

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ASYMPTOTICKÉ APROXIMÁCIE RIEŠENÍ
NELINEÁRNYCH BLACK-SCHOLESOVÝCH ROVNÍC

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ASYMPTOTICKÉ APROXIMÁCIE RIEŠENÍ
NELINEÁRNYCH BLACK-SCHOLESOVÝCH ROVNÍC

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Veronika Belušková
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Asymptotické aproximácie riešení nelineárnych Black-Scholesových rovníc
Asymptotic approximations of solutions of nonlinear Black-Scholes equations

Cieľ: V práci sa zameriame na analýzu tejto hranice pre realistické zovšeobecnenia Black-Scholesovej rovnice, ktoré sú opísané riešeniami nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc. Využijeme pritom poruchovú metódu malého parametra na získanie aproximácie riešenia.

Vedúci: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 10.02.2015

Dátum schválenia: 11.02.2015
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie Na tomto mieste by som sa rada poďakovala svojmu školiteľovi prof. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc. za trpezlivosť, pomoc a odborné rady pri písaní tejto práce. Ďalej by som sa chcela poďakovať svojej rodine a priateľom, ktorí mi boli po celú dobu štúdia a pri písaní tejto práce dôležitou oporou.

Abstrakt

BELUŠKOVÁ, Veronika: Asymptotické aproximácie riešení nelineárnych Black-Scholesových rovníc [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava, 2016, 51 s.

Táto práca sa zaoberá nelineárnymi zovšeobecneniami Black-Scholesovho modelu, ktoré zohľadňujú viacero faktorov prítomných na finančnom trhu, ako napríklad transakčné náklady, riziko z nezabezpečeného portfólio alebo vplyv dominantného investora. Pre tieto modely chceme pomocou metódy malého parametra vypočítať všeobecné riešenie H pre *Gamma* Γ rovnicu, z ktorého potom vieme dopočítať cenu opcie. Táto metóda predpokladá, že riešenie vieme zapísať v tvare asymptotického rozvoja. Cieľom tejto práce je odvodiť prvé dva členy tohto rozvoja. Nakoniec na Risk adjusted pricing methodology aplikujeme vzorec získaný touto metódou pre cenu opcie v práci Ďuriša [3]. Túto cenu potom podrobnejšie analyzujeme vzhľadom na všetky vstupné premenné a parametra vstupujúce do výpočtu.

Kľúčové slová: oceňovanie opcií, nelineárny RAPM model, kvázilineárna parabolická rovnica, metóda malého parametra

Abstract

Belušková, Veronika: Asymptotic approximations of solutions of nonlinear Black-Scholes equations [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava, 2016, 51 p.

The diploma thesis deals with nonlinear generalisations of the Black-Scholes option pricing model, which consider several factors present on the financial market, such as transaction costs, risk from unprotected portfolio or influence of large investor on the market. We want to find general solution H for *Gamma* Γ equation using small parameter method, from which we can get an option price. This method assumes, that solution can be written in the form of asymptotic expansion. The aim of this thesis is to derive first two terms of this expansion. Finally we use the formula derived by Ďuriš [3] for option price on the Risk adjusted pricing methodology model. We analyse this price in respect to each input variable and parameter.

Keywords: option pricing, nonlinear RAPM model, quasilinear parabolic equation, small parameter method

Obsah

Zoznam použitých symbolov	9
Úvod	10
1 Black-Scholesov model a jeho nelineárne zovšeobecnenia	12
1.1 Black-Scholesov model	12
1.2 Nelineárne zovšeobecnenia B-S modelu	13
1.3 Odvodenie Γ rovnice	14
1.4 Prehľad vybraných nelineárnych modelov	15
1.4.1 Lelandov model	15
1.4.2 Modelovanie investorových preferencií	16
1.4.3 Modelovanie nelikvidného trhu a vplyvu dominantného investora	17
1.4.4 Model na oceňovanie opcií pri variabilných transakčných nákladoch	17
1.4.5 Risk adjusted pricing methodology model	18
2 Metóda malého parametra	19
2.1 Úloha o výške projektilu	19
2.2 Všeobecná schéma	21
3 Odvodenie explicitného vzorca pre Γ rovnicu	24
3.1 Porovnanie H a V	29
4 Risk adjusted pricing methodology model	34
4.1 Nelineárna Black-Scholesova rovnica pre RAPM	35
4.2 Riešenie V a jeho analýza	36
4.3 Analýza korekčnej funkcie V_1	39
4.3.1 Citlivosť V_1 na cenu podkladového aktíva S	40
4.3.2 Citlivosť V_1 na čas do expirácie τ	41
4.3.3 Citlivosť V_1 na úrokovú mieru r	43
4.3.4 Citlivosť V_1 na historickú volatilitu $\hat{\sigma}$	45
Záver	48

Zoznam použitej literatúry

50

Zoznam použitých symbolov

B-S model	Black-Scholesov model
∂_x^2	druhá parciálna derivácia podľa x
$N(x)$	distribučná funkcia normálneho rozdelenia
$N'(x)$	funkcia hustoty normálneho rozdelenia
ask cena	ponuková cena
bid cena	dopytová cena
RAPM model	Risk adjusted pricing methodology model

Úvod

Kapitál akciovej spoločnosti vzniká emisiou akcií a ich predajom na trhu. Tento kapitál je dôležitý pre fungovanie spoločnosti a jej budúce investície, preto je hodnota jej akcií pre takúto spoločnosť významným ukazovateľom. Pre akcionárov predstavujú tieto cenné papiere možnosť investície, pri ktorej očakávajú zisk z dividend alebo nárastu hodnoty akcie. Pri prepade ceny akcií je ale táto investícia stratová, voči čomu sa akcionári snažia zabezpečiť, napríklad pomocou opcií.

Opcie sú také finančné deriváty, ktoré poskytujú ich vlastníčkovi právo obchodovať s podkladovou akciou v dohodnutom čase za vopred dohodnutú cenu. Najznámejším modelom na oceňovanie opcií je Black-Scholesov model, kde cena opcie je riešením lineárnej parciálnej diferenciálnej rovnice. Tento model však má viacero predpokladov, ktoré na reálnych trhoch neplatia. Preto boli neskôr odvodené nelineárne zovšeobecnenia tohto modelu zohľadňujúce rôzne faktory skutočných trhov ako napríklad transakčné náklady, investorove preferencie, či riziko z nezabezpečeného portfólia. Pre tieto zovšeobecnenia sa Black-Scholesova rovnica stáva nelineárnou. Vieme z nej však odvodiť kvázilineárnu *Gamma* Γ rovnicu.

Cieľom tejto práce je odvodiť všeobecný explicitný vzorec pre riešenie *H Gamma* Γ rovnice pre nelineárne zovšeobecnenia Black-Scholesovho modelu. Tento vzorec však nevieme vo všeobecnosti explicitne vyjadriť, a preto sa pokúsime vhodne aproximovať hľadané riešenie. Na nájdenie tohto riešenia využijeme metódu malého parametra, v ktorej sa riešenie aproximuje pomocou asymptotického rozvoja. Zameriame sa na nájdenie prvých dvoch členov tohto rozvoja. Ďalej tento vzorec porovnáme s výsledkom práce Ďuriša [3] a ukážeme že tieto výsledky sú ekvivalentné.

Práca je rozdelená na štyri kapitoly. V prvej kapitole si popíšeme základy oceňovania opcií, Black-Scholesov model, jeho predpoklady a potrebu nelineárnych zovšeobecní tohto modelu. Taktiež si pre tieto nelineárne modely si ukážeme odvodenie *Gamma* Γ rovnice a vysvetlíme si základnú myšlienku vybraných zovšeobecní. V ďalšej kapitole si na motivačnom príklade ukážeme fungovanie metódy malého parametra, ktoré potom zhrnieme do všeobecnej schémy. V tretej kapitole využitím tejto metódy odvodíme explicitný vzorec pre *H* riešenie *Gamma* Γ rovnice, ktoré následne porovnáme s riešením *V* pre takéto modely, ktoré v svojej práci vypočítal Ďuriš [3]. Posledná kapitola

je venovaná Risk adjusted pricing methodology modelu. Najprv si popíšeme odvodenie tohto modelu a potom preň využijeme vzorec pre cenu opcie V . Túto cenu potom podrobne analyzujeme, vzhľadom na všetky parametre a premenné vstupujúce do tohto vzorca.

V druhej a štvrtej kapitole sme analýzy doplnili aj grafickými ilustráciami, ktoré sme vykreslili využitím softvéru Wolfram Mathematica 10.3©. Tento softvér sme využili aj v tretej kapitole pri výpočte vzorca.

1 Black-Scholesov model a jeho nelineárne zovšeobecnenia

V tejto kapitole si stručne popíšeme Black-Scholesov model a jeho predpoklady. Vysvetlíme si potrebu nelineárnych zovšeobecnení tohto modelu, pre ktoré ďalej odvodíme Γ rovnicu. Navyše si popíšeme niektoré vybrané nelineárne modely.

1.1 Black-Scholesov model

V roku 1973 americkí ekonómovia Fischer Black a Myron Scholes odvodili model na oceňovanie opcií [2]. V tomto modeli predpokladáme, že cena podkladového aktíva S sa riadi geometrickým Brownovým pohybom, a teda:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t, \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

kde μ určuje trend a σ volatilitu ceny a W_t je Wienerov proces. Ďalšie predpoklady tohto modelu sú:

- bezriziková úroková miera r je konštantná a známa
- neexistujú transakčné náklady
- je možné kupovať a predávať ľubovoľné množstvo akcií a hotovosti
- nie sú dané žiadne obmedzenia na short-selling
- opcie sú európskeho typu.

Pri takýchto predpokladoch je cena opcie $V(S, t)$ riešením lineárnej parabolickej rovnice

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (2)$$

Počiatočné podmienky pre túto rovnicu sú závislé od typu opcie. Najzaužívanejšie sú call a put opcie. Predpokladáme, že sú európskeho typu:

Európska call opcia je právo, ale nie povinnosť kúpiť podkladové aktívum za expiračnú cenu E vo vopred dohodnutom expiračnom čase T .

Európska put opcia je právo, ale nie povinnosť predať podkladové aktívum za expiračnú cenu E vo vopred dohodnutom expiračnom čase T .

Opciu vlastník v čase T uplatní, ak bude mať z jej realizácie zisk. Pre call opciu to platí, ak je expiračná cena E vyššia ako cena S podkladového aktíva v čase T . Matematicky zapísané teda:

$$V(S, T) = \max(0, S - E). \quad (3)$$

Put opciu vlastník uplatňuje ak je cena E nižšia ako cena S podkladového aktíva v čase T . Matematicky vyjadrené:

$$V(S, T) = \max(0, E - S). \quad (4)$$

Cena V call opcie je teda na základe rovnice (2) a počiatočnej podmienky (3):

$$V(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (5)$$

kde N je distribučná funkcia normálneho rozdelenia $N(0,1)$ a $d_1 = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ [12].

1.2 Nelineárne zovšeobecnenia B-S modelu

Všeobecné predpoklady základného Black-Scholesovho modelu ale na reálnom trhu neplatia. Trh v tomto modeli je dokonale elastický a likvidný, tiež obsahuje dostatok ochotných kupujúcich a predávajúcich. Trh v modeli predpokladá dostatočný počet opcií s rozdielnymi expiračnými cenami a rozdielnymi časmi splatnosti, aby bola možnosť vytvoriť samofinancovateľné portfólio. Taktiež na tomto trhu neexistuje dominantný investor, ktorý by mohol ovplyvniť vývoj ceny akcie. Na reálnych trhoch ale žiaden z týchto predpokladov neplatí.

Predpoklad jednotnej ponukovej-*ask* a dopytovej-*bid* ceny vylučuje transakčné náklady, čo tiež nie je reálny predpoklad. Tento predpoklad sa v modeli využíva kvôli yaisšovaniu portfólia. Avšak pri neustálom obchodovaní pri delta yaisšovaní by boli transakčné náklady nekonečné, a teda pomer akcií a opcií je možné meniť len v diskretných časoch.

Ak sa pozrieme na historické dáta, tak zistíme, že implikovaná volatilita nie je konštantná. Práve preto pri rôznych rozšíreniach ([8], [9], [10]) sa predpokladá, že volatilita σ je funkciou :

$$\sigma = \sigma(H, S, \tau), \quad (6)$$

kde $H = S\partial_S^2 V$ a $\tau = T - t$. Použitím volatility v tvare (6) v Black-Scholesovej rovnici (2) dostávame nelineárnu parabolickú rovnicu:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(H, S, \tau)S^2\frac{\partial V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (7)$$

1.3 Odvodenie Γ rovnice

Táto rovnica bola prvýkrát odvodená Jandačkom a Ševčovičom [8] a podrobnejšie neskôr popísaná Ševčovičom a Žitňanskou [14]. Využitím zvyčajnej zmeny nezávislých premenných $x = \ln(S/E)$, $x \in \mathbb{R}$, $\tau = T - t$, $\tau \in (0, T)$ zavedieme označenie:

$$H(x, \tau) = S\Gamma = S\partial_S^2 V(S, t), \quad (8)$$

$$\beta(H) = \frac{1}{2}\sigma^2(H)H. \quad (9)$$

Keďže $\partial_x = S\partial_S$, potom teda:

$$\begin{aligned} S\partial_S^2(S\beta) &= S\partial_S(\beta + S\partial_S\beta) = \partial_x(\partial_x\beta + \beta), \\ S\partial_S^2(S\partial_S V) &= S\partial_S(\partial_S V + S\partial_S^2 V) = H + \partial_x H. \end{aligned}$$

Na základe týchto vzťahov druhou deriváciou rovnice (7) podľa x dostávame, že $H = H(x, \tau)$ je riešením kvázilineárnej parabolickej Γ rovnice:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\beta(H) + \frac{\partial}{\partial x}\beta(H) + r\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (10)$$

Riešenie tejto rovnice podlieha počiatkovej podmienke pre $\tau = 0$:

$$H(x, 0) = \bar{H}(x) = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

kde $\delta(x)$ je Diracova δ funkcia. V našom prípade platí, že táto funkcia môže byť aproximovaná nasledovne:

$$H(x, 0) \approx \frac{N'(d)}{\sigma\sqrt{\tau^*}}, \quad (12)$$

kde $\tau^* > 0$ je dostatočne malé, $N'(d)$ je funkcia hustoty normálneho rozdelenia, $N'(d) = e^{-d^2/2}/\sqrt{2\pi}$ a $d = (x + (r - \hat{\sigma}^2/2)\tau^*)/\hat{\sigma}\sqrt{\tau^*}$ [14]. Táto aproximácia vychádza zo štandardného Black-Scholesovho modelu, kde platí:

$$H(x, \tau^*) = S\partial_S^2 V(S, T - \tau^*) = N'(d)/(\sigma\sqrt{\tau^*}). \quad (13)$$

Tvrdenie 1.1 ([14, Proposition 3.1]). *Nech H je riešením rovnice (10), pre ktoré platí $H(-\infty, \tau) = \partial_x H(-\infty, \tau) = 0$ a $\beta'(0)$ je konečná, kde $\tau = T - t$, potom funkcia:*

$$V(S, \tau) = aS + be^{-r\tau} + \int_{-\infty}^{\infty} (S - Ee^x)^+ H(x, \tau) dx, \quad (14)$$

je riešením nelineárnej Black-Scholesovej rovnice (7) pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{R}$.

