	Model 2: Vývoj spotreby neobnoviteľných zdrojov R	58
11	Model 2: Vývoj tieňovej ceny kapitálu ψ_K	58
12	Model 2: Vývoj tieňovej ceny znečistenia ψ_W	59
13	Model 2: Vývoj tieňovej ceny neobnoviteľných zdrojov ψ_R	59
14	Model 2: Vývoj spotreby C	59
15	Model 2: Vývoj výdavkov A	60
16	Model 2: Vývoj bohatstva sledovaný na päťdesiatročnom horizonte . . .	60

Zoznam tabuliek

1	Výdavky do životného prostredia pre Rakúsko	50
2	Model 1: Zvolené konštanty	51
3	Model 2: Zvolené konštanty	51
4	Počiatkové hodnoty pre K, W, R	52

Úvod

*Pôdu nededíme po našich predkoch,
ale požičiavame si ju od našich detí.*

Indiánske príslovie

V ostatných rokoch rastú obavy nielen vedúcich predstaviteľov sveta, ale aj obyčajných ľudí o tom, či je pretrvávajúci hospodársky rast udržateľný z dlhodobého hľadiska. Už od počiatku priemyselnej revolúcie v 18. storočí je zrejмый negatívny dopad rôznych ekonomických procesov na kvalitu životného prostredia. Napriek tomu vládni predstavitelia tento fakt úspešne ignorovali niekoľko desiatok rokov. Základy enviromentálnej ekonómie boli položené až v päťdesiatych rokoch 20. storočia, kedy sa tejto téme venovali prví nadšenci. Odvtedy vplyv hospodárskeho rastu na životné prostredie nabral na dôležitosť, ako vednej disciplíny sa mu venujú ekonómovia i matematici a v súvislosti s ním sa pravidelne stretávajú vedúci predstavitelia sveta, ktorí iniciovali viaceré lokálne i globálne opatrenia na jeho zlepšenie.

Sprvu sa predpokladalo, že vzťah medzi hospodárskym rastom a zhoršeniami v rôznych sférach životného prostredia je len vylučovací, a teda za vyššiu úroveň niektorého z nich *zaplatíme* prostredníctvom nižšej úrovne (rastu/zásob) toho druhého. Nie je to však celkom pravda. Ukazuje sa totiž, že rast produkcie zvyšuje množstvo zdrojov, ktoré môžeme využiť okrem iného na rôzne procesy súvisiace s odbúraním znečistenia. Otázne však naďalej ostáva, nakoľko je hospodársky rast udržateľný aj napriek čerpaniu prírodných zdrojov a či je možné ho udržať pre nasledujúce generácie. Na stranu udržateľnosti sa prikláňajú možnosť substitúcie a technologický pokrok.

Predložená diplomová práca sa venuje hospodárskemu rastu, jeho vplyvu na životné prostredie a udržateľnosti pre budúce generácie. Hlavnou motiváciou pre jej vznik bola najnovšia literatúra v tejto oblasti, ktorá oproti prechádzajúcim spracovaniam prešla z *opisného princípu* na dynamický, čo znamená pre udržateľnosť veľký krok vpred.

Celá práca je rozdelená do štyroch častí. V prvej časti diplomovej práce si predstavíme dôležité pojmy z teórie hospodárskeho rastu, životného prostredia a udržateľnosti. Druhá časť je zameraná na prehľad existujúcej literatúry, z ktorej sme ďalej v našej práci vychádzali. Najprv si prejdeme vývoj literatúry v oblasti udržateľnosti a merania

bohatstva a najnovšie články na túto tému. Nosný článok tejto práce od Arrowa [2] je jedinečný svojím dynamickým prístupom k meraniu bohatstva. Vo vzťahu medzi hospodárskym rastom a životným prostredím sa ako vhodný nástroj ponúka optimálne riadenie. Následne si preto predstavíme modely optimálneho riadenia, ktoré položili základy pre diskusiu a rozvoj v tejto oblasti. Získané poznatky budeme aplikovať v ďalších častiach tejto diplomovej práce.

Vychádzajúc z článku Luptáčika a Schuberta [17], v tretej časti diplomovej práce predstavíme postupne dva modely optimálneho riadenia, v ktorých je zahrnutá dynamika kapitálu, znečistenia a v druhom modeli tiež neobnoviteľných prírodných zdrojov. Vyvodíme pre ne podmienky Pontrjaginovho princípu maxima, z ktorých budeme vychádzať aj pri ich kvalitatívnej analýze. Vzhľadom na komplexnosť oboch modelov ich nebudeme riešiť analyticky, ale s využitím numerických metód. Predstavíme algoritmus, ktorý naprogramujeme v matematickom softvéri Matlab. V závere tretej kapitoly vyvodíme tiež podmienky pre meranie a udržateľnosť bohatstva.

Posledná, štvrtá časť tejto diplomovej práce je venovaná aplikácii na reálne dáta Rakúska. Vzhľadom na numerickú povahu riešenia tohto modelu najprv zvolíme funkcie a konštanty vstupujúce do modelov. Tu využijeme dáta Rakúskeho štatistického úradu z rokov 1995-2012. Získané výsledky bližšie popíšeme. Zvláštny dôraz je v tejto časti kladený na analýzu senzitivity a hľadanie takej kombinácie vstupov, ktorá vedie k udržateľnosti.

1 O meraní bohatstva, rozvoji a zdrojoch

V tejto časti diplomovej práce si vysvetlíme základné pojmy dôležité z hľadiska úvah o bohatstve, jeho udržateľnom rozvoji a tiež prírodných zdrojoch, ktoré veľkou mierou vstupujú do diskusie o udržateľnosti. V práci s nimi budeme pracovať aj v ďalších kapitolách, preto je dôležité pochopiť ich význam.

1.1 Meranie bohatstva

Bohatstvo je ako hlavný objekt tejto diplomovej práce definované podľa najzákladnejšej definície ako *hojnosť vzácných zdrojov alebo cenných hmotných statkov*. Stanoviť presnú hodnotu bohatstva a monetarizovať jeho vstupy však nie je ľahká úloha. Na stanovenie bohatstva krajín sa v súčasnosti používa viacero metrík, z ktorých jednoznačne najznámejšou je hrubý domáci produkt. Hoci jeho nevhodnosť merať ekonomický blahobyť¹ je všeobecne akceptovaná v teórii, v hospodárskej politike je per capita hrubý domáci produkt stále používaný ako kľúčový indikátor. Existujú však aj iné metriky. Najprv sa pozrieme na trio najznámejších meradiel na meranie bohatstva, zameriame sa na spôsob, akým bohatstvo merajú, a či do merania vstupuje aj koncept udržateľnosti.

Hrubý domáci produkt

Definícia 1.1. Hrubý domáci produkt predstavuje hodnotu všetkých finálnych výrobkov a služieb vyrobených rezidentskými jednotkami sledovaného územia (napr. štátu) za sledované obdobie (spravidla 1 rok).

HDP možno na základe ESNÚ 95² definovať troma spôsobmi:

1. HDP je súčtom hrubej pridanej hodnoty rôznych inštitucionálnych sektorov alebo rôznych odvetví plus dane a mínus subvencie na produkty.
2. HDP je súčtom konečného domáceho použitia výrobkov a služieb.
3. HDP je súčtom použitia na účte tvorby dôchodkov za celú ekonomiku.

¹Týmto pojmom máme v celej práci na mysli blahobyť v širšom zmysle slova, ktorý zahŕňa nielen materiálny, ale aj nemateriálny blahobyť.

²Európsky systém národných a regionálnych účtov 95

Hrubý národný produkt

Hrubý národný produkt predstavuje podobný koncept ako hrubý domáci produkt s drobným lokalizačným rozdielom. Podľa definície:

Definícia 1.2. Je to súhrn všetkých finálnych výrobkov a služieb vyrobených kdekoľvek na svete s použitím výrobných faktorov vlastnených rezidentskými jednotkami sledovaného územia (napr. štátu) za sledované obdobie (spravidla 1 rok).

Dovoľme si poukázať na to, že hrubý domáci ani hrubý národný produkt nepredstavujú množstvo, ktoré reálne spotrebujeme, ale len potenciál. Zatiaľ čo na pokles v *HDP* aj *HNP* sa pozeráme ako na negatívum, ich rast - z roka na rok alebo v porovnaní s ostatnými krajinami je z pohľadu vlád vnímaný ako dobrá vec. Otázne však je, či je rast stále žiaduci. Pokiaľ rastú tieto ukazovatele, zvyčajne rastie aj znečistenie. Pokiaľ rastie znečistenie príliš, značne tým zhoršujeme podmienky pre naše budúce generácie, a to až tak, že pri úplnom vyčerpaní zdrojov, aktuálne úrovne príjmov nebudeme schopní udržať.

Popri enviromentálnych dôvodoch vystupujú proti týmto merateľom aj neenviromentálne dôvody. Tie súvisia predovšetkým s existenciou produktov, ktoré na trhu nie sú obchodovateľné ako napríklad dlhšia starostlivosť o deti alebo doma uvarené jedlo, so spotrebou viacročných statkov - napríklad umývačky riadu alebo auta, ale tiež s nepriznanými príjmami či výdavkami do zdravotnej starostlivosti (opaľovacie mlieko ako ochrana proti rakovine kože).

Na investície nie je braný ohľad vôbec. Oba prístupy sú založené na tom, že merajú len príjem, nie bohatstvo alebo to, ako sa bohatstvo v čase vyvíja a či je jeho rast udržateľný.

Čistý národný produkt

Čistý národný produkt, ako to už aj z názvu vyplýva, je odvodený od hrubého národného produktu očisteného o odpisy. Definovaný je ako:

$$CNP = HNP - odpisy \quad (1)$$

Zahrnutie odpisov síce smeruje k lepšiemu využitiu v zelenej ekonómii a pri sledovaní udržateľnosti, no na strane druhej, v koncepte čistého národného produktu stále

absentujú investície, príjmy z neobchodovateľných statkov či hrubé investície do neobchodovateľných statkov. Naďalej ostávajú súčasťou *CNP* aj tzv. obranné výdavky, ktoré priamo neprispievajú k zvýšeniu blahobytu, a teda v správnej metrike bohatstva a udržateľnosti nemajú miesto.

V súvislosti so získaním konceptu tzv. zeleného čistého národného produktu je potrebné do našich úvah zahrnúť aj ekologické následky, ktoré so sebou rast prináša. Taktiež nie všetky spotrebné ani kapitálové statky sú obchodovateľné. Čo musíme teda urobiť je nájsť také ceny investície, ktoré v sebe zahŕňajú aj cenu za budúce vyčerpanie zdroja.

Tri predstavené meratele nám pomohli pochopiť spôsoby súčasného merania výkonu ekonomiky a ich základné vlastnosti. Toto zhrnutie sa budeme snažiť využiť v ďalších častiach diplomovej práce, kde tiež predstavíme koncept tieňových cien.

1.2 Prírodné zdroje

K pochopeniu konceptu merania bohatstva a udržateľnosti, ktorá je úzko spätá aj s rôznymi typmi prírodných zdrojov, považujeme za kľúčové chápať rozdeleniu prírodných zdrojov a ich použitiu v ekonomických aktivitách.

Neobnoviteľné zdroje

Neobnoviteľný zdroj je taký prírodný zdroj, ktorý existuje na Zemi v obmedzenom množstve. Keď takýto prírodný zdroj vyčerpáme, je vyčerpaný navždy a teda nie je možná jeho obnova. Pri stanovení množstva neobnoviteľných zdrojov sa používa výraz tzv. *dokázané rezervy*, čo znamená preukázateľne existujúce množstvo daného zdroja, ktoré je možné čerpať použitím existujúcich technológií. Zmeny v množstve neobnoviteľného zdroja majú na svedomí zvyčajne dve možnosti: objavenie nových zásob, ktoré množstvo statku zvyšujú, a čerpanie zdroja, ktoré toto množstvo znižujú. Najznámejšími príkladmi neobnoviteľných zdrojov sú ropa alebo zemný plyn.

Obnoviteľné zdroje

Obnoviteľný zdroj je taký prírodný zdroj, ktorý je opätovne dopĺňaný prírodnými procesmi, a teda môže byť využívaný opakovane. Veľakrát množstvo tohto statku nijako

nezávisí od množstva, ktoré človek využíva. Príkladom takéhoto zdroja je napríklad slnečné žiarenie. Na strane druhej, niektoré obnoviteľné zdroje je síce možné využívať opakovane, ale ich množstvo závisí aj na minulej spotrebe. Hoci sú takéto zdroje schopné regenerácie, pri prekročení určitej spotreby je možné, že sa zdroj v budúcnosti už nebude schopný obnoviť. Príkladom sú napríklad ryby v jazerách.

Na to, aby sa s prírodnými zdrojmi zaobchádzalo šetrne a v zmysle udržateľného hospodárskeho rastu, je dôležité správne priradenie hodnoty jednotlivým zdrojom. Podľa [33] je tak možné urobiť zvýšenými externými nákladmi v podobe daní alebo zavedením kontroly vlastníckymi právami.

1.3 Vlastnícke práva

Miera, do akej je spotreba zdrojov kontrolovaná a riadená vlastníckymi právami, zohráva významnú úlohu pri ich čerpaní. Prírodné zdroje dokážeme rozdeliť do skupín podľa stupňa regulácie vlastníckymi právami fyzických či právnických osôb alebo vládou. Na jednej strane tohto spektra sú zem alebo drahé kovy, pri ktorých je zvyčajne majiteľ jasne určený, na strane druhej sú zas napríklad už spomínané ryby v jazerách.

Vlastnícke práva jednotlivých zdrojov ovplyvňujú to, akým spôsobom je zdroj využívaný. Obzvlášť pri zdrojoch, kde vlastnícke práva nie sú priradené nikomu, je nadmerné využívanie bežnou praktikou vedúcou k úplnému vyčerpaniu zdroja alebo čerpaniu nad maximálnu udržateľnú hranicu. V týchto prípadoch totiž absentuje dozor producenta, ktorý by v znížení dnešnej spotreby videl potenciál zisku v budúcnosti. V prípade rybára by neostali ryby preňho do budúcnosti, ale vylovili by ich ostatní rybári.

V súvislosti s týmto je známy pojem *tragedy of commons* (z ang. tragédia spoločného), ktorý použil v roku 1832 ekonóm William Forster Lloyd ako pomenovanie situácie v predindustriálnom Anglicku, kedy spoločne spravované pastviny boli omnoho zničenejšie a aj pôda viac vyčerpaná ako pri súkromne vlastnených pastvinách, na ktorých sa majitelia snažili udržať a zvyšovať plodnosť. V prípade spoločne vlastnených pastvín sa snažili z pôdy vyťažiť čo najviac aj za cenu, že pôda pre budúce generácie už nebude taká výživná. Riešením tohto problému sú práve vhodne zvolené vlastnícke práva.

1.4 Ceny zdrojov

Na to, aby sme boli schopní správne vyhodnotiť cenu čerpania zdrojov s prihliadnutím na blahobyt budúcich generácií, je nutné, aby dnešné ceny vhodne odrážali ceny statkov v budúcnosti. Ceny zdrojov tiež zohrávajú významnú rolu v substitúcii a technologickom pokroku, procesoch, prostredníctvom ktorých ekonomiky minimalizujú využívanie obmedzeného množstva zdrojov. Vysoká cena dáva impulz hľadať lacnejšie náhrady, substitúty. Ekvivalente, vysoké ceny zdroja môžu pre investorov znamenať, že možné technologické riešenie bude ziskové a oplatí sa ho hľadať.

Na mieste je teda otázka, či dnešné ceny správne reflektujú obmedzenosť alebo nedostatok zdrojov v budúcnosti. Pokiaľ by to tak bolo, ceny by mali v čase mierne narastať približne úrokovou mierou. Ako však vieme, nie vždy je tomu tak a existujú producenti, ktorí na budúcnosť neberú ohľad, spoločnosti sa spájajú do kartelov a v neposlednom rade je v dnešnej dobe aj po takmer dvesto rokoch od jej pomenovania stále prítomná tragédia spoločného.

Z hľadiska udržateľnosti je v tomto prípade vhodné použiť termín tieňových cien, ktoré sa mimo optimálneho stavu ekonomiky líšia od cien trhových. Podľa [25] existujú dve ekvivalentné definície tieňovej ceny investície:

Definícia 1.3. Maximálne množstvo užitočnosti, ktoré sme ochotní obetovať dnes výmenou za dodatočnú jednotku kapitálu.

Definícia 1.4. Hraničná zmena medzigeneračného blahobytu získaná z dodatočnej jednotky kapitálového statku.

Je teda zrejmé, že správne ceny závisia na funkcii užitočnosti, resp. blahobytu.

1.5 Hospodársky rast

Často sa stretávame s rôznymi názormi a otázkami o tom, ako je možné, že ekonomiky rôznych štátov ešte stále rastú aj napriek tomu, že zdroje sú obmedzené? V prvom rade skúsme poukázať na to, že aj kvôli existencii globálneho obchodu chýbajúce alebo obmedzené zdroje nie sú vždy citeľné. Rovnako, dlhodobo klesajúce ceny zdrojov, ako uvádza [33], budia dojem, že zdrojov je dostatok a svet nemíňa zásoby prírodných

zdrojov. Tento *paradox* rastu HDP (bohatstva) aj napriek obmedzenosti zdrojov máta mnohých, ale existuje preň vysvetlenie spojené so správnym nastavením cien.

Substitúcia

Substitúcia predstavuje nahrádzanie vstupov inými, podobnými alebo príbuznými vstupmi, zvyčajne z dôvodu nižšej ceny alebo nedostatku pôvodného vstupu. V bežnom živote si ako substituenty môžeme predstaviť trojicu - ryža, zemiaky či pečivo, ktoré síce spĺňajú rovnaký účel, ale spotrebiteľ sa môže rozhodnúť pre kúpu jedného z nich aj na základe ceny.

