

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



RIEŠENIE SPOJITÝCH ÚLOH OPTIMÁLNEHO RIADENIA  
METÓDOU ANALÝZY FÁZOVÝCH PORTRÉTOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**RIEŠENIE SPOJITÝCH ÚLOH OPTIMÁLNEHO RIADENIA  
METÓDOU ANALÝZY FÁZOVÝCH PORTRÉTOV**

**DIPLOMOVÁ PRÁCA**

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie  
Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Vedúci práce: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

- Meno a priezvisko študenta:** Bc. Michaela Dobříková  
**Študijný program:** ekonomicko-finančná matematika a modelovanie  
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský  
**Sekundárny jazyk:** anglický
- Názov:** Riešenie spojitého úloh optimálneho riadenia metódou analýzy fázových portrétov  
*Solution of the continuous optimal control problems by the method of phase portraits analysis*
- Cieľ:** Pri kvalitatívnej analýze spojitého úloh optimálneho riadenia je často výhodné použiť riešenie pomocou fázových portrétov príslušných trajektórií. Tak je tomu napr. pri syntéze optimálneho riadenia pri lineárnych úlohách najrýchlejšieho prechodu, pri riešení úloh so singulárnym riadením, ale aj pri úlohách ekonomického rastu s nekonečným horizontom. Zvyčajne tieto postupy vedú k identifikácii jediného optimálneho riadenia pre každú kombináciu počiatočnej a koncovkej podmienky stavu. Cieľom práce je popísať tieto postupy, ilustrovať na vhodne vybraných úlohách a podrobnejšie analyzovať prípady, kedy jednoznačnosť z portrétov nie je zrejmá, prípadne možno ani neplatí (napr. Ramseyho model s konečným ale dostatočne veľkým konečným časom).
- Vedúci:** doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
**Dátum zadania:** 10.02.2015
- Dátum schválenia:** 11.02.2015  
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

**Pod'akovanie** Touto cestou sa chcem poďakovať svojej vedúcej diplomovej práce doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc. za ochotu, čas, pomoc, odborné rady a cenné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce.

## Abstrakt

DOBŘÍKOVÁ, Michaela: Riešenie spojitéch úloh optimálneho riadenia metódou analýzy fázových portrétov [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, školiteľ: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2016, 64 s.

Práca sa zaoberá kvalitatívnou analýzou úloh optimálneho riadenia pomocou fázového portréту. Táto geometrická metóda sa využíva napríklad pri úlohách, kde z podmienok Pontrjaginovho princípu maxima dostaneme sústavu diferenciálnych rovníc, ktorú nevieme explicitne riešiť. V práci sme sa zamerali na autonómne úlohy s diskontným faktorom, ktorých Hamiltonova funkcia je navyše rýdzokonkávna v riadiacej premennej. Najprv sme zhrnuli základné poznatky o riešení úloh optimálneho riadenia a fázových portrétoch, následne sme odvodili tvar diferenciálnych rovníc a Jakobiho matice pre všeobecne zadanú úlohu v priestore stavovej a riadiacej premennej. Tiež sme sa pozreli na predpoklady, ktorých splnenie vedie k pevnému bodu sedlo, keďže s takýmto pevným bodom sa v ekonomických úlohách často stretávame. Následne sme sa bližšie pozreli na Ramseyho model ekonomického rastu a jednoznačnosť riešení v tomto modeli. Posledná kapitola je venovaná úlohe o optimálnej spotrebe, v ktorej v závislosti od vzťahu medzi úrokovou mierou a diskontným faktorom, môžeme získať rôzne typy pevného bodu.

**Kľúčové slová:** Pontrjaginov princípu maxima, diferenciálne rovnice, fázový portrét, sedlo

## Abstract

DOBŘÍKOVÁ, Michaela: Solution of the continuous optimal control problems by method of phase portraits analysis [Diploma thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2016, 64p.

This thesis deals with qualitative analysis of optimal control problems using the phase portraits. This geometric method is used for example in problems, where system of differential equations we get using Pontryagin's maximum principle cannot be solved explicitly. In this thesis we focus on discounted autonomous optimal control problems with strictly concave Hamiltonian function in the control variable. At first we summarize basic knowledge about solving optimal control problems and phase portraits, then we derive system of differential equations and the form of Jacobian matrix in the state and control variable. We take a look at some assumptions, fulfillment of which leads to the saddle equilibrium point. This type of equilibrium point is quite common in economic models. Later we take a closer look at the Ramsey growth model and the uniqueness of its solutions. The last chapter is about the optimal consumption problem. In this problem, depending on the relationship between the interest rate and the discount factor, we can get different types of equilibrium points.

**Keywords:** Pontryagin's maximum principle, differential equations, phase diagrams, saddle point

# Obsah

Úvod	8
<b>1 Analýza fázového portréту</b>	<b>10</b>
1.1 Okrajová úloha	10
1.2 Fázový portrét	13
1.3 Veta o rovnovážnom bode	15
1.4 Jednoznačnosť riešení pre zvolené $x_0$ , $x_T$ a $T$	15
1.5 Závislosť od počiatočných podmienok	16
<b>2 Úloha s rýdzokónkávnyim Hamiltoniánom</b>	<b>19</b>
2.1 Formulácia úlohy	19
2.2 Analýza v priestore stavovej a adjungovanej premennej	21
2.3 Analýza v priestore stavovej a riadiacej premennej	23
2.4 Príklady úloh s rýdzokónkávnyim Hamiltoniánom v riadiacej premennej	25
2.4.1 Nerlove-Arrow reklamný model	26
2.4.2 Optimálny lov rýb	27
2.4.3 Vidale-Wolfe reklamný model	28
2.4.4 Gouldov model	29
<b>3 Ramseyho model</b>	<b>31</b>
3.1 Ramseyho model ako úloha optimálneho riadenia	31
3.2 Analýza v priestore stavovej a riadiacej premennej	33
3.3 Závislosť $c_0$ od $T$ pri pevnom $k_0$ a $k_T$	40
3.4 Analýza v priestore stavovej a adjungovanej premennej	44
<b>4 Úloha o optimálnej spotrebe</b>	<b>49</b>
4.1 PPM, analytické riešenie a jednoznačnosť riešenia	49
4.2 Analýza fázového portréту	51
4.3 Závislosť počiatočnej spotreby a koncového času	57
<b>Záver</b>	<b>61</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>63</b>

## Úvod

Pri riešení spojitéch úloh optimálneho riadenia sa môže stať, že diferenciálne rovnice, ktoré dostaneme použitím Pontrjaginovho princípu maxima, sa nedajú analyticky riešiť. Prípadne chceme analyzovať úlohu, v ktorej vystupujú len všeobecné funkcie, o ktorých predpokladáme, že majú určité vlastnosti. V takomto prípade môže pomôcť analýza fázového portréту, geometrická metóda, pri ktorej môžeme pomocou fázového portréту odhadnúť riešenie systému diferenciálnych rovníc a jeho vlastnosti.

Táto metóda má však niekoľko obmedzení. Aby sme mohli fázový portrét vykresliť v rovine, potrebujeme, aby boli stavová i riadiaca premenná jednorozmerné. Taktiež je dôležité, aby bola úloha autonómna. Pre neautonómne úlohy sa totiž fázový portrét mení spolu s časom  $t$ . Špeciálnym prípadom neautonómnych úloh, ktoré možno riešiť pomocou analýzy fázového portréту, sú úlohy, v ktorých jedinou neautonómnosť predstavuje diskontný faktor (tzv. autonómne úlohy s diskontným faktorom).

Všeobecne je analýza fázového portréту popísaná na niekoľkých stranách napríklad v [11]. Konkrétne aplikácie tejto metódy môžeme nájsť napríklad v [5]. Kvalitatívna analýza pomocou fázového portrétu je tu využitá pri riešení Solowovho modelu so singulárnym riadením, pri syntéze optimálneho riadenia pri lineárnej úlohe najrýchlejšieho prechodu, ale aj pri riešení Ramseyho modelu ekonomického rastu. Zároveň tu nájdeme aj všeobecnejší pohľad na riešenie autonómnej úlohy s diskontným faktorom v priestore stavovej a adjungovanej premennej. Ďalšie aplikácie možno nájsť v [13], kde sú okrem Ramseyho modelu riešené aj reklamné modely (Nerlove-Arrow advertising model, Vidale-Wolfe advertising model) či model o optimálnom riadení znečisťovania (A pollution Control model). Ďalšou aplikáciou, s ktorou sme sa stretli je úloha o optimálnej úrovni korupcie, ktorej je venovaný článok [3]. V tomto článku sa zároveň stretneme s tzv. Skiba bodom. Ide o špeciálny bod v úlohách s viacerými pevnými bodmi. Začínajúc v tomto bode získame rôzne riešenia s rovnakou hodnotou účelovej funkcie [2]. Zaujímavým rozšírením je tiež [15], kde sa v Ramseyho modeli namiesto konkávnej produkčnej funkcie uvažuje konvexno-konkávna funkcia.

V tejto práci sa bližšie pozrieme na kvalitatívnu analýzu Ramseyho modelu rastu najmä v priestore stavovej a riadiacej premennej. Tomuto modelu je venovaná napríklad aj diplomová práca [6], riešenie pomocou fázového portrétu nájdeme v [5], [14]



a [13]. Tento model spĺňa podmienku o rýdzokonkávnosti Hamiltonovej funkcie v riadiacej premennej, ktorú spĺňajú aj ďalšie ekonomické modely, výhodné tak môže byť odvodenie diferenciálnych rovníc a Jakobiho matice pre všeobecnú úlohu spĺňajúcu takúto podmienku. Pomocou Jakobiho matice potom možno určiť o aký typ pevného bodu ide a kedy ide o pevný bod typu sedlo, s ktorým sa v ekonomických úlohách často stretávame. Vyvodenie takýchto rovníc vo všeobecnosti v priestore stavovej a riadiacej premennej a analýza vlastností príslušného rovnovážneho stavu sú cieľom tejto práce.

Pri Ramseyho modeli nás zaujala ešte jedna vec, z fázového portréту v [5] vidíme, že rovnaké okrajové podmienky spĺňajú viaceré trajektórie. My by sme sa chceli bližšie pozrieť na to, ako je to s jednoznačnosťou riešenia, ak pridáme podmienku na hodnotu koncového času. V tejto súvislosti je naším ďalším cieľom popísať postupy pri fázovej analýze a podrobnejšie analyzovať prípady, kedy jednoznačnosť z portrétov nie je zrejmá.

Keďže trieda úloh, ktoré možno riešiť pomocou analýzy fázového portrétu je celkom široká, rozhodli sme sa v tejto práci zamerať na autonómne úlohy s diskontným faktorom, ktorých Hamiltonova funkcia je rýdzokonkávna v riadiacej premennej. Práca je rozdelená na štyri kapitoly. Prvá bude venovaná podmienkam Pontrjaginovho princípu maxima a spôsobu ako z týchto podmienok odvodiť systém diferenciálnych rovníc, buď v priestore stavovej a riadiacej premennej, alebo v priestore stavovej a adjungovanej premennej. V druhej časti tejto kapitoly zhrnieme základné poznatky, ktoré potrebujeme k analýze fázového portrétu. V druhej kapitole sa pokúsime o všeobecnejší pohľad na riešenie úloh s rýdzokonkávnyim Hamiltoniánom v priestore stavovej a riadiacej premennej. Celá tretia kapitola bude venovaná Ramseyho modelu rastu. Pozrieme sa na riešenia, ktoré vyhovujú rôznym okrajovým podmienkam, ale aj na závislosť koncového času a počiatočnej spotreby. Posledná kapitola bude venovaná úlohe o optimálnej spotrebe, ktorá je špeciálnym prípadom Ramseyho modelu.

# 1 Analýza fázového portréту

V tejto kapitole, ktorá je spracovaná najmä pomocou [5] a [11], ale napríklad aj [8], sa venujeme tomu, ako z nutných podmienok optimality pre úlohu optimálneho riadenia získame systém diferenciálnych rovníc a ako tento možno riešiť pomocou fázového portréту. Keďže fázové portréty nám pri viacrozmerných úlohách veľmi nepomôžu, budeme sa v tejto práci zaoberať úlohami s jednorozmernou stavovou a jednorozmernou riadiacou premennou.

## 1.1 Okrajová úloha

Uvažujme úlohu optimálneho riadenia s pevným časom:

$$\max \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt, \quad (1.1)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1.2)$$

$$x(0) = x_0, \quad (1.3)$$

$$u(t) \in U, \quad (1.4)$$

$$x(T) \in C = \{x | g(x) = 0\}, \quad (1.5)$$

kde stavová premenná  $x$  aj riadiaca premenná  $u$  sú jednorozmerné a funkcie  $f, f^0, g \in C^1$ .

Pre takúto úlohu má Hamiltonova funkcia tvar:

$$H(t, x, u, \psi, \psi^0) = \psi^0 f^0(t, x, u) + \psi f(t, x, u). \quad (1.6)$$

Podľa Pontrjaginovho princípu maxima [5] optimálne riadenie  $\hat{u}(t)$  a jeho odozva  $\hat{x}(t)$  spolu s riešením  $\psi(t)$  adjungovanej rovnice:

$$\dot{\psi}(t) = -\psi^0 \frac{\partial f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} - \psi(t) \frac{\partial f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \quad (1.7)$$

a podmienky tranzverzality

$$\psi(\hat{T}) = \frac{\partial g(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x} \chi$$

spĺňajú podmienku maxima:

$$H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \psi^0) = \max_{u \in U} H(t, \hat{x}(t), u(t), \psi(t), \psi^0), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.8)$$

Ak je možné z podmienky maxima vyjadriť riadiacu premennú  $u$  ako funkciu premenných  $t, x$  a  $\psi$ , tzn.  $u = v(t, x, \psi)$ , po dosadení do stavovej a adjungovanej rovnice dostaneme neautonómnu sústavu dvoch diferenciálnych rovníc:

$$\dot{\psi}(t) = -\psi^0 \frac{\partial f^0(t, x(t), v(t, x, \psi))}{\partial x} - \psi(t) \frac{\partial f(t, x(t), v(t, x, \psi))}{\partial x}, \quad (1.9)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), v(t, x, \psi)). \quad (1.10)$$

Naviac máme počiatočnú podmienku  $x(0) = x_0$ , jednu podmienku tvaru  $g(x(T)) = 0$  a podmienku tranzverzality, ktorá však dáva ešte jednu neznámu. V skutočnosti tak dostaneme sústavu dvoch neautonómnych diferenciálnych rovníc o dvoch neznámych s dvoma okrajovými podmienkami. Ich riešením dostaneme kandidáta na optimálne riešenie a následne dosadením  $x(t)$  do vzťahu  $u = v(t, x, \psi)$  aj kandidáta na optimálne riadenie.

Hlavne z interpretačných dôvodov môže byť niekedy lepšie pracovať v priestore stavovej a riadiacej premennej. To je možné, ak z podmienky maxima (1.8) vieme explicitne vyjadriť adjungovanú premennú  $\psi$  ako funkciu premenných  $t, x$  a  $u$ , tzn.  $\psi = w(t, x, u)$ . Ak sa naviac dá funkcia  $w$  totálne derivovať podľa nezávislej premennej  $t$ , pričom vieme explicitne vyjadriť aj  $\dot{\psi}$  ako funkciu  $u, t$  a  $x$ , môžeme dosadiť do (1.7) za  $\psi$  aj  $\dot{\psi}$ , čím dostaneme sústavu dvoch neautonómnych diferenciálnych rovníc o dvoch neznámych, tentokrát však v priestore stavovej a riadiacej premennej.

V oboch týchto prípadoch možno úlohu riešiť numericky, keďže však dostaneme vo všeobecnosti neautonómnu sústavu, riešenie pomocou fázového portréту v priestore  $(x, \psi)$ , resp.  $(x, u)$  nie je možné. Na takúto analýzu potrebujeme, aby bola sústava autonómna. Takúto dostaneme pre autonómnu úlohu, kde účelová funkcia a stavová rovnica priamo nezávisia od premennej  $t$ .

Špeciálnym prípadom neautonómnych úloh, pre ktoré možno spraviť kvalitatívnu

analýzu, sú tzv. autonómne úlohy s diskontným faktorom, ktoré majú tvar:

$$\max \int_0^T e^{-rt} f^0(x(t), u(t)) dt, \quad (1.11)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1.12)$$

$$x(0) = x_0, \quad (1.13)$$

$$u(t) \in U, \quad (1.14)$$

$$g(x(T)) = 0. \quad (1.15)$$

V tejto úlohe jediná neautonómnosť predstavuje diskontný faktor  $e^{-rt}$ . Ak pre takúto úlohu zavedieme transformáciu  $\tilde{\psi} = e^{rt}\psi$ ,  $\tilde{\psi}^0 = \psi^0$  a  $\tilde{H} = e^{rt}H$ , potom platí nasledovná veta :

**Veta 1.1.** ([5], kapitola 7) *Nech  $\hat{u}(t)$ ,  $t \in [0, \hat{T}]$  je optimálne riadenie a  $\hat{x}(t)$  je jeho odozva pre úlohu (1.11)-(1.15). Potom existujú také konštanty  $(\tilde{\psi}^0, \tilde{\chi}) \neq 0$ ,  $\tilde{\psi}^0 \geq 0$ ,  $\tilde{\chi} \in R$ , že  $\tilde{\psi}(t)$  riešenie adjungovanej rovnice*

$$\dot{\tilde{\psi}}(t) = r\tilde{\psi}(t) - \tilde{\psi}^0 \frac{\partial f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} - \frac{\partial f(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \tilde{\psi}(t) \quad (1.16)$$

a podmienky tranzverzality

$$\tilde{\psi}(\hat{T}) = \frac{\partial g(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x} \tilde{\chi} \quad (1.17)$$

spĺňa spolu s  $\hat{u}(t)$  a  $\hat{x}(t)$  podmienku maxima

$$\tilde{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}(t)) = \max_{u \in U} \tilde{H}(\hat{x}(t), u(t), \tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}(t)) \quad \forall t \in [0, \hat{T}] \quad (1.18)$$

a ak je úloha s voľným časom, tak aj podmienku stacionarity

$$\tilde{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}(t)) \equiv 0. \quad (1.19)$$

Príkladom autonómnej úlohy s diskontným faktorom je aj Ramseyho model rastu, ktorým sa budeme zaoberať neskôr. Aplikáciou podmienok z predošlej vety získame sústavu diferenciálnych rovníc, ktorú budeme riešiť.

Je dôležité poznamenať, že podmienky Pontrjaginovho princípu maxima sú len nutnými podmienkami optimality, ktorých riešením získame len kandidáta na riešenie. Za určitých dodatočných podmienok, ktoré sú sformulované v nasledujúcej vete, budú aj postačujúcimi podmienkami. Vetu sme sformulovali pre úlohu tvaru (1.1)-(1.5).

**Veta 1.2.** (PPM ako postačujúca podmienka maxima, [5], Veta 13.2)

Nech  $\hat{u}(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  sú prípustné pre úlohu (1.1)-(1.5) s pevným časom a nech spolu s  $\psi^0 = 1$  a  $\psi(t)$  spĺňajú podmienky PPM. Nech pre každé  $\psi$  je funkcia

$$H^0(t, x, \psi) = \max_{u \in U} H(t, x, u, \psi) \quad (1.20)$$

konkávna v premennej  $x$  a nech funkcia  $g(x)$  je lineárna, tzn.  $g(x) = Gx + \gamma$ . Potom  $\hat{u}(t)$  je optimálne riadenie. Navyše, ak  $H^0$  je rýdzokonkávna, tak  $\hat{u}$  je jediné optimálne riadenie.

*Poznámka:* ([5]) Predpoklad Vety o konkávnosti  $H^0$  je splnený, ak  $H(t, x, u, \psi)$  je konkávna v  $(x, u)$  a  $U$  je konvexná.

## 1.2 Fázový portrét

Využitím Pontrjaginovho princípu maxima sme získali sústavu diferenciálnych rovníc (1.9) a (1.10). Táto vo všeobecnosti nemusí mať explicitné riešenie, pričom pri riešení môže pomôcť analýza fázového portréту. V tejto podkapitole, ktorá je spracovaná najmä pomocou [11] a [8], sa venujeme konštrukcii fázového portréту vo všeobecnosti.

