

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ASYMPTOTICKÝ ROZVOJ CENY DLHOPISU VO
FONG-VAŠÍČKOVOM MODELI

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ASYMPTOTICKÝ ROZVOJ CENY DLHOPISU VO
FONG-VAŠÍČKOVOM MODELI

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Martin Bušo
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Asymptotický rozvoj ceny dlhopisu vo Fong-Vašíčkovom modeli
Asymptotic expansion of a bond price in the Fong-Vasicek model

Cieľ: V diplomovej práci (Selečéniová, 2012) sa počítali prvé dva členy asymptotického rozvoja ceny dlhopisu vo Fong-Vašíčkovom modeli s rýchlosťou časovou škálou volatility, ktorý umožňuje získanú aproximáciu porovnať s presným riešením. Cieľom tejto diplomovej práce bude zrátať ďalší člen, o ktorom sa dá očakávať (napr. na základe výpočtov v článku (Stehliková, Ševčovič, 2009) pre iný model so stochastickou volatilitou), že už závisí od hodnoty volatility a zistiť, aký prínos to prináša pre konkrétne parametre pri porovnaní presného riešenia a tejto, resp. predchádzajúcej jednoduchšej aproximácie.

Vedúci: RNDr. Beáta Stehliková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 10.02.2015

Dátum schválenia: 11.02.2015
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné vyhlásenie

Čestne prehlasujem, že som predloženú diplomovú prácu spracoval samostatne pod vedením školiteľa a s použitím uvedenej literatúry.

V Bratislave

Podpis autora práce

Pod'akovanie

Touto cestou sa chcem poďakovať svojej vedúcej diplomovej práce doc. RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za ochotu a pomoc pri spracovávaní mojej témy, hľadání materiálov, odborné rady a podnetné pripomienky pri písaní práce a rady a postrehy, ktoré mi neodmysliteľne dopomohli k dokončeniu tejto práce.

Abstrakt

BUŠO, Martin: Asymptotický rozvoj ceny dlhopisu vo Fong-Vašíčkovom modeli [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava, 2016, 45 s.

V tejto práci sa zaoberáme cenou dlhopisu vo Fong-Vašíčkovom modeli krátkodobej úrokovej miery a jej asymptotickým rozvojom. Jedným stochastickým procesom v rámci tohto modelu sa modeluje volatilita úrokovej miery, pri ktorej budeme predpokladať rýchlejšiu časovú škálu, než v akej sa pohybuje úroková miera. Model preškálujeme vzhľadom k tomuto predpokladu a budeme pokračovať odvodením parciálnej diferenciálnej rovnice, ktorú spĺňa funkcia ceny dlhopisu. Funkciu ceny dlhopisu budeme hľadať v tvare rozvoja pomocných funkcií. Podrobne sa budeme venovať odvodeniu tretieho členu rozvoja za predpokladu nulovej a aj nenulovej korelácie medzi dvomi Wienerovými procesmi, zahrnutými v modeli úrokovej miery.

Kľúčové slová: Modely krátkodobej úrokovej miery, Fong-Vašíčkov model, Stochastické procesy, Asymptotický rozvoj funkcie, Hodnota dlhopisu

Abstract

BUŠO, Martin: Asymptotic expansion of a bond price in the Fong-Vasicek model [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava, 2016, 45 s.

The purpose of this thesis is to study bond price in the Fong-Vasicek short rate model and its asymptotic expansion. One of the stochastic processes included in the model models the volatility of the interest rate, in case of which we assume faster time scale than the time scale of the interest rate. Hence we will rescale the model to take into account this assumption and we will proceed to the derivation of the partial differential equation, which needs to hold for the function of bond price. The formula of the bond price function will be derived as an expansion of the auxiliary functions. We will closely look to derivation of the formula of the third element of the expansion under assumption of the both zero and non-zero correlation between two Wiener processes included in the short rate model.

Keywords: Short rate models, Fong-Vasicek model, Stochastic processes, Asymptotic expansion of the function, Bond price

Obsah

Úvod	1
1 Základné pojmy, motivácia k zložitejším modelom	2
1.1 Modelovanie okamžitej úrokovej miery	4
1.1.1 Jednofaktorové modely	4
1.1.2 Dvojfaktorové modely	6
2 Od modelu k rovnici	8
2.1 Odvodenie rovnice pre cenu dlhopisu vo všeobecnom dvojfaktorovom modeli	8
2.2 Korekcia - rýchla časová škála volatility	11
3 Riešenie diferenciálnej rovnice ceny dlhopisu	13
3.1 Asymptotická metóda malého parametra pri nulovej korelácii	14
3.1.1 Určenie funkcie P_2	18
3.2 Asymptotická metóda malého parametra pri nenulovej korelácii	27
3.2.1 Určenie funkcie P_2	29
3.3 Zhrnutie	32
Záver	35
Literatúra	36

Úvod

Po celej Zemi môžeme sledovať veľký rozmach v obchodovaní finančných derivátov a podobných produktov na finančných trhoch. Tým pádom nie je prekvapením ani rozvoj teórie oceňovania takýchto produktov v prostredí nestabilnej, meniacej sa trhovej volatility, ktorá predstavuje riziko a teda problém pre ktoréhokoľvek investora. Jedným problémom pri volatilita je, že je to skrytý proces, priamo ovplyvňuje ceny produktov a pri tom nemôže byť priamo pozorovaná. Druhým problémom je, že volatilita má často tendenciu fluktuovať istý čas vo vysokých hodnotách, následne zasa istý čas v nízkych. Takto môže „skákať“ mnoho krát počas životnosti produktu. V dnešnej dobe začína byť viac a viac jasné, že jednoduchosť modelov, ktoré pristupujú k riziku cez parameter konštantnej volatility, musí ustúpiť komplexnejším modelom.

Jednofaktorové modely krátkodobej úrokovej miery sú nahrádzané zložitejšími viac-faktorovými. V tejto práci sa budeme zaoberať takýmto modelom - Fong-Vašíčkov model. Je to dvojfaktorový model, v ktorom volatilita je modelovaná stochastickým modelom, ktorý práve odráža spomenutú vlastnosť oscilovania okolo dlhodobej strednej hodnoty. Cieľom bude odvodenie ceny dlhopisu vzhľadom na tento model pomocou asymptotickej metódy. Touto problematikou sa zaoberá aj práca [13], v ktorej boli odvodené prvé členy aproximácie, ktoré nezáviseli od hodnoty volatility. Nebudeme opakovať výpočty zahrnuté v tejto práci, ale budeme sa venovať odvodeniu tvaru ďalšieho člena aproximácie.

V prvej kapitole stručne uvedieme základnú problematiku stochastických modelov a predstavíme nami analyzovaný model. V nasledujúcej kapitolej odvodíme diferenciálnu rovnicu, ktorú musí spĺňať hľadaná funkcia ceny dlhopisu a v poslednej kapitole pristúpime k samotnému hľadaniu tvaru aproximácie tejto funkcie.

Kapitola 1

Základné pojmy, motivácia k zložitejším modelom

Pojem úrokovej miery patrí do nášeho každodenného života. Takmer každý človek sa už stretol s týmto pojmom v rôznych finančných, sporiacich, či úverových produktoch a berie to ako niečo, s čím vie narábať. Pri ukladaní peňazí na bankovom účte každý očakáva, že táto suma bude rásť pri určitej miere. A teda požičanie určitej sumy peňazí musí byť nejakým spôsobom odmenené, čiže určitá suma peňazí v súčasnosti nie je ekvivalentná rovnakej sume peňazí v budúcnosti.

Charakter úrokovej miery r_t je veľmi dôležitý, pretože je ním zároveň určený charakter finančných produktov od nej závislých (ako napríklad nami skúmaná hodnota dlhopisu). Ako bolo poznamenané v [2], v mnohých prístupoch oceňovania finančných derivátov (napríklad pri aplikovaní Black-Scholesových formúl) je úroková miera považovaná za deterministickú funkciu času (konkrétne konštantu). V našom prípade by to znamenalo zároveň deterministický charakter odúročovacieho faktora a teda hodnoty dlhopisu v každom čase (predpoklad, že volatilita úrokovej miery vplýva na hodnotu derivátu v zanedbateľnej miere). Avšak pri deriváte úrokovej miery ako je dlhopis je predpokladateľné, že najväčší podiel volatility produktu pochádza práve z volatility úrokovej miery. Pri oceňovaní týchto produktov (a teda aj dlhopisu) je teda nevyhnutné zabudnúť na deterministický charakter úrokovej miery a modelovať časový vývoj jej hodnoty stochastickým procesom, tým pádom bude hodnota derivátu (v našom prípade dlhopisu) taktiež určitým stochastickým procesom.

Ako napovedá už názov tejto práce, budeme sa zaoberať cenou dlhopisu a odvodením aproximácie jej tvaru. Na začiatok budeme definovať, akým typom dlhopisu sa budeme zaoberať. Pre podrobnejšie vysvetlenie teórie dlhopisov odporúčame napríklad [11]. Vo všeobecnosti je dlhopis dohoda o vyplatení určitého obnosu peňazí (nominálna hodnota) v predom stanovenom budúcom čase T - maturita dlhopisu a zároveň o vyplácaní pravidelných platieb (kupónov). Hodnotu tohto dlhopisu v čase t , pričom $t < T$, budeme označovať $P(t, T, \dots)$ (tri bodky označujú prípadné ďalšie premenné, od ktorých môže závisieť táto cena). Keďže každý kupón môže byť považovaný za akýsi samostatný dlhopis, ktorého nominálna hodnota je nejaké percento z nominálnej hodnoty dlhopisu $P(t, T, \dots)$, stačí ak budeme uvažovať bezkupónový dlhopis. Ďalej, keďže nominálna hodnota je určitá konštantná suma, ktorou môžeme predeliť súčasnú hodnotu, bude stačiť, ak pre jednoduchosť budeme uvažovať bezkupónový dlhopis s nominálnou hodnotou 1 ($P(t = T, T, \dots) = 1$). V zbytku tejto práce budeme pod pojmom bezkupónový dlhopis alebo len dlhopis myslieť bezkupónový dlhopis s nominálnou hodnotou 1.

Bezkupónové dlhopisy sú základné prvky v teórii úrokových mier, keďže všetky úrokové miery môžu byť alternatívne vyjadrené pomocou hodnôt týchto dlhopisov. Spojito úročená úroková miera platná v čase t pre maturitu T (označenie $R(t, T)$) je miera, pri ktorej suma $P(t, T)$ v čase t narastie spojito na hodnotu 1 v čase maturity T a teda vyjadrené vzorcom:

$$e^{R(t, T)(T-t)} P(t, T) = 1.$$

Preto ako sme naznačili vyššie, úrokové miery môžu byť vyjadrené pomocou bezkupónových dlhopisov nasledovne:

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t}.$$

A samozrejme opačne vzaté cena dlhopisu vzhľadom na hodnotu úrokovej miery bude mať tvar:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}.$$

Ďalej, čo sa týka úrokovej miery, budeme definovať takzvanú krátkodobú úrokovú mieru. Je to vlastne úroková miera pre dlhopis s okamžitou (alebo takmer okamžitou

splatnosťou). Táto určuje charakter krivky úrokových mier, keďže predstavuje akýsi začiatok krivky úrokových mier, čo vyplýva z predpisu pre túto krátkodobú úrokovú mieru:

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T).$$

1.1 Modelovanie okamžitej úrokovej miery

Krátkodobá úroková miera a jej správanie v čase je nevyhnutné pre oceňovanie dlhopisov a iných derivátov úrokovej miery a teda aj vzťah medzi krátkodobou úrokovou mierou (a jej dynamikou) a dlhodobou úrokovou mierou je dôležitý aspekt pri modelovaní oceňovacích funkcií. Vo všeobecnosti sa za dlhodobú mieru dá aproximovať vážený priemer očakávaných/predikovaných (stredných) hodnôt krátkodobých mier. Ako sme už povedali vyššie, je potrebné uvažovať o úrokovej miere ako o náhodnej veličine a teda pri snahe o zachytenie jej vlastností a hodnôt ako aj pri jej modelovaní je nutné pristúpiť k využitiu stochastických procesov. Stochastické procesy, ktorými je modelovaná krátkodobá úroková miera by mali určitým spôsobom odrážať a simulovať jej vlastnosti z reálnych napozorovaných dát. Z teórie poznáme rôzne prístupy k týmto modelom. Tejto téme sa venuje napríklad [3] alebo [15].