Hľadaním asymptotických aproximácií riešenia $V(S, t)$ pre rovnicu (7) sa už zaoberal Ďuriš v svojej práci [3]. V tejto práci budeme hľadať asymptotické aproximácie riešenia $H(x, \tau)$ rovnice (10). Výsledky potom porovnáme na základe ich vzťahu $H(x, \tau) = S\partial_S^2 V(S, t)$.

1.4 Prehľad vybraných nelineárnych modelov

V tejto časti si vysvetlíme základnú myšlienku vybraných nelineárnych zovšeobecnení Black-Scholesovho modelu. Taktiež si uvedieme k nim zodpovedajúcu funkciu volatility $\sigma(H)$ a funkciu $\beta(H)$.

1.4.1 Lelandov model

Jedným z prvých nelineárnych modelov je Lelandov model [10] na oceňovanie opcií za prítomnosti transakčných nákladov. Volatilita σ je v tomto modeli daná nasledovne:

$$\sigma^2(H, S, \tau) = \hat{\sigma}^2 (1 + Le \operatorname{sign} H) = \hat{\sigma}^2 (1 + Le \operatorname{sign}(\partial_S^2 V)), \quad (15)$$

kde $\hat{\sigma}$ je konštantná historická volatilita podkladového aktíva a Le je Lelandovo číslo:

$$Le = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{c}{\hat{\sigma} \sqrt{\Delta t}}, \quad (16)$$

kde Δt je čas medzi dvoma zaistovaniami portfólia. Konštanta $c = \frac{S_{ask} - S_{bid}}{S}$ reprezentuje transakčné náklady, kde S je priemer bid a ask ceny. a Keďže $S > 0$, tak $\operatorname{sign}(S\partial_S^2 V) = \operatorname{sign}(\partial_S^2 V)$ a rovnosť (15) naozaj platí. Na základe toho má potom funkcia β pre tento model má tvar:

$$\beta(H) = \frac{\hat{\sigma}^2}{2} (1 + Le \operatorname{sign} H) H. \quad (17)$$

1.4.2 Modelovanie investorových preferencií

Tento model bol odvodený Barlesom a Sonerom [1]. Preferencie investora sú v ňom reprezentované danou funkciou užitočnosti a investorova averzia k riziku je konštantná.

Predpokladáme, že podkladové aktívum nevypláca dividendy ($q = 0$) a jeho cena sleduje geometrický Brownov pohyb s trendom ρ a štandardnou odchýlkou $\hat{\sigma}$:

$$dS = \rho S dt + \hat{\sigma} S dW_t, \quad (18)$$

kde W_t je Wienerov proces. Na modelovanie obchodovacích stratégií zavedieme dva stochastické procesy X_t a Y_t popisujúce správanie doláru na peňažnom trhu a počet vlastnených akcií. Obchodovacou stratégiou na intervale $[t, T]$ budeme rozumieť usporiadanú dvojicu (L_t, M_t) zľava spojitých, neklesajúcich funkcií, takých že, $L_t = M_t = 0$. Funkciu L_t môžeme interpretovať ako kumulatívny transfer (meraný v počte akcií) z peňažného trhu na akciu. Opačný proces popisuje funkcia M_t . Nech $\mu \in (0, 1)$ je parameter popisujúci proporčné transakčné náklady pri predaji alebo kúpe aktíva. To znamená, že S_{ask} a S_{bid} môžeme zapísať ako:

$$S_{ask} = (1 + \mu)S, \quad S_{bid} = (1 - \mu)S, \quad (19)$$

kde S je priemer S_{ask} a S_{bid} cien. Prírastky na dolárovom trhu peňazí dX a prírastky počtu akcií v portfóliu dY sú potom vyjadrené ako:

$$dY = -S(1 + \mu)dL + S(1 - \mu)dM, \quad (20)$$

$$dZ = dL - dM. \quad (21)$$

Hlavnou myšlienkou pri oceňovaní európskej opcie je maximalizácia danej funkcie užitočnosti investora U . Predpokladáme, že funkcia užitočnosti je daná ako:

$$U^\varepsilon(y) = 1 - e^{-\frac{y}{\varepsilon}}, \quad (22)$$

kde parameter ε je nepriamo úmerný riziko-averznému faktoru. Maximalizujeme očakávanú užitočnosť z investorovho koncového imania s rešpektom na všetky obchodovacie stratégie (L_τ, M_τ) , $\tau \in [t, T]$ a počiatkové podmienky $Y_t = y$, $Z_t = z$, $S_t = s$ v čase t .

Výsledkom odvodzovania je Black-Scholesov model s nelineárnou funkciou volatility v tvare:

$$\sigma^2(H, S, \tau) = \hat{\sigma}^2 (1 + \psi(a^2 e^{r\tau} SH)), \quad (23)$$

kde ψ je riešením ODR:

$$\begin{cases} \psi'(u) = \frac{\psi(u)+1}{2\sqrt{u\psi(u)-u}}, \\ \psi(0) = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Pri tomto modeli si premenné transformujeme využitím štandardnej transformácie: $x = \ln(S/E)$, $\tau = T - t$. Funkcia $\beta(H)$ ktorá sa využíva v rovnici (10), nadobúda potom pre tento model tvar:

$$\beta(H, x, \tau) = \frac{\sigma^2}{2} (1 + \Psi(Ea^2 e^{r\tau+x} H)) H. \quad (25)$$

1.4.3 Modelovanie nelikvidného trhu a vplyvu dominantného investora

Tento model bol predstavený Freyom [5] a taktiež vychádza zo základného Black-Scholesovho modelu. Avšak vo Freyovom modeli je vynechaný predpoklad o dokonalej likvidite trhu a predpoklad, že všetci investori sú dostatočne malí na to, aby nemohli ovplyvniť hodnotu podkladového aktíva. Keďže sa týmto modelom podrobnejšie zaoberal Ďuriš [3] uvedieme si len tvar volatility σ a funkcie $\beta(H)$ pre toto zovšeobecnenie Black-Scholesovho modelu. Funkcia volatility má teda tvar:

$$\sigma^2(H, S, \tau) = \hat{\sigma}^2 (1 - \rho\lambda(S)H)^{-2}, \quad (26)$$

kde ρ určuje mieru nelikvidity trhu. V prípade $\lambda(S) \equiv 1$ má funkcia $\beta(h)$ tvar:

$$\beta(H) = \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \frac{H}{(1 - \rho H)^2}, \quad (27)$$

1.4.4 Model na oceňovanie opcií pri variabilných transakčných nákladoch

Pri odvodzovaní tohto modelu vychádzajú Ševčovič a Žitňanská [14] z Leelandovho modelu [10]. Navyše však predpokladajú, že veľkí investori môžu očakávať zľavu vzhľadom na veľkosť objemu ich transakcie. Čím viac kúpia tým nižšie budú transakčné náklady na jednu akciu (jednotku podkladového aktíva). Preto predpokladajú, že náklady C na jednu transakciu budú funkciou objemu transakcie $|\Delta\delta|$ za jednotku času Δt , a teda $C = C(|\Delta\delta|)$. Pod úpravou funkcie transakčných nákladov podľa **strednej hodnoty** budeme rozumieť nasledujúcu transformáciu:

$$\tilde{C}(\xi) = \sqrt{\pi/2} E[C(\xi|\Phi)|\Phi] = \int_0^\infty C(\xi x) x e^{-x^2/2} dx, \quad (28)$$

kde Φ je náhodná premenná so štandardizovaným normálnym rozdelením, teda $\Phi \approx N(0, 1)$. Funkcia volatility má potom tvar:

$$\sigma^2(H) = \hat{\sigma}^2 \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{C}(\hat{\sigma}S|\partial_S^2 V|\sqrt{\Delta t}) \frac{\text{sign}(S\partial_S^2 V)}{\hat{\sigma}\sqrt{\Delta t}} \right). \quad (29)$$

1.4.5 Risk adjusted pricing methodology model

Tento model bol predstavený Kratkom [9] a rozšírený Jandačkom a Ševčovičom [8]. V tomto modeli je zohľadnené riziko vznikajúce z netriviálnych transakčných nákladov a tiež riziko z nezabezpečeného portfólia. Obe z týchto rizík závisia od dĺžky časového intervalu medzi dvoma transakciami. Celková riziková prémie je definovaná ako súčet transakčných nákladov a nákladov na riziko z nezabezpečeného portfólia. Minimalizáciou funkcionálu rizikovej prémie získavame optimálnu dĺžku zaistovacieho intervalu. Týmto modelom sa budeme podrobnejšie zaoberať v kapitole 4.

2 Metóda malého parametra

Pre niektoré úlohy v matematike alebo fyzike nevieme nájsť vo všeobecnosti explicitné riešenie. Na riešenie týchto úloh často používame numerické metódy. Nepresnosť tohto riešenia závisí od formy aproximácie a tiež od nepresností spôsobených aritmetikou počítača. Algoritmy sú tiež často zložité, a preto je čas potrebný na riešenie komplikovanejšej úlohy dlhší.

Ďalšou možnosťou je vyhnúť sa numerickému riešeniu a nájsť iný spôsob aproximácie riešenia. V knihách Holmesa [7], [6] sú popísané asymptotické metódy na nájdenie takého riešenia. Využíva sa pritom asymptotická expanzia na nájdenie aproximovaného riešenia diferenciálnych rovníc. V tejto časti si vysvetlíme presnejšie ako funguje metóda malého parametra na motivačnom prípade, ktorý potom zhrnieme do všeobecnej schémy.

2.1 Úloha o výške projektilu

V oboch publikáciách [6],[7] je metóda malého parametra vysvetlená na príklade projektilu, ktorý je vystrelený zo zeme. Nech $x(t)$ vyjadruje výšku projektilu, meranú od povrchu zeme. Z druhého Newtonovho zákona dostávame rovnicu pohybu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}, \quad \text{pre } t > 0, \quad (30)$$

kde R je polomer Zeme a g je gravitačná konštanta. Predpokladáme, že projektil začína priamo z povrchu danou rýchlosťou, teda $x(0) = 0$ a $x'(0) = v_0$, kde $v_0 > 0$. Túto nelineárnu rovnicu sa snažíme zjednodušiť, aby sme našli aproximáciu riešenia. Takáto úprava sa nazýva perturbácia. V tomto prípade využijeme predpoklad, že výška projektilu je oproti polomeru Zeme zanedbateľná, a teda x v menovateli zanedbáme. Potom $x \approx x_0$, kde $x_0'' = -g$ pre $x_0(0) = 0$ a $x_0'(0) = v_0$. Riešením tejto úlohy dostávame:

$$x_0(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t. \quad (31)$$

Problém takéhoto zjednodušenia je, že nevieme ako explicitne určiť korekciu aproximovaného riešenia (31). Potrebujeme to vedieť, aby sme mohli merať chybu pri použití tejto aproximácie a tiež, aby sme videli ako nelineárny charakter originálneho problému ovplyvňuje pohyb projektilu. Pre jednoduchšiu prácu s týmto príkladom, transformuje

používané premenné na bezrozmerné premenné nasledovne:

$$\tau = \frac{t}{t_c}, \quad y(\tau) = \frac{x(t)}{x_c}, \quad (32)$$

kde t_c je charakteristický čas problému a x_c je charakteristická hodnota riešenia. Využitím tejto transformácie sa úloha (30) mení na:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = -\frac{1}{(1 + \varepsilon y)^2}, \quad \tau > 0, \quad (33)$$

kde $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ a parameter $\varepsilon = v_0^2/Rg$. Pre $v_0 \ll 300m/s$ je parameter ε zanedbateľný a riešenie (31) je dostatočne presnou aproximáciou [6]. Ak ale parameter ε nie je zanedbateľný potrebujeme naše riešenie upresniť. Pri metóde malého parametra je podstatou získať riešenie do požadovaného rádu parametra ε . Preto budeme riešenie hľadať v tvare asymptotického rozvoja:

$$y \sim y_0(\tau) + \varepsilon^\alpha y_1(\tau) + \dots. \quad (34)$$

Využitím predpokladu, že pre malé z platí $(1+z)^{-2} \sim 1-2z$ a dosadením (34) do (33) dostávame:

$$\begin{aligned} y_0''(\tau) + \varepsilon^\alpha y_1''(\tau) + \dots &\sim -1 + 2\varepsilon y_0(\tau) + \dots, \\ y_0(0) + \varepsilon^\alpha y_1(0) + \dots &= 0, \quad y_0'(0) + \varepsilon^\alpha y_1'(0) + \dots = 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Túto diferenciálnu rovnicu rozdelíme na viacero rovníc podľa rádu parametra. Porovnaním výrazov s rovnakým rádom ε dostávame nasledujúce úlohy:

$$\begin{aligned} o(1): y_0''(\tau) &= -1, \\ y_0(0) &= 0, \quad y_0'(0) = 1. \end{aligned}$$

Riešením tejto úlohy je $y_0(\tau) = \frac{1}{2}\tau^2 + \tau$.

Kedže druhý člen na pravej strane rovnice (35) je lineárny, postavíme parameter α v rozvoji (34) rovný jednej.

$$\begin{aligned} o(\varepsilon): y_1''(\tau) &= 2y_0(\tau), \\ y_1(0) &= 0, \quad y_1'(0) = 0. \end{aligned}$$

Pre túto rovnicu je riešením $y_1(\tau) = \frac{1}{3}\tau^3 - \frac{1}{12}\tau^4$. Finálne dostávame riešenie s požadovanou presnosťou:

$$y(\tau) \sim \tau \left(1 - \frac{1}{2}\tau\right) + \frac{1}{3}\varepsilon\tau^3 \left(1 - \frac{1}{4}\tau\right). \quad (36)$$

Pre lepšie overenie, že sa takto aproximované riešenie podobá skutočnému riešeniu, využijeme grafické riešenie vypracované v programe `Wolfram Mathematica 10.4`. Na obrázku 1 vidíme porovnanie numerického riešenia s asymptotickým riešením s jedným a dvoma členmi. Všimneme si, že pre nižšie hodnoty parametra ε nám na pozorovanom intervale stačí rozvoj s jedným členom. Pre vyššie hodnoty parametra ε už takáto aproximácia nie je dostatočne presná a je potrebné pridať ďalší člen rozvoja.