Uvažujme sústavu dvoch diferenciálnych rovníc o dvoch neznámych

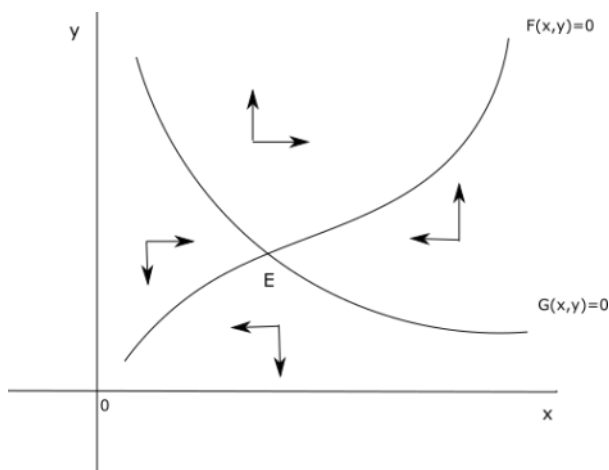
$$\dot{x} = F(x, y), \quad (1.21)$$

$$\dot{y} = G(x, y), \quad (1.22)$$

$F, G$  sú  $C^1$  spojité funkcie. Táto sústava je autonómna, keďže  $\dot{x}$  a  $\dot{y}$  nezávisia priamo od nezávislej premennej  $t$ . Pri kreslení fázového portréту najprv vykreslíme izoklíny, krivky, pre ktoré platí  $F(x, y) = 0$  resp.  $G(x, y) = 0$ . V prvom prípade ide o krivku, kde  $\dot{x} = 0$  a teda v žiadnom bode na tejto krivke sa nemení premenná  $x$ , podobne v druhom prípade sa nemení premenná  $y$ . Prienikom týchto dvoch kriviek je bod  $E = (\bar{x}, \bar{y})$ , ktorý sa nazýva ekvilibrium alebo aj pevný bod. Ide o bod, v ktorom sa nemení ani premenná  $x$ , ani premenná  $y$ . Navyše je tento bod aj riešením sústavy rovníc (1.21), (1.22).

Izoklíny rozdelia fázovú rovinu na oblasti (izosektory), v ktorých vieme o každej premennej, či rastie alebo klesá s časom. Uvažujme prípad  $F(x, y) > 0$  nad izoklínou  $\dot{x} = 0$  a  $F(x, y) < 0$  pod touto krivkou. Podobne uvažujme  $G(x, y) > 0$  nad krivkou  $\dot{y} = 0$  a  $G(x, y) < 0$  pod touto krivkou. Potom môžeme fázový portrét rozdeliť na štyri

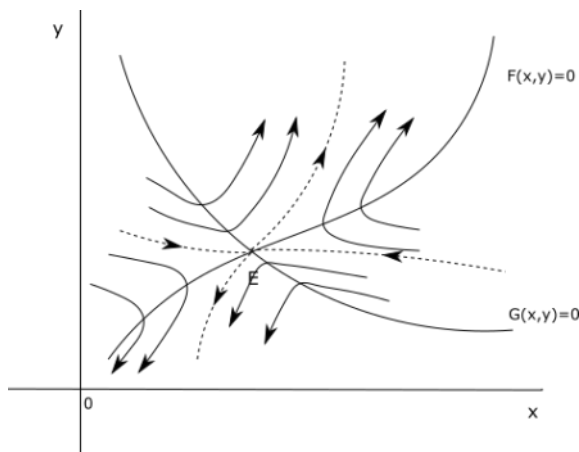
oblasti. Tieto sa líšia správaním premenných  $x$  a  $y$ , pričom  $\dot{x}, \dot{y}$  menia znamienko len vtedy, keď prechádzajú izoklínami. Uvažujme oblasť kde  $F(x, y) > 0$  a  $G(x, y) > 0$ . Integrálna krivka prechádzajúca bodom v tejto oblasti je rastúca v oboch premenných. Rastúcosť/ klesajúcosť integrálnych kriviek je naznačená v Obr.1 šípkami.



**Obr. 1:** Izosektory pre systém (1.21)-(1.22)

Keďže optimálne trajektórie musia spĺňať diferenciálne rovnice, musia spĺňať i smery naznačené šípkami. Navyiac vieme určiť aj sklon trajektórií na izoklínach. Keďže sklon krivky je daný ako  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ , tak pre krivky, kde  $\dot{y} = 0$ , je sklon trajektórie nulový, zatiaľ čo pre  $\dot{x} = 0$ , je sklon nekonečno.

Ak do fázového portétu zakreslíme ešte aj niektoré integrálne krivky, dostaneme Obr. 2, v ktorom šípky znázorňujú smer pohybu s časom.



**Obr. 2:** Všeobecné riešenie pre systém (1.21)-(1.22)

### 1.3 Veta o rovnovážnom bode

Všeobecným riešením sústavy diferenciálnych rovníc je trieda trajektórií. Vidíme, že na Obr. 2 niektoré konvergujú k pevnému bodu  $E$ , zatiaľ čo niektoré divergujú preč od tohto bodu. Táto situácia často nastáva v ekonomických úlohách, kde je pevný bod typu sedlo. Presný typ pevného bodu však určíme až na základe vlastných čísel Jakobiho matice vyčíslenej v pevnom bode, ktorá má nasledujúci tvar:

$$\begin{bmatrix} F_x(\bar{x}, \bar{y}) & F_y(\bar{x}, \bar{y}) \\ G_x(\bar{x}, \bar{y}) & G_y(\bar{x}, \bar{y}) \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$

kde  $F_i(\bar{x}, \bar{y})$ , resp.  $G_i(\bar{x}, \bar{y})$  predstavuje parciálnu deriváciu funkcie podľa zložky vektora  $(x, y)$  vyčíslení v pevnom bode  $\bar{x}, \bar{y}$ .

Pre pevný bod typu sedlo platí pre jeho malé okolie nasledujúca veta:

**Veta 1.3.** ([11], str.253) *Uvažujme systém rovníc (1.21) a (1.22) a predpokladajme, že  $F$  a  $G$  sú  $C^1$  na okolí pevného bodu  $E = (\bar{x}, \bar{y})$ . Ďalej predpokladajme, že vlastné čísla matice (1.23) sú reálne a majú rôzne znamienka alebo ekvivalentne*

$$(F_x - G_y)^2 + 4F_yG_x > 0 \quad (1.24)$$

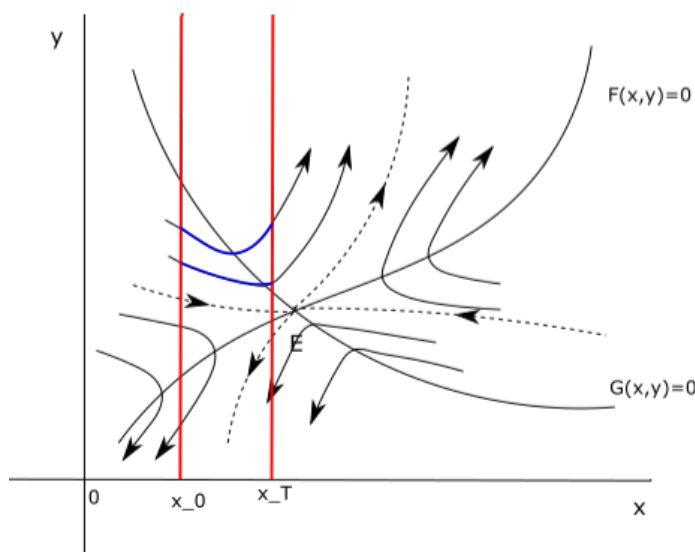
a

$$F_xG_y - F_yG_x < 0, \quad (1.25)$$

príčom všetky parciálne derivácie sú vyčíslené v bode  $E = (\bar{x}, \bar{y})$ . Potom existujú práve dve riešenia  $(x_1(t), y_1(t))$  a  $(x_2(t), y_2(t))$  na nejakom intervale  $[t_0, \infty]$ , ktoré konvergujú k bodu  $E = (\bar{x}, \bar{y})$ . Tieto riešenia konvergujú k bodu  $E$  z opačných smerov a obe sú dotyčnicami k priamke prechádzajúcej cez bod  $E$ , ktorá má rovnaký smer ako vlastný vektor zodpovedajúci zápornému vlastnému číslu. Takýto pevný bod sa nazýva sedlový bod.

### 1.4 Jednoznačnosť riešení pre zvolené $x_0$ , $x_T$ a $T$

Všeobecným riešením systému diferenciálnych rovníc sú trajektórie zobrazené na Obr.2. Pre určenie optimálneho riešenia použijeme okrajové podmienky. Uvažujme počiatočnú podmienku pre  $x_0$  a koncovú podmienku pre  $x_T$  zobrazené na Obr. 3.



**Obr. 3:** Riešenia sústavy (1.21)-(1.22) pre  $x_0 < x_T < \bar{x}$

Zaujímavými sú pre nás všetky trajektórie, ktoré prechádzajú bodom  $x_0$  a s časom prejdú aj bodom  $x_T$ . Vidíme, že daným okrajovým podmienkam môže vyhovovať viacero trajektórií, každej však môže trvať prechod od  $x_0$  do  $x_T$  iný čas  $T$ . Ak sú navyše splnené podmienky Vety 1.2 s rýdzokónkávnym Hamiltoniánom, tak vieme, že pre jednu hodnotu času  $T$  existuje práve jedna trajektória spĺňajúca okrajové podmienky  $x_0$  a  $x_T$ . Ak by totiž takýchto trajektórií bolo viac, existovalo by viac optimálnych riešení a to by bol spor s Vetou 1.2.

## 1.5 Závislosť od počiatočných podmienok

Neskôr pri analýze závislosti počiatočnej spotreby  $c_0$  a koncového času  $T$  využijeme nasledujúcu vetu, ktorú tu sformulujeme aj dokážeme.

**Veta 1.4.** *Uvažujme systém rovníc (1.21)-(1.22). Nech pre parciálnu deriváciu funkcie  $F$  podľa premennej  $y$  platí  $F_y < 0$  a pre parciálnu deriváciu funkcie  $G$  podľa premennej  $x$  platí  $G_x < 0$  pre všetky  $x, y$ . Potom pre parciálnu deriváciu premennej  $x$  podľa počiatočnej podmienky  $y_0$  platí  $\frac{\partial x(t, x_0, y_0)}{\partial y_0} < 0$ .*

**Dôkaz:**

Ide o deriváciu riešenia podľa počiatočnej podmienky. Derivácie podľa počiatočných podmienok za určitých predpokladov spĺňajú tzv. rovnicu vo variáciách ([4]), ktorá má



tvar

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial y_0} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial y_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

Označme  $z_1 = \frac{\partial x}{\partial y_0}$  a  $z_2 = \frac{\partial y}{\partial y_0}$ , budeme riešiť rovnicu

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad (1.27)$$

pričom máme počiatočné podmienky  $z_1(t_0) = \frac{\partial x}{\partial y_0}(t_0) = 0$  a  $z_2(t_0) = \frac{\partial y}{\partial y_0}(t_0) = 1$ .

Zo spojitosti funkcií máme, keďže  $z_2(t_0) = 1$ , tak v okolí  $t_0$  je  $z_2$  určite kladné. Pre  $\dot{z}_1(t_0)$  máme rovnicu

$$\dot{z}_1(t_0) = F_x \cdot 0 + 1 \cdot F_y = F_y < 0, \quad (1.28)$$

vzhľadom na predpoklady vety.

Vidíme, že  $z_1(t)$  klesá v okolí bodu  $t_0$  a keďže  $z_1(t_0) = 0$ , tak  $z_1(t)$  je záporné na pravom okolí bodu  $t_0$ . V pravom okolí  $t_0$  teda máme  $z_1(t) < 0$  a  $z_2(t) > 0$ . Chceme dokázať, že tak tomu je pre všetky  $t \in [t_0, \infty]$ .

Využijeme dôkaz sporom. Nech existuje konečné  $\tau = \sup \{t \mid z_1(t) < 0, z_2(t) > 0\}$ . Zo spojitosti funkcií  $z_1(t)$  a  $z_2(t)$  vyplýva, že môžu nastať tieto tri možnosti:

(a)  $z_1(\tau) = 0, z_2(\tau) = 0$

(b)  $z_1(\tau) < 0, z_2(\tau) = 0$

(c)  $z_1(\tau) = 0, z_2(\tau) > 0$

Možnosť (a) možno vylúčiť, lebo máme lineárny systém a keby platilo  $z_1(\tau) = 0$ ,  $z_2(\tau) = 0$ , tak  $z_1(t) = 0$ ,  $z_2(t) = 0$  pre  $\forall t$ , čo je spor s  $z_2(t_0) = 1$ .

Ak by nastala možnosť (b), tak by v bode  $\tau$  muselo platiť, že  $\dot{z}_2(\tau) \leq 0$ , lebo v ľavom okolí  $\tau$  je  $z_2(t) > 0$  a v bode  $\tau$  je  $z_2(\tau) = 0$ . Zároveň by však z  $z_1(\tau) < 0, z_2(\tau) = 0$ , predpokladov vety a rovnice (1.27) platilo

$$\dot{z}_2(\tau) = G_x z_1(\tau) > 0, \quad (1.29)$$

a teda možnosť (b) nemôže nastať.

Podobne, ak by mala nastať možnosť (c), tak by malo v bode  $\tau$  platiť, že  $\dot{z}_1(\tau) \geq 0$ , lebo v ľavom okolí  $\tau$  je  $z_1(t) < 0$  a v bode  $\tau$  je  $z_1(\tau) = 0$ . Keďže však z (1.27) a predpokladov vety pre  $z_1(\tau) = 0, z_2(\tau) > 0$  zároveň platí

$$\dot{z}_1(\tau) = F_y z_2(\tau) < 0, \tag{1.30}$$

tak nemôže nastať ani možnosť (c). Prišli sme k sporu a teda platí  $z_1(t) < 0$  a  $z_2(t) > 0$   $\forall t \in [t_0, \infty]$ . □

## 2 Úloha s rýdzokonkávnym Hamiltoniánom

V tejto kapitole sa budeme venovať úlohám optimálneho riadenia s rýdzokonkávnym Hamiltoniánom v riadiacej premennej  $u$ . Navyiac budeme uvažovať autonómnu úlohu s diskontným faktorom, keďže takýto tvar úloh sa často vyskytuje v ekonomických modeloch. Pre takúto úlohu odvodíme z podmienok Pontrjaginovho princípu maxima systém dvoch diferenciálnych rovníc, ktorých riešením sú kandidáti na optimálne riešenie. Ako sme spomenuli v časti 1.1, je možné to urobiť dvomi spôsobmi. Pre každý spôsob budeme ďalej analyzovať príslušnú Jakobiho maticu v pevnom bode a vyvodíme predpoklady sformulované v dátach úlohy, ktoré zabezpečia sedlovosť pevného bodu.

### 2.1 Formulácia úlohy

Uvažujme úlohu optimálneho riadenia na konečnom časovom horizonte, ktorá má tvar

$$\max \int_0^T e^{-rt} f^0(x, u) dt, \quad (2.1)$$

$$\dot{x}(t) = f(x, u) \quad t \in [0, T], \quad (2.2)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2.3)$$

$$x(T) = x_T, \quad (2.4)$$

pričom stavová premenná  $x$  aj riadiaca premenná  $u$  sú jednorozmerné a  $x_0, x_T, r$  a  $T$  sú dané konštanty. Funkcia  $f^0$  v účelovej funkcii a funkcia  $f$  zo stavovej rovnice sú  $C^2$  spojité funkcie.

Hamiltonova funkcia (1.6) má podľa Vety 1.1 pre úlohu (2.1)-(2.4) tvar

$$\tilde{H}(x, u, \psi) = \tilde{\psi}^0 f^0(x, u) + \tilde{\psi} f(x, u), \quad (2.5)$$

pričom budeme predpokladať, že platí  $\tilde{\psi}^0 = 1$ . Toto určite platí napríklad pre úlohu s voľným koncom alebo v prípade, že je stavová rovnica lineárna v  $u$  pre všetky  $x$  a  $\psi$  a nemáme ohraničenia na  $u$ .

V ďalšom budeme pre jednoduchosť pre parciálne derivácie podľa príslušnej premennej používať označenie dolným indexom a vynecháme vlnovku nad Hamiltonovou funkciou a adjungovanou premennou.

Z predpokladu rýdzokonkávnosti v premennej  $u$  pre Hamiltonovu funkciu platí

$$H_{uu}(x, u, \psi) = f_{uu}^0(x, u) + \psi f_{uu}(x, u) < 0. \quad (2.6)$$

Tento predpoklad je pre  $\psi > 0$  určite splnený, ak napríklad platí

$$f_{uu}^0(x, u) < 0 \text{ a } f_{uu}(x, u) \leq 0 \quad \forall x, u. \quad (2.7)$$

Z podmienky maxima (1.18) aplikovaním nutnej podmienky optimality musí optimálne riešenie spĺňať rovnicu

$$H_u(x, u, \psi) = f_u^0(x, u) + \psi f_u(x, u) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.8)$$

Z rovnice (2.8) vieme vyjadriť adjungovanú premennú  $\psi$ , od ktorej požadujeme aby bola kladná:

$$\psi = -\frac{f_u^0}{f_u} > 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.9)$$

Aby bola adjungovaná premenná vždy definovaná, budeme predpokladať, že  $f_u \neq 0$ . Pre parciálnu deriváciu  $f_u$  funkcie  $f$  zo stavovej rovnice teda platí, že je buď vždy kladná alebo vždy záporná. Splnenie predpokladu (2.9) zabezpečíme tak, že budeme žiadať aby platilo buď

$$f_u^0(x, u) < 0, \quad f_u(x, u) > 0 \quad (2.10)$$

alebo

$$f_u^0(x, u) > 0, \quad f_u(x, u) < 0, \quad (2.11)$$

pričom tento predpoklad môžeme jednoduchšie zapísať ako

$$f_u^0(x, u)f_u(x, u) < 0. \quad (2.12)$$

Podľa tohto predpokladu, ak účelová funkcia rastie s rastúcou riadiacou premennou, tak stavová premenná klesá a naopak ak účelová funkcia klesá s rastúcou riadiacou premennou, tak stavová premenná rastie.

V ďalšom máme dve možnosti ako pokračovať. Jednou je riešenie úlohy v priestore stavovej a adjungovanej premennej. Keďže predpokladáme, že Hamiltonova funkcia je rýdzokonkávna v premennej  $u$ , tak jej parciálna derivácia  $H_u$  je rastúcou funkciou v  $u$ . Vďaka tomu môžeme riadiacu premennú  $u$  z (2.8) vyjadriť ako funkciu premenných  $x$  a  $\psi$ , tzn.  $u = u(x, \psi)$  a máme

$$H_u(x, u(x, \psi), \psi) = 0. \quad (2.13)$$

Dosadením za  $u$  do adjungovanej rovnice (1.16) táto spolu so stavovou rovnicou tvoria systém diferenciálnych rovníc v premenných  $x$  a  $\psi$

$$\dot{x} = f(x, u(x, \psi)), \quad (2.14)$$

$$\dot{\psi} = r\psi - H_x(x, u(x, \psi), \psi). \quad (2.15)$$

Druhou možnosťou je riešiť úlohu v priestore stavovej a riadiacej premennej. Keďže rovnica (2.8) má platiť pre všetky  $t$ , tak jej totálnou deriváciou dostaneme vzťah

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H_u(x, u, \psi) &= f_{uu}^0\dot{u} + f_{ux}^0\dot{x} + \dot{\psi}f_u + \psi(f_{uu}\dot{u} + f_{ux}\dot{x}) \\ &= H_{xu}\dot{x} + H_{uu}\dot{u} + f_u\dot{\psi} = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

z ktorého vieme vyjadriť  $\dot{u}$  ako

$$\dot{u} = \frac{-H_{xu}\dot{x} - f_u\dot{\psi}}{H_{uu}} = \frac{-H_{xu}f - f_u((r - f_x)\psi - f_x^0)}{H_{uu}}, \quad (2.17)$$

pričom sme v druhej rovnosti dosadili vzťah (1.16). Keďže aj  $\psi$  vieme podľa (2.9) vyjadriť ako funkciu premenných  $x, u$ , tak rovnica (2.17) spolu so stavovou rovnicou (2.2) dávajú sústavu dvoch diferenciálnych rovníc o dvoch neznámych, ktorú môžeme analyzovať v priestore stavovej a riadiacej premennej. Rovnicu pre  $\dot{u}$  však ponecháme v tvare (2.17), pretože sa nám s ňou tak bude v ďalšom lepšie pracovať. Pri derivovaní však využijeme skutočnosť, že sme adjungovanú premennú  $\psi$  vyjadrili ako funkciu stavovej premennej  $x$  a riadiacej premennej  $u$ .

