UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OPTIMÁLNE RIADENIE HYPOTÉKY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2016 Bc. Dana GAŠPAROVIČOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OPTIMÁLNE RIADENIE HYPOTÉKY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko - finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	RNDr. Zuzana Chladná, Dr.

Bratislava 2016 **Bc. Dana GAŠPAROVIČOVÁ**

42426260

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Dana Gašparovičová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Optimálne riadenie hypotéky
Optimal mortgage refinancing

Cieľ: Diplomová práca nadviaže na diplomovú prácu Dany Bartošovej (2014): Option to switch, v ktorej sme naformulovali problém fixácie hypotéky ako úlohu optimálneho riadenia. Cieľom práce je daný model ďalej rozšíriť a podrobiť dôkladnej analýze.

Vedúci: RNDr. Zuzana Chladná, Dr.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 10.02.2015

Dátum schválenia: 11.02.2015

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

....

študent vedúci práce

Poďakovanie:

Touto cestou by som sa chcela poďakovať vedúcej diplomovej práce RNDr. Zuzane Chladnej, Dr. za odborné vedenie, ochotu, rady a pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní práce.

Abstrakt

GAŠPAROVIČOVÁ, Dana: *Optimálne riadenie hypotéky* [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: RNDr. Zuzana Chladná, Dr., Bratislava, 2016, 66 s.

Najčastejším spôsobom financovania bývania je hypotekárny úver. V diplomovej práci sa zaoberáme problematikou optimálneho splácania hypotekárneho úveru z pohľadu klienta ako dlžníka. Hľadanie optimálnej stratégie klienta, rozhodujúceho sa medzi splácaním úveru pri variabilnej alebo fixnej úrokovej sadzbe, formulujeme ako stochastickú úlohu optimálneho riadenia. Za náhodné premenné považujeme vývoj úrokových sadzieb, ktorý charakterizujeme pomocou Cox-Ingersoll-Ross (CIR) procesu a diskretizujeme použitím binomického modelu. Problém fixácie hypotekárneho úveru riešime metódou dynamického programovania pre rôzne druhy vývoja variabilnej a fixnej úrokovej sadzby (deterministický, stochastický). Každú z možností sme podrobili dôkladnej analýze a pokúsili sme sa stanoviť najvýznamnejšie faktory ovplyvňujúce optimálnu voľbu fixácie úrokovej sadzby. Výsledky analýzy ukazujú, že okrem dĺžky fixácie úrokovej sadzby sú signifikantnými faktormi, ktoré majú vplyv na optimálne rozhodnutie klienta parametre CIR procesov, predovšetkým volatilita a dlhodobá rovnovážna hodnota úrokových sadzieb.

Kľúčové slová: hypotekárny úver, optimálne riadenie, binomický model, dynamické programovanie

Abstract

GAŠPAROVIČOVÁ, Dana: *Optimal mortgage refinancing* [Master's Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: RNDr. Zuzana Chladná, Dr., Bratislava, 2016, 66 p.

The most common way to finance a housing is a mortgage loan. The subject of this master's thesis is the issue concerning the optimal repayment of a mortgage loan from the perspective of a client as a creditor. Searching for the optimal strategy from the client's point of view, who is deciding between paying the loan using a variable or a fixed interest rate, is formulated as a stochastic optimal control problem. Evolution of interest rates is considered random variable, which is characterized by Cox-Ingersoll-Ross process and discretized by binomial model. The problem of mortgage loan fixing is solved by a method of dynamic programming for different ways of fixed and variable interest rate evolution (deterministic, stochastic). Each of the option was thoroughly analysed and we tried to define the most significant factors influencing the optimal choice of the interest rate fixing. Results of the analysis show, that other significant factors that influence the optimal decision for the client are volatility and long-term value of interest rates, in addition to fixation period.

Keywords: mortgage loan, optimal control, binomial model, dynamic programming

Obsah

Úvod

Vlastné bývanie je snom a životným cieľom každého človeka. Aktuálna ekonomická situácia obyvateľov na Slovensku je na takej úrovni, že málokto je schopný si sám zabezpečiť dostatok finančných prostriedkov na bývanie. Vo väčšine prípadov sa ľudia obracajú so žiadosťou o finančnú pomoc na bankovú inštitúciu. V súčasnosti je na trhu zo strany bánk veľká ponuka úverových produktov a každý záujemca o úver si môže zvoliť produkt podľa svojich možností a predstáv. Medzi typicky využívanú formu financovania potrieb bývania patria hypotekárne úvery.

Podmienky za akých Slováci čerpajú hypotekárne úvery sa za uplynulých 18 rokov, odkedy sa hypotekárne úvery na Slovensku začali poskytovať, stali omnoho prístupnejšie. Dostupnosťou k hypotekárnym úverom ponúkaných na slovenskom trhu sme sa tak priblížili k vyspelým európskym krajinám. Mimoriadny „boom“ zaznamenal trh s hypotekárnymi úvermi predovšetkým v posledných dvoch rokoch. Svedčí o tom aj počet žiadostí o schválenie hypotekárneho úveru, ktorý medziročne stúpol v roku 2014 viac ako dvojnásobne. Za to, že počet žiadostí o hypotekárny úver za posledné dva roky výrazne vzrástol môže najmä priaznivá situácia na finančných trhoch sprevádzaná neustálym znižovaním úrokových sadzieb. Atraktivite hypotekárnych úverov napomáha aj štát so svojou dlhoročnou podporou vo forme štátneho príspevku pre mladých.

Záujemca o hypotekárny úver je postavený pred viacero netriviálnych rozhodnutí. Medzi základné rozhodnutia patrí stanovenie výšky pôžičky a doby splácania hypotekárneho úveru. Ďalšie typy rozhodnutí sa týkajú možnosti refinancovania hypotekárneho úveru. Tieto rozhodnutia sú ovplyvnené podmienkami jednotlivých finančných inštitúcií. Súčasťou problematiky refinancovania úveru je voľba optimálneho manažovania fixácie hypotekárneho úveru. Na tento aktuálny problém, dotýkajúci sa každého klienta, sa pokúša reagovať predložená diplomová práca.

Našim cieľom je predstaviť dynamický model optimálneho splácania úveru. K problematike pristupujeme z pohľadu klienta ako dlžníka, ktorý môže ovplyvniť výšku splátky za úver voľbou úrokovej sadzby, pri ktorej bude úver splácať. Klientovi sú štandardne ponúknuté dve možnosti splácania: fixácia úrokovej sadzby počas zvolenej doby alebo variabilná úroková sadzba, ktorej hodnota sa v každej časovej perióde mení podľa situácie na trhu. Hlavným faktorom ovplyvňujúcim voľbu fixácie je prirodzene budúci vývoj spomenutých úrokových sadzieb. Úrokové sadzby majú, podobne ako iné ekonomické ukazovatele (napr. cena akcie), v sebe istú mieru náhodnosti. V našej práci namodelujeme jednotlivé úrokové sadzby pomocou tzv. Cox-Ingersoll-Ross procesu. Výsledný predstavený model tak bude úlohou stochastického dynamického programovania s viacrozmernou stavovou premennou.

Záujem o nájdenie optimálnej stratégie splácania hypotekárneho úveru potvrdzuje aj množstvo publikovaných štúdií v tejto oblasti. Väčšina z nich sa zaoberá problematikou refinancovania hypotekárneho úveru. Pod refinancovaním hypotekárneho úveru rozumieme vyplatenie zostávajúcej dlžnej sumy súčasného úveru a následný podpis novej zmluvy s prísľubom fixácie pri nižšom úroku. Počiatky výskumu v tejto oblasti sa prisudzujú dvojici Stanton a Wallace [20]. Na ich prácu nadväzujú napr. [8], [10].

Iba málo prác je zameraných na optimálnu voľbu medzi variabilnou a fixnou úrokovou sadzbou. Medzi najcitovanejšie patrí práca [5]. Autori sa v nej pokúšajú nájsť súvislosť medzi individuálnymi charakteristikami klienta a jeho rozhodnutím o type úrokovej sadzby.

Nemáme vedomosti o žiadnej práci, ktorá by sa zaoberala hľadaním optimálnej voľby medzi variabilnou a fixnou úrokovou sadzbou vyplývajúcou z krátkodobých fluktuácií úrokových sadzieb. Predložená práca nadväzuje na diplomovú prácu [2] a pokúša sa stanoviť najvýznamnejšie faktory ovplyvňujúce optimálnu voľbu fixácie úrokovej sadzby.

Diplomová práca je rozčlenená na štyri kapitoly. V prvej kapitole je objasnený pojem hypotekárny úver, základné vlastnosti a kritériá, podľa ktorých možno hypotekárne úvery rozdeliť. Bližšie sa zaoberá vývojom hypotekárnych úverov od ich aktívneho vstupu na slovenský trh po súčasnosť a faktormi, ktoré majú na vývoj hypotekárnych úverov najväčší vplyv. Druhá kapitola je zameraná na podrobný popis modelu fixácie hypotekárneho úveru a formuláciu problému ako úlohy optimálneho riadenia. Tretia kapitola obsahuje postup tvorby binomického modelu pre jednu úrokovú sadzbu, ktorá vystupuje ako náhodná premenná, následné rozšírenie binomického modelu o druhú úrokovú sadzbu a úpravu modelu, ktorá zohľadňuje závislosť medzi úrokovými sadzbami. V poslednej štvrtej kapitole je uvedené riešenie problému fixácie hypotekárneho úveru metódou dynamického programovania pre rôzne druhy vývoja úrokových sadzieb a dôkladná numerická analýza každej z možností.

1 Hypotekárne úvery na Slovensku

Hypotekárny úver je jedným z historicky najstarších úverových bankových produktov. Vo všeobecnosti pod pojmom hypotekárny úver rozumieme úver zabezpečený nehnuteľnosťou poskytnutý za účelom kúpy, výstavby alebo rekonštrukcie nehnuteľnosti. Bežne sa ako hypotekárny úver označuje aj úver poskytnutý podnikateľom a iným právnickým osobám na kúpu nehnuteľnosti.

Na Slovensku pojem hypotekárny úver presne definuje § 68 Zákona č.483/2001 Z. z. z 5. októbra 2001 o bankách a o zmene a doplnení niektorých zákonov [29]: *„Hypotekárny úver je úver s lehotou splatnosti najmenej štyri roky a najviac 30 rokov zabezpečený záložným právom k tuzemskej nehnuteľnosti, a to aj rozostavanej, ktorý je financovaný, ak tento zákon neustanovuje inak, najmenej vo výške 90 % prostredníctvom vydávania a predaja hypotekárnych záložných listov hypotekárnou bankou podľa osobitného predpisu a ktorý poskytuje hypotekárna banka na tieto účely:*

a) nadobudnutie tuzemskej nehnuteľnosti alebo jej časti,

b) výstavbu alebo zmenu dokončených stavieb,

c) údržbu tuzemských nehnuteľností alebo

d) splatenie poskytnutého úveru použitého na účely podľa písmen a) až c), ktorý je hypotekárnym úverom

e) splatenie poskytnutého úveru použitého na účely podľa písmen a) až c), ktorý nie je hypotekárnym úverom.“

Ako vyplýva zo zákona, hypotekárny úver možno charakterizovať pomocou niekoľkých znakov. Prvým je jeho **dlhodobý charakter**: úver nesmie byť poskytnutý na kratšie ako štyri roky a zároveň dlhšie ako 30 rokov. Pri fyzických osobách je lehota splatnosti limitovaná vekom odchodu občana na dôchodok.

Finančné inštitúcie musia **zabezpečiť zdroje financovania** úveru. Tieto zdroje inštitúcie získavajú z výnosov predaja hypotekárnych záložných listov (HZL). HZL je podľa Zákona o dlhopisoch [30] špeciálny verejne obchodovateľný dlhopis, ktorého názov je chránený zákonom, menovitá hodnota, vrátane výnosov, je krytá pohľadávkami z hypotekárnych úverov a zdroje získané jeho predajom sú určené na refinancovanie hypotekárnych úverov.

Ďalším znakom je krytie **tuzemskou nehnuteľnosťou** (rozumie sa na území Slovenskej republiky) určenou na bývanie. Hypotekárny úver však nesmie byť zabezpečený záložným právom vzťahujúcim sa na nehnuteľnosť, na ktorej už vzniklo a trvá iné záložné právo alebo obmedzenie prevodu nehnuteľnosti.

Posledným dôležitým charakteristickým znakom je presne určený **účel** poskytnutia úveru. Jeho použitie je vymedzené výlučne na oblasť získania alebo opravy nehnuteľnosti.

1.1 Delenie hypotekárnych úverov

Kritérií, podľa ktorých možno rozdeliť hypotekárne úvery, je mnoho. Za základné delenie sa vo svete finančných inštitúcii považuje delenie hypotekárnych úverov **podľa účelu využitia**, a to na:

- ***Účelové*** - patria sem hypotekárne úvery, ktoré sú v súlade so Zákonom o bankách a ďalej ich môžeme rozdeliť podľa konkrétneho účelu na:
  - **Klasické** - určené na kúpu tuzemskej nehnuteľnosti, prípadne jej časti, výstavbu, údržbu alebo zmenu dokončených stavieb. Do tejto kategórie patria aj štátom dotované hypotekárne úvery pre mladých.
  - **Stavebné** - poskytované na financovanie výstavby, modernizácie alebo rekonštrukcie nehnuteľnosti.
  - Hypotekárne úvery **na refinancovanie** - určené na splatenie iných, často menej výhodných hypotekárnych úverov. Najčastejším dôvodom voľby tohto typu úveru býva výhodnejšia úroková sadzba [24].
- ***Bezúčelové*** - známe aj ako *americké hypotéky* - použiteľné na financovanie čohokoľvek, pod podmienkou zabezpečenia záložným právom k vlastnej tuzemskej nehnuteľnosti alebo tuzemskej nehnuteľnosti vo vlastníctve inej osoby. Čím

ďalej častejšie sú využívané na konsolidáciu dlhov, keďže v porovnaní s obyčajným spotrebným úverom mávajú nižšiu úrokovú sadzbu a umožňujú požičať si vyššiu sumu [4].

Iné kritériá, podľa ktorých môžeme hypotekárne úvery rozdeliť, sú:

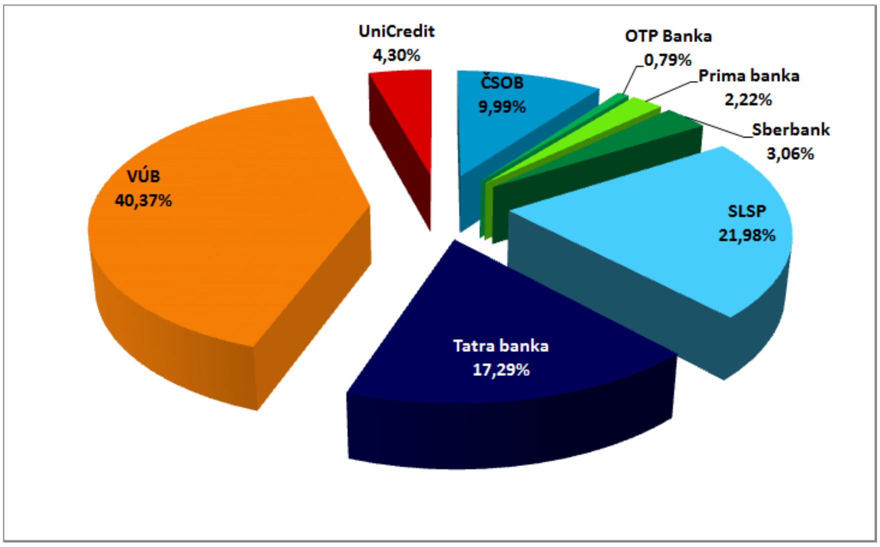
- **Podľa formy splácania**
  - *úvery s anuitným splácaním* - splátka má rovnakú výšku počas celej doby platnosti úveru (závisí od výšky úrokovej sadzby) a je splácaná v pravidelných intervaloch,
  - *úvery s degresívnym splácaním* - vyššie finančné zaťaženie je sústredené na začiatočné obdobie splácania a na konci sú naopak splátky najnižšie,
  - *úvery s progresívnym splácaním* - výška splátky sa postupne zvyšuje počas splácania [24].
- **Podľa typu úrokovej sadzby**
  - *úvery s variabilnou úrokovou sadzbou*, ktorej výška sa mení počas trvania úveru,
  - *úvery s fixnou úrokovou sadzbou*, ktorá je garantovaná po dobu zvolenej fixácie [24].
- **Podľa dlžníka**
  - *úvery poskytované fyzickým osobám*,
  - *úvery poskytované právnickým osobám*,
  - *úvery poskytované samosprávam* [19].

1.2 Poskytovanie hypotekárnych úverov

Hypotekárne obchody, tzn. poskytovanie hypotekárnych úverov a emitovanie HZL, môžu vykonávať iba bankové inštitúcie, ktoré vlastnia licenciu. Žiadosť o takúto licenciu sa predkladá Národnej banke Slovenska (NBS), ktorá po prerokovaní s Ministerstvom financií Slovenskej republiky rozhoduje o jej udelení [29].

Na Slovensku v súčasnosti môže hypotekárne úvery poskytovať 8 bankových inštitúcií [17]:

- Československá obchodná banka, a.s
- OTP Banka Slovensko, a.s
- Prima banka Slovensko, a.s
- Sberbank Slovensko, a.s
- Slovenská sporiteľňa, a.s
- Tatra banka, a.s
- Všeobecná úverová banka, a.s
- UniCredit Bank Czech Republic and Slovakia, a.s



Obr. 1.2.1: Podiely bánk v januári 2016 [23].