1.1.1 Jednofaktorové modely

Jednofaktorové modely sú založené na predpoklade, že celá informácia o krivke úrokových mier v každom časovom okamihu môže byť sumarizovaná jedným špecifickým faktorom, špecifikovaným ako krátkodobá úroková miera a teda zmeny v úrokových mierach sú spôsobené zmenami v jedinom podkladovom stochastickom faktore. Napriek svojej jednoduchosti sú často používané, keďže dokážu modelovať takzvaný „mean reversion“ proces a umožňujú postaviť teoretickú volatilitu ako závislú od hodnoty úrokovej miery (z pozorovaní na reálnych trhoch vyplynulo, že volatilita býva väčšia pri vyšších hodnotách úrokovej miery). Istou nevýhodou pri jednofaktorových modeloch však môže byť, že tieto modely parametrizujú volatilitu ako funkciu len hodnoty úrokovej miery a teda nezachytia komplexnejšiu štruktúru volatility (podrobnejšia analýza je zahrnutá napríklad v [9]).

Ako už bolo povedané, jednofaktorový model uvažuje pri modelovaní krátkodobej úrokovej miery len jeden stochastický faktor a teda rovnica pre diferenciál takéhoto procesu bude mať vo všeobecnosti tvar:

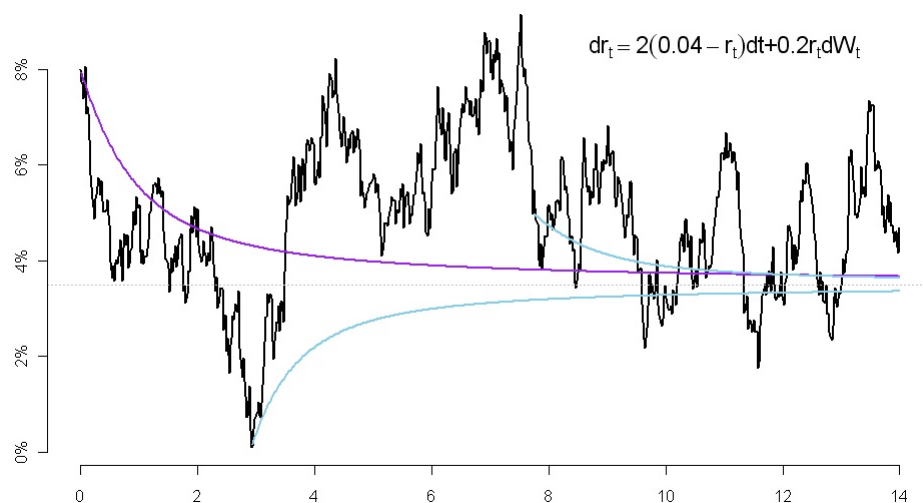
$$dr(t) = \mu(t, r)dt + \sigma(t, r)dw(t),$$

kde $w(t)$ je Wienerov proces. Pričom prvý člen súčtu $\mu(t, r)$ sa nazýva drift, pričom tento člen charakterizuje akýsi trend, či očakávanú hodnotu vývoja úrokovej miery. Člen $\sigma(t, r)$ je volatilita, ktorá udáva mieru náhodnosti a teda tento člen spôsobuje náhodné vychýlenia procesu od trendu. Na tomto mieste spomenieme jeden typ modelu, ktorý je pre nás dôležitý, keďže na ňom bude založený aj Fong-Vašíčkov model. Týmto procesom je "mean reversion" proces a na jeho základe "mean reversion" model:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma(t, r)dw(t).$$

V tomto procese konštanta b označuje dlhodobú strednú hodnotu, ku ktorej by sa mala hodnota stochastického procesu postupne približovať, pričom rýchlosť tohto približovania je udávaná konštantou a . Ak by sme opomenuli stochastickú časť tohto procesu, potom by výsledkom bola exponenciála závislá od počiatočnej hodnoty, ktorá by sa postupne približovala k b . Člen $\sigma(t, r)$ zabezpečuje vychýlenia procesu približovania, vďaka čomu sa môže model približovať reálnym dátam. Z hľadiska interpretácie použitia takéhoto modelu pre krátkodobú úrokovú mieru je dôležité, že úroková miera na rozdiel od akcií má relatívne ohraničený charakter. Pri vysokých hodnotách by úroková miera mala tendenciu brzdiť ekonomiku a teda by pobádala k zníženiu úrokových mier. Z opačného hľadiska úrokové miery väčšinou neklesajú príliš k nule respektíve pod ňu a teda z dlhodobého hľadiska by mala existovať istá stredná hodnota. Pre ilustráciu prikladáme obrázok zobrazujúci Vašíčkov model pre krátkodobú úrokovú mieru, ako aj spomínané exponenciály, ktoré určujú trend pre stochastický proces. Jednotlivé exponenciály na obrázku 1.1 predstavujú stredné hodnoty procesu (respektíve trend približovania k dlhodobej strednej hodnote) vypočítané pre hodnoty stochastického procesu v danom časovom kroku.

Obr. 1.1: Simulácia Vašíčkovho procesu



1.1.2 Dvojfaktorové modely

V jednofaktorových modeloch je krátkodobá úroková $r(t)$ miera jedinou vysvetľujúcou premennou. Výsledkom toho je, že dlhodobá úroková miera je deterministickou funkciou krátkodobej. Z makroekonomického pohľadu vzaté nie je príliš realistický predpoklad, že časová štruktúra úrokových mier je daná len krátkodobou úrokovou mierou. Teda jednofaktorové modely majú výhodu v svojej jednoduchosti a tým pádom lepšej riešiteľnosti, avšak prílišné zjednodušenie predpokladov môže viesť k výrazným nepresnostiam pri odhadnutých a skutočných cenách oceňovaných derivátov. Vzhľadom na túto kritiku jednofaktorových modelov boli vyvinuté ďalšie modely s cieľom zlepšenia presnosti. Sú nimi viacfaktorové modely (dvojfaktorové, trojfaktorové, n -faktorové modely). Naskytá sa logický predpoklad, že posunutím do viacrozmernej roviny by sa mala zväčšiť presnosť modelov, no nesie to so sebou samozrejme aj nevýhody oproti jednoduchším modelom. Takýmito nevýhodami môžu byť strata flexibility, strata možnosti výpočtu presného riešenia, parciálne diferenciálne rovnice vyšších rádov a samozrejme pomalšie výsledky.

V dvojfaktorových modeloch teda modelujeme krátkodobú úrokovú mieru dvomi stochastickými faktormi. Z toho vyplýva, že krátkodobá úroková miera je daná sústavou dvoch stochastických diferenciálnych rovníc (podrobnejšia analýza v [15]). Vo všeobec-

nosti zapísané:

$$\begin{aligned}dx(t) &= \mu_x(x, y)dt + \sigma_x(x, y)dw_1(t), \\dy(t) &= \mu_y(x, y)dt + \sigma_y(x, y)dw_2(t),\end{aligned}$$

kde w_1 a w_2 sú dva rozdielne Wienerove procesy, ktorých môžu byť korelované. Rôznym výberom jednotlivých stochastických procesov dostávame rôzne modely. My sa budeme zaoberať Fong-Vašíčkovým modelom, v ktorom uvažujeme stochastické procesy krátkodobej úrokovej miery a volatility tejto miery (tento model bol predstavený v článku [5]). Tento model teda modeluje volatilitu ako stochastický faktor. Tento predpoklad pridáva komplexnosť do modelu, no je v súlade s reálnymi pozorovaniami, v ktorých možno často badať zmenu chovania úrokovej miery medzi volatilnejšími a pokojnejšími obdobiami. Oba procesy (volatilita, úroková miera) sú v tomto modeli modelované pomocou „mean reversion“ procesom, ktorý sme spomínali v predchádzajúcej kapitole. Dostávame teda sústavu dvoch diferenciálnych rovníc v tvare:

$$\begin{aligned}dr(t) &= \kappa_1(\theta_1 - r(t))dt + \sqrt{y(t)}dw_1(t), \\dy(t) &= \kappa_2(\theta_2 - y(t))dt + v\sqrt{y(t)}dw_2(t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

kde κ_1 a κ_2 predstavujú akési rýchlosti alebo miery toho, ako sa stochastické procesy $r(t)$ a $y(t)$ blížia k svojim dlhodobým stredným hodnotám θ_1 a θ_2 . Ako vidíme volatilita $y(t)$ je modelovaná CIR modelom. Jej volatilita je úmerná samotnej hodnote $y(t)$, vďaka čomu je zabezpečená kladnosť tejto hodnoty. Pri počítaní s modelom budeme uvažovať nekorelovanosť prírastkov Wienerových procesov, ale budeme uvažovať aj prípad, kedy je medzi nimi korelácia ρ a teda platí:

$$E(dw_1dw_2) = \rho dt.$$

Kapitola 2

Od modelu k rovnici

V tejto kapitole pristúpime k odvodeniu parciálnej diferenciálnej rovnice pre funkciu ceny dlhopisu. V tejto časti budeme používať niektoré ekonomické predpoklady ako bezarbitrážnosť a zároveň stochastický kalkulus ako napríklad Itóovu lemu, pričom predpokladáme, že čitateľ je s nimi oboznámený a tieto pojmy nebudeme všeobecne definovať a opisovať (pre viac informácií odporúčame napríklad [10]). Túto rovnicu najprv odvodíme pre všeobecný model (ohľadne odvodenia rovnice odporúčame aj [15]). Následne budeme aplikovať naše výsledky na nami uvažovaný Fong-Vašíčkov model. Tento model však predtým modifikujeme kvôli rozdielu v rýchlosti fluktuácie medzi procesom úrokovej miery a procesom, ktorým modelujeme volatilitu tejto úrokovej miery.

2.1 Odvodenie rovnice pre cenu dlhopisu vo všeobecnom dvojfaktorovom modeli

Fong-Vašíčkov model úrokovej miery je dvojfaktorový model a teda stretávame sa tu s dvomi stochastickými premennými (x,y) , ktoré opisujú úrokovú mieru. Na opísanie takéhoto procesu teda vo všeobecnosti máme sústavu rovníc:

$$dx = \mu_x dt + \sigma_x dw_1,$$

$$dy = \mu_y dt + \sigma_y dw_2.$$

V týchto rovniciach máme dva stochastické procesy w_1 a w_2 , medzi ktorými je korelácia ρ . V tejto kapitole odvodíme parciálnu stochastickú diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu viazaného na túto úrokovú mieru. Táto cena $P(x, y, t, T)$ bude funkciou spomínaných dvoch faktorov, času t a maturity dlhopisu T . Ako prvý si nájdeme diferenciál tejto funkcie. Použitím Itovej lemy pre deriváciu stochastickej funkcie dostávame:

$$\begin{aligned} dP &= \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} (dy)^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} dx dy \\ &= \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial x} (\mu_x dt + \sigma_x dw_1) + \frac{\partial P}{\partial y} (\mu_y dt + \sigma_y dw_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} (\sigma_x^2 (dw_1)^2) + \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} (\sigma_y^2 (dw_2)^2) + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} (\sigma_x \sigma_y dw_1 dw_2). \end{aligned}$$

Keďže uvažujeme konštantnú koreláciu ρ medzi w_1 a w_2 , potom $E(dw_1 dw_2) = \rho dt$. Potom dostávame:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu_x \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\sigma_y^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \sigma_x \sigma_y \rho \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) dt + \sigma_x \frac{\partial P}{\partial x} dw_1 + \sigma_y \frac{\partial P}{\partial y} dw_2. \quad (2.1)$$

Pre jednoduchosť a ľahšie narábanie s horeuvedenou rovnicou a jej členmi si tieto prepíšeme do jednoduchšieho tvaru:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_x \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\sigma_y^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \sigma_x \sigma_y \rho \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_1 &= \sigma_x \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \sigma_2 &= \sigma_y \frac{\partial P}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

teda rovnica (2.1) sa dá zapísať zjednodušene:

$$dP = \mu dt + \sigma_1 dw_1 + \sigma_2 dw_2. \quad (2.3)$$

Ďalej budeme chcieť vytvoriť bezrizikové portfólio. Keďže narábame s dvomi stochastickými faktormi, na vytvorenie takéhoto portfólia budeme potrebovať tri dlhopisy s rôznymi maturitami. Uvažujme teda portfólio Π , ktoré sa skladá z V_i jednotiek dlhopisu s maturitou T_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\Pi = V_1 P(T_1) + V_2 P(T_2) + V_3 P(T_3),$$

kde $P(T_1) = P(x, y, t, T_1)$. Miera výnosov takéhoto portfólia (zmena) bude potom:

$$d\Pi = V_1 dP(T_1) + V_2 dP(T_2) + V_3 dP(T_3).$$

Aplikovaním rovnice (2.3) ďalej dostávame:

$$dP = (V_1\mu(T_1) + V_2\mu(T_2) + V_3\mu(T_3)) dt + (V_1\sigma_1(T_1) + V_2\sigma_1(T_2) + V_3\sigma_1(T_3)) dw_1 + \\ (V_1\sigma_2(T_1) + V_2\sigma_2(T_2) + V_3\sigma_2(T_3)) dw_2.$$