Aj pre prírodné zdroje existujú veľké množstvá náhrad, či už je to náhrada ľudskej práce za roboty, alebo dôkladnejšie využitie suroviny použitím nového stroja. V tom prípade nahrádzame prírodný zdroj investíciou do kapitálu. Takmer vždy je motiváciou cena zdroja. Je teda zrejmé, že obmedzenosť zdrojov a s tým súvisiaci pokles závisí hlavne na stupni nahraditeľnosti toho-ktorého zdroja.

Technologický pokrok

Ďalším spôsobom, ako znížiť vplyv obmedzenosti prírodných zdrojov, je technologický pokrok. Práve ten je motiváciou pre investorov a vynálezcov, ktorých sa obmedzenosť zdroja dotýka alebo ktorí vidia v novej technológii možnosť dobre zarobiť. Na jednej strane, tzv. *zdrojoví optimisti*, ako ich Weil nazval v [33], sa odvolávajú na históriu a technológie, ktoré niektoré zdroje zachránili, a tvrdia, že akýkoľvek nedostatok zdroja je len motiváciou pre nové vynálezy. Na strane druhej, *zdrojoví pesimisti* sú presvedčení, že spoliehať sa na možné vynájdenie *niečoho* je nanajvýš nezodpovedné.

Ceny, ktoré správne odrážajú obmedzenosť zdrojov, sú pre ľudí doposiaľ dostatočnou motiváciou. Nesprávne nastavené ceny u majetku, ktorý nikomu nepatrí - ako napríklad pri rybách v jazere, však dokážu nechtiac zastaviť technologický pokrok či hľadanie substitútov.

1.6 Udržateľný rozvoj

Konečná povaha neobnoviteľných zdrojov naznačuje, že ekonómia čelí vážnemu rozhodovaniu medzi spotrebou dnes a spotrebou zajtra. Čím viac toho - ktorého prírodného zdroja je spotrebovaného dnes, tým menej ho ostáva pre budúce generácie. Hoci investíciu do fyzického alebo ľudského kapitálu môžu kedykoľvek vykonať aj naši nasledovníci, šetrne zaobchádzať s ropou možno nebude možné, pretože jednoducho nebude.

Diskusia o vzťahu medzi ekonomickým rozvojom a prírodnými zdrojmi je často spájaná s termínom udržateľný rozvoj. Tento výraz bol definovaný v roku 1987 Komisiou OSN pre životné prostredie a rozvoj (známou ako Brundtlandova komisia, podľa jej vedúceho predstaviťa, ktorý je aj autorom definície) ako *rozvoj, ktorý spĺňa potreby dneška bez obmedzovania schopnosti budúcich generácií naplniť svoje potreby*.

Ďalšie definície udržateľnosti podľa rôznych autorov sú napríklad:

- Pearce, [21]: *Dôraz na prírodné statky bez postupného poklesu ich množstva v čase.*
- Solow, [27]: *Pokiaľ to nie je len slogan, musí to byť schopnosť udržať produkčnú kapacitu do nekonečna.*
- Solow, [27]: *Schopnosť poskytnúť budúcej generácii možnosť, aby sa mala aspoň tak dobre, ako tá predchádzajúca.*
- Pezzey, [22]: *Neklesajúca užitočnosť pre člena spoločnosti teraz aj v budúcnosti.*

Vybrať tú najlepšiu definíciu nie je jednoduché, hoci všetky poskytujú predstavu o tom, čo je cieľom udržateľného rozvoja a na čo sa zameriame v ďalších častiach tejto diplomovej práce. V nasledujúcej kapitole rozoberieme najnovšie články venujúce sa téme udržateľnosti a merania bohatstva, ktoré zahrnutím dynamiky vývinu jednotlivých zložiek bohatstva predstavujú pokrok oproti dovtedajším opisným prístupom. Získané poznatky sa budeme snažiť využiť spolu s teóriou optimálneho riadenia v tretej a štvrtej kapitole.

2 Prehľad literatúry

Vzťah bohatstva, hospodárskeho rastu a životného prostredia bol stavebným prvkom a inšpiroval už množstvo akademických výskumov. Ako sme už spomenuli v úvode, základom výskumu v tejto oblasti je otázka, či aj budúce generácie budú mať možnosť mať sa minimálne tak dobre, ako tie predchádzajúce. Čoraz páľčivejšia je táto téma práve v súvislosti s vyčerpávaním prírodných zdrojov a zhoršeniami v rôznych sférach životného prostredia. V tejto kapitole sa pozrieme na vývoj literatúry v tejto oblasti a rôzne prístupy autorov k spracovaniu témy udržateľnosti.

Téme ekonomického rastu a jeho udržateľnosti sa v posledných štyridsiatich rokoch venovali mnohí autori. Významný posun vpred v tejto oblasti predstavuje článok Arrowa et. al z roku 2012 [2], v ktorom sa autori pokúsili monetarizovať efekty vstupujúce do celkového bohatstva a ktorý je ústredným článkom tejto diplomovej práce. Oproti dovtedajším spracovaniam tejto témy autori do merania bohatstva zahrnuli dynamiku zmien, ktorá v *opisných prístupoch* absentovala.

Keďže ako nástroj na zachytenie vzťahu medzi hospodárskym rastom a životným prostredím sa ponúka optimálne riadenie, v druhej časti tejto kapitoly sa pozrieme na dva modely optimálneho riadenia zo sedemdesiatych a osemdesiatych rokov 20. storočia, ktoré zahrnuli životné prostredie do teórie rastu inak ako premennú závislú výlučne od produkcie. Novinkou oproti dovtedajším prístupom je to, že v oboch skúmaných modeloch je akumulácia znečistenia chápaná ako statok. V prvom modeli od Forstera [10] vychádzame z predpokladu o konštantnej produkcii. Druhý model autorov Luptáčka a Schuberta [17] zas predstavuje model s dvoma stavovými premennými - kapitálom a znečistením.

Poznatky získané zo štúdia vyššie uvedených článkov sa pokúsime zapracovať a rozšíriť v tretej kapitole tejto diplomovej práce. V štvrtej kapitole ich aplikujeme na reálne dáta Rakúska a výsledky analyzujeme.

2.1 Prístupy k meraniu udržateľnosti

V tejto podkapitole sa pokúsime spracovať vývoj najnovšej literatúry a výskumov v oblasti udržateľnosti. Táto časť je voľne spracovaná podľa článku [2].

Autori sa pri spracovaní témy udržateľnosti venujú najmä skúmaniu ľudského blahobytu ako faktora, ktorý by mal byť udržaný, pretože práve doň okrem materiálnych statkov významným spôsobom vstupujú vlastnosti životného prostredia či dostatok prírodných zdrojov. Z predchádzajúcich spracovaní sa ukazuje, že k meraniu udržateľnosti je možné pristupovať dvoma spôsobmi:

1. sledovať blahobyt súčasnej generácie,
2. sledovať medzigeneračný blahobyt.

Ak sa pozeráme na blahobyt z prvého hľadiska, udržateľnosť chápeme ako faktor, ktorý umožní budúcim generáciám mať sa minimálne tak dobre, resp. dosiahnuť rovnakú úroveň blahobytu, ako má tá súčasná. Do blahobytu súčasnej generácie vstupujú rôzne faktory, ako napríklad spotreba statkov, voľnočasové aktivity či kvalita životného prostredia. Výsledkom je, že blahobyt dnešnej generácie je v tomto ponímaní chápaný ako vážená suma týchto premenných. Ich váhy sú v skutočnosti tieňovými cenami týchto statkov a celá suma je v podstate reálny príjem celej ekonomiky. Ekonomický rozvoj je v tomto prípade udržateľný v čase, pokiaľ reálny príjem v konštantných tieňových cenách je v tom čase neklesajúci. Solow v roku 1974 [26] a Hartwick v 1977 [13] boli teoretickými priekopníkmi v tejto oblasti. Významnými príspevkami do debaty boli aj diela Nordahausa a Tobina [20] a Jonesa a Klenowa [15], ktorí prispeli aj k skoršej literatúre venujúcej sa téme reálneho národného príjmu od Hicksa [14] či Samuelsona [23].

Na strane druhej, pri študovaní medzigeneračného blahobytu sa autori sústreďujú na to, že blahobyt v čase nie je len blahobytom dnešnej generácie, ale zahŕňa aj potenciálny blahobyt všetkých nasledujúcich generácií. Otázkou teda je, či ekonomika funguje dostatočne dobre na to, aby faktory medzigeneračného blahobytu neklesali. Hamilton a Clemens [5] a Dasgupta a Maler [6] vo svojich štúdiách poznamenali, že faktory ovplyvňujúce medzigeneračný blahobyt sú množstvá statkov zdedené z minulosti, a preto sa funkcia udržateľnosti redukuje na váženú sumu zásob týchto statkov. Váhami sú v tomto prípade hraničné príspevky statkov k medzigeneračnému blahobytu, čiže ako v predchádzajúcom prípade tieňové ceny. Celá suma ale v tomto prípade už nie je príjmom ekonomiky, ale jej bohatstvom. Ekonomický rozvoj je potom udržateľný

v čase, pokiaľ bohatstvo v konštantných tieňových cenách je v tom čase neklesajúce. Empirickú prácu v tejto oblasti predstavujú diela Hamiltona a Clemensa [5], Dasguptu [7] či Arrowa et al. [1].

Je zrejmé, že v ustálenom stave sa reálny príjem a jeho dynamický náprotivok bohatstvo - nazývané aj celková miera bohatstva, hýbu rovnako. Dôvod je ten, že v ustálenom stave sú tieňové ceny v čase stabilné. Mimo neho sa tieto dva koncepty líšia, a to niekedy naozaj zásadne.

Svetová banka [34] bola donedávna jedným z lídrov v stanovení celkovej miery bohatstva a analýze udržateľnosti. Jej autori dokázali stanoviť (tieňové) hodnoty niektorých komponentov bohatstva - predovšetkým prírodného, ľudského a reprodukovateľného kapitálu. Napriek tomu, hodnoty nehmotného kapitálu - ako napríklad dĺžky ľudského života a jeho kvality, stanoviť nedokázali, a v ich analýze sú stanovené ako rozdiel odhadu celkovej miery bohatstva (tá je stanovená ako súčasná hodnota očakávanej miery spotreby) a sumy tých zložiek celkovej miery bohatstva, ktoré dokázali ohodnotiť.

V ďalšej podkapitole si prejdeme relatívne nový článok v oblasti udržateľnosti a merania bohatstva [2], ktorý namiesto opisného prístupu vyniká zahrnutím dynamiky vývoja jednotlivých zložiek bohatstva.

2.2 Udržateľnosť a meranie bohatstva v najnovšej literatúre

V roku 2012 rozvíril vody v oblasti udržateľnosti a merania bohatstva článok Arrowa et al. [2]. Významne prispel do diskusie hlavne zahrnutím rastu populácie, technologického pokroku a monetarizovaním zdravotného kapitálu v dynamickom kontexte. Za merateľa bohatstva si autori zvolili *celkovú mieru bohatstva*, pričom objektom skúmania je vyššie spomenutý medzigeneračný blahobyť.

Autori v článku predpokladajú uzavretú ekonomiku so spojitým časom ($s \geq t \geq 0$) a nekonečným časovým horizontom. Označme $C(s)$ vektor spotreby v čase s . Jednotlivé spotrebné statky označujeme indexom j a popri obchodovateľných statkoch zahŕňajú aj voľnočasové statky, rôzne zdravotné statky a spotrebné statky z prírody. Nech $K(s)$ značí zásoby celkových kapitálových statkov v čase s . Jednotlivé kapitálové statky značíme indexom i . Na úvod autori pre jednoduchosť predpokladali, že demografické zmeny, zmeny v súhrnnej produktivite výrobných faktorov (TFP - z ang. Total Factor

Productivity) a zmeny v importných a exportných cenách sú exogénne zadané.

Z predpokladu, že populácia je konštantná, medzigeneračný blahobyť $V(t)$ v čase t je definovaný ako diskontovaná užitočnosť súčasnej a všetkých budúcich generácií:

$$V(t) = \int_t^{\infty} [U(C(s))e^{-\rho(s-t)}] ds, \quad (2)$$

pričom predpokladáme, že daný integrál konverguje.

Autori definovali udržateľný rozvoj nasledovne:

Definícia 2.1. Ekonomický rozvoj je udržateľný v čase t práve vtedy, ak $dV/dt \geq 0$.

Považujeme za dôležité zdôrazniť, že aj napriek tomu, že medzigeneračný blahobyť je definovaný v čase t , vyžaduje si ekonomickú predpoveď aj po čase t . Závisí teda nielen na zásobe statkov v danom čase, ale aj na vývoji technológií, hodnôt, preferencií a inštitúcií v čase po t . Z tohto pohľadu celá budúcnosť kapitálových zásob je známa. Bez postačujúcej teórie v politickej ekonómii, zmeny v inštitúciách chápeme ako exogénne dané. Preto $K(t)$, $K(s)$ a $C(s)$ a teda aj $U(C(s))$ sú dané pre všetky budúce časy $s \geq t$. Preto z rovnice (2), $V(t)$ je dané tiež:

$$V(t) = V(K(t), t), \quad (3)$$

pričom priamo závisí na t , čo umožňuje zdôrazniť vplyv faktorov ako zmeny formy obchodu, technologické zmeny, nevysvetliteľný rast populácie alebo nevysvetliteľné zmeny v inštitúciách, ktoré závisia na čase a sú exogénne zadané. Aj preto môžeme čas t chápať ako dodatočný kapitálový statok, ktorému bude priradená tieňová cenu.

Označme $q_j(t)$ tieňovú cenu statku j v čase t . Potom

$$q_j(t) = \partial U(C(t))/\partial C_j(t). \quad (4)$$

Ďalej predpokladajme, že $V(t)$ je diferencovateľné v K . Deriváciou podľa t dostávame kritérium udržateľného rozvoja v čase t :

$$dV(t)/dt = \partial V/\partial t + \sum_i [(\partial V(t)/\partial K_i(t))(dK_i(t)/dt)] \geq 0. \quad (5)$$

Tiež definujme tieňovú cenu $p_i(t)$ i -teho statku v čase t , ktorá reprezentuje prínos k medzigeneračnému blahobytu $V(t)$ z $K(t)$ prostredníctvom produktov a služieb, ktoré pomáha produkovať, ako aj prostredníctvom priameho pôžitku zo statku samotného:

$$p_i(t) = \partial V(t)/\partial K_i(t). \quad (6)$$

Tieňová cena statku je v každom čase funkciou zásob všetkých statkov. Cena dnes však nezávisí výlučne na dnešnom stave ekonomiky, ale aj na celej jej budúcnosti. Nemôžeme sa teda pozeráť len na nahraditeľnosť statkov dnes, a preto je dôležité brať do úvahy aj obmedzenosť zdrojov. Samozrejme, v koncepte medzigeneračného blahobytu môže byť diskontný faktor ρ vysoký, a teda vplyv na dnešné tieňové ceny obmedzených statkov sa môže javiť ako malý - v tomto prípade je to už ale viac otázka medzigeneračnej etiky.

Na získanie metriky pre celkové bohatstvo zodpovedné za určité exogénne zadané zmeny, potrebujeme ďalšiu tieňovú cenu. Na základe (3) autori teda zaviedli čas t ako kapitálový statok a definovali $r(t)$ ako jeho tieňovú cenu:

$$r(t) = \partial V / \partial t. \quad (7)$$

Tento krok vyčítali Arrowovi et al. viacerí kritici, medzi inými aj Solow v [28], pretože brať čas ako kapitál znamená čisté *čakanie na niečo*. Autori [2] to obhajujú tým, že čas v sebe zahŕňa napríklad aj exogénne zmeny v inštitúciách a vedomostiach, a je na poňatí autora, či ich zahrnie k času, reprodukovateľnému, prírodnému alebo ľudskému kapitálu. Vďaka tomu však dokážeme tieňové ceny použiť ako váhy k zostrojeniu súhrnného indexu zásob kapitálových statkov v ekonomike. Tento index nazvime celkovým bohatstvom $W(t)$ a definujme ho nasledovne:

$$W(t) = r(t)t + \sum p_i(t)K_i(t). \quad (8)$$

Celkové bohatstvo $W(t)$ vlastne reprezentuje dynamickú analógiu k reálnemu národnému príjmu. V článku sa autori ďalej zameriavajú predovšetkým na vzťah medzi zmenami v celkovom bohatstve s konštantnými cenami a medzigeneračným blahobytom.

Tvrdenie 2.2. *Malá zmena v ekonomike zvýši (resp. zníži) medzigeneračný blahobyť v čase t vtedy a len vtedy, ak zvýši (resp. zníži) celkové bohatstvo s konštantnými tieňovými cenami.*

Tieňová cena hrubej investície do statku i je teraz $p_i(t)\Delta K_i(t)$. Označením $I_i(t) = \Delta K_i(t)/\Delta t$ môžeme predchádzajúcu rovnicu napísať ako

$$\Delta V(t) = r(t)\Delta t + \sum p_i(t)I_i(t)\Delta t, \quad (9)$$

kde pravá strana rovnice predstavuje celkovú investíciu sprevádzajúcu zmenu. Tvrdenie 2.2 teda môžeme prepísať ako:

Tvrdenie 2.3. *Malá zmena v ekonomike zvýši (resp. zníži) medzigeneračný blahobyt v čase t vtedy a len vtedy, ak tieňová hodnota celkovej investície v čase t sprevádzajúcej zmenu je kladná (resp. záporná).*

Je známe, že tieňová hodnota celkovej investície môže byť chápaná ako súčasná zdiskontovaná hodnota zmien v spotrebných službách ňou zapríčinených. V rôznych publikáciách venujúcich sa udržateľnému rozvoju, zmena je samotný časový úsek, teda $\Delta t > 0$.

Tvrdenia 2.2 ani 2.3 nehovoria nič o tom, či celkové bohatstvo v niektorej ekonomike môže byť zachované alebo či je prírodný kapitál natoľko vyčerpaný, že danej ekonomike ani v budúcnosti neumožní udržateľný rozvoj. Môže sa stať, že aj napriek udržateľnému rozvoju v súčasnosti, z dôvodu obmedzenosti zdrojov si ho nebude môcť užívať donekonečna. Rovnako, aj napriek tomu, že ekonomika je v niektorých prípadoch schopná udržateľného rozvoja, napríklad kvôli zlým vládnym rozhodnutiam celková miera bohatstva $V(t)$ klesá. Rovnako sa môže stať v optimálnej ekonomike, kde zvolené δ je príliš veľké, teda $V(t)$ v čase klesá. Ako potvrdzuje aj tento príklad, udržateľnosť a optimalita sú dva veľmi odlišné koncepty.