2.2 Všeobecná schéma

Na základe postupu, ktorý sme si vysvetlili na motivačnom príklade, budeme postupovať aj pri iných úlohách. Pre väčšiu systémovosť si problém vyjadríme formou operátorov. Úlohy, ktoré budeme riešiť metódou malého parametra si upravíme do nasledujúceho tvaru:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y, \varepsilon) &= 0, \\ \mathcal{P}(y, \varepsilon) &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

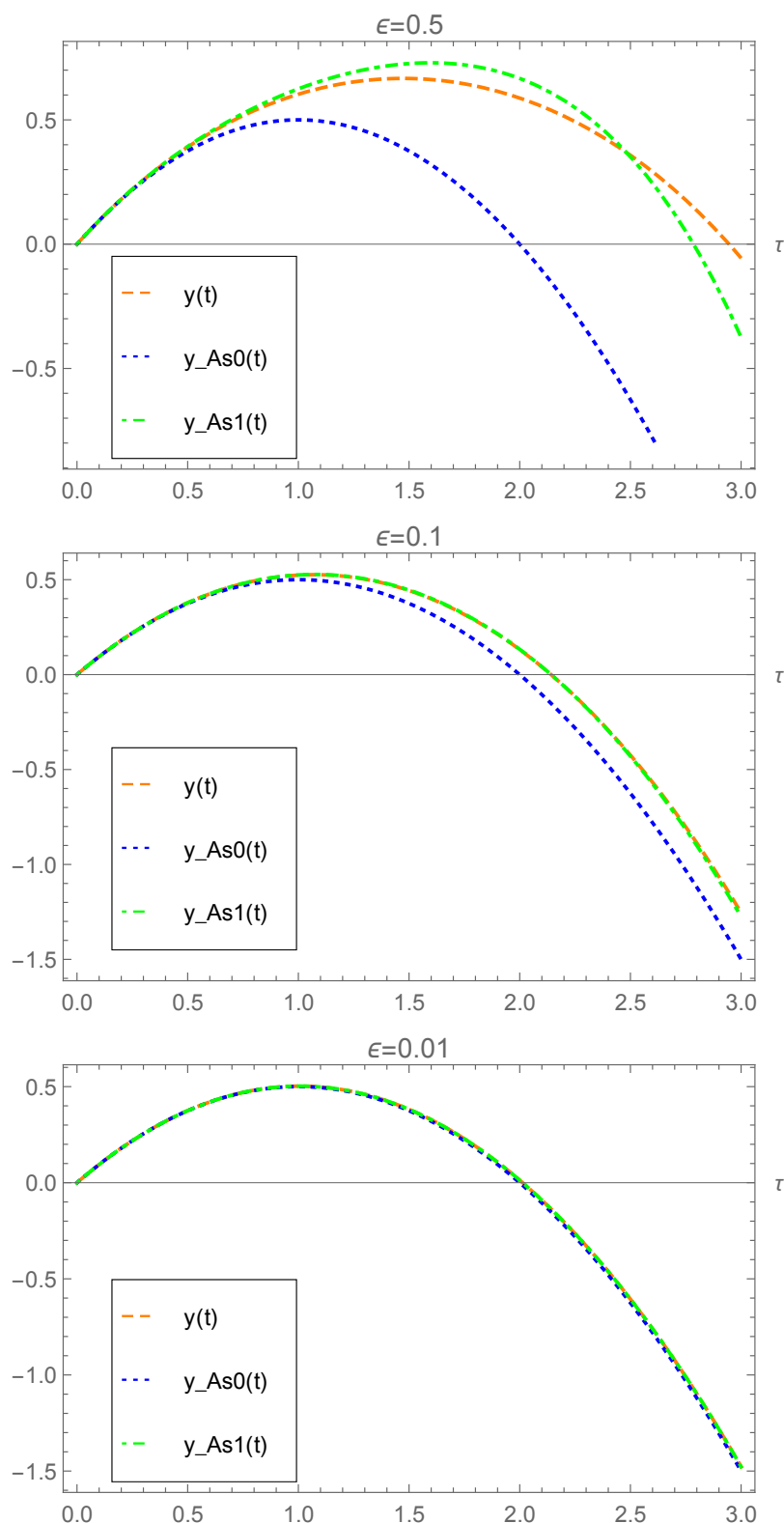
kde operátor \mathcal{L} s malým parametrom ε reprezentuje parciálnu diferenciálnu rovnicu a y je jej riešenie. Operátor \mathcal{P} určuje sústavu počiatočných podmienok. Ďalším krokom je predpoklad, že riešenie bude v tvare asymptotického rozvoja:

$$y \sim y_0(\tau) + \varepsilon^\alpha y_1(\tau) + \dots. \quad (38)$$

Taktiež operátor \mathcal{L} upravíme do tvaru jeho asymptotického rozvoja (najčastejšie používame Taylorov rozvoj):

$$\mathcal{L}(y, \varepsilon) \sim \mathcal{L}_0(y) + \varepsilon^\alpha \mathcal{L}_1(y) + \dots = 0. \quad (39)$$

Riešenie y v asymptoticky rozvinutom tvare (38) dosadíme do počiatočných podmienok a do operátora \mathcal{L} v rozvinutom tvare (39). Túto novú rovnicu aj s počiatočnými podmienkami potom rozdelíme na viacero samostatných rovníc podľa rádu parametra.



Obr. 1: Porovnanie numerického riešenia rovnice (33) s riešením metódou malého parametra s jedným a dvoma členmi na intervale $[0,3]$. Numerické riešenie označené ako $y(\tau)$ je znázorené čiarkovanou oranžovou čiarou, asymptotické riešenie s jedným členom ($y_0(\tau)$) modrou bodkovanou čiarou a asymptotické riešenie s 2 členmi (36) zelenou bodkočiarkovanou čiarou.

Ak predpokladáme, že operátor \mathcal{L} je v y lineárny, potom dostávame systém:

$$\begin{aligned}o(\varepsilon^0) : & \quad \mathcal{L}_0(y_0) = 0, \\o(\varepsilon^1) : & \quad \mathcal{L}_0(y_1) = -\mathcal{L}_1(y_0), \\o(\varepsilon^2) : & \quad \mathcal{L}_0(y_2) = -\mathcal{L}_1(y_1) - \mathcal{L}_2(y_0), \\& \quad \vdots\end{aligned}$$

Riešenie hľadáme osobitne pre jednotlivé rády parametra ε do požadovanej presnosti. Výsledne riešenie potom získame spojením týchto čiastočných riešení podľa (38).

3 Odvodenie explicitného vzorca pre Γ rovnicu

Hlavnou časťou tejto práce bude odvodenie vzorca pre $H(x, \tau)$. Keďže pre túto úlohu nevieme nájsť presné riešenie, budeme sa ho snažiť aproximovať pomocou metódy malého parametra. Našu úlohu si zapíšeme v základnom tvare pre metódu malého parametra (37)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(H, \varepsilon) &= -\partial_\tau H + \partial_x^2 \beta_\varepsilon(H) + \partial_x \beta_\varepsilon(H) + r \partial_x H = 0, \\ \mathcal{P}(H(x, 0), \varepsilon) &= \frac{N'(d)}{\hat{\sigma} \sqrt{\tau^*}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Ako uvádza Holmes [6], problém s riešením by mohol nastať v prípade singularity daného problému. Podobne ako Ďuriš [3] ale pozorujeme, že hoci sa parameter ε nachádza aj pri najvyššom stupni parciálne derivácie $\partial_x^2 H$, funkcia $\beta(H)$ má taký tvar, že pre $\varepsilon = 0$ dostávame lineárnu Γ rovnicu, ktorá je priamo odvodená z pôvodnej Black-Scholesovej rovnice.

Pri metóde malého parametra hľadáme riešenie v tvare asymptotického rozvoja. Naším cieľom v tejto práci bude vypočítať prvé dva členy asymptotického rozvoja:

$$H = H_0 + \varepsilon H_1. \quad (41)$$

Rovnicu (40) môžeme tiež zapísať v tvare asymptotického rozvoja $\mathcal{L}(H, \varepsilon) = \mathcal{L}_0(H) + \varepsilon \mathcal{L}_1(H) + \varepsilon^2 \mathcal{L}_2(H) + \dots$. Nakoľko hľadáme riešenie H do rádu $O(\varepsilon)$, budeme pracovať aj s asymptotickým rozvojom operátora \mathcal{L} do rovnakého rádu, a teda:

$$\mathcal{L}(H, \varepsilon) \approx \mathcal{L}_0(H) + \varepsilon \mathcal{L}_1(H). \quad (42)$$

Do tohto tvaru operátora \mathcal{L} dosadíme hľadané riešenie (41) tiež v tvare asymptotického rozvoja:

$$\mathcal{L}(H, \varepsilon) = \mathcal{L}_0(H_0 + \varepsilon H_1) + \varepsilon \mathcal{L}_1(H_0 + \varepsilon H_1). \quad (43)$$

Operátory \mathcal{L}_0 a \mathcal{L}_1 rozvineme pomocou Taylorovho rozvoja s dvoma členmi v H_0 :

$$\mathcal{L}(H, \varepsilon) = \mathcal{L}_0(H_0) + \varepsilon \frac{d\mathcal{L}_0}{dH}(H_0)H_1 + \varepsilon \left(\mathcal{L}_1(H_0) + \varepsilon \frac{d\mathcal{L}_1}{dH}(H_0)H_1 \right). \quad (44)$$

Vďaka linearite operátora $\mathcal{L}_0(H)$ v H platí:

$$\frac{d\mathcal{L}_0}{dH}(H_0)H_1 = \mathcal{L}_0(H_1). \quad (45)$$

Na základe tohto vzťahu upravíme rovnicu (44) nasledovne:

$$\mathcal{L}(H, \varepsilon) = \mathcal{L}_0(H_0) + \varepsilon (\mathcal{L}_0(H_1) + \mathcal{L}_1(H_0)) + \varepsilon^2 \frac{d\mathcal{L}_1}{dH}(H_0)H_1 = 0. \quad (46)$$

Operátor \mathcal{L} aj riešenie H používame v tvare asymptotického rozvoja, a teda potrebujeme aj počiatočnú podmienku v nasledovnom tvare:

$$\mathcal{P}(H(x, 0), \varepsilon) = H_0(x, 0) + \varepsilon H_1(x, 0) = \frac{N'(d)}{\sigma\sqrt{\tau^*}} \quad (47)$$

Všetky vstupy metódy malého parametra už máme v požadovanom tvare, a teda pokračujeme tým, že si parciálnu diferenciálnu rovnicu (46) a počiatočnú podmienku zapíšeme vo forme sústav rovníc podľa rádu parametra:

$$o(1) : \mathcal{L}_0(H_0) = 0, \quad (48)$$

$$H_0(x, 0) = \frac{N'(d)}{\sigma\sqrt{\tau^*}},$$

$$o(\varepsilon) : \mathcal{L}_0(H_1) = -\mathcal{L}_1(H_0), \quad (49)$$

$$H_0(x, 0) = 0.$$

Ďuriš a kol. [3],[4] sa v svojej práci sústredili na také nelineárne zovšeobecnenia Black-Scholesovho modelu, pre ktoré sa funkcia volatility dala zapísať v tvare:

$$\sigma_\varepsilon^2(\partial_S^2 V, S, \tau) = \hat{\sigma}^2 + 2\varepsilon A(\tau) S^{\gamma-1} H^{\delta-1}, \quad (50)$$

kde $H = S\partial_S^2 V$. V tejto práci sa budeme zaoberať tými z nich, pre ktoré $\gamma = 1$ a teda ich funkciu beta $\beta(H)$ môžeme zapísať ako:

$$\beta(H) = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}^2 + 2\varepsilon A(\tau) H^{\delta-1}) H. \quad (51)$$

Vrátíme sa späť k pôvodnej rovnici (40), do ktorej dosadíme H v tvare asymptotického rozvoja (41) a funkciu $\beta(H)$ (51). Tým pádom dostávame:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(H, \varepsilon) &= \partial_\tau(H_0 + \varepsilon H_1) - \partial_x^2 \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{2} (H_0 + \varepsilon H_1) + \varepsilon A(\tau) (H_0 + \varepsilon H_1)^\delta \right) \\ &\quad - \partial_x \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{2} (H_0 + \varepsilon H_1) + \varepsilon A(\tau) (H_0 + \varepsilon H_1)^\delta \right) - r\partial_x(H_0 + \varepsilon H_1) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Túto rovnicu usporiadame podľa rádu parametra ε , aby sme dostali tvar (46):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(H, \varepsilon) &= \left(\partial_\tau H_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \partial_x^2 H_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \partial_x H_0 - r \partial_x H_0 \right) \\ &\quad + \varepsilon \left(\partial_\tau H_1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \partial_x^2 H_1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \partial_x H_1 - r \partial_x H_1 - A(\tau) \partial_x^2 H_0^\delta - A(\tau) \partial_x H_0^\delta \right) + O(\varepsilon^2) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{53}$$

Funkcie \mathcal{L}_0 a \mathcal{L}_1 môžeme teda zapísať ako:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(H) &= \partial_\tau H - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \partial_x^2 H - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \partial_x H - r \partial_x H, \\ \mathcal{L}_1(H) &= -A(\tau) \partial_x^2 H_0^\delta - A(\tau) \partial_x H_0^\delta. \end{aligned} \tag{54}$$

Ak pre takýto tvar funkcií $\mathcal{L}_i(H)$ uvažujeme systémy (48) a (49). Pre $o(1)$ dostávame rovnicu, ktorá priamo vychádza zo základného Black-Scholesovho modelu, a teda pre H_0 platí:

$$H_0 = S \partial_S^2 V = \frac{N'(d)}{\hat{\sigma} \sqrt{\tau}}, \tag{55}$$

kde V je riešením štandardnej Black-Scholesovej rovnice.

Pre $o(\varepsilon)$ dostávame:

$$\partial_\tau H_1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \partial_x^2 H_1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \partial_x H_1 - r \partial_x H_1 = A(\tau) (\partial_x^2 (H_0^\delta) + \partial_x (H_0^\delta)). \tag{56}$$

Označme pravú stranu rovnice (56) ako $f(x, \tau)$. Potom platí:

$$\begin{aligned} f(x, \tau) &= A(\tau) (\partial_x^2 (H_0^\delta) + \partial_x (H_0^\delta)) \\ &= A(\tau) \frac{e^{-\frac{\delta(x + (r + \hat{\sigma}^2/2)\tau)^2}{2\hat{\sigma}^2\tau}}}{(2\pi\hat{\sigma}^2\tau)^{\frac{\delta}{2}}} \left[\left(\delta \frac{x + (r + \hat{\sigma}^2/2)\tau}{\hat{\sigma}^2\tau} \right)^2 - \frac{\delta}{\hat{\sigma}^2\tau} - \delta \frac{x + (r + \hat{\sigma}^2/2)\tau}{\hat{\sigma}^2\tau} \right] \end{aligned} \tag{57}$$

Rovnicu (56) pomocou exponenciály transformujeme na rovnicu vedenia tepla zavedením novej pomocnej premennej \tilde{H}_1 :

$$H_1 = e^{ax+b\tau} \tilde{H}_1. \tag{58}$$

Konštanty a a b zvolíme tak, aby koeficienty pri člene s funkciou $H(x, \tau)$ a člene s jeho prvou parciálnou deriváciou podľa x boli nulové:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{2} - \frac{r}{\hat{\sigma}^2}, \\ b &= -\frac{(\hat{\sigma}^2 + 2r)^2}{8\hat{\sigma}^2} = -\frac{a^2\hat{\sigma}^2}{2}. \end{aligned} \tag{59}$$

Na základe tejto transformácie potom pre \tilde{H}_1 platí:

$$\begin{cases} \partial_\tau \tilde{H}_1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \partial_x^2 \tilde{H}_1 &= e^{-ax-b\tau} f(x, \tau), & (x, \tau) \in \mathbb{R} \times [0, \infty], \\ \tilde{H}_1(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (60)$$

Vidíme, že rovnica (60) je nehomogénna parciálna diferenciálna rovnica v základnom tvare. Pre všeobecné riešenie rovnice

$$\begin{cases} \partial_\tau u - a^2 \partial_x^2 u &= f(x, \tau), & (x, \tau) \in \mathbb{R} \times [0, \infty], \\ u(x, 0) &= u^0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (61)$$

platí:

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s, \tau) u^0(s) ds + \int_0^\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s, \tau-p) f(s, p) ds dp, \quad (62)$$

kde funkcia G je Greenovo tepelné jadro:

$$G(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2 t}} e^{-\frac{\xi^2}{2\hat{\sigma}^2 t}}. \quad (63)$$

Keďže v rovnici (60) je počiatočná podmienka rovná, tak aj integrál z nulovej funkcie je rovný nule, a teda riešime len druhý integrál z rovnice (62):