Obr. 1.2.1 znázorňuje podiely jednotlivých bánk na celkovej výške poskytnutých hypotekárnych úverov v januári 2016. Vidíme, že v súčasnosti má najväčší podiel na trhu s hypotekárnymi úvermi VÚB banka, a to takmer dvojnásobný oproti ďalším dvom popredným poskytovateľom Slovenskej sporiteľni a Tatra banke. Spoločne tieto tri finančné inštitúcie poskytli v januári 2016 skoro 80% z celkového objemu hypotekárnych úverov.

1.3 Vývoj hypotekárnych úverov

„Potreba zavedenia hypotekárneho bankovníctva v Slovenskej republike vyplynula z viacerých dôvodov. V rámci rozvoja bankového systému bola snaha rozšíriť ponuku o relatívne nové, svojím charakterom špecifické bankové produkty - hypotekárne úvery. Z pohľadu riešenia pretrvávajúcich problémov, spojených s financovaním investícií do nehnuteľností, to bola snaha nájsť vhodný finančný nástroj, ktorý by prispel k oživeniu bytovej výstavby.“

Takto popisujú výhody a dôvody vstupu hypotekárneho bankovníctva na slovenský bankový trh autori odborného časopisu Biatec [11], ktorý vydáva NBS.

Aktívny vstup na slovenský trh zaznamenalo hypotekárne bankovníctvo v roku 1997. Ako prvá začala poskytovať hypotekárne úvery Všeobecná úverová banka, a.s., ktorá až do súčasnosti patrí medzi popredných poskytovateľov úverov. V roku 1999 sa k nej pridali Slovenská sporiteľňa, a.s. a Istrobanka, a.s.. Práve rok 1999 bol pre rozvoj hypotekárneho bankovníctva významný, a to hlavne z dôvodu zavedenia priamej i nepriamej štátnej podpory. Hypotéky, ktoré dovtedy príliš neoslovovali obyčajných ľudí, predovšetkým kvôli vysokým úrokovým sadzbám a nízkym príjmom obyvateľov, sa stávali čoraz dostupnejšie pre ľudí a zaujímavejšie pre investorov. Zvyšovala sa aj konkurencia medzi bankami a s tým súvisiaca ponuka hypotekárnych produktov.

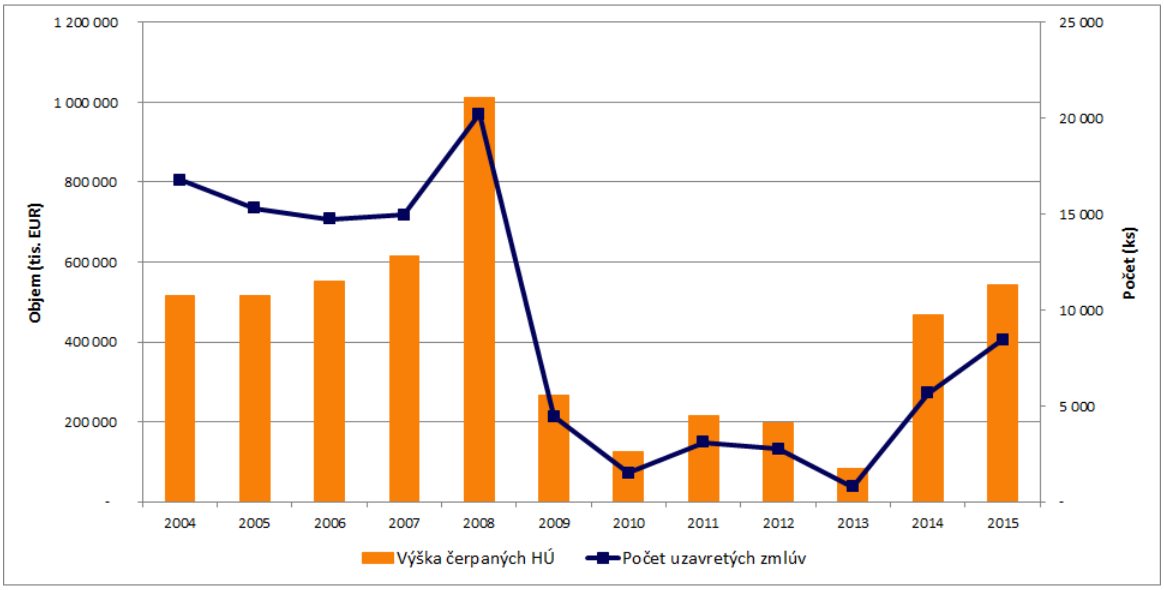
Rozmach hypotekárneho bankovníctva v roku 1999 je viditeľný aj na objeme hypotekárnych úverov. Kým v roku 1998 boli poskytnuté úvery v celkovej hodnote 132 mil. Sk (približne 4,4 mil. EUR), v roku 1999 vzrástol ich objem viac ako trojnásobne na úroveň 411,4 mil. Sk (viac ako 13,6 mil. EUR) [11]. Nasledujúce roky objemy hypotekárnych úverov aj naďalej rástli. V dnešnej dobe iba za január 2016 boli čerpané hypotekárne úvery v celkovej sume viac ako 51 mil. EUR [23].

Rok	Výška čerpaných úverov (tis. EUR)	Počet uzavretých zmlúv (ks)	Výška schválených úverov(tis. EUR)	Počet uzavretých zmlúv (ks)
2004	516 374	16 789	387 277	12 091
2005	517 428	15 289	602 660	16 802
2006	552 810	14 727	694 046	16 252
2007	613 629	14 950	941 050	19 631
2008	1 011 688	20 206	982 552	18 924
2009	265 762	4 456	368 591	6 929
2010	125 282	1 503	413 661	7 894
2011	215 919	3 111	413 436	7 498
2012	196 751	2 739	356 679	6 643
2013	84 833	787	380 790	6 425
2014	468 740	5 678	813 887	13 108
2015	541 641	8 456	759 546	12 866
január 2016	51 321	850	42 082	681

Tabuľka 1.3.1: Vývoj hypotekárnych úverov na Slovensku.

V Tab. 1.3.1 môžeme vidieť, ako sa vyvíjali hypotekárne úvery na Slovensku od roku 2004 po súčasnosť. Hodnoty pochádzajú z databázy NBS o hypotekárnom bankovníctve [26] a sú spracované podľa informácií hypotekárnych správcov. Aby sme hodnoty pre jednotlivé roky mohli medzi sebou porovnávať, bolo nutné údaje z rokov 2004 - 2008 o výške čerpaných úverov previesť zo slovenskej koruny na euro konverzným kurzom 30,126 SKK/EUR.

Na Obr. 1.3.1 pozorujeme rastúci trend čerpania hypotekárnych úverov, ktorý sa začal v roku 2004 a svoje maximum dosiahol v roku 2008. V tomto roku prekročila ich výška hodnotu 1 mld. EUR. Za takýto nárast mohol byť zodpovedný veľký rozdiel medzi čerpanými a schválenými úvermi v predchádzajúcom roku. Je možné predpokladať,



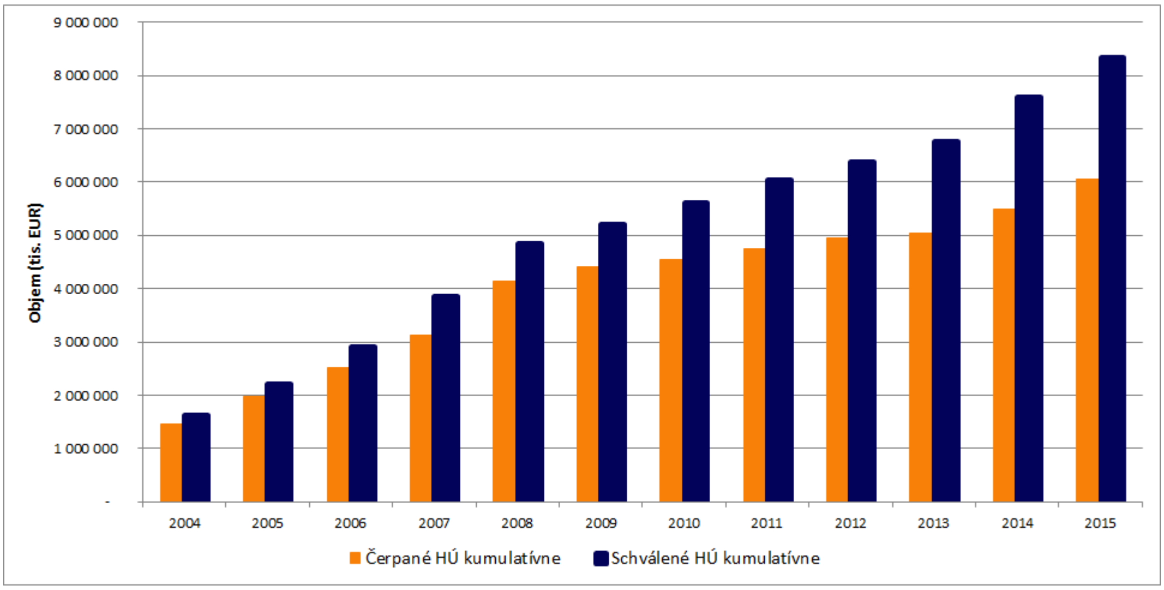
Obr. 1.3.1: Vývoj čerpaných hypotekárnych úverov v SR [26].

že úvery schválené v roku 2007 začali ľudia čerpať až nasledujúci rok.

V roku 2009 zaznamenal hypotekárny trh výrazný prepad v počtoch poskytnutých úverov. Výška čerpaných úverov spadla z 1 mld. EUR na úroveň 250 - 300 mil. EUR. Takýto prudký pokles môžeme pripísať viacerým udalostiam, ktoré sa na prelome rokov 2008/2009 udiali. Jednou z nich je zavedenie eura na Slovensku. Druhou udalosťou, ktorá ovplyvnila trh s hypotekárnymi úvermi bola hypotekárna kríza v USA, ktorá v danom období vyústila do globálnej finančnej a hospodárskej krízy.

Vplyv hospodárskej krízy na hypotekárny trh možno pozorovať až do začiatku roku 2014, keď kríza postupne doznieva, trh s hypotekárnymi úvermi nielen na Slovensku, ale aj v Európe sa obnovuje a Slovensko zaznamenáva rastúci záujem o hypotekárne úvery. Dá sa predpokladať, že tento trend bude pokračovať aj v priebehu nasledujúcich rokov.

Obr. 1.3.2 graficky znázorňuje rozdiel medzi čerpanými a schválenými úvermi. Medzi schválené úvery patria tie, ktoré banky klientovi na základe žiadosti schválili. Následne klient podpíše s bankou zmluvu. Zmluva okrem iného obsahuje podmienky, ktoré je nutné splniť do stanoveného termínu a až potom môže klient začať čerpať úver. Klient ale môže mať schválený úver vo viacerých bankách a vybrať si tú, ktorá mu najviac vyhovuje, respektíve nesplniť niektorú z podmienok stanovených v zmluve



Obr. 1.3.2: Vývoj čerpaných a schválených hypotekárnych úverov v SR [26].

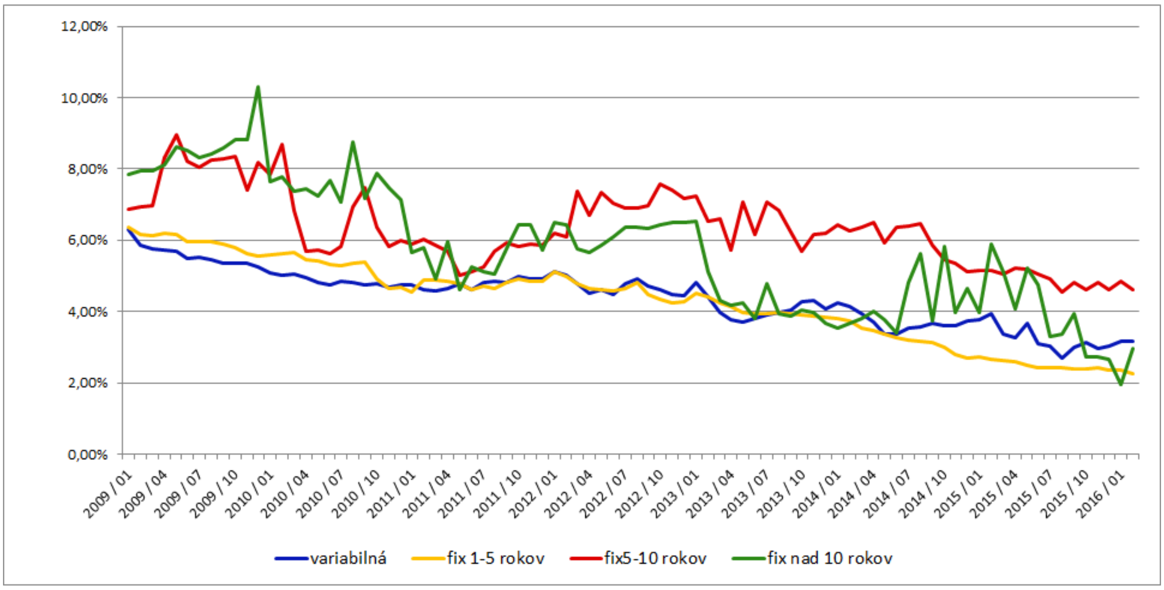
(napr. vklad záložného práva k zakladanej nehnuteľnosti do katastra) [18]. Preto sa schválený úver nemusí čerpať vôbec alebo iba v menšej čiastke.

Na začiatku pozorovaného obdobia (rok 2004) tvoril rozdiel medzi schválenými a čerpanými úvermi niečo cez 170 mil. EUR, zatiaľ čo ku koncu roku 2015 tento rozdiel prekročil výšku 3 200 mil. EUR. Zväčšujúce sa rozdiely by sme mohli pripísať vzrastajúcej konkurencii medzi jednotlivými poskytovateľmi hypotekárnych úverov a zároveň sprísňovaniu podmienok bánk pre čerpanie schválenej sumy, aby minimalizovali riziko akvizície menej solventných klientov.

1.4 Faktory ovplyvňujúce hypotekárne úvery

Vývoj hypotekárnych úverov ovplyvňuje viacero faktorov. Za jeden z najdôležitejších možno považovať **úrokovú sadzbu**. Výška úrokovej sadzby je prvá informácia, o ktorú sa zaujíma potenciálny záujemca o hypotekárny úver. Od nej totiž závisí výška mesačnej splátky a celkové preplatenie úveru. Na výšku mesačnej splátky má okrem úroku vplyv aj poplatok za vedenie úverového účtu, no v porovnaní s hodnotou úroku je jeho hodnota zanedbateľná. Malo by platiť, že čím nižšia úroková sadzba, tým vyšší počet záujemcov o úver [25].

Ďalším dôležitým faktorom je **dĺžka fixácie** úrokovej sadzby. Počas zvolenej doby fixácie sa klientovi výška úroku nemení. Po uplynutí tejto doby však prichádza k zmene výšky úrokov v závislosti od výšky aktuálnej úrokovej sadzby. Všeobecne platí medzi dĺžkou fixácie a výškou úrokovej sadzby priama úmera, t.j. čím dlhšia fixácia, tým vyššia sadzba. Garantovanie úrokovej sadzby na dlhšie časové obdobie predstavuje vyššie riziko pre banku. Pre klienta je teda výhodné fixovať úroky na kratšie obdobie, ak očakáva znižovanie úrokových sadzieb a naopak. Prípadne si môže zvoliť variabilnú úrokovú sadzbu, tzn. bez fixácie, ktorá najlepšie kopíruje aktuálny vývoj úrokových sadzieb na trhu [25].



Obr. 1.4.1: Vývoj úrokových sadzieb [22].

Výšku úrokových sadzieb na Slovenku od roku 2009 výrazne ovplyvňujú rozhodnutia Európskej centrálnej banky (ECB). ECB v boji s nízkou infláciou udržiava uvoľnenú menovú politiku a podporuje poskytovanie úverov, čo má za následok nižšie úrokové sadzby a dostupnejšie úvery. Kým napr. v roku 2010 boli úrokové sadzby na úrovni približne 6%, dnes je možné získať hypotekárny úver so sadzbou od 2%. Rozdiely sa vyskytujú aj v dĺžke fixácie. Možno povedať, že doba fixácie sa predlžuje. Podľa údajov NBS bola v minulosti (2009/2010) najobľúbenejšia dĺžka fixácie do jedného roka, kým v súčasnosti sa dostáva do popredia fixácia v intervale od jedného do piatich rokov. Dôvodom sú relatívne výhodnejšie sadzby, ktoré si chcú klienti udržať čo najdlhšie [28].

Pokles výšky úrokových sadzieb zachytáva Obr. 1.4.1. Graf obsahuje okrem vývoja variabilnej úrokovej sadzby aj vývoj sadzieb pre rôzne dĺžky fixácie, kategorizované do troch skupín, v období od roku 2009 po február 2016.