Použitie predpoklady a získané vzťahy teraz zhrnieme do nasledujúcej vety:

**Veta 2.1.** *Ak úloha (2.1)-(2.4) spĺňa (2.7) a (2.12), potom riešenia nutných podmienok optimality s  $\psi^0 = 1$  spĺňajú systém (2.14) a (2.15), kde  $u(x, \psi)$  je riešením (2.13) a taktiež spĺňajú systém (2.2) a (2.17), kde  $\psi$  je dané vzťahom (2.9).*

## 2.2 Analýza v priestore stavovej a adjungovanej premennej

Pozrime sa teraz na systém diferenciálnych rovníc (2.14)-(2.15) pre stavovú a adjungovanú premennú, kde  $u(x, \psi)$  je riešením (2.13). Pri analýze pomocou fázového portréту je pre nás zaujímavý najmä typ pevného bodu  $(\bar{x}, \bar{\psi})$ , ktorý zistíme z Jakobiho matice vyjadrenej v tomto bode. Preto v tejto časti uvádzame tvar Jakobiho matice pre túto

sústavu, jej determinat a vlastné čísla. Odvodenie tejto matice aj s ďalšími detailami nájdeme v [5].

Pre lepšiu čitateľnosť neuvádzame argumenty funkcií, no všetky sú vyjadrené v pevnom bode. Potom podľa [5] má Jakobiho matica pre sústavu (2.14)-(2.15) tvar

$$J = \begin{bmatrix} f_x + f_u u_x & f_u u_\psi \\ -H_{xx} - H_{xu} u_x & r - H_{xu} u_\psi - f_x \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$= \begin{bmatrix} f_x - f_u \frac{H_{xu}}{H_{uu}} & -f_u \frac{f_u}{H_{uu}} \\ -H_{xx} + H_{xu} \frac{H_{xu}}{H_{uu}} & r - f_x + H_{xu} \frac{f_u}{H_{uu}} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

pričom sa v (2.19) využili vzťahy (2.20) a (2.21), ktoré boli získané implicitným derivovaním (2.13), a podľa ktorých možno vyjadriť parciálne derivácie  $u$  ako

$$\frac{\partial u(x, \psi)}{\partial x} = -\frac{H_{xu}(x, u(x, \psi), \psi)}{H_{uu}(x, u(x, \psi), \psi)} \quad (2.20)$$

a

$$\frac{\partial u(x, \psi)}{\partial \psi} = -\frac{f_u(x, u(x, \psi))}{H_{uu}(x, u(x, \psi), \psi)}. \quad (2.21)$$

Determinant matice (2.19) možno vyjadriť ako

$$\begin{aligned} \det J &= \left( f_x - f_u \frac{H_{xu}}{H_{uu}} \right) \left( (r - f_x) + H_{xu} \frac{f_u}{H_{uu}} \right) + \frac{f_u^2}{H_{uu}} \left( -H_{xx} + \frac{H_{xu}^2}{H_{uu}} \right) \\ &= f_x(r - f_x) - f_u \frac{H_{xu}}{H_{uu}} (r - f_x) + f_x f_u \frac{H_{xu}}{H_{uu}} - \left( f_u \frac{H_{xu}}{H_{uu}} \right)^2 - f_u^2 \frac{H_{xx}}{H_{uu}} + \left( \frac{f_u H_{xu}}{H_{uu}} \right)^2 \\ &= f_x(r - f_x) - a f_u, \end{aligned} \quad (2.22)$$

kde sme označili

$$a = \frac{H_{xu}(r - 2f_x) + f_u H_{xx}}{H_{uu}}. \quad (2.23)$$

Keďže ide o  $2 \times 2$  maticu, tak v prípade, že je  $\det J < 0$ , sú vlastné čísla

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4 \left[ \left( f_x - f_u \frac{H_{xu}}{H_{uu}} \right) \left( r - \left( f_x - f_u \frac{H_{xu}}{H_{uu}} \right) \right) + \frac{f_u^2}{H_{uu}} \left( -H_{xx} + \frac{H_{xu}^2}{H_{uu}} \right) \right]}}{2} \\ &= \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4(f_x(r - f_x) - a f_u)}}{2} \end{aligned} \quad (2.24)$$

tejto matice reálne a zároveň je jedno kladné a druhé záporné. V takomto prípade pôjde o pevný bod typu sedlo. Ak by bol  $\det J > 0$ , tak sú buď obe vlastné čísla kladné a reálne, kedy je pevný bod nestabilný uzol alebo komplexné s kladnou reálnou časťou a pevný bod je nestabilné ohnisko.

### 2.3 Analýza v priestore stavovej a riadiacej premennej

Na základe predošlej podkapitoly sa teraz pokúsime o podobnú analýzu v priestore stavovej a riadiacej premennej pre sústavu diferenciálnych rovníc (2.2) a (2.17), kde  $\psi$  spĺňa (2.9). Pre výpočet determinantu Jakobiho matice tejto sústavy potrebujeme najprv vyrátať parciálne derivácie  $\frac{\partial \dot{u}}{\partial u}$  a  $\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}$  vyjadrené v pevnom bode.

V nasledujúcich rovniciach pre lepšiu čitateľnosť opäť neuvádzame argumenty funkcií. Pri odvodzovaní derivácií  $\frac{\partial \dot{u}}{\partial u}$  a  $\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}$  využijeme, že v pevnom bode  $(\bar{x}, \bar{u})$  systému rovníc (2.2) a (2.17) platí  $\dot{x} = 0$  a  $\dot{u} = 0$  a teda platí aj

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \text{ a } \dot{\psi} = (r - f_x)\psi - f_x^0 = 0. \quad (2.25)$$

Taktiež budeme potrebovať parciálne derivácie adjungovanej premennej  $\psi_u$  a  $\psi_x$ , ktoré možno zo vzťahu (2.9) vyjadriť

$$\psi_u = \frac{-f_{uu}^0 f_u + f_u^0 f_{uu}}{f_u^2} \quad (2.26)$$

a

$$\psi_x = \frac{-f_{ux}^0 f_u + f_u^0 f_{ux}}{f_u^2}. \quad (2.27)$$

Derivovaním (2.17) podľa riadiacej premennej  $u$  potom máme

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) = \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{-H_{xu}f - f_u((r - f_x)\psi - f_x^0)}{H_{uu}} \right] \quad (2.28)$$

$$= \frac{[-H_{xuu}f - H_{xu}f_u - f_{uu}((r - f_x)\psi - f_x^0) - f_u(r\psi_u - f_x\psi_u - f_{xu}\psi - f_{xu}^0)]H_{uu}}{H_{uu}^2} - \frac{H_{uu}[-H_{xu}f - f_u((r - f_x)\psi - f_x^0)]}{H_{uu}^2} \quad (2.29)$$

$$= \frac{-H_{xu}f_u - f_u\psi_u(r - f_x) + f_u f_{xu}\psi + f_u f_{xu}^0}{H_{uu}} \quad (2.30)$$

$$= \frac{-H_{xu}f_u - \frac{f_u}{f_u^2}(-f_{uu}^0 f_u + f_u^0 f_{uu})(r - f_x) + f_u f_{ux} \left(-\frac{f_u^0}{f_u}\right) + f_u f_{xu}^0}{H_{uu}} \quad (2.31)$$

$$= \frac{-H_{xu}f_u - \left(-f_{uu}^0 - \left(-\frac{f_u^0}{f_u}\right) f_{uu}\right)(r - f_x) + f_u \left(f_{xu} \left(-\frac{f_u^0}{f_u}\right) + f_{xu}^0\right)}{H_{uu}} \quad (2.32)$$

$$= \frac{-H_{xu}f_u - (-f_{uu}^0 - \psi f_{uu})(r - f_x) + f_u(f_{xu}\psi + f_{xu}^0)}{H_{uu}} \quad (2.33)$$

$$= \frac{-H_{xu}f_u + H_{uu}(r - f_x) + f_u H_{xu}}{H_{uu}} = r - f_x \quad (2.34)$$

Pričom v (2.30) sme využili predpoklad (2.25) a v (2.31) sme využili vzťah (2.26) a (2.9).

Podobne môžno vyrátať aj parciálnu deriváciu  $\dot{u}$  podľa stavovej premennej  $x$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{-H_{xu}f - f_u((r - f_x)\psi - f_x^0)}{H_{uu}} \right] \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{[-H_{xxu}f - H_{xu}f_x - f_u(r\psi_x - f_{xx}\psi - f_x\psi_x - f_{xx}^0) - f_{ux}((r - f_x)\psi - f_x^0)] H_{uu}}{H_{uu}^2} \\ &- \frac{H_{uu}(-H_{xu}f - f_u((r - f_x)\psi - f_x^0))}{H_{uu}^2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$= \frac{-H_{xu}f_x - f_u((r - f_x)\psi_x - f_{xx}\psi - f_{xx}^0)}{H_{uu}} \quad (2.37)$$

$$= \frac{-H_{xu}f_x - \frac{f_u}{f_u^2}(r - f_x)(-f_{ux}^0 f_u + f_u^0 f_{ux}) + f_u f_{xx}\psi + f_u f_{xx}^0}{H_{uu}} \quad (2.38)$$

$$= \frac{-H_{xu}f_x - (r - f_x)(-f_{ux}^0 - \left(-\frac{f_u^0}{f_u}\right) f_{ux}) + f_u(f_{xx}\psi + f_{xx}^0)}{H_{uu}} \quad (2.39)$$

$$= \frac{-H_{xu}f_x + H_{xu}(r - f_x) + f_u H_{xx}}{H_{uu}} = \frac{H_{xu}(r - 2f_x) + f_u H_{xx}}{H_{uu}}, \quad (2.40)$$

kde sme v (2.37) využili predpoklad (2.25) a v (2.38) sme využili vzťah (2.27).

Označme opäť  $a = \frac{H_{xu}(r - 2f_x) + f_u H_{xx}}{H_{uu}}$ . Potom má Jakobiho matica pre sústavu rovníc (2.2) a (2.17) vyjadrená v pevnom bode tvar

$$J = \begin{bmatrix} f_x & f_u \\ a & r - f_x \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

pričom sú všetky funkcie vyjadrené v pevnom bode. Determinat matice (2.41) potom možno zapísať:

$$\det J = f_x(r - f_x) - af_u. \quad (2.42)$$

Vidíme, že tento je rovnaký ako (2.22). Navyiac sú vlastné čísla  $\lambda_{1,2} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4(f_x(r - f_x) - af_u)}}{2}$

Jakobiho matice (2.41) rovnaké ako vlastné čísla matice (2.19) a teda je pevný bod v priestore stavovej a riadiacej premennej rovnakého typu ako v priestore stavovej a adjungovanej premennej. Pevný bod teda môže byť typu sedlo, nestabilný uzol alebo nestabilné ohnisko. Prípád nestabilného uzla nastane pri úlohe o optimálnej spotrebe, ktorou sa budeme zaoberať v štvrtej kapitole.



## 2.4 Príklady úloh s rýdzokonkávnym Hamiltoniánom v riadiacej premennej

V tejto časti uvádzame príklady s ekonomickým zameraním, pri ktorých už z dát úlohy budeme vidieť, či sú splnené predpoklady Vety 2.1 a podmienka zápornosti determinantu Jakobiho matice, ktorý je vyjadrený vzťahom (2.41) a teda pevný bod v takejto úlohe je typu sedlo.

V ekonomických modeloch sa stáva, že Hamiltonova funkcia je separovateľná v premenných  $x$  a  $u$  a teda platí

$$H_{xu} = 0. \quad (2.43)$$

Determinant Jakobiho matice (2.41) sa v takom prípade zjednoduší na tvar

$$\det J = -f_x^2 - f_u^2 \frac{H_{xx}}{H_{uu}} + r f_x. \quad (2.44)$$

Ak by navyše platilo

$$H_{xx} < 0, \quad (2.45)$$

tak sú prvé dva členy determinantu (2.44) záporné. Ak navyše platí  $f_x < 0$ , tak je determinant (2.44) určite záporný a teda ide o pevný bod typu sedlo. Aj v prípade, že je parciálna derivácia funkcie  $f$  zo stavovej rovnice podľa  $x$  kladná, tzn.  $f_x > 0$ , môžeme pre  $r$  dostatočne malé dostať záporný determinant a teda opäť pôjde o pevný bod typu sedlo. Takýto prípad nastáva pri Ramseyho modeli rastu, ktorému je venovaná celá tretia kapitola.

Navyše, ak okrem predpokladu o rýdzokonkávnosti Hamiltonovej funkcie v premennej  $u$  (2.6) platí aj (2.45) a teda je Hamiltonova funkcia rýdzokonkávna aj v premennej  $x$  a máme tiež (2.43), tak je Hamiltonova funkcia rýdzokonkávna v premenných  $(x, u)$ . Keďže uvažujeme lineárnu koncovú podmienku (2.4),  $\psi^0 = 1$  a množina  $U$  je celé  $R$  a teda je konvexná, tak podľa Vety 1.2 sú podmienky Pontrjaginovho princípu maxima aj postačujúcimi podmienkami optimality a optimálne riešenie je jediné.

### 2.4.1 Nerlove-Arrow reklamný model

Ďalším modelom, ktorý spĺňa predpoklady Vety 2.1, (2.45) a (2.43) je **Nerlove-Arrow reklamný model**, presnejšie jeho nelineárne rozšírenie, ktoré je v [13] formulované nasledovne:

$$\max \int_0^T e^{-rt} [\pi_1(u) + \pi_2(x) - u] dt, \quad (2.46)$$

$$\dot{x}(t) = u(t) - \delta x(t) \quad t \in [0, T], \quad (2.47)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2.48)$$

$$x(T) = x_T, \quad (2.49)$$

kde  $r, \delta, T, G_0, G_T$  sú dané konštanty, stavová premenná  $x$  predstavuje dobré meno firmy a riadiaca premenná  $u$  predstavuje snahu, ktorú firma investuje do reklamy, meranú v dolároch za jednotku času. Podľa stavovovej rovnice (2.47), je čistá investícia do dobrého mena rovná investovanej snahe do reklamy a amortizácii dobrého mena, ktorá je spôsobená napríklad tým, že ľudia zabúdajú a je daná kladnou konštantou  $\delta$ . Funkcie  $\pi_1(u)$  a  $\pi_2(x)$  v účelovej funkcii sú rastúce a konkávne, tzn.  $\pi_1'(u) > 0$ ,  $\pi_2'(x) > 0$ ,  $\pi_1''(u) < 0$  a  $\pi_2''(x) < 0$ . Celkový zisk teda tvorí profit získaný z reklamy a z dobrého mena mínus investovaná snaha do reklamy.

Hamiltonova funkcia pre túto úlohu má tvar

$$H(x, u, \psi) = \pi_1(u) + \pi_2(x) - u + \psi(u - \delta x), \quad (2.50)$$

pričom je zjavné, že táto je separovateľná v premenných  $(x, u)$  a teda je splnený predpoklad (2.43). Taktiež platí  $f_{uu}^0 = \pi_1''(u) < 0$  a  $f_{uu} = 0$  a teda je splnený predpoklad (2.7) o rýdzokonkávnosti Hamiltonovej funkcie v premennej  $u$ . Ďalej derivovaním funkcie z účelovej funkcie podľa premennej  $u$  dostaneme  $f_u^0(x, u) = \pi_1'(u) - 1$ . Keďže je funkcia  $\pi_1(u)$  rýdzokonkávna, tak jej derivácia  $\pi_1'(u)$  je klesajúca a tak budeme predpokladať, že existuje  $u_k$  také, že na intervale  $[0, u_k]$  je  $\pi_1'(u) < 1$  a teda  $\pi_1'(u) - 1 < 0$ . Navyiac máme  $f_u(x, u) = \psi > 0$  a teda na intervale  $[0, u_k]$  platí predpoklad (2.12), že  $f_u^0 f_u < 0$ . Hamiltonova funkcia (2.50) je taktiež rýdzokonkávna v stavovej premennej  $x$ , keďže platí  $H_{xx} = \pi_2''(x) < 0$ , tzn. je splnený predpoklad (2.45). Pre parciálnu deriváciu funkcie  $f$ , ktorou je definovaná stavová rovnica (2.47), platí  $f_x(x, u) = -\delta < 0$  a teda okrem predpokladov (2.7), (2.12), (2.45) a (2.43) platí aj  $f_x(x, u) < 0$ . Determinant

Jakobiho matice je pre takúto úlohu pre  $u \in [0, u_k]$  teda určite záporný a ide o pevný bod typu sedlo. Riešenie tejto úlohy v priestore stavovej a adjungovanej premennej nájdeme napríklad v [13].

### 2.4.2 Optimálny lov rýb

Ďalším príkladom je úloha 8.2 **Optimálny lov rýb**, ktorá je v [5] formulovaná nasledovne:

$$\max \int_0^T e^{-rt} p(u(t)) dt, \quad (2.51)$$

$$\dot{x}(t) = x(t)(1 - x(t)) - u(t) \quad t \in [0, T], \quad (2.52)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2.53)$$

$$x(T) = x_T, \quad (2.54)$$

$$x(t) \in [0, 1], \quad (2.55)$$

$$u(t) \geq 0, \quad (2.56)$$

pričom  $r$ ,  $T$ ,  $x_0$ ,  $x_T$  sú kladné konštanty. Stavová premenná  $x(t)$  v tomto prípade predstavuje množstvo rýb v rybníku, vyjadrené ako časť celkovej kapacity rybníka a riadiaca premenná  $u(t)$  označuje tempo výlovu rýb. Cieľom je maximalizovať celkový zisk, ktorý je daný funkciou  $p(u)$ . Táto je rastúca a rýdzokonkávna, platí teda  $p'(u) > 0$  a  $p''(u) < 0$ . Môžeme si všimnúť, že v tejto úlohe máme aj ohraničenie na stavovú premennú, no stačí, ak budeme neskôr fázový portrét kresliť len pre interval  $x \in [0, 1]$ .

Pre úlohu (2.51)-(2.56) má Hamiltonova funkcia tvar

$$H(x, u, \psi) = p(u) + \psi [x(1 - x) - u]. \quad (2.57)$$

Pre Hamiltonovu funkciu (2.57) platí  $f_{uu}^0 = p''(u) < 0$  a  $f_{uu} = 0$  a teda je splnený predpoklad (2.7) o rýdzokonkávnosti Hamiltonovej funkcie v premennej  $u$ . Navyše máme  $f_u^0(x, u) = p'(u) > 0$  a  $f_u = -1 < 0$  a teda  $f_u^0 f_u < 0$ , čo je predpoklad (2.12). Tiež vidíme, že Hamiltonova funkcia je opäť separovateľná v premenných  $(x, u)$  a teda platí  $H_{xu} = 0$ . Keďže platí aj  $H_{xx} = -2\psi < 0$ , tak je druhý člen determinantu (2.44)  $-f_u^2 \frac{H_{xx}}{H_{uu}}$  záporný. Potrebujeme teda ešte, aby  $f_x(r - f_x) = (1 - 2x)(r - (1 - 2x)) \leq 0$ . Tento vzťah určite platí pre  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ . Ak  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ , tak je tento člen určite nekladný pre  $r \leq 1$ , čo je rozumný predpoklad, keďže ide o diskontný faktor. Determinant Jakobiho matice

je pre túto úlohu teda záporný a opäť ide o pevný bod typu sedlo. Naviac aj v tomto prípade sú podmienky Pontrjaginovho princípu maxima postačujúcimi podmienkami maxima.

### 2.4.3 Vidale-Wolfe reklamný model

V oboch vyššie uvedených príkladoch je Hamiltonova funkcia separovateľná v riadiacej a stavovej premennej. Nasledujúce dva príklady už túto podmienku nespĺňajú. Ukážeme však, že spĺňajú (2.7) a (2.12) a ďalšie podmienky, vďaka ktorým opäť pôjde o pevný bod typu sedlo. Prvým z modelov je **Vidale-Wolfe reklamný model**, ktorý je sformulovaný v [13]. Avšak namiesto účelovej funkcie, ktorá je lineárna v riadiacej premennej  $u$ , budeme uvažovať prípad z [13] cvičenie 7.32, ktorý má nasledujúci tvar

$$\max_{u \geq 0} \int_0^T e^{-rt} (\pi x - u^2) dt, \quad (2.58)$$

$$\dot{x}(t) = \rho u(1 - x) - \delta x \quad t \in [0, T], \quad (2.59)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2.60)$$

$$x(T) = x_T, \quad (2.61)$$

kde  $r$ ,  $\pi$ ,  $\rho$ ,  $\delta$ ,  $x_0$ ,  $x_T$  a  $T$  sú dané konštanty. Riadiaca premenná  $u$  opäť predstavuje investície do reklamy, no na rozdiel od Nerlove-Arrow modelu, stavová premenná  $x$  predtavuje podiel firmy na trhu a nadobúda hodnoty z intervalu  $[0, 1]$ . Kladná konštantna  $\pi$  v účelovej funkcii predstavuje maximálny výnos pre  $x = 1$ . Celkový zisk je potom rovný tomuto výnosu, od ktorého odpočítame náklady spojené s reklamou, ktoré sú kvadratické. Podľa stavovej rovnice (2.59) je zmena v premennej  $x$  daná reakciou na reklamu, ktorá je daná kladnou konštantou  $\rho$  a stratou spôsobenou zabudaním, ktorá je charakterizovaná kladnou konštantou  $\delta$ .