Integrovaním rovnice celkovej investície od $s = 0$ do $s = T$ dostávame:

$$V(T) - V(0) = \int_0^T r(s) ds + \sum_i [p_i(T)K_i(T) - p_i(0)K_i(0)] - \int_0^T \left[\sum_i (dp_i(s)/ds)K_i(s) \right] ds. \quad (10)$$

Táto rovnica hovorí o tom, že na stanovenie toho, či celková miera bohatstva za čas T narástla, kapitálové zisky zo statkov, ktoré počas intervalu narástli, by mali byť odpočítané od rozdielu bohatstva za čas T .

Autori využili poslednú rovnicu (10) na empirickú aplikáciu na dáta piatich krajín za roky 1995-2000. Vzhľadom na nedostatok relevantných údajov, kvôli ktorému museli ako hodnoty niektorých premenných brať priemery za dané obdobie, päť rokov interpretovali ako moment v čase. Kvôli tomuto zjednodušeniu nebrali do úvahy kapitálové zisky a využili Definíciu 2.1 na zhodnotenie udržateľného rozvoja.

V ďalšej časti článku sa autori pokúsili do modelu zakomponovať zmeny v celkovej produktivite faktorov - TFP, zmeny v populácii bez stanovenia jej tieňovej ceny, ako aj medzinárodné externality. V prípade TFP autori dokázali, že ak je hodnota národných úspor malá, tak ku zmene v celkovej investícii musíme pridať približne hodnotu rastu TFP, čo ďalej aj využívali. Ďalej sa snažili zakomponovať do modelu zmeny v populácii, čím nadviazali na dielo Arrowa et al. z roku 2004 [1]. Autori dospeli k nasledujúcemu tvrdeniu:

Tvrdenie 2.4. *Rozvoj je udržateľný v čase t vtedy a len vtedy, ak vyjadrený v konštantných tieňových cenách, celkové bohatstvo per capita neklesá v t .*

Predpoklad o tom, že každá z rovníc môže byť vyjadrená len na báze per capita kapitálových zásob je veľmi silný. Na jej zoslabenie autori ďalej predpokladali, že veľkosť populácie vstupuje do dynamiky ako TFP. V tomto prípade Tvrdenie 2.4 zmeníme tak, že percentuálnu zmenu v populácii pridáme k zmene v bohatstve. Napokon sa autori pokúsili zahrnúť do modelu aj medzinárodné externality, ako napríklad antropogénne klimatické zmeny. Ukázali, že ak $V_n(t)$ označíme medzigeneračný blahobyt v krajine n , tak celková investícia v n je:

$$dV_n(t)/dt = r_n(t) + q_n(t)dK_n(t)/dt + g_n(t) \sum E_n(t), \quad (11)$$

kde $g_n(t) = \partial V_n(t)/\partial G(t)$, pričom $G(t)$ je globálny verejný statok, ktorý môže byť pre niektoré krajiny dobrý a pre niektoré zlý. Poznamenajme, že pravá strana rovnice nezávisí na tom, či je svetová ekonomika v optimálnom stave. Na strane druhej, $dK_n(t)/dt$ a $dG(t)/dt$ závisia na tom, či krajiny navzájom kooperujú, a ovplyvňujú $r_n(t)$, $q_n(t)$ a $g_n(t)$.

Článok je zakončený opisom výberu dát pre ich empirickú aplikáciu a samotnou aplikáciou na reálne dáta piatich krajín - USA, Číny, Brazílie, Indie a Venezuely. Práve v získaní dát identifikovali problém s nepresnosťami a nedostatkom niektorých informácií. Na stanovenie tieňových cien použili hodnoty v zmysle MRS (hraničná miera substitúcie). Ich použitie odôvodňovali voči Solowovej kritike [28] tak, že zaznamenávajú zmeny v užitočnosti, narozdiel od MRT (hraničná miera transformácie), ktoré navrhol Solow. Pri transnárodných externalitách vzali do úvahy len CO_2 emisie, čo kritizoval najmä Hamilton v [12], no zároveň chápal nedostatok relevantných dát.

V závere sa ako významný ukázal vstup zdravotného kapitálu, ktorý napríklad v prípade USA dosiahol až tristonásobok hodnoty prírodného kapitálu. Rovnako v analýze senzitivity v poslednej časti bol jednoznačne najdôležitejším vstupom, ktorý ovplyvnil všetky ďalšie výsledky. Na jeho stanovenie používali autori tzv. hodnotu štatistického roku života, do ktorej síce vstupuje dĺžka života a úmrtnosť, ale nie jeho kvalita či zdravotná starostlivosť, čo mu aj vytýkali jeho kritici [12], [28]. Interpretácia od autorov však znie tak, že hraničná hodnota dlhovekosti v sebe zahŕňa aj hraničný blahobyť z dobrého života, ktorý je spôsobený práve žítím ako takým. Výsledkom empirickej aplikácie je také, že bohatstvo rástlo vo všetkých piatich skúmaných krajinách okrem poslednej - Venezuely.

Tento článok významne prispel k ďalšiemu *rozprúdeniu diskusie* na tému udržateľnosti a stanovil kritérium na jeho meranie pomocou per capita celkového bohatstva. Autori článku navrhli zaujímavý spôsob ponímania zdravia ako určitého druhu kapitálu, zahrnuli do modelu kapitálové zisky, kvalitu životného prostredia či TFP. Ako aj oni sami priznávajú, hlavne v oblasti zdravotného kapitálu existuje však ešte dostatok priestoru na ďalšie skúmanie.

Hoci v článku [2] autori rozhodovací proces explicitne nemodelujú, v ďalšej časti tejto kapitoly naň nadviažeme pomocou teórie optimálneho riadenia. Tá sa núka ako vhodný nástroj na zachytenie vzťahu medzi ekonomickým rastom a životným prostredím. Cieľom je vyjsť z jednoduchších modelov v článkoch [10], [17], ktoré v Kapitole 3 modifikujeme a predstavíme model optimálneho riadenia so zahrnutím znečistenia a neobnoviteľných prírodných zdrojov.

2.3 Jednoduchý model vzťahu medzi spotrebou a znečistením

V tejto podkapitole sa bližšie pozrieme na model prezentovaný Fosterom v článku [10] z roku 1977, ktorý je jedným z prvých modelov v oblasti environmentálnej ekonómie. Objektom skúmania je centrálny plánovací problém vlády. Tá sa snaží maximalizovať budúcu užitočnosť prostredníctvom nastavovania optimálnych hodnôt riadiacej premennej - spotreby. Hoci sa tento model vôbec nezaoberá hospodárskym rastom či akumuláciou kapitálu a produkciu považuje za exogénne zadanú, aj on prispel k budúcemu rozvoju tejto problematiky.

Formálne sa jedná o pomerne jednoduchý problém optimálneho riadenia s jednou riadiacou premennou - spotrebou C a jednou stavovou premennou - znečistením W . Problém môžeme zapísať takto:

$$\begin{aligned} \max_C \int_0^\infty U(C, W)e^{-\rho t} dt, \\ \dot{W} &= Z(C) - \alpha W, \\ W(0) &= W_0, \\ W(\infty) &= \text{voľné}, \\ \phi^0 - C &\geq 0, \\ W &\geq 0. \end{aligned} \tag{12}$$

V účelovej funkcii sa nachádza diskontovaná užitočnosť zo spotreby a znečistenia. Spĺňa štandardné vlastnosti funkcie užitočnosti, ktoré sú bližšie opísané v nasledujúcej kapitole pri formulácii našich dvoch modelov. Stavová rovnica vyjadruje dynamiku v znečistení W . Znečistenie rastie s rastúcou spotrebou C , ktorá vstupuje do funkcie $Z(C)$ a klesá vďaka samočistiacej schopnosti prírody, vyjadrenej konštantou α . Funkcia $Z(C)$ môže byť podľa samotného autora chápaná ako riadiaca funkcia pre znečistenie, pretože práve úroveň spotreby ovplyvňuje znečistenie. V modeli je taktiež zadaná počiatočná podmienka pre úroveň znečistenia, o ktorom predpokladáme, že je v každom čase kladné.

Prejdime teraz k obmedzeniu riadiacej premennej C . Tá má byť menšia ako konštanta ϕ^0 , ktorá predstavuje už spomínané fixné množstvo produkcie. Fixné množstvo produkcie je zároveň považované za hlavné negatívum tohto modelu a znižuje jeho ekonomickú dôveryhodnosť. Autor toto mínus obhajoval tým, že sa zamerával výlučne na vzťah spotreby a znečistenia.

Existujú však aj klady tohto modelu a jedným z nich je prítomnosť jednej stavovej premennej, čo umožňuje jeho grafickú analýzu narozdiel od neskorších, komplikovanejších modelov. Autor po zadefinovaní modelu a jeho optimálnych riešení prešiel k skúmaniu zmien, ktoré majú za následok rôzne počiatočné nastavenia premenných. Ako obzvlášť zaujímavý výsledok bol vybraný ten, ktorý hovorí o tom, že zmena v nastavení množstva produkcie ϕ^0 síce spôsobuje zvýšenú spotrebu, ale na znečistenie má rôzny efekt. Autor toto zistenie interpretuje tak, že ekonomický rast nemusí nutne

znamenat' vyssie znečistenie.

Článok je zakončený analýzou fázových portrétov prislúchajúcich k modelu. Ekvilibrium je jedinečným sedlovým bodom, s optimálnymi riešeniami pozdĺž stabilnej vetvy. Pokiaľ systém začne v bode mimo tejto stabilnej vetvy, od optimálnej trajektórie bude divergovať. V ďalšom rozšírení autor parametrizoval hraničnú užitočnosť zo znečistenia v čistom životnom prostredí. V závislosti od hodnoty tohto parametra model buď dosahuje podobné výsledky ako pri pôvodnej formulácii, alebo je ekvilibrium dosiahnuté v čistom životnom prostredí. V niektorých prípadoch hraničného stacionárneho bodu optimálna trajektória dosiahne čisté životné prostredie počas konečného množstva dní a ostáva v ňom, kým hraničná užitočnosť zo spotreby je nižšia ako jej hraničné fyzické náklady.

Získané výsledky sú teda zaujímavou aplikáciou optimálneho riadenia, žiaľ, bez akumulácie kapitálu a ekonomického rastu. Ich vynechanie značne znížilo empirické využitie modelu, no zároveň pripravilo pôdu pre budúce modely, ktoré sú už o niečo komplexnejšie a relevantnejšie.

2.4 Model hospodárskeho rastu so životným prostredím

V roku 1982 autori Luptáčik a Schubert vydali článok [17], ktorým nadviazali aj na Forsterov model (12) z predchádzajúcej podkapitoly a rozšírili ho. Objektom ich skúmania je hospodársky rast a kvalita životného prostredia. Ich vzájomný vzťah naznačuje, že za lepšiu úroveň jedného zo skúmaných faktorov *zaplatíme* prostredníctvom horšej úrovne toho druhého. Vďaka zahrnutiu výdavkov na zlepšenie na životného prostredia je však možné aj určité zlepšenie v tejto oblasti, a teda tento vzťah nemusí byť nutne vylučovací, ale skôr komplementárny.

Model je sformulovaný ako problém optimálneho riadenia s dvoma riadiacimi premennými - spotrebou C a výdavkami na zlepšenie životného prostredia A a dvoma

stavovými premennými - kapitálom K a znečistením W . Model môžeme zapísať takto:

$$\begin{aligned}
 & \max_{C,A} \int_0^{\infty} U(C, W) e^{-\rho t} dt, \\
 & \dot{K} = F(K) - C - A - \beta K, \\
 & \dot{W} = \epsilon_1 F(K) + \epsilon_2 C + \epsilon_3 K - G(A) - \delta W, \\
 & K(0) = K_0, \\
 & W(0) = W_0, \\
 & K(\infty) = \text{voľné}, \\
 & W(\infty) = \text{voľné}, \\
 & W \geq 0, \\
 & A \geq 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Opäť predpokladáme štandardné vlastnosti účelovej funkcie pod integrálom s limitnou podmienkou pre hraničnú užitočnosť zo spotreby $\lim_{C \rightarrow 0} U_C(C, W) \rightarrow \infty$ pre $\forall W > 0$. Stavová rovnica vyjadrujúca akumuláciu kapitálu hovorí, že kapitál rastie ako produkcia znížená o spotrebu, výdavky na zlepšenie životného prostredia a odpisy. Znečistenie rastie ako konštantný podiel z produkcie, spotreby a kapitálu a klesá s rastúcou funkciou výdavkov do životného prostredia $G(A)$ a vďaka samočistiacej schopnosti prírody.

Autori dokázali vďaka kvalitatívnej analýze modelu odvodiť niektoré jeho vlastnosti a interpretovali ich ekonomický význam. Okrem očakávanej kladnosti adjungovaných premenných, čiže tieňových cien, dokázali odvodiť zaujímavé výsledky týkajúce sa rastu spotreby a výdavkov do životného prostredia. Spotreba C rastie na optimálnej trajektórii vtedy a len vtedy, ak hraničné enviromentálne následky tohto rastu pre konkrétnu úroveň výdavkov A sú menšie ako hrubý hraničný produkt. Na strane druhej, výdavky do A rastú, pokiaľ hrubý hraničný produkt je väčší ako spoločenská hodnota tejto akumulácie kapitálu. V závere práce autori analyzovali stacionárny stav a stabilitu riešenia.

V ďalšej kapitole nadviažeme na model (13) a postupne ho modifikujeme zavedením funkcie emisnej miery a neskôr aj doplnením dynamiky neobnoviteľných prírodných zdrojov. Bližšie popíšeme riešenie získaných modelov a v závere tretej kapitoly zavedieme kritérium na meranie bohatstva.

3 Model so znečistením a neobnoviteľnými zdrojmi

V tejto časti sa po úvode do témy a zhrnutí existujúcej literatúry dostávame do hlavnej časti diplomovej práce - k zadefinovaniu modelov optimálneho riadenia, ktoré nám pomôžu bližšie vysvetliť a objasniť pojem rastu a udržateľnosti bohatstva s rozhodovacím procesom. V prvom modeli vychádzame predovšetkým z modelu autorov Luptáčika a Schuberta (13), pričom za najzákladnejší rozdiel považujeme modifikáciu vstupu výdavkov do životného prostredia. V druhom, nosnom modeli tejto diplomovej práce doplníme do formulácie tiež dynamiku neobnoviteľných prírodných zdrojov.

Kapitola je rozčlenená do viacerých častí. V prvej časti predstavíme dva modely optimálneho riadenia a ich základné charakteristiky. Zameriame sa na modelovanie ich enviromentálnych vlastností - okrem zmien v množstve kapitálu aj na zmeny v množstve znečistenia a v druhom modeli zahrnieme aj spotrebu neobnoviteľných zdrojov. Súčasťou oboch modelov sú výdavky s pozitívnym vplyvom na životné prostredie. Následne sformulujeme pre oba modely podmienky, ktoré nám ich pomôžu vyriešiť. V tejto časti tiež spravíme kvalitatívnu analýzu modelov. Keďže modely vzhľadom na ich náročnosť nie je možné riešiť analyticky, navrhujeme spôsob, ako ich riešiť s použitím numerických metód. V závere tejto kapitoly predstavíme postup, pomocou ktorého budeme merať celkové bohatstvo.

3.1 Modifikovaný model hospodárskeho rastu so životným prostredím

Tento model nadväzuje na model (13) s drobnou modifikáciou vo vstupe emisnej kontroly. Predtým, než si zadefinujeme celý model, zameriame sa na tie vlastnosti, ktoré by mal spĺňať. Z nich budeme vychádzať pri formulácii nielen tohto modelu, ale aj modelu s doplnením dynamiky neobnoviteľných prírodných zdrojov.

Cieľom vlád a vedúcich predstaviteľom štátov je zvyšovať spotrebu (teda konzumná spoločnosť sa má lepšie) a znižovať znečistenie. Každý človek má svoju funkciu užitočnosti U_s , $s \in R$, ktorá vyjadruje jeho preferencie a úžitok zo spotreby rôznych statkov. Úžitok zo spotreby niektorých statkov môže byť pozitívny a z iných, naopak, negatívny. Rovnako môžeme definovať funkciu užitočnosti celej spoločnosti U . V našom modifi-

kovanom modeli do užitočnosti vstupujú dva faktory - spotreba C a znečistenie W . Ako sme už načrtli, rast v spotrebe má za následok zvýšený úžitok, na strane druhej, rast v znečistení úžitok znižuje. To je vyjadrené pomocou konkávnej funkcie užitočnosti $U(C, W)$ s nasledujúcimi vlastnosťami:

$$\begin{aligned} U_C > 0, \quad U_{CC} < 0, \quad C > 0, \\ U_W < 0, \quad U_{WW} < 0, \quad W > 0. \end{aligned}$$

Len pre pripomenutie, značenie f_x používame na označenie parciálnej derivácie funkcie f podľa premennej x (teda $f_x = \partial f / \partial x$).