Na Obr. 1.4.1 si môžeme všimnúť už spomenutú závislosť výšky úrokovej sadzby od dĺžky fixácie. Úroková sadzba pre kratšie dĺžky fixácie (do päť rokov) vykazuje počas celého sledovaného obdobia v priemere nižšie hodnoty ako úrokové sadzby vo zvyšných dvoch kategóriách a od začiatku roku 2014 zaznamenáva výraznejší pokles aj v porovnaní s výškou variabilnej úrokovej sadzby. Taktiež je možné pozorovať, že úrokové sadzby s nižšími fixáciami sa rovnako ako variabilná sadzba rýchlejšie prispôsobujú situácii na trhu a prípadné fluktuácie sa na ich vývoji neodrážajú tak výrazne ako pri sadzbách s fixáciou na päť a viac rokov. Na základe sledovaného vývoja úrokových sadzieb možno povedať, že premenlivosť a neistota na trhu najviac vplýva na úrokové sadzby pre stredné dĺžky fixácie (5 - 10 rokov), pretože pri tejto kategórii pozorujeme najväčšiu volatilitu.

2 Model optimálneho splácania hypotekárneho úveru

V tejto kapitole priblížime model optimálneho splácania hypotekárneho úveru, ktorý je podrobne popísaný a naformulovaný ako úloha optimálneho riadenia v diplomovej práci [2]. Model sa zaoberá problémom vhodnej voľby úrokovej sadzby zo strany klienta, ktorý má záujem o hypotekárny úver.

2.1 Popis modelu

Uvažujme klienta, ktorý plánuje podpísať zmluvu o hypotekárnom úvere vo výške P a dobe splácania D. Cieľom klienta ako dlžníka je minimalizovať očakávanú hodnotu sumy splátok počas celej dĺžky splácania úveru. Výšku splátky môže klient ovplyvniť vhodnou voľbou úrokovej sadzby, t.j. klient sa môže rozhodnúť medzi variabilnou a fixnou úrokovou sadzbou. Predčasné splatenie daný model neberie do úvahy.

V prípade, ak sa klient rozhodne pre fixnú úrokovú sadzbu, nemôže počas fixačného obdobia robiť zmeny. Pri výbere variabilnej úrokovej sadzby môže klient kedykoľvek zmeniť rozhodnutie a zvoliť si fixáciu. To znamená, že možnosť rozhodnúť sa má klient iba v prípade, ak úver spláca pri variabilnej úrokovej sadzbe, alebo ak sa skončilo fixačné obdobie. Keď sa klient nenachádza ani v jednej z uvedených situácií, hodnota úrokovej sadzby sa určí na základe jeho minulých rozhodnutí o fixácii.

Označenie	**Popis**
A	výška mesačnej splátky
P	výška hypotekárneho úveru
D	doba splácania úveru v mesiacoch
r^V	variabilná mesačná úroková sadzba
r^F	fixná mesačná úroková sadzba
fix	dĺžka fixačného obdobia

Tabuľka 2.1.1: Vstupné parametre modelu .

V Tab. 2.1.1 sú uvedené základné parametre, ktoré do modelu vstupujú. Všetky parametre, až na výšku mesačnej splátky A, sú dané či už na základe potrieb klienta (výška úveru, doba splácania, dĺžka fixácie) alebo situácie na trhu (úrokové sadzby).

Výška mesačnej splátky závisí od výšky úveru, doby splácania a dohodnutej úrokovej sadzby. Podľa [27] jej hodnotu vypočítame ako súčin *umorovateľa* a výšky úveru:

$$A(P, D, r) = P * um. \tag{2.1.1}$$

Hodnotu umorovateľa pre úver s dĺžkou splatnosti D pri úrokovej sadzbe r vyjadríme ako [27]:

$$um = \frac{(1+r)^D * r}{(1+r)^D - 1}, \tag{2.1.2}$$

kde r označuje hodnotu mesačnej úrokovej sadzby.

2.2 Stratégia voľby úrokovej sadzby ako úloha optimálneho riadenia

Problém klienta popísaný v predchádzajúcej časti môžeme charakterizovať ako diskrétnu úlohu optimálneho riadenia. Diskrétne časové úseky reprezentujú jednotlivé mesiace, počas ktorých klient spláca úver. Predpokladáme, že klient, ak sa môže v danom mesiaci rozhodnúť, volí úrokovú sadzbu na začiatku mesiaca. Jednotlivé mesiace, etapy, označíme premennou i, pričom i nadobúda hodnoty od 0 po $D - 1$.

V našom modeli vystupujú dve stavové premenné. Prvá z nich, označíme ju x_i, reprezentuje stav, v ktorom sa systém nachádza na začiatku i-tej etapy. Druhou stavovou premennou je úroková sadzba r, ktorú vo všeobecnosti modelujeme ako náhodnú premennú. Konkrétny model vývoja úrokovej sadzby si predstavíme v ďalších častiach práce.

Stavová premenná x_i môže nadobúdať hodnoty z množiny $\{0, 1, ..., fix-1\}$, ktoré interpretujeme nasledovne:

- **Stav $\mathbf{x_i = 0}$**: jediný stav, v ktorom je možnosť rozhodnúť sa medzi variabilnou a fixnou úrokovou sadzbou. Do daného stavu sa dá dostať, ak predchádzajúcou voľbou bola variabilná sadzba, alebo ak predchádzajúci stav bol predposledným mesiacom fixácie, t.j. jeho hodnota bola $fix - 1$.

- **Stav** $\mathbf{x_i = j, j \in \{1, 2, ..., fix - 2\}}$: v tomto stave nie je možnosť voľby. Stav reprezentuje situáciu, keď sa splácanie pri fixnej úrokovej sadzbe nachádza v j-tom mesiaci fixácie. Po ňom môže nasledovať len stav s hodnotou $j + 1$.
- **Stav** $\mathbf{x_i = fix - 1}$: zodpovedá splácaniu v predposlednom mesiaci fixácie. Rovnako ako vo všetkých predchádzajúcich stavoch, okrem stavu 0, ani v tomto stave nie je možné zvoliť si variabilnú úrokovú sadzbu. Po tomto stave nasleduje stav s hodnotou 0.

Riadiaca premenná u_i predstavuje voľbu, s ktorou klient vstupuje do i-tej etapy. Hodnotu riadiacej premennej definujeme týmto spôsobom:

- $u_i = 1$ označuje voľbu variabilnej a
- $u_i = 2$ fixnej úrokovej sadzby.

Pripomeňme, že možnosť voľby riadiacej premennej existuje iba v stave 0. Množina U_i povolených hodnôt riadiacej premennej v i-tej etape má potom tvar:

$$U_i = \begin{cases} \{1, 2\}, & \text{ak } x_i = 0 \\ \{2\}, & \text{ak } x_i \neq 0. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Podobne ako množinu U_i je možné definovať aj množinu X_i povolených stavov v i-tej etape, ktorá na rozdiel od U_i bude určená stavom v etape predchádzajúcej. Množina X_i má tvar:

$$X_i = \begin{cases} \{0, 1\}, & \text{ak } x_{i-1} = 0 \\ \{z + 1\}, & \text{ak } x_{i-1} = z, z \in [1, fix - 2] \\ \{0\}, & \text{ak } x_{i-1} = fix - 1. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Úplná špecifikácia modelu vyžaduje ešte definovanie tzv. *stavovej rovnice*:

$$x_{i+1} = f_i(x_i, u_i). \tag{2.2.3}$$

Funkcia f_i na základe aktuálneho stavu a zvoleného riadenia definuje nový stav. V našom modeli má funkcia f_i nasledujúci tvar:

$$f_i(x_i, u_i) = \begin{cases} x_i + u_i - 1, & \text{ak } x_i = 0 \\ (x_i + 1) \ mod \ (fix), & \text{ak } x_i \neq 0. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Symbol *mod* označuje modulo, t.j. celočíselný zvyšok po delení parametrom fix.

Poznamenajme, že definícia stavovej rovnice (2.2.4) nám zabezpečí, aby každý nový stav nadobúdal len prípustné hodnoty z množiny $\{0, 1, ..., fix - 1\}$.

Nakoniec je potrebné zadefinovať účelovú funkciu. Ako už bolo povedané, cieľom klienta je minimalizovať očakávanú hodnotu sumy splátok za úver. Aby bol výpočet správny a mesačné splátky sa mohli navzájom sčítavať, je nutné previesť všetky budúce splátky na súčasnú hodnotu pomocou diskontného faktora δ. Diskontný faktor v tomto prípade predstavuje alternatívne náklady na kapitál, teda úrok, ktorý by klient dostal, ak by nechal peniaze uložené v banke.

Účelová funkcia úlohy má tvar:

$$\min_{u_i \in U_i} E \left(\sum_{i=0}^{D-1} \frac{1}{(1+\delta)^{i+1}} A_i(P, D, r(u_i), x_i) \right), \tag{2.2.5}$$

pričom minimum sa hľadá cez všetky možné rozhodnutia $u_i \in U_i$. Symbolom E sme v účelovej funkcií označili očakávanú hodnotu a symbol $r(u_i)$ označuje úrokovú sadzbu v závislosti od rozhodnutia u_i.

Výška mesačnej splátky sa vypočíta zo vzťahu (2.1.1). To, či do výpočtu bude vstupovať variabilná alebo fixná úroková sadzba závisí od rozhodnutia u_i. Výška splátky v i-tej etape bude mať tvar:

$$A_i(P, D, r(u_i), x_i) = \begin{cases} P * \frac{(1+r_i^V)^D * r_i^V}{(1+r_i^V)^D - 1}, & \text{ak } x_i = 0 \wedge u_i = 1 \\ P * \frac{(1+r_i^F)^D * r_i^F}{(1+r_i^F)^D - 1}, & \text{ak } x_i = 0 \wedge u_i = 2 \\ P * \frac{(1+r_{i-x_i+1}^F)^D * r_{i-x_i+1}^F}{(1+r_{i-x_i+1}^F)^D - 1}, & \text{ak } x_i \neq 0. \end{cases} \tag{2.2.6}$$

Pre úplnosť musíme ešte definovať počiatočný stav x_0 a nastaviť obmedzenia na koncový stav x_D. Budeme predpokladať, že pri podpise zmluvy (v čase 0) sa klient nachádza v stave, v ktorom má možnosť rozhodnúť sa, pri akej úrokovej miere bude úver splácať, tzn. predpokladáme, že $x_0 = 0$.

Na konci doby splácania úveru musí mať klient celý úver splatený a všetky fixácie úrokov ukončené. Preto za jediný prípustný stav v čase D povolíme $x_D = 0$.

Riešením úlohy je postupnosť riadení $\mathcal{U} = \{u_0, u_1, ..., u_{D-1}\}$ a jeho odozva $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, ..., x_D\}$, ktorá rieši stavovú rovnicu (2.2.4) a spĺňa podmienku na počiatočný stav $x_0 = 0$. Ak navyše odozva $\mathcal{X}$ spĺňa podmienku na koncový stav $x_D = 0$ a $\forall i$, $i = 0, 1, ..., D-1$ $x_i \in X_i$, potom sa riadenie $\mathcal{U}$ nazýva prípustným riadením. Triedu všetkých prípustných riadení označíme $\mathcal{P}$.

Hľadať také riadenie $\mathcal{U}$ z triedy prípustných riadení $\mathcal{P}$, ktoré minimalizuje účelovú funkciu, budeme pomocou *metódy dynamického programovania*. Ako táto metóda funguje a jej možné rozšírenia na účely našej analýzy modelu popíšeme v ďalších častiach práce.

3 Modelovanie úrokových sadzieb

Úrokové sadzby patria medzi najvýznamnejšie faktory, ktoré ovplyvňujú výšku splátok hypotekárneho úveru, a teda aj celkové preplatenie úveru. V našom modeli vystupujú dva druhy úrokových sadzieb - variabilná a fixná, o vývoji ktorých predpokladáme, že v sebe obsahuje istú mieru náhodnosti.

V tejto kapitole budeme úrokové sadzby, ako náhodné premenné, modelovať pomocou binomického modelu. Najskôr priblížime proces tvorby binomického modelu pre jednu náhodnú premennú, následne tento model rozšírime o druhú náhodnú premennú a upravíme do tvaru, ktorý zohľadňuje ich vzájomnú koreláciu.

3.1 Binomický model jednej premennej

Štandardne sa vývoj úrokových sadzieb modeluje tzv. *mean reversion* procesom. V našom modeli budeme predpokladať, že vývoj fixnej úrokovej sadzby r^F možno popísať pomocou *Cox-Ingersoll-Ross* (CIR) modelu nasledovne [3]:

$$dr_t^F = \beta^F \left(\mu^F - r_t^F\right) dt + \sigma^F \sqrt{r_t^F} dZ_t^F, \tag{3.1.1}$$

kde Z_t^F je štandardný *Wienerov proces* a β^F, μ^F a σ^F sú kladné konštanty.

CIR model patrí medzi modely s vlastnosťou mean reversion: koeficient β^F udáva rýchlosť, akou je sadzba r^F priťahovaná k dlhodobej rovnovážnej hodnote μ^F. Parameter σ^F označuje volatilitu úrokovej sadzby.

Tvar volatility $\sigma^F\sqrt{r^F}$ zaručuje, že úroková sadzba r^F nebude nadobúdať záporné hodnoty. Ak je hodnota úroku r^F blízka nule, volatilita je malá, ale vďaka driftu neklesne hodnota r^F pod nulu [14]. Navyše ak je splnená podmienka

$$2\beta\mu \geq \sigma^2, \tag{3.1.2}$$

tak s pravdepodobnosťou 1 nedosiahne hodnota r^F nulovú úroveň [21].

Nakoľko model popísaný v predchádzajúcej kapitole je diskrétnou úlohou optimálneho riadenia, aj úrokovú sadzbu budeme modelovať ako diskrétnu náhodnú premennú.

Diskretizáciu CIR procesu (3.1.1) urobíme použitím binomického modelu. Model tohto typu predpokladá, že v každom časovom okamihu sa úroková sadzba môže zo svojej súčasnej hodnoty zvýšiť (up-skok) alebo znížiť (down-skok) o vopred určenú hodnotu. Výslednou štruktúrou je tzv. *binomický strom*. Pohyb v strome popisujú pravdepodobnosti prechodu medzi jednotlivými uzlami. Veľkosť skoku nahor, resp. nadol ako aj hodnota pravdepodobnosti prechodu je daná parametrami pôvodného procesu (pre bližší postup viď. napr. [16]).

Z výpočtového hľadiska je dôležitou vlastnosťou binomického stromu jeho rekombinovateľnosť, t.j. postupnosť skokov up-down vedie k tej istej hodnote ako postupnosť skokov down-up. V opačnom prípade by s narastajúcim časom stúpal počet uzlov v strome exponenciálne, čo by bolo pre väčšie hodnoty doby splácania úveru D výpočtovo nezvládnuteľné.

Uvedomme si, že priamou diskretizáciou CIR procesu nedostaneme rekombinačný strom, pretože volatilita procesu (3.1.1) nie je konštantná, ale závisí aj od hodnoty úrokovej sadzby r^F.

Tento problém je možné vyriešiť transformáciou pôvodného procesu viď. [9] podľa vzťahu:

$$x(r^F) = \frac{2\sqrt{r^F}}{\sigma}. \tag{3.1.3}$$

Transformovaný proces x môžeme zapísať do tvaru stochastickej diferenciálnej rovnice nasledovne:

$$dx = m(x)dt + dZ, \tag{3.1.4}$$

kde

$$m(x) = \frac{2\beta\mu}{\sigma^2 x} - \frac{\beta x}{2} - \frac{1}{2x}. \tag{3.1.5}$$

Transformovaný proces (3.1.4) má konštantnú volatilitu, a preto k nemu prislúchajúci binomický strom už bude rekombinovať.

Na zostrojenie binomického stromu pre fixnú úrokovú sadbu r^F najskôr skonštruujeme binomický strom pre transformovaný proces x podľa schémy uvedenej na Obr. 3.1.1:

$$\begin{tikzcd}
& & x+2\sqrt{\Delta t} \\
& x+\sqrt{\Delta t} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
x \arrow[ur] \arrow[dr] & & x \\
& x-\sqrt{\Delta t} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & x-2\sqrt{\Delta t}
\end{tikzcd}$$

Obr. 3.1.1: Schéma binomického stromu pre transformovaný proces x.

Na Obr. 3.1.1 je symbolom Δt označená dĺžka časovej periódy.

Po zostrojení binomického stromu pre proces x pretransformujeme každý jeho uzol inverznou transformáciou [9]:

$$r^F = f(x) = \frac{x^2\sigma^2}{4}, \tag{3.1.6}$$

čím získame strom pre pôvodný proces $r^F = f(x)$ načrtnutý na Obr. 3.1.2.

$$\begin{tikzcd}
& & f\left(x+2\sqrt{\Delta t}\right) \\
& f\left(x+\sqrt{\Delta t}\right) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
f(x) \arrow[ur] \arrow[dr] & & f(x) \\
& f\left(x-\sqrt{\Delta t}\right) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & f\left(x-2\sqrt{\Delta t}\right)
\end{tikzcd}$$

Obr. 3.1.2: Schéma binomického stromu pre pôvodný proces $r^F = f(x)$.

Ďalším krokom je výpočet pravdepodobnosti prechodu medzi jednotlivými uzlami stromu. Podľa [9] pravdepodobnosť, že nastane zvýšenie úrokovej sadzby (up-skok) v každom uzle vypočítame ako:

$$p_{up}(r^F) = \frac{\beta(\mu - r^F)\Delta t + r^F - r^F_{down}}{r^F_{up} - r^F_{down}}. \qquad (3.1.7)$$

Symbol r^F_{up} v (3.1.7) označuje hodnotu úrokovej sadzby pri up-skoku a je rovný výrazu $f\left(x + \sqrt{\Delta t}\right)$. Podobne symbol r^F_{down} označuje výšku úrokovej sadzby pri down-skoku a rovná sa hodnote $f\left(x - \sqrt{\Delta t}\right)$.