Ďalej budeme chcieť váhy V_i určiť tak, aby koeficienty pri stochastických členoch rovnice (dw_1 a dw_2) boli nulové, čím vytvoríme bezrizikové portfólio. Teda riešime:

$$\begin{aligned} V_1\sigma_1(T_1) + V_2\sigma_1(T_2) + V_3\sigma_1(T_3) &= 0, \\ V_1\sigma_2(T_1) + V_2\sigma_2(T_2) + V_3\sigma_2(T_3) &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ďalej podľa princípu bezarbitrážnosti sa výnos takéhoto (bezrizikového) portfólia musí rovnať bezrizikovej úrokovej miere:

$$d\Pi = r\Pi dt,$$

$$(V_1\mu(T_1) + V_2\mu(T_2) + V_3\mu(T_3)) dt = r(V_1P(T_1) + V_2P(T_2) + V_3P(T_3))dt.$$

Tým dostávame k systému 2.4 tretiu rovnicu:

$$V_1(\mu(T_1) - rP(T_1)) + V_2(\mu(T_2) - rP(T_2)) + V_3(\mu(T_3) - rP(T_3)) = 0.$$

Takto dostávame homogénny lineárny systém rovníc pre váhy V_1, V_2, V_3 , zapísaný maticovo:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(T_1) & \sigma_1(T_2) & \sigma_1(T_3) \\ \sigma_2(T_1) & \sigma_2(T_2) & \sigma_2(T_3) \\ \mu(T_1) - rP(T_1) & \mu(T_2) - rP(T_2) & \mu(T_3) - rP(T_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Takýto systém má netriviálne riešenie práve vtedy, ak riadkové vektory prvej matice sú lineárne závislé. Ak by prvé dva boli závislé, potom by σ_1 a σ_2 boli lineárne závislé a problém by sa zredukoval z dvoch stoch. faktorov na jeden (pre podrobnejšiu analýzu odporúčame [15]). My však uvažujeme dvojfaktorový problém a teda tretí vektor musí byť závislý s jedným alebo oboma ostatnými vektormi a teda sa dá zapísať ako kombinácia ostatných dvoch. Maturity jednotlivých dlhopisov sú ľubovoľné a teda spomenutý vzťah platí pre ľubovoľné T a teda váhy λ_i nezávisia od maturity:

$$\mu(x, y, t, T_i) - rP(x, y, t, T_i) = \lambda_1(x, y, t)\sigma_1(x, y, t, T_i) + \lambda_2(x, y, t)\sigma_2(x, y, t, T_i). \tag{2.5}$$

Spomenuté váhy λ_i sú nazývané trhové ceny rizika a odrážajú očakávaný nárast výnosu na jednotku rizika (resp. určitú prémie, ktorú môže získať investor za to, že podstúpi väčšiu mieru rizika).

Ak do rovnice (2.5) dosadíme vzťahy (2.2), potom dostávame diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu, ktorú sme chceli odvodiť:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_x - \lambda_1 \sigma_x) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + (\mu_y - \lambda_2 \sigma_y) \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\sigma_y^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \sigma_x \sigma_y \rho \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - rP = 0. \quad (2.6)$$

2.2 Korekcia - rýchla časová škála volatility

Z empirických štúdií o finančných derivátoch vyplýva, že volatility sprevádzajúca modelované procesy sa často správa výbušne a zhlukovito. Niekoľko dní môže nadobúdať vysoké hodnoty a potom na podobnom časovom horizonte zase malé hodnoty. Vzhľadom na dĺžku trvania kontraktov (v našom prípade dlhopisu) môže volatility prechádzať mnohými takými obdobiami, čo vzhľadom na časovú škálu, ktorú uvažujeme v prípade dlhopisu (pri dlhopisoch je rozumné uvažovať časové jednotky za roky) volatility veľmi rýchlo fluktuuje.

V prípade Fong-Vašíčkovho modelu sa volatility úrokovej miery modeluje „mean reversion“ procesom, ktorý sme predstavili v kapitole 1.1.1. V tomto procese reprezentuje rýchlosť parameter a . Fluktuácie volatility budú vzhľadom na úrokovú mieru veľmi rýchle a teda hodnota tohto parametra bude veľká.

V predchádzajúcej kapitole sme definovali rovnicu opisujúcu proces volatility nasledovne:

$$dy(t) = \kappa_2(\theta_2 - y(t))dt + v\sqrt{y(t)}dw_2(t).$$

Rýchlosť pre volatility reprezentuje parameter κ_2 , ktorý nadobúda veľké hodnoty. Predpokladáme, že volatility sa pohybuje v časovej škále ϵt , kde ϵ je "veľmi malé". Využijeme, že pre člen dw platí $dw = \phi\sqrt{dt}$, kde $\phi \sim N(0, 1)$. Ďalej využijeme, že člen κ_2 nadobúda veľké hodnoty a definujeme $\epsilon = \frac{1}{\kappa_2}$. Takto dostávame sústavu rovníc modelu v nasledujúcom tvare:

$$\begin{aligned} dr(t) &= \kappa_1(\theta_1 - r(t))dt + \sqrt{y(t)}dw_1(t), \\ dy(t) &= \frac{\theta_2 - y(t)}{\epsilon}dt + \frac{v\sqrt{y(t)}}{\sqrt{\epsilon}}dw_2(t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

V ďalšom určíme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre nami skúmaný Fong-Vašíčkov model. V predchádzajúcej kapitole sme odvodili všeobecný tvar rovnice (2.6) pre flu-

bovoľný dvojfaktorový model. V ďalšom dosadíme za funkcie driftu μ_r a μ_y členy $\kappa_1(\theta_1 - r(t))$ a $\frac{\theta_2 - y(t)}{\epsilon}$ z rovníc (2.7), za funkcie volatilit σ_r a σ_y dosadíme členy $\sqrt{y(t)}$ a $\frac{v\sqrt{y(t)}}{\sqrt{\epsilon}}$ opäť z rovníc (2.7) a budeme predpokladať, že hodnoty trhových cien rizika sú v tvare: $\lambda_1(r, y, t) = \lambda_1\sqrt{y}$ a $\lambda_2(r, y, t) = \lambda_2\sqrt{y}$, kde λ_1 a λ_2 sú konštanty. Dosadením týchto vzťahov do rovnice (2.6) dostávame hľadanú diferenciálnu rovnicu pre cenu dhopisu vo Fong-Vašíčkovom modeli:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + (\kappa_1(\theta_1 - r) - \lambda_1 y) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{y}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{\epsilon}(\theta_2 - y) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\lambda_2 v y \right) \frac{\partial P}{\partial y} \\ + \frac{1}{\epsilon} \frac{v^2 y}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \rho v y \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} - rP = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

kde koncová podmienka pre $P(t, r, y)$ je $P(T, r, y) = 1$.

Kapitola 3

Riešenie diferenciálnej rovnice ceny dlhopisu

V tejto časti práce pristúpime k samotnému riešeniu parciálnej diferenciálnej rovnice (2.8) pre cenu dlhopisu vo Fong-Vašíčkovom modeli, ktorá bola odvodená v časti 2.

Spomínaná rovnica má tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + (\kappa_1(\theta_1 - r) - \lambda_1 y) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{y}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{\epsilon}(\theta_2 - y) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \lambda_2 v y \right) \frac{\partial P}{\partial y} \\ + \frac{1}{\epsilon} \frac{v^2 y}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \rho v y \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} - rP = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

s koncovou podmienkou pre $P(t, r, y)$ v tvare $P(T, r, y) = 1$.

Aby sme mohli danú rovnicu riešiť, bude potrebné si ju prepísať do jednoduchšieho zápisu pomocou operátorov L_0, L_1, L_2 . Tieto operátory určíme tak, aby sme členy rovnice (3.1) zoskupili do skupín podľa rádu parametra ϵ . Ako vidíme v rovnici, tento parameter nadobúda rády: $\frac{1}{\epsilon^1}, \frac{1}{\epsilon^{1/2}}, 1$ respektíve $\epsilon^{-1}, \epsilon^{-1/2}, \epsilon^0$. A teda po zoskupení členov rovnice podľa rádov môžeme operátory L_0, L_1, L_2 zapísať v nasledovnom tvare:

$$L_0 = (\theta_2 - y) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{v^2 y}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (3.2)$$

$$L_1 = -\lambda_2 v y \frac{\partial}{\partial y} + \rho v y \frac{\partial^2}{\partial r \partial y}, \quad (3.3)$$

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial t} + (\kappa_1(\theta_1 - r) - \lambda_1 y) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{y}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - r \quad (3.4)$$

a rovnicu (3.1) teda môžeme prepísať do operátorového zápisu:

$$\left(\frac{1}{\epsilon} L_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} L_1 + L_2 \right) P = 0. \quad (3.5)$$

Najprv budeme pri odvodzovaní predpokladať, že korelácia medzi Wienerovými procesmi w_1, w_2 , ktoré vystupujú v rovniciach definujúcich Fong-Vašíčkov proces (1.1), je nulová a teda korelačný koeficient ρ postavíme rovný nule (podobný postup bol taktiež použitý v [14]). Z toho vyplýva, že operátor L_1 prejde do tvaru:

$$L_1 = -\lambda_2 v y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Neskôr budeme pripúšťať aj závislosť medzi Wienerovými procesmi a pozrieme sa, aký vplyv to bude mať na riešenie rovnice.

3.1 Asymptotická metóda malého parametra pri nulovej korelácii

Riešenie rovnice (3.1) budeme hľadať metódou malého parametra, pomocou ktorej budeme hľadať nekonečný rozvoj hľadanej funkcie $P(t, r, y)$ podľa parametra ϵ . Riešenie bude teda v tvare

$$P(t, r, y) = P_0 + \epsilon^{1/2} P_1 + \epsilon^1 P_2 + \dots \quad (3.6)$$

Vzhľadom na koncovú podmienku $P(T, r, y) = 1$ musia pomocné funkcie $P_i(t, r, y)$ spĺňať podmienky: $P_0(T, r, y) = 1$, $P_i(T, r, y) = 0$ pre $i > 0$. Keď zasubstitujeme rozvoj (3.6) do rovnice (3.5) dostaneme nasledujúcu rovnicu:

$$\begin{aligned} \epsilon^{-1} L_0 P_0 + \epsilon^{-\frac{1}{2}} (L_0 P_1 + L_1 P_0) + \epsilon^0 (L_0 P_2 + L_1 P_1 + L_2 P_0) + \epsilon^{\frac{1}{2}} (L_0 P_3 + L_1 P_2 + L_2 P_1) \\ + \epsilon^1 (L_0 P_4 + L_1 P_3 + L_2 P_2) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Postup pri hľadaní riešenia je nasledovný. Pravá strana rovnice je nulová, ak má teda platiť rovnosť ľavej a pravej strany, musí platiť, že člen pri každom ráde ϵ je rovný nule a teda budeme postupne analyzovať rovnosti:

$$L_0 P_0 = 0, \quad (3.8)$$

$$L_0 P_1 + L_1 P_0 = 0, \quad (3.9)$$

$$L_0 P_2 + L_1 P_1 + L_2 P_0 = 0, \quad (3.10)$$

$$L_0 P_3 + L_1 P_2 + L_2 P_1 = 0, \quad (3.11)$$

$$L_0 P_4 + L_1 P_3 + L_2 P_2 = 0, \quad (3.12)$$

$\vdots$

Na základe týchto rovností sa budeme snažiť získať, čo najviac informácií o funkciách P_i a napokon analyticky určiť tieto funkcie. Aproximácia riešenia spočíva v tom, že budeme počítat len určitý počet funkcií P_i a teda v rozvoji riešenia 3.6 budeme uvažovať len prvých niekoľko členov, pričom prínos ostatných zanedbáme.

K ďalšiemu postupu budeme potrebovať nasledujúce lemy. Prvá z nich sa vzťahuje k riešiteľnosti riešenia eliptickej parciálnej diferenciálnej rovnice. Podrobnejšie je táto lema rozoberaná v [8].

Lema 3.1.1. *Nech L_0 je operátor definovaný 3.2 a R je daná funkcia. Nutnou podmienkou pre riešenie P rovnice $L_0P + R = 0$ je: $\langle R \rangle = 0$, kde $\langle R \rangle = \int R(y)g(y)dy$ a $g(y)$ je limitné rozdelenie pre proces $y(t)$.*

Ďalšia lema sa týka vlastností riešenia rovnice spomenutej v predchádzajúcej leme. Bola tiež použitá napríklad v [14].