Užitočnosť v predchádzajúcej funkcii je len okamžitá užitočnosť spoločnosti a nezahrňa v sebe užitočnosť nasledujúcich generácií. Preto musíme vypočítať *present value* dnešnej aj všetkých budúcich užitočností spoločnosti v závislosti od spotreby a úrovne znečistenia. Použijúc diskontný faktor ρ na vyjadrenie časových preferencií a konečný časový horizont T , dokážeme sformulovať problém optimálneho riadenia - maximalizáciu dobrobytia $V(t)$ nasledovne:

$$\max V(t) = \int_0^T U(C, W)e^{-\rho t} dt. \quad (14)$$

Úroveň ekonomického rastu je definovaná pomocou produkčnej funkcie F , do ktorej vstupuje ako jediný faktor kapitál K . Funkcia $F(K)$ spĺňa všetky štandardné predpoklady:

$$F'(K) > 0, \quad F''(K) < 0, \quad F(0) = 0.$$

Produkcia generovaná kapitálom $Y = F(K)$ môže byť využitá viacerými spôsobmi. V prvom rade môže byť investovaná a využitá tak na rast kapitálu K v budúcnosti. Rovnako môže byť využitá v rámci spotreby C . Poslednou, treťou možnosťou je jej využitie na zlepšenie životného prostredia formou výdavkov A . Môžeme to teda vyjadriť ako:

$$Y = I + C + A. \quad (15)$$

Nakoľko zásoby kapitálu K sú generované pomocou investícií, vieme vyjadriť dynamickú rovnicu vyjadrujúcu zmenu v množstve kapitálu nasledovne:

$$\dot{K} = F(K) - C - A - \delta_1 K, \quad (16)$$

kde do zmeny v množstve kapitálu vstupujú okrem produkcie a poníženia vo forme spotreby C a výdavkov do životného prostredia A aj kapitálové odpisy s faktorom $\delta_1 \in [0, 1]$.

Ďalej sa budeme do nášho modelu snažiť zahrnúť znečistenie W a jeho dynamiku. Znečistenie je priamym následkom produkcie $F(K)$, avšak nie spotreby C a kapitálu K . V modeli (13) je znečistenie odbúravané tzv. *end of pipe* (z ang. koniec trubice) spôsobom, ktorý redukuje znečistenie nezávisle od vstupov. Po diskusii so školiteľom sme navrhli nový spôsob odbúravania emisií. Ich podiel na celkovej produkcii sme vyjadrili pomocou funkcie e , ktorá nepredstavuje konštantný podiel na produkcii, ale je definovaná ako klesajúca závislosť od investícií s pozitívnym vplyvom na životné prostredie $e(A)$. Zrejme sú vlastnosti tejto funkcie:

$$e'(A) < 0, \quad e''(A) > 0, \quad e(A) > 0.$$

Vyjadrime si teda dynamickú rovnicu vyjadrujúcu množstvo zmeny znečistenia v čase ako:

$$\dot{W} = e(A)F(K) - \delta_2 W. \quad (17)$$

Zmenu v množstve znečistenia predstavuje okrem podielu na produkcii aj samočistiaca schopnosť prírody vyjadrená pomocou regeneračného faktora $\delta_2 \in [0, 1]$.

3.1.1 Formulácia modelu

Teraz sme schopní zhrnúť matematickú formuláciu modelu - maximalizáciu účelovej funkcie $V(t)$ (14) s dynamickými rovnicami vyjadrujúcimi zmenu kapitálu K (16) a znečistenia W (17) a počiatočnými a koncovými podmienkami ako problém optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned}
 \max_{C,A} V(t) &= \int_0^T U(C, W)e^{-\rho t} dt, \\
 \dot{K} &= F(K) - C - A - \delta_1 K, \\
 \dot{W} &= e(A)F(K) - \delta_2 W, \\
 K(0) &= K_0, \\
 W(0) &= W_0, \\
 K(T) &= \text{voľné}, \\
 W(T) &= \text{voľné}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

O danej úlohe optimálneho riadenia vieme povedať, že sa jedná o autonómnu Lagrangeovu úlohu s diskontným faktorom s pevným časom, s voľným koncom a bez ohraničení na riadenie. V modeli vystupujú dve riadiace premenné - spotreba C a investície na zlepšenie životného prostredia A , stavové premenné sú tiež dve - kapitál K a znečistenie W . Pre zjednodušenie budeme tento model nazývať aj *Model 1*.

V ďalšej časti odvodíme podmienky Pontrjaginovho princípu maxima pre daný model, ktoré budú slúžiť ako základ v kvalitatívnej analýze.

3.1.2 Pontrjaginov princípu maxima a kvalitatívna analýza modelu

Pred začiatkom analýzy a odvodením akýchkoľvek vlastností Modelu 1 si sformulujeme podmienky Pontrjaginovho princípu maxima (PPM). Začneme Hamiltonovou funkciou vyjadrenou v *current value*. Keďže sa jedná o maximalizačnú úlohu s voľným koncom, môžeme položiť $\psi^0 = 1$.

Hamiltonova funkcia

$$\begin{aligned}
 H(K, W, C, A, \psi_K, \psi_W) &= U(C, W) + \\
 &+ \psi_K [F(K) - C - A - \delta_1 K] + \\
 &+ \psi_W [e(A)F(K) - \delta_2 W]
 \end{aligned} \tag{19}$$

Adjungované rovnice

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_K(t) &= \rho\psi_K - \psi_K(F'(\hat{K}) - \delta_1) - \psi_W e(\hat{A})F'(\hat{K}) \\
 \dot{\psi}_W(t) &= \rho\psi_W - U_W(\hat{C}, \hat{W}) + \delta_2\psi_W
 \end{aligned} \tag{20}$$

Podmienky transversality

$$\begin{aligned}\psi_K(T) &= 0 \\ \psi_W(T) &= 0\end{aligned}\tag{21}$$

Princíp maxima

Zapíšeme schematicky ako $H \rightarrow \max_{C,A}$.

Pričom platí, že optimálne riešenia \hat{C} , \hat{A} musia spĺňať podmienku optimality, t.j.:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \hat{C}} &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \hat{A}} &= 0,\end{aligned}\tag{22}$$

teda:

$$\begin{aligned}\psi_K &= U_C(\hat{C}, \hat{W}) \\ \psi_W &= \frac{\psi_K}{e'(\hat{A})F(\hat{K})} = \frac{U_C(\hat{C}, \hat{W})}{e'(\hat{A})F(\hat{K})}.\end{aligned}\tag{23}$$

Prejdime teraz ku kvalitatívnej analýze Modelu 1. Postupne si prejdeme niektoré podmienky PPM, z ktorých sa budeme snažiť vyvodiť podmienky pre optimálny stav alebo vlastnosti tieňových cien. V kvalitatívnej analýze predpokladáme, že vystupujúce riadiace a stavové premenné sú optimálne. Základné pravidlo, ktoré by malo byť dodržané vo všetkých plánovacích periódach je: *hraničné sociálne výnosy = hraničné sociálne náklady*.

V našom prípade rovnice pre tieňové ceny v optimálnom stave (23) implikujú:

Tvrdenie 3.1. *Hraničná užitočnosť zo spotreby U_C musí byť rovnaká ako tieňová cena kapitálu. Inými slovami, efekt jednotky vynaloženej na spotrebu musí byť rovnaký ako efekt jednotky vynaloženej na investície.*

Tvrdenie 3.2. *Tieňová cena znečistenia musí byť rovnaká ako pomer hraničnej užitočnosti zo spotreby U_C k zníženiu, ktoré mi generuje jednotka výdavkov investovaných do zlepšenia životného prostredia $e'(A)F(K)$.*

Teraz sa pozrieme na to, či sú investície a produkcia pre nás vždy užitočné a či je viac znečistenia vždy škodlivého v zmysle spoločenského blahobytu. Zistíme to podľa znamienka tieňových cien kapitálu, resp. znečistenia vychádzajúcich z predpokladov o

jednotlivých funkciách v našom modeli:

$$\psi_K = U_C(C, W) > 0 \quad (24)$$

$$\psi_W = \frac{U_C(C, W)}{e'(A)F(K)} < 0. \quad (25)$$

Získané znamienka tieňových cien nás vedú k nasledovným dôsledkom:

Dôsledok 3.3. *Hraničná spoločenská hodnota kapitálu je vždy kladná. Dôvodom je to, že vždy existuje užitočná možnosť ako využiť dodatočnú jednotku kapitálu - napr. vo forme spotreby, investícií či výdavkov na odbúravanie znečistenia.*

Dôsledok 3.4. *Hraničná spoločenská hodnota znečistenia je záporná v každom čase.*

Vráťme sa ešte k adjungovaným rovniciam (20) vyjadrujúcim zmenu tieňových cien v čase. Ich prepísaním dostávame:

$$\frac{\dot{\psi}_K}{\psi_K} = \rho - \left[1 - \frac{e(A)}{e'(A)F(K)} \right] F'(K) + \delta_1 \quad (26)$$

a

$$\frac{\dot{\psi}_W}{\psi_W} = \rho - \frac{U_W(C, W)}{U_C(C, W)} e'(A)F(K) + \delta_2, \quad (27)$$

čo implikuje nasledovné tvrdenia:

Tvrdenie 3.5. *Relatívna zmena v hodnote kapitálového statku v čase $\frac{\dot{\psi}_K}{\psi_K}$ je rovná diskontnej miere zaplatenej za ponechanie jednotky kapitálu pre budúce generácie zníženej o hrubý hraničný produkt $\left[1 - \frac{e(A)}{e'(A)F(K)} \right] F'(K)$ (časť z produkcie musí byť využitá na odstránenie emisií pochádzajúcich z nárastu produkcie) plus kapitálové odpisy δ_1 .*

Tvrdenie 3.6. *Relatívna zmena v hodnote znečistenia v čase $\frac{\dot{\psi}_W}{\psi_W}$ musí byť rovná diskontnej miere zaplatenej za ponechanie jednotky čistého životného prostredia do budúcnosti zníženej o užitočnosť vyjadrenú v hraničnom úžitku zo znečistenia v pomere k hraničnému úžitku zo spotreby vynásobenú hraničným príspevkom funkcie emisnej miery z celkovej produkcie plus samočistiaca schopnosť prírody δ_2 .*

V poslednej časti kvalitatívnej analýzy Modelu 1 sa zameriame na spotrebu a konkrétne na to, či spotreba bude v čase rásť aj v prípade, že budú rásť výdavky investované

do zlepšenia životného prostredia. Zistíme to využitím rovnice (23) pre tieňovú cenu kapitálu ψ_K . Jej zdiferencovaním podľa času dostávame:

$$\frac{\dot{\psi}_K}{\psi_K} = \frac{U_{CC}(C, W)}{U_C(C, W)} \dot{C}. \quad (28)$$

Označme si $\sigma(C) = -C(U_{CC}/U_C) > 0$ elasticitu hraničnej užitočnosti zo spotreby. Použitím rovnice (26) na vyjadrenie $\frac{\dot{\psi}_K}{\psi_K}$ dostávame nasledujúce vyjadrenie relatívnej zmeny spotreby:

$$\frac{\dot{C}}{C} = -\frac{1}{\sigma(C)} \left[\rho - \left(1 - \frac{e(A)}{e'(A)F(K)} \right) F'(K) + \delta_1 \right]. \quad (29)$$

Aby bol rast pozitívny, musí byť obsah hranatej zátvorky záporný, a teda získavame podmienku:

$$\rho + \delta_1 < \left(1 - \frac{e(A)}{e'(A)F(K)} \right) F'(K). \quad (30)$$

Je zrejmé, že obsah zátvorky na pravej strane nerovnice musí byť vždy kladný. Vyjadrením $e(A)$ dostávame podmienku pre funkciu emisnej miery:

$$e(A) < e'(A)F(K), \quad (31)$$

ktorá hovorí o tom, že množstvo emisií na jednotku produkcie musí byť pri raste spotreby vždy nižšie ako zníženie emisií, ktoré mi generuje jednotka výdavkov na zlepšenie životného prostredia A .

Rovnako z rovnice (29) vidíme, že pokiaľ je diskontná miera ρ maličká až rovná nule, a teda spotreba dnes je pre spoločnosť rovnako užitočná ako spotreba v budúcnosti, bude ľavá strana nerovnice (30) menšia a teda spotreba bude v čase rásť. Ekvivalentne, pokiaľ bude ρ príliš veľké, podmienka nebude splnená a spotreba bude v čase klesať.

V ďalšej podkapitole rozšírime Model 1 o dynamiku neobnoviteľných prírodných zdrojov. Po zedefinovaní modelu a jeho kvalitatívnej analýze prejdeme spôsob a algoritmus, pomocou ktorého budeme oba modely riešiť numericky. V poslednej časti tejto kapitoly predstavíme spôsob, akým budeme merať bohatstvo počas zvoleného časového horizontu.

3.2 Model so znečistením a neobnoviteľnými prírodnými zdrojmi

V tejto časti rozšírime Model 1 z predchádzajúcej podkapitoly o dynamiku v zmene množstva neobnoviteľných prírodných zdrojov, ktoré taktiež vstupujú aj do novej pro-

dukčnej funkcie F .

Účelová funkcia ostáva rovnaká - teda integrujeme diskontovanú užitočnosť zo spotreby C a znečistenia W :

$$\max V(t) = \int_0^T U(C, W)e^{-\rho t} dt. \quad (32)$$

Požadované vlastnosti funkcie užitočnosti ostávajú nemenné.

Úroveň ekonomického rastu je v rozšírenom modeli definovaná pomocou produkčnej funkcie F , do ktorej teraz okrem kapitálu K vstupujú aj neobnoviteľné zdroje R s technologickým pokrokom g . Nová formulácia produkčnej funkcie $F(K, gR)$ poskytuje možnosť substitúcie prírodných zdrojov pomocou fyzického *man-made* kapitálu, čo znamená, že pri rovnakom množstve neobnoviteľného zdroja R dokážeme pri raste g vyrobiť väčšie množstvo, čím znižujeme mieru intenzity využívania zdrojov. Produkčná funkcia teda poskytuje predpoklad rastu aj napriek obmedzenosti zdrojov a splňa tieto predpoklady:

$$\begin{aligned} F_K &> 0, & F_{KK} &< 0, \\ F_R &> 0, & F_{RR} &< 0, \\ F(0, gR) &= 0, & F(K, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Je zrejmé, že nová produkčná funkcia $F(K, gR)$ vstupuje do dynamických rovníc pre kapitál K a znečistenie W nasledovne:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= F(K, gR) - C - A - \delta_1 K \\ \dot{W} &= e(A)F(K, gR) - \delta_2 W. \end{aligned} \quad (33)$$

Napokon si zdefinujme dynamiku zmeny v množstve neobnoviteľných zdrojov. Formou diskusie so školiteľom vznikla formulácia, pri ktorej neobnoviteľné zdroje nepribúdajú (t.j. nepripúšťame napríklad nájdenie nových zásob), iba sa znižujú konštantnou mierou r . Dynamická rovnica preto vyzerá nasledovne:

$$\dot{R} = -rR. \quad (34)$$

3.2.1 Formulácia modelu

Teraz sme schopní zhrnúť matematickú formuláciu modelu rozšíreného o dynamiku neobnoviteľných zdrojov. Maximalizácia účelovej funkcie $V(t)$ (32) s dynamickými rovnicami vyjadrujúcimi zmenu kapitálu K a znečistenia W (33), oproti Modelu 1 doplnená

o rovnicu vyjadrujúcu zmeny v množstve neobnoviteľných zdrojov R (34) s podmienkami na počiatkový a konečný stav dáva nasledovný problém optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned}
 \max_{C,A} V(t) &= \int_0^T U(C, W)e^{-\rho t} dt, \\
 \dot{K} &= F(K, gR) - C - A - \delta_1 K, \\
 \dot{W} &= e(A)F(K, gR) - \delta_2 W, \\
 \dot{R} &= -rR, \\
 K(0) &= K_0, \\
 W(0) &= W_0, \\
 R(0) &= R_0, \\
 K(T) &= \text{voľné}, \\
 W(T) &= \text{voľné}, \\
 R(T) &= \text{voľné}.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Klasifikácia tohto modelu je totožná s klasifikáciou Modelu 1 z predchádzajúcej podkapitoly. Jediná zmena je v tom, že k dvom stavovým premenným - kapitálu K a znečisteniu W pribudla aj tretia stavová premenná, ktorá reprezentuje neobnoviteľné prírodné zdroje R .

Z vyjadrenia pre dynamiku vývoja kapitálu $\dot{K} = F(K, gR) - C - A - \delta_1 K$ vidíme, že produkcia $F(K, gR)$ je rovná súčtu čistých investícií $\dot{K} - \delta_1 K$, spotreby C a výdavkov do životného prostredia A . V určitom zmysle sú teda investície treťou, v modeli priamo nevystupujúcou riadiacou premennou.

Tento model budeme ďalej označovať ako *Model 2*.

3.2.2 Pontrjaginov princíp maxima a kvalitatívna analýza modelu

Rovnako ako v predchádzajúcom modifikovanom modeli so znečistením si pred ďalšou analýzou najprv zapíšeme podmienky PPM, z ktorých sa budeme snažiť odvodiť vlastnosti Modelu 2. Hamiltonovu funkciu ako aj podmienky k nej prislúchajúce zapíšeme v *current value* zmysle, čím sa vyhneme neautonómnosti spôsobenej diskontným faktorom ρ v účelovej funkcii. Dostávame teda:

Hamiltonova funkcia

$$\begin{aligned}
 H(K, W, R, C, A, \psi_K, \psi_W, \psi_R) = & U(C, W) + \\
 & + \psi_K [F(K, gR) - C - A - \delta_1 K] + \\
 & + \psi_W [e(A)F(K, gR) - \delta_2 W] - \\
 & - \psi_R rR
 \end{aligned} \tag{36}$$

Adjungované rovnice

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_K(t) = & \rho\psi_K - \psi_K [F_K(\hat{K}, g\hat{R}) - \delta_1] - \psi_W e(\hat{A}) F_K(\hat{K}, g\hat{R}) \\
 \dot{\psi}_W(t) = & \rho\psi_W - U_W(\hat{C}, \hat{W}) + \delta_2 \psi_W \\
 \dot{\psi}_R(t) = & \rho\psi_R - \psi_K [F_R(\hat{K}, g\hat{R})(g\hat{R})'] - \psi_W e(\hat{A}) F_R(\hat{K}, g\hat{R})(g\hat{R})' + \psi_{Rr}
 \end{aligned} \tag{37}$$

Podmienky transversality

$$\begin{aligned}
 \psi_K(T) &= 0 \\
 \psi_W(T) &= 0
 \end{aligned} \tag{38}$$

Princíp maxima

Opäť zapíšeme schematicky ako $H \rightarrow \max_{C,A}$.