Pravdepodobnosť $p_{down}(r^F)$, že dôjde k poklesu úroku, sa potom vypočíta ako rozdiel $1 - p_{up}(r^F)$.

Uvedený postup nám ale nezaručí, že vypočítané pravdepodobnosti budú iba z intervalu $[0, 1]$. Predovšetkým na hraniciach binomického stromu, t.j. pre veľmi nízke (resp. vysoké) hodnoty úrokovej miery, môže nastať situácia, že pravdepodobnosti vypočítané podľa vzťahu (3.1.7) sú mimo prípustného intervalu. Preto je potrebné strom v týchto uzloch upraviť. Najjednoduchší prístup spočíva v modifikácii voľby veľkosti up-skoku a down-skoku. Spôsobov, ako v strome medzi uzlami „skákať“, je viacero. My sme sa rozhodli pre postup, ktorý vychádza z článku [15]. Algoritmus výpočtu skokov môžeme zosumarizovať nasledovne:

- Ak sa nachádzame v uzle, pre ktorý $p_{up} > 1$, zvolíme down-skok $r^F_{down} = r^F$ a up-skok na uzlový bod o úroveň vyššie ako bol pôvodný up-skok. S takto zvolenými skokmi prepočítame pravdepodobnosť p_{up} podľa (3.1.7). Ak pravdepodobnosť p_{up} nie je z prípustného intervalu $[0, 1]$, up-skok opäť posunieme na vyššiu úroveň a prepočítame hodnotu pravdepodobnosti p_{up}. Postup s posunom up-skoku na uzol o úroveň vyššie opakujeme dovtedy, pokým nedosiahneme hodnotu pravdepodobnosti p_{up} z intervalu $[0, 1]$.

- Ak sa nachádzame v uzlovom bode, v ktorom je pravdepodobnosť $p_{up} < 0$, postup voľby je opačný. Up-skok zafixujeme na hodnote $r^F_{up} = r^F$ a posun down-skoku na nižšiu úroveň volíme rovnakým postupom ako pri up-skoku. Opäť prepočítame pravdepodobnosti pre novozvolené skoky.

3.2 Binomický model dvoch závislých premenných

Keďže možno predpokladať, že vývoj variabilnej a fixnej úrokovej sadzby je navzájom previazaný, nemôžeme modelovať každú sadzbu osobitne, použitím postupu z Časti 3.1, bez toho, aby sme zobrali do úvahy závislosť medzi nimi. Je preto potrebné navrhnúť taký model, ktorý zohľadňuje vzájomnú koreláciu medzi dvoma náhodnými procesmi. Pri rozširovaní modelu budeme vychádzame predovšetkým zo zdrojov [1] a [7].

Predpokladajme, že fixnú aj variabilnú úrokovú sadzbu môžeme modelovať pomocou CIR modelu:

$$dr_t^V = \beta^V \left(\mu^V - r_t^V\right) dt + \sigma^V \sqrt{r_t^V} dZ_t^V \tag{3.2.1}$$

$$dr_t^F = \beta^F \left(\mu^F - r_t^F\right) dt + \sigma^F \sqrt{r_t^F} dZ_t^F, \tag{3.2.2}$$

kde Z^V a Z^F sú štandardné Wienerove procesy so vzájomnou koreláciou ρ.

Podľa Nelsona a Ramaswamyho [16], každý stochastický proces je možné vhodnou transformáciou previesť na proces s konštantnou volatilitou, a teda simulovať jeho vývoj v tvare rekombinačného binomického stromu. Vychádzajúc z tejto myšlienky, zostavenie binomického modelu dvoch premenných bude podľa [1] pozostávať zo štyroch krokov:

- transformovať oba procesy r^V a r^F na procesy s konštantnou volatilitou, ktoré označíme R^V respektíve R^F,
- definovať nové procesy X_1, X_2 ako funkcie R^V a R^F tak, aby sme zabezpečili nulovú kovarianciu medzi nimi,
- modelovať X_1 a X_2 ako dva separátne binomické stromy a potom zlúčiť obe štruktúry do binomického stromu dvoch premenných, v ktorom sa medzi uzlami budeme pohybovať prostredníctvom štyroch prislúchajúcich pravdepodobností prechodu,
- v každom uzle previesť premenné späť na r^V a r^F.

Prvým krokom tvorby modelu je transformovať procesy popísané rovnicami (3.2.1) a (3.2.2) na procesy s konštantnou volatilitou použitím transformácie

$$R = R(r) = \frac{2\sqrt{r}}{\sigma}. \tag{3.2.3}$$

Transformované procesy R^V a R^F môžeme zapísať v tvare stochastických diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} dR_t^V &= m^V\left(R_t^V\right)dt + dZ_t^V \\ dR_t^F &= m^F\left(R_t^F\right)dt + dZ_t^F, \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

kde

$$m^i\left(R_t^i\right) = \frac{2\beta^i\mu^i}{\left(\sigma^i\right)^2 R_t^i} - \frac{\beta^i R_t^i}{2} - \frac{1}{2R_t^i}, \qquad i \in \{V, F\}. \tag{3.2.5}$$

Druhým krokom je definovanie nových procesov X_1, X_2 v takom tvare, aby oba procesy boli navzájom ortogonálne. Rovnice (3.2.4) transformujeme ešte raz, a to nasledovne:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= R_t^V + R_t^F \\ X_2(t) &= R_t^V - R_t^F. \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Diferencovaním procesov (3.2.6) dostaneme rovnice:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= dR_t^V + dR_t^F \\ dX_2(t) &= dR_t^V - dR_t^F. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Môžeme si všimnúť, že takto dvakrát transformované procesy dané diferenciálnymi rovnicami (3.2.7) majú nulovú kovarianciu:

$$\begin{aligned} cov\left(dX_1(t), dX_2(t)\right) &= cov\left(dR_t^V + dR_t^F, dR_t^V - dR_t^F\right) \\ &= \left(1^2 - 1^2 + \rho - \rho\right) = 0, \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

kde ρ je okamžitá korelácia medzi prírastkami Wienerových procesov dZ_t^V a dZ_t^F.

Dosadením (3.2.4) do (3.2.7) a následnými úpravami dostávame nekorelované procesy s konštantnou volatilitou v tvare:

$$
\begin{aligned}
dX_1(t) &= m^V dt + dZ_t^V + m^F dt + dZ_t^F = \left(m^V + m^F\right) dt + \left(dZ_t^V + dZ_t^F\right) \\
&= \mu_1 dt + \sigma_1 dZ_1, \\
dX_2(t) &= m^V dt + dZ_t^V - m^F dt + dZ_t^F = \left(m^V - m^F\right) dt + \left(dZ_t^V - dZ_t^F\right) \\
&= \mu_2 dt + \sigma_2 dZ_2, \qquad (3.2.9)
\end{aligned}
$$

kde

$$\mu_1 = m^V\left(R_t^V\right) + m^F\left(R_t^F\right), \ \sigma_1 = \sqrt{2(1+\rho)} \qquad (3.2.10)$$

a

$$\mu_2 = m^V\left(R_t^V\right) - m^F\left(R_t^F\right), \ \sigma_2 = \sqrt{2(1-\rho)}. \qquad (3.2.11)$$

V treťom kroku najskôr procesy, popísané diferenciálnymi rovnicami (3.2.9), namodelujeme ako dva nezávislé binomické stromy. Potom zlúčime obe štruktúry do binomického stromu dvoch premenných, ktorého prislúchajúce štyri pravdepodobnosti prechodu medzi uzlami vyjadríme ako súčin jednotlivých individuálnych pravdepodobností.

Ako prvé definujeme časový krok $\Delta t = T/n$ ako podiel času T a počtu krokov n. Následne zostrojíme dva binomické stromy s n krokmi dĺžky Δt. Označme $(0,0)$ štartovací uzol binomického stromu pre proces X_1. Po i časových krokoch $(i = 0, ..., n)$ sa môže X_1 nachádzať v jednom z uzlových bodov (i,k) $(k = 0, ..., i)$, ktorého hodnota zodpovedá výrazu:

$$X_1^{(i,k)} = X_1(0) + (2k - i)\sigma_1\sqrt{\Delta t}. \qquad (3.2.12)$$

Analogicky pre proces X_2, označme $(0,0)$ štartovací uzol binomického stromu. Po i časových krokoch $(i = 0, ..., n)$ sa môže X_2 nachádzať v jednom z uzlovových bodov (i,l) $(l = 0, ..., i)$, ktorého hodnota zodpovedá výrazu:

$$X_2^{(i,l)} = X_2(0) + (2l - i)\sigma_2\sqrt{\Delta t}. \qquad (3.2.13)$$

Na odvodenie spomínaných štyroch pravdepodobností prechodu si musíme najskôr zadefinovať pravdepodobnosť up-skoku v binomickom strome pre proces X_1:

$$p^{(i,k)} = \frac{1}{2} + \frac{\mu_1^{(i,k)}\sqrt{\Delta t}}{2\sigma_1}. \tag{3.2.14}$$

Podobne bude vyzerať aj výraz pre $q^{(i,l)}$, pravdepodobnosť up-skoku v binomickom strome pre proces X_2, iba v spodných indexoch pri μ a σ nahradíme index 1 číslom 2 a vo vrchných index k indexom l.

Z rovnice (3.2.14) je zrejmé, že uvedené pravdepodobnosti prechodu p a q môžu nadobúdať záporné hodnoty alebo prekročiť jednotku (nenachádzajú sa v povolenom intervale $[0,1]$) pre konečný časový prírastok Δt, ak σ_1 (σ_2) je voči μ_1 (μ_2) relatívne malé. Aby sme zabezpečili, že pravdepodobnosti budú dobre definované a neopustia interval $[0,1]$, povolíme viacnásobné skoky v oboch binomických stromoch X_1 a X_2. Výpočet veľkostí viacnásobných skokov popíšeme vo všeobecnosti pre proces X_1, pre proces X_2 je výpočet analogický.

V čase $i\Delta t$ sa nachádzame v uzle $X_1^{(i,k)}$. Proces X_1 môže v čase $(i+1)\Delta t$ skočiť hore na hodnotu $X_1^{(i+1,k+k_{up})}$ s pravdepodobnosťou $p^{(i,k)}$ alebo dole na hodnotu $X_1^{(i+1,k+k_{down})}$ s pravdepodobnosťou $(1-p^{(i,k)})$. Hodnoty indexov k_{up} a k_{down} definujeme nasledovne:

- Pri štandardnom skoku hore (dole), t.j. ak pre pravdepodobnosť vypočítanú z (3.2.14) platí, že $p^{(i,k)} \in [0,1]$, majú indexy hodnoty $k_{down} = 0$ a $k_{up} = 1$.
- Ak $p^{(i,k)} < 0$, $k_{up} = 1$ a hodnotu k_{down} volíme postupne z množiny $\{-1,-2,...,-k\}$ dovtedy, pokiaľ $p^{(i,k)}$ vypočítaná ako

$$p^{(i,k)} = \frac{\mu_1^{(i,k)}\Delta t + X_1^{(i,k)} - X_1^{(i+1,k+k_{down})}}{X_1^{(i+1,k+k_{up})} - X_1^{(i+1,k+k_{down})}} \tag{3.2.15}$$

  nenadobúda prípustné hodnoty z intervalu $[0,1]$.
- Ak $p^{(i,k)} > 1$, $k_{down} = 0$ a hodnotu k_{up} volíme postupne z množiny $\{2,3,...,i-k\}$ dovtedy, pokiaľ $p^{(i,k)}$ vypočítaná z výrazu (3.2.15) nenadobúda prípustné hodnoty z intervalu $[0,1]$.

Teraz sme pripravení modelovať spoločný vývoj procesov X_1 a X_2 tým, že zoberieme do úvahy binomický strom dvoch premenných získaný zlúčením dvoch binomických stromov jednej premennej. V každom časovom kroku i $(i = 0, ..., n)$ má novovzniknutý strom $(i+1)^2$ uzlových bodov, ktoré označíme (i,k,l). Uzol (i,k,l) zodpovedá hodnotám $X_1^{(i,k)}$ a $X_2^{(i,l)}$. Začínajúc z uzlového bodu (i,k,l), s ohľadom na možnosť viacnásobných skokov a stromovú štruktúru, môže proces dosiahnuť jeden z nasledujúcich štyroch uzlov:

$$\begin{aligned}
&(i+1, k+k_{up}, l+l_{up}), && \text{s pravdepodobnosťou } P_{11}^{(i,k,l)},\\
&(i+1, k+k_{up}, l+l_{down}), && \text{s pravdepodobnosťou } P_{12}^{(i,k,l)},\\
&(i+1, k+k_{down}, l+l_{up}), && \text{s pravdepodobnosťou } P_{21}^{(i,k,l)},\\
&(i+1, k+k_{down}, l+l_{down}), && \text{s pravdepodobnosťou } P_{22}^{(i,k,l)},
\end{aligned}$$

kde indexy k_{up}, k_{down}, l_{up}, l_{down} súvisia s voľbou viacnásobných skokov v binomických stromoch pre procesy X_1, X_2 a hodnoty $P_{11}^{(i,k,l)}$, $P_{12}^{(i,k,l)}$, $P_{21}^{(i,k,l)}$, $P_{22}^{(i,k,l)}$ sú spojené pravdepodobnosti prechodov medzi uzlami.

Hodnoty spojených pravdepodobností prechodu vypočítame ako súčin jednotlivých individuálnych pravdepodobností nasledovne:

$$\begin{aligned}
P_{11}^{(i,k,l)} &= p^{(i,k)} q^{(i,l)},\\
P_{12}^{(i,k,l)} &= p^{(i,k)} \left(1 - q^{(i,l)}\right),\\
P_{21}^{(i,k,l)} &= \left(1 - p^{(i,k)}\right) q^{(i,l)},\\
P_{22}^{(i,k,l)} &= \left(1 - p^{(i,k)}\right)\left(1 - q^{(i,l)}\right). \qquad (3.2.16)
\end{aligned}$$

Posledný krokom je spätná transformácia hodnôt z premenných X_1, X_2 späť na pôvodné premenné r^V a r^F, a to nasledovne:

$$\begin{aligned}
R^V &= \frac{X_1 + X_2}{2},\\
R^F &= \frac{X_1 - X_2}{2},\\
r^V &= \frac{\left(\sigma^V\right)^2}{4} \frac{\left(X_1 + X_2\right)^2}{4},\\
r^F &= \frac{\left(\sigma^F\right)^2}{4} \frac{\left(X_1 - X_2\right)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Uvedeným postupom získame dva binomické stromy dvoch premenných (každý z nich si možno predstaviť ako ihlan), pre každú úrokovú sadzbu (variabilnú, fixnú) zvlášť. V prvom strome zodpovedá uzlový bod (i, k, l) hodnote variabilnej úrokovej sadzby v čase i a uzle (k, l). Jeho hodnota je daná vzťahom:

$$r^V(i,k,l) = \frac{\left(\sigma^V\right)^2}{4} \frac{\left(X_1^{(i,k)} + X_2^{(i,l)}\right)^2}{4}.$$

Podobne v druhom strome, uzlový bod (i, k, l) reprezentuje hodnotu fixnej úrokovej sadzby v čase i a uzle (k, l). Túto hodnotu vypočítame ako:

$$r^F(i,k,l) = \frac{\left(\sigma^F\right)^2}{4} \frac{\left(X_1^{(i,k)} - X_2^{(i,l)}\right)^2}{4}.$$

4 Analýza modelu fixácie hypotekárneho úveru

V predchádzajúcich častiach práce sme určili základné parametre modelu, špecifikovali premenné potrebné na nájdenie optimálneho riadenia a bližšie popísali modelovanie vývoja úrokových sadzieb ako náhodných premenných v podobe binomických stromov. V tejto časti priblížime proces riešenia Úlohy 2.2 metódou dynamického programovania pre rôzne druhy vývoja fixnej a variabilnej úrokovej sadzby (deterministický, stochastický) a každú z možností podrobíme dôkladnej numerickej analýze.

4.1 Deterministický vývoj úrokových sadzieb

V tejto podkapitole budeme predpokladať, že vieme dokonale predvídať, ako sa bude vyvíjať hodnota fixnej aj variabilnej úrokovej sadzby počas celej doby splácania úveru. I keď tento predpoklad nemožno považovať za reálny, analýza takejto úlohy nám poskytne základnú predstavu o optimálnom manažovaní splácania hypotekárneho úveru.

Predpoklad o deterministickom vývoji úrokových sadzieb nám zjednodušuje aj samotný výpočet optimálneho riadenia. V prvom rade úrokové sadzby v Úlohe 2.2 nebudú vystupovať ako náhodné premenné a úloha sa tým zredukuje o jednu stavovú premennú, premennú r. Navyše zmena nastane aj v účelovej funkcii. Namiesto minimalizácie očakávanej hodnoty súčtu mesačných splátok budeme minimalizovať len deterministicky určenú sumu splátok.

Pre tento špeciálny prípad najskôr odvodíme rovnicu dynamického programovania, ktorú neskôr aplikujeme na konkrétne zadanie žiadateľa o hypotekárny úver.