Lema 3.1.2. *Nech F je funkcia taká, že $F \in C([0, \infty])$ a $\langle F \rangle = 0$. Potom existuje jediné (až na integračnú konštantu) riešenie $\psi \in C^2((0, \infty)) \cap C([0, \infty))$ pre nehomogénnu rovnicu*

$$L_0\psi = \frac{v^2}{2}F, \quad (3.13)$$

ktorého derivácia je daná ako:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{1}{yg(y)} \int_0^y F(\xi)g(\xi)d\xi. \quad (3.14)$$

Navyše pre ψ platí vzťah:

$$\langle L_1\psi \rangle = \lambda_2 v \int_0^\infty yF(y)g(y)dy. \quad (3.15)$$

Špeciálne platí, že ak ψ je riešenie pre homogénnu rovnicu $L_0\psi = 0$, potom ψ je konštantná funkcia vzhľadom na premennú y .

DÔKAZ: V tomto dôkaze sa budeme venovať hlavne odvodeniu vzťahu (3.15), ktorého modifikácii pre nenulovú koreláciu sa budeme venovať neskôr. Jedinečnosť riešenia je študovaná v [14]. Vzhľadom na predpis operátora L_0 , môžeme zapísať $L_0\psi$ ako:

$$L_0\psi = (\theta_2 - y)\frac{\partial}{\partial y}\psi + \frac{v^2 y}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi.$$

Na tomto mieste ukážeme, že funkcia ψ , ktorej derivácia je rovná (3.14) je riešením rovnice (3.13). Dosadíme funkciu ψ (jej deriváciu) do predchádzajúceho vzťahu, čím dostávame:

$$L_0\psi = (\theta_2 - y) \frac{1}{yg(y)} \int_0^y F(\xi)g(\xi)d\xi + \frac{v^2 y}{2} \left[\frac{-(g(y) + yg'(y))}{y^2 g^2(y)} \int_0^y F(\xi)g(\xi)d\xi + \frac{1}{y} F(y) \right].$$

Posledný člen v predchádzajúcej rovnici predstavuje žiadaný tvar pravej strany rovnice (3.13). Teda ak má byť ψ riešením tejto rovnice, potom všetko okrem tohto člena musí byť rovné nule. Preto budeme skúmať, či platí:

$$(\theta_2 - y) \frac{1}{yg(y)} - \frac{v^2 y}{2} \frac{g(y) + yg'(y)}{y^2 g^2(y)} = 0,$$

zjednodušené zapísané:

$$(\theta_2 - y)g(y) - \frac{v^2}{2}(g(y) + yg'(y)) = 0.$$

Ľavú stranu tejto rovnice si označíme ako funkciu ω , teda $\omega(y) := (\theta_2 - y)g(y) - \frac{v^2}{2}(yg(y))'$. Aby sme ukázali platnosť rovnice (3.13), potrebuje ukázať $\omega(y) = 0$ pre $\forall y$. Funkcia $g(y)$ predstavuje hustotu limitného rozdelenia procesu y , teda musí spĺňať Fokker-Planckovu rovnicu (pre bližšie informácie odporúčame [16]):

$$\frac{v^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}(yg(y)) - \frac{\partial}{\partial y}((\theta_2 - y)g(y)) = 0.$$

Opäť označíme ľavú stranu tejto rovnice ako funkciu $\gamma(y)$, teda $\gamma(y) := ((\theta_2 - y)g(y))'' - \frac{v^2}{2}(yg(y))'$. Z Fokker-Planckovej rovnice vyplýva $\gamma(y) = 0$ pre $\forall y$. Môžeme si všimnúť, že platí vzťah medzi $\omega(y)$ a $\gamma(y)$, že $\gamma(y)$ je deriváciou $\omega(y)$. Vzhľadom na to, že derivácia $\omega(y)$ je rovná nule pre $\forall y$, musí byť $\omega(y)$ konštantná funkcia. Predpis funkcie bol odvodený v [13]:

$$g(y) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta y} y^{\alpha-1} & \text{ak } y > 0 \\ 0 & \text{ak } y \leq 0. \end{cases}$$

Z toho vyplýva, že $g(0) = 0$, čo implikuje, že $\omega(0) = 0$, teda keďže ω je konštantná funkcia, musí platiť $\omega(y) = 0$ pre $\forall y$, čo bolo treba ukázať.

Ďalej ukážeme platnosť člena (3.15). Vzhľadom na tvar operátora L_1 môžeme zapísať $L_1\psi$:

$$L_1\psi = -\lambda_2 v y \frac{1}{yg(y)} \int_0^y F(\xi)g(\xi)d\xi,$$

stredná hodnota čoho je daná ako:

$$\langle L_1\psi \rangle = - \int_0^\infty \lambda_2 v \int_0^y F(\xi)g(\xi)d\xi dy.$$

Z toho metódou per partes dostávame:

$$\langle L_1\psi \rangle = \left[-y \int_0^y F(\xi)g(\xi)d\xi \right]_0^\infty + \lambda_2 v \int_0^\infty y F(y)g(y)dy.$$

Posledný sčítanec je hľadaný tvar pravej strany, teda tu nám ostáva ukázať nulovosť prvého sčítanca. Pokiaľ vezmeme spodnú hranicu 0, vyjde nám hodnota tohto sčítanca nulová. Ostáva vyšetriť hornú hranicu, presnejšie limitu výrazu pre $y \rightarrow +\infty$. Použitím L'Hospitalovho pravidla dostávame:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y \int_0^y F(\xi)g(\xi)d\xi = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^y F(\xi)g(\xi)d\xi \right)^2}{F(y)g(y)}.$$

Limita v poslednom výraze sa rovná nule, keďže čitateľ sa blíži k strednej hodnote funkcie F , ktorá je podľa predpokladu nula a menovateľ je ohraničená funkcia. ■

Cieľom tejto diplomovej práce bude aproximácia riešenia pomocou prvých 3 mocných funkcií P_i a teda P_0, P_1, P_2 . Keďže touto témou sa zaoberala aj práca Radky Selečenievej [13], v ktorej boli na aproximáciu riešenia použité prvé dve funkcie, nebudeme znovu opakovať tento výpočet. Použijeme však dostupné výsledky P_0 a P_1 k bližšiemu určeniu tretej funkcie. Spomínané prvé dve funkcie majú teda nasledovný tvar:

$$P_0(\tau, r) = A(\tau)e^{-B(\tau)r}, \quad (3.16)$$

kde $\tau = T - t$ reprezentuje zostávajúci čas do splatnosti dlhopisu. Premennú t neskôr nahradíme premennou τ aj pri samotných výpočtoch funkcie P_2 . Funkcie $A(\tau), B(\tau)$ sú dané nasledovnými vzťahmi:

$$B(\tau) = \frac{1}{\kappa_1} (1 - e^{-\kappa_1 \tau}), \quad (3.17)$$

$$A(\tau) = e^{(B(\tau)-\tau)\left(\theta_1 - \frac{\lambda_1 \theta_2}{\kappa_1} - \frac{\theta_2}{2\kappa_1^2}\right)}.$$

Pridávame aj predpis derivácie pre funkciu B , keďže tento predpis budeme využívať pri hľadaní funkcie $\bar{P}_2$, ktorá bude definovaná neskôr:

$$B' = 1 - \kappa_1 B. \quad (3.18)$$

Funkcia P_1 má tvar:

$$P_1(\tau, r) = D(\tau)A(\tau)e^{-B(\tau)r}, \quad (3.19)$$

kde funkcia $D(\tau)$ je daná vzťahmi:

$$D(\tau) = \frac{V_1}{\kappa_1}(-B + \tau) - \frac{V_2}{\kappa_1^2}\left(-B - \frac{\kappa_1}{2}B^2 + \tau\right) + \frac{V_3}{\kappa_1^3}\left(-B - \frac{\kappa_1}{2}B^2 - \frac{\kappa_1^2}{2}B^3 + \tau\right), \quad (3.20)$$

kde

$$\begin{aligned} V_1 &= -\lambda_1\lambda_2v\theta_2, \\ V_2 &= \left(\frac{1}{2}\lambda_2v + \lambda_1\rho v\right)\theta_2, \\ V_3 &= -\frac{1}{2}\rho v\theta_2. \end{aligned}$$

3.1.1 Určenie funkcie P_2

Poznamenajme, že funkcie P_0, P_1 nezávisia od premennej y . Ako sme už spomínali pri opise postupu aproximačnej metódy, budeme analyzovať rovnice, ktoré vyjdu z nekonečného rozvoja funkcie $P(t, r, y)$. Konkrétne sa teraz budeme zaoberať rovnicou (3.10):

$$L_0P_2 + L_1P_1 + L_2P_0 = 0.$$

Keďže P_1 nezávisí od premennej y a parameter L_1 obsahuje vo všetkých svojich členoch deriváciu podľa premennej y , člen $L_1P_1 = 0$ a teda rovnica prejde do tvaru $L_0P_2 + L_2P_0 = 0$. Výsledkom je:

$$L_0P_2 = \frac{v^2}{2}\left(-\frac{2}{v^2}L_2P_0\right). \quad (3.21)$$

Z lemy 3.1.1 vyplýva, že $\langle L_2P_0 \rangle = 0$, pričom, keďže funkcia P_0 nezávisí od premennej y , môžeme vzťah $\langle L_2P_0 \rangle$ zapísať v tvare $\langle L_2 \rangle P_0 = 0$. Na základe toho a na základe tvaru P_0 platí:

$$\begin{aligned} -L_2P_0 &= (\langle L_2 \rangle - L_2)P_0 = \left(-\lambda_1(\sigma^2 - y)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{(\sigma^2 - y)}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)P_0 \\ &= (\sigma^2 - y)e^{-Br}f(\tau), \end{aligned}$$

kde

$$f(\tau) = A\left(\lambda_1B + \frac{1}{2}B^2\right).$$

Funkcia $-\frac{2}{v^2}L_2P_0$ spĺňa predpoklady lemy 3.1.2, pretože je diferencovateľná na celom svojom definičnom obore, stredná hodnota vzhľadom na limitné rozdelenie dané hustotou g je rovná nule:

$$\begin{aligned}\left\langle -\frac{2}{v^2}L_2P_0 \right\rangle &= \left\langle -\frac{2}{v^2}(\sigma^2 - y)e^{-Br}f(\tau) \right\rangle \\ &= -\frac{2}{v^2}(\sigma^2 - \langle y \rangle)e^{-Br}f(\tau) = 0,\end{aligned}$$

Aplikovaním lemy 3.1.2 na rovnicu 3.21 vyvodzujeme vzťah pre deriváciu funkcie P_2 v tvare:

$$\frac{\partial P_2}{\partial y} = -\frac{2}{v^2}f(\tau)e^{-Br}\frac{1}{yg(y)}\int_0^y(\xi - \sigma^2)g(\xi)d\xi = -\frac{2}{v^2}f(\tau)e^{-Br}H(y), \quad (3.22)$$

kde

$$H(y) = \frac{1}{yg(y)}\int_0^y(\xi - \sigma^2)g(\xi)d\xi.$$

Ďalej budeme pokračovať rovnicou (3.11) $L_0P_3 + L_1P_2 + L_2P_1 = 0$, ktorú vieme zapísať nasledovne:

$$L_0P_3 = \frac{v^2}{2}\left(\frac{2}{v^2}(-L_1P_2 - L_2P_1)\right). \quad (3.23)$$