Pričom platí, že optimálne riešenia \hat{C} , \hat{A} musia spĺňať podmienku optimality, t.j.:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial \hat{C}} &= 0 \\
 \frac{\partial H}{\partial \hat{A}} &= 0,
 \end{aligned} \tag{39}$$

teda:

$$\begin{aligned}
 \psi_K &= U_C(\hat{C}, \hat{W}) \\
 \psi_W &= \frac{\psi_K}{e'(\hat{A})F(\hat{K}, g\hat{R})}.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Prejdime teraz ku kvalitatívnej analýze tohto modelu. Vidíme, že rovnice (40) nám dávajú kvalitatívne rovnaké výsledky ako podmienky optimality (23) pre model so znečistením z predchádzajúcej podkapitoly. Poznamenajme, že v kvalitatívnej analýze pre jednoduchosť predpokladáme, že vystupujúce riadiace a stavové premenné sú optimálne. Môžeme teda odvodiť nasledovné tvrdenia a dôsledky:

Tvrdenie 3.7. *Hraničná užitočnosť zo spotreby U_C musí byť rovnaká ako tieňová cena kapitálu. Inými slovami, efekt jednotky vynaloženej na spotrebu musí byť rovnaký ako efekt jednotky vynaloženej na investície.*

Tvrdenie 3.8. *Tieňová cena znečistenia musí byť rovnaká ako pomer hraničnej užitočnosti zo spotreby U_C k zníženiu, ktoré mi generuje jednotka výdavkov investovaných do zlepšenia životného prostredia $e'(A)F(K, gR)$.*

Navyše, spojením rovníc pre tieňové ceny kapitálu a znečistenia (40) dostávame vyjadrenie:

$$\psi_W e'(A)F(K, gR) = U_C(C, W) = \psi_K, \quad (41)$$

ktoré nás vedie k nasledovnému tvrdeniu:

Tvrdenie 3.9. *Tieňová hodnota efektu jednej jednotky produkcie vynaloženej do životného prostredia musí byť v optimálnom stave rovná efektu investície jednej jednotky produkcie do spotreby. Inými slovami, investície do životného prostredia a spotreby pri-nášajú rovnaký efekt.*

O kladnosti, resp. zápornosti tieňových cien vieme vyvodiť:

$$\begin{aligned} \psi_K &= U_C(C, W) > 0 \\ \psi_W &= \frac{U_C(C, W)}{e'(A)F(K, gR)} < 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Získané znamienka tieňových cien nás vedú k nasledovným dôsledkom:

Dôsledok 3.10. *Hraničná spoločenská hodnota kapitálu je vždy kladná. Dôvodom je, že vždy existuje užitočná možnosť ako spotrebovať dodatočnú jednotku kapitálu - napr. vo forme spotreby, investícií či výdavkov na odbúravanie znečistenia.*

Dôsledok 3.11. *Hraničná spoločenská hodnota znečistenia je záporná v každom čase.*

Pozrime sa teraz na znamienko tieňovej ceny neobnoviteľných zdrojov ψ_R . Budeme sa snažiť využiť adjungovanú rovnicu vyjadrujúcu dynamiku ψ_R (37). Pri požiadavke kladnosti zmeny dostávame nasledovnú nerovnicu:

$$\frac{\dot{\psi}_R}{\psi_R} = \rho + r - \frac{\psi_K}{\psi_R} F_R(K, gR)g - \frac{\psi_W}{\psi_R} e(A)F_R(K, gR)g > 0, \quad (43)$$

a teda:

$$\rho + r > \frac{\psi_K + \psi_W e(A)}{\psi_R} gF_R(K, gR). \quad (44)$$

Z tejto nerovnice vieme vyvodit:

Tvrdenie 3.12. *Tieňová cena neobnoviteľných zdrojov rastie vtedy a len vtedy, ak súčet diskontnej miery ρ a intenzity čerpania neobnoviteľných zdrojov r je vyšší ako hraničný produkt neobnoviteľných zdrojov vynásobený technologickým pokrokom $gF_R(K, gR)$ a pomerom súčtu tieňovej ceny kapitálu ψ_K a tieňovej ceny znečistenia vynásobenej emisnou mierou $e(A)\psi_W$ k tieňovej cene neobnoviteľných zdrojov ψ_R .*

O celkovej kladnosti či zápornosti ψ_R však na základe týchto podmienok nedokážeme povedať nič.

Pre tieňové ceny kapitálu ψ_K a znečistenia ψ_W vieme z adjungovaných rovníc (37) podobne ako pri Modeli 1 vyjadriť:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\psi}_K}{\psi_K} &= \rho - \left[1 - \frac{e(A)}{e'(A)F(K, gR)} \right] F_K(K, gR) + \delta_1 \\ \frac{\dot{\psi}_W}{\psi_W} &= \rho - \frac{U_W(C, W)}{U_C(C, W)} e'(A)F(K, gR) + \delta_2. \end{aligned} \quad (45)$$

Opäť teda môžeme vyvodit tvrdenia:

Tvrdenie 3.13. *Relatívna zmena v hodnote kapitálového statku v čase $\frac{\dot{\psi}_K}{\psi_K}$ je rovná diskontnej miere zaplatenej za ponechanie jednotky kapitálu pre budúce generácie zníženej o hrubý hraničný produkt $\left[1 - \frac{e(A)}{e'(A)F(K, gR)} \right] F_K(K, gR)$ (časť z produkcie musí byť využitá na odstránenie emisií pochádzajúcich z nárastu produkcie) plus kapitálové odpisy δ_1 .*

Tvrdenie 3.14. *Relatívna zmena v hodnote znečistenia v čase $\frac{\dot{\psi}_W}{\psi_W}$ musí byť rovná diskontnej miere zaplatenej za ponechanie jednotky čistého životného prostredia do budúcnosti zníženej o užitočnosť vyjadrenú v hraničnom úžitku zo znečistenia v pomere k hraničnému úžitku zo spotreby vynásobenú hraničným príspevkom funkcie emisnej miery z celkovej produkcie plus samočistiaca schopnosť prírody δ_2 .*

Na základe týchto tvrdení by bolo možné ďalej vyvodit, kedy tieňové ceny ψ_K a ψ_W rastú a kedy klesajú.

Ďalšia interpretácia výsledkov je vzhľadom na komplexnosť oboch modelov komplikovaná, a preto budeme kvalitatívne výsledky konfrontovať s numerickým riešením. V nasledujúcej podkapitole predstavíme algoritmus na numerické riešenie daného typu úlohy optimálneho riadenia. Algoritmus naprogramujeme v matematickom softvéri Matlab a jeho výsledky budeme analyzovať v poslednej kapitole tejto diplomovej práce.

3.3 Numerické riešenie problémov optimálneho riadenia

Oba modely sformulované v predchádzajúcej podkapitole disponujú väčším počtom ako stavových, tak aj riadiacich premenných, a vzhľadom na celkovú zložitosť ich nebudeme riešiť analyticky, ale s použitím numerických metód. Na vyriešenie tohto problému numericky, resp. na nájdenie po častiach spojitých riadiacich funkcií $C(t)$ a $A(t)$, ktoré maximalizujú integrál z účelovej funkcie, môžeme využiť škálu numerických metód alebo techník nelineárneho programovania.

3.3.1 Klasifikácia možností numerického riešenia

Riešenie úloh optimálneho riadenia s použitím numerických metód rozdeľujeme do dvoch skupín:

- riešenie priamymi metódami,
- riešenie nepriamymi metódami.

V prvej zo zvolených možností riešenia, priamou metódou, integrál aj diferenciálne rovnice najprv zdiskretizujeme, čím získame úlohu nelineárneho programovania, ktorú už riešime štandardnými metódami. Vzhľadom na obrovský počet možností diskretizácie ako integrálu, tak aj diferenciálnych rovníc, a tiež škály možností riešenia problému nelineárneho programovania, získavame veľký počet rôznych priamych numerických metód.

Na strane druhej, nepriame metódy riešenia problému optimálneho riadenia aproximujú riešenia pomocou numerického riešenia okrajovej úlohy systému získaného z PPM. Existujú rôzne metódy riešenia okrajovej úlohy, napr. metóda strelby, metóda konečných diferencií či kolokačné metódy [4].

V našich modeloch máme zadané dve, resp. tri diferenciálne rovnice pre stavové premenné K, W, R a dve, resp. tri diferenciálne rovnice pre adjungované premenné ψ_K, ψ_W, ψ_R . Zadané sú počiatočné stavy $K(0), W(0), R(0)$ a konečné stavy $\psi_K(T), \psi_W(T), \psi_R(T)$. Podmienka optimality nám umožňuje vyjadriť si optimálne \hat{C} a \hat{A} na báze času t , stavových a riadiacich premenných. Po substitúcii tohto vyjadrenia do obyčajných diferenciálnych rovníc získavame tzv. dvojbodovú okrajovú úlohu.

3.3.2 Riešenie pomocou Forward-Backward Sweep Method

V našej práci využijeme niektoré vlastnosti zvoleného modelu a naprogramujeme ho pomocou tzv. *Forward-Backward Sweep Method* (FBSM). FBSM je jednou z nepriamych metód na riešenie problémov optimálneho riadenia. Začneme využitím podmienok PPM, ktoré sú uvedené v predchádzajúcej podkapitole. Získané podmienky dávajú dvojbodovú okrajovú úlohu a z podmienky optimality získavame dodatočné algebraické rovnice $H_A = 0, H_C = 0$.

Približný náčrt fungovania algoritmu uvádzame nižšie podľa [16]:

Krok 1 Odhadneme počiatočné hodnoty riadiacich premenných C, A na intervale.

Odhadnuté hodnoty si uložíme ako C, A .

Krok 2 Použijúc počiatočné podmienky pre stavové premenné $K(0) = K_0, W(0) = W_0$ a $R(0) = R_0$ a uložené hodnoty pre C, A , vyriešime K, W, R doprednou Runge-Kutta metódou podľa diferenciálnych rovníc v systéme.

Krok 3 Využijeme podmienky transversality $\psi_K(T) = 0, \psi_W(T) = 0$ a $\psi_R(T) = 0$ a uložené hodnoty K, W, R, C a A . Adjungované rovnice vyriešime spätnou Runge-Kutta metódou podľa diferenciálnych rovníc systému.

Krok 4 Updatujeme hodnotu riadiacich premenných C a A pomocou nových stavových K, W, R a adjungovaných premenných ψ_K, ψ_W, ψ_R .

Krok 5 Skontrolujeme konvergenciu. Pokiaľ rozdiel hodnôt premenných v tejto a poslednej iterácii je dostatočne malý, tieto premenné sú riešením. Pokiaľ rozdiel nie je dostatočne malý, pokračujeme opäť v kroku 2.

Čo sa týka praktických poznámok k algoritmu - na úvod sme zvolili počiatočné hodnoty riadiacich premenných $C(0) = 0$ a $A(0) = 0$. Pokiaľ by sa niekde v programe vyskytlo delenie nulou, museli by sme zvoliť iný počiatočný odhad, rovnako aj v prípade, že by náš algoritmus mal problémy s konvergenciou.

Hoci to nie je vždy nutné, riadiace premenné kvôli zrýchleniu konvergenzie upravujeme ako konvexné kombinácie (priemer) predchádzajúcej hodnoty a aktuálnej hodnoty.

V Krokoch 2 a 3 používame na riešenie systému obyčajných diferenciálnych rovníc *Runge - Kutta metódu 4. rádu*, ktorej chyba h ide rýchlejšie k 0 ako chyby Eulerových metód. Odvodenie Runge-Kutta metód pochádza z Taylorovho rozvoja funkcie $x(t)$ a porovnania koeficientov pri rovnakých mocninách h . Známe sú aj iné Runge - Kutta metódy, napríklad metóda 2. rádu a nazýva *Heunova metóda* a metóda 6. rádu *Huťova metóda*.

Na ilustráciu: Pokiaľ sú známe $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ a $x(t)$, potom aproximácia Runge - Kutta metódou 4. rádu $x(t+h)$ je daná ako:

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (46)$$

kde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, x(t)) \\ k_2 &= f\left(t + \frac{1}{2}h, x(t) + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= f\left(t + \frac{1}{2}h, x(t) + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ k_4 &= f(t+h, x(t) + hk_3) \end{aligned} \quad (47)$$

Bližšie informácie o stabilite riešenia a vhodnosti zvolenej metódy je možné nájsť vo viacerých textoch, napr. [8].

Na overenie konvergenzie v Kroku 5 existuje veľa testov. Zvyčajne je dostatočné požadovať, aby rozdiel $\sum_{i=1}^n |u(i) - u_s(i)|$ bol dostatočne malý, kde $u(i)$ je vektor odhadovaných hodnôt riadiacej premennej počas prebiehajúcej iterácie a $u_s(i)$ je vektor odhadovaných hodnôt z predchádzajúcej iterácie. Oba vektory sú dĺžky n , čo je počet časových krokov. V našom programe používame striktnejší test na konvergenciu pomocou percentuálnej odchýlky:

$$\frac{|u - u_s|}{|u|} \leq \epsilon, \quad (48)$$

kde ϵ je povolená odchýlka. V zmysle [16] túto podmienku ešte trochu upravíme a požadujeme:

$$\epsilon \sum_{i=1}^n |u(i)| - \sum_{i=1}^n |u(i) - u_s(i)| \geq 0, \quad (49)$$

pričom splnenie tejto podmienky požadujeme nielen pre riadiace premenné C a A , ale aj pre všetky stavové premenné.

Dôkaz o konvergencii FBSM vzhľadom na jeho dĺžku nebudeme uvádzať. Je možné nájsť ho napríklad v článku [19].

3.4 Meranie bohatstva a udržateľný rozvoj

V zmysle ústredného článku tejto diplomovej práce [2] sa budeme v oboch našich modeloch po ich numerickom riešení snažiť zhodnotiť vývoj bohatstva počas sledovaného časového horizontu. K tomu využijeme Definíciu 2.1, ktorá hovorí, že ekonomický rozvoj je udržateľný, ak $dV/dt \geq 0$. Budeme teda sledovať vývoj medzigeneračného blahobytu $V(t)$ pomocou celkového bohatstva $B(t)$ v každom čase. Celkové bohatstvo je v prípade Modelu 1 definované ako vážená suma jednotlivých statkov, kde váhami sú tieňové ceny týchto statkov, čiže adjungované premenné:

$$B_1(t) = \psi_K(t)K(t) + \psi_W(t)W(t). \quad (50)$$

V prípade Modelu 2, kde popri znečistení sledujeme aj dynamiku neobnoviteľných prírodných zdrojov celkové bohatstvo definujeme ako:

$$B_2(t) = \psi_K(t)K(t) + \psi_W(t)W(t) + \psi_R(t)R(t). \quad (51)$$

Na základe rovnice (10) budeme sledovať, či celkové bohatstvo medzi týmito obdobiami rástlo. Vzhľadom na to, že v našich modeloch rast populácie nie je zahrnutý, budeme predpokladať, že populácia je v čase konštantná a nerastie. Celkové bohatstvo v konečnom čase T nebudeme porovnávať s predchádzajúcimi výsledkami, keďže z podmienky transversality pri PPM sú adjungované premenné ψ_K a ψ_W , resp. ψ_K , ψ_W a ψ_R v konečnom čase T nulové, a teda aj celkové bohatstvo v tom čase je nulové. Zameriavať sa budeme hlavne na hladký priebeh bohatstva.

V Kapitole 4 budeme využívať tieto poznatky na získanie numerického riešenia oboch

modelov a stanovenie hodnoty bohatstva. Pomocou numerického riešenia a nastavenia vstupných parametrov sa budeme snažiť analyzovať vplyv jednotlivých faktorov na riešenie modelu z kvalitatívneho hľadiska. Zameriame sa tiež na to, ako jednotlivé faktory dokážu prispieť k udržateľnému rozvoju.

4 Aplikácia na reálne dáta

Numerické riešenie oboch modelov v Matlabe a aj celá predpríprava pozostávali z viacerých na seba nadväzujúcich a neoddeliteľných častí. Na to, aby sme akýkoľvek problém nielen optimálneho riadenia dokázali riešiť numericky, potrebujeme v prvom rade poznať všetky dáta úlohy - teda aj tvar všetkých funkcií a konštánt. Pri funkcii užitočnosti a produkčných funkciách v oboch modeloch sme vychádzali z ich štandardných tvarov používaných v literatúre, napr. [9]. Pri stanovení hodnôt premenných sme sa snažili vychádzať z dát pre Rakúsko od Rakúskeho štatistického úradu z rokov 1995 - 2012. Ďalej sme si oba modely naprogramovali na konečnom časovom horizonte pomocou *forward-backward sweep method* v matematickom softvéri Matlab. Zistili sme, že nastavenie vstupných dát je skutočne kľúčové pre riešenie oboch modelov. Získané riešenia sme zobrazili vo výstupných matlabovských grafoch.

Po numerickom vyriešení oboch modelov sme získané výstupy použili na hodnotenie rastu bohatstva s použitím dát Rakúska. Využili sme pritom podmienky zadané v článku [2]. Napokon sme pre Model 2 urobili analýzu senzitivity a výsledky čiastočne konfrontovali s kvalitatívnou analýzou z predchádzajúcej kapitoly.

4.1 Voľba funkcií a konštánt

Ako sme už uviedli vyššie, modely z Kapitoly 3 sa budeme snažiť použiť na namodelovanie stavu rakúskej ekonomiky. Vychádzame predovšetkým z dát Rakúskeho štatistického úradu dostupných na stránke *www.statistik.at*, ale aj z viacerých materiálov venujúcich sa životnému prostrediu v Rakúsku, napr. [29], [31]. Za sledované obdobie, z ktorého vychádzame, sme zvolili pomerne aktuálne roky 1995 - 2012.

4.1.1 Nastavenie funkcií

Pri nastavovaní funkcií v našich modeloch začneme s funkciou užitočnosti, ktorá je pre oba modely rovnaká a závislá na spotrebe C a znečistení W . Podľa [9] sme zvolili aditívny tvar funkcie užitočnosti s parametrami $\beta > 0$, $\gamma_1 > 0$ a $\gamma_2 > 0$. Funkcia užitočnosti teda vyzerá nasledovne:

$$U(C, W) = C^\beta - \gamma_1 W^{\gamma_2}, \quad (52)$$

pričom záporný príspevok znečistenia W vyjadruje jeho neužitočnosť. Z kvalitatívnych vlastností aditívnej funkcie užitočnosti stojí za spomenutie, že hraničné užitočnosti sú v tomto prípade nezávislé.