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 &= \int_0^\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2(\tau-p)}} e^{-\frac{(x-s)^2}{2\hat{\sigma}^2(\tau-p)}} e^{-as-bp} A(p) \frac{e^{-\frac{\delta(s+(r+\hat{\sigma}^2/2)p)^2}{2\hat{\sigma}^2 p}}}{(2\pi\hat{\sigma}^2 p)^{\frac{\delta}{2}}} \\ &\quad \left(\left(\delta \frac{s+(r+\hat{\sigma}^2/2)p}{\hat{\sigma}^2 p} \right)^2 - \frac{\delta}{\hat{\sigma}^2 p} - \delta \frac{s+(r+\hat{\sigma}^2/2)p}{\hat{\sigma}^2 p} \right) ds dp. \end{aligned} \quad (64)$$

Pre premennú s platí, že najvyšší stupeň s v polynóme je 2 a najvyšší stupeň s v exponente je tiež 2. Preto výraz vo výpočte \tilde{H}_1 upravíme na tvar:

$$\int_0^\tau \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2) e^{-(\gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0)} ds dp. \quad (65)$$

Pomocou softvéru Wolfram Mathematica 10.3 sme vypočítali, že pre $\gamma_2 > 0$ platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2) e^{-(\gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0)} ds = e^{-\gamma_0 + \frac{\gamma_1^2}{4\gamma_2}} \frac{\sqrt{\pi}(\alpha_2 \gamma_1^2 + 2\alpha_2 \gamma_2 - 2\alpha_1 \gamma_1 \gamma_2 + 4\alpha_0 \gamma_2^2)}{4\gamma_2^{5/2}}. \quad (66)$$

Po úprave výrazu v (64) na tvar (66) dostávame pre parametre α_0 , α_1 , α_2 , γ_0 , γ_1 a γ_2 výrazy:

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= \frac{A(p)}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}(\tau-p)}(2\pi\hat{\sigma}^2p)^{\frac{\delta}{2}}} \left(\frac{\delta^2(r+\hat{\sigma}^2/2)^2}{\hat{\sigma}^4} - \frac{\delta(r+\hat{\sigma}^2/2)}{\hat{\sigma}^2} - \frac{\delta}{\hat{\sigma}^2p} \right), \\
 \alpha_1 &= \frac{A(p)}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}(\tau-p)}(2\pi\hat{\sigma}^2p)^{\frac{\delta}{2}}} \left(\frac{2\delta^2(r+\hat{\sigma}^2/2)}{\hat{\sigma}^4p} - \frac{\delta}{\hat{\sigma}^2p} \right), \\
 \alpha_2 &= \frac{A(p)}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}(\tau-p)}2\pi\hat{\sigma}^2p} \frac{\delta^2}{\hat{\sigma}^4p^2}, \\
 \gamma_0 &= \frac{x^2}{2\hat{\sigma}^2(\tau-p)} + bp + \frac{\delta(r+\hat{\sigma}^2/2)^2p^2}{2\hat{\sigma}^2p}, \\
 \gamma_1 &= \frac{-x}{\hat{\sigma}^2(\tau-p)} + a + \frac{\delta(r+\hat{\sigma}^2/2)}{2\hat{\sigma}^2}, \\
 \gamma_2 &= \frac{1}{2\hat{\sigma}^2(\tau-p)} + \frac{\delta}{2\hat{\sigma}^2p}.
 \end{aligned} \tag{67}$$

Tieto výrazy ešte zjednodušíme využitím vzorca (59) pre výpočet parametra a , z čoho dostávame $(r+\hat{\sigma}^2/2) = -a\hat{\sigma}^2$. Pre \tilde{H}_1 teda podľa vzorca (66) platí:

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}_1 &= \int_0^\tau \frac{A(p)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2(\tau-p)}(2\pi\hat{\sigma}^2p)^{\frac{\delta}{2}}} \left(\frac{D}{4\left(\frac{1}{2\hat{\sigma}^2(\tau-p)} + \frac{\delta}{2\hat{\sigma}^2p}\right)^{5/2}} \right) \\
 &\times \exp \left[- \left(\left(\frac{x^2}{2\hat{\sigma}^2(\tau-p)} + bp + \frac{\delta a^2 \hat{\sigma}^2 p}{2} \right) + \frac{\left(\frac{-x}{\hat{\sigma}^2(\tau-p)} + a - \delta a \right)^2}{4\left(\frac{1}{2\hat{\sigma}^2(\tau-p)} + \frac{\delta}{2\hat{\sigma}^2p}\right)} \right) \right] dp,
 \end{aligned} \tag{68}$$

kde

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{\delta^2}{\hat{\sigma}^4p^2} \left(\frac{-x}{\hat{\sigma}^2(\tau-p)} + a - \delta a \right)^2 + 2\frac{\delta^2}{\hat{\sigma}^4p^2} \left(\frac{1}{2\hat{\sigma}^2(\tau-p)} + \frac{\delta}{2\hat{\sigma}^2p} \right) \\
 &- 2 \left(\frac{-2\delta^2a}{\hat{\sigma}^2p} - \frac{\delta}{\hat{\sigma}^2p} \right) \left(\frac{-x}{\hat{\sigma}^2(\tau-p)} + a - \delta a \right) \left(\frac{1}{2\hat{\sigma}^2(\tau-p)} + \frac{\delta}{2\hat{\sigma}^2p} \right) \\
 &+ 4 \left(\delta^2a^2 + \delta a - \frac{\delta}{\hat{\sigma}^2p} \right) \left(\frac{1}{2\hat{\sigma}^2(\tau-p)} + \frac{\delta}{2\hat{\sigma}^2p} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{69}$$

Spätným dosadením do transformácie (58) a úpravou výrazu v menovateli D dostávame

konečný tvar H_1 :

$$\begin{aligned}
 H_1 &= e^{ax+b\tau} \tilde{H}_1 \\
 &= e^{ax+b\tau} \int_0^\tau \frac{A(p)(\hat{\sigma}^2 p(\tau-p))^2}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}} p^{\frac{\delta-1}{2}} (p+\delta(\tau-p))^{\frac{5}{2}}} e^{-\left(\left(\frac{x^2}{2\hat{\sigma}^2(\tau-p)}+bp+\frac{\delta a^2 \hat{\sigma}^2 p}{2}\right)+\frac{\left(\frac{-x}{\hat{\sigma}^2(\tau-p)}+a-\delta a\right)^2}{4\left(\frac{1}{2\hat{\sigma}^2(\tau-p)}+\frac{\delta}{2\hat{\sigma}^2 p}\right)}\right)} \\
 &\quad \left(\frac{\delta^2}{\hat{\sigma}^4 p^2} \left(\frac{-x}{\hat{\sigma}^2(\tau-p)}+a-\delta a\right)^2 + 2\frac{\delta^2}{\hat{\sigma}^4 p^2} \left(\frac{1}{2\hat{\sigma}^2(\tau-p)}+\frac{\delta}{2\hat{\sigma}^2 p}\right)\right) \\
 &\quad - 2\left(\frac{-2\delta^2 a}{\hat{\sigma}^2 p}-\frac{\delta}{\hat{\sigma}^2 p}\right) \left(\frac{-x}{\hat{\sigma}^2(\tau-p)}+a-\delta a\right) \left(\frac{1}{2\hat{\sigma}^2(\tau-p)}+\frac{\delta}{2\hat{\sigma}^2 p}\right) \\
 &\quad + 4\left(\delta^2 a^2+\delta a-\frac{\delta}{\hat{\sigma}^2 p}\right) \left(\frac{1}{2\hat{\sigma}^2(\tau-p)}+\frac{\delta}{2\hat{\sigma}^2 p}\right)^2 dp.
 \end{aligned} \tag{70}$$

Tým pádom sme odvodili vzťah pre H_1 . Vieme už teda vypočítať riešenie H systému (40) kombináciou H_1 a H_0 podľa vzorca (41).

3.1 Porovnanie H a V

Tvrdenie 3.1. *Nech $V = V_0 + \varepsilon V_1$ je riešenie Black-Scholesovej rovnice získané metódou malého parametra (v práci Ďuriša [3]) a $H = H_0 + \varepsilon H_1$ je riešenia Gamma Γ rovnice získané metódou malého parametra (v tejto práci). Potom $H_i = S\partial_S^2 V_i$ pre $i=0,1$.*

Dôkaz: H_0 a V_0 vychádzajú zo štandardného Black-Scholesovho modelu a teda vieme, že platí $H_0 = S\partial_S^2 V_0$.

Pre výpočet V_1 Ďuriš v svojej práci taktiež použil zvyčajnú transformáciu premenných $S = Ee^x$ a $\tau = T - t$ Keďže v našej práci uvažujeme $H(x, \tau)$, použijeme výsledné V_1 pred spätnou transformáciou:

$$V_1(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} E^\gamma \int_0^\tau \frac{A(p)}{\Lambda(\tau, p)} e^{Kp + M(x, \tau, p)} dp, \tag{71}$$

kde

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{P^2 \hat{\sigma}^2}{2(\delta - 1)} + \beta(\delta - 1), \\
 M(x, \tau, p) &= \frac{Px}{1 - \delta} + \frac{P^2 \hat{\sigma} \tau}{2(1 - \delta)^2} - \left[\frac{\delta x^2}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{Px\delta\tau}{1 - \delta} + \frac{P^2 \hat{\sigma}^2 \delta \tau^2}{2(1 - \delta)^2} \right] \frac{1}{Q(\tau, p)}, \\
 P &= \gamma - \delta - \alpha(1 - \delta), \\
 Q(\tau, p) &= \delta\tau + (1 - \delta)p, \\
 \Lambda(\tau, p) &= (2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}} p^{\frac{\delta-1}{2}} \sqrt{Q(\tau, p)}.
 \end{aligned} \tag{72}$$

Pre parametre α , β uvádzame ich tvar a aj ich vzťah s parametrami a a b zo vzorca (59):

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{2} - \frac{r}{\hat{\sigma}^2} = a + 1, \\
 \beta &= -\frac{\hat{\sigma}^2}{2} \alpha^2 - r = -\frac{\hat{\sigma}^2 a^2}{2} = b.
 \end{aligned} \tag{73}$$

V tejto práci sa venujeme iba takým nelineárnym zovšeobecneniam Black-Scholesovho modelu, pre ktoré $\gamma = 1$, a teda $P = (1 - \delta)(1 - \alpha)$. Použitím tvaru P a vzťahov (73) upravíme V_1 na tvar:

$$\begin{aligned}
 V_1(x, \tau) &= e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \\
 &= e^{(a+1)x + b\tau} E \int_0^\tau \frac{A(p)}{\Lambda(\tau, p)} e^{\left[\frac{a^2(\delta-1)\hat{\sigma}^2}{2} + b(\delta-1) \right] p - xa + \frac{a^2 \hat{\sigma} \tau}{2} - \left[\frac{\delta x^2}{2\hat{\sigma}^2} - ax\delta\tau + \frac{a^2 \hat{\sigma}^2 \delta \tau^2}{2} \right] \frac{1}{Q(\tau, p)}} dp.
 \end{aligned} \tag{74}$$

Potrebuje ukázať, že $H_1 = S \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2}$. Počítame ale s $V_1(x, \tau)$, preto musíme použiť reťazové pravidlo, na základe ktorého pre prvú parciálnu deriváciu V_1 podľa S platí:

$$\partial_x V_1 = \frac{\partial V_1}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} = S \partial_S V_1. \tag{75}$$

Využitím rovnakého pravidla pre druhú deriváciu dostávame:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = S \partial_S (S \partial_S V_1) = S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + S \frac{\partial V_1}{\partial S}. \tag{76}$$

A teda:

$$\begin{aligned}
 S \partial_S^2 V_1 &= \frac{1}{S} (\partial_x^2 V_1 - \partial_x V_1) \\
 &= \frac{1}{E} e^x (\partial_x^2 - \partial_x) [e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)] \\
 &= \frac{1}{E} e^x e^{\alpha x + \beta \tau} ((\alpha^2 - \alpha)u(x, \tau) + (2\alpha - 1)\partial_x u(x, \tau) + \partial_x^2 u(x, \tau)).
 \end{aligned} \tag{77}$$

Pre prehľadnejšie porovnávanie označíme takto získaný výsledok ako \bar{H}_1 . Platí:

$$\begin{aligned} \bar{H}_1 &= e^{-x} e^{(a+1)x+b\tau} \int_0^\tau \frac{A(p)}{\Lambda(\tau, p)} e^{\left[\frac{a^2(\delta-1)\hat{\sigma}^2}{2} + b(\delta-1) \right] p - xa + \frac{a^2\hat{\sigma}\tau}{2} - \left[\frac{\delta x^2}{2\hat{\sigma}^2} - ax\delta\tau + \frac{a^2\hat{\sigma}^2\delta\tau^2}{2} \right] \frac{1}{Q(\tau, p)}} \\ &\quad \times \left[(a^2 + a) + (2a + 1) \left(-a - \frac{\delta x}{\hat{\sigma}^2(\delta\tau + (1 - \delta)p)} + \frac{a\delta\tau}{\delta\tau + (1 - \delta)p} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(-a - \frac{\delta x}{\hat{\sigma}^2(\delta\tau + (1 - \delta)p)} + \frac{a\delta\tau}{\delta\tau + (1 - \delta)p} \right)^2 - \frac{\delta}{\hat{\sigma}^2(\delta\tau + (1 - \delta)p)} \right] \end{aligned} \quad (78)$$

Chceme ukázať, že $\bar{H}_1 = H_1$, a preto si funkcie H_1 a \bar{H}_1 upravíme na tvar:

$$\int_0^\tau (\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2) e^{-(\omega_2 x^2 + \omega_1 x + \omega_0)} dp. \quad (79)$$

Výrazy prislúchajúce \bar{H}_1 budú tiež označené čiarou. Začneme porovnaním výrazov v exponenciálach týchto funkcií. Ako prvé porovnáme koeficienty ω_2 , pre ktoré platí:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_2 - \omega_2 &= \frac{\overbrace{-\delta}^{\bar{\omega}_2}}{2\delta^2(\delta\tau + (1 - \delta)p)} - \frac{\overbrace{-1}^{\omega_2}}{2\hat{\sigma}^2(\tau - p)} + \frac{\overbrace{\frac{1}{\hat{\sigma}^4(\tau - p)^2}}^{\omega_2}}{\frac{4(p + \delta(\tau - p))}{2\hat{\sigma}^2(\tau - p)p}} \\ &= \frac{-\delta}{2\delta^2(\delta\tau + (1 - \delta)p)} - \frac{-(p + \delta(\tau - p)) + p}{2\hat{\sigma}^2(\tau - p)(p + \delta(\tau - p))} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (80)$$

Ďalej sa pozrieme na koeficienty ω_1 , pre ktoré platí:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 - \omega_1 &= \overbrace{-1 + a + 1 - a}^{\bar{\omega}_1} - \frac{\overbrace{-a\delta\tau}^{\bar{\omega}_1}}{\delta\tau + (1 - \delta)p} - \frac{\overbrace{\frac{-2a}{\hat{\sigma}^2(\tau - p)}}^{\omega_1}}{\frac{4(p + \delta(\tau - p))}{2\hat{\sigma}^2(\tau - p)p}} + \frac{\overbrace{\frac{2\delta a}{\hat{\sigma}^2(\tau - p)}}^{\omega_1}}{\frac{4(p + \delta(\tau - p))}{2\hat{\sigma}^2(\tau - p)p}} + a \\ &= \frac{a\delta\tau}{\delta\tau + (1 - \delta)p} - \frac{-ap + \delta ap + a(p + \delta(\tau - p))}{p + \delta(\tau - p)} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (81)$$

Posledným koeficientom exponenciály je ω_0 . Pri porovnávaní týchto koeficientov využi-

jeme vzťah (59) pre parametre a a b . Pre koeficienty ω_0 teda platí :

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega}_0 - \omega_0 &= \overbrace{b\tau + \left(\frac{a^2(\delta - 1)\hat{\sigma}^2}{2} + b(\delta - 1) \right) p + \frac{a^2\delta\tau}{2} - \frac{a^2\hat{\sigma}^2\delta\tau}{2(\delta\tau + (1 - \delta)p)}}^{\bar{\omega}_0} \\
 &\quad - \overbrace{b\tau - bp - \frac{\delta a^2\hat{\sigma}^2 p}{2} + \frac{a^2 - 2\delta a^2 + \delta^2 a^2}{\frac{4(p + \delta(\tau - p))}{2\hat{\sigma}^2(\tau - p)p}}}_{\omega_0} \\
 &= b \left(\tau + \delta p - p + \frac{-(\delta - 1)p(\delta\tau + (1 - \delta)p) - \tau(\delta\tau + (1 - \delta)p) - \delta\tau^2}{\delta\tau + (1 - \delta)p} \right) \\
 &\quad - b \left(\tau + \delta p - p + \frac{-\delta^2(\tau - p)p + (\tau - p)p(\delta - 1) + \delta(\tau - p)p}{p + \delta(\tau - p)} \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{82}$$

Vidíme, že exponenciály sa vo funkciách H_1 a \bar{H}_1 rovnajú. Rovnakým spôsobom teraz pokračujeme v porovnávaní kvadratických polynómov týchto funkcií.