Na základe lemy 3.1.1 platí $\langle -L_1P_2 - L_2P_1 \rangle = 0$ a teda sú splnené predpoklady lemy 3.1.2, ktorú môžeme použiť na rovnicu (3.23), aby sme získali tvar člena $\langle L_1P_3 \rangle$, ktorý budeme potrebovať v neskorších výpočtoch. Na to, aby sme tu mohli aplikovať túto lemu, potrebujeme odvodiť vzťahy L_1P_2 , L_2P_1 a $-\langle L_1P_2 \rangle$. Keďže poznáme tvar operátora L_1 a odvodili sme tvar derivácie funkcie P_2 , člen L_1P_2 sa dá zapísať ako:

$$\begin{aligned}L_1P_2 &= \frac{2\lambda_2}{v}f(\tau)e^{-Br}yH(y) \\ &= \frac{2\lambda_2}{v}f(\tau)e^{-Br}\frac{1}{g(y)}\int_0^y(\xi - \sigma^2)g(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Z definície operátora $\langle . \rangle$ vyplýva, že člen $-\langle L_1P_2 \rangle$ má tvar:

$$\begin{aligned}-\langle L_1P_2 \rangle &= -\frac{2\lambda_2}{v}f(\tau)e^{-Br}\int_0^\infty\int_0^y(\xi - \sigma^2)g(\xi)d\xi dy \\ &= -\frac{2\lambda_2}{v}f(\tau)e^{-Br}K_1,\end{aligned} \quad (3.24)$$

kde K_1 je konštanta, daná vzťahom:

$$K_1 = \int_0^\infty\int_0^y(\xi - \sigma^2)g(\xi)d\xi dy.$$

Keďže poznáme tvar operátora L_2 a poznáme aj tvar funkcie P_1 môžeme napísať člen $L_2 P_1$ nasledovne:

$$L_2 P_1 = \frac{\partial P_1}{\partial t} + (\kappa_1 (\theta_1 - r) - \lambda_1 y) \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{y}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} - r P_1, \quad (3.25)$$

pričom konkrétny tvar funkcie P_1 zatiaľ dosádzať nebudeme. Použitím lemy 3.1.2 na rovnicu (3.23) dostaneme vzťahy pre deriváciu funkcie P_3 a tiež pre člen $\langle L_1 P_3 \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_3}{\partial y} = & -\frac{1}{yg(y)} \int_0^y \left(\frac{2\lambda_2}{v} f(\tau) e^{-Br} \xi H(\xi) \right) g(\xi) d\xi \\ & -\frac{1}{yg(y)} \int_0^y \left(\frac{\partial P_1}{\partial t} + (\kappa_1 (\theta_1 - r) - \lambda_1 \xi) \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{\xi}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} - r P_1 \right) g(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

čo sa dá prepísať do tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_3}{\partial y} = & -\frac{1}{yg(y)} \left[\frac{2\lambda_2}{v} f(\tau) e^{-Br} \int_0^y \xi H(\xi) g(\xi) d\xi + \int_0^y (\xi - \sigma^2) g(\xi) d\xi \left(-\lambda_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} \right) + \int_0^y g(\xi) d\xi \left(\frac{\partial P_1}{\partial t} + (\kappa_1 (\theta_1 - r) - \lambda_1 \sigma^2) \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} - r P_1 \right) \right], \end{aligned}$$

pričom v poslednom člene sa dá využiť, že:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + (\kappa_1 (\theta_1 - r) - \lambda_1 \sigma^2) \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} - r P_1 = \langle L_2 P_1 \rangle, \quad (3.26)$$

čo platí vďaka tomu, že stredná hodnota y vzhľadom k limitnému rozdeleniu g je σ^2 . Z rovnice (3.23) na základe lemy 3.1.1 vyplýva $\langle L_1 P_2 \rangle + \langle L_2 P_1 \rangle = 0$. Využitím toho naviac dostávame:

$$\langle L_2 P_1 \rangle = -\langle L_1 P_2 \rangle. \quad (3.27)$$

Člen $\langle L_1 P_3 \rangle$ má podľa lemy 3.1.2 tvar:

$$\langle L_1 P_3 \rangle = \lambda_2 v \int_0^\infty (-L_1 P_2 - L_2 P_1) \frac{2}{v^2} yg(y) dy. \quad (3.28)$$

Spojením vzťahov (3.26), (3.24), ktoré sme odvodili vyššie, ďalej dostávame na základe rovnice (3.28) nasledovné vyjadrenie člena $\langle L_1 P_3 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle L_1 P_3 \rangle = & -\frac{2\lambda_2}{v} \int_0^\infty \frac{2\lambda_2}{v} f(\tau) e^{-Br} y^2 H(y) g(y) dy \\ & -\frac{2\lambda_2}{v} \left[\int_0^\infty yg(y) \left(\frac{\partial P_1}{\partial t} + (\kappa_1 (\theta_1 - r) - \lambda_1 y) \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{y}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} - r P_1 \right) dy \right]. \end{aligned}$$

Ďalšou úpravou získame:

$$\begin{aligned}
\langle L_1 P_3 \rangle &= -\frac{2\lambda_2}{v} \frac{2\lambda_2}{v} f(\tau) e^{-Br} \int_0^\infty y^2 H(y) g(y) dy \\
&\quad - \frac{2\lambda_2}{v} \int_0^\infty y g(y) dy \left(\frac{\partial P_1}{\partial t} + \kappa_1 (\theta_1 - r) \frac{\partial P_1}{\partial r} - r P_1 \right) \\
&\quad - \frac{2\lambda_2}{v} \int_0^\infty (y^2 - (\sigma^2)^2 + (\sigma^2)^2) g(y) dy \left(-\lambda_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} \right), \\
\langle L_1 P_3 \rangle &= -\frac{2\lambda_2}{v} \frac{2\lambda_2}{v} f(\tau) e^{-Br} K_3 \\
&\quad - \frac{2\lambda_2}{v} \sigma^2 \left(\frac{\partial P_1}{\partial t} + (\kappa_1 (\theta_1 - r) - \lambda_1 \sigma^2) \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} - r P_1 \right) \\
&\quad - \frac{2\lambda_2}{v} \int_0^\infty (y^2 - (\sigma^2)^2) g(y) dy \left(-\lambda_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} \right),
\end{aligned}$$

kde definujeme konštantu K_3 :

$$K_3 = \int_0^\infty y^2 H(y) g(y) dy.$$

Ďalej využijeme:

$$\int_0^\infty y g(y) dy = \sigma^2,$$

keďže takto zapísaný integrál vyjadruje strednú hodnotu pre y . Z toho ďalej môžeme zapísať integrál vyjadrujúci disperziu y na základe limitného rozdelenia g :

$$\int_0^\infty (y^2 - (\sigma^2)^2) g(y) dy = \int_0^\infty (y - (\sigma^2))^2 g(y) dy = V.$$

Na základe tvaru tohto integrálu a použitím (3.26) môžeme prepísať člen $\langle L_1 P_3 \rangle$ do zjednodušenej podoby:

$$\langle L_1 P_3 \rangle = -\frac{2\lambda_2}{v} \frac{2\lambda_2}{v} f(\tau) e^{-Br} K_3 - \frac{2\lambda_2}{v} \sigma^2 \langle L_2 P_1 \rangle - \frac{2\lambda_2}{v} V \left(-\lambda_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} \right).$$

Toto ďalej upravíme pomocou vyššie odvodených rovníc (3.27) a (3.24), čím dostaneme $\langle L_1 P_3 \rangle$ v tvare:

$$\langle L_1 P_3 \rangle = -\frac{2\lambda_2}{v} \left[\frac{2\lambda_2}{v} (K_3 + \sigma^2 K_1) f(\tau) e^{-Br} + V \left(-\lambda_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} \right) \right]. \quad (3.29)$$

V ďalšom sa budeme zaoberať rovnicou (3.12): $L_0 P_4 + L_1 P_3 + L_2 P_2 = 0$. Aplikovaním lemy 3.1.1 dostávame vzťah:

$$\langle L_1 P_3 \rangle + \langle L_2 P_2 \rangle = 0, \quad (3.30)$$

z ktorého prvý člen poznáme. Teraz sa zameriame na druhý, v ktorom vystupuje hľadaná funkcia P_2 . Spravíme dekompozíciu hľadanej funkcie na dve časti (táto dekompozícia bola použitá aj v [14]) a teda budeme hľadať:

$$P_2(t, r, y) = \bar{P}_2(t, r) + \tilde{P}_2(t, r, y).$$

Ako vidíme, prvá časť $\bar{P}_2$ nezávisí od premennej y a bude sa rovnať strednej hodnote funkcie P_2 vzhľadom na limitné rozdelenie stochastického procesu y . Druhá časť funkcie $\tilde{P}_2$ bude taká, že stredná hodnota z nej vzhľadom na limitné rozdelenie y bude rovná nule $\langle \tilde{P}_2 \rangle = 0$. Teda prvá časť je stredná hodnota a druhá časť je akási stochastická fluktuácia funkcie P_2 okolo strednej hodnoty.

Najprv sa budeme venovať funkcii $\tilde{P}_2$ a odvodíme jej tvar. Keďže $\bar{P}_2$ nezávisí od premennej y musí platiť, že derivácia $\tilde{P}_2$ podľa y bude rovnaká ako derivácia P_2 . Túto deriváciu sme odvodili vyššie v tvare (3.22). Teda $\tilde{P}_2$ nájdeme tak, aby spĺňala spomínané vlastnosti:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{P}_2 \rangle &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial y} &= \frac{\partial P_2}{\partial y} = -\frac{2}{v^2} f(\tau) e^{-Br} H(y). \end{aligned}$$

$\tilde{P}_2$ určíme integráciou derivácie P_2 respektíve $\tilde{P}_2$. Splnenie prvej vlastnosti (nulovosti strednej hodnoty) zaručíme odčítaním strednej hodnoty nájdenej funkcie. Týmto postupom získame:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2 &= \int_0^y \frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial \xi} d\xi - \left\langle \int_0^y \frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial \xi} d\xi \right\rangle \\ &= -\frac{2}{v^2} f(\tau) e^{-Br} \left[\int_0^y H(\xi) d\xi - \int_0^\infty g(y) \int_0^y H(\xi) d\xi dy \right] \\ &= -\frac{2}{v^2} f(\tau) e^{-Br} \left[\int_0^y H(\xi) d\xi - K_2 \right], \end{aligned} \tag{3.31}$$

kde K_2 je konštanta:

$$K_2 = \int_0^\infty g(y) \int_0^y H(\xi) d\xi dy.$$

Teraz už nám ostáva ešte nájsť funkciu $\bar{P}_2(t, r)$. Vďaka dekompozícii funkcie P_2 môžeme člen $\langle L_2 P_2 \rangle$ zapísať ako:

$$\langle L_2 P_2 \rangle = \langle L_2 (\bar{P}_2 + \tilde{P}_2) \rangle = \langle L_2 \bar{P}_2 \rangle + \langle L_2 \tilde{P}_2 \rangle = \langle L_2 \rangle \bar{P}_2 + \langle L_2 \tilde{P}_2 \rangle.$$

Druhú časť tohto zápisu nájdeme aplikovaním operátora L_2 na funkciu $\tilde{P}_2$ nasledovne:

$$L_2 \tilde{P}_2 = \frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial t} + (\kappa_1(\theta_1 - r) - \lambda_1 y) \frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial r} + \frac{y}{2} \frac{\partial^2 \tilde{P}_2}{\partial r^2} - r \tilde{P}_2.$$

Na to následne aplikujeme strednú hodnotu podľa limitného rozdelenia procesu y :

$$\langle L_2 \tilde{P}_2 \rangle = \left\langle \frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial t} \right\rangle + \kappa_1(\theta_1 - r) \left\langle \frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial r} \right\rangle - \lambda_1 \left\langle y \frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial r} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle y \frac{\partial^2 \tilde{P}_2}{\partial r^2} \right\rangle - r \langle \tilde{P}_2 \rangle.$$

Vzhľadom na to, že stredná hodnota $\tilde{P}_2$ je rovná nule ($\langle \tilde{P}_2 \rangle = 0$) platia nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{P}_2 \rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial t} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \tilde{P}_2 \rangle = 0, \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial r} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial r} \langle \tilde{P}_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Vďaka týmto rovnostiam dostávame výraz $\langle L_2 \tilde{P}_2 \rangle$ v zjednodušenej podobe:

$$\langle L_2 \tilde{P}_2 \rangle = -\lambda_1 \left\langle y \frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial r} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle y \frac{\partial^2 \tilde{P}_2}{\partial r^2} \right\rangle.$$

Ďalšou úpravou dostávame operátorový zápis:

$$\begin{aligned} \langle L_2 \tilde{P}_2 \rangle &= \left(-\lambda_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \langle y \tilde{P}_2 \rangle \\ &= \left(-\lambda_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \left[-\frac{2}{v^2} f(\tau) e^{-Br} \left(\int_0^\infty y g(y) \int_0^y H(\xi) d\xi dy \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^\infty y g(y) dy \int_0^\infty \int_0^y H(\xi) d\xi g(y) dy \right) \right]. \end{aligned}$$