4.1.1 Metóda dynamického programovania

Ako sme už viackrát spomenuli, diskrétne úlohy optimálneho riadenia sa najčastejšie riešia metódou dynamického programovania. Hlavnou myšlienkou metódy je rozklad úlohy na podúlohy, ktoré riešime rekurentne, t.j. v riešení jednej z podúloh sa vždy využíva riešenie predchádzajúcej podúlohy. Rekurentný vzťah, ktorý týmto postupom riešenia úlohy vznikne, sa v teórii optimálneho riadenia nazýva *Bellmanova rovnica dynamického programovania* [6].

Pre deterministický prípad Úlohy 2.2 má rovnica dynamického programovania nasledujúci tvar:

$$V_j(x) = \min_{u_j \in U_j} \left[\frac{1}{(1+\delta)} A_j(P, D, r(u_j), x) + \frac{1}{(1+\delta)^2} V_{j+1}\left(f_j(x, u_j)\right) \right]. \tag{4.1.1}$$

Výraz V_j v (4.1.1) sa nazýva hodnotová funkcia [6] v čase j a definujeme ju pre $\forall j \in \{0, 1, ..., D-1\}$ predpisom:

$$V_j(x) = \min_{u_j \in U_j} \sum_{i=j}^{D-1} \frac{1}{(1+\delta)^{i+1}} A_i(P, D, r(u_i), x), \tag{4.1.2}$$

kde x označuje stav v čase j.

Vzhľadom na to, že rovnica dynamického programovania je rekurentný vzťah, vieme hodnoty V_j pre $j = D-1, ..., 1, 0$ dopočítať, ak poznáme hodnotu V_D. Pretože naša úloha je minimalizačná a máme obmedzenie na koncový stav, hodnotová funkcia na konci posledného mesiaca D bude mať tvar:

$$V_D(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x_D = 0 \\ +\infty, & \text{ak } x_D \neq 0. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

4.1.2 Numerická analýza úlohy

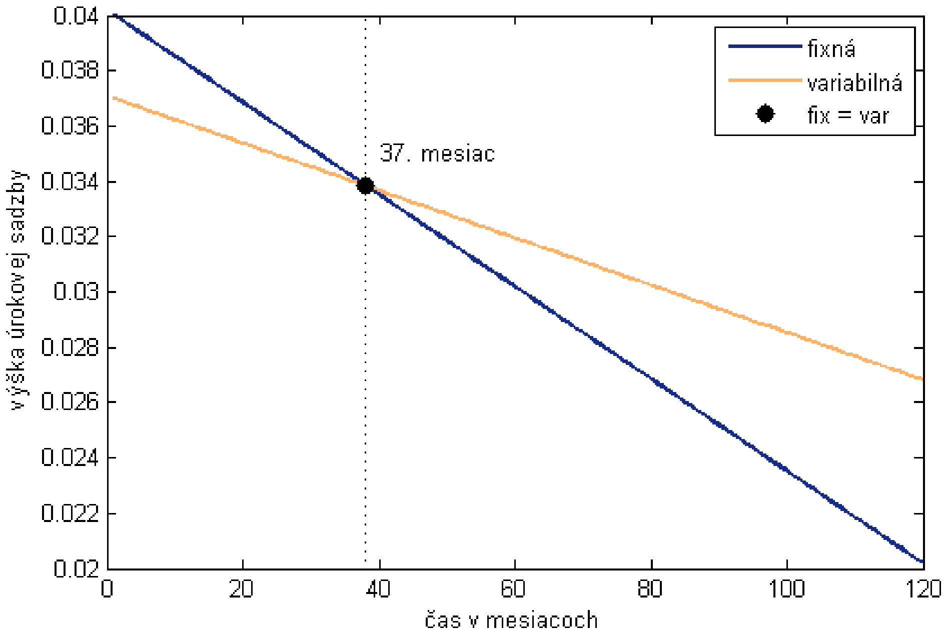
Uvažujme klienta, ktorý si chce zobrať hypotekárny úver v celkovej výške 50 000 € na obdobie 10 rokov (120 mesiacov). Splácanie úveru prebieha v podobe mesačných splátok počas celej dĺžky splácania úveru. Banka ponúka klientovi fixačné obdobie dva roky (24 mesiacov).

V numerickej analýze porovnáme tri stratégie splácania hypotekárneho úveru. Prvou analyzovanou možnosťou bude splácanie pri variabilnej úrokovej sadzbe počas celej doby trvania úveru. Pre takúto možnosť splácania by sa mohol rozhodnúť klient so stabilným vyšším príjmom, ktorý navyše predpokladá, že úrokové sadzby budú v budúcnosti klesať.

Iným typom klienta je „plánovací" typ. Takýto klient má potrebu poznať hodnotu mesačnej splátky dopredu, pravdepodobne kvôli kontrole a plánovaniu ďalších výdavkov. Z uvedeného dôvodu volí po celú dobu splácania opakovanú fixáciu úrokovej sadzby.

Posledným typom klienta, je klient stratég, ktorý splátky hypotekárneho úveru manažuje vzhľadom k optimálnemu riešeniu Úlohy 2.2, rozhodnutie o fixácii je závislé od aktuálnej hodnoty úrokovej sadzby a jej predpokladaného budúceho vývoja.

Pre úplnosť poznamenajme, že ak by sa klient rozhodol peniaze ukladať na sporiaci účet, banka mu ponúka 1%-ný úrok.

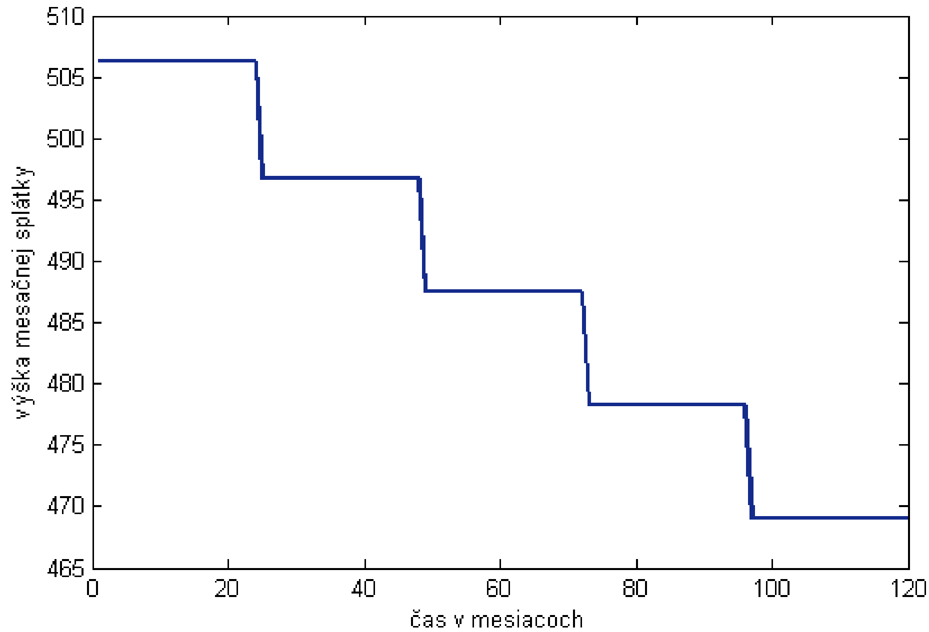


Obr. 4.1.1: Predpokladaný vývoj úrokových sadzieb.

Predpokladaný vývoj úrokových sadzieb[1] je zobrazený na Obr. 4.1.1. Zvolené počiatočné hodnoty úrokových sadzieb a ani ich budúci vývoj nemajú bližší súvis s realitou, slúžia iba na ilustráciu.

Najskôr rozoberieme prípady, ak by klient nechcel meniť svoje počiatočné rozhodnutie a po celý čas by úver splácal iba pri jednej úrokovej sadzbe: variabilnej alebo fixnej.

Ak by rozhodnutím klienta bolo nefixovať a splácať úver pri variabilnej sadzbe, jeho mesačné splátky by po celú dobu lineárne klesali tempom, akým klesá variabilná úroková sadzba a klienta by úver stál 55 642, 10 €, v prepočte na súčasnú hodnotu. Na úrokoch by teda preplatil 5 642, 10 €.



Obr. 4.1.2: Priebeh splácania úveru v prípade fixácie počas celej dĺžky trvania úveru.

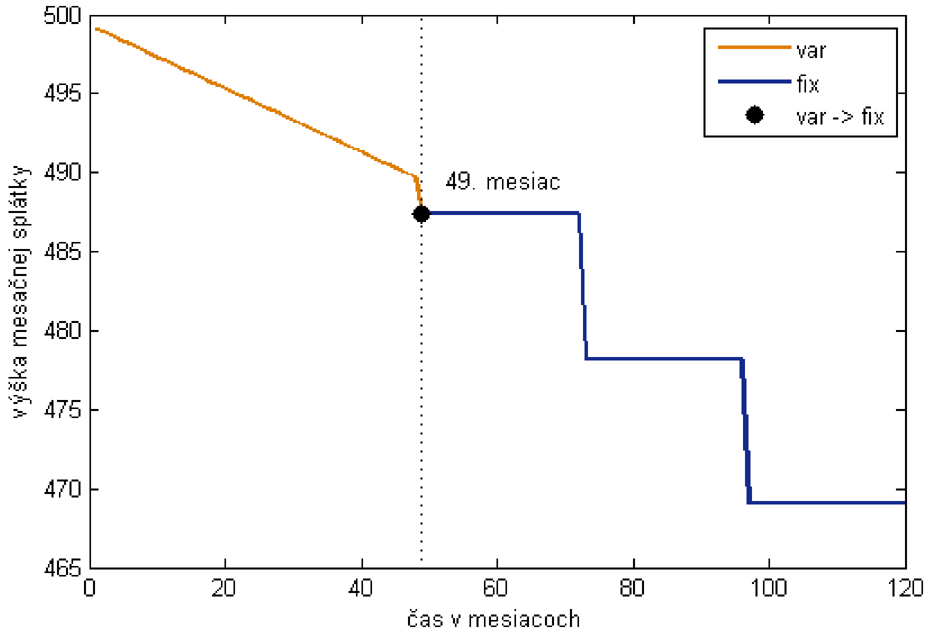
Pri výbere fixácie úrokovej sadzby počas celej dĺžky splatnosti úveru, by klient splácal úver v piatich po sebe nadväzujúcich fixačných obdobiach. To znamená, že po skončení jedného fixačného obdobia, by klient okamžite vstúpil do ďalšieho s jediným rozdielom, a to vo výške úrokovej sadzby. Tá by sa klientovi pred vstupom do

[1] všetky úrokové sadzby sú uvádzané per annum

každého fixačného obdobia upravila podľa aktuálnej hodnoty fixnej úrokovej sadzby. Výšky mesačných splátok pri rozhodnutí klienta permanentne fixovať úrokovú sadzbu sú zobrazené na Obr. 4.1.2.

Súčasná suma mesačných splátok za úver by v prípade rozhodnutia opakovanej fixácie bola 55 695, 35 €. Klient by banke na úrokoch zaplatil 5 695, 35 €.

Optimálnu stratégiu voľby úrokovej sadzby v jednotlivých mesiacoch trvania úveru získame aplikovaním metódy dynamického programovania implementovanej v jazyku MATLAB. Aktuálne výšky (nie súčasnú hodnotu) mesačných splátok zachytáva Obr. 4.1.3.



Obr. 4.1.3: Priebeh splácania úveru v prípade optimalizácie.

Môžeme si všimnúť, že kým je variabilná úroková sadzba nižšia ako fixná, optimálnou voľbou pre klienta je splácanie úveru pri variabilnej sadzbe. Optimálne rozhodnutie sa zmení, akonáhle hodnota fixnej úrokovej sadzby klesne pod hodnotu variabilnej. Zmena v splácaní nenastane okamžite, ale až v 49. mesiaci napriek tomu, že fixná úroková sadzba klesne pod variabilnú už v 37. mesiaci. Príčinou je v poradí druhé fixačné obdobie, počas ktorého klient nemá možnosť voľby úrokovej sadzby.

Ak by sa klient rozhodol zvoliť si optimálnu stratégiu splácania úveru uvedenú na Obr. 4.1.3, súčasná hodnota súčtu jeho mesačných splátok by bola $55\,361,05$ €. Úver by na úrokoch preplatil o $5\,361,05$ €.

Porovnaním všetkých troch možných rozhodnutí klienta vidíme, že najmenej klient preplatí úver na úrokoch práve v prípade, ak jeho voľbou bude splácať úver podľa optimálnej stratégie načrtnutej na Obr. 4.1.3.

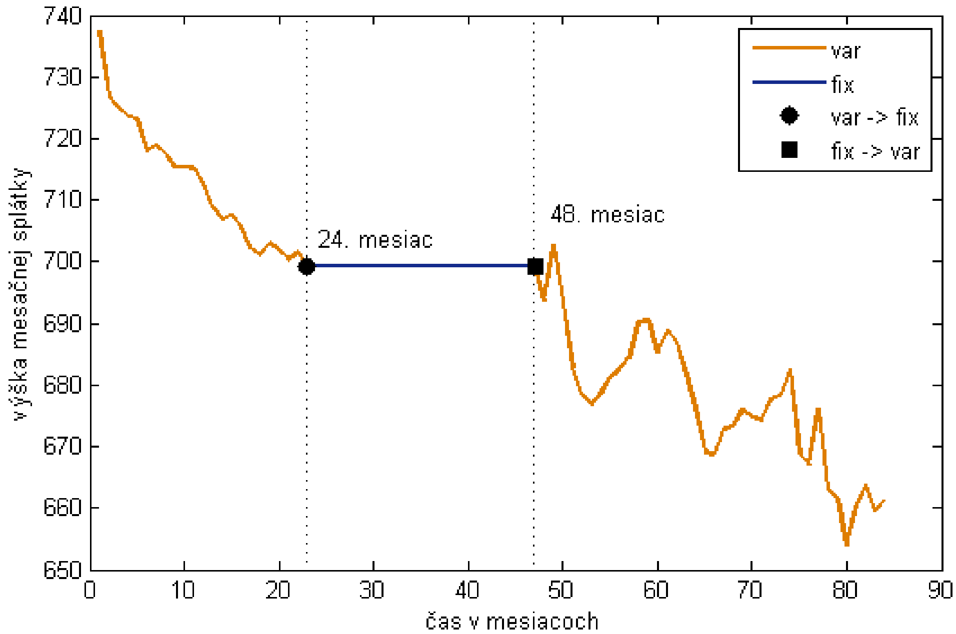
4.1.3 Spätná analýza na základe historického vývoja úrokových sadzieb

V predchádzajúcej časti sme vývoj úrokových sadzieb stanovovali sami a pre jednoduchosť sme predpokladali, že úrokové sadzby budú počas celej dĺžky trvania úveru lineárne klesať. Teraz sa zameriame na situáciu, keď budeme brať do úvahy reálny minulý vývoj úrokových sadzieb, t.j. spätne sa pozrieme na to, ako mala vyzerať optimálna stratégia voľby úrokových sadzieb žiadateľa o hypotekárny úver.

Uvažujme klienta, ktorý si chce podobne ako v časti 4.1.2 zobrať hypotekárny úver vo výške $50\,000$ €. Klient sa rozhodol požiadať o úver v januári 2009 a banka od neho požaduje, aby bol splatený v decembri 2015, tzn. doba splatnosti je 7 rokov (84 mesiacov). Klient má možnosť fixovať úrokovú sadzbu na obdobie dvoch rokov. Úrok na sporiacom účte bol na začiatku roku 2009 na úrovni 1%.

Historický vývoj úrokových sadieb je zobrazený na Obr. 1.4.1. Keďže banka klientovi ponúkla fixáciu na dva roky, hodnoty fixnej úrokovej sadzby, ktoré budú do úlohy vstupovať, budú historické hodnoty úrokovej sadzby pre dĺžku fixácie do päť rokov (na Obr. 1.4.1 označené žltou farbou).

Optimálna stratégia splácania úveru vo forme mesačných splátok je graficky znázornená na Obr. 4.1.4. Môžeme pozorovať, že optimálnou voľbou pre klienta by bolo začať splácať úver pri variabilnej úrokovej sadzbe. V 24. mesiaci splácania, t.j. v januári 2011 by klient mal zmeniť svoje rozhodnutie a sadzbu zafixovať na jedno fixačné obdobie, a teda ďalšie dva roky úver splácať pri fixnej úrokovej sadzbe. Po-



Obr. 4.1.4: Priebeh splácania úveru pri spätnej analýze.

slednú zmenu vo svojom rozhodnutí by mal klient vykonať v 48. mesiaci doby splácania, v januári 2013, keď by bolo pre neho najvýhodnejšie prejsť opäť k variabilnej úrokovej sadzbe a zvyšné tri roky splácať úver pri nej.

Ak by klient postupoval pri splácaní úveru podľa stratégie zobrazenej na Obr. 4.1.4, banke by celkovo zaplatil $56\,220,68$ €, pri diskontácii mesačných splátok na začiatok januára 2009. Táto suma je o 1% nižšia v porovnaní s prípadom, ak by úver splácal iba pri variabilnej úrokovej sadzbe.

4.2 Stochastický vývoj fixnej úrokovej sadzby

V tejto časti práce budeme analyzovať model optimálneho splácania hypotekárneho úveru popísaný v Časti 2.2, pričom za náhodnú premennú, v modeli označenú ako r, budeme považovať fixnú úrokovú sadzbu. Variabilná úroková sadzba bude aj naďalej vystupovať ako deterministická premenná, tzn. po celý čas splácania úveru je nám známy jej ďalší vývoj. Vývoj fixnej úrokovej sadzby budeme modelovať prostredníctvom binomického stromu, ktorého presný proces tvorby je uvedený v Časti 3.1.