Hamiltonova funkcia pre úlohu (2.58)-(2.61) má tvar

$$H(x, u, \psi) = \pi x - u^2 + \psi(\rho u(1 - x) - \delta x). \quad (2.62)$$

Ako vidíme táto nie je separovateľná v premenných  $(x, u)$ . Ďalej pre tento model platí  $f_{uu}^0 = -2 < 0$ ,  $f_{uu} = 0$ ,  $f_u^0 = -2u < 0$   $f_u = \rho(1 - x) > 0$  pre  $x \in [0, 1]$  a teda sú splnené predpoklady (2.7) a (2.12). Zmiešaná parciálna derivácia Hamiltonovej funkcie

$H_{xu} = -\psi\rho$  je záporná, keďže z predpokladu (2.12) máme  $\psi > 0$ . Keďže stavová rovnica i účelová funkcia sú lineárne v stavovej premennej  $x$ , tak máme  $H_{xx} = 0$ . V takomto prípade sa determinant Jakobiho matice (2.42) zjednoduší na tvar

$$\det J = f_x(r - f_x) - \frac{H_{xu}(r - 2f_x)}{H_{uu}} f_u. \quad (2.63)$$

Keďže platí  $f_x = -\rho u - \delta < 0$ , tak prvý člen (2.63)  $f_x(r - f_x)$  je určite záporný. Navyše máme  $(r - 2f_x) = r + 2\rho u + 2\delta > 0$  a teda člen  $-\frac{H_{xu}(r - 2f_x)}{H_{uu}} f_u$  je záporný. Aj v tomto prípade teda dostaneme záporný determinant a pevný bod bude typu sedlo.

#### 2.4.4 Gouldov model

Posledný príklad, ktorý tu uvedieme, je rozšírením predošlého modelu a ide o tzv. **Gouldov model**. Tento je v [12] formulovaný nasledovne

$$\max_{u \geq 0} \int_0^T e^{-rt} (\pi(x) - w(u)) dt, \quad (2.64)$$

$$\dot{x}(t) = \rho u(1 - x) - \delta x \quad t \in [0, T], \quad (2.65)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2.66)$$

$$x(T) = x_T, \quad (2.67)$$

kde  $r, \delta, \rho, x_0, x_T$  a  $T$  sú dané konštanty a  $w(u), \pi(x)$  dané funkcie. Môžeme si všimnúť, že tento model sa líši od predošlého len účelovou funkciou. Funkcia  $\pi(x)$  je rastúca a konkávna a funkcia  $w(u)$  je rastúca a konvexná, platí teda  $\pi'(x) > 0, \pi''(x) < 0, w'(u) > 0$  a  $w''(u) > 0$ . Hamiltonovu funkciu pre takúto úlohu možno zapísať

$$H(x, u, \psi) = \pi(x) - w(u) + \psi(\rho u(1 - x) - \delta x). \quad (2.68)$$

Pre túto platí  $f_{uu}^0 = -w''(u) < 0$  a  $f_{uu} = 0$  a teda je splnený predpoklad (2.7) o rýdzokonkávnosti Hamiltonovej funkcie v premennej  $u$ . Taktiež je splnený predpoklad (2.12), keďže máme  $f_u = \rho(1 - x) > 0$  a  $f_u^0 = -w'(u) < 0$ . Ďalej máme  $H_{xu} = -\psi u < 0, H_{xx} = \pi''(x) < 0$  a  $f_x(x, u) = -\rho u - \delta < 0$  a teda  $a = \frac{H_{xu}(r - 2f_x) + f_u H_{xx}}{H_{uu}} > 0$ . Preto je determinant Jakobiho matice (2.42)  $\det J = (-\rho u - \delta)(r + \rho u + \delta) - a f_u$  určite záporný a teda ide o pevný bod typu sedlo. Navyše má Hessova matica Hamiltonovej funkcie tvar

$$H = \begin{bmatrix} \pi''(x) & -\psi u \\ -\psi u & -w''(u) \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

Pre túto platí  $\pi''(x) < 0$  a  $-w''(u)\pi''(x) + (\psi u)^2 > 0$  a teda je Hamiltonova funkcia rýdzokonkávna v premených  $(x, u)$  a teda pri koncovej podmienke (2.67),  $\psi^0 = 1$  a  $u \geq 0$  aj v tomto prípade sú podmienky Pontrjaginovho princípu maxima postačujúcimi podmienkami optimality.

Na predošlých príkladoch sme ukázali rôzne podmienky, ktoré môžu pomôcť pri určovaní pevného bodu typu sedlo. Avšak treba poznamenať, že tieto podmienky určite nepokrývajú všetky možné prípady.

### 3 Ramseyho model

V tejto kapitole sa budeme zaoberať Ramseyho modelom rastu ako úlohe optimálneho riadenia, v ktorej jedinú neautonómnosť predstavuje diskontný faktor a teda ju možno riešiť pomocou analýzy fázového portréту. Pri spracovaní tejto kapitoly sme využili zdroje [5], [8], [11] a [1].

Frank Ramsey bol britský matematik a filozof. V roku 1928 publikoval článok [10], ktorého hlavnou témou bola otázka, koľko zo svojich príjmov by mal národ ušetriť a ďalej investovať a koľko by mal spotrebovať. Tento sa stal východiskom pre mnohé ďalšie ekonomické modely.

#### 3.1 Ramseyho model ako úloha optimálneho riadenia

Ramseyho model rastu s pevným časom bez ohraničení na riadenie ako úloha optimálneho riadenia má vo všeobecnosti nasledujúci tvar:

$$\max \int_0^T e^{-rt} U(c(t)) dt, \quad (3.1)$$

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \delta k(t) - c(t) \quad t \in [0, T], \quad (3.2)$$

$$k(0) = k_0, \quad (3.3)$$

$$k(T) = k_T, \quad (3.4)$$

kde stavová premenná  $k$  predstavuje kapitál a riadiaca premenná  $c$  spotrebu. Funkcia  $U$  v účelovej funkcii je funkciou užitočnosti, o ktorej predpokladáme, že spĺňa  $U \in C^2$ ,  $U'(c) > 0$ ,  $U''(c) < 0$ ,  $\lim_{c \rightarrow 0^+} U'(c) = \infty$  a  $\lim_{c \rightarrow \infty} U'(c) = 0$ . Funkcia  $f$  v stavovej rovnici je produkčnou funkciou, o ktorej predpokladáme, že spĺňa  $f \in C^2$ ,  $f'(k) > 0$ ,  $f''(k) < 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow 0^+} f'(k) = \infty$  a  $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$ . Konštanty  $r$  a  $\delta$  sú kladné, pričom prvá z nich vyjadruje mieru netrpezlivosti spotrebovať a druhá predstavuje mieru znehodnocovania kapitálu. Úlohou je nájsť funkciu spotreby  $c(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , ktorá maximalizuje diskontovanú užitočnosť, pričom kapitál sa v čase vyvíja podľa stavovej rovnice (3.2). Zároveň žiadame aby hodnota kapitálu spĺňala počiatočnú podmienku (3.3) a koncovú podmienku (3.4).

Podobne ako v [5] na túto úlohu aplikujeme Pontrjaginov princíp maxima. Keďže stavová rovnica je lineárna v  $c$  a nemáme ohraničenia na  $c$ , môžeme dosadiť  $\psi^0 = 1$  a

teda Hamiltonovu funkciu (1.6) môžeme zapísať

$$H(k, c, t, \psi) = e^{-rt}U(c) + \psi(f(k) - \delta k - c). \quad (3.5)$$

Adjungovaná rovnica (1.7) má potom tvar

$$\dot{\psi} = (\delta - f'(k))\psi, \quad (3.6)$$

a z podmienky maxima (1.8) aplikovaním nutnej podmienky optimality vieme vyjadriť adjungovanú premennú ako funkciu riadiacej premennej

$$\psi(t) = e^{-rt}U'(c) > 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.7)$$

Keďže tento vzťah musí platiť pre každé  $t \in [0, T]$ , tak jeho totálnou deriváciou získame vyjadrenie pre  $\dot{\psi}$

$$\dot{\psi}(t) = -re^{-rt}U'(c(t)) + e^{-rt}U''(c(t))\dot{c}(t). \quad (3.8)$$

Dosadením rovníc (3.7) a (3.8) do adjungovanej rovnice (3.6) dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\dot{c} = \frac{U'(c)}{U''(c)}(r + \delta - f'(k)). \quad (3.9)$$

Tá spolu so stavovou rovnicou (3.2) a podmienkami (3.3) a (3.4) dávajú okrajovú úlohu, ktorú možno riešiť v priestore premenných  $(k, c)$ , teda v priestore stavovej a riadiacej premennej.

Predtým než začneme úlohu analyzovať, ukážeme, že spĺňa podmienky z poznámky k Vete 1.2 a teda sú podmienky, ktoré sme dostali aj postačujúcimi podmienkami. Pre Hamiltonovu funkciu platí

$$\frac{\partial^2 H}{\partial k^2}(k, c, t, \psi) = \psi f''(k) < 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial k \partial c}(k, c, t, \psi) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.11)$$

a

$$\frac{\partial^2 H}{\partial c^2}(k, c, t, \psi) = e^{-rt}U''(c) < 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.12)$$

keďže  $\psi(t) > 0 \forall t \in [0, T]$ ,  $f''(k) < 0$ ,  $U''(c) < 0$  a Hamiltonova funkcia je separovateľná v premenných  $(k, c)$ . Navyše množina  $U$  je celé  $R$  a teda je konvexná a  $\psi^0 = 1$ . Sú teda splnené podmienky z Vety 1.2 a teda ide o postačujúce podmienky optimality. Navyše, keďže je Hamiltonova funkcia rýdzokonkávna, tak máme zaručené, že optimálne riadenie je jediné.



### 3.2 Analýza v priestore stavovej a riadiacej premennej

Pre zjednodušenie budeme predpokladať, že

$$-\frac{U'(c)}{U''(c)} = Ac > 0, \quad (3.13)$$

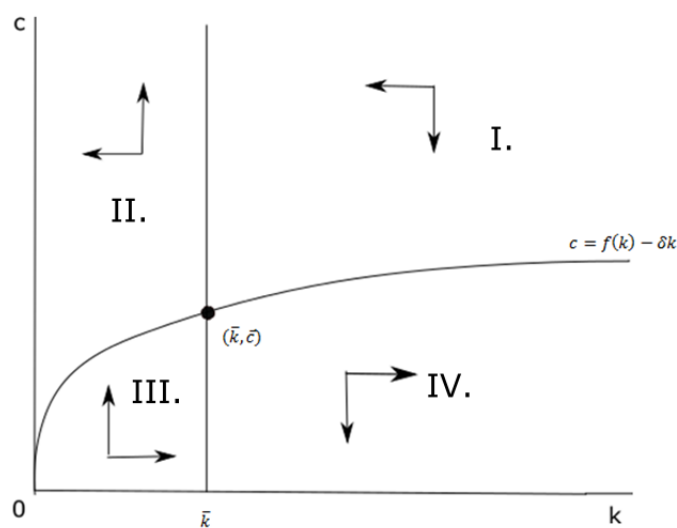
kde  $A$  je kladná konštanta. Tento predpoklad je splnený napríklad pre funkcie tvaru  $U(c) = \sqrt{c}$  alebo  $U(c) = \ln(c)$ , ktoré spĺňajú vlastnosti  $U \in C^2$ ,  $U'(c) > 0$ ,  $U''(c) < 0$ ,  $\lim_{c \rightarrow 0^+} U'(c) = \infty$  a  $\lim_{c \rightarrow \infty} U'(c) = 0$ . Poznamenajme, že obrátený zlomok  $-\frac{U''(c)}{U'(c)}$  je vo finančnej matematike označovaný ako Arrow-Prattov absolútny koeficient averzie k riziku. Je kladný pre rizikovo averzného investora. Čím je väčší, tým je väčšia aj averzia k riziku [9].

Pri riešení pomocou fázového portréту najprv vykreslíme izoklíny. Zo stavovej rovnice (3.2) pre  $\dot{k} = 0$  máme

$$f(k) - \delta k - c = 0 \Leftrightarrow c = f(k) - \delta k. \quad (3.14)$$

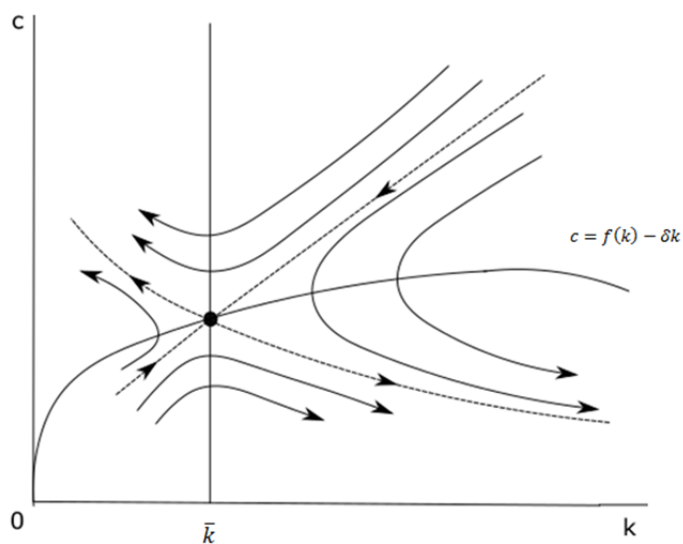
Keďže  $f(k)$  je rýdzokónkávna funkcia, tak aj  $c = f(k) - \delta k$ , ako rozdiel rýdzokónkávnej a lineárnej funkcie, bude rýdzokónkávna funkcia. Táto funkcia nadobúda maximum v bode  $k_M$ , pre ktorý platí  $f'(k) = \delta$ . Pre  $\dot{c}$  existujú z (3.9) dve izoklíny, prvá z nich je krivka  $\dot{c} = 0$ . Nech pre  $k_c$  platí  $f'(k_c) = r + \delta$ , potom druhá izoklína je krivka  $k = k_c$ . Funkcia  $f$  je konkávna, tzn.  $f''(k) < 0$  a teda funkcia  $f'(k)$  je klesajúca. Z kladnosti  $r$  a  $\delta$  potom dostaneme,  $k_M > k_c$ , keďže  $r + \delta > \delta$ . Pevné body ležia na prieniku dvoch izoklín, pričom pre jednu z nich platí  $\dot{k} = 0$  a pre druhú platí  $\dot{c} = 0$ . Tak ako možno vidieť v [5], dá sa ukázať, že existujú tri pevné body a to  $[0, 0]$ , potom  $[\bar{k}, \bar{c}]$ , kde  $\bar{k} = k_c$  a  $\bar{c} = f(k_c) - \delta k_c$  a ešte bod  $[k_n, 0]$ , kde pre  $k_n$  platí  $f(k_n) = \delta k_n$ . Nás bude zaujímať oblasť, kde  $c > 0$  a  $k > 0$ , zaujímavý je pre nás teda pevný bod  $[\bar{k}, \bar{c}]$ .

Izoklíny rozdelia kladný kvadrant na štyri oblasti - izosektory. Teraz vyšetríme správanie premenných s časom v jednotlivých sektoroch. Naľavo od krivky  $k = \bar{k}$  je  $\dot{c} > 0$  a teda spotreba  $c$  rastie s časom, zatiaľ čo vpravo je  $\dot{c} < 0$  a teda spotreba  $c$  je klesajúcou funkciou času. Pod krivkou  $c = f(k) - \delta k$  je  $\dot{k} > 0$  a teda kapitál  $k$  rastie s časom. Nad touto krivkou je  $\dot{k} < 0$  a teda premenná  $k$  klesá s časom. Smery pohybu s časom sú znázornené v Obr. 4, pričom sme si jednotlivé sektory očíslovali.



Obr. 4: Izosektory pre systém rovníc (3.2) a (3.9)

Podľa naznačeného smeru môžeme približne načrtnúť trajektórie, ktoré sú všeobecným riešením úlohy. Na Obr.5 sú len niektoré z nich, v skutočnosti je ich nekonečne veľa.



Obr. 5: Všeobecné riešenie pre systém rovníc (3.2) a (3.9)

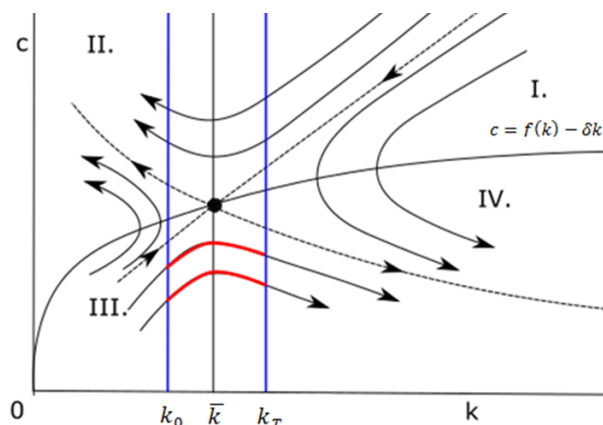
Ako si môžeme všimnúť, niektoré trajektórie idú smerom k pevnému bodu, iné sa pohybujú od tohto bodu, z čoho predpokladáme, že pevný bod je typu sedlo. Toto tušenie ešte overíme pomocou Jakobiho matice sústavy, vyčíslenej v pevnom bode,

ktorá má nasledujúci tvar

$$J(\bar{k}, \bar{c}) = \begin{bmatrix} f'(\bar{k}) - \delta & -1 \\ A\bar{c}f''(\bar{k}) & -A(r + \delta - f'(\bar{k})) \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Keďže v pevnom bode platí  $(r + \delta - f'(\bar{k})) = 0$ , tak determinat tejto matice v pevnom bode  $(\bar{k}, \bar{c})$  je  $\det(J(\bar{k}, \bar{c})) = A\bar{c}f''(\bar{k})$ . Vieme, že  $A$  je kladná konštanta, spotreba  $c$  je kladná a  $f''(\bar{k}) < 0$ . Determinant Jakobiho matice je teda záporný. Keďže ide o  $2 \times 2$  maticu, tak budú jej vlastné čísla reálne a budú mať opačné znamienka. Ide teda o pevný bod typu sedlo.

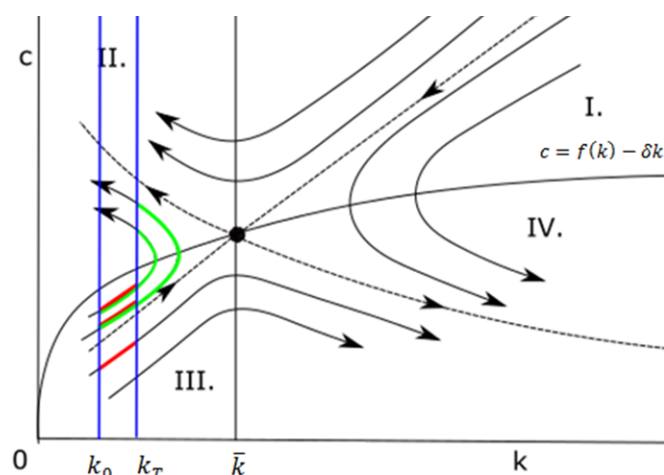
Trajektórie zobrazené v Obr. 5 sú len všeobecným riešením sústavy (3.6) a (3.9). Na určenie optimálneho riešenia využijeme okrajové podmienky pre  $k_0$  a  $k_T$  a tiež hodnotu času  $T$ . Nech najprv platí  $k_0 < \bar{k} < k_T$ . Niektoré trajektórie vyhovujúce takýmto podmienkam sú zobrazené na Obr. 6. Môžeme si všimnúť, že tieto začínajú v oblasti III., kde sú kapitál i spotreba rastúcimi funkciami času a prejdú do oblasti IV., kde kapitál stále rastie, no spotreba už klesá.