Ďalej využijeme, že $\int_0^\infty y g(y) dy = \sigma^2$ je stredná hodnota stochastického procesu y vzhľadom na limitné rozdelenie procesu dané hustotou g :

$$\begin{aligned} \langle L_2 \tilde{P}_2 \rangle &= -\frac{2}{v^2} f(\tau) \int_0^\infty (y - \sigma^2) g(y) \int_0^y H(\xi) d\xi dy \left(-\lambda_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) (e^{-Br}) \\ &= -\frac{2}{v^2} f(\tau) K_4 \left(-\lambda_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) (e^{-Br}), \end{aligned} \tag{3.32}$$

kde K_4 je konštanta:

$$K_4 = \int_0^\infty (y - \sigma^2) g(y) \int_0^y H(\xi) d\xi dy.$$

Vráťme sa teraz k rovnici (3.12): $L_0 P_4 + L_1 P_3 + L_2 P_2 = 0$. Ako sme odvodili, vyplýva z nej rovnosť (3.30). Keďže sme definovali dekompozíciu funkcie P_2 , môžeme daný vzťah ďalej rozviesť do podoby $\langle L_1 P_3 \rangle + \langle L_2 \bar{P}_2 \rangle + \langle L_2 \tilde{P}_2 \rangle = 0$ a z toho vďaka nezávislosti $\bar{P}_2$ od premennej y prejde do tvaru:

$$\langle L_2 \bar{P}_2 \rangle = -\langle L_1 P_3 \rangle - \langle L_2 \tilde{P}_2 \rangle.$$

Keďže poznáme všetky členy na pravej strane, môžeme túto rovnicu prepísať do tvaru parciálnej diferenciálnej rovnice pre funkciu $\bar{P}_2$, ktorej vyriešenie bude našou ďalšou úlohou. Podľa tvaru operátora L_2 a vzťahov (3.32) a (3.29) teda platí nasledovná rovnica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial t} + (\kappa_1(\theta_1 - r) - \lambda_1 \sigma^2) \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{P}_2}{\partial r^2} - r \bar{P}_2 = \\ \frac{2\lambda_2}{v} \left[\frac{2\lambda_2}{v} (K_3 + \sigma^2 K_1) f(\tau) e^{-Br} + V \left(-\lambda_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} \right) \right] \\ + \frac{2}{v^2} f(\tau) K_4 \left(-\lambda_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) (e^{-Br}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ako vidíme v rovnici, prvý člen je derivácia podľa premennej t . Vzhľadom na to, že funkcie P_0, P_1 sme namiesto t uvádzali ako funkcie premennej τ a všetky ďalšie výpočty boli tiež vypracované s premennou τ , prevedieme prvý člen na deriváciu podľa τ . Nakoľko $\tau = T - t$, platí nasledovné:

$$\frac{\partial \bar{P}_2}{\partial t} = \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{P}_2}{\partial \tau}.$$

Do rovnice (3.33) tiež dosadíme funkciu P_1 , danú rovnicami (3.19) a (3.20). Aplikovaním týchto dvoch vzťahov dostávame teda rovnicu:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \bar{P}_2}{\partial \tau} + (\kappa_1(\theta_1 - r) - \lambda_1 \sigma^2) \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{P}_2}{\partial r^2} - r \bar{P}_2 = \\ \frac{2\lambda_2}{v} \left[\frac{2\lambda_2}{v} (K_3 + \sigma^2 K_1) f(\tau) + V (\lambda_1 B(\tau) A(\tau) D(\tau) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} B^2(\tau) A(\tau) D(\tau) \right) \Big] e^{-Br} + \frac{2}{v^2} f(\tau) K_4 \left(\lambda_1 B(\tau) + \frac{1}{2} B^2(\tau) \right) e^{-Br}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ako vidíme, pravá strana rovnice je v separovanom tvare vzhľadom na premenné τ a r . Využijeme túto skutočnosť, aby sme si zjednodušili zápis a zasubstituujeme si tú časť pravej strany, ktorá závisí len od premennej τ pomocou funkcie $\mu(\tau)$, ktorú definujeme spôsobom:

$$\mu(\tau) = \frac{2\lambda_2}{v} \left[\frac{2\lambda_2}{v} (K_3 + \sigma^2 K_1) f(\tau) + V \left(\lambda_1 B(\tau) A(\tau) D(\tau) + \frac{1}{2} B^2(\tau) A(\tau) D(\tau) \right) \right]$$

$$+\frac{2}{v^2}f(\tau)K_4\left(\lambda_1 B(\tau)+\frac{1}{2}B^2(\tau)\right). \quad (3.35)$$

Rovnicu (3.34) teda vieme zapísať ako:

$$-\frac{\partial \bar{P}_2}{\partial \tau}+(\kappa_1(\theta_1-r)-\lambda_1\sigma^2)\frac{\partial \bar{P}_2}{\partial r}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{P}_2}{\partial r^2}-r\bar{P}_2=\mu(\tau)e^{-Br}. \quad (3.36)$$

Vzhľadom na separovaný tvar pravej strany budeme hľadať funkciu $\bar{P}_2$ tiež v separovanom tvare:

$$\bar{P}_2=(R_1(\tau)+rR_2(\tau))e^{-Br}.$$

Po dosadení do rovnice (3.36) a využitím predpisu derivácie funkcie B daným rovnicou (3.18) dostávame diferenciálnu rovnicu:

$$\begin{aligned} &-(R'_1+rR'_2)e^{-Br}+(R_1+rR_2)e^{-Br}B'r+(\kappa_1(\theta_1-r)-\lambda_1\sigma^2)[-B(R_1 \\ &+rR_2)e^{-Br}+R_2e^{-Br}]+\frac{\sigma^2}{2}[B^2(R_1+rR_2)e^{-Br} \\ &-BR_2e^{-Br}-BR_2e^{-Br}]-r(R_1+rR_2)e^{-Br}=\mu(\tau)e^{-Br}. \end{aligned}$$

Túto rovnicu môžeme prenásobiť členom e^{Br} , čím dostaneme:

$$\begin{aligned} &-(R'_1+rR'_2)e^{-Br}+(R_1+rR_2)+(\kappa_1(\theta_1-r)-\lambda_1\sigma^2)[-B(R_1+rR_2)+R_2] \\ &+\frac{\sigma^2}{2}[B^2(R_1+rR_2)-BR_2-BR_2]-r(R_1+rR_2)=\mu(\tau). \end{aligned}$$

Na ľavej strane rovnice máme členy vynásobené koeficientom r^0 , členy vynásobené koeficientom r^1 a členy vynásobené koeficientom r^2 . Zoskupíme teda tieto členy podľa rádu premennej r . Na pravej strane máme len jeden člen, ktorý je vynásobený koeficientom r^0 . Keďže členy pri každom ráde premennej r sa musia rovnať na jednej aj na druhej strane, vyplývajú z toho nasledovné vzťahy:

- pre r^0

$$-R'_1-\kappa_1\theta_1BR_1+\kappa_1\theta_1R_2+\lambda_1\sigma^2BR_1-\lambda_1\sigma^2R_2+\frac{\sigma^2}{2}B^2R_1-\sigma^2BR_2=\mu(\tau)$$

- pre r^1

$$-R'_2+R_1-\kappa_1BR_1-\kappa_1\theta_1BR_2+\kappa_1BR_1-\kappa_1R_2+\lambda_1\sigma^2BR_2+\frac{\sigma^2}{2}B^2R_2-R_1=0$$

- pre r^2

$$R_2-\kappa_1BR_2+\kappa_1BR_2-R_2=0.$$

Tým pádom sme odvodili, že hľadané funkcie R_1 a R_2 musia spĺňať sústavu diferenciálnych rovníc:

$$R_1' = \left(-\kappa_1\theta_1 B - \kappa_1 + \lambda_1\sigma^2 B + \frac{\sigma^2}{2}B^2 \right) R_1 + (\kappa_1\theta_1 - \lambda_1\sigma^2 - \sigma^2 B) R_2 - \mu(\tau), \quad (3.37)$$

$$R_2' = \left(-\kappa_1\theta_1 B - \kappa_1 + \lambda_1\sigma^2 B + \frac{\sigma^2}{2}B^2 \right) R_2. \quad (3.38)$$

Pre jednoduchosť zápisu si zátvorky, ktoré vystupujú pri funkciách R_1 a R_2 na pravej strane označíme pomocnými funkciami:

$$c_1(\tau) = -\kappa_1\theta_1 B + \lambda_1\sigma^2 B + \frac{\sigma^2}{2}B^2,$$

$$c_2(\tau) = \kappa_1\theta_1 - \lambda_1\sigma^2 - \sigma^2 B,$$

$$c_3(\tau) = -\kappa_1\theta_1 B - \kappa_1 + \lambda_1\sigma^2 B + \frac{\sigma^2}{2}B^2.$$

V nasledovnom sa budeme venovať rovniciam (3.39) a (3.38). Keďže druhá spomínaná je v homogénnom tvare a vystupuje v nej len funkcia R_2 môžeme ľahko počítať nasledovné:

$$\frac{R_2'}{R_2} = c_3(\tau),$$

kde konštatujeme triviálne riešenie rovnice v tvare $R_2(\tau) = 0$ pre $\forall \tau$ a hľadáme ďalšie riešenia nasledovne:

$$[\ln(R_2)]' = c_3(\tau),$$

$$R_2 = \alpha e^{\int c_3(\tau) d\tau},$$

kde α je integračná konštanta. Pokiaľ sa vrátíme k podmienke $P_2(0, r, y) = 0$, vďaka tvaru funkcie $\tilde{P}_2(\tau, r, y)$, pričom $\tilde{P}_2(0, r, y) = 0$, ďalej vyplýva podmienka pre $\bar{P}_2(\tau, r)$ v tvare $\bar{P}_2(0, r) = 0$. Z toho ďalej dostávame podmienky pre pomocné funkcie R_1, R_2 : $R_1(0) = 0$ a $R_2(0) = 0$. Aplikovaním tejto podmienky na horeuvedený vzťah dostávame, že riešením rovnice 3.38 je triviálna funkcia $R_2 = 0$. Z toho potom vyplýva, že rovnica (3.37) prejde do jednoduchšieho tvaru:

$$R_1' = c_1(\tau)R_1 - \mu(\tau), \quad (3.39)$$

čo je nehomogénna lineárna diferenciálna rovnica pre R_1 , ktorú môžeme riešiť nasle-

dovným postupom:

$$\begin{aligned}
R_1' - c_1(\tau)R_1 &= -\mu(\tau) \\
(R_1' - c_1(\tau)R_1) e^{-\int_0^\tau c_1(\xi)d\xi} &= (-\mu(\tau)) e^{-\int_0^\tau c_1(\xi)d\xi} \\
\left[R_1 e^{-\int_0^\tau c_1(\xi)d\xi} \right]' &= (-\mu(\tau)) e^{-\int_0^\tau c_1(\xi)d\xi} \\
R_1(\tau) &= \left[\int_0^\tau (-\mu(s)) e^{-\int_0^s c_1(\xi)d\xi} ds + R_1(0) \right] e^{\int_0^\tau c_1(\xi)d\xi}. \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Podme sa teraz venovať integrálu vystupujúcemu vo vyjadrení (3.40) funkcie R_1 odvodenom vyššie:

$$C_1(\tau) = \int_0^\tau c_1(s)ds = \int_0^\tau \left[-\kappa_1\theta_1 B + \lambda_1\sigma^2 B + \frac{\sigma^2}{2}B^2 \right] ds.$$

Keďže platí $B = \frac{1}{\kappa_1} (1 - e^{-\kappa_1\tau})$, ako sme uviedli v (3.17), dostávame integrál:

$$C_1(\tau) = \int_0^\tau c_1(s)ds = \int_0^\tau \left[-\theta_1 (1 - e^{-\kappa_1 s}) + \frac{\lambda_1\sigma^2}{\kappa_1} (1 - e^{-\kappa_1 s}) + \frac{\sigma^2}{2\kappa_1^2} (1 - e^{-\kappa_1 s})^2 \right] ds.$$

Integráciou predošlej rovnice dostávame nasledovný vzťah:

$$C_1(\tau) = \left(-\theta_1 + \frac{\lambda_1\sigma^2}{\kappa_1} + \frac{\sigma^2}{2\kappa_1^2} \right) \tau - \left(\theta_1 - \frac{\lambda_1\sigma^2}{\kappa_1} - \frac{\sigma^2}{\kappa_1^2} \right) \frac{e^{-\kappa_1\tau} - 1}{\kappa_1} - \sigma^2 \frac{e^{-2\kappa_1\tau} - 1}{4\kappa_1^3}. \quad (3.41)$$

Na základe predchádzajúcich výpočtov môžeme hľadanú funkciu $\bar{P}_2$ zapísať ako:

$$\bar{P}_2(\tau, r) = R_1(\tau)e^{-B(\tau)r},$$

kde funkcia $R_1(\tau)$ je v tvare:

$$R_1(\tau) = \left[-\int_0^\tau \mu(s)e^{-C_1(s)}ds + R_1(0) \right] e^{C_1(\tau)}.$$

Ako sme už spomínali vyššie, začiatočná podmienka pre funkciu R_1 je $R_1(0) = 0$, z čoho vyplýva zjednodušený tvar $R_1(\tau)$:

$$R_1(\tau) = \left[-\int_0^\tau \mu(s)e^{-C_1(s)}ds \right] e^{C_1(\tau)}.$$

3.2 Asymptotická metóda malého parametra pri nenulovej korelácii

Táto časť bude opäť zameraná na hľadanie oceňovacej funkcie dlhopisu pre Fong-Vašíčkov model krátkodobej úrokovej miery a opäť ju budeme hľadať pomocou asymptotickej metódy malého parametra a teda sa budeme zaoberať hľadaním funkcie v tvare

3.6. Budeme sa venovať odvádzaniu tvaru funkcie $P_2(t, r, y)$, avšak tentokrát budeme uvažovať nenulovú koreláciu medzi wienerovými procesmi w_1 a w_2 rovnú koeficientu (konštantnému) ρ . Keďže funkcie $P_0(\tau, r)$ a $P_1(\tau, r)$ sme uviedli vo všeobecnom tvare, platnom pre ľubovoľnú hodnotu, nebude potrebné ich prepočítavanie. Pri konštantnej volatilitě nám koeficient L_1 prešiel do zjednodušeného tvaru, no teraz ho budeme používať v pôvodnom tvare:

$$L_1 = -\lambda_2 v y \frac{\partial}{\partial y} + \rho v y \frac{\partial^2}{\partial r \partial y}. \quad (3.42)$$

V dôsledku tejto zmeny bude nutné modifikovať lemu 3.1.2, keďže sme ju používali v tvare odvodenom pre prípad nulovej korelácie. Nasledovná lema bude teda modifikáciou lemy 3.1.2, kde sa zmení posledné tvrdenie o $\langle L_1 \psi \rangle$, ktoré prejde do všeobecnejšieho vyjadrenia.