Predtým ako vykonáme numerickú analýzu konkrétnej úlohy, je potrebné pozmeniť tvar rovnice dynamického programovania (4.1.1), odvodenej v predchádzajúcej podkapitole pre deterministický vývoj úrokových sadzieb.

Bellmanova rovnica dynamického programovania pre model so stochastickou fixnou úrokovou sadzbou r^F bude mať tvar:

$$V_j(x, r^F) = \min_{u_j \in U_j} \left[\frac{1}{(1+\delta)} A_j(P, D, r(u_j), x) + \frac{1}{(1+\delta)^2} E\left[V_{j+1}\left(f_j(x, u_j), r^F \right) \right] \right]. \tag{4.2.1}$$

Pričom strednú hodnotu z hodnotovej funkcie V počítame na základe binomického modelu z Časti 3.1 nasledovne:

$$E\left[V_{j+1}\left(f_j(x, u_j), r^F \right) \right] = p_{up}(r^F) V_{j+1}\left(f_j(x, u_j), r^F_{up} \right) + p_{down}(r^F) V_{j+1}\left(f_j(x, u_j), r^F_{down} \right). \tag{4.2.2}$$

Aby špecifikácia hodnotovej funkcie bola kompletná, doplňme, že tvar hodnotovej funkcie v poslednom mesiaci D zostáva nezmenený:

$$V_D(x, r^F) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x_D = 0 \\ +\infty, & \text{ak } x_D \neq 0. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

4.2.1 Numerická analýza úlohy pri dĺžke splatnosti úveru 10 rokov a analýza senzitivity

Rovnako ako v predchádzajúcich prípadoch uvažujme klienta, ktorý má záujem o hypotekárny úver v celkovej výške 50 000 € na obdobie 10 rokov (120 mesiacov). Nech banka ponúka klientovi možnosť fixácie úrokovej sadzby na obdobie dlhé jeden rok alebo na trojročné obdobie (12 resp. 36 mesiacov). Najskôr budeme analyzovať úlohu s dĺžkou fixácie jeden rok, ktorú neskôr porovnáme s prípadom, ak sa fixačné obdobie predĺži na tri roky. Klient má opäť právo voľby úrokovej sadzby, pri ktorej bude úver splácať, s výnimkou obdobia fixácie. Diskontný faktor δ je rovný 1%.

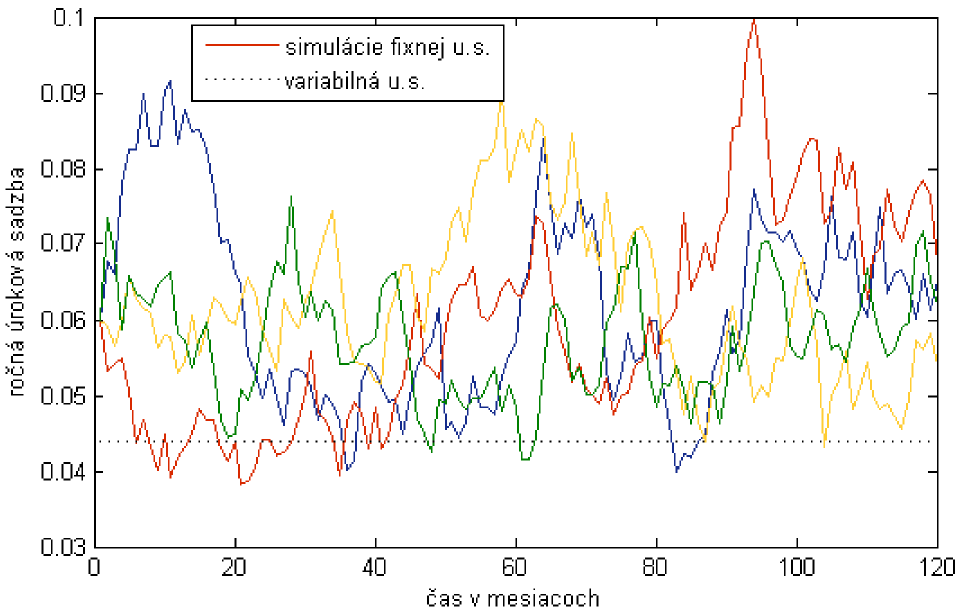
Hodnotu variabilnej úrokovej sadzby sme stanovili konštantnú na úrovni 4, 4%, čo zodpovedá hodnote aritmetického priemeru mesačných údajov o vývoji variabilnej úrokovej sadzby za posledných sedem rokov.

Vývoj fixnej úrokovej sadzby modelujeme CIR procesom s predpisom:

$$\Delta r_t^F = 1,41(0,06 - r_t^F)\Delta t + 0,073\sqrt{r_t^F}\Delta Z_t^F, \tag{4.2.4}$$

kde Δt predstavuje mesačnú zmenu.

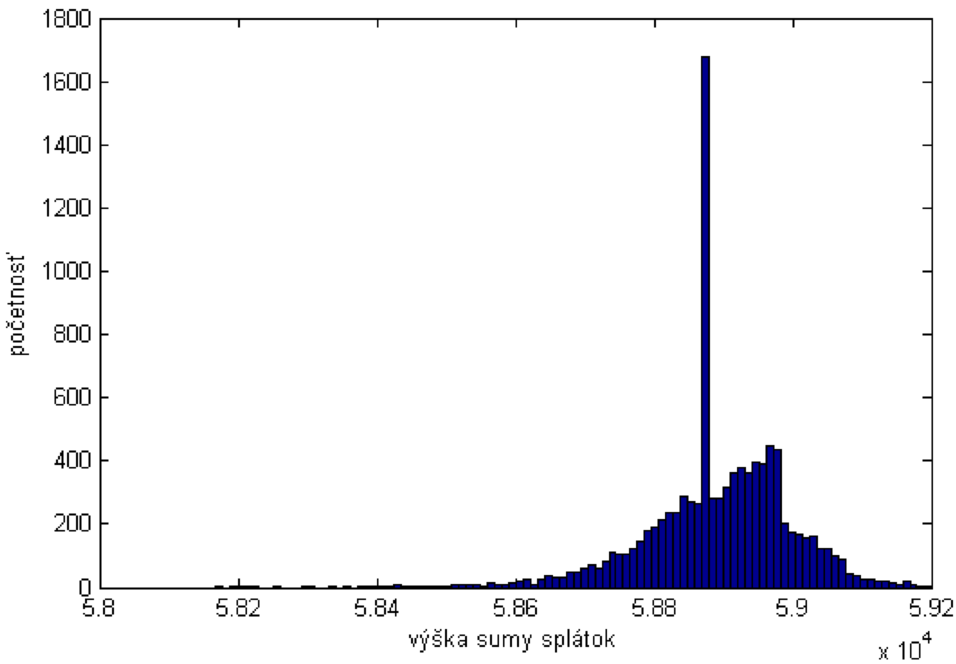
Parametre procesu (4.2.4) sme odhadli z reálnych hodnôt fixnej úrokovej sadzby použitím funkcie CIRestimation(.) naprogramovanej v prostredí MATLAB (viď. [12]).



Obr. 4.2.1: Niekoľko simulácií vývoja fixnej úrokovej sadzby a konštantná variabilná úroková sadzba.

Na Obr. 4.2.1 sú pre ilustráciu zobrazené štyri náhodné simulácie vývoja fixnej úrokovej sadzby podľa predpisu (4.2.4) a variabilná úroková sadzba na úrovni 4, 4%. Všetky simulácie fixnej úrokovej sadzby začínajú v hodnote $r_0^F = 6\%$, ktorá zodpovedá výške dlhodobého priemeru procesu (4.2.4).

Optimálne rozhodnutia klienta sa samozrejme líšia v závislosti od vygenerovaných simulácií fixnej úrokovej sadzby. Pre potreby analýzy sme vždy vygenerovali 10 000 náhodných simulácií fixnej úrokovej sadzby pomocou funkcie cirpath(.) [13]. Pre každú zo simulácií sme hľadali optimálnu stratégiu voľby úrokovej sadzby, pri ktorej klient minimalizuje očakávanú sumu splátok za úver a tieto výsledné sumy splátok sme zakreslili do histogramu.



Obr. 4.2.2: Histogram výsledných platieb pre fixáciu na jeden rok.

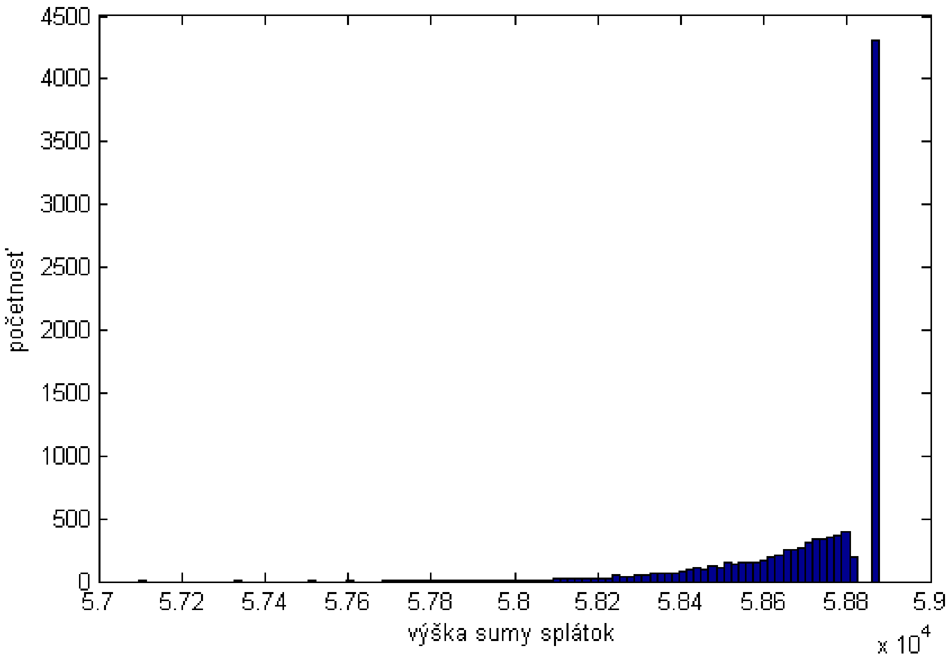
Na Obr. 4.2.2 je znázornený histogram výsledných platieb za úver pri voľbe jednoročnej fixácie úrokovej sadzby. Môžeme vidieť, že pri veľkom množstve simulácií, niečo vyše 1700, má výsledná platba za úver rovnakú hodnotu. Tieto prípady zodpovedajú situáciám, keď nasimulovaná fixná úroková sadzba bola pre klienta nevýhodná a optimálnym rozhodnutím bolo splácať úver pri variabilnej sadzbe počas celej dĺžky trvania úveru. Vo zvyšných prípadoch bolo pre klienta optimálne aspoň raz za obdobie 10 rokov zafixovať úrokovú sadzbu.

Priemerná suma, ktorú by klient splátkami za úver zaplatil, je pri optimálnom výbere medzi fixnou úrokovou sadzbou na jeden rok a variabilnou úrokovou sadzbou rovná $58\,891,11$ € a smerodajná odchýlka platieb má hodnotu $105,77$ €.

Ďalej ukážeme, ako by sa zmenili výsledné sumy splátok, ak by si klient namiesto fixácie úrokovej sadzby na jeden rok vybral možnosť trojročnej fixácie.

Histogram výsledných platieb pre fixáciu na tri roky zachytáva Obr. 4.2.3. Na

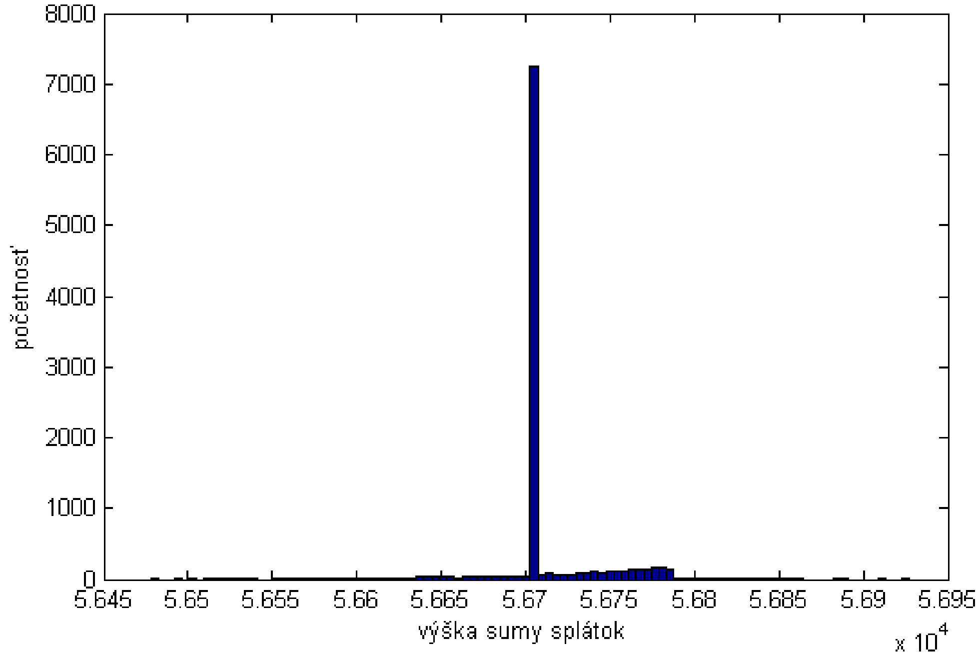
Obr. 4.2.3 pozorujeme, že počet simulácií, pri ktorých by bolo pre klienta optimálne splácať úver iba s variabilnou úrokovou sadzbou, sa 2, 5-násobne zvýšil v porovnaní s počtom viditeľným na Obr. 4.2.2. Zvyšné simulácie sa preskupili viac vľavo od hodnoty platby, keď je optimálne voliť iba variabilnú sadzbu, čo má za následok zníženie priemernej sumy splátok za úver na úroveň 58 722, 35 € a zvýšenie smerodajnej odchýlky na 195, 01 €.



Obr. 4.2.3: Histogram výsledných platieb pre fixáciu na tri roky.

Porovnaním optimálnych riešení pre fixačné obdobia jedného roka a troch rokov zistíme, že predĺženie fixačného obdobia, pri zachovaní zvyšných parametrov hypotekárneho úveru, má za následok zvýšenie počtu prípadov, keď je pre klienta výhodnejšie úrokovú sadzbu vôbec nefixovať a splácať úver pri variabilnej úrokovej sadzbe. V situáciách, keď je pre klienta naopak optimálne meniť úrokovú sadzbu z variabilnej na fixnú, resp. naopak, sa zníži výsledná suma splátok. Keďže klient spláca úver dlhšie obdobie pri nízkej fixnej sadzbe, priemerná suma splátok pri predlžovaní fixačného obdobia klesá, ale rozptyl výsledných platieb stúpa.

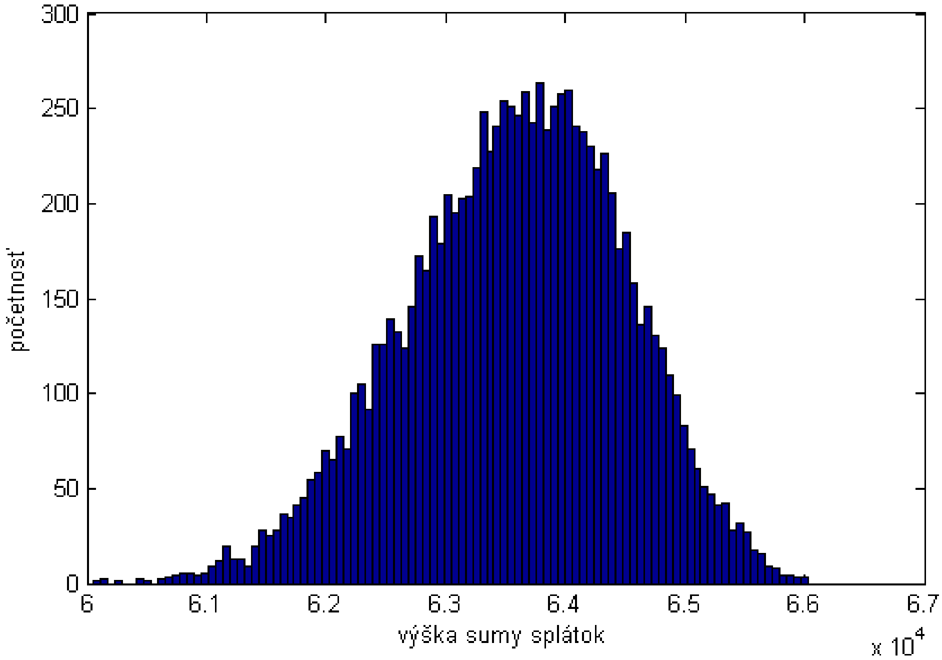
Demonštrovali sme, aký má vplyv na optimálnu voľbu úrokových sadzieb predlžovanie fixačného obdobia. Keďže rozhodnutia klienta, kedy zafixovať úrokovú sadzbu a kedy splácať úver pri variabilnej závisia predovšetkým od vývoja oboch sadzieb, priblížime, aké zmeny v rozhodnutiach nastanú, keď budeme posúvať hodnotu variabilnej úrokovej sadzby. Zvyšné parametre úveru ponecháme, dĺžka fixačného obdobia bude jeden rok.