Obr. 6: Prípád  $k_0 < \bar{k} < k_T$

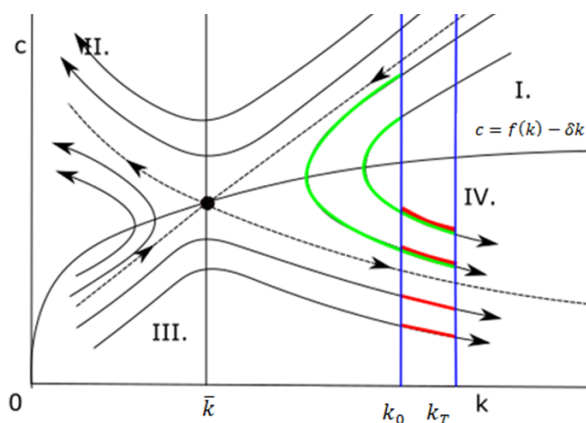
Uvažujme teraz prípad  $k_0 < k_T < \bar{k}$ , teda aj počiatočný aj koncový kapitál sú menšie ako hodnota kapitálu v pevnom bode. Niektoré trajektórie sú zobrazené na Obr. 7. Tu môžu nastať dva prípady. Buď trajektória celý čas leží v oblasti III. a teda spotreba a kapitál po celý čas rastú alebo trajektória začína v oblasti III. a končí v oblasti II.. V taktomto prípade síce opäť spotreba po celý čas rastie, no kapitál najprv rastie a neskôr klesá, keďže prekročíme izoklínu pre  $\dot{k} = 0$ . Tiež si môžeme všimnúť, že

pre hodnoty  $c_0$ , ktoré sú z oblasti III., ale ležia nad sedlovou cestou, existujú dve trajektórie vyhovujúce okrajovým podmienkam. Trajektórie označené červeným celú ležia v oblasti III., zatiaľ čo zelené trajektórie, začínajúce v tom istom  $c_0$ , prejdú do oblasti II..



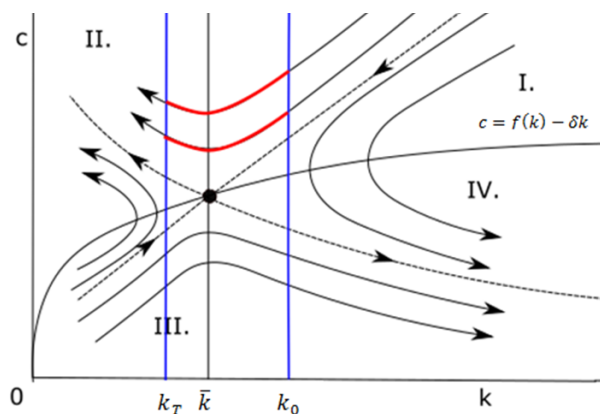
Obr. 7: Prípád  $k_0 < k_T < \bar{k}$

Ak by sme naopak uvažovali hodnotu počiatočného a koncového kapitálu väčšiu ako hodnota v pevnom bode, tzn.  $\bar{k} < k_0 < k_T$ , opäť môžu nastať dve možnosti. Tentokrát však trajektórie určite končia v oblasti IV., avšak ako môžeme vidieť na Obr. 8, môžu v tejto oblasti celý čas ležať alebo môžu začínať v oblasti I. V oboch prípadoch spotreba po celý čas klesá s časom, avšak kapitál buď po celý čas rastie alebo najprv klesá a potom rastie.



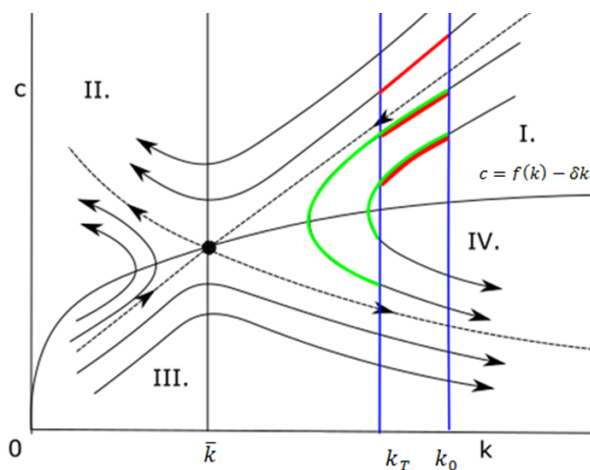
Obr. 8: Prípád  $\bar{k} < k_0 < k_T$

Zatiaľ sme uvažovali prípady, keď počiatočný kapitál  $k_0$  bol menší ako koncový kapitál  $k_T$ . V opačnom prípade dostaneme riešenia s podobnými vlastnosťami, akýsi zrkadlový obraz. Nech teda najprv  $k_T < \bar{k} < k_0$ . Trajektórie vyhovujúce takýmto podmienkam sú zobrazené na Obr. 9. Vidíme, že tieto začínajú v oblasti I. a končia v oblasti II. Kapitál  $k$  po celý čas klesá s časom, zatiaľ čo spotreba  $c$  najprv klesá a neskôr rastie.



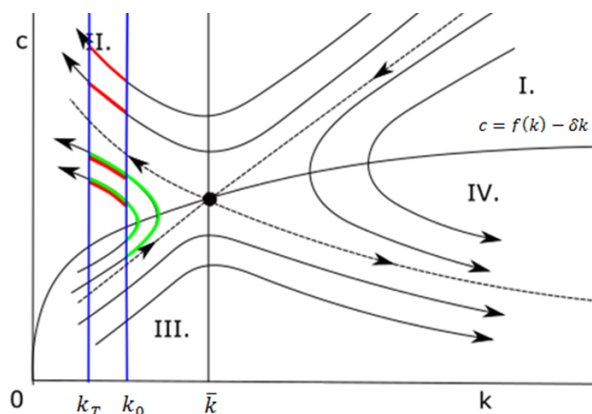
Obr. 9: Prípado  $k_T < \bar{k} < k_0$

Ak by bol počiatočný i koncový kapitál väčší ako hodnota kapitálu v pevnom bode a zároveň  $k_T < k_0$ , vyhovovali by trajektórie zobrazené na Obr. 10. Vidíme, že tieto určite začínajú v oblasti I. a buď v nej aj po celý čas zostanú, alebo prejdú do oblasti IV. V prvom prípade spotreba i kapitál po celý čas klesajú, v druhom prípade spotreba opäť po celý čas klesá, no kapitál najprv klesá a neskôr rastie.



Obr. 10: Prípado  $\bar{k} < k_T < k_0$

Posledný prípad, ktorý môže nastať je  $k_T < k_0 < \bar{k}$ . Aj v tomto prípade, ako môžeme vidieť na Obr. 11, môžu nastať dve možnosti. Trajektórie určite končia v oblasti II., začínať však môžu buď v tejto oblasti alebo v oblasti III. V oboch prípadoch spotreba po celý čas rastie, avšak menia sa vlastnosti kapitálu. Ten v prvom prípade po celý čas klesá, v druhom prípade najprv rastie a neskôr klesá.



Obr. 11: Prípád  $k_T < k_0 < \bar{k}$

Správanie kapitálu a spotreby budeme ilustrovať aj na nasledujúcom príklade, kedy už využijeme aj hodnotu koncového času  $T$ .

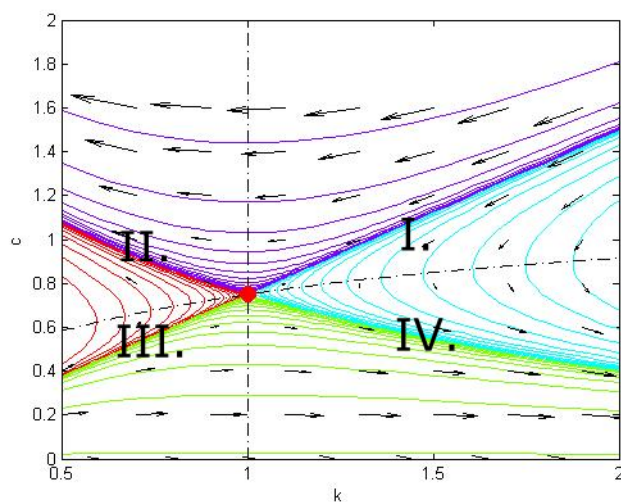
**Príklad 1:** Nech  $U(c) = 2\sqrt{c}$ ,  $f(k) = \sqrt{k}$ ,  $\delta = 0.25$  a  $r = 0.25$ , po dosadení do rovníc (3.2) a (3.9) dostaneme sústavu diferenciálnych rovníc:

$$\dot{k} = \sqrt{k} - 0.25k - c, \quad (3.16)$$

$$\dot{c} = -c\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right). \quad (3.17)$$

Najprv určíme izoklíny, pre  $\dot{k} = 0$  je to krivka  $c = \sqrt{k} - 0.25k$  a pre  $\dot{c} = 0$  máme buď  $c = 0$  alebo  $k = 1$ . Zaujímavým pre nás bude pevný bod, ktorý je prienikom kriviek  $c = \sqrt{k} - 0.25k$  a  $k = 1$ , tzn.  $(\bar{k}, \bar{c}) = (1, 0.75)$ . Všeobecné riešenie sústavy rovníc (3.16) a (3.17) je zobrazené na Obr. 12. Toto riešenie sme dostali numerickým riešením okrajovej úlohy v Matlabe.

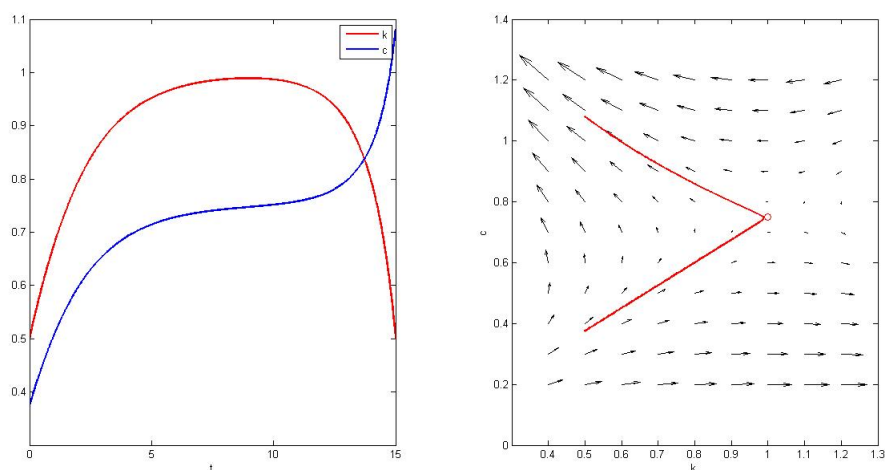
Trajektórie sú farebne odlíšené podľa správania kapitálu a spotreby s rastúcim časom  $t$ , pričom smer pohybu je naznačený šípkami. Z obrázku tiež možno odhadnúť, kde približne leží stabilná a nestabilná cesta. Nachádzajú sa na prieniku farebných



**Obr. 12:** Všeobecné riešenie systému (3.16)-(3.17)

oblastí, o stabilnú cestu ide v prípade, keď trajektórie smerujú do pevného bodu, zatiaľ čo v prípade nestabilnej cesty idú smerom od pevného bodu.

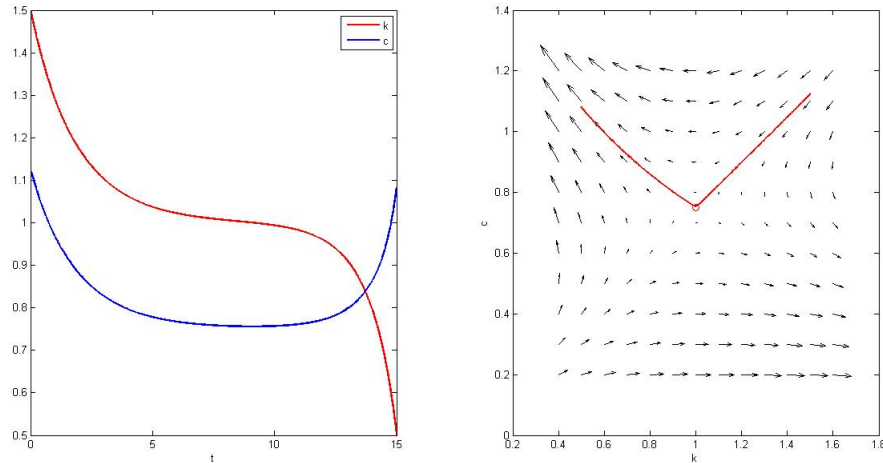
Optimálne riešenie dostaneme po využití okrajových podmienok. Uvažujme napríklad okrajové podmienky  $k_0 = 0.5$ ,  $k_T = 0.5$  a  $T = 15$ . V tomto prípade, ako môžeme vidieť na Obr. 13, sa nachádzame v oblasti, kde spotreba  $c$  stále rastie s časom, zatiaľ čo kapitál  $k$  najprv rastie a neskôr klesá. Na prvom z grafov je závislosť premenných  $k$  a  $c$  od času  $t$ , zatiaľ čo v druhom je zobrazené riešenie v priestore  $(k, c)$ .



**Obr. 13:** Riešenie systému (3.16)-(3.17) pre  $k_0 = 0.5$ ,  $k_T = 0.5$  a  $T = 15$

Stačí ak zmeníme jednu z podmienok a riešenie sa zmení. Nech  $k_0 = 1.5$ ,  $k_T = 0.5$  a

$T = 15$ . Zmenili sme teda len hodnotu počiatočného kapitálu  $k_0$ . Ako vidíme v Obr. 14, dostali sme sa do oblasti, kde kapitál  $k$  klesá s časom a spotreba  $c$  najprv klesá, neskôr rastie.



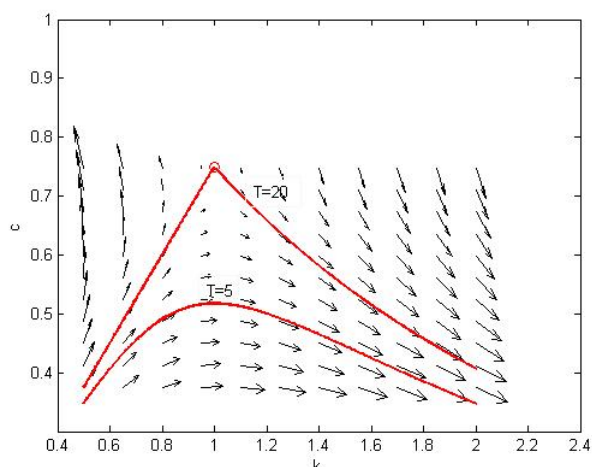
**Obr. 14:** Riešenie systému (3.16)-(3.17) pre  $k_0 = 1.5$ ,  $k_T = 0.5$  a  $T = 15$

### 3.3 Závislosť $c_0$ od $T$ pri pevnom $k_0$ a $k_T$

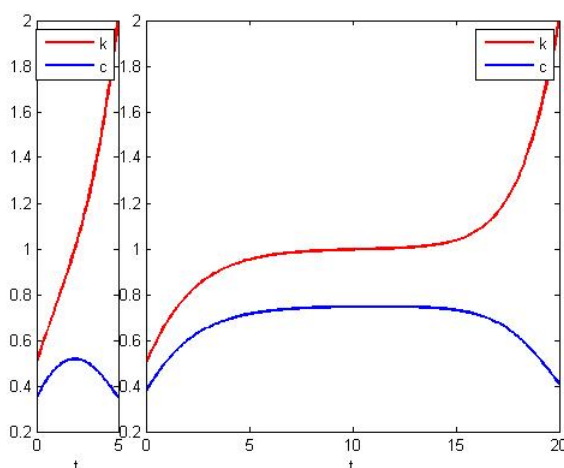
Riešenie ovplyvňuje aj voľba času  $T$ , čím bližšie sme k pevnému bodu, tým menšie sú derivácie  $\dot{k}$  a  $\dot{c}$  a preto na rovnaký presun medzi  $k_0$  a  $k_T$  potrebujeme dlhší čas. Môžeme to vidieť napr. v Obr. 15, kde vidíme, že pre okrajové podmienky  $k_0 = 0.5$  a  $k_T = 2$  riešenie pre čas  $T = 20$  prechádza v tesnej blízkosti pevného bodu, zatiaľ čo riešenie pre  $T = 5$  je od tohto bodu dosť vzdialené. V Obr. 16 je zobrazený vývoj riešení v čase  $t \in [0, T]$ . Vidíme, že pre kratší čas  $T = 5$  sa riešenie mení dosť rýchlo v porovnaní s časom  $T = 20$ . Tu riešenie dosiahne malé okolie pevného bodu, istý čas v ňom pobudne a potom sa opäť mení.

Trajektórie na Obr. 15 spĺňajú rovnaké okrajové podmienky, no pre rôzne hodnoty koncového času  $T$  a spotreby  $c_0$ . Zaujímáť nás teda môže vzťah medzi týmito premennými. Riešenie pre stavovú premennú možno zapísať ako funkciu času  $t$  a počiatočnej spotreby  $c_0$ , ktorá je tiež funkciou času. Požadujeme, aby táto premenná  $k(t, c_0)$  spĺňala počiatočnú podmienku  $k(0, c_0(T)) = k_0$  a koncovú podmienku  $k(T, c_0(T)) = k_T$ .





Obr. 15: Porovnanie riešení pre rôzne časy



Obr. 16: Porovnanie riešení pre  $T = 5$  a  $T = 20$

Pre sústavu rovníc (3.2) a (3.9) máme  $F_y = -1 < 0$  a  $G_x = Acf''(k) < 0$ , pričom druhá nerovnosť platí, lebo  $f''(k) < 0$ ,  $c > 0$  a  $A$  je kladná konštanta. Sú teda splnené predpoklady Vety 1.4 a platí  $\frac{\partial k}{\partial c_0} < 0$ . Vďaka tomu môžeme na koncovú podmienku  $k(T, c_0(T)) - k_T = 0$  použiť vetu o implicitnej funkcii, ktorú môžeme nájsť napr. v [7] a ktorá nám lokálne zaručí existenciu jedinej funkcie  $c_0(T)$ . V takom prípade nám už štvorica  $k_0$ ,  $k_T$ ,  $T$  a  $c_0$  jednoznačne určí trajektóriu. Zároveň z tejto vety máme

$$\frac{dc_0}{dT} = -\frac{\frac{\partial k}{\partial T}}{\frac{\partial k}{\partial c_0}}. \quad (3.18)$$

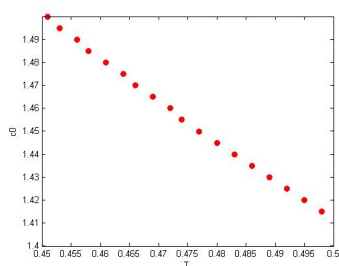
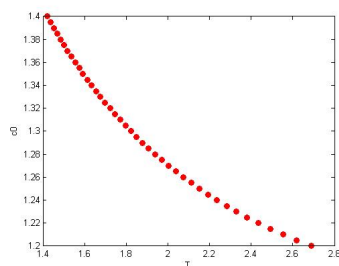
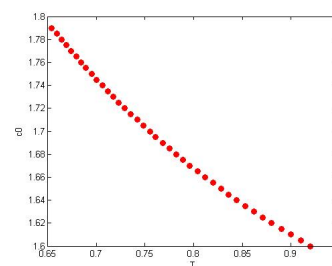
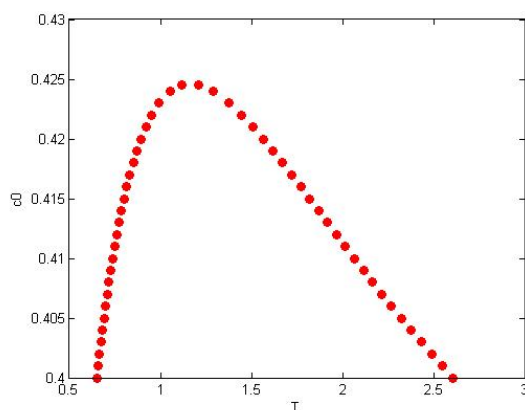
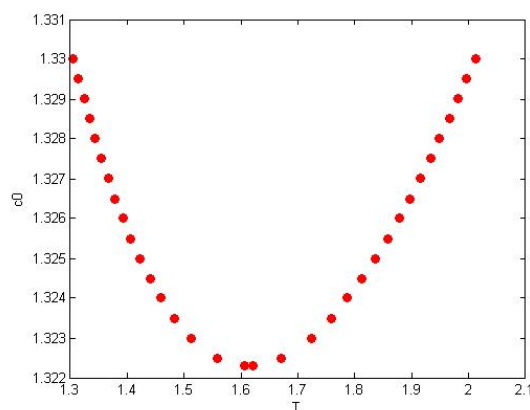
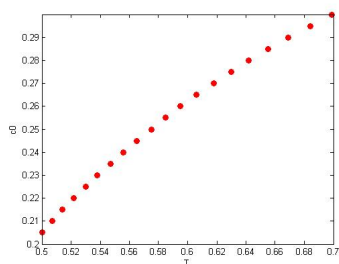
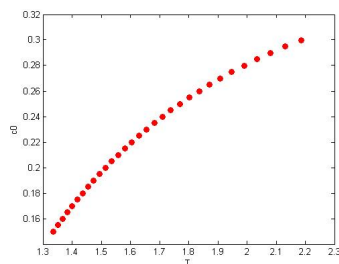
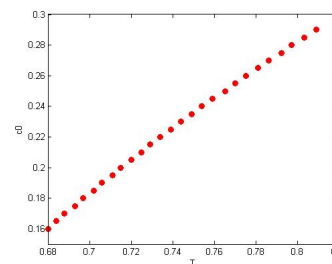
Už vieme, že  $\frac{\partial k}{\partial c_0} < 0$ , o znamienku derivácie  $\frac{dc_0}{dT}$  teda rozhodne menovateľ  $\frac{\partial k}{\partial T}$ , teda to, v ktorej oblasti trajektórie končia. Ak  $\frac{\partial k}{\partial T} < 0$ , tak aj  $\frac{dc_0}{dT} < 0$  a naopak ak  $\frac{\partial k}{\partial T} > 0$ , tak

aj  $\frac{dc_0}{dT} > 0$ . Toto sú však len lokálne vlastnosti, globálne vlastnosti overíme empiricky.