Pre koeficienty λ_2 zodpovedajúce kvadratickému členu x^2 platí:

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda}_2 - \lambda_2 &= \frac{\overbrace{\delta^2 A(p)}^{\bar{\lambda}_2}}{\hat{\sigma}^4(\delta\tau + (1 - \delta)p)^{\frac{5}{2}}(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}}p^{\frac{\delta-1}{2}}} \\
 &\quad - \underbrace{\left(\frac{A(p)(\hat{\sigma}^2 p(\tau - p))^2}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}}p^{\frac{\delta-1}{2}}(p + \delta(\tau - p))^{\frac{5}{2}}} \right)}_{\lambda_2} \left(\frac{\delta^2}{\hat{\sigma}^8 p^2(\tau - p)^2} \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{83}$$

Ďalej pre koeficienty λ_1 zodpovedajúce lineárnemu členu x platí:

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda}_1 - \lambda_1 &= \overbrace{\left(\frac{A(p)}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}}p^{\frac{\delta-1}{2}}\sqrt{\delta\tau + (1 - \delta)p}} \right) \left(\frac{-(2a + 1)\delta + 2a\delta}{\hat{\sigma}^2(\delta\tau + (1 - \delta)p)} + \right.}_{\bar{\lambda}_1} \\
 &\quad \left. + \frac{-2a\delta^2\tau}{\hat{\sigma}^2(\delta\tau + (1 - \delta)p)^2} \right) - \underbrace{\left(\frac{A(p)(\hat{\sigma}^2 p(\tau - p))^2}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}}p^{\frac{\delta-1}{2}}(p + \delta(\tau - p))^{\frac{5}{2}}} \right)}_{\lambda_1} \\
 &\quad \times \left(\frac{-2\delta^2 a + 2\delta^3 a}{\hat{\sigma}^6 p^2(\tau - p)} - \frac{(2\delta^2 a + \delta)(p + \delta(\tau - p))}{\hat{\sigma}^6 p^2(\tau - p)^2} \right) \\
 &= \frac{A(p)(-\delta(\delta\tau + (1 - \delta)p) - 2\delta^2 a\tau)}{\hat{\sigma}^2(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}}p^{\frac{\delta-1}{2}}(\delta\tau + (1 - \delta)p)^{\frac{5}{2}}} - \frac{-2\delta^2 a\tau - \delta(p + \delta(\tau - p))}{\hat{\sigma}^2(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}}p^{\frac{\delta-1}{2}}(\delta\tau + (1 - \delta)p)^{\frac{5}{2}}} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{84}$$

Nakoniec si porovnáme koeficienty λ_0 , pre ktoré platí:

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda}_0 - \lambda_0 &= \overbrace{\left(\frac{A(p)}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}} p^{\frac{\delta-1}{2}} \sqrt{\delta\tau + (1-\delta)p}} \right)}^{\bar{\lambda}_0} \left(a^2 + a - 2a^2 - a + \frac{(2a+1)a\delta\tau}{\delta\tau + (1-\delta)p} \right. \\
 &\quad \left. + a^2 + \frac{a^2\delta^2\tau^2}{(\delta\tau + (1-\delta)p)^2} - \frac{2a^2\delta\tau}{\delta\tau + (1-\delta)p} - \frac{\delta}{\hat{\sigma}^2\delta\tau + (1-\delta)p} \right) \\
 &\quad - \overbrace{\left(\frac{A(p)(\hat{\sigma}^2 p(\tau-p))^2}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}} p^{\frac{\delta-1}{2}} (p + \delta(\tau-p))^{\frac{5}{2}}} \right)}^{\lambda_0} \left(\frac{\delta^2(a-\delta a)^2}{\hat{\sigma}^4 p^2} + \frac{\delta^2(p + \delta(\tau-p))}{\hat{\sigma}^6 p^3(\tau-p)} \right) \\
 &\quad + \frac{-(-2\delta^2 a - \delta)(a - \delta a)(p + \delta(\tau-p))}{\hat{\sigma}^4 p^2(\tau-p)} + \frac{(\delta^2 a^2 + \delta a)(p + \delta(\tau-p))^2}{\hat{\sigma}^4 p^2(\tau-p)^2} \\
 &\quad - \frac{\delta(p + \delta(\tau-p))^2}{\hat{\sigma}^6 p^3(\tau-p)^2} \\
 &= A(p) \left(\frac{(a\delta\tau(\delta\tau + (1-\delta)p) + a^2\delta^2\tau^2)}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}} p^{\frac{\delta-1}{2}} (\delta\tau + (1-\delta)p)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\delta}{\hat{\sigma}^2(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}} p^{\frac{\delta-1}{2}} (\delta\tau + (1-\delta)p)^{\frac{5}{2}}} \right) \\
 &\quad - A(p) \left(\frac{\delta^2 a^2(1-\delta)(\tau-p)((1-\delta)(\tau-p) + 2p + 2\delta(\tau-p))}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}} p^{\frac{\delta-1}{2}} (p + \delta(\tau-p))^{\frac{5}{2}}} \right. \\
 &\quad + \frac{(\delta a\tau - \delta a(p + \delta(\tau-p)))(p + \delta(\tau-p)) + (\delta^2 a^2 + \delta a)(p + \delta(\tau-p))^2}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}} p^{\frac{\delta-1}{2}} (p + \delta(\tau-p))^{\frac{5}{2}}} \\
 &\quad \left. - \frac{\delta}{\hat{\sigma}^2(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{\delta}{2}} p^{\frac{\delta-1}{2}} (p + \delta(\tau-p))^{\frac{5}{2}}} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{85}$$

Ukázali sme, že všetky koeficienty $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \omega_0, \omega_1, \omega_2$ sa rovnajú a teda platí, že $\partial_S^2 V_1 = \bar{H}_1 = H_1$. Tvrdenie je teda dokázané.

4 Risk adjusted pricing methodology model

V tejto kapitole si odvodíme Risk adjusted pricing methodology model, ktorý bol predstavený Kratkym [9] a rozšírený Jandačkom a Ševčovičom [8]. Pre tento model taktiež vypočítame hodnotu ceny $V(S, t)$ metódou malého parametra podľa vzorca odvodeného Ďurišom [3] a budeme skúmať jej citlivosť na zmenu jednotlivých parametrov a premenných. Ako sme už spomínali v prehľade nelineárnych modelov, v tomto modeli je zohľadnené riziko vznikajúce z netriviálnych transakčných nákladov a tiež riziko z nezabezpečeného portfólia. Celková riziková prémie je definovaná ako súčet transakčných nákladov a nákladov na riziko z nezabezpečeného portfólia.

Predpokladáme, že rovnako ako v základnom Black-Scholesovom modeli cena podkladového aktíva sleduje vývoj geometrického Brownovho pohybu s trendom ρ , štandardnou odchýlkou $\hat{\sigma}$ a môže vyplácať spojitú dividendu s úrokovou mierou q a teda:

$$dS = (\rho - q)Sdt + \hat{\sigma}SdW_t, \quad (86)$$

kde W_t je Wienerov proces. Podobne ako pri odvodzovaní klasickej Black-Scholesovej rovnice skonštruujeme samofinancovacie portfólio Π pozostávajúce z jednej opcie s cenou V a δ aktív s cenou S za jedno aktívum:

$$\Pi = V + \delta S. \quad (87)$$

Základnou myšlienkou Black-Scholesovej teórie je skúmanie diferenciálu $\Delta\Pi$ rovnice (87). Pravú stranu diferencujeme pomocou Itovej lemy a prírastok portfólia $\Delta\Pi(t) = \Pi(t + \Delta t) - \Pi(t)$ na ľavej strane môže byť vyjadrený ako:

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t - \delta q S \Delta t, \quad (88)$$

kde $r > 0$ je úroková miera bezrizikového dlhopisu. V reálnom svete ale takýto zjednodušený predpoklad nie je splnený, a preto by sme mali do vzťahu (88) pridať člen odrážajúci celkové riziko. Celková riziková prémie r_R na jednotkovú cenu aktíva pozostáva z transakčných nákladov r_{TC} a nákladov na riziko z nezabezpečeného portfólia r_{VP} . A teda:

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t - \delta q S \Delta t - (r_{TC} + r_{VP})S\Delta t. \quad (89)$$

Na modelovanie transakčných nákladov použijeme Lelandov prístup [10]. Efekt týchto nákladov chceme začleniť do radiacej rovnice. Odvodíme preto koeficient transakčných nákladov r_{TC} zo vzťahu(89). Nech C sú transakčné náklady na jednotku ceny transakcie. Potom platí:

$$C = (S_{ask} - S_{bid})/S, \quad (90)$$

kde S je priemer S_{ask} a S_{bid} ceny. Zanedbáme teraz náklady spojené s nezabezpečeným portfóliom ($r_{VP} = 0$). Sledovaním Lelandovho [10] prístupu a použitím δ -zaistovania na samofinancovateľné portfólio vieme odvodiť, že koeficient r_{TC} je daný ako:

$$r_{TC} = \frac{C\hat{\sigma}S}{\sqrt{2\pi}} \left| \partial_S^2 V \right| \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}. \quad (91)$$

Vidíme, že zvyšovaním časového intervalu Δt medzi zmenami v portfóliu môžeme znížiť transakčné náklady. Na druhej strane náklady spojené s nezabezpečeným portfóliom budú rásť.

Ak portfólio pozostávajúce z aktív a opcií je veľmi volatilné, investor zvyčajne žiada cenovú kompenzáciu. Volatilita fluktujúceho portfólia môže byť meraná varianciou relatívnych prírastkov replikovaného portfólia $\bar{\Pi} = V + \delta S$, teda členom $Var((\Delta\Pi/S))$. A teda definujeme vhodné meradlo r_{VP} rizika z nezabezpečeného portfólia ako:

$$r_{VP} = R \frac{var\left(\frac{\Delta\Pi}{S}\right)}{\Delta t} = \frac{1}{2} R \hat{\sigma}^4 S^2 \Gamma^2 \Delta t, \quad (92)$$

kde R reprezentuje tzv. koeficient rizikovej prémie a predstavuje marginálnu hodnotu investorovho vystavenia riziku. Finálny tvar r_{VP} sme odvodili výpočtom $Var((\Delta\Pi/S))$ použitím Itôvej lemy a využitím δ -zaistovania. Gamma opcie $\Gamma = \partial_S^2 V$ vyjadruje druhú parciálnu deriváciu ceny opcie a meria citlivosť delty (zaistovacieho pomeru) na zmenu ceny podkladového aktíva S .

4.1 Nelineárna Black-Scholesova rovnica pre RAPM

Celková riziková prémie $r_R = r_{TC} + r_{VP}$ pozostáva z dvoch častí: prémie transakčných nákladov r_{TC} a prémie z nezabezpečeného portfólia r_{VP} , ako sme si ich definovali v (91) a (92). Predpokladáme, že investor je rizikovo averzný, a teda chce minimalizovať celkovú rizikovú prémiiu r_R . Na to potrebujeme zvoliť optimálny časový interval Δt

medzi dvoma úpravami portfólia. Na nájdenie tejto optimálnej hodnoty Δt musíme minimalizovať funkciu:

$$\Delta t \mapsto r_R = r_{TC} + r_{VP} = \frac{C\hat{\sigma}S}{\sqrt{2\pi}} |\partial_S^2 V| \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} + \frac{1}{2} R\hat{\sigma}^4 S^2 \Gamma^2 \Delta t. \quad (93)$$

Jedinečné minimum funkcie $\Delta t \mapsto r_R(\Delta t)$ je dosiahnuté v časovom intervale $\Delta t_{opt} = K^2/(\hat{\sigma}^2|S\Gamma|)^{2/3}$, kde $K = (C/(R\sqrt{2\pi}))^{1/3}$. A teda minimálna hodnota funkcie $\Delta t \mapsto r_R(\Delta t)$ je:

$$r_R(\Delta t_{opt}) = \frac{3}{2} \left(\frac{C^2 R}{2\pi} \right)^{1/3} \hat{\sigma}^2 |S\Gamma|^{4/3}. \quad (94)$$

Použitím $\Delta\Pi$ zo vzťahu (89), Itôvej lemy na hladkú funkciu $V = V(S, t)$ a δ -zaistovania na úpravy portfólia dostávame zovšeobecnenie Black-Scholesovej rovnice:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV - r_R S = 0. \quad (95)$$

Ak vezmeme optimálnu hodnotu rizikového koeficientu r_R zo vzorca (94), cena opcie V je riešením nasledujúcej parabolickej rovnice:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} S^2 (1 + \mu(S\partial_S^2 V)^{1/3}) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (96)$$

kde $\mu = 3 \left(\frac{C^2 R}{2\pi} \right)^{1/3}$. Ak nie sú prítomné ani transakčné náklady ($C = 0$) ani riziko z nezabezpečeného portfólia ($R = 0$), tak $\mu = 0$ a rovnica (96) sa redukuje na pôvodnú Black-Scholesovu rovnicu. Táto rovnica je parabolická parciálna diferenciálna rovnica vtedy a len vtedy, ak funkcia

$$\beta(H) = \frac{\hat{\sigma}^2}{2} (1 + \mu H^{1/3}) H \quad (97)$$

je rastúcou funkciou premennej $H := S\Gamma = S\partial_S^2 V$. Táto podmienka je splnená ak $\mu \geq 0$ a $H \geq 0$. Keďže transakčné náklady a riziko z nezabezpečeného portfólia znáša držiteľ opcie, riešenie rovnice (96) zodpovedá ask cene opcie V_{ask} .