Obr. 4.2.4: Histogram výsledných platieb pre fixáciu na jeden rok a variabilnú úrokovú sadzbu 3,6%.

Na Obr. 4.2.4 sú znázornené výsledné platby za úver, ak hodnotu variabilnej úrokovej sadzby najskôr znížime na úroveň $3,6\%$. Na histograme je viditeľný markantný vzostup prípadov, v porovnaní s Obr. 4.2.2 pre $4,4\%$-nú variabilnú sadzbu, keď by optimálnou voľbou bola voľba úrokovú sadzbu vôbec nefixovať. Z uvedeného porovnania je zrejmé, že ak by sme hodnotu variabilnej úrokovej sadzby naďalej znižovali, časom by nastala situácia, keď by jediným optimálnym riešením pre každú z 10 000 simulácií fixnej úrokovej sadzby bolo úrokovú sadzbu nefixovať. So znižovaním variabilnej úrokovej sadzby klesá aj priemer výsledných platieb, čo by z pohľadu klienta bolo výhodné, ale z pohľadu banky a trhu nereálne.

Obr. 4.2.5 zachytáva opačný prípad, a to zvýšenie variabilnej úrokovej sadzby na hodnotu $6,8\%$. Výšku variabilnej úrokovej sadzby sme stanovili tak, aby bola nad



Obr. 4.2.5: Histogram výsledných platieb pre fixáciu na jeden rok a variabilnú úrokovú sadzbu 6,8%.

úrovňou dlhodobého priemeru fixnej úrokovej sadzby ($\mu^F = 0,06$).

Zvyšovaním variabilnej úrokovej sadzby sa početnosť výberov vôbec nefixovať znižuje, ale priemer výsledných platieb zvyšuje.

V extrémnych prípadoch, t.j. ak by variabilná úroková sadzba bola vysoko nad fixnou, optimálnou stratégiou pre klienta by bolo úrok fixovať po celý čas. Histogram výsledných platieb by svojim tvarom ešte viac pripomínal Gaussovu krivku normálneho rozdelenia.

V predchádzajúcej časti sme skúmali vplyv dĺžky fixácie a hodnoty variabilnej úrokovej sadzby na optimálne rozhodnutia klienta. Ďalšími parametrami, ktoré môžu výber úrokovej sadzby ovplyvniť, sú parametre CIR procesu (4.2.4). Zameriame sa predovšetkým na parameter σ^F, popisujúci volatilitu fixnej úrokovej sadzby.

Parameter σ^F sme si zvolili, pretože predpokladáme, že práve na jeho zmenu budú optimálne rozhodnutia reagovať najcitlivejšie. Volatilita úrokovej sadzby totiž neovplyvňuje iba vývoj fixnej úrokovej sadzby pri simuláciách, ale vstupuje aj do modelovania sadzby binomickým stromom (viď. Kapitola 3).

V Tab. 4.2.1 sú uvedené rôzne nastavenia výšky volatility, pre ktoré sme hľadali optimálne rozhodnutia. Pre každé z nastavení uvádzame priemer výsledných platieb a ich smerodajnú odchýlku. V treťom stĺpci tabuľky sa nachádzajú údaje o priemere a smerodajnej odchýlke pre pôvodnú hodnotu parametra σ^F vystupujúcu v predpise procesu (4.2.4).

Hodnota volatility	$0,03$	$0,073$	$0,1$	$0,15$
Priemer	$58\,876,82$ €	$58\,891,11$ €	$58\,628,49$ €	$58\,499,12$ €
Smerodajná odchýlka	0 €	$105,77$ €	$211,05$ €	$326,03$ €

Tabuľka 4.2.1: Priemery a smerodajné odchýlky výsledných platieb pre rôzne hodnoty volatility fixnej úrokovej sadzby.

Najmenšiu smerodajnú odchýlku, a to nulovú, sme zaznamenali pri nastavení $\sigma^F = 0,03$. Zníženie parametra σ^F na túto úroveň spôsobilo, že optimálnym rozhodnutím pre klienta je splácať úver pri variabilnej úrokovej bez ohľadu na simulovaný vývoj fixnej úrokovej sadzby. Hodnota priemeru vlastne zodpovedá sume splátok za úver pri variabilnej sadzbe $4,4\%$.

Pri zvýšení volatility σ^F vzrastie smerodajná odchýlka výsledných platieb, čo naznačuje, že stúpol počet prípadov, keď je optimálnou voľbou úrokovú sadzbu zafixovať aspoň na jedno fixačné obdobie. Naopak priemer platieb klesá.

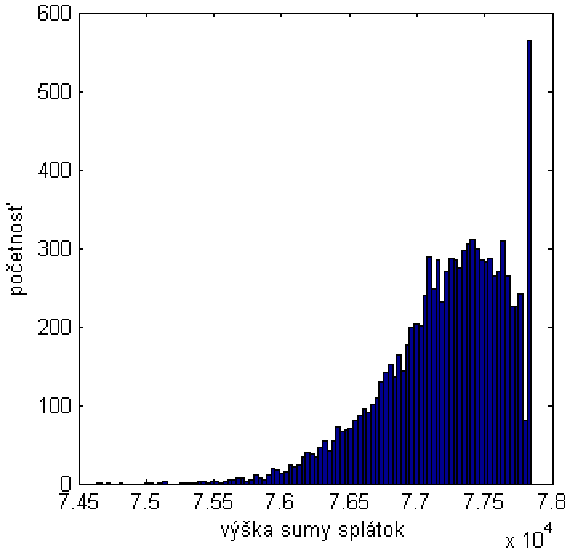
Hodnoty v Tab. 4.2.1 ukazujú, že parameter σ^F je signifikantným parametrom, ktorý ovplyvňuje optimálnu voľbu úrokových sadzieb. Zvyšovaním volatility stúpa rozdiel medzi maximálnou a minimálnou možnou hodnotou fixnej úrokovej sadzby a jej generovanie sa stáva viac náhodné, čo má priamy súvis so zmenou v optimálnom riadení.

4.2.2 Numerická analýza úlohy pri dĺžke splatnosti úveru 30 rokov

V tejto časti uvažujeme klienta so záujmom o hypotekárny úver na 50 000 €, ktorému nevyhovuje navrhovaná výška mesačných splátok za úver, ak by ho splácal 10 rokov. Klient požaduje od banky zníženie mesačných splátok. Banka má možnosť znížiť klientovi mesačné splátky podľa jeho požiadaviek iba tým, že mu predĺži dobu splácania úveru na 30 rokov (360 mesiacov). Banka na hypotekárne úvery s dobou splatnosti väčšou ako 10 rokov neponúka záujemcom možnosť fixácie na jeden rok. Na základe ponuky banky sa klient môže rozhodnúť medzi trojročným alebo päťročným fixačným obdobím.

Predpokladaný vývoj úrokových sadzieb a výška diskontného faktora zostávajú nezmenené. Variabilná úroková sadzba bude počas najbližších 30 rokov konštantná na úrovni $4,4\%$, hodnota fixnej úrokovej sadzby sa bude riadiť procesom s predpisom (4.2.4) a výška diskontného faktora bude 1%.

Keďže klient má na výber dve rôzne dĺžky fixačného obdobia, budeme optimalizovať úlohu pre obe možnosti a zistíme, pre ktorú z nich by sa mal rozhodnúť, aby za úver zaplatil v priemere čo najmenej.

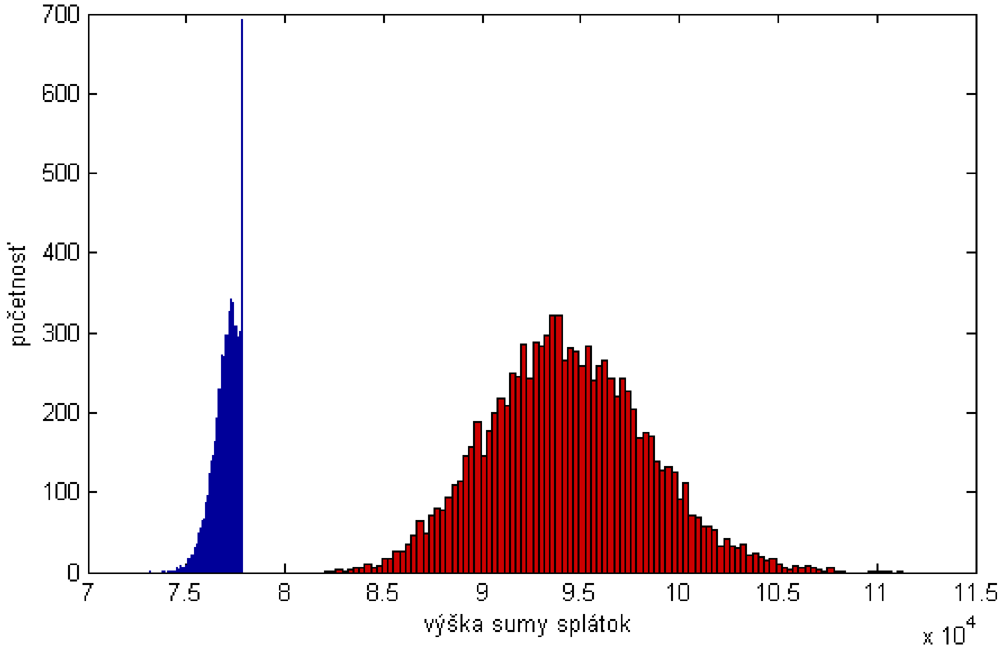


Obr. 4.2.6: Histogramy výsledných platieb pre fixáciu na tri roky (vľavo), na päť rokov (vpravo).

Histogramy výsledných platieb za úver pre obe možnosti dĺžky fixácie sú znázornené na Obr. 4.2.6. Vidíme, že histogram pre trojročnú fixáciu sa na prvý pohľad tvarom veľmi nelíši od histogramu pre fixáciu na päť rokov. Rozdiel možno badať v početnosti výskytu voľby splácať úver iba variabilnou úrokovou sadzbou (posledný stĺpec v oboch grafoch).

Z histogramov nie je jasné, ktorá dĺžka fixácie úrokovej sadzby je pre klienta z pohľadu čo najmenšieho preplatenia úveru najvýhodnejšia. Preto porovnáme priemery výsledných platieb pre obe možnosti. Pri fixácii na tri roky je priemerná suma splátok za úver rovná $77\,205,96$ €, zatiaľ čo pre päťročné fixačné obdobie má priemer výsledných platieb hodnotu $76\,979,54$ €. Pre klienta je teda výhodnejšie zvoliť si možnosť päťročnej fixácie úrokovej sadzby.

Pri optimalizácii úlohy sme vždy predpokladali, že klient bude mať záujem meniť svoje rozhodnutie o voľbe úrokovej sadzby v priebehu trvania úveru, ak mu to dovolí fixácia. Teraz rozoberieme situáciu, že klient nevyužije svoje právo zmeny úrokovej sadzby a celý úver bude chcieť splácať pri variabilnej, resp. fixnej úrokovej sadzbe.



Obr. 4.2.7: Histogram pre optimalizáciu a histogram pre nepretržitú fixáciu.

Ak by sa klient rozhodol úver splácať pri variabilnej úrokovej sadzbe, banke by celkovo zaplatil 77 845, 05 € (maximálna výška výslednej platby na Obr. 4.2.6 vpravo). V prípade, že by si zvolil fixnú úrokovú sadzbu, úver by splácal v šiestich po sebe nasledujúcich päťročných fixačných obdobiach. Za úver by pri výbere fixnej úrokovej sadzby zaplatil v priemere 94 354, 45 €, čo je takmer o 17 000 € viac ako pri voľbe variabilnej úrokovej sadzby aj pri optimalizácii. Môžeme skonštatovať, že v oboch prípadoch klient zaplatí za úver vyššiu sumu, ako keď by využil právo zmeny úrokovej sadzby a optimalizoval svoje rozhodnutie.

Obr. 4.2.7 obsahuje porovnanie histogramov výsledných platieb pre voľbu splácania formou optimalizácie (modrá farba) a pre voľbu splácať úver fixnou úrokovou sadzbou v nepretržitých fixačných obdobiach (červená). Na Obr. 4.2.7 je viditeľný spomenutý vysoký rozdiel v priemerných výškach výsledných platieb a taktiež môžeme pozorovať oveľa väčší rozptyl hodnôt pri voľbe nepretržitej fixácie.

4.3 Stochastický vývoj fixnej a variabilnej úrokovej sadzby

V tejto časti práce budeme analyzovať model optimálneho splácania hypotekárneho úveru popísaný v Časti 2.2, pričom obe úrokové sadzby budeme považovať za náhodné premenné. Presnejšie, vývoj fixnej a variabilnej úrokovej sadzby modelujeme ako CIR proces nasledovne:

$$\Delta r_t^F = \beta^F(\mu^F - r_t^F)\Delta t + \sigma^F \sqrt{r_t^F}\Delta Z_t^F, \tag{4.3.1}$$

$$\Delta r_t^V = \beta^V(\mu^V - r_t^V)\Delta t + \sigma^V \sqrt{r_t^V}\Delta Z_t^V, \tag{4.3.2}$$

kde Δt predstavuje mesačnú zmenu.

Predpoklad o náhodnosti oboch podkladových procesov si vynúti zmenu vo formulácii rovnice dynamického programovania predstavenej v Časti 4.2.1. Hodnotová funkcia V sa rozšíri o ďalšiu stavovú premennú r^V, ktorá reprezentuje vývoj variabilnej úrokovej sadzby.

Bellmanovu rovnicu dynamického programovania pre model so stochastickými úrokovými sadzbami môžeme vyjadriť v tvare:

$$V_j(x, r^F, r^V) = \min_{u_j \in U_j} \left[\frac{1}{(1+\delta)} A_j(P, D, r(u_j), x) + \frac{1}{(1+\delta)^2} E\left[V_{j+1}\left(f_j(x, u_j), r^F, r^V \right) \right] \right]. \tag{4.3.3}$$

Aby špecifikácia hodnotovej funkcie bola kompletná, doplňme, že tvar hodnotovej funkcie v poslednom mesiaci D zostáva nezmenený:

$$V_D(x, r^F, r^V) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x_D = 0 \\ +\infty, & \text{ak } x_D \neq 0. \end{cases} \tag{4.3.4}$$

Výpočet strednej hodnoty v rovnici (4.3.3) urobíme na základe diskretizácie podkladových procesov pomocou binomických stromov (viď. Časť 3.2). Schématicky môžeme postup výpočtu strednej hodnoty zapísať nasledovne:

$$\begin{aligned} E\left[V_{j+1}\left(f_j(x, u_j), r^F, r^V \right) \right] &= pqV_{j+1}\left(f_j(x, u_j), r^F_{up}, r^V_{up} \right) \\ &+ p(1-q)V_{j+1}\left(f_j(x, u_j), r^F_{up}, r^V_{down} \right) \\ &+ (1-p)qV_{j+1}\left(f_j(x, u_j), r^F_{down}, r^V_{up} \right) \\ &+ (1-p)(1-q)V_{j+1}\left(f_j(x, u_j), r^F_{down}, r^V_{down} \right). \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Vo výraze (4.3.5) p, resp. q označuje pravdepodobnosť nárastu fixnej, resp. variabilnej úrokovej sadzby na hodnotu r^F_{up}, resp. r^V_{up}. Hodnoty r^F_{down}, r^V_{down} zodpovedajú poklesu hodnoty fixnej, variabilnej úrokovej sadzby v jednom časovom kroku.

4.3.1 Numerická analýza úlohy a analýza senzitivity

Podobne ako v predchádzajúcich prípadoch uvažujme klienta, ktorý má záujem o hypotekárny úver v celkovej výške 50 000 € na obdobie päť rokov (60 mesiacov). Nech banka ponúka klientovi možnosť fixácie úrokovej sadzby na obdobie dlhé jeden rok alebo na dvojročné obdobie (12 resp. 24 mesiacov). Najskôr budeme analyzovať úlohu s dĺžkou fixácie jeden rok, ktorú neskôr porovnáme s prípadom, ak sa fixačné obdobie predĺži na dva roky. Klient má opäť právo voľby úrokovej sadzby, pri ktorej bude úver splácať, s výnimkou obdobia fixácie. Diskontný faktor δ je rovný 1%.

Parametre procesov (4.3.1) a (4.3.2) sme odhadli z reálnych hodnôt fixnej, resp. variabilnej úrokovej sadzby pre obdobie od roku 2009 po február 2016 použitím funkcie CIRestimation(.) [12]. Odhadnuté hodnoty parametrov sú zhrnuté v Tab. 4.3.1.