Pozrime sa teraz na úlohu z trochu iného pohľadu, ktorý nám uľahčí numerické výpočty. Uvažujme úlohu, kde máme zadané okrajové podmienky  $k_0, k_T$ , no namiesto času  $T$  máme zadanú počiatočnú hodnotu spotreby  $c_0$  a našou úlohou je vypočítať práve hodnotu  $T$ . Nech  $k_0$  a  $k_T$  sú pevne dané a hýbeme len hodnotu počiatočnej spotreby. Na Obr. 17 je zobrazená závislosť získaná numerickým riešením pre úlohu o Ramseyho modeli, ktorou sme sa zaoberali v Príklade 1, pre rôzne okrajové podmienky.

- Obr. 17(a) zodpovedá typu trajektórií, ktoré sú na Obr. 11. Všetky končia v oblasti II. nad izoklínou  $c = f(k) - \delta k$ , kde  $\frac{\partial k}{\partial t} < 0$  a preto je závislosť klesajúca.
- Trajektórie na Obr.17(b) môžeme spojiť s Obr.9. Tieto celé ležia nad izoklínou  $c = f(k) - \delta k$ , teda opäť končia v oblasti, kde  $\frac{\partial k}{\partial t} < 0$  a teda je  $c_0$  klesajúcou funkciou času  $T$ .
- Možno si všimnúť, že trajektórie na Obr. 17(c) a Obr. 17(e) vyhovujú okrajovým podmienkam rovnakého typu. Ide o trajektórie podobné tým na Obr. 10. Na Obr. 17(c) je závislosť pre tie trajektórie, ktoré celé ležia nad stabilnou sedlovou cestou. Tieto určite končia nad izoklínou  $c = f(k) - \delta k$  a preto je závislosť klesajúca. Tie na Obr. 17(e) začínajú pod sedlovou cestou. V tomto prípade jednej hodnote počiatočnej spotreby  $c_0$  zodpovedajú dve trajektórie, jedna končí v oblasti nad spomínanou izoklínou, druhá je jej pokračovaním až do oblasti pod touto izoklínou. Pre kratší čas teda trajektórie spĺňajú  $\frac{\partial k}{\partial t} < 0$ , preto je  $c_0$  najprv klesajúcou funkciou  $T$  a pre dlhší čas platí  $\frac{\partial k}{\partial t} > 0$  a teda  $c_0$  je rastúcou funkciou  $T$ .
- Podobne sa môžeme pozrieť na trajektórie na Obr. 17(d) a Obr. 17(f). Tieto sú rovnakého typu ako tie na Obr. 7. Na Obr. 17(f) je závislosť pre tie, ktoré začínajú pod stabilnou sedlovou cestou a na Obr. 17(d) tie, ktoré začínajú nad touto sedlovou cestou. V tomto prípade opäť existujú dve trajektórie, ktoré spĺňajú rovnaké okrajové podmienky. Kratšie trajektórie končia v oblasti pod izoklínou  $c = f(k) - \delta k$ , dlhšie nad ňou, preto bude  $c_0$  najprv rastúcou funkciou času  $T$  a neskôr bude klesať s rastúcim  $T$ .
- Obr. 17(g) zodpovedá trajektóriám na Obr. 6. Keďže tieto celé ležia pod izoklínou pre  $\dot{k} = 0$ , kde platí  $\dot{k} > 0$ , tak  $c_0$  je rastúcou funkciou času  $T$ .

- Na poslednom Obr. 17(h) sú trajektórie, zobrazené na Obr. 8, ktoré celé ležia v oblasti IV. pod nestabilnou sedlovou cestou. Tu je kapitál  $k$  rastúcou funkciou času a preto je tu  $c_0$  rasrúcou funkciou koncového času  $T$ .

(a)  $k_T < k_0 < \bar{k}$ (b)  $k_T < \bar{k} < k_0$ (c)  $\bar{k} < k_T < k_0$ ,  $c_0$  nad sedlovou cestou(d)  $k_0 < k_T < \bar{k}$ ,  $c_0$  nad sedlovou cestou(e)  $\bar{k} < k_T < k_0$ ,  $c_0$  pod sedlovou cestou(f)  $k_0 < k_T < \bar{k}$ ,  $c_0$  pod sedlovou cestou(g)  $k_0 < \bar{k} < k_T$ (h)  $\bar{k} < k_0 < k_T$ Obr. 17: Závislosť  $c_0$  a  $T$

### 3.4 Analýza v priestore stavovej a adjungovanej premennej

Zatiaľ sme úlohu riešili v priestore stavovej premennej  $k$  a riadiacej premennej  $c$ , keďže v tomto prípade môžeme riešenie jednoducho interpretovať. Úlohu možno riešiť aj v priestore stavovej premennej  $k$  a adjungovanej premennej  $\psi$ . Podľa [5] možno premennú  $\psi$  interpretovať ako tieňovú cenu, teda táto premenná vyjadruje akú hodnotu má pre nás dodatočná jednotka kapitálu. Aj keď môže toto riešenie byť ťažšie interpretovateľné, môže nám v niektorých prípadoch pomôcť. Uvažujme napr. Bolzovu úlohu, v ktorej je  $k$  účelovej funkcii prirátaná funkcia koncovej spotreby

$$\int_0^T e^{-rt} U(c(t)) dt + \varphi(k(T)) \quad (3.19)$$

a navyše nech je úloha s voľným koncom, t.j. nemáme koncovú podmienku  $k(T) = k_T$ . Pre túto úlohu sa podľa [5] zmení len podmienka tranzverzality, ktorá má v takomto prípade tvar:

$$\psi(T) = 0 \cdot \chi + \frac{\partial \varphi(k(T))}{\partial k} \psi^0 = \frac{\partial \varphi(k(T))}{\partial k}. \quad (3.20)$$

Ak by sme túto úlohu riešili v priestore stavovej a riadiacej premennej, nemali by sme dostatok okrajových podmienok. Avšak v prípade, že túto úlohu riešime v priestore stavovej a adjungovanej premennej, máme okrem počiatočnej podmienky  $k(0) = k_0$  aj koncovú podmienku (3.20).

Pre odvodenie rovníc v tomto prípade využijeme tzv. current value formuláciu Hamiltonovej funkcie (pozri [5]), v ktorej sa používa substitúcia  $\tilde{\psi}(t) = e^{rt}\psi(t)$ . Pre zjednodušenie nebudeme v ďalšom písať nad adjungovanou premennou vlnovku. Potom podľa Vety 1.1 adjungovaná rovnica má nasledovný tvar

$$\dot{\psi} = r\psi - \psi^0 \cdot 0 - (f'(k) - \delta)\psi = (r + \delta - f'(k))\psi. \quad (3.21)$$

Podmienka maxima má tvar

$$\tilde{H}(t, \hat{k}, c, \psi) = \max_c U(c) + \psi(f(\hat{k}) - \delta\hat{k} - c). \quad (3.22)$$

Aplikovaním nutnej podmienky na (3.22) dostaneme

$$U'(c) = \psi. \quad (3.23)$$

Keďže  $U$  je konkávna, tak funkcia  $U'$  je klesajúca a teda existuje k nej inverzná funkcia, ktorú označíme  $V$ . Potom platí

$$c = V(\psi). \quad (3.24)$$

Dosadením do stavovej rovnice (3.2) máme

$$\dot{k} = f(k) - \delta k - V(\psi). \quad (3.25)$$

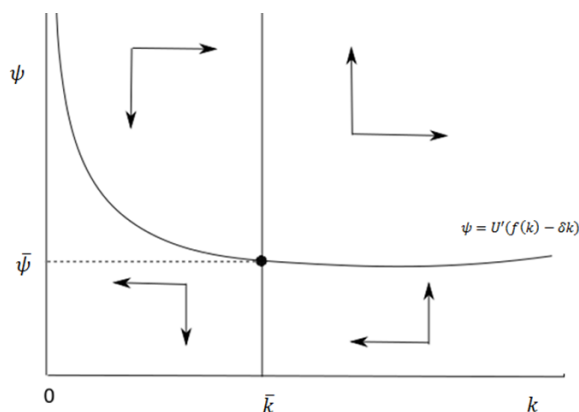
Máme teda sústavu diferenciálnych rovníc

$$\dot{k} = f(k) - \delta k - V(\psi), \quad (3.26)$$

$$\dot{\psi} = (r + \delta - f'(k))\psi, \quad (3.27)$$

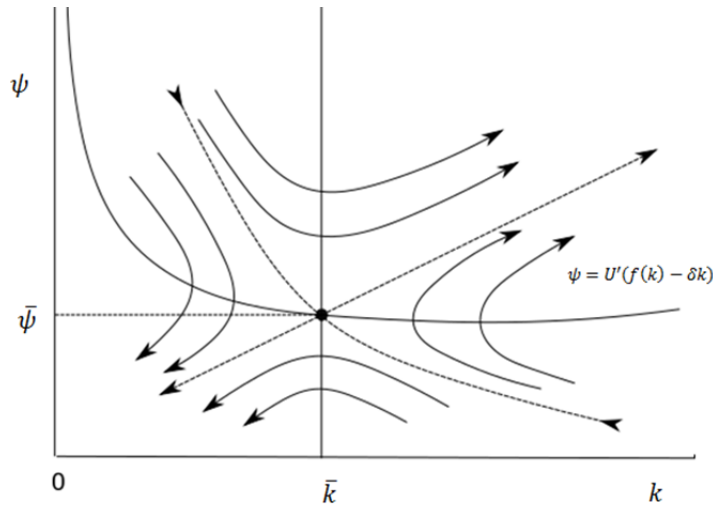
ktorú budeme riešiť pomocou fázového portréту. Z rovnice (3.26) máme  $V(\psi) = f(k) - \delta k$  a keďže  $V$  je inverzná funkcia k  $U'$ , tak izoklína pre  $\dot{k} = 0$  má tvar  $\psi = U'(f(k) - \delta k)$ . Keďže  $U'(c)$  je klesajúca a funkcia  $f(k) - \delta k$  je konkávna a má maximum pre nejaké  $k_M$ , tak zložená funkcia  $U'(f(k) - \delta k)$  bude klesajúca až po bod, kde  $k = k_M$ , potom bude rásť. Pre  $\dot{\psi} = 0$  máme z rovnice (3.27) izoklíny  $\psi = 0$  a  $k = \bar{k}$ , kde  $\bar{k}$  spĺňa  $r + \delta = f'(\bar{k})$ . Pevný bod  $(\bar{k}, \bar{\psi})$  je prienikom kriviek  $k = \bar{k}$  a  $\psi = U'(f(k) - \delta k)$ .

Opäť je pre nás zaujímavý prípad  $k > 0$  a  $\psi > 0$ . Izoklíny rozdelia túto oblasť na štyri izosektory. Vyšetříme teraz pohyb premenných s časom v jednotlivých sektoroch. Keďže  $f'(k)$  je klesajúca funkcia, tak  $r + \delta - f'(k) < 0$  pre  $k < \bar{k}$  a teda platí  $\dot{\psi} < 0$  naľavo od pevného bodu a naopak  $\dot{\psi} > 0$  napravo od pevného bodu. Premenná  $\psi$  je teda klesajúcou funkciou času naľavo od pevného bodu a rastúcou funkciou času napravo od tohto bodu. Funkcia  $V(\psi)$  je klesajúca funkcia a teda  $\dot{k} = f(k) - \delta k - V(\psi) < 0$  pod izoklínou pre  $\dot{k} = 0$  a  $\dot{k} = f(k) - \delta k - V(\psi) > 0$  nad touto krivkou. Platí teda, že  $k$  rastie s časom  $t$  nad krivkou  $\psi = U'(f(k) - \delta k)$  a naopak klesá s časom pod touto krivkou. Na Obr. 18 sú zobrazené izoklíny spolu so smerom pohybu premenných s časom.



**Obr. 18:** Izoklíny pre systém rovníc (3.26)-(3.27)

Všeobecným riešením sústavy je opäť množina trajektórií, z ktorých niektoré sú zobrazené na Obr. 19.



**Obr. 19:** Všeobecné riešenie pre systém rovníc (3.26)-(3.27)

Tak ako v prípade fázového portréту v priestore  $(k, c)$  z obrázka vidíme, že pevný bod je zrejme typu sedlo. Toto tušenie overíme pomocou determinantu Jakobiho matice v pevnom bode. Táto má v tomto prípade tvar

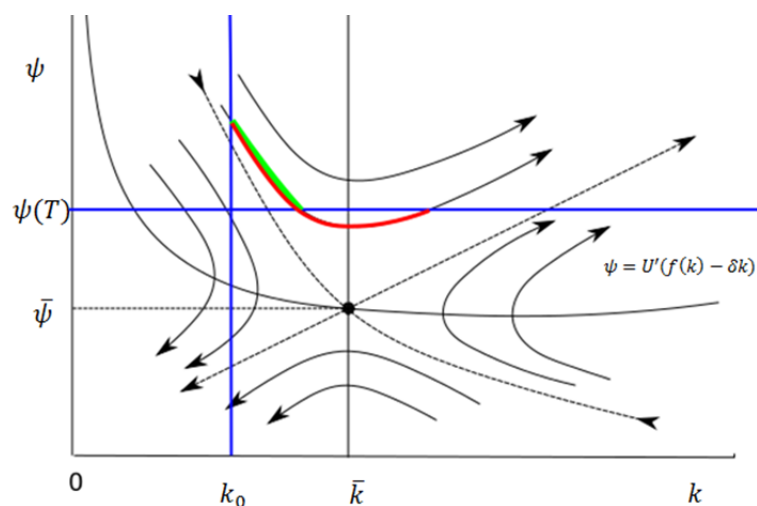
$$J(\bar{k}, \bar{\psi}) = \begin{bmatrix} f'(\bar{k}) - \delta & -V'(\psi) \\ -f''(\bar{k})\bar{\psi} & [r + \delta - f'(\bar{k})] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(\bar{k}) - \delta & -V'(\psi) \\ -f''(\bar{k})\bar{\psi} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Determinant tejto matice je

$$\det(J) = -V'(\psi)f''(\bar{k})\bar{\psi}. \quad (3.29)$$

Keďže funkcia  $V$  je klesajúca, tak  $V'(\psi)$  je záporná. Navyiac je z predpokladov  $f''(k)$  taktiež záporná. Determinant je teda záporný. Keďže ide o  $2 \times 2$  maticu, tak bude mať dve reálne vlastné čísla, z ktorých je jedno kladné a druhé záporné a teda je pevný bod opäť typu sedlo.

Na Obr. 20 sú zobrazené vyhovujúce trajektórie pre počiatočnú podmienku  $k_0$  a podmienku tranzverzality (3.20). Trajektórie zobrazené na obrázku sú len dve z mnohých, ktoré vyhovujú týmto podmienkam.



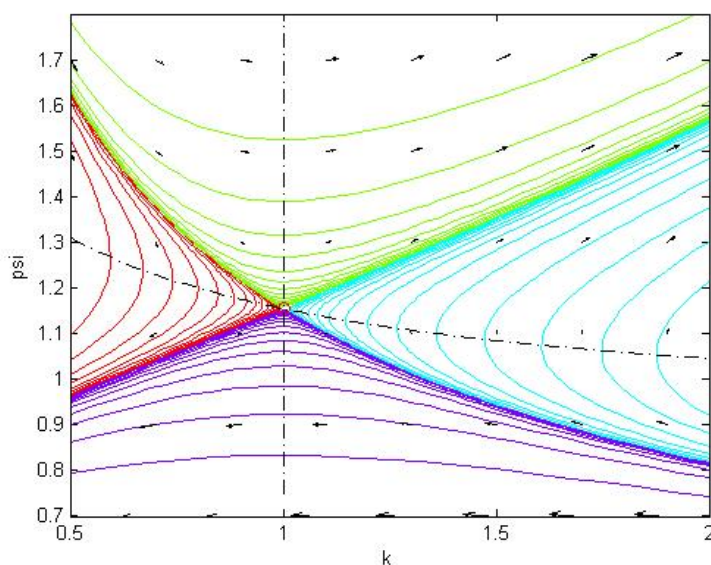
**Obr. 20:** Riešenie spĺňajúce okrajové podmienky

Uvažujme opäť Príklad 1 z predošlej podkapitoly. V tomto prípade má funkcia  $V$  tvar  $V(\psi) = \frac{1}{\psi^2}$ . Sústava rovníc (3.26) a (3.27) má tvar

$$\dot{k} = \sqrt{k} - 0.25k - \frac{1}{\psi^2}, \quad (3.30)$$

$$\dot{\psi} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\psi. \quad (3.31)$$

Pevný bod  $(\bar{k}, \bar{\psi}) = (1, \frac{2}{\sqrt{3}})$  je prienikom izoklín  $k = 1$  a  $\psi = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{k}-0.25k}}$ . Opäť ide o pevný bod typu sedlo, čo možno vidieť na Obr. 21, kde je zobrazené všeobecné riešenie sústavy (3.30) a (3.31).



**Obr. 21:** Fázový portrét v priestore stavovej a adjungovanej premennej pre (3.31)-(3.31)

Ak Obr. 21 porovnáme s Obr. 12, môžeme si všimnúť ako ho ovplyvnil vzťah medzi radiacou premennou a adjungovanou premennou  $c = \frac{1}{\psi^2}$ . Tieto fázové portréty sú akýmsi zrkadlovým obrazom. Zmenil sa tvar izoklíny pre  $\dot{k} = 0$ . Táto bola v predošlom prípade konkávnou funkciou, teraz je to konvexná funkcia. V zodpovedajúcich izosektoroch, kde premenná  $c$  rástla, premenná  $\psi$  klesá a naopak. Takisto to ovplyvnilo aj premennú  $k$ . V izosektoroch, kde predtým rástla, teraz klesá a naopak.



## 4 Úloha o optimálnej spotrebe

V tejto kapitole sa budeme zaoberať úlohou o optimálnej spotrebe, ktorá je špeciálnym prípadom Ramseyho modelu rastu. V tejto úlohe, tak ako v [5], uvažujeme lineárnu produkčnú funkciu a neuvažujeme amortizáciu. Úloha má tvar

$$\max \int_0^T e^{-rt} U(c(t)) dt, \quad (4.1)$$

$$\dot{k}(t) = ik(t) - c(t), \quad (4.2)$$

$$k(0) = k_0, \quad (4.3)$$

$$k(T) = k_T, \quad (4.4)$$

kde  $k_0$ ,  $k_T$  a  $T$  sú kladné konštanty. Aj v tomto prípade kladná konštanta  $r$  predstavuje mieru netrpezlivosti spotrebaváča. Kladná konštanta  $i$  predstavuje úrokovú mieru, ktorou sa navyšuje kapitál. Funkcia užitočnosti  $U(c)$  opäť spĺňa vlastnosti  $U'(c) > 0$ ,  $U''(c) < 0$ ,  $\lim_{c \rightarrow 0^+} U'(c) = \infty$  a  $\lim_{c \rightarrow \infty} U'(c) = 0$ . Zaujímá nás riešenie pre  $c \geq 0$ .