4.2 Riešenie V a jeho analýza

Ako sme už uviedli v predchádzajúcej kapitole, v [3], [4] Ďuriš a kol. odvodili všeobecný vzorec pre také nelineárne zovšeobecnenia Black-Scholesovho modelu, ktorých volatilitu

vieme zapísať v tvare:

$$\sigma_\varepsilon^2(H, S, \tau) = \hat{\sigma}^2 + 2\varepsilon A(\tau) S^{\gamma-1} H^{\delta-1}. \quad (98)$$

Volatilita v Risk adjusted pricing modeli má tvar:

$$\sigma_\varepsilon^2(H, S, \tau) = \hat{\sigma}^2(1 + \mu H^{\frac{1}{3}}), \quad (99)$$

a teda $\gamma = 1$, $\delta = 4/3$, $\varepsilon = \mu$ a $A(\tau) = \hat{\sigma}^2/2$. Pre lepšiu prehľadnosť budeme namiesto t používať transformáciu $\tau = T - t$. Vďaka tejto identifikácii parametrov môžeme teraz dosadením do vzorca získaného metódou malého parametra [4, str. 39], zapísať cenu opcie $V(S, \tau)$ ako:

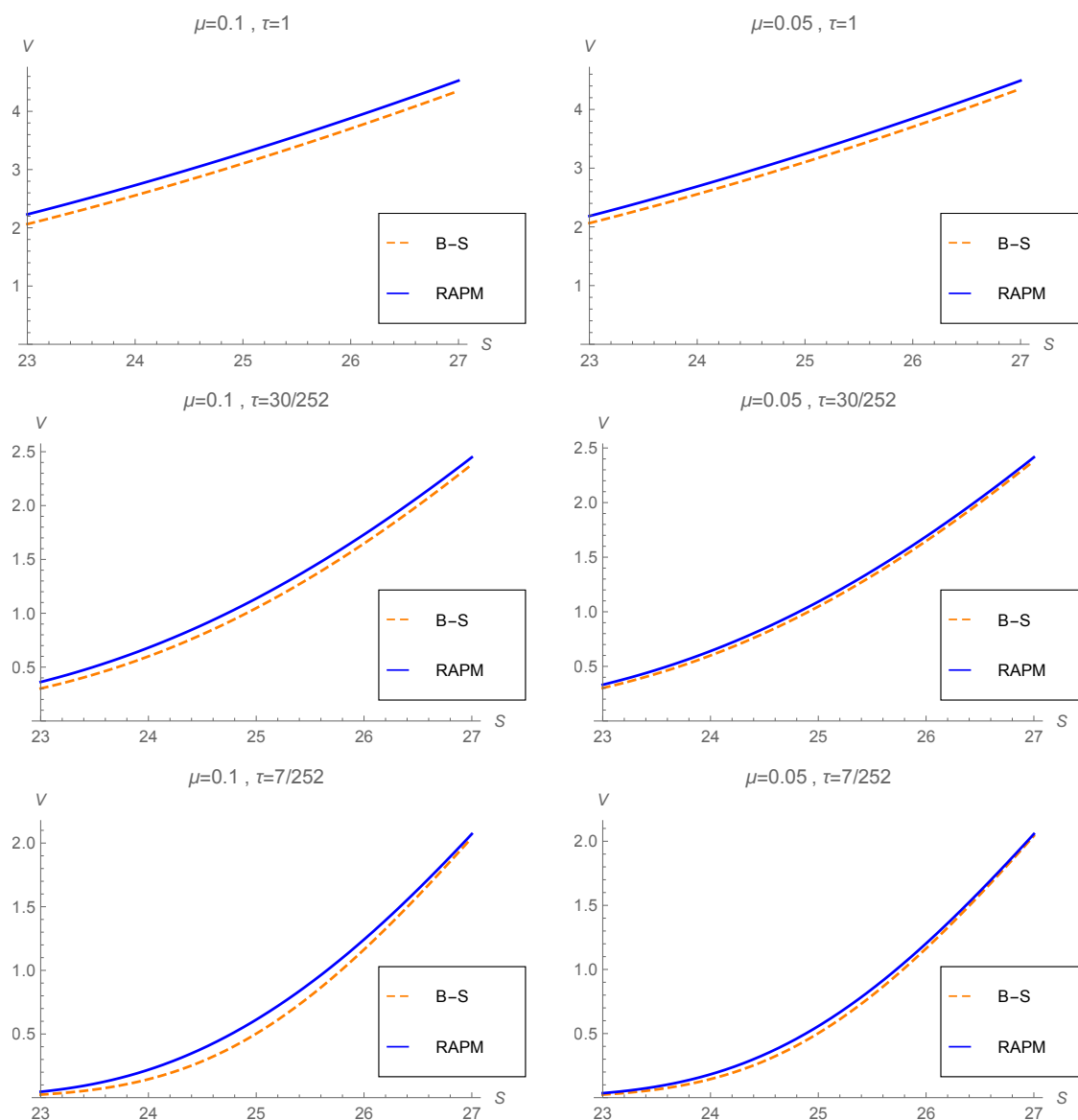
$$\begin{aligned} V(S, \tau) &= V_0 + \mu V_1 \\ &= SN(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2) + \mu \left[\frac{S}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{2}{3}}} \int_0^\tau \frac{\hat{\sigma}^2}{p^{\frac{1}{6}} \sqrt{\frac{4\tau-p}{3}}} e^{\frac{-3M(S)}{4\tau-p}} dp \right], \end{aligned} \quad (100)$$

kde

$$M(S) = \frac{2}{3\hat{\sigma}^2} \ln \left(\frac{S}{E} \right)^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\hat{\sigma}^2} \right) \tau \ln \left(\frac{S}{E} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\hat{\sigma}^2} \right)^2 \hat{\sigma}^2 \tau^2. \quad (101)$$

Štandardne sa na burze obchoduje 252 dní počas jedného roka. V ďalších výpočtoch budeme predpokladať, že $T = 1$, a teda maturita opcií je jeden rok. Na obrázku 2 vidíme vývoje ceny opcie V pre cenu podkladového aktíva S na intervale [23, 27] pri expiračnej cene $E = 25$, volatilitite $\hat{\sigma} = 0,3$ a bezrizikovej úrokovej miere $r = 0.011$. Vývoj ceny sme pozorovali najprv pre $\tau = 1$, teda rok do expirácie, potom pre $\tau = 30/252$, teda mesiac do expirácie a nakoniec pre $\tau = 7/252$, teda týždeň do expirácie. Pre každú z týchto hodnôt τ sme porovnali cenu vypočítanú Black-Scholesovým modelom (znázornená čiarkovanou oranžovou čiarou) a cenu vypočítanú metódou malého parametra pre Risk adjusted pricing methodology model pre hodnoty parametra μ rovné 0.1 a 0.05 (znázornené modrou čiarou).

Vidíme, že pre väčšie τ je cena pri RAPM akoby navýšením ceny opcie z Black-Scholesovho modelu o nejakú konštantu, zatiaľ čo pre $\tau = 7/252$ je vidieť väčší rozdiel cien týchto modelov v užšom okolí expiračnej ceny E .



Obr. 2: Porovnanie riešenia B-S rovnice s riešením rovnice (96) modelu RAPM metódou malého parametra s dvoma členmi na intervale $[23,27]$. V tomto príklade sme zvolili hodnoty parametrov $r = 0.011$, $E = 25$, $\hat{\sigma} = 0.3$. Hodnoty parametra μ a premennej τ sú nad jednotlivými obrázkami.

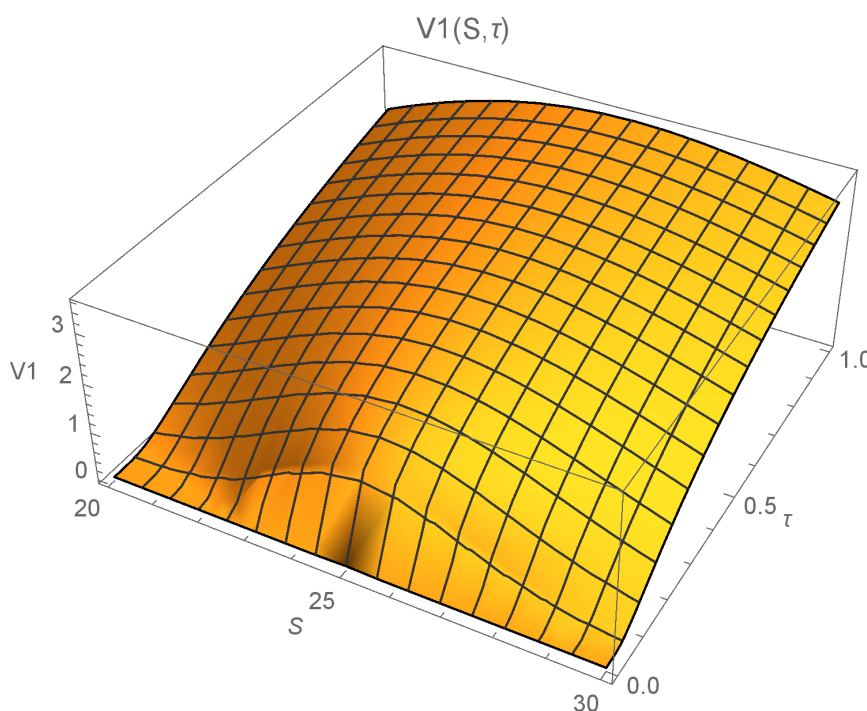
4.3 Analýza korekčnej funkcie V_1

Metódou malého parametra sme cenu opcie V pre Risk adjusted pricing methodology model rozdelili na Black-Scholesov člen V_0 a korekčný člen μV_1 . V tejto časti budeme analyzovať funkciu V_1 korekčného člena a jej senzitivitu na jednotlivé parametre. V Black-Scholesovom modeli sa senzitivita určuje faktormi citlivosti "Greeks", ktoré sa budeme snažiť analyzovať aj pre RAPM model.

Pripomenieme si, že korekčná funkcia V_1 má pre RAPM model tvar:

$$V_1(S, \tau) = \frac{S}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{2}{3}}} \int_0^\tau \frac{\hat{\sigma}^2}{p^{\frac{1}{6}} \sqrt{\frac{4\tau-p}{3}}} e^{-\frac{3\left(\frac{2}{3\hat{\sigma}^2}\left(\ln\frac{S}{E}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\hat{\sigma}^2}\right)\tau \ln\frac{S}{E} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\hat{\sigma}^2}\right)^2 \hat{\sigma}^2 \tau^2\right)}{4\tau-p} dp. \quad (102)$$

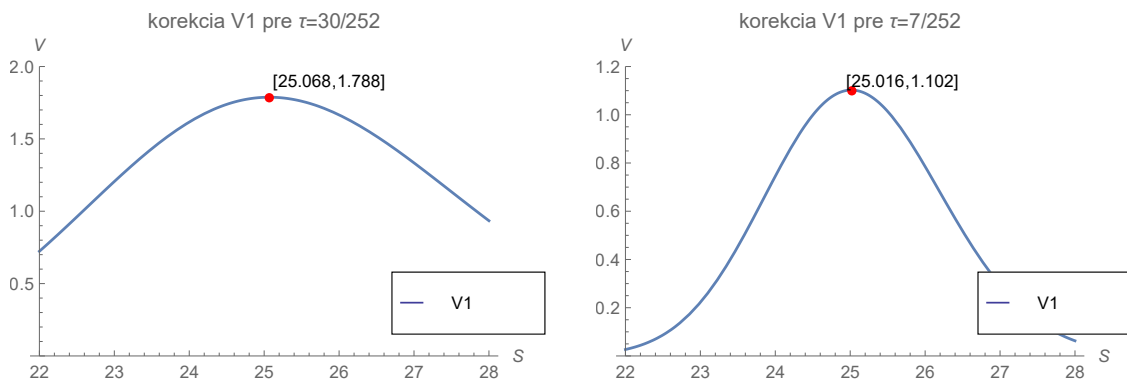
Vidíme, že okrem premenných S a τ je táto funkcia závislá od parametrov $\hat{\sigma}$, r . E sa vyskytuje iba v pomere s S , a teda zmenou S sa zmení aj pomer, preto nemusíme skúmať správanie V_1 pri zmene E . Na obrázku 3 vidíme priebeh tejto funkcie v čase v závislosti od ceny S .



Obr. 3: Korekčná funkcia V_1 znázornená v závislosti od τ a S . Hodnoty ostatných parametrov sú $r = 0.011$, $E = 25$, $\hat{\sigma} = 0.3$.

4.3.1 Citlivosť V_1 na cenu podkladového aktíva S

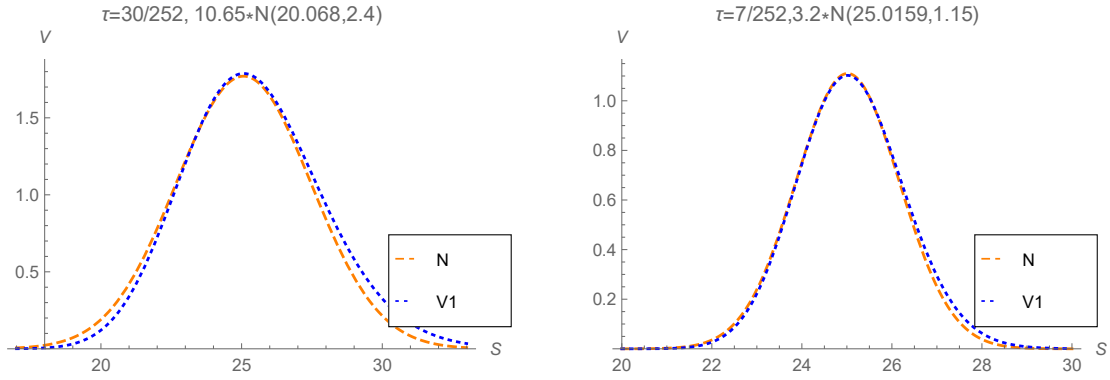
Na obrázku 4 vidíme, že pre zafixovanú hodnotu τ má korekčná funkcia $V_1(S)$ zvonovitý tvar podobný Gaussovej krivke pre funkciu hustoty normálneho rozdelenia so strednou hodnotou blízko expiračnej cene E , a teda vidíme, že pre S blízko E je korekcia najvýraznejšia, ako sme už správne predpokladali v predchádzajúcej časti. Hodnoty ostatných parametrov sme pri vykresľovaní tohto obrázka zachovali rovnaké ako v predchádzajúcej časti.



Obr. 4: Korekčná funkcia V_1 znázornená v závislosti od S pre $\tau = 30/252$ a $\tau = 7/252$ so zvýrazneným maximom. Hodnoty ostatných parametrov sú $r = 0.011$, $E = 25$, $\hat{\sigma} = 0.3$.

Na obrázku 4 vidíme tiež zvýraznené maximum funkcie $V_1(S)$ pre rôzne hodnoty τ . Vidíme, že funkcia V_1 nadobúda maximum v pravom okolí $S = E$. Platí, že čím väčšie τ tým vyššiu hodnotu nadobúda funkcia V_1 vo svojom maxime a nadobúda ju pre S vzdialenejšie od $S = E$.

Vidíme, že tvar funkcie $V_1(S)$ pripomína Gaussovu krivku, a preto sme sa ju pokúsili preložiť vhodnou funkciou hustoty normálneho rozdelenia. Na obrázku 5 vidíme, že pre všetky hodnoty τ sme našli vhodnú Gaussovu krivku, ktorá dostatočne presne aproximuje našu korekčnú funkciu V_1 . Pre normálne rozdelenie sme hľadali strednú hodnotu a , volatilitu b a konštantu, ktorou to nakoniec prenásobíme, aby sme dostali predpis v tvare $cN(a, b)$. Ako strednú hodnotu sme zvolili hodnotu S , v ktorej funkcia V_1 nadobúda svoje maximum. Nakoľko však integrál vo funkcii V_1 vieme vypočítať iba numericky, nevieme odvodiť schému na presný výpočet parametrov c a b . Preto sme ich získali iba odhadom pre konkrétne hodnoty parametrov. Korekčná funkcia je na obrázku znázornená modrou bodkovanou čiarou a funkcia hustoty normálneho



Obr. 5: Korekčná funkcia V_1 znázornená v závislosti od S pre $\tau = 30/252$ a $\tau = 7/252$ v porovnaní s funkciou hustoty normálneho rozdelenia. Hodnoty ostatných parametrov sú $r = 0.011$, $E = 25$, $\hat{\sigma} = 0.3$.

rozdelenia oranžovou čiarkovanou čiarou. Predpis $cN(a, b)$ pre konkrétne τ je uvedený ako názov grafu.