Lema 3.2.1. *Nech F je funkcia taká, že $F \in C([0, \infty])$ a $\langle F \rangle = 0$. Potom existuje jedinečné (až na integračnú konštantu) riešenie $\psi \in C^2((0, \infty)) \cap C([0, \infty))$ pre nehomogénnu rovnicu:*

$$L_0 \psi = \frac{v^2}{2} F, \quad (3.43)$$

ktorého derivácia je daná ako:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{y g(y)} \int_0^y F(\xi) g(\xi) d\xi. \quad (3.44)$$

Navyše pre ψ platí vzťah:

$$\langle L_1 \psi \rangle = \lambda_2 v \int_0^\infty y F(y) g(y) dy - \rho v \int_0^\infty y \frac{\partial F(y)}{\partial r} g(y) dy. \quad (3.45)$$

Špeciálne platí, že ak ψ je riešenie pre homogénnu rovnicu $L_0 \psi = 0$, potom ψ je konštantná funkcia vzhľadom na premennú y .

DÔKAZ: Dôkaz prvej časti - rovnice (3.43) a derivácie (3.44) je rovnaký ako v prípade dôkazu lemy 3.1.2. Vo vzťahu (3.45) je navyše posledný sčítanec v porovnaní s lemov 3.1.2, teda dôkaz bude trochu rozvinutejší. Vzhľadom k novému tvaru operátora L_1 môžeme $L_1 \psi$ napísať ako:

$$L_1 \psi = -\lambda_2 v y \frac{1}{y g(y)} \int_0^y F(\xi) g(\xi) d\xi + \rho v y \frac{1}{y g(y)} \int_0^y \frac{\partial F(\xi)}{\partial r} g(\xi) d\xi,$$

stredná hodnota čoho je daná ako:

$$\langle L_1 \psi \rangle = - \int_0^\infty \lambda_2 v \int_0^y F(\xi) g(\xi) d\xi dy + \int_0^\infty \rho v \int_0^y \frac{\partial F(\xi)}{\partial r} g(\xi) d\xi dy.$$

Z toho metódou per partes dostávame:

$$\begin{aligned} \langle L_1 \psi \rangle &= \left[-y \int_0^y F(\xi) g(\xi) d\xi \right]_0^\infty + \rho v \left[y \int_0^y \frac{\partial F(\xi)}{\partial r} g(\xi) d\xi \right]_0^\infty + \lambda_2 v \int_0^\infty y F(y) g(y) dy \\ &\quad - \rho v \int_0^\infty y \frac{\partial F(y)}{\partial r} g(y) dy. \end{aligned}$$

Posledné dva sčítance predstavujú žiadaný tvar pravej strany, teda tu nám ostáva ukázať nulovosť prvých dvoch sčítancov. Nulovosťou prvého sčítanca sme sa zaoberali pri dôkaze lemy 3.1.2. Čo sa týka druhého sčítanca, pokiaľ uvažujeme spodnú hranicu, hodnota je nula. Pri vyšetrovaní hornej hranice (limity výrazu pre $y \rightarrow +\infty$) využijeme diferencovateľnosť funkcie F a to, že g nezávisí od r a zapíšeme limitu ako:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y \int_0^y \frac{\partial F(\xi)}{\partial r} g(\xi) d\xi = \lim_{y \rightarrow \infty} y \frac{\partial}{\partial r} \int_0^y F(\xi) g(\xi) d\xi.$$

Ďalej je postup obdobný ako v dôkaze lemy 3.1.2, teda hodnota druhého sčítanca je taktiež nulová. ■

3.2.1 Určenie funkcie P_2

Na začiatok uvedieme vzťah pre deriváciu funkcie P_2 , ktorý sme odvodili už pri neko-relovanom prístupe (3.22), keďže vzťah pre túto deriváciu sa nezmenil:

$$\frac{\partial P_2}{\partial y} = -\frac{2}{v^2} f(\tau) e^{-Br} H(y).$$

Taktiež vzťah pre $L_2 P_1$ (3.25) zostáva v platnosti tak ako bol odvodený vyššie:

$$L_2 P_1 = \frac{\partial P_1}{\partial t} + (\kappa_1 (\theta_1 - r) - \lambda_1 y) \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{y}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} - r P_1.$$

Postup pre tento korelovaný prípad uvedieme v skrátenej podobe, keďže sa oproti predchádzajúcemu líši len v niekoľkých konkrétnych bodoch. V nasledujúcom texte uvedieme vzťahy, ktoré sa zmenia. Prvým z nich bude $L_1 P_2$. Z tvaru operátora L_1 a tvaru derivácie P_2 vyplýva nasledovné:

$$\begin{aligned} L_1 P_2 &= \frac{2\lambda_2}{v} f(\tau) e^{-Br} y H(y) - \frac{2\rho}{v} f(\tau) \frac{\partial}{\partial r} (e^{-Br}) y H(y) \\ &= \frac{2\lambda_2}{v} f(\tau) e^{-Br} y H(y) + \frac{2\rho}{v} f(\tau) B e^{-Br} y H(y) \\ &= (\lambda_2 + \rho B) \frac{2}{v} f(\tau) e^{-Br} y H(y). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Na posledný získaný vzťah ďalej aplikujeme strednú hodnotu podľa limitného rozdelenia y , čím dostávame:

$$-\langle L_1 P_2 \rangle = -(\lambda_2 + \rho B) \frac{2}{v} f(\tau) e^{-Br} \int_0^\infty y H(y) g(y) dy. \quad (3.47)$$

Ďalšie vyjadrenie, ktoré budeme potrebovať kvôli ďalším výpočtom je vyjadrenie pre $\langle -L_1 P_3 \rangle$. Na jeho získanie použijeme rovnicu, ktorá vyplýva z člena rádu $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ z rozvoja (3.7), teda rovnicu:

$$L_0 P_3 + L_1 P_2 + L_2 P_1 = 0.$$

Z tejto rovnice vyplýva, že

$$L_0 P_3 = -L_1 P_2 - L_2 P_1) \frac{2}{v^2} \frac{v^2}{2}.$$

Vďaka leme 3.1.1 platí, že $\langle L_1 P_2 + L_2 P_1 \rangle = 0$, vďaka čomu sú splnené podmienky lemy 3.2.1 (nulová stredná hodnota), ktorú aplikujeme na predchádzajúcu rovnicu, dostaneme $\langle -L_1 P_3 \rangle$ v nasledujúcom tvare:

$$\begin{aligned} \langle L_1 P_3 \rangle &= \frac{2\lambda_2}{v} \int_0^\infty (-L_1 P_2 - L_2 P_1) y g(y) dy - \frac{2\rho_2}{v} \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial r} (-L_1 P_2 - L_2 P_1) \right) y g(y) dy \\ &= \frac{2\lambda_2}{v} \int_0^\infty (-L_1 P_2 - L_2 P_1) y g(y) dy - \frac{2\rho_2}{v} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty (-L_1 P_2 - L_2 P_1) y g(y) dy. \end{aligned}$$

Ďalej využijeme vzťah $L_1 P_2$ v korelovanom prípade odvodenom vyššie (3.46) a vzťah pre $L_2 P_1$, ktorý zostáva v platnosti tak ako bol odvodený v rovnici (3.25) pri nekorelovanom prístupe. Postup výpočtu člena $\langle L_1 P_3 \rangle$ bude presne taký istý, ako sme predviedli pri nekorelovanom prístupe (až na konštanty, ktoré sú výsledkom odvádzania $L_1 P_2$). Preto, keď tento postup a jeho výsledok zachytený v rovnici (3.29) aplikujeme na aktuálny problém, dostávame:

$$\begin{aligned} \langle -L_1 P_3 \rangle &= -\frac{2\lambda_2}{v} \left[\frac{2(\lambda_2 + \rho B)}{v} (K_3 + \sigma^2 K_1) f(\tau) e^{-Br} + D \left(-\lambda_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{2\rho}{v} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{2(\lambda_2 + \rho B)}{v} (K_3 + \sigma^2 K_1) f(\tau) e^{-Br} + D \left(-\lambda_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} \right) \right] \\ &= \left[-\frac{2\lambda_2}{v} + \frac{2\rho}{v} \frac{\partial}{\partial r} \right] \left[\frac{2(\lambda_2 + \rho B)}{v} (K_3 + \sigma^2 K_1) f(\tau) e^{-Br} + D \left(-\lambda_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Ďalší postup ohľadne hľadania funkcie $P_2(\tau, r, y)$ bude obdobný ako v predošlom (nekorelovanom) prístupe. Urobíme dekompozíciu $P_2(\tau, r, y)$ na dve časti, pričom jedna

bude znázorňovať trend respektíve strednú hodnotu $P_2(\tau, r, y)$ a druhá bude akási stochastická časť spôsobujúca vychyľovanie $P_2(\tau, r, y)$ od trendu, teda:

$$P_2(t, r, y) = \bar{P}_2(t, r) + \tilde{P}_2(t, r, y).$$

Pritom budú platiť rovnaké vlastnosti pre obe funkcie a teda aj tvar $\tilde{P}_2(t, r, y)$ bude zodpovedať tomu, ako bol odvodený v nekorelovanom prístupe (3.31) a teda bude platiť:

$$\tilde{P}_2 = -\frac{2}{v^2} f(\tau) e^{-Br} \left[\int_0^y H(\xi) d\xi - K_2 \right],$$

kde K_2 je konštanta, definovaná ako:

$$K_2 = \int_0^\infty g(y) \int_0^y H(\xi) d\xi dy.$$

Vzhľadom na to, že tvar funkcie $\tilde{P}_2$ zostáva nezmenený, ostáva v platnosti aj predpis členu $\langle L_2 \tilde{P}_2 \rangle$, ktorý bol odvodený v nekorelovanom prístupe a je daný rovnicou (3.32). Ďalej sa opäť budeme venovať rovnici (3.12) a teda rovnici:

$$\langle L_0 P_4 \rangle + \langle L_1 P_3 \rangle + \langle L_2 P_2 \rangle = 0.$$

Z tejto rovnice vďaka leme 3.1.1 platí rovnaké vyjadrenie pre $\bar{P}_2(t, r)$ ako pri nekorelovanom prístupe a teda:

$$\langle L_2 \rangle \bar{P}_2 = -\langle L_1 P_3 \rangle - \langle L_2 \tilde{P}_2 \rangle.$$