Ďalej si nastavíme parametre produkčných funkcií. V modeli so znečistením produkcia závisí výlučne na kapitáli K , a teda si zdefinujeme:

$$F(K) = \omega K^\alpha. \quad (53)$$

V modeli rozšírenom o dynamiku neobnoviteľných zdrojov tieto vstupujú aj do produkčnej funkcie s faktorom technologického pokroku g . Zvolili sme si štandardný tvar Cobb - Douglasovej produkčnej funkcie s klesajúcimi výnosmi z rozsahu s parametrami α_1, α_2 :

$$F(K, gR) = K^{\alpha_1} (gR)^{\alpha_2}, \quad (54)$$

kde platí:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &< 1, \\ \alpha_2 &< \alpha_1, \\ \alpha_1, \alpha_2 &> 0, \end{aligned} \quad (55)$$

čo zdôrazňuje požadovaný vyšší vplyv kapitálu K ako neobnoviteľných zdrojov R na celkovú produkciu.

Poslednú funkciu, ktorú musíme nastaviť, je funkcia emisnej miery. Tá musí taktiež spĺňať vlastnosti definované v predchádzajúcej kapitole. V tomto prípade sa snažíme aproximovať zmenu emisnej náročnosti v závislosti od výdavkov do životného prostredia A pomocou porovnávania týchto zmien. Pri aproximácii sme vychádzali z dát uvedených v Tabuľke 1, kde pre jednotlivé roky uvádzame emisie skleníkových plynov v mil. ton CO_2 ekvivalentu, HDP a výdavky do životného prostredia v Rakúsku podľa dát Statistik Austria.

Získaná funkcia emisnej miery je pre oba modely v tvare:

$$e(A) = \theta A^{-\tau}. \quad (56)$$

4.1.2 Ostatné konštanty

Pri voľbe ostatných konštánt ako diskontná miera ρ , miera odpisov δ_1 či samočistiaca schopnosť prírody δ_2 sme vychádzali zo zvyčajných hodnôt uvádzaných v literatúre,

Rok	Emisie <i>v mil. t CO₂ ekvivalent</i>	HDP <i>v mld. eur</i>	Výdavky A <i>v mld. eur</i>
1995	79.73	176.18	6.00
1996	82.74	182.13	6.09
1997	82.27	188.31	6.76
1998	81.64	195.83	6.80
1999	79.92	203.42	7.09
2000	80.20	213.20	6.89
2001	84.18	220.10	6.82
2002	85.88	226.30	6.69
2003	91.88	231.00	7.48
2004	91.52	241.51	8.41
2005	92.58	253.01	8.83
2006	89.71	266.48	9.31
2007	86.97	282.35	10.20
2008	86.88	291.93	11.35
2009	80.15	286.19	10.95
2010	84.81	294.21	11.09
2011	82.76	308.67	11.11
2012	80.06	317.21	11.20

Tabuľka 1: Výdavky do životného prostredia pre Rakúsko

napr. [9]. V Modeli 2 zachytávajúcom dynamiku neobnoviteľných zdrojov pribudli konštanty čerpania neobnoviteľných zdrojov r a technologického pokroku g . Pri ich stanovení sme vychádzali z dát publikácie *Wie geht's Österreich?* [31], konkrétne z dát *Inländischer Materialverbrauch* (domáca spotreba materiálu) a *Energieintensität* (intenzita spotreby energie). Prehľad zvolených konštánt aj s popismi pre Model 1 a Model 2 je uvedený v Tabuľke 2, resp. 3.

Konštanta	Popis	Hodnota
β	faktor v účelovej funkcii pri C	0.55
γ_1	konštanta v účelovej funkcii pri W	1.50
γ_2	faktor v účelovej funkcii pri W	1.20
ρ	diskontná miera	0.03
ω	konštanta v produkčnej funkcii	1.73
α	faktor v produkčnej funkcii	0.65
θ	konštanta vo funkcii emisnej miery	0.10
τ	faktor vo funkcii emisnej miery	0.49
δ_1	odpisy na kapitále	0.05
δ_2	samočistiaca schopnosť prírody	0.10

Tabuľka 2: Model 1: Zvolené konštanty

Konštanta	Popis	Hodnota
β	faktor v účelovej funkcii pri C	0.55
γ_1	konštanta v účelovej funkcii pri W	1.50
γ_2	faktor v účelovej funkcii pri W	1.20
ρ	diskontná miera	0.03
α_1	faktor v produkčnej funkcii pri K	0.60
g	technologický pokrok v produkčnej funkcii	1.73
α_2	faktor v produkčnej funkcii pri gR	0.30
θ	konštanta vo funkcii emisnej miery	0.10
τ	faktor vo funkcii emisnej miery	0.49
δ_1	odpisy na kapitále	0.05
δ_2	samočistiaca schopnosť prírody	0.10
r	rýchlosť čerpania neobnoviteľných zdrojov	0.038

Tabuľka 3: Model 2: Zvolené konštanty

4.1.3 Počiatočné hodnoty

Ako ďalší vstup do našich modelov sme museli nastaviť hodnoty parametrov pre počiatočné množstvá kapitálu $K(0)$ a znečistenia $W(0)$ v Modeli 1, resp. kapitálu $K(0)$, znečistenia $W(0)$ a neobnoviteľných zdrojov $R(0)$ v Modeli 2. Opäť sme vychádzali z dát Statistik Austria. Počiatočné hodnoty znečistenia $W(0)$ sme nastavili podľa emisií skleníkových plynov (uvedené v Tabuľke 1) za roky 1995-2012. Počiatočné hodnoty kapitálu $K(0)$ ako aj neobnoviteľných prírodných zdrojov $R(0)$ sme nastavili podľa vlastností produkčnej funkcie a jej vzťahu k HDP Rakúska. Počiatočné hodnoty sú v oboch modeloch rovnaké a sú zobrazené v Tabuľke 4.

Premenná	Popis	Počiatočná hodnota
K	kapitál	1000
W	znečistenie	80
R	neobnoviteľné zdroje	200

Tabuľka 4: Počiatočné hodnoty pre K, W, R

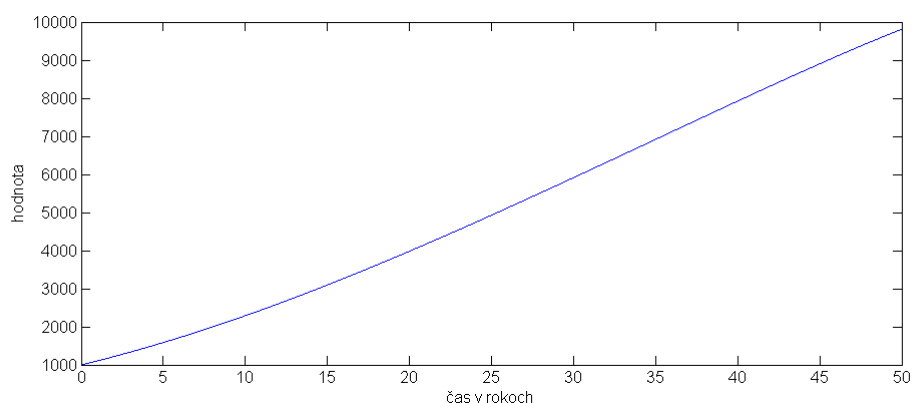
4.1.4 Časový horizont

Posledným, no rozhodne nie najmenej dôležitým faktorom, ktorý vstupoval do našich modelov pri ich numerickom riešení, je časový horizont. Keďže nami skonštruované modely sú z hľadiska času s pevným časovým horizontom, zvolili sme si obdobie päťdesiatich rokov $T = 50$, počas ktorých sme skúmali vývoj systémov a optimálne riadenie v nich. Ako sa aj ďalej ukáže, päťdesiat rokov sa javí ako dostatočne dlhé obdobie na to, aby sme dokázali vyvodiť adekvátne závery.

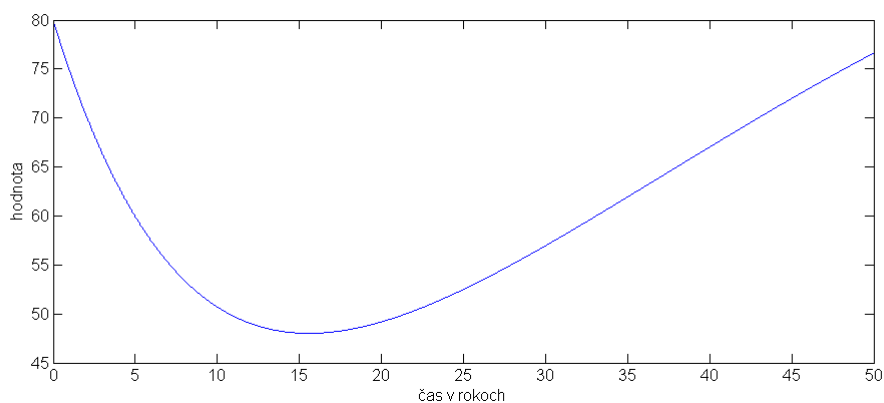
4.2 Numerické riešenie Modelu 1

Pomocou numerických metód bližšie popísaných v predchádzajúcej kapitole sme naprogramovali model optimálneho riadenia so znečistením využívajúc dáta a konštanty z informácií Rakúskeho štatistického úradu. Systém sme sledovali na období päťdesiatich rokov ($T = 50$). Postupne si prejdeme všetky výsledky, ktoré nám numerické riešenie Modelu 1 poskytlo pri zadaní dát z Tabuľky 2.

Ako prvé sa pozrieme, kam dokonvergovali výsledky pre stavové premenné kapitál K a znečistenie W . Kapitál v našom modeli po päťdesiatich rokoch prišiel k optimálnemu stavu 10 000, čo znamená, že oproti počiatkovej hodnote $K(0) = 1000$ stúpol približne desaťnásobne. Zaujímavý je aj výsledok pre znečistenie W , ktoré v prvých sedemnástich rokoch klesalo a jeho minimum $W(17) = 48$, no potom začalo opäť rásť a v $T = 50$ sa zastavilo blízko počiatkovej hodnoty $W(0)$. Výsledky pre kapitál a znečistenie sú zobrazené na Obrázkoch 1, resp. 2.



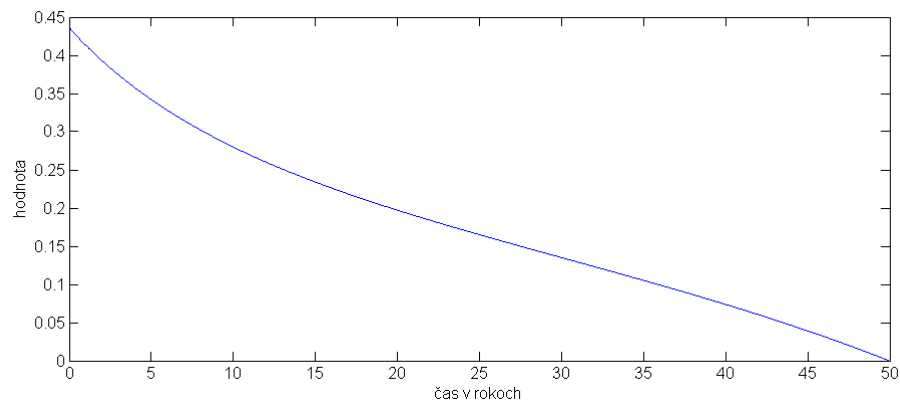
Obr. 1: Model 1: Vývoj kapitálu K



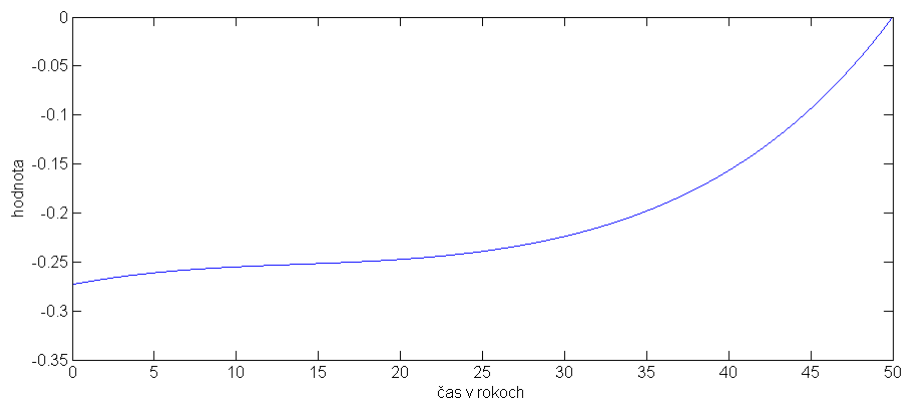
Obr. 2: Model 1: Vývoj znečistenia W

Ďalej budeme skúmať výsledky nášho modelu pre adjungované premenné interpretované ako tieňové ceny kapitálu ψ_K a znečistenia ψ_W . Vzhľadom na konečný časový horizont a podmienku transversality $\psi_K(T) = 0$, $\psi_W(T) = 0$ obe hodnoty v $T = 50$ smerujú do 0. Podľa očakávaní a kvalitatívnej analýzy modelu je tieňová cena kapitálu kladná a klesajúca, tieňová cena znečistenia je zas záporná a rastúca, i keď nerastie na

celom časovom horizonte. Výsledky sú zobrazené na Obrázkoch 3 a 4. Zo zobrazených výsledkov taktiež vidno, že zatiaľ čo dodatočná jednotka kapitálu v prvom roku má pre nás hodnotu približne 0.43, dodatočná jednotka znečistenia znižuje náš úžitok o maximálne 0.27, čo môže byť spôsobené rôznymi vstupmi spotreby C a znečistenia W do účelovej funkcie. Hoci na konečnom časovom horizonte a s iným vstupom emisnej miery oproti modelu (13), tieto výsledky sú v súlade s výsledkami prezentovanými v [9].



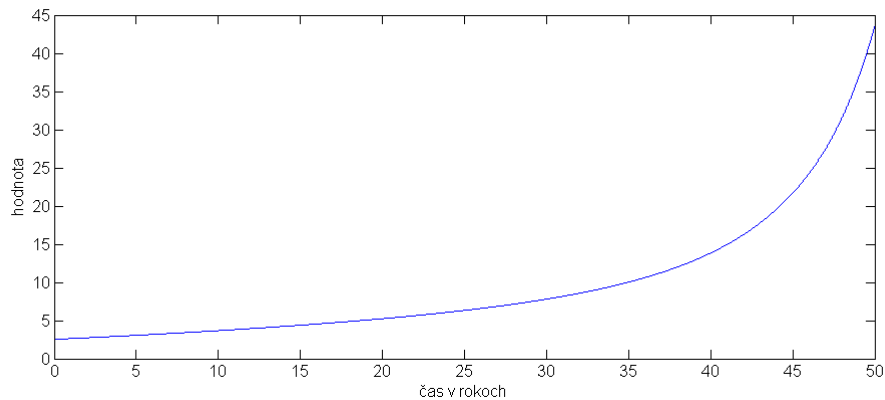
Obr. 3: Model 1: Vývoj tieňovej ceny kapitálu ψ_K



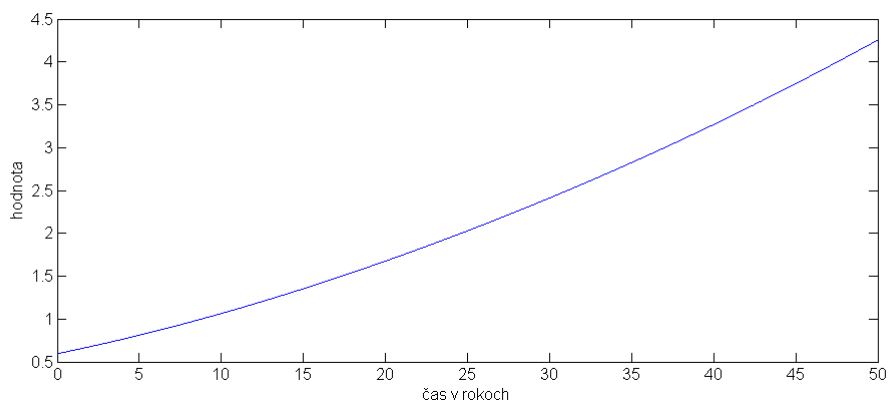
Obr. 4: Model 1: Vývoj tieňovej ceny znečistenia ψ_W

Posledným grafickým výstupom z numerického riešenia nášho modelu sú hodnoty riadiacich premenných spotreby C a výdavkov do zlepšenia životného prostredia A . Spotreba v prvých dvadsiatich sledovaných rokoch rástla pomerne málo a až ku koncu sledovaného obdobia začala stúpať prudšie k $C(50) = 44$, čím pripomína exponenciálnu funkciu. Takmer ako lineárna funkcia sa hýbali aj výdavky do zlepšenia životného pro-

stredia A , ktoré sa v konečnom čase $T = 50$ sa zastavili na úrovni približne 4.25. Vývoj spotreby a výdavkov do zlepšenia životného prostredia je zobrazený na Obrázkoch 5, resp. 6.