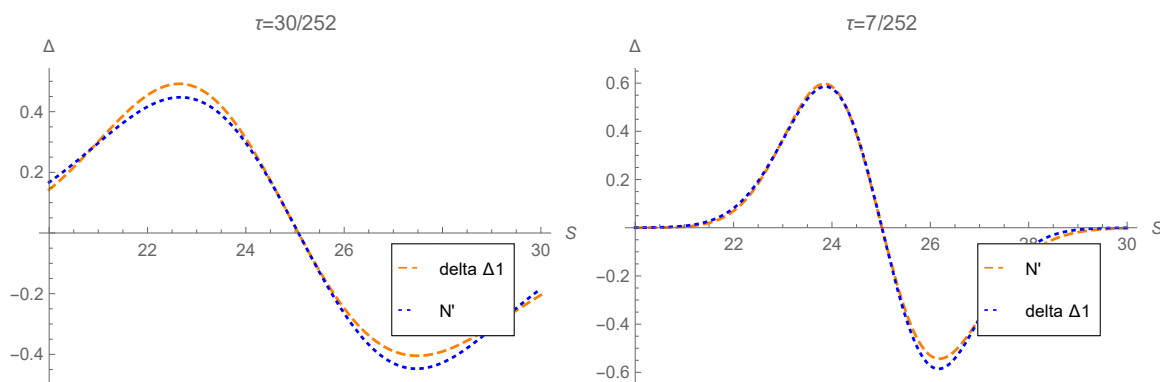
Faktorom citlivosti ceny opcie V od S v Black-Scholesovom modeli je Delta $\Delta = \partial V / \partial S$. Cena opcie je pre RAPM model zložená z dvoch zložiek asymptotického rozvoja, a teda pre tento model platí $\Delta_{RAPM} = \frac{\partial(V_0 + \mu V_1)}{\partial S} = \Delta_{BS} + \mu \Delta_1$. Pripomeňme si, že Δ_{BS} má pre európsku call opciu tvar: $\Delta_{BS} = N(d_1)$ a Δ_1 môžeme zapísať ako:

$$\Delta_1 = \frac{1}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{2}{3}}} \int_0^\tau \frac{\hat{\sigma}^2}{p^{\frac{1}{6}} \sqrt{\frac{4\tau-p}{3}}} e^{-\frac{3\left(\frac{2}{3\hat{\sigma}^2} \left(\ln \frac{S}{E}\right)^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\hat{\sigma}^2}\right) \tau \ln \frac{S}{E} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\hat{\sigma}^2}\right)^2 \hat{\sigma}^2 \tau^2\right)}{4\tau-p} \times \left(1 - \frac{4}{4\tau-p}\right) \left(\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \ln \frac{S}{E} + \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\hat{\sigma}^2}\right) \tau\right) dp. \quad (103)$$

Keďže je tento predpis veľmi komplikovaný, popíšeme si senzitivitu pomocou obrázka 6. Na tomto obrázku vidíme, o koľko sa zmení hodnota korekčnej funkcie pre pevné τ pri zmene S . Vidíme, že pre menšie τ je zmena pre S z okolia E výraznejšia, zatiaľčo pre τ väčšie je táto zmena menšia, ale na väčšom intervale. Taktiež na ňom vidíme porovnanie Δ_1 s deriváciou funkcie hustoty, ktorou sme preložili funkciu V_1 . Vidíme, že aproximácia pre $\tau = 7/252$ je oveľa presnejšia a takmer presne kopíruje Δ_1 .

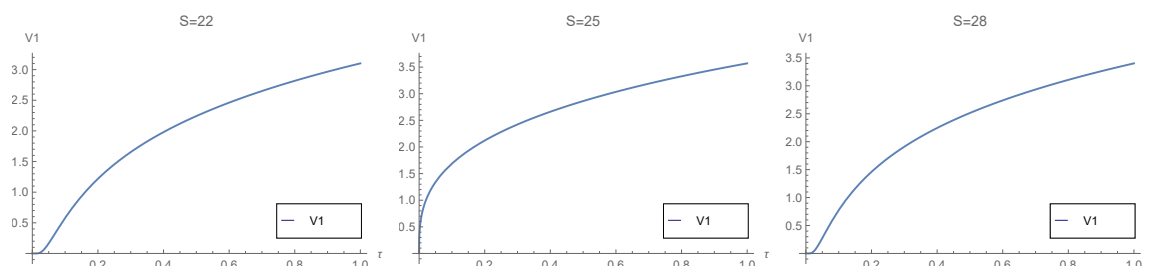
4.3.2 Citlivosť V_1 na čas do expirácie τ

Ďalej sa pozrieme na závislosť funkcie V_1 od premennej τ . Podobne ako v predchádzajúcom prípade zafixujeme hodnotu S a budeme skúmať priebeh funkcie $V_1(\tau)$. Na



Obr. 6: Δ_1 znázornená v závislosti od S pre $\tau = 30/252$ a $\tau = 7/252$ v porovnaní s deriváciou funkcie hustoty normálneho rozdelenia. Hodnoty ostatných parametrov sú $r = 0.011$, $E = 25$, $\hat{\sigma} = 0.3$.

obrázku 7 vidíme, že korekčná funkcia je v premennej τ rastúca.



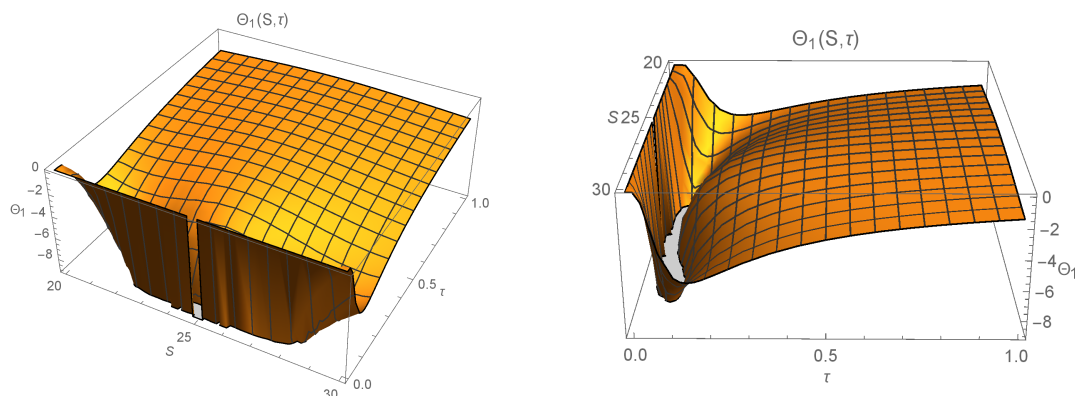
Obr. 7: Korekčná funkcia V_1 znázornená v závislosti od τ pre $S = 22$, $S = E = 25$ a $S = 28$. Hodnoty ostatných parametrov sú $r = 0.011$, $E = 25$, $\hat{\sigma} = 0.3$.

Faktor citlivosti vyjadrujúci citlivosť ceny opcie V od času t je *Theta* Θ . Opäť si ju rozložíme na Black-Scholesov člen a korekčný člen, teda:

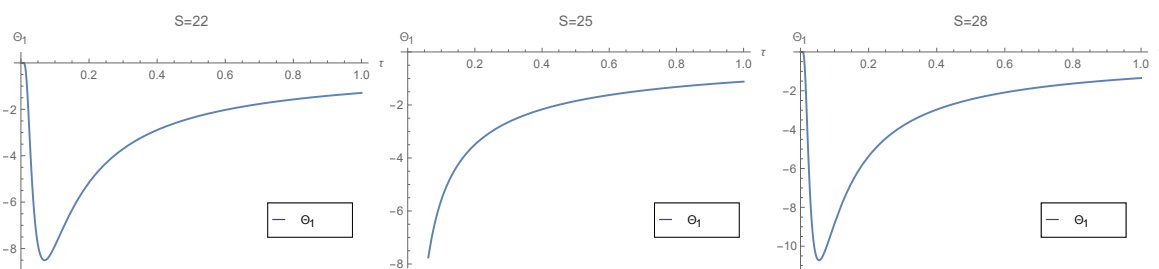
$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t} = \Theta_{BS} + \mu\Theta_1. \quad (104)$$

Z publikácie [12] vieme, že *Theta* v Black-Scholesovom modeli Θ_{BS} pre európsku call opciu, ktorá nevypláca dividendy je vždy záporná. Thetu pre korekčný člen $\Theta_1 = \frac{\partial V_1}{\partial t} = -\frac{\partial V_1}{\partial \tau}$ pre jeho komplikovanosťou nebudeme v analytickom tvare uvádzať, ale citlivosť ceny opcie od času do expirácie si popíšeme pomocou obrázka. Na obrázku 8 vidíme, o koľko sa zmení hodnota korekčnej funkcie pri zmene hodnoty τ pri pevne zvolenej hodnote S . Na obrázku 9 vidíme prierez týmto grafom pre hodnoty $S = 22$, $S = 25$ a $S = 28$. Vidíme, že pre hodnoty S má Θ_1 rozdielny priebeh v okolí nuly ako pre hodnoty vzdialenejšie od hodnoty $S = E$. Vidíme, že pre všetky hodnoty S a τ je hodnota Θ_1

záporná. Pripomenieme si, že v tejto práci sme počítali cenu európskej call opcie, ktorá nevypláca dividendy, a teda platí, že Theta pre Black-Scholesov model Θ_{BS} je záporná. Keďže $\Theta_{RAPM} = \Theta_{BS} + \mu\Theta_1$ a $\mu \geq 0$ potom teda aj Θ_{RAPM} je záporná.



Obr. 8: Faktor citlivosti Θ_1 znázornený v závislosti od S a τ . Hodnoty ostatných parametrov sú $r = 0.011$, $E = 25$, $\hat{\sigma} = 0.3$.



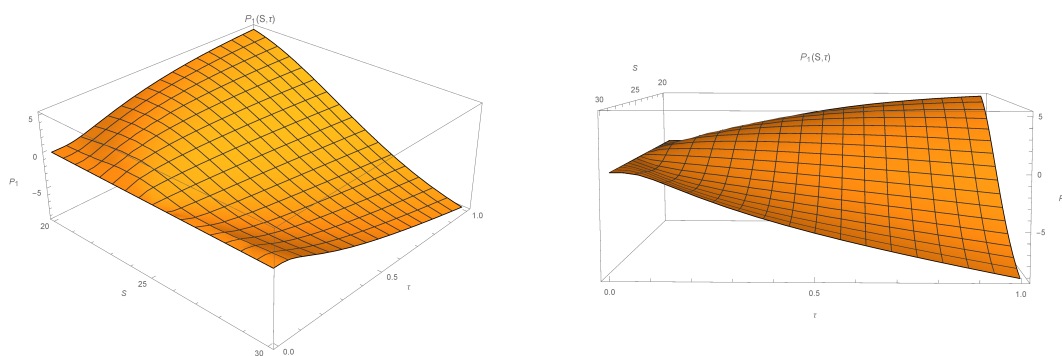
Obr. 9: Faktor citlivosti Θ_1 znázornený v závislosti od τ pre $S = 22$, $S = E = 25$ a $S = 28$. Hodnoty ostatných parametrov sú $r = 0.011$, $E = 25$, $\hat{\sigma} = 0.3$.

4.3.3 Citlivosť V_1 na úrokovú mieru r

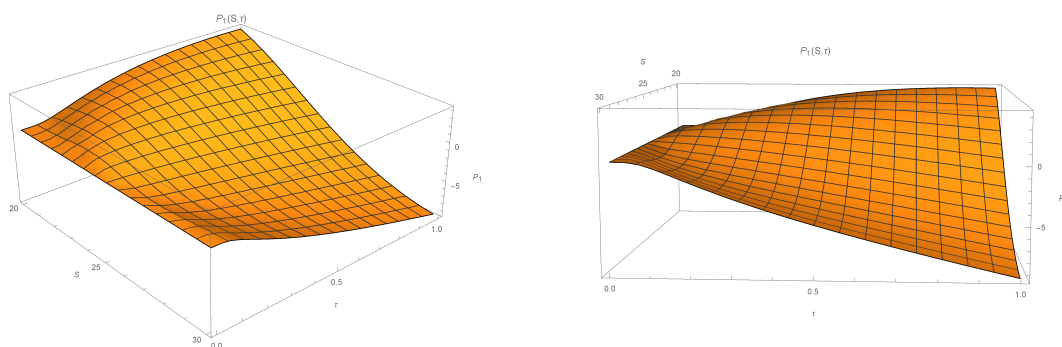
Ďalším faktorom citlivosti je R_0 , ktoré vyjadruje citlivosť ceny opcie V od bezrizikovej úrokovej miery r , teda $P = \frac{\partial V}{\partial r}$. Znova využijeme to, že riešenie $V(S, \tau)$ máme v tvare asymptotického rozvoja, vďaka čomu platí $P_{RAPM} = P_{BS} + P_1$. Pripomenieme si, že pre európsku call opciu platí:

$$P_{BS} = E\tau e^{-r\tau} N(d_2) > 0, \quad (105)$$

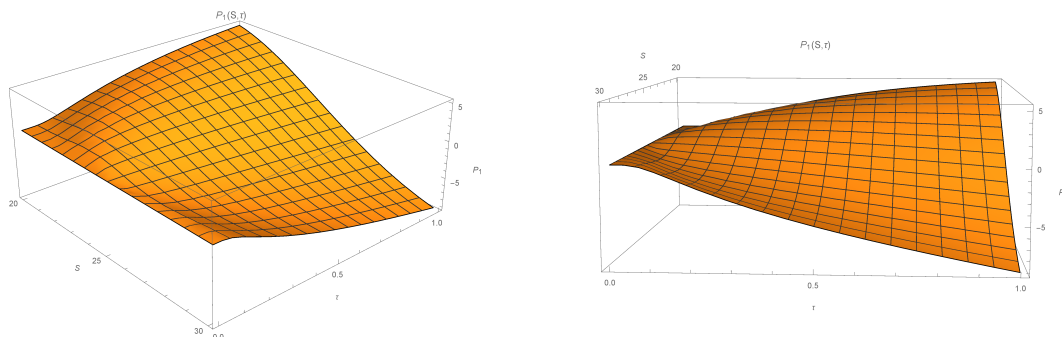
čo znamená, že v Black-Scholesovom modeli je cena európskej call opcie priamo úmerná bezrizikovej úrokovej miere. R_0 pre korekčný člen P_1 vieme v analytickom tvare zapísať



Obr. 10: Faktor citlivosti P_1 znázornený v závislosti od S a τ . Hodnoty ostatných parametrov sú $r = 0.011$, $E = 25$, $\hat{\sigma} = 0.3$.



Obr. 11: Faktor citlivosti P_1 znázornený v závislosti od S a τ . Hodnoty ostatných parametrov sú $r = 0.011$, $E = 25$, $\hat{\sigma} = 0.05$.