Člen $\langle L_1 P_3 \rangle$ pre korelovaný prípad sme odvodili vyššie a $\langle L_2 \tilde{P}_2 \rangle$ ostáva nezmenené, dané rovnicou (3.32). Teda použitím rovnakého postupu, ako bol použitý pri nekorelovanom prístupe na odvodenie diferenciálnej rovnice (3.34). Týmto postupom dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu pre $\bar{P}_2(t, r)$:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \bar{P}_2}{\partial \tau} + (\kappa_1(\theta_1 - r) - \lambda_1 \sigma^2) \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{P}_2}{\partial r^2} - r \bar{P}_2 = \\ \left[\frac{2\lambda_2}{v} - \frac{2\rho}{v} \frac{\partial}{\partial r} \right] \left[\frac{2(\lambda_2 + \rho B)}{v} (K_3 + \sigma^2 K_1) f(\tau) e^{-Br} + V \left(-\lambda_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} \right) \right] \\ + \frac{2}{v^2} f K_4 \left(-\lambda_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) (e^{-Br}) \\ = \frac{2\lambda_2}{v} \left[\frac{2(\lambda_2 + \rho B)}{v} (K_3 + \sigma^2 K_1) f + V \left(\lambda_1 B A D + \frac{1}{2} B^2 A D \right) \right] e^{-Br} \\ + \frac{2\rho B}{v} \left[\frac{2(\lambda_2 + \rho B)}{v} (K_3 + \sigma^2 K_1) f + V \left(\lambda_1 B A D + \frac{1}{2} B^2 A D \right) \right] e^{-Br} \\ + \frac{2}{v^2} f K_4 \left(\lambda_1 B + \frac{1}{2} B^2 \right) e^{-Br}, \end{aligned}$$

kde V je označenie pre disperziu limitného rozdelenia stochastického procesu y . Predchádzajúcu rovnicu si môžeme zapísať zjednodušene takto:

$$-\frac{\partial \bar{P}_2}{\partial \tau} + (\kappa_1(\theta_1 - r) - \lambda_1 \sigma^2) \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{P}_2}{\partial r^2} - r \bar{P}_2 = \mu_*(\tau) e^{-Br}, \quad (3.49)$$

kde pomocná funkcia $\mu_*(\tau)$ má tvar:

$$\begin{aligned} \mu_*(\tau) = & \frac{2(\lambda_2 + \rho B)}{v} \left[\frac{2(\lambda_2 + \rho B)}{v} (K_3 + \sigma^2 K_1) f + V \left(\lambda_1 B A D + \frac{1}{2} B^2 A D \right) \right] \\ & + \frac{2}{v^2} f K_4 \left(\lambda_1 B + \frac{1}{2} B^2 \right). \end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že odvodená rovnica pre funkciu $\bar{P}_2$ je takmer identická s rovnicou (3.36) pre $\bar{P}_2$ v nekorelovanom prípade. Jediný rozdiel je len v tvare pravej strany, kde v nekorelovanom prípade máme na pravej strane funkciu $\mu(\tau)$ definovanú rovnicou (3.35) a v korelovanom prípade máme na pravej strane funkciu $\mu_*(\tau)$ definovanú vyššie. Tým pádom môžeme na tomto mieste pokračovať rovnakým postupom, pričom výsledok sa bude líšiť len vo funkcii $\mu(\tau)$. Dostávame nasledujúci tvar funkcie $\bar{P}_2$

$$\bar{P}_2(\tau, r) = R_1(\tau) e^{-B(\tau)r},$$

kde funkcia $R_1(\tau)$ je:

$$R_1(\tau) = \left[\int_0^\tau [-\mu_*(s)] e^{-C_1(s)} ds \right] e^{C_1(\tau)},$$

kde funkcia $C_1(\tau)$ je daná vzťahom (3.41).

3.3 Zhrnutie

Táto kapitola bola zameraná na hľadanie aproximovaného tvaru funkcie ceny dlhopisu $P(t, r, y)$. Na tomto mieste zhrnieme dosiahnuté výsledky. Najskôr znovu uvedieme formuláciu modelu, v ktorej vidieť význam všetkých parametrov. Za predpokladu, že úroková miera sa riadi Fong-Vašíčkovým modelom, daným diferenciálnymi rovnicami:

$$\begin{aligned} dr(t) &= \kappa_1(\theta_1 - r(t))dt + \sqrt{y(t)}dw_1(t), \\ dy(t) &= \kappa_2(\theta_2 - y(t))dt + v\sqrt{y(t)}dw_2(t), \end{aligned}$$

musí funkcia ceny dlhopisu $P(t, r, y)$ spĺňať diferenciálnu rovnicu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + (\kappa_1(\theta_1 - r) - \lambda_1 y) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{y}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{\epsilon}(\theta_2 - y) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \lambda_2 v y \right) \frac{\partial P}{\partial y} \\ + \frac{1}{\epsilon} \frac{v^2 y}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \rho v y \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} - rP = 0, \end{aligned}$$

kde koncová podmienka pre $P(t, r, y)$ je $P(T, r, y) = 1$. Aproximáciu ceny dlhopisu sme hľadali v tvare rozvoja pomocných funkcií $P_i(\tau, r, y)$, pričom $\tau = T - t$ je zostatkový čas do času splatnosti. Pri aproximácii sme sa obmedzili na prvé tri sčítance rozvoja:

$$P(\tau, r, y) \approx P_0(\tau, r) + \sqrt{\epsilon} P_1(\tau, r) + \epsilon P_2(\tau, r, y).$$

Prvé dve pomocné funkcie $P_0(\tau, r)$ a $P_1(\tau, r)$ boli odvodené v [13] a sú taktiež uvedené v kapitole 3.1. Táto práca sa zaoberala funkciou $P_2(\tau, r, y)$ s predpisom:

$$P_2(t, r, y) = \bar{P}_2(t, r) + \tilde{P}_2(t, r, y),$$

kde funkcia $\tilde{P}_2(t, r, y)$ bola odvodená ako:

$$\tilde{P}_2 = -\frac{2}{v^2} f(\tau) e^{-Br} \left[\int_0^y H(\xi) d\xi - K_2 \right],$$

kde K_2 a $H(\xi)$ sú dané:

$$\begin{aligned} K_2 &= \int_0^\infty g(y) \int_0^y H(\xi) d\xi dy, \\ H(\xi) &= \frac{1}{\xi g(\xi)} \int_0^\xi (\eta - \sigma^2) g(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Funkcia $\bar{P}_2(t, r)$ má predpis:

$$\bar{P}_2(\tau, r) = R_1(\tau) e^{-B(\tau)r},$$

kde funkcia $R_1(\tau)$ je v prípade nenulovej korelácie daná vzťahmi:

$$\begin{aligned} R_1(\tau) &= \left[- \int_0^\tau \mu(s) e^{-C_1(s)} ds \right] e^{C_1(\tau)}, \\ C_1(\tau) &= \left(-\theta_1 + \frac{\lambda_1 \sigma^2}{\kappa_1} + \frac{\sigma^2}{2\kappa_1^2} \right) \tau - \left(\theta_1 - \frac{\lambda_1 \sigma^2}{\kappa_1} - \frac{\sigma^2}{\kappa_1^2} \right) \frac{e^{-\kappa_1 \tau} - 1}{\kappa_1} - \sigma^2 \frac{e^{-2\kappa_1 \tau} - 1}{4\kappa_1^3}, \\ \mu(\tau) &= \frac{2\lambda_2}{v} \left[\frac{2\lambda_2}{v} (K_3 + \sigma^2 K_1) f(\tau) + D \left(\lambda_1 B(\tau) A(\tau) D(\tau) + \frac{1}{2} B^2(\tau) A(\tau) D(\tau) \right) \right] \\ &\quad + \frac{2}{v^2} f(\tau) K_4 \left(\lambda_1 B(\tau) + \frac{1}{2} B^2(\tau) \right). \end{aligned}$$

V prípade nenulovej korélačie sa funkcia $\mu(\tau)$ zmení na funkciu $\mu_*(\tau)$:

$$\begin{aligned}\mu_*(\tau) = & \frac{2(\lambda_2 + \rho B)}{v} \left[\frac{2(\lambda_2 + \rho B)}{v} (K_3 + \sigma^2 K_1) f + V \left(\lambda_1 B A D + \frac{1}{2} B^2 A D \right) \right] \\ & + \frac{2}{v^2} f K_4 \left(\lambda_1 B + \frac{1}{2} B^2 \right).\end{aligned}$$

Konštanty K_1, K_3, K_4 sú dané vzťahmi:

$$\begin{aligned}K_1 &= \int_0^\infty \int_0^y (\xi - \sigma^2) g(\xi) d\xi dy, \\ K_3 &= \int_0^\infty y^2 H(y) g(y) dy, \\ K_4 &= \int_0^\infty (y - \sigma^2) g(y) \int_0^y H(\xi) d\xi dy,\end{aligned}$$

kde $g(y)$ predstavuje hustotu limitného rozdelenia stochastického procesu y a funkcia $H(y)$ bola odvodená ako

$$H(y) = \frac{1}{y g(y)} \int_0^y (\xi - \sigma^2) g(\xi) d\xi.$$

Záver

V tejto práci sme sa zaoberali Fong-Vašíčkovým modelom krátkodobej úrokovej miery a hľadaním aproximácie ceny dlhopisu. Na základe bezarbitrážneho princípu sme za predpokladu vytvorenia bezrizikového portfólia odvodili diferenciálnu rovnicu, ktorú musí cena dlhopisu spĺňať. Funkciu ceny dlhopisu sme hľadali v tvare nekonečného rozvoja pomocou pomocných funkcií P_i vzhľadom na parameter ϵ , ktorý vyplynul z preškálovania stochastického procesu volatility. Tento proces bol preškálovaný za predpokladu, že volatilita sa pohybuje v rýchlejšej časovej škále ako samotná úroková miera.

Prvé dva členy nekonečného rozvoja ceny dlhopisu boli odvodené v rámci diplomovej práce Radky Selečéniovej [13]. Cieľom tejto práce bolo preto odvodenie tvaru tretieho člena tohto rozvoja, ktorý závisí od hodnoty volatility. Túto funkciu sme odvodili za predpokladu nulovej korelácie medzi dvomi Wienerovými procesmi vystupujúcimi v diferenciálnych rovniciach, ktorými je definovaný model, ale aj za predpokladu nenulovej korelácie. V tomto prípade závisí cena dlhopisu aj od korelačného koeficientu medzi dvomi Wienerovými procesmi. Získané výsledky sú sumarizované v poslednej kapitole práce.

Predmetom ďalšieho výskumu by mohla byť napríklad numerická analýza integrálu z funkcie $\mu(\tau)$ odvodenej v tejto práci, ako aj konštantám K_1, K_2, K_3, K_4 , od ktorých závisí odvodený tvar funkcie ceny dlhopisu.

Literatúra

- [1] Ahmad, R., Wilmott, P.: *The market price of interest-rate risk: measuring and modelling fear and greed in the fixed-income markets*. Willmot Magazine. p. 64-70, January 2007.
- [2] Aldberg, H.: *Bond pricing in stochastic volatility models*. Department of Mathematics, Uppsala University. 2008.
- [3] Brigo, D., Fabio, M.: *Interest Rate Models – Theory and Practice*. Second Edition. Springer- Berlin Heidelberg. 2006. ISBN 3-540-22149-2.
- [4] Feng, B. J., Fouque, J. P., Kumar, R.: *Small-time asymptotics for fast mean-reverting stochastic volatility models*. The Annals of Applied Probability, vol. 22, No. 4, p. 1541-1575, 2012.
- [5] Fong, H. G., Vacicek, O. A.: *Fixed-income volatility management*. The Journal of Portfolio Management. p. 41-46, 1991.
- [6] Fouque, J. P., Papanicolaou, G., Sircar, K. R.: *Derivatives in financial markets with stochastic volatility*. Cambridge University Press, 2000. ISBN 0-521-79163-4
- [7] Fouque, J. P., Papanicolaou, G., Sircar, K. R.: *Mean-reverting stochastic volatility*. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 3, p. 101-142, 2000.
- [8] Gilbarg, D., Trudinger, N. S.: *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer- Berlin Heidelberg. 2001. ISBN 3-540-41160-7.
- [9] Gutiérrez, R. M. C.: *Modelling the Term Structure of Interest Rates: a Literature Review*. Diploma Thesis. Swedish School of Economics and Business Administration, 2008.

- [10] Kwok, Y. K.: *Mathematical models of financial derivatives*. Second Edition. Springer- Berlin Heidelberg. 2008. ISBN 978-3-540-42288-4.
- [11] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*. Epos. 2005. ISBN 8080576513.
- [12] Selby, M. J. P., Strickland, C.: *Computing the Fong and Vasicek pure discount bond price formula*. The Journal of Fixed Income. p. 78-84, September 1995.
- [13] Selečéniová, R.: *Rýchla časová škála volatility vo Fong-Vašíčkovom modeli*. Diploma Thesis. FMFI UK, 2012.
- [14] Stehlíková, B., Ševčovič, D.: *On the singular limit of solutions to the Cox-Ingersoll-Ross interest rate model with stochastic volatility*. Kybernetika, vol. 45, p. 670-680, 2009.
- [15] Stehlíková, B.: *Mathematical analysis of term structure models*. Dissertation Thesis. FMFI UK, 2008.
- [16] Ševčovič, D., Stehlíková, B., Mikula, K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*. STU, 2009. ISBN 978-80-227-3014-3