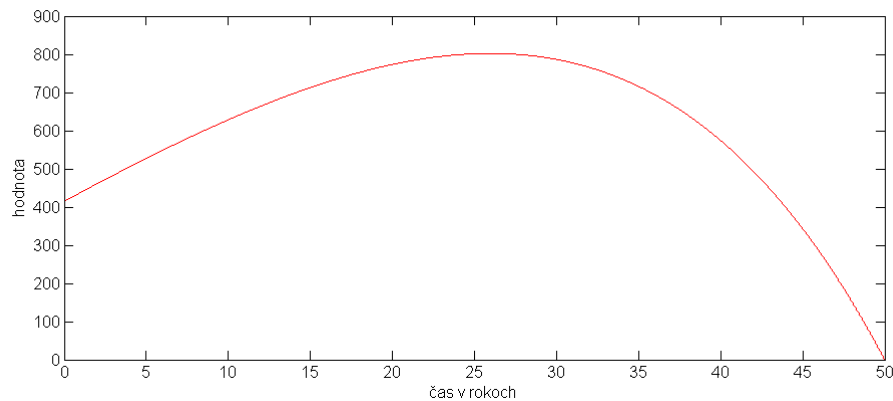
Obr. 5: Model 1: Vývoj spotreby C



Obr. 6: Model 1: Vývoj výdavkov A

4.2.1 Bohatstvo počas sledovaného obdobia

V tejto časti si zobrazíme výsledky, na základe ktorých stanovíme, či bohatstvo $B(t)$ počas sledovaného obdobia na základe výsledkov nášho modelu rástlo alebo klesalo. V tejto časti vychádzame z rovnice (50). Vývoj bohatstva v čase je zobrazený na Obrázku 7. Nulová výsledná hodnota bohatstva v konečnom čase $T = 50$ je podmienená podmienkou transverzality, ktorá stanovila podmienku pre adjungované premenné v konečnom čase na 0 z dôvodu konečného časového horizontu. Z toho dôvodu aj rovnica



Obr. 7: Model 1: Vývoj bohatstva sledovaný na päťdesiatročnom horizonte

(51) má v konečnom čase nulovú hodnotu. Z Obrázku 7 však vidno, že bohatstvo v prvých dvadsiatich ôsmich rokoch rástlo a až potom začalo klesať.

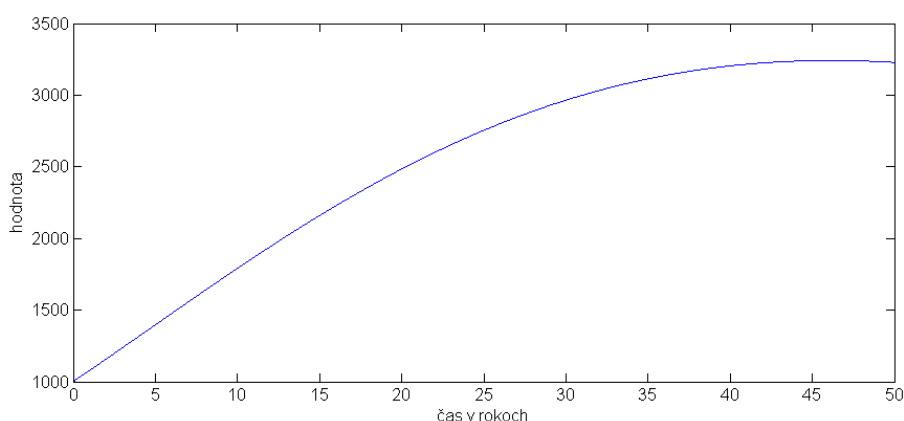
V ďalšej podkapitole sa pozrieme na numerické riešenie Modelu 2, do ktorého okrem kapitálu a znečistenia vstupujú aj neobnoviteľné prírodné zdroje. V tejto časti správieme pre jednotlivé parametre aj analýzu senzitivity a budeme hľadať takú kombináciu vstupov, ktorá prispieva k udržateľnosti.

4.3 Numerické riešenie Modelu 2

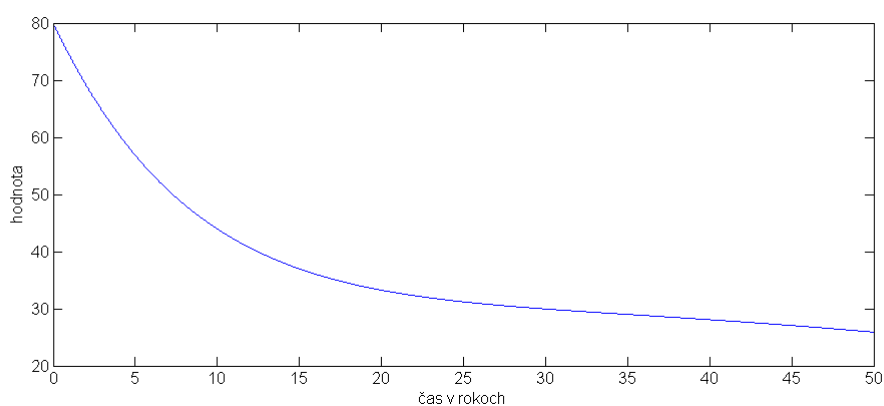
Po získaní výsledkov pre numerické riešenie Modelu 1 sa pozrieme na to, aké riešenie poskytnú numerické metódy pre Model 2 so znečistením a neobnoviteľnými prírodnými zdrojmi. Systém sme sledovali na časovom horizonte päťdesiatich rokov $T = 50$. Prejdeme si všetky výsledky, ktoré nám numerické riešenie modelu poskytlo pri zadaní dát z Tabuľky 3. Na danom časovom horizonte vykreslíme hodnoty bohatstva, ktoré na konci sledovaného obdobia vzhľadom na podmienku transversality pre adjungované premenné smeruje k 0. Ďalej budeme skúmať, aký vplyv majú zmeny niektorých parametrov na numerické riešenie modelu, ako aj na výsledky o udržateľnosti bohatstva. Vyberieme niektoré najzásadnejšie faktory a ich vplyv popíšeme v analýze senzitivity.

V prvom rade sa pozrieme na výsledky nášho modelu pre stavové premenné: kapitál K , znečistenie W a neobnoviteľné prírodné zdroje R na päťdesiatročnom časovom horizonte. Výsledky pre jednotlivé stavové premenné sú zobrazené postupne na Obrázkoch 8, 9, 10. Kapitál po päťdesiatich rokoch narástol a dospel k hodnote 3200, čo

je približne trojnásobok počiatočnej hodnoty v čase $t = 0$. Zaujímavý výsledok sme dostali pre znečistenie, ktoré počas celého sledovaného obdobia klesá, hoci v prvých dvadsiatich rokoch je pokles najvýraznejší, čo pravdepodobne súvisí aj s výsledkami pre výdavky do životného prostredia A . Na konci sledovaného obdobia sa množstvo znečistenia zastavilo na hodnote $W(50) = 27$. Neobnoviteľné zdroje klesajú očakávané podľa vlastností ich diferenciálnej rovnice a z počiatočnej hodnoty 200 sa na konci sledovaného obdobia dostávajú na hodnotu približne 30.

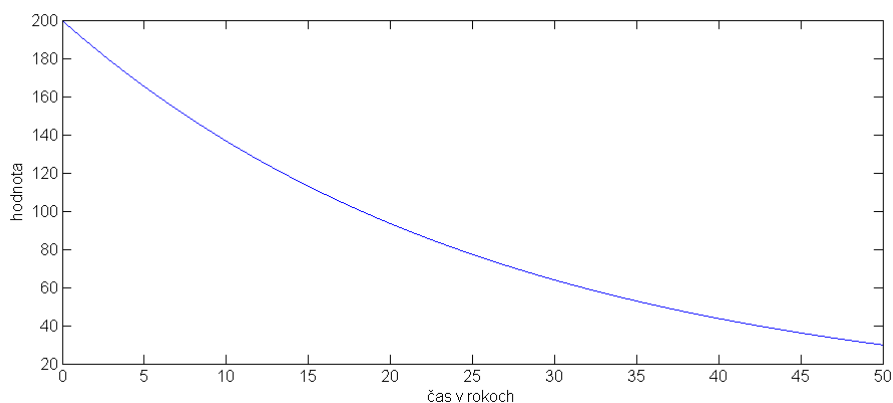


Obr. 8: Model 2: Vývoj kapitálu K



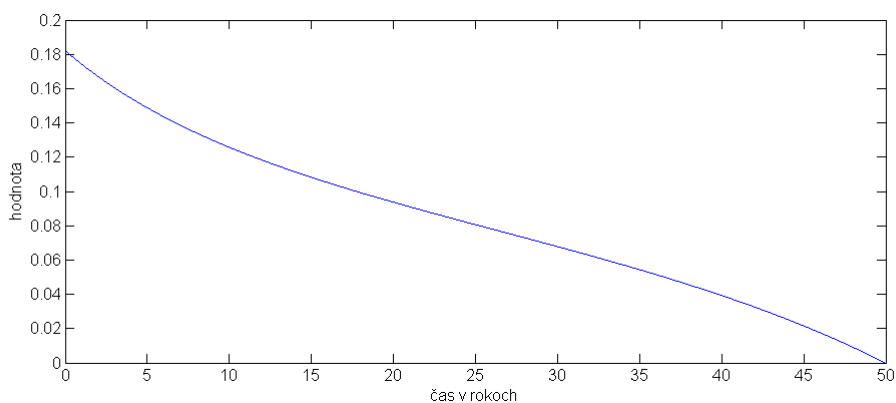
Obr. 9: Model 2: Vývoj znečistenia W

Po preskúmaní výsledkov pre stavové premenné sa teraz pozrieme na ich adjungované premenné, ktoré interpretujeme ako tieňové ceny. Tieňová cena kapitálu ψ_K je kladná a v čase klesá k 0 vzhľadom na podmienku transversality, no pri porovnaní s predchádzajúcim modelom má dodatočná jednotka kapitálu v čase $t = 0$ pre nás približne štyrikrát nižšiu hodnotu $\psi_W(0) = 0.18$. Tieňová cena znečistenia ψ_W sa v čase



Obr. 10: Model 2: Vývoj spotreby neobnoviteľných zdrojov R

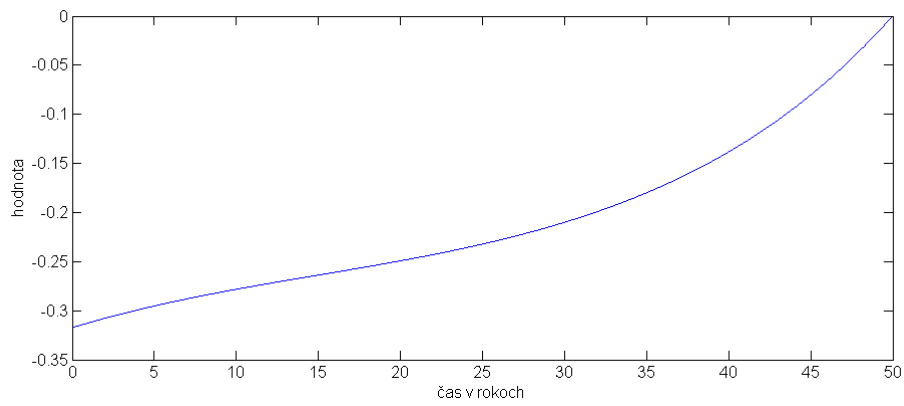
vyvíja tak, že rastie z hodnoty -0.31 k 0 v konečnom čase $T = 50$. Pri neobnoviteľných zdrojoch ich tieňová cena ψ_R najprv očakávane rastie, čo znamená že s menším množstvom zdrojov si ich viac vážime, no po čase $t = 24$ začne klesať, čo môže byť ovplyvnené aj podmienkou transverzality $\psi_R(T) = 0$. Výsledky pre jednotlivé tieňové ceny sú zobrazené na Obrázkoch postupne 11, 12, 13.



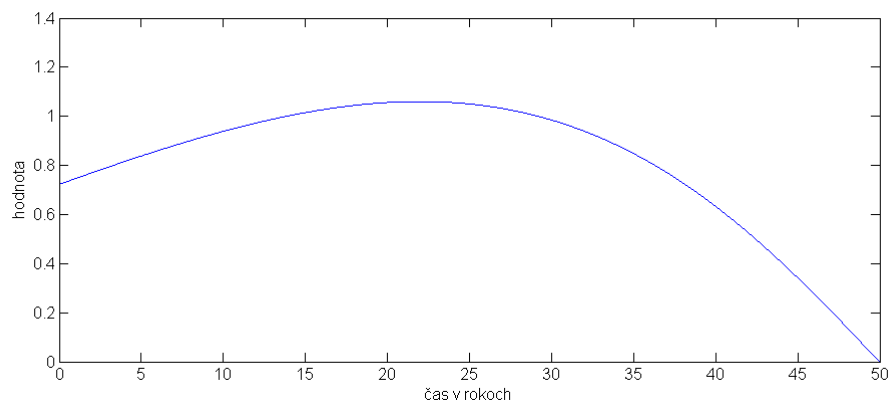
Obr. 11: Model 2: Vývoj tieňovej ceny kapitálu ψ_K

Napokon si zobrazíme výsledky pre riadiace premenné - spotrebu C a výdavky do životného prostredia A v Obrázkoch 14 a 15. Spotreba stúpa z veľmi malých hodnôt v prvých rokoch až na hodnotu 62 v poslednom, päťdesiatom roku. Výdavky do A dosiahli hodnotu 1.2 v poslednom roku $T = 50$, čo predstavuje nárast približne o tretinu oproti počiatočnej hodnote $A(0) = 0.9$.

Zaujímavý je jednoznačne vzťah medzi znečistením a investíciami do životného prostredia, ktoré vykazujú istú súvislosť - kým A rastie, znečistenie W výrazne klesá a po

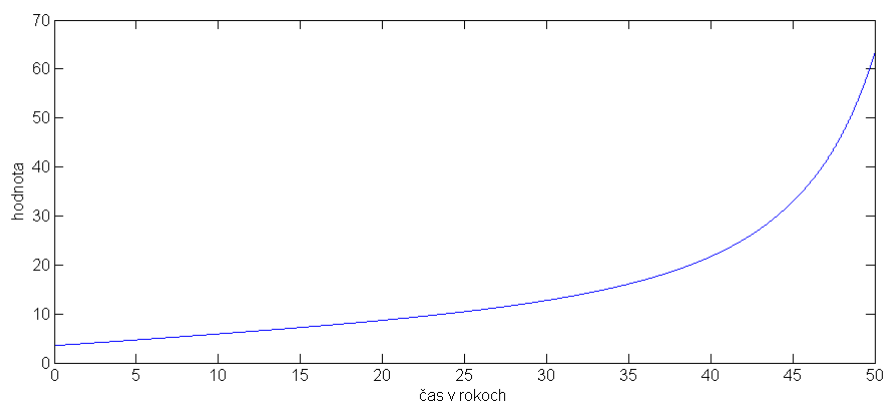


Obr. 12: Model 2: Vývoj tieňovej ceny znečistenia ψ_W

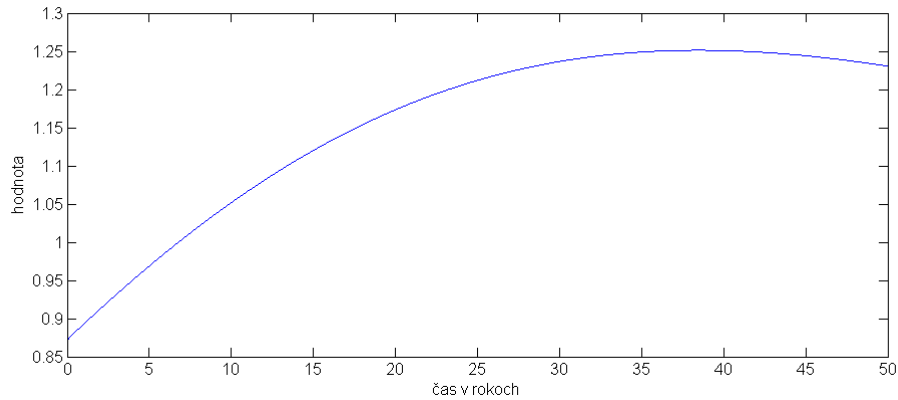


Obr. 13: Model 2: Vývoj tieňovej ceny neobnoviteľných zdrojov ψ_R

ustálení A sa aj znečistenie mení len veľmi málo.



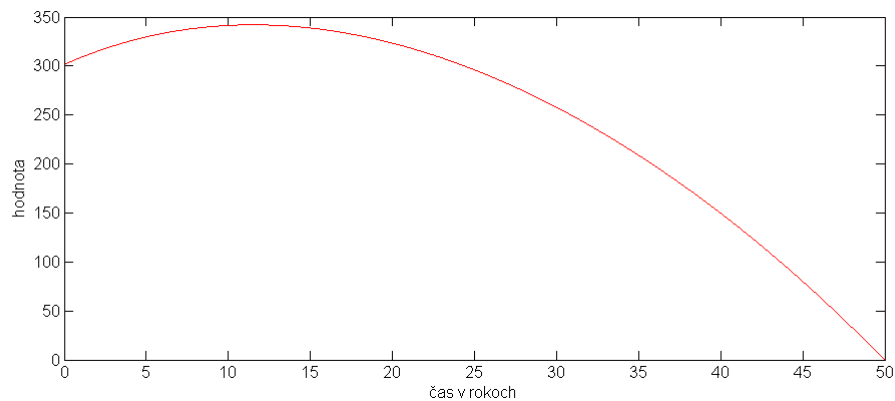
Obr. 14: Model 2: Vývoj spotreby C



Obr. 15: Model 2: Vývoj výdavkov A

4.3.1 Bohatstvo počas sledovaného obdobia

V tejto časti si zobrazíme výsledky, na základe ktorých stanovíme, či bohatstvo počas sledovaného obdobia na základe výsledkov nášho modelu rástlo alebo klesalo. V tejto časti vychádzame z rovnice (51). Vývoj bohatstva v čase je zobrazený na Obrázku 16. Nulovú výslednú hodnotu bohatstva v konečnom čase $T = 50$ má na svedomí pod-



Obr. 16: Model 2: Vývoj bohatstva sledovaný na päťdesiatročnom horizonte

mienka transversality, ktorá stanovila podmienku pre adjungované premenné (tieňové ceny) v konečnom čase na 0. Z toho dôvodu aj rovnica (51) má v konečnom čase nulovú hodnotu.