Obr. 12: Faktor citlivosti P_1 znázornený v závislosti od S a τ . Hodnoty ostatných parametrov sú $r = 0.011$, $E = 25$, $\hat{\sigma} = 0.005$.

ako:

$$\begin{aligned}
 P_1(S, \tau) = & \frac{S}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{2}{3}}} \int_0^\tau \frac{\hat{\sigma}^2}{p^{\frac{1}{6}} \sqrt{\frac{4\tau-p}{3}}} e^{-\frac{3\left(\frac{2}{3\hat{\sigma}^2}\left(\ln\frac{S}{E}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\hat{\sigma}^2}\right)\tau \ln\frac{S}{E} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\hat{\sigma}^2}\right)^2 \hat{\sigma}^2 \tau^2\right)}{4\tau-p} \\
 & \times \left(\frac{-4}{4\tau-p}\right) \left(\frac{\tau}{\hat{\sigma}^2} \ln\frac{S}{E} + \tau^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\hat{\sigma}^2}\right)\right) dp.
 \end{aligned} \tag{106}$$

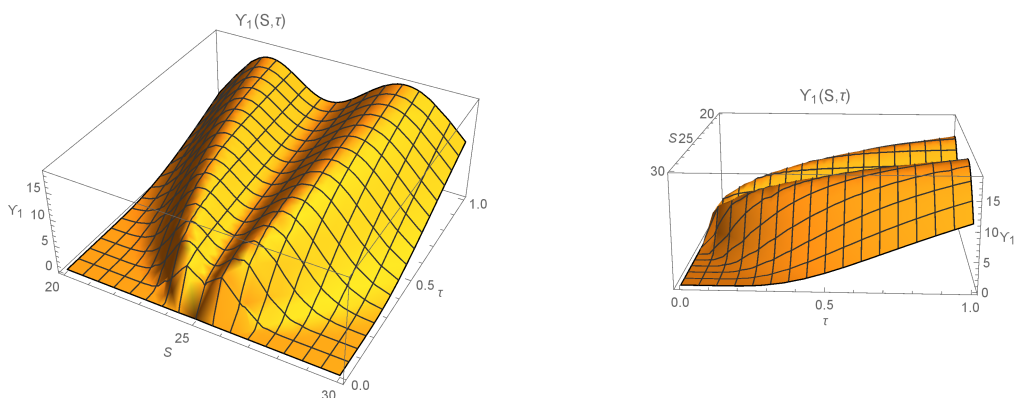
Vlastnosti tohto faktora citlivosti si ale opäť jednoduchšie vysvetlíme pomocou obrázka. Na obrázku 10, vidíme funkciu P_1 pre $r = 0.011$. Z tohto obrázka vieme vyčítať, o koľko percent sa zmení hodnota korekčnej funkcie V_1 pri zmene r pre konkrétne S a τ . Napríklad pre $S = 20$ a $\tau = 1$ platí, že ak sa úroková miera narastie o 1%, tak hodnota funkcie V_1 taktiež stúpne o približne 5%. Na obrázkoch 11 a 12 vidíme vykreslený tento faktor citlivosti P_1 pre hodnoty bezrizikovej úrokovej miery $r = 0.05$ a $r = 0.005$. Vidíme, že pre všetky hodnoty r má P_1 podobný priebeh s malými rozdielmi v konkrétnych hodnotách. Na rozdiel od P_{BS} ale P_1 nie je kladné pre všetky S a τ .

4.3.4 Citlivosť V_1 na historickú volatilitu $\hat{\sigma}$

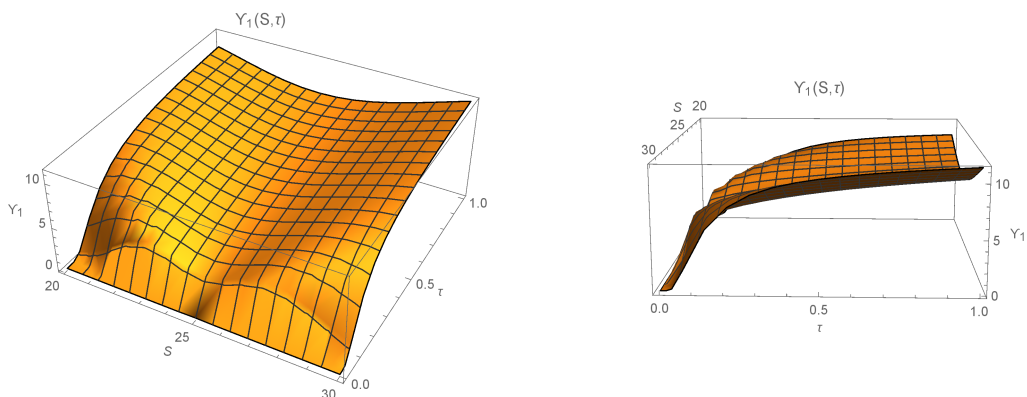
V nelineárnych zovšeobecneniach Black-Scholesovho modelu sme pracovali s volatilitou ako funkciou H , S a τ . Pri všetkých spomínaných modeloch ale táto funkcia obsahovala aj konštantu $\hat{\sigma}$, ktorú môžeme interpretovať ako historickú volatilitu. Faktor citlivosti popisujúci závislosť ceny opcie V od tejto volatility je *Vega* Υ . Rovnako ako ostatné faktory citlivosti, aj tento si rozložíme na základe vzťahu: $\Upsilon = \Upsilon_{BS} + \mu\Upsilon_1$. V Black-Scholesovom modeli pre call opciu môžeme vyjadriť tento faktor citlivosti ako:

$$\Upsilon_{BS} = Ee^{-r\tau} N'(d2)\sqrt{\tau}. \tag{107}$$

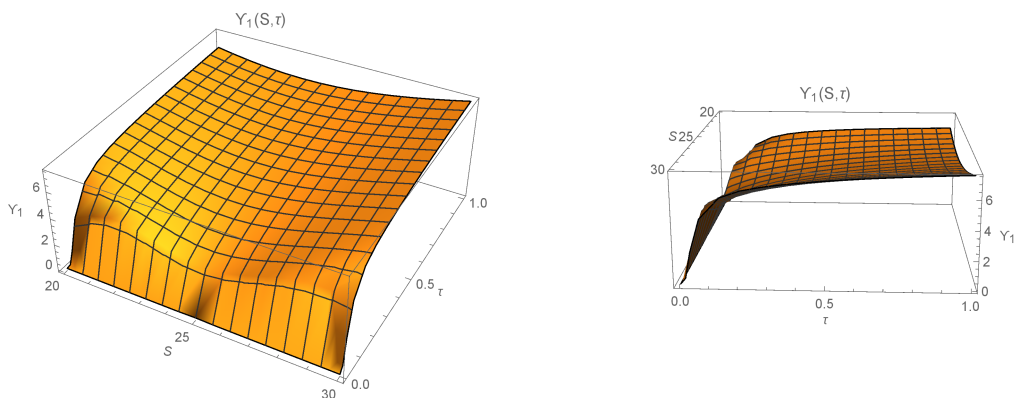
Vzhľadom na komplikovanosť analytického tvaru Υ_1 , si ho nebudeme uvádzať a závislosť korekčnej funkcie V_1 od historickej volatility si vysvetlíme iba pomocou obrázka. Podobne ako v predchádzajúcom prípade sme si *Vegu* Υ_1 vykreslili pre tri rôzne hodnoty $\hat{\sigma}$. Na obrázkoch 13, 14 a 15 vidíme vykreslenú Υ_1 v závislosti od S a τ pre hodnoty historickej volatility $\hat{\sigma}$ rovné 0,1; 0,3 a 0,5. Tento faktor na základe týchto obrázkov interpretujeme rovnakým spôsobom ako sme interpretovali faktor P_1 , a teda pri pevne zvolenom S a τ vieme odčítať, že ak sa hodnoty $\hat{\sigma}$ zmení o jedno percento, o koľko percent sa zmení hodnota korekčnej funkcie V_1 . Vidíme, že $\Upsilon_1 > 0$ pre všetky



Obr. 13: Faktor citlivosti Υ_1 znázornený v závislosti od S a τ . Hodnoty ostatných parametrov sú $r = 0.011$, $E = 25$, $\hat{\sigma} = 0.1$.



Obr. 14: Faktor citlivosti Υ_1 znázornený v závislosti od S a τ . Hodnoty ostatných parametrov sú $r = 0.011$, $E = 25$, $\hat{\sigma} = 0.3$.



Obr. 15: Faktor citlivosti Υ_1 znázornený v závislosti od S a τ . Hodnoty ostatných parametrov sú $r = 0.011$, $E = 25$, $\hat{\sigma} = 0.5$.

S a τ , čo znamená, že korekčná funkcia V je priamo úmerná historickej volatilite. Najvyššie hodnoty nadobúda tento faktor pre $\tau = 1$, a teda čím bližšie je opcia k expirácii, tým menej je citlivá na zmenu historickej volatility. Všimnime si, že v premennej S je Υ_1 symetrická okolo $S = E = 25$ tak, že najnižšie hodnoty nadobúda práve v tejto hodnote S pre ľubovoľne zvolené τ . Vývoj Υ_1 vidíme pri porovnaní obrázkov 13, 14 a 15, a teda platí, že čím nižšia hodnota $\hat{\sigma}$, tým vyššie hodnoty nadobúda Υ_1 . Popísali sme si teda korekčnú funkciu V_1 a všetky jej "Greeks" prvého rádu.

Záver

V tejto práci sme sa zaoberali oceňovaním opcií na základe nelineárnych zovšeobecnení Black-Scholesovho modelu. Pre tieto modely je Black-Scholesova rovnica nelineárna, a preto v tejto práci využívame jej transformáciu na kvázilineárnu parabolickú *Gamma* Γ rovnicu. Cieľom bolo nájsť riešenie H pre túto *Gamma* Γ rovnicu, z ktorého potom vieme dopočítať cenu opcie. Túto rovnicu sme riešili pre modely, ktorých volatilita nebola konštantná ako v Black-Scholesovom modeli, ale bola funkciou viacerých premenných. Všeobecné explicitné riešenie ale pre túto rovnicu neexistuje, preto sme hľadali riešenie vo forme asymptotického rozvoja pomocou metódy malého parametra. Hľadali sme prvé dva členy tohto rozvoja, pre všeobecný tvar funkcie β , ktorá sa využíva v *Gamma* Γ rovnici a priamo vychádza z funkcie volatility. Prvý člen vychádzal priamo z Black-Scholesovej rovnice, a preto sme sa venovali hlavne druhému členu tohto rozvoja. Toto riešenie sme potom na základe vzťahu medzi cenou opcie V a premennou H porovnali s riešením získaným rovnakou metódou Ďurišom [3].

V prvých dvoch kapitolách sme sa venovali hlavne teoretickým poznatkom, z ktorých vychádza táto práca. Konkrétne v prvej kapitole sme si popísali Black-Scholesov model, jeho nelineárne zovšeobecnenia a odvodenie *Gamma* Γ rovnice. V druhej kapitole sme si na príklade vysvetlili fungovanie metódy malého parametra, ktoré sme potom zhrnuli do všeobecnej schémy. Presnosť aproximácie tejto metódy sme si overili aj graficky. V tretej kapitole sme túto metódu aplikovali na *Gamma* Γ rovnicu, pre ktorú sme odvodili explicitný vzorec pre prvé dva členy asymptotického rozvoja riešenia pre všeobecný tvar funkcie β . Ďalej sme ukázali, že toto riešenie je po transformácii ekvivalentné s riešením, ktoré získal Ďuriš [3], a teda sme dokázali, že cenu opcie môžeme počítať aj z transformovanej *Gamma* Γ rovnice. V poslednej kapitole sme sa zamerali na Risk adjusted pricing methodology model. Na tento model sme aplikovali všeobecný vzorec z práce Ďuriša [3] a toto riešenie sme potom detailne analyzovali. Keďže riešenie je vo forme asymptotického rozvoja a prvý člen zodpovedá riešeniu Black-Scholesovej rovnice, zamerali sme sa hlavne na druhý člen tohto rozvoja, ktorý je vlastne súčinnom malého parametra a korekčnej funkcie. Skúmali sme citlivosť korekčnej funkcie od všetkých premenných, vstupujúcich do jej výpočtu. Jednotlivé faktory citlivosti sme zobrazili aj graficky, pričom sme si všimli, že pre pevne daný čas do expirácie má ko-

rekčná funkcia v závislosti od ceny podkladovej akcie tvar Gaussovej krivky. Pre zvolené časy do expirácie sme ju preto preložili vhodne zvolenou funkciou hustoty normálneho rozdelenia a presnosť aproximácie touto funkciou sme overili aj na faktore citlivosti Δ pre tieto časy.

Nakoľko riešenie získané v tejto práci je iba približné, je dôležité porovnať toto riešenie s presným riešením. Keďže pre úlohy popisované v tejto práci neexistuje presné riešenie, môžeme túto aproximáciu porovnať s numerickým riešením. Hľadaním numerického riešenia pre RAPM model sa v svojej práci zaoberali Jandačka a Ševčovič [8] a porovnaniu riešenia získaného metódou malého parametra a numericky Newtonovou metódou Ďuriš et al. [4].

Predmetom ďalšieho skúmania v tejto oblasti by mohlo byť odvodenie všeobecných parametrov pre funkciu hustoty normálneho rozdelenia, ktorá by vhodne aproximovala korekčnú funkciu pre RAPM model v závislosti od času do expirácie. Takouto aproximáciou by sa výpočet ceny opcie pre RAPM model výrazne urýchlil a zjednodušil.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Barles, G., Soner, H. M.: *Option Pricing with Transaction Costs and a Nonlinear Black-Scholes Equation*, Finance Stochast. 2, 1998, 369–397
- [2] Black, F., Scholes, M.: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, The Journal of Political Economy 81, 1973, 637-654
- [3] Ďuriš K.: *Analýza riešení nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc finančnej matematiky*, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2015,
dostupné na internete (29.4.2016):
www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2015/duris/diplomovka.pdf
- [4] Ďuriš, K., Lai C. H., Ševčovič D., Tan S. H.: *Comparison of the analytical approximation formula and Newton's method for solving a class of nonlinear Black-Scholes parabolic equations*, Computational Methods in Applied Mathematics 16(1) 2016, 35-50.
- [5] Frey, R.: *Market Illiquidity as a Source of Model Risk in Dynamic Hedging*, Risk Publications, London, 2000, 125-136
- [6] Holmes, M. H.: *Introduction to Perturbation Methods*, Texts in Applied Mathematics vol. 20, Springer, 2013
- [7] Holmes, M. H.: *Introduction to the Foundations of Applied Mathematics*, Texts in Applied Mathematics vol. 56, Springer, 2009
- [8] Jandačka, M., Ševčovič, D.: *On the Risk-Adjusted Pricing-Methodology-Based Valuation of Vanilla Options and Explanation of the Volatility Smile*, Journal of Applied Mathematics 3, 2005, 235-258
- [9] Kratka M.: *No mystery behind the smile*, Risk 9, 1998, 67-71
- [10] Leland, H. E.: *Option Pricing and Replication with Transaction Costs*, The Journal of Finance 40, 1985, 1283-1301
- [11] Melicherčík, I., Olšarová, L., Uradníček, V.: *Kapitoly z Finančnej Matematiky*, EPOS, Bratislava, 2005

- [12] Ševčovič, D., Stehlíková, B., Mikula, K.: *Analytical and Numerical Methods for Pricing Financial Derivatives*, Nova Science Publishers, New York, 2011
- [13] Ševčovič, D., Stehlíková, B., Mikula, K.: *Analytické a Numerické Metódy Oceňovania Finančných Derivátov*, Nakladateľstvo STU, Bratislava, 2009
- [14] Ševčovič, D., Žitňanská, M.: *Analysis of the nonlinear option pricing model under variable transaction costs*, Asia-Pacific Financial Markets, 2016.