### 4.1 PPM, analytické riešenie a jednoznačnosť riešenia

Opäť na úlohu aplikujeme Pontrjaginov princíp maxima. Keďže nemáme ohraničenia na premennú  $c$  a stavová rovnica je lineárna v tejto premennej, tak  $\psi^0 = 1$ . Hamiltonova funkcia (1.6) má potom v tomto prípade tvar

$$H(k, c, t, \psi) = e^{-rt} U(c) + \psi(ik - c) \quad (4.5)$$

a adjungovaná rovnica (1.7) má tvar

$$\dot{\psi} = -i\psi. \quad (4.6)$$

Z podmienky maxima, ktorá má tvar

$$H(\hat{k}, \hat{c}, t, \psi) = \max_c \left[ e^{-rt} U(c) + \psi(i\hat{k} - c) \right], \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.7)$$

využitím nutnej podmienky optimality, získame rovnicu

$$e^{-rt} U'(c) - \psi = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.8)$$

čo možno ekvivalentne zapísať ako

$$\psi = e^{-rt} U'(c), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.9)$$

Keďže vzťah (4.9) má platiť pre všetky  $t \in [0, T]$ , tak jeho totálnou deriváciou podľa  $t$  získame vyjadrenie pre  $\dot{\psi}$ :

$$\dot{\psi} = -re^{-rt}U'(c) + e^{-rt}U''(c)\dot{c}. \quad (4.10)$$

Dosadením (4.9) a (4.10) do adjungovanej rovnice (4.6) a následnými úpravami dostaneme rovnicu pre  $\dot{c}$ :

$$\dot{c} = -\frac{U'(c)}{U''(c)}(i - r). \quad (4.11)$$

Keďže z predpokladov máme  $U'(c) > 0$  a  $U''(c) < 0$ , tak  $\frac{U'(c)}{U''(c)} < 0$ . Preto  $\dot{c}$  je kladné v prípade, že  $i > r$  a záporné pre  $i < r$ .

Aj v tomto prípade budeme uvažovať predpoklad (3.13), tzn. budeme predpokladať  $-\frac{U'(c)}{U''(c)} = Ac$ , kde  $A > 0$ . V takomto prípade dostaneme sústavu rovníc pre  $k$  a  $c$ , ktorá má tvar

$$\dot{k} = ik - c, \quad (4.12)$$

$$\dot{c} = Ac(i - r), \quad (4.13)$$

pričom zaujímať nás budú riešenia, kde  $k \geq 0$  a  $c \geq 0$ . Jakobiho matica pre túto sústavu má tvar

$$J = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 0 & A(i - r) \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Sústava (4.12)-(4.13) je lineárna a možno ju riešiť analyticky. Z rovnice (4.13) máme

$$c(t) = c_0 e^{A(i-r)t}. \quad (4.15)$$

Dosadením a riešením rovnice (4.12) potom pre  $A(i - r) \neq i$  dostaneme

$$k(t) = \left( k_0 - \frac{c_0}{i - A(i - r)} \right) e^{it} + \frac{c_0}{i - A(i - r)} e^{A(i-r)t}. \quad (4.16)$$

Ak by  $A(i - r) = i$ , tak riešenie pre stavovú premennú má tvar

$$k(t) = e^{it}(k_0 - c_0 t). \quad (4.17)$$

Tak ako pri Ramseyho modeli nás môže zaujímať, či riešenie, ktoré dostaneme pre okrajové podmienky  $k_0$ ,  $k_T$  a  $T$  je dané jednoznačne. Pre Hamiltonovu funkciu (4.5) platí  $H_{cc} = e^{-rt}U''(c) < 0$ ,  $H_{kc} = 0$  a  $H_{kk} = 0$  a teda je konkávna v premenných

$(k, c)$ , nie však rýdzokonkávna. Naviac je koncová podmienka (4.4) lineárna a množina  $U = \{c | c \geq 0\}$  je konvexná. Z Vety 1.2 tak máme zaručenú postačujúcosť podmienok Pontrjaginovho princípu maxima, nie však jednoznačnosť. Tú získame z analytického riešenia. Z (4.16), resp. (4.17) vieme pri daných  $k_0, k_T$  a  $T$  vyjadriť

$$c_0 = \frac{i - A(i - r)}{e^{A(i-r)T} - e^{iT}} (k_T - k_0 e^{iT}) \quad \text{pre } A(i - r) \neq i, \quad (4.18)$$

resp.

$$c_0 = \frac{k_0 e^{iT} - k_T}{e^{iT} T} \quad \text{pre } A(i - r) = i. \quad (4.19)$$

Keďže  $c_0$  je takto v oboch prípadoch jednoznačne dané a štvorica  $k_0, k_T, T$  a  $c_0$  jednoznačne určí trajektóriu, tak je riešenie jediné. Keďže zmysel má len riešenie, kde  $c \geq 0$ , tak potrebujeme, aby  $c_0 \geq 0$ , inak úloha nemá riešenie.

## 4.2 Analýza fázového portrétu

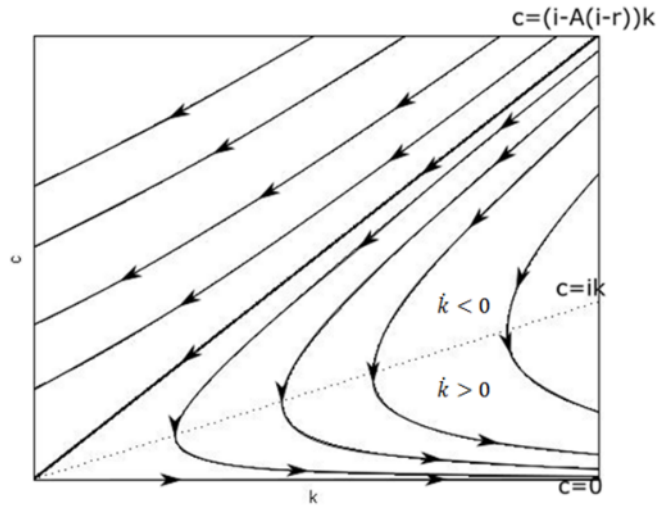
Teraz budeme systém (4.12)-(4.13) riešiť pomocou analýzy fázového portrétu. Uvažujme najprv prípad  $i \neq r$ . Ďalej nech  $A(i - r) \neq i$ . Z prvej rovnice dostaneme izoklínu pre  $\dot{k} = 0$ , ktorou je priamka  $c = ik$ . Nad touto priamkou je  $\dot{k} < 0$  a teda kapitál klesá s časom, naopak pod touto krivkou platí  $\dot{k} > 0$  a teda kapitál rastie s časom. Z druhej rovnice získame izoklínu pre  $\dot{c} = 0$ , ktorou je krivka  $c = 0$ .

Pre túto úlohu tak dostaneme jeden pevný bod  $(\bar{k}, \bar{c}) = (0, 0)$ . O aký typ pevného bodu ide zistíme z Jakobiho matice (4.14). Ak platí  $i > r$ , tak sú vlastné čísla  $\lambda_1 = i$  a  $\lambda_2 = A(i - r)$  reálne a kladné, pôjde o pevný bod typu nestabilný uzol. V opačnom prípade, teda ak  $i < r$ , budú vlastné čísla reálne, no jedno kladné a druhé záporné, a teda ide o pevný bod typu sedlo.

### Prípad $i < r$ :

Fázový portrét pre tento prípad je zobrazený na Obr. 22. Prerušovaná priamka  $c = ik$  je izoklína pre premennú  $k$ . Pritom  $k$  rastie s časom  $t$  pod touto izoklínou, keďže tu platí  $\dot{k} > 0$  a klesá nad touto krivkou, kde platí  $\dot{k} < 0$ . Druhou izoklínou je priamka  $c = 0$ . V tomto prípade platí  $\dot{c} \leq 0$  pre všetky  $c \geq 0$  a teda spotreba  $c$  bude vždy klesať alebo bude rovná nule. Keďže vlastný vektor pre vlastné číslo  $\lambda_1 = i > 0$  je  $v_1 = (1, 0)^T$ , tak priamka  $c = 0$  zároveň zodpovedá nestabilnej sedlovej ceste. Druhému vlastnému číslu  $\lambda_2 = A(i - r) < 0$  zodpovedá vlastný vektor  $v_2 = (1, i - A(i - r))$  a

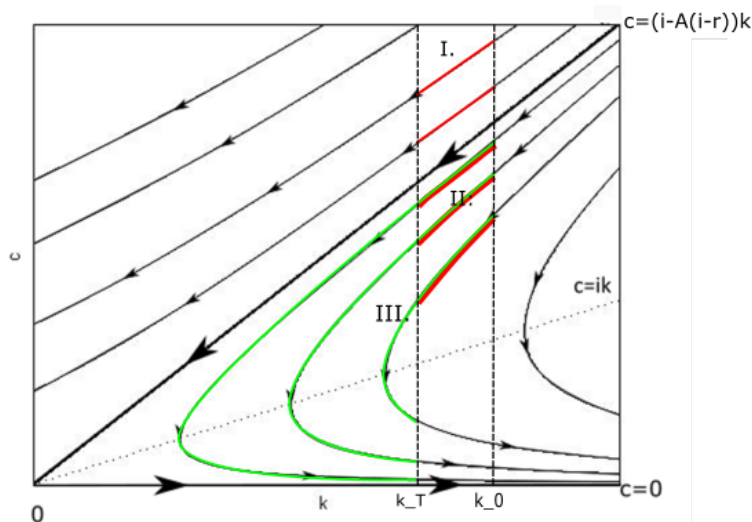
teda priamka  $c = (i - A(i - r))k$  predstavuje stabilnú sedlovú cestu. Vzhľadom na to, že  $i < r$  platí  $i < i - A(i - r)$  a preto je stabilná sedlová cesta celá nad izoklínou  $c = ik$ . Zaujímá nás, aké riešenia vyhovujú rôznym okrajovým podmienkam.



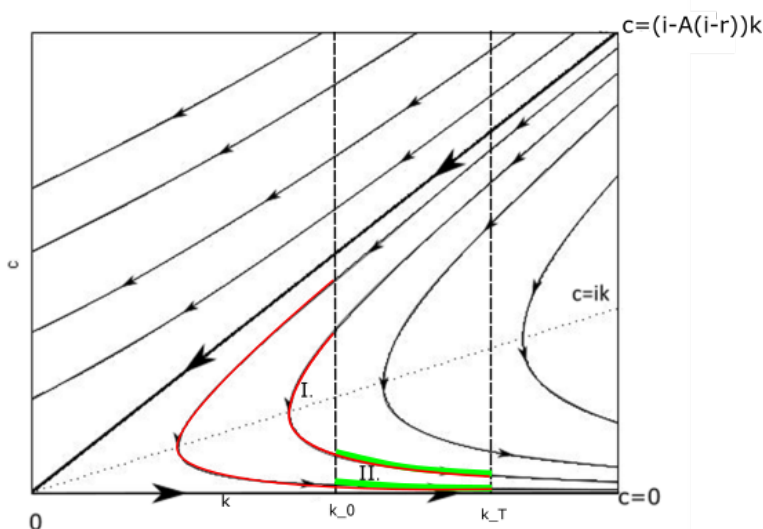
Obr. 22: Fázový portrét pre  $i < r$

Uvažujme najprv prípad, kedy je počiatočný kapitál  $k_0$  väčší ako koncový kapitál  $k_T$ . Niektoré trajektórie, ktoré vyhovujú týmto podmienkam sú zobrazené na Obr.23. Ako sme očakávali spotreba  $c$  vždy klesá s časom. Všetky trajektórie začínajú v oblasti nad izoklínou  $c = ik$ . Trajektórie vyznačené červenou farbou v tejto oblasti aj končia, preto kapitál  $k$  stále klesá s časom. Trajektórie označené zelenou končia v oblasti pod touto izoklínou. Preto v tomto prípade najprv kapitál klesá a po prekročení izoklíny začne rásť.

Uvažujme teraz opačný prípad, kedy počiatočný kapitál  $k_0 > 0$  je menší ako koncový kapitál  $k_T > 0$ . Opäť je množstvo trajektórií, ktoré vyhovujú týmto podmienkam, štyri z nich sú zobrazené na Obr. 24. Spotreba  $c$  opäť po celý čas klesá. Ak uvažujeme zelené trajektórie, ktoré sa celé nachádzajú pod izoklínou  $c = ik$ , tak vidíme, že kapitál po celý čas rastie. Avšak červené trajektórie začínajú v oblasti, kde  $\dot{k} < 0$  a teda kapitál  $k$  najprv klesá. Neskôr prekročia izoklínu  $c = ik$  a prejdú do oblasti, kde kapitál  $k$  rastie.



**Obr. 23:** Trajektórie pre  $k_0 > k_T$  v prípade  $i < r$



**Obr. 24:** Trajektórie pre  $k_0 < k_T$  v prípade  $i < r$

Pri úlohe s pevným časom máme zadaný okrem okrajových podmienok aj koncový čas  $T$ . Závislosťou medzi časom  $T$  a počiatočnou spotrebou  $c_0$  sa budeme bližšie zaoberať v ďalšej podkapitole. Teraz sa zamyslíme nad tým, či existuje riešenie pre ľubovoľne malý čas  $T$ . Ak  $k_0 > k_T$ , tak stačí zvoliť dostatočne veľkú spotrebu  $c$ , aby sme sa za čas  $T$  dostali z  $k_0$  do  $k_T$ . Ak však naopak  $k_0 < k_T$ , najrýchlejšie môžeme medzi týmito bodmi prejsť, ak je spotreba nulová. Potom rovnica (4.12) sa zjednoduší na tvar  $\dot{k} = ik$ . Jej riešenie pri počiatočnej podmienke  $k_0$  je  $k(t) = k_0 e^{it}$ . Ak dosadíme koncovú

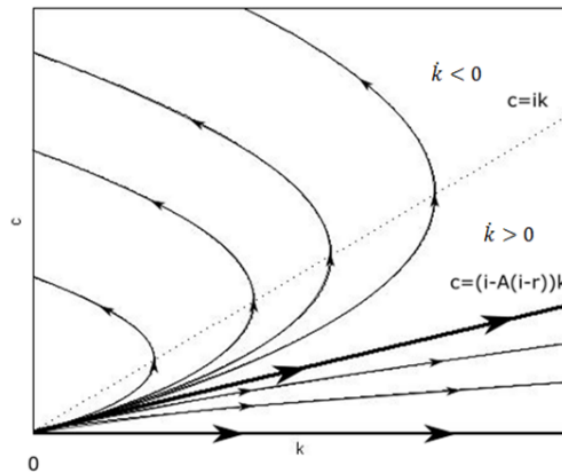
podmienku  $k_T$  dostaneme vyjadrenie pre minimálny čas vzhľadom na podmienky  $k_0$  a  $k_T$ :

$$T = \frac{1}{i} \ln \left( \frac{k_T}{k_0} \right) > 0. \quad (4.20)$$

Čas  $T$  teda nemôže byť ľubovoľne malý.

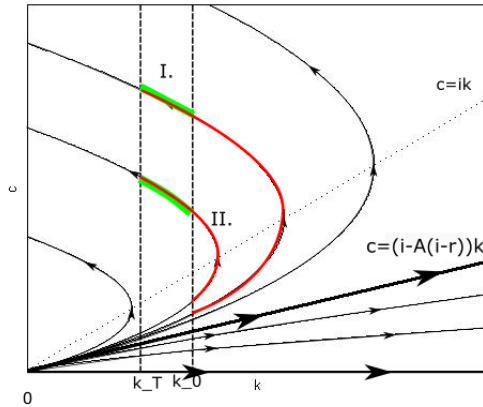
**Prípado  $i > r$ :**

V tomto prípade ide o pevný bod typu nestabilný uzol, ako možno vidieť aj na fázovom portréte zobrazenom na Obr. 25, kde všetky trajektórie sa pohybujú od pevného bodu  $(0,0)$ . Opäť prerušovaná priamka  $c = ik$  predstavuje izoklínu pre  $\dot{k} = 0$ . Tak ako v predošlom prípade stále platí, že  $\dot{k} < 0$  nad touto izoklínu a  $\dot{k} > 0$  pod ňou. V tomto prípade bude platiť  $i - A(i - r) < i$ . Naviac uvažujeme, že  $i - A(i - r) > 0$ . Preto bude priamka, ktorá zodpovedá vlastnému vektoru  $v_2 = (1, i - A(i - r))^T$  pod izoklínu  $c = ik$ . Druhou izoklínu je opäť priamka  $c = 0$ . Pre  $c > 0$  platí  $\dot{c} > 0$  a teda spotreba  $c$  pre  $c > 0$  bude rásť s časom  $t$ .



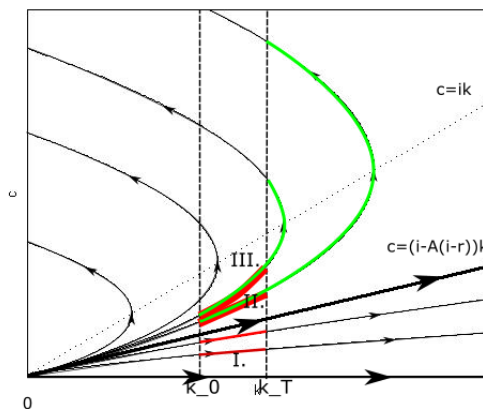
**Obr. 25:** Fázový portrét pre  $i > r$

Nech najprv počiatkový kapitál  $k_0$  je väčší ako koncový kapitál  $k_T$ . Opäť sme zobrazili niektoré trajektórie, ktoré vyhovujú takýmto podmienkam. Ako vidíme na Obr.26, kratšie zelené trajektórie ležia celé v oblasti nad izoklínu  $c = ik$  a teda kapitál po celý čas klesá. Dlhšie červené trajektórie začínajú pod touto izoklínu, no pretnú ju a končia v oblasti nad ňou. Kapitál teda najprv rastie až potom klesá. Obe trajektórie však určite končia v oblasti, kde  $\dot{k} < 0$ .



**Obr. 26:** Trajektórie pre  $k_0 > k_T$  v prípade  $i > r$

Trajektórie pre prípad  $k_0 < k_T$  sú zobrazené na Obr. 27. Možno si všimnúť, že červené trajektórie sú celé v oblasti, kde  $\dot{k} > 0$  a teda kapitál  $k$  po celý čas rastie. Zelené trajektórie taktiež začínajú v tejto oblasti, no neskôr pretnú izoklínu  $c = ik$  a skončia v oblasti, kde  $\dot{k} < 0$ . Kapitál  $k$  teda najprv rastie s časom a neskôr klesá.

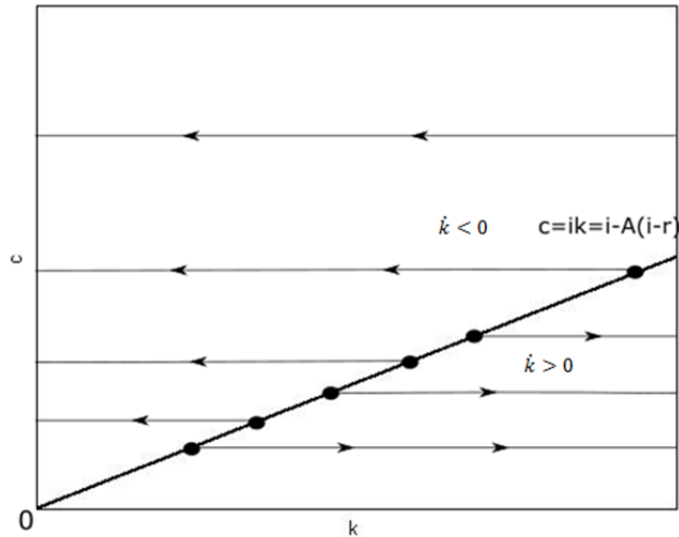


**Obr. 27:** Trajektórie pre  $k_0 < k_T$  v prípade  $i > r$

### Prípad $i=r$ :

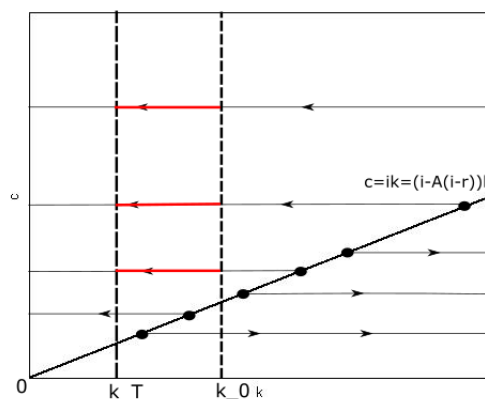
V tomto prípade sa rovnica (4.13) zjednoduší na tvar  $\dot{c} = 0$ . Znamená to, že spotreba je konštantná a nemení sa v čase. Fázový portrét pre tento prípad je zobrazený na Obr. 28. Vidíme, že izoklína  $c = ik$  je zhodná s priamkou  $c = (i - A(i - r))k$ , ktorá zodpovedá vlastnému vektoru pre vlastné číslo  $\lambda_2 = A(i - r)$ . Opäť sa nezmenilo, že  $\dot{k} < 0$  nad touto krivkou a naopak  $\dot{k} > 0$  pod ňou. Dôležité je poznamenať, že v tomto prípade

nemáme jeden pevný bod, ale celú priamku pevných bodov  $c = ik$ , keďže pre všetky body na tejto priamke platí  $\dot{k} = 0$  a  $\dot{c} = 0$ .