Z priebehu bohatstva $B(t)$ však vidno, že v prvých dvanástich rokoch mierne rástlo a až potom začalo klesať. Významným podiel na tom môže mať tieňová cena neobnoviteľných zdrojov ψ_R , u ktorej sledujeme podobný obrat a ktorej hodnota je niekoľkonásobne vyššia ako u tieňových cien za kapitál ψ_K či znečistenie ψ_W , a teda jej vplyv na

celkové bohatstvo je vyššie. Domnievame sa, že pri zmene vstupu neobnoviteľných prírodných zdrojov v Cobb - Douglasovej produkčnej funkcii by celkové bohatstvo mohlo dosiahnuť hladší priebeh, čo si overíme aj v ďalšej časti pri analýze senzitivity.

4.3.2 Analýza senzitivity

V poslednej časti riešenia Modelu 2 sa pozrieme na to, ako vplývajú veľkosti jednotlivých konštánt na výsledky získané numerickým riešením z hľadiska vývoja riadiacich premenných spotreby C a výdavkov do životného prostredia A , tieňových cien ψ_K , ψ_W , ψ_R , ale aj na to, aký majú vplyv na celkové bohatstvo $B(t)$. Naším cieľom je nájsť takú kombináciu parametrov, ktorá podporuje udržateľný rozvoj.

Začnime účelovou funkciou, ktorú sme definovali ako diskontovanú funkciu užitočnosti $U(C, W)$. Ako prvé sme znížili diskontný faktor $\rho = 0.01$, pričom všetky ostatné premenné ostali konštantné. Výsledkom je, že tieňová cena znečistenia klesla, pričom tieňové ceny kapitálu a neobnoviteľných zdrojov narástli. Znamená to, že spotreba a znečistenie v budúcnosti poskytujú vyššiu (ne)užitočnosť dnes. Zatiaľčo výdavky do A ostali približne rovnaké, spotreba v konečnom čase $T = 50$ mierne klesla. Zaujímavý je efekt na celkové bohatstvo $B(t)$, ktoré od začiatku $t = 0$ klesalo, avšak z vyššej hodnoty - 623. Očakávane opačný efekt dosiahlo zvýšenie diskontného faktora na $\rho = 0.05$. Zaujímavé je, že extrém v bohatstve $B(t)$ sa presunul približne z $t = 12$ pri pôvodných parametroch na $t = 18$ a celkovo dosiahlo bohatstvo nižšie hodnoty a stabilnejší, hladší priebeh.

V ďalšej časti analýzy sa pozrieme na zmeny vychádzajúce z veľkosti vstupu spotreby C a znečistenia W do účelovej funkcie. Po zvýšení parametra β , ktorý vyjadruje vplyv spotreby na celkovú užitočnosť, sledujeme jediná zmenu v zvýšení spotreby C , čo je v súlade s očakávaniami - vyššia užitočnosť zo spotreby nás motivuje k jej zvýšeniu. Jemné zvýšenie β však nemalo takmer žiaden vplyv na celkové bohatstvo $B(t)$. Po zvýšení mocniny pri znečistení γ_2 tieňová cena kapitálu a neobnoviteľných zdrojov klesla, rovnako ako tieňová cena znečistenia, čo znamená jeho vyšší negatívny príspevok k celkovému bohatstvu v súlade s vyššou neužitočnosťou znečistenia. Hoci spotreba C ako aj výdavky A stúpili, bohatstvo $B(t)$ počas sledovaného obdobia klesalo oproti pôvodným parametrom.

Zaujímavé výsledky dostávame pri zmene parametrov produkčnej funkcie $F(K, gR)$. Za najzásadnejší považujeme stav, kedy sme súčasne zvýšili vstup kapitálu K prostredníctvom parametra α_1 a znížili vstup prírodných zdrojov R v parametri α_2 , čo znamená ich nižšiu nahraditeľnosť kapitálom. V tomto prípade podľa očakávaní výsledky nedosahovali ani zďaleka tak hladký priebeh a vychádzali veľké výkyvy, čím sa znížila perspektíva udržateľnosti.

V ďalšej časti analýzy sme menili parameter δ_1 , ktorý reprezentuje odpisy na kapitále. Po zvýšení na $\delta_1 = 0.1$ kapitál nerástol monotónne, ale po počiatočnom raste začal v čase $t = 17$ klesať. Poklesli aj všetky tri tieňové ceny ψ_K , ψ_W a ψ_R . Bohatstvo $B(t)$ klesalo pri tomto nastavení parametrov takmer lineárne z hodnoty 120 k 0. Naproti tomu, keď sme odpisy na kapitále znížili na $\delta_1 = 0.03$, kapitál začal rapídne rásť. V tomto prípade bohatstvo $B(t)$ malo podobný priebeh ako pri pôvodných parametroch, avšak v extrémne okolo času $t = 18$ dosiahlo dvojnásobnú hodnotu 600.

Ďalej sme menili samočistiacu schopnosť prírody vstupujúcu do dynamiky znečistenia W . Po zvýšení parametra δ_2 z 0.1 na 0.15, znečistenie W klesalo a v poslednom desaťročí sa takmer ustálilo na hodnote 20 a celkovo stúpila jeho tieňová cena ψ_W . Výsledkom je o málo vyššie celkové bohatstvo $B(t)$. Opačný efekt sme sledovali pri znížení δ_2 .

Podľa predpokladu a charakteru Modelu 2 dostávame zaujímavé výsledky pri skúmaní miery čerpania neobnoviteľných zdrojov r . Po nastavení rýchlejšieho čerpania $r = 0.05$ sledujeme najzásadnejší rozdiel v nižšom raste kapitálu K a očakávané zvýšenej tieňovej cene neobnoviteľných zdrojov ψ_R , keďže tie sú pre nás teraz vzácnejšie podľa Tvrdenia 3.12. Vo výsledku celkové bohatstvo $B(t)$ pokleslo na hodnotu pod 300 s menej hladkým priebehom ako pri základnej formulácii. Pri znížení intenzity čerpania na $r = 0.01$ je zrejmé, že v $T = 50$ ostali vyššie zásoby neobnoviteľných zdrojov v zmysle ich diferenciálnej rovnice, no oproti predošlým výsledkom emisie začali po dvadsiatom roku stúpať. Kapitál monotónne rástol a v závere dosiahol hodnotu až 5300. V prípade nižšej miery čerpania celkové bohatstvo $B(t)$ začalo vo vyšších hodnotách a približne v tretine sledovaného obdobia dosiahlo extrém okolo hodnoty 500.

V ďalšej časti analýzy jednotlivých vstupov sa pozrieme na technologický pokrok g . Po jeho nastavení na hodnotu 2.5% namiesto pôvodných 1.73% kapitál rástol k hodnote

4 000 a mierne rástla aj tieňová cena neobnoviteľných zdrojov ψ_R , keďže tie sú pre nás pri väčšom vstupe do produkčnej funkcie vzácnejšie. Spotreba C aj výdavky do A ostali takmer rovnaké. Výsledkom je vyššie celkové bohatstvo $B(t)$ s mierne hladším priebehom a s extrémom vo výške 400. Opačný efekt sledujeme pri nižšom pokroku g , kedy klesali všetky tri tieňové ceny, kapitál aj výdavky do A a rovnako klesalo bohatstvo z $B(0) = 90$ k $B(50) = 0$.

V záverečnej časti analýzy senzitivity sme sa snažili nájsť výhodnú kombináciu vstupov, ktorá prináša vyšší kapitál a nižšie znečistenie pri nižších výdavkoch do A . Podľa kvalitatívnej analýzy to dosiahneme najmä zvýšením technologického pokroku g , nižšou emisnou mierou $e(A)$ a znížením intenzity čerpania neobnoviteľných zdrojov r . Znížením miery čerpania na 0.03, emisnej miery θ na desatinu pôvodnej hodnoty a technologického pokroku na 2.5% kapitál K rastie k 4800, znečistenie W klesá k hodnote 7 a výdavky do A rastú k polovičnej hodnote pri miernom raste spotreby C . V neposlednom rade, celkové bohatstvo $B(t)$ rovnako ako pri pôvodných parametroch kopíruje hladký priebeh tieňovej ceny neobnoviteľných prírodných zdrojov ψ_R , pričom v extréme dosahuje hodnotu až $B(12) = 512$.

Záver

Cieľom tejto diplomovej práce bolo spracovať najnovšiu literatúru k téme udržateľnosti a merania bohatstva a pomocou modelu optimálneho riadenia aplikovať získané poznatky na reálne dáta Rakúska. Hlavnou motiváciou bol pre nás článok Arrowa et. al [2], ktorý vyniká zahrnutím populačného rastu a technologického pokroku do metriky bohatstva v dynamickom kontexte. Keďže v tomto článku nie je explicitne modelovaný rozhodovací proces, snažili sme sa pri skúmaní vzťahu hospodárskeho rastu a životného prostredia vychádzať z jednoduchých modelov optimálneho riadenia. Modifikáciou modelu z článku Luptáčíka a Schuberta [17] a zahrnutím dynamiky neobnoviteľných prírodných zdrojov sme vytvorili dva nové modely, ktorých numerické riešenie sme naprogramovali a pomocou vhodnej voľby vstupných parametrov sme sa snažili stanoviť podmienky vedúce k udržateľnému rozvoju.

Zatiaľčo prvé dve kapitoly našej diplomovej práce sa venujú prevažne teoretickým poznatkom, úvodu do problematiky životného prostredia, udržateľnosti a spracovaniu existujúcej literatúry, v tretej kapitole sme pretavili nadobudnuté poznatky do praxe. Ako prvé sme po diskusii so školiteľom sformulovali dva modely optimálneho riadenia, do ktorých sme postupne zahrnuli dynamiku znečistenia so vstupom funkcie emisnej miery a neskôr aj dynamiku neobnoviteľných prírodných zdrojov. Pri oboch modeloch sme spravili ich kvalitatívnu analýzu a výsledky interpretovali. Vzhľadom na komplexnosť predstavených modelov sme následne navrhli spôsob ich numerického riešenia pomocou *forward backward sweep method*. V závere tretej kapitoly sme stanovili vlastnú metriku na stanovenie udržateľnosti a merania bohatstva.

Štvrtá kapitola, aplikácia na reálne dáta, bola ťažiskovým objektom tejto diplomovej práce a zároveň predstavovala pre nás aj najväčšiu výzvu. Pred naprogramovaním modelu v Matlabe sme museli zvoliť všetky vstupné dáta, funkcie a konštanty, vstupujúce do oboch modelov. V tejto časti sme vychádzali predovšetkým z dát Rakúskeho štatistického úradu a viacerých jeho publikácií, napr. [29], [30], [31]. Následne sme model naprogramovali na konečnom časovom horizonte pomocou metódy predstavenej v prechádzajúcej kapitole. Získané výsledky sme popísali. V závere riešenia každého modelu sme analyzovali aj rast celkového bohatstva. Veľkú časť záverečnej kapitoly sme venovali analýze senzitivity modelu s neobnoviteľnými prírodnými zdrojmi, čiže skú-

maniu vplyvu rôznych vstupných parametrov na výsledok. Podľa očakávaní sa ukázalo, že vhodné nastavenie kombinácie vstupov, predovšetkým intenzity čerpania zdrojov, technologického pokroku a funkcie emisnej miery, môže viesť k udržateľnému rozvoju a hladšiemu priebehu bohatstva.

Táto práca zároveň poskytuje viaceré možnosti na rozšírenie. Najzásadnejším nadviazaním by mohlo byť rozšírenie modelov na nekonečný časový horizont, kde existuje široký priestor na skúmanie vstupov a získaných výsledkov. Významný vplyv na udržateľnosť by mohlo mať vhodné nastavenie koncových podmienok pre stavové premenné. Rovnako zaujímavé by bolo použiť iný typ účelovej či produkčnej funkcie, alebo do modelov zahrnúť aj obnoviteľné prírodné zdroje. V každom prípade, skúmanie tejto oblasti sa ukazuje ako veľmi podnetné, pútavé a v neposlednom rade aj mimoriadne významné v súvislosti s témou životného prostredia. Nemôžeme totiž zabúdať na citát z úvodu tejto diplomovej práce: *Pôdu nededíme po našich predkoch, ale požičiavame si ju od našich detí.*

Zoznam použitej literatúry

- [1] Arrow, K.J. et al. (2004): *Are we consuming too much?* V *Journal of Economic Perspectives*. 2004, vol. 18, no. 1, 147-172
- [2] Arrow, K.J., Dasgupta, P., Goulder, L.H., Mumford, K.J., Oleson, K. (2012): *Sustainability and the measurement of wealth*. V *Environment and Development Economics*. [online]. 2012, vol. 17, no. 3, 317-353
- [3] Arrow, K.J., Dasgupta, P., Goulder, L.H., Mumford, K.J., Oleson, K. (2013): *Sustainability and the measurement of wealth: further reflections*. V *Environment and Development Economics*. [online]. 2013, vol. 18, no. 4, 504-516
- [4] Babušíková, J. (2014): *Numerické riešenie diferenciálnych rovníc*, učebné texty, dostupné na internete (15.2.2015): http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/~babusikova/numerika4mef_cast1.pdf
- [5] Clemens, M., Hamilton, K. (1999): *Genuine savings rates in developing countries*. V *World Bank Economic Review*. 1999, vol. 13, no. 2, 333-356
- [6] Dasgupta, P., Maler, K.G. (2000): *Net national product, wealth, and social wellbeing*. V *Environment and Development Economics*. 2000, vol. 5. no. 1, 69-93
- [7] Dasgupta, P. (2001): *Human Wellbeing and the Natural Environment*. Oxford, Oxford University Press, 2001
- [8] Enright, W.H., Muir, P.H. (1986): *Efficient classes of Runge-Kutta Methods for two-point boundary value problems*. V *Computing*. 1986, vol. 37, 315-334
- [9] Feichtinger, G., Hartl, R.F. (1986): *Optimale Kontrolle oekonomischer Prozesse*. Berlin - New York, Walter de Gruyter, 1986
- [10] Forster, B.A. (1977): *On a One State Variable Optimal Control Problem. Consumption-pollution Trade-offs*. V *Application of Control Theory to Economic Analysis*, 35-56. Amsterdam - New York - Oxford, 1977
- [11] Halická, M., Jurča, P.: (2012): *Optimálne riadenie II*, učebné texty, dostupné na internete (10.01.2015): http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/jurca/or/optimalne_riadenie_ver2.pdf

- [12] Hamilton, K. (2012): *Comments on Arrow et al., 'Sustainability and the measurement of wealth'*. V *Environment and Development Economics*. [online]. 2012, vol. 17, no. 3, 356-361
- [13] Hartwick, J.M. (1977): *Intergenerational equity and the investing of rents from exhaustible resources*. V *American Economic Review*. 1977, vol. 66, no. 5, 972-974
- [14] Hicks, J.R. (1940): *The valuation of social income*. V *Economica*. 1940, vol. 7, 105-124
- [15] Jones, C.I., Klenow, P.J. (2010): *Beyond GDP? Welfare across countries and time*. Working paper. Stanford University, September 2010
- [16] Lenhart, S., Workman, J. T. (2007): *Optimal Control Applied to Biological Models*. Boca Raton, Chapman & Hall/ CRC, 2007
- [17] Luptáčik, M., Schubert, U. (1982): *Optimal Economic Growth and the Environment*. V *Economic Theory of Natural Resources*. Wuerzburg - Wien, Physica Verlag, 1982
- [18] Majher, P. (2011): *Analysis of the dependence between economic growth and environmental quality*: diplomová práca. Bratislava, FMFI UK, 2011, 74 s.
- [19] McAsey, M., Mou, L., Han, W. (2012): *Convergence of the forward-backward sweep method in optimal control*. V *Computational Optimization and Applications*. [online]. 2012, vol. 53, no. 1, 207 -226
- [20] Nordhaus, W.D., Tobin, J. (1972): *Is economic growth obsolete?*. V *Economic Growth*. New York, Columbia University Press, 1972
- [21] Pearce, D. (1988): *Economics, equity and sustainable development*. V *Futures*. [online]. 1988, vol. 20, no. 6, 598-605
- [22] Pezzey, J. (1992): *Sustainability: An Interdisciplinary Guide*. V *Environmental Values*. [online]. 1992, vol. 1, no. 4, 321-362
- [23] Samuelson, P.A. (1961): *The evaluation of social income: capital formation and wealth*. V *Theory of Capital*. London, MacMillan, 1961
- [24] Smulders, S. (2012): *An arrow in the Achilles' heel of sustainability and wealth accounting*. V *Environment and Development Economics*. [online]. 2012, vol. 17, no. 3, 368-372

- [25] Smulders, S. (2013): *Sustainability and Wealth Accounting*. [prezentácia]. *WWWforEurope Lecture series*. Viedeň, 2013
- [26] Solow, R. (1974): *Intergenerational equity and exhaustible resources*. V *Review of Economic Studies*. 1974, vol. 41 (Symposium issue), 29-45
- [27] Solow, R. (1993): *An almost practical step toward sustainability*. V *Resources Policy*. [online]. 1993, vol. 19, no. 3, 162-172
- [28] Solow, R. (2012): *A few comments on 'Sustainability and the measurement of wealth'*. V *Environment and Development Economics*. [online]. 2012, vol. 17, no. 3, 354-355
- [29] Statistik Austria (2010): *Die Umweltgesamtrechnungen in Österreich*, Viedeň, Statistik Austria, 2010, 28 s., dostupné na internete (10.3.2015): <http://www.umwelt.net.at/article/articleview/81406/1/9085>
- [30] Statistik Austria (2013): *Energiedaten Österreich 2013*, Viedeň, Statistik Austria, 2013, 24 s.
- [31] Statistik Austria (2014): *Wie geht's Österreich? – Indikatoren und Analysen*, Viedeň, Statistik Austria, 2014, 215 s., dostupné na internete (10.3.2015): http://www.statistik.at/web_de/services/publikationen/index.html
- [32] Stockhammer, E. et al. (1997): *The index of sustainable economic welfare (ISEW) as an alternative to GDP in measuring economic welfare*. V *Ecological Economics*. 1997, vol. 21, 19-34
- [33] Weil, D.N. (2009): *Economic Growth*. Rhode Island, Prentice Hall, 2009
- [34] World Bank (2011): *The Changing Wealth of Nations: Measuring Sustainable Development in the New Millennium*. Washington, DC, World Bank, 2011