Obr. 28: Fázový portrét pre prípad  $i = r$

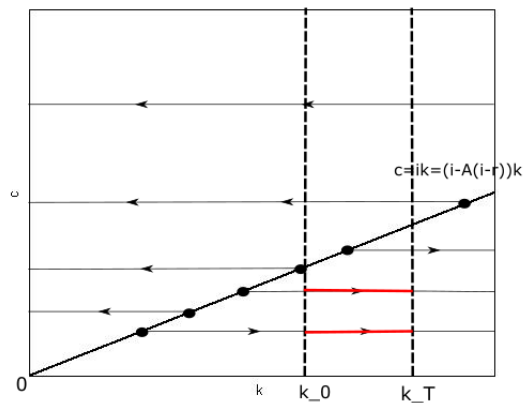
Ak zvolíme  $k_0 > k_T$ , tak trajektórie, ktoré vyhovujú týmto podmienkam, sa celé nachádzajú nad izoklínu  $c = ik$ . Začínajú aj končia teda v oblasti, kde  $\dot{k} < 0$ . Ako môžeme vidieť aj v Obr. 29, tak spotreba  $c$  je konštantná a väčšia ako  $c = (i - A(i - r))k$ .



Obr. 29: Trajektórie pre  $k_0 > k_T$  v prípade  $i = r$

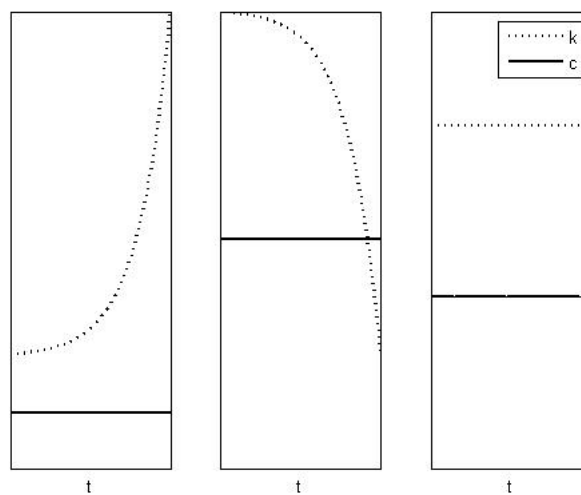
Naopak ak zvolíme  $k_0 < k_T$  ako na Obr. 30, vyhovujúce trajektórie ležia celé pod izoklínu  $c = ik$ . Kapitál teda rastie s časom  $t$  a spotreba, ktorá leží pod priamkou  $c = (i - A(i - r))k$  je konštantná.





**Obr. 30:** Trajektórie pre  $k_0 < k_T$  v prípade  $i = r$

Ak by sme v tomto prípade zvolili počiatočný kapitál  $k_0$  rovný koncovému kapitálu  $k_T$ , kapitál  $k$  i spotreba  $c$  by zostali po celý čas konštatné. V Obr. 31 je zobrazený časový priebeh pre kapitál  $k$  a spotrebu  $c$  pre všetky tri prípady, postupne pre prípad  $k_0 > k_T$ ,  $k_0 < k_T$  a  $k_0 = k_T$ .



**Obr. 31:** Časový priebeh pre  $k_0 > k_T$ ,  $k_0 < k_T$  a  $k_0 = k_T$  v prípade  $i = r$

### 4.3 Závislosť počiatočnej spotreby a koncového času

Podobne ako pri Ramseyho modeli, aj teraz nás môže zaujímať závislosť koncového času  $T$  a počiatočnej spotreby  $c_0$ . V tomto prípade síce nie sú splnené predpoklady Vety 1.4, keďže v Jakobiho matici je pod diagonálou nula, avšak možno ukázať, že

platí  $\frac{\partial k}{\partial c_0}(T, c_0) < 0$ . Z rovnice (4.16) máme pre  $A(i-r) \neq i$

$$\frac{\partial k}{\partial c_0}(T, c_0) = \frac{1}{i - A(i-r)} [e^{A(i-r)T} - e^{iT}] < 0, \quad (4.21)$$

pretože ak  $i > A(i-r)$ , tak je prvý zlomok kladný, zatiaľ čo člen v hranatej zátvorke je záporný. Ak naopak  $i < A(i-r)$ , tak člen v zátvorke je kladný, ale zlomok je záporný. Pre  $A(i-r) = i$  máme z (4.17)

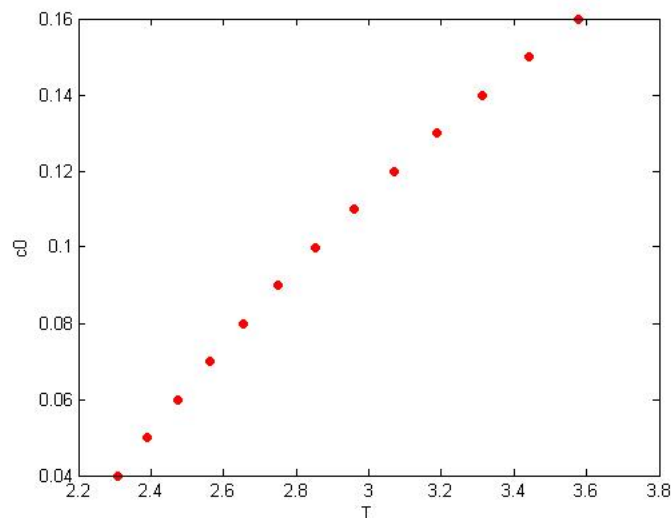
$$\frac{\partial k}{\partial c_0}(T, c_0) = -e^{iT}T < 0. \quad (4.22)$$

Platí teda  $\frac{\partial k}{\partial c_0}(T, c_0) \neq 0$  a na koncovú podmienku (4.4) možno použiť vetu o derivácii implicitnej funkcie, z ktorej dostaneme

$$\frac{\partial c_0}{\partial T} = -\frac{\frac{\partial k}{\partial T}}{\frac{\partial k}{\partial c_0}}. \quad (4.23)$$

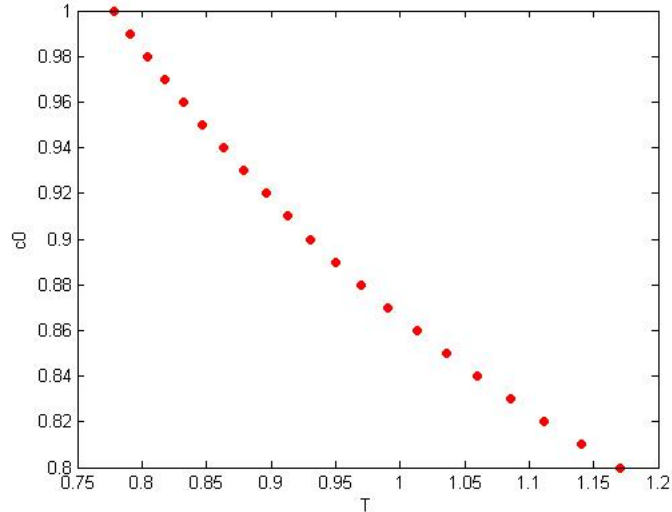
Keďže  $\frac{\partial k}{\partial c_0}(T, c_0) < 0$ , tak aj v tomto prípade o znamienku  $\frac{\partial c_0}{\partial T}$  rozhodne derivácia  $\frac{\partial k}{\partial T}$ . Rovnako ako pri Ramseyho modeli teda o tom, či bude koncový čas klesať alebo rásť s počiatočnou spotrebou, rozhodne to v akej oblasti trajektórie končia.

Uvažujme najprv prípad  $i < r$  a teda pevný bod typu sedlo. Trajektórie zobrazené na Obr. 24, ktoré splňajú  $k_0 < k_T$ , končia v oblasti pod izoklínu  $c = ik$  a teda platí  $\frac{\partial k}{\partial T} > 0$ . Z toho vyplýva, že  $\frac{\partial c_0}{\partial T} > 0$ . V tomto prípade teda s rastúcou počiatočnou spotrebou  $c_0$  rastie aj koncový čas  $T$ . To možno vidieť aj na Obr. 32, v ktorom sú zobrazené niektoré riešenia počiatočnej úlohy, pre úlohu s  $U(c) = \ln(c)$ ,  $r = 0.5$  a  $i = 0.2$ .



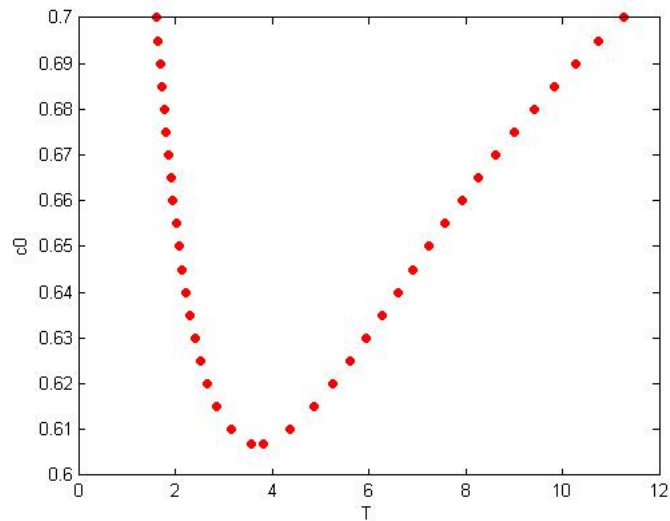
**Obr. 32:** Závislosť  $T$  a  $c_0$  pre  $k_0 < k_T$  v prípade  $i < r$

Ak zobrazíme takéto riešenia pre trajektórie ako je I. v Obr. 23, dostaneme Obr. 33. Tieto trajektórie celé ležia v oblasti, kde  $\frac{\partial k}{\partial T} < 0$  a teda počiatočná spotreba  $c_0$  je klesajúcou funkciou času  $T$ .



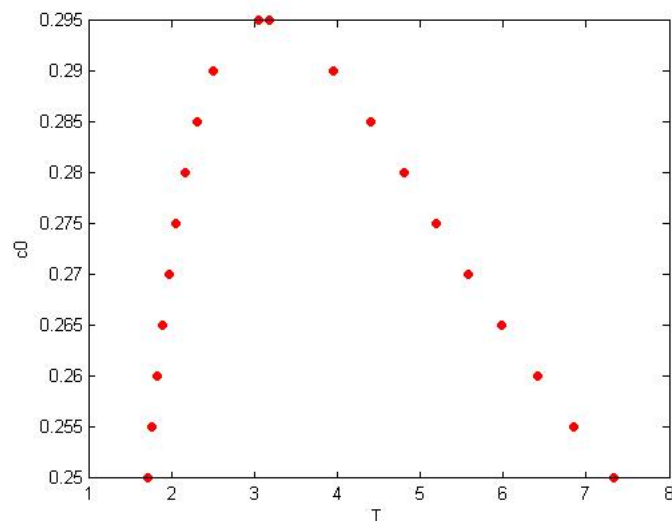
**Obr. 33:** Závislosť  $T$  a  $c_0$  pre  $k_0 > k_T$  v prípade  $i < r$ ,  $c_0$  nad sedlovou cestou

Zaujímavé sú trajektórie ako II. a III. na Obr. 23. Obe spĺňajú podmienky  $k(0) = k_0$  a  $k(T) = k_T$ , no jedna končí v oblasti nad izoklínu  $c = ik$  a druhá pod ňou. Kratšia z nich končí nad izoklínu  $c = ik$  a teda tu bude  $c_0$  klesať s časom  $T$ . Naopak pre trajektórie, ktoré končia pod touto izoklínu, bude platiť, že  $c_0$  bude rásť s časom  $T$ . Vidieť to môžeme aj na Obr. 34, kde sú opäť zobrazené niektoré riešenia počiatočnej úlohy. Minimum tejto funkcie by malo ležať práve v takom čase  $T$ , pre ktorý sa zodpovedajúca trajektória dotýka priamky, ktorá vyjadruje koncovú podmienku.



**Obr. 34:** Závislosť  $T$  a  $c_0$  pre  $k_0 > k_T$  v prípade  $i < r$ ,  $c_0$  pod sedlovou cestou

Podobnú analýzu možno spraviť aj pre prípad  $i > r$ , tzn. pre pevný bod typu nestabilný uzol. Zaujímavé sú najmä trajektórie typu II. a III., ktoré sú na Obr. 27. Tieto končia v rôznych oblastiach. Kratšie v oblasti, kde  $\frac{\partial k}{\partial T} > 0$  a teda spotreba  $c_0$  najprv rastie s časom  $T$ . Dlhšie trajektórie končia v oblasti, kde  $\frac{\partial k}{\partial T} < 0$  a preto tu naopak bude spotreba  $c_0$  klesať s časom  $T$ . Takúto závislosť môžeme vidieť aj na Obr. 35, kde je zobrazené riešenie pre  $U(c) = \ln(c)$ ,  $i = 0.5$  a  $r = 0.2$



**Obr. 35:** Závislosť  $T$  a  $c_0$  pre  $k_0 > k_T$ , v prípade  $i > r$ ,  $c_0$  nad sedlovou cestou

## Záver

Cieľom diplomovej práce bolo popísať postupy používané pri kvalitatívnej analýze pomocou fázového portréту, ilustrovať ich na vhodne vybratých úlohách a podrobnejšie analyzovať prípady, kedy jednoznačnosť riešenia z portrétov nie je zrejmá. Ďalším cieľom bolo z podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre autonómnu úlohu s diskontným faktorom odvodiť všeobecný tvar diferenciálnych rovníc a bližšie analyzovať vlastnosti pevného bodu. Prácu sme rozdelili na štyri kapitoly.

V prvej kapitole sme zhrnuli postup, ktorým možno z podmienok Pontrjaginovho princípu maxima získať sústavu diferenciálnych rovníc. Následne sme uviedli ako túto sústavu možno analyzovať pomocou fázového portréту. Uviedli sme aj niekoľko viet, ktoré sme neskôr využili. Dôležitá je napríklad Veta 1.2 o postačujúcosťi podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pri splnení určitých predpokladov, pôvodne z [5], ktorá nám neskôr pri Ramseyho modeli zaručila jednoznačnosť riešenia. V tejto kapitole sme tiež sformulovali Vetu 1.4, ktorú sme aj dokázali. Táto nám neskôr pomohla pri analýze vzťahu medzi koncovým časom  $T$  a počiatočnou spotrebou  $c_0$  pri Ramseyho modeli.

V druhej kapitole sme sa na základe [5] pokúsili o všeobecnejší pohľad na autonómnu úlohu optimálneho riadenia s rýdzokonkávnym Hamiltoniánom v riadiacej premennej. Pre takúto úlohu a príslušný systém diferenciálnych rovníc získaný z podmienok Pontrjaginovho princípu maxima sme odvodili všeobecný tvar Jakobiho matice v pevnom bode a jej determinantu, pomocou ktorého vieme identifikovať typ pevného bodu. Zároveň, keďže v ekonomických modeloch je pevný bod často typu sedlo, sme na niekoľkých príkladoch ukázali ako možno už z dát úlohy určiť takýto pevný bod bez potreby takúto úlohu riešiť.

Celá tretia kapitola je venovaná Ramseyho modelu rastu. Najskôr sme na fázových portrétoch v priestore stavovej a riadiacej premennej zobrazili riešenia pre rôzne okrajové podmienky a rôzne hodnoty koncového času  $T$ . Pri tomto modeli je jednoznačnosť zaručená, keďže sú splnené predpoklady Vety 1.2. Lokálne vieme túto jednoznačnosť zaručiť aj pomocou vety o derivácii implicitnej funkcie. Z tejto taktiež vieme vyjadriť deriváciu počiatočnej spotreby ako funkcie koncového času. S využitím našej Vety 1.4 sme zistili, že rastúcosť/ klesajúcosť  $c_0$  závisí od toho, kde uvažované trajektórie kon-

čia. Globálne vlastnosti sme skúmali numerickým riešením úlohy. Pre porovnanie sme tiež uviedli, ako vyzerá fázový portrét v priestore stavovej a adjungovanej premennej.

Poslednú kapitolu sme venovali úlohe o optimálnej spotrebe, ktorá je špeciálnym prípadom Ramseyho modelu rastu s lineárnou produkčnou funkciou a nulovou amortizáciou. Táto úloha je zaujímavá, keďže v závislosti od vzťahu medzi úrokovou mierou  $i$  a diskontným faktorom  $r$ , môže byť pevný bod buď typu sedlo alebo typu nestabilný uzol alebo môže nastať prípad nekonečného počtu pevných bodov. Postupne sme sa pozreli na všetky prípady. Tiež sme sa podobne ako pri Ramseyho modeli pozreli na vzťah medzi koncovým časom  $T$  a počiatočnou spotrebou  $c_0$ .

Pri numerickom riešení úloh sme využívali Matlab, obrázky sme taktiež kreslili a upravovali v programe Inkspace.

## Zoznam použitej literatúry

- [1] Attanasio, Orazio P.: *Frank Ramsey's A Mathematical Theory of Saving*, The Economic Journal 125 (2015), 269-294, dostupné na internete (30.11.2015):  
<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/ecoj.12229/full>
- [2] Beyn, W.-J., Pampel, T., Semmler, W.: *Dynamic optimization and Skiba sets in economic examples*, Optimal Control Applications and Methods 22 (2001) pp. 251-280, dostupné na internete (16.5.2016):  
<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/oca.696/abstract>
- [3] Caulkins, J.P. a kol.: *Leading bureaucracies to the tipping point: An alternative model of multiple stable equilibrium levels of corruption*, European Journal of Operational Research 225 (2013), pp. 541-546, dostupné na internete (10.4.2016):  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221712007722>
- [4] Greguš, M., Švec, M., Šeda, V.: *Obyčajné diferenciálne rovnice*, Alfa, Bratislava, 1985
- [5] Halická, M., Jurča, P.: *Optimálne riadenie II, učebné texty*, FMFI UK, Bratislava, 2012
- [6] Jurča, P.: *Ramseyho model ekonomického rastu ako úloha optimálneho riadenie*, Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2004, dostupné na internete (19.4.2016):  
<http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2004/jurca/diplomovka.pdf>
- [7] Kollár, M., Kossaczká, Ľ., Ševčovič, D.: *Diferenciálny a integrálny počet funkcií viac premenných v príkladoch*, vysokoškolské skriptá, FMFI UK, Bratislava, 2012, dostupné na internete (1.5.2016):  
<http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/knihy/difint-kks.pdf>
- [8] Leonard, D., Long, Ngo Van.: *Optimal Control Theory And Static Optimization in Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992
- [9] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, Bratislava, 2005

- [10] Ramsey, F. P.: *A mathematical Theory of Saving*, Economic Journal 38, s. 543–559, 1928, dostupné na internete (1.5.2016):  
[http://darp.lse.ac.uk/PapersDB/Ramsey\\_\(EJ\\_28\).pdf](http://darp.lse.ac.uk/PapersDB/Ramsey_(EJ_28).pdf)
- [11] Seierstad, A., Sydsaeter, K.: *Optimal Control Theory with Economic Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1987
- [12] Sethi, S.P.: *Dynamic Optimal Control Models in Advertising: A Survey*, SIAM Review 19 (1977), pp. 685-725, dostupné na internete (3.4.2016):  
<http://www.jstor.org/stable/2030250>
- [13] Sethi, S.P., Thompson, G.L.: *Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics*, Springer, New York, 2006
- [14] Shone, R.: *Economic Dynamics: Phase Diagrams and their Economic Application*, Cambridge University Press, New York, 2002
- [15] Skiba, A.K.: *Optimal Growth with a Convex-Concave Production Function*, Econometrica 46 (1978), pp. 527-539, dostupné na internete (10.4.2016):  
<http://www.jstor.org/stable/1914229>