Fixná u. s.	**Variabilná u. s.**
$\beta^F = 1,41$	$\beta^V = 0,57$
$\mu^F = 0,06$	$\mu^V = 0,04$
$\sigma^F = 0,073$	$\sigma^V = 0,033$

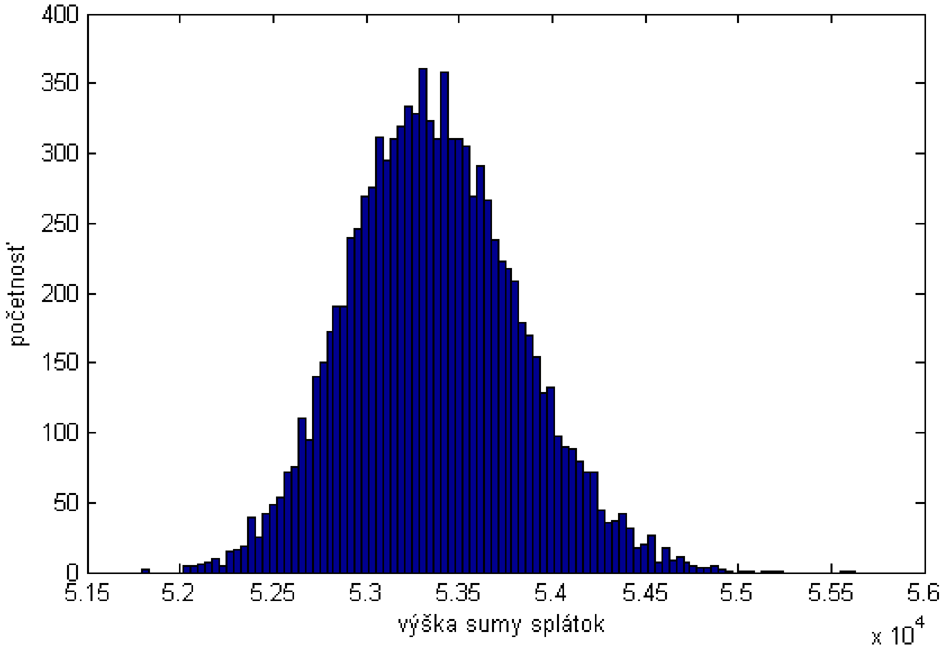
Tabuľka 4.3.1: Odhady hodnôt parametrov CIR procesu pre fixnú a viariabilnú úrokovú sadzbu.

Všetky simulácie fixnej úrokovej sadzby začínajú v hodnote $r_0^F = 6\%$, ktorá zodpovedá výške dlhodobého priemeru procesu (4.3.1). Simulácie variabilnej úrokovej sadzby majú počiatočnú hodnotu $r_0^V = 4\%$, ktorá korešponduje s hodnotou dlhodobého priemeru procesu (4.3.2).

Úlohu stochastického programovania charakterizovanú pomocou rovnice (4.3.3) a koncovej podmienky (4.3.4) riešime opäť rekurentne začínajúc od posledného mesiaca. Ťažisko riešenia rovnice (4.3.3) spočíva vo výpočte strednej hodnoty z hodnotovej funkcie, ktorého podrobný postup je uvedený v Časti 3.2. Z technického hľadiska sa výhodnejšie javí počítať hodnotovú funkciu v transformovaných premenných X_1 a X_2.

Uvedomme si, že model popísaný v Časti 2.2 umožňuje počas doby splácania hypotekárneho úveru viac fixačných období, a to aj s prestávkami. Z algoritmického hľadiska bolo preto nutné zaviesť ďalšiu stavovú premennú, ktorá slúži na zapamätanie si výšky úrokovej sadzby, pri ktorej sa klient rozhodol úrok zafixovať.

Optimálne rozhodnutia klienta sa rovnako ako v Podkapitole 4.2 líšia v závislosti od vygenerovaných simulácií fixnej a variabilnej úrokovej sadzby. Pre potreby analýzy sme vždy vygenerovali 10 000 dvojíc náhodných simulácií fixnej a variabilnej úrokovej sadzby pomocou funkcie cirpath(.) [13]. Pre každú z dvojíc simulácií sme hľadali optimálnu stratégiu voľby úrokovej sadzby, pri ktorej klient minimalizuje očakávanú sumu splátok za úver a tieto výsledné sumy splátok sme zakreslili do histogramu.

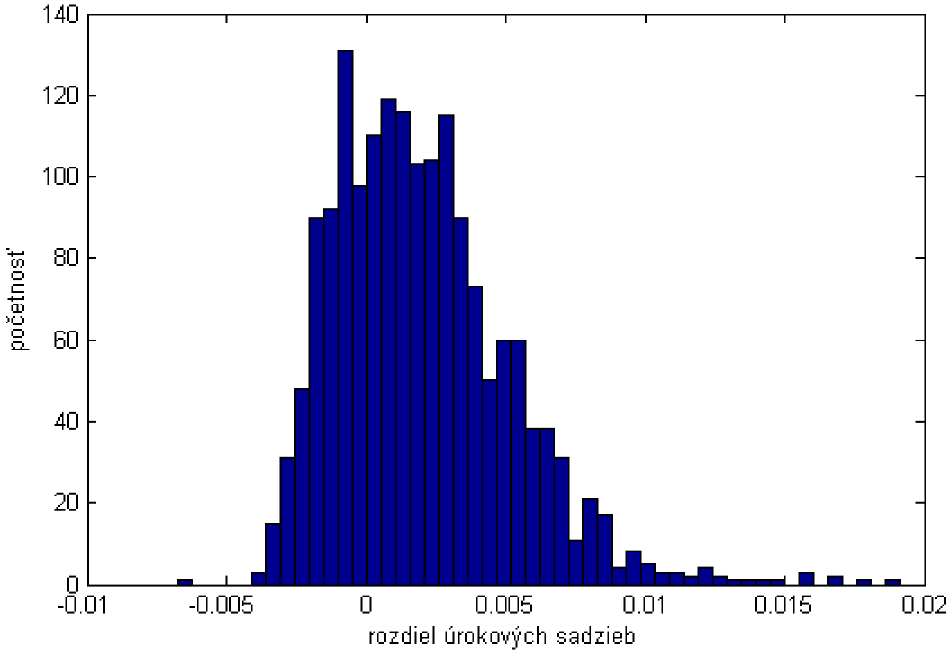


Obr. 4.3.1: Histogram výsledných platieb pre fixáciu na jeden rok.

Na Obr. 4.2.2 je znázornený histogram výsledných platieb za úver pri voľbe jednoročnej fixácie úrokovej sadzby. Priemerná suma, ktorú by klient splátkami za úver zaplatil, je pri optimálnom výbere medzi fixnou úrokovou sadzbou na jeden rok a variabilnou úrokovou sadzbou rovná $53\,369,62$ € a smerodajná odchýlka platieb má hodnotu $456,35$ €.

Okrem priemeru a smerodajnej odchýlky výsledných platieb za úver sme v tejto podkapitole sledovali aj počet fixácii úrokovej sadzby výhodných pre klienta pri 10 000 simuláciách a rozdiel bol medzi variabilnou a fixnou úrokovou sadzbou v prípade optimálnej fixácie úrokovej sadzby.

Obr. 4.3.2 zachytáva histogram rozdielov úrokových sadzieb r^V - r^F pri optimálnych rozhodnutiach zafixovať úrokovú sadzbu na jeden rok. Priemerný rozdiel ročných úrokových sadzieb má hodnotu $0,20\%$ a smerodajnú odchýlku $0,32\%$. Pre prípad jed-



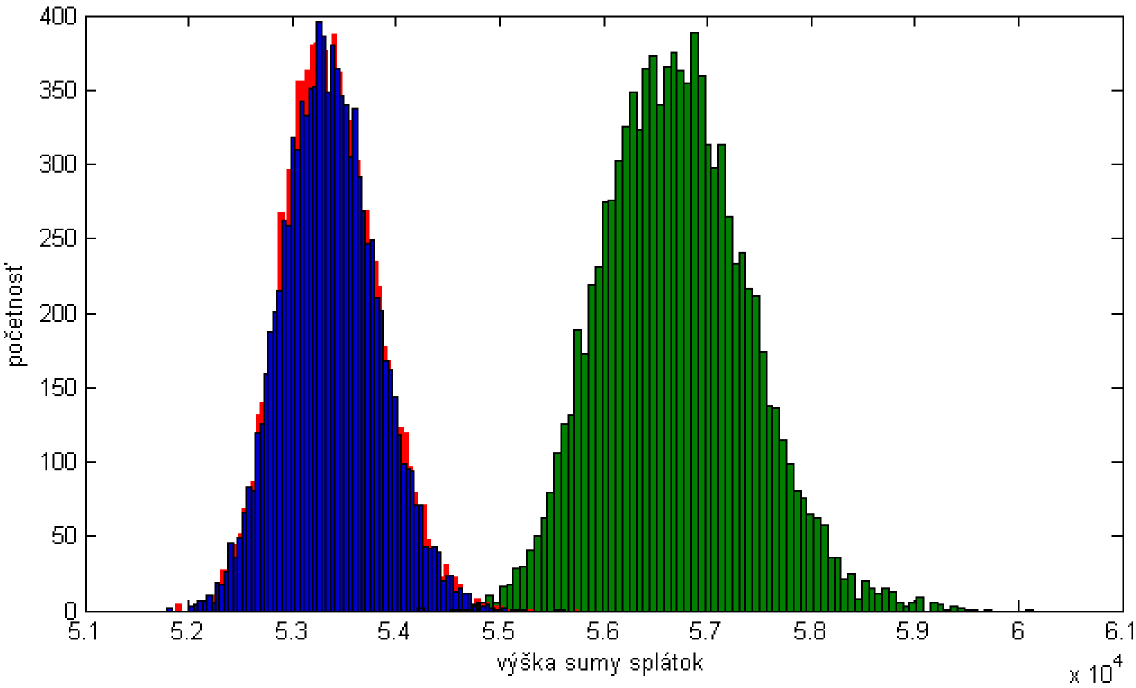
Obr. 4.3.2: Histogram rozdielov úrokových sadzieb (p.a.).

noročnej fixácie úrokovej sadzby bolo pre klienta optimálne zafixovať úrokovú sadzbu 1707-krát.

Pri hľadaní optimálnej stratégie splácania hypotekárneho úveru sme predpokladali, že klient bude prispôsobovať svoje rozhodnutie o voľbe úrokovej sadzby aktuálnemu vývoju úrokových sadzieb a svojim predchádzajúcim rozhodnutiam o fixácii. Teraz sa pozrieme na situáciu, keď klient nevyužije svoje právo zmeny úrokovej sadzby a celý úver bude splácať pri variabilnej, resp. fixnej úrokovej sadzbe.

V prípade, ak by si zvolil fixnú úrokovú sadzbu, úver by splácal v piatich po sebe nasledujúcich jednoročných fixačných obdobiach. Za úver by pri výbere fixnej úrokovej sadzby zaplatil v priemere 56 700, 27 €, čo je o približne 3 300 € viac ako pri voľbe variabilnej úrokovej sadzby, resp. pri optimalizácii. Ak by sa klient rozhodol úver splácať pri variabilnej úrokovej sadzbe počas celej dĺžky trvania úveru, banke by v priemere zaplatil 53 374, 76 € , t.j. len o 5 € vyššiu sumu ako pri optimálnej voľbe úrokových sadzieb.

Dôvodov, prečo voľba variabilnej úrokovej sadzby vedie k porovnateľnému výsledku ako optimálna stratégia, je viacero. Najpravdepodobnejšou príčinou sa javia byť hodnoty parametrov CIR procesu jednotlivých úrokových sadzieb. Všimnime si, že dlhodobá priemerná hodnota fixnej úrokovej sadzby je zhruba o 2 - 3% vyššia, ako dlhodobý priemer variabilnej úrokovej sadzby. Táto skutočnosť robí fixáciu *atraktívnou* iba v prípadoch, keď dôjde k náhodným výkyvom fixnej úrokovej sadzby spôsobených jej vyššou volatilitou. Vzhľadom na pomerne krátku dobu splácania hypotekárneho úveru (päť rokov), k takýmto situáciám nedochádza veľmi často, o čom svedčí aj pomerne malý počet fixácií úrokovej sadzby.

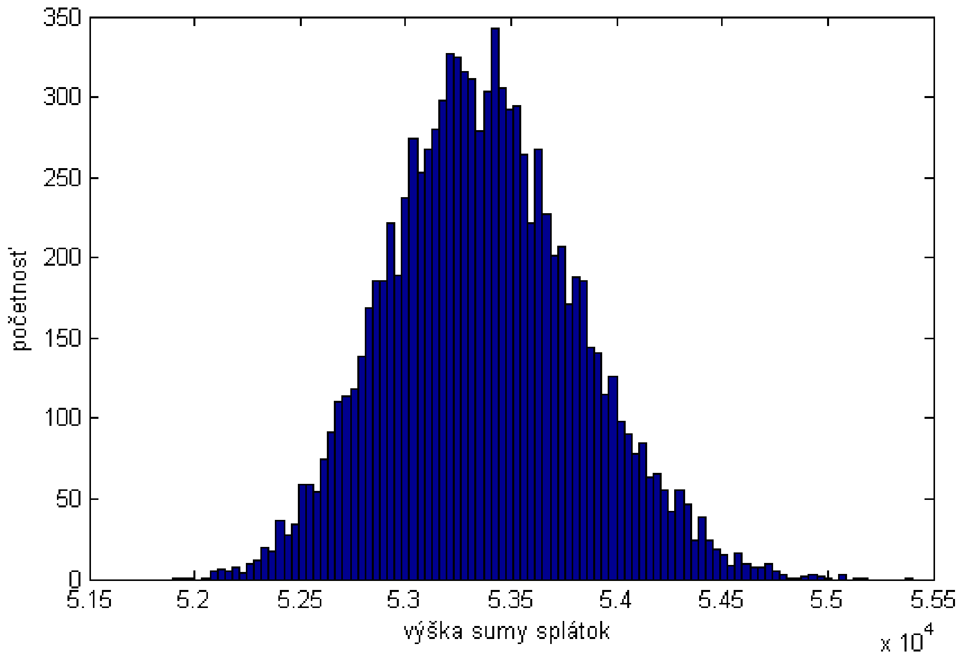


Obr. 4.3.3: Histogramy pre optimalizáciu, variabilnú úrokovú sadzbu a nepretržitú fixáciu.

Obr. 4.3.3 graficky znázorňuje porovnanie histogramov výsledných platieb pre voľbu splácania formou optimalizácie (modrá farba), pre rozhodnutie splácať pri variabilnej úrokovej sadzbe (červená) a pre voľbu splácať úver fixnou úrokovou sadzbou v nepretržitých fixačných obdobiach (zelená). Na Obr. 4.3.3 je viditeľný spomenutý rozdiel v priemerných výškach výsledných platieb a taktiež môžeme pozorovať oveľa väčší rozptyl hodnôt pri voľbe nepretržitej fixácie.

V numerickej analýze sme ďalej skúmali, ako by sa zmenili výsledné sumy splátok za úver, ak by si klient namiesto fixácie úrokovej sadzby na jeden rok vybral možnosť dvojročnej fixácie.

Histogram výsledných platieb pre fixáciu na dva roky zachytáva Obr. 4.3.4. Na Obr. 4.3.4 nepozorujeme výraznú zmenu v porovnaní s histogramom na Obr. 4.3.1 pre jednoročnú fixáciu úrokovej sadzby. Naše pozorovanie potvrdzuje hodnota priemernej sumy splátok za úver, ktorá je vo výške 53 370, 96 € a hodnota smerodajnej odchýlky rovná 452, 52 €. Obe hodnoty sa líšia od hodnôt pre jednoročnú fixáciu iba nepatrne. Zmena nenastala ani pri sledovaní rozdielov úrokových sadzieb pri rozhodnutiach zafixovať úrokovú sadzbu. Priemer aj smerodajná odchýlka rozdielov úrokových sadzieb majú hodnotu totožnú s prípadom fixácie na jeden rok. Jediný rozdiel možno pozorovať v počte fixácií, ktorý klesol dvojnásobne.



Obr. 4.3.4: Histogram výsledných platieb pre fixáciu na dva roky.

Porovnaním optimálnych riešení pre fixačné obdobia jedného roka a dvoch rokov zistíme, že predĺženie fixačného obdobia, pri zachovaní zvyšných parametrov hypotekárneho úveru, nemá v prípade krátkej doby splatnosti úveru (päť rokov) vplyv na priemernú sumu splátok za úver ani na priemerný rozdiel variabilnej a fixnej úrokovej sadzby.

Ukázali sme, aký vplyv na optimálnu voľbu úrokových sadzieb má predlžovanie fixačného obdobia. Keďže rozhodnutia klienta, kedy zafixovať úrokovú sadzbu a kedy splácať úver pri variabilnej závisia predovšetkým od vývoja oboch úrokových sadzieb, priblížime, aké zmeny v rozhodnutiach nastanú, keď budeme meniť hodnoty parametrov CIR procesu (4.3.2). Zameriame sa predovšetkým na parametre σ^V a μ^V, popisujúce volatilitu a dlhodobý priemer variabilnej úrokovej sadzby. Parametre procesu pre fixnú úrokovú sadzbu (4.3.1), rovnako aj zvyšné parametre úveru ponecháme na ich pôvodných hodnotách, dĺžku fixačného obdobia zvolíme jeden rok.

Výsledky numerickej analýzy pre rôzne hodnoty výšky volatility variabilnej úrokovej sadzby σ^V sú zosumarizované v Tab. 4.3.2. Pre každú hodnotu sme zaznamenali priemer celkových splátok za úver, ich smerodajnú odchýlku, priemerný rozdiel medzi variabilnou a fixnou úrokovou sadzbou pri rozhodnutí sadzbu zafixovať, smerodajnú odchýlku rozdielov a počet fixácií. Poznamenajme, že hodnota $\sigma^V = 0,033$ zodpovedá pôvodnej hodnote volatility variabilnej úrokovej sadzby odhadnutej z reálnych dát (tretí stĺpec Tab. 4.3.2).

Hodnota volatility $\boldsymbol{\sigma^V}$	$0,01$	$0,033$	$0,07$	$0,1$
Priemer platieb	$53\,369,77$€	$53\,369,62$€	$53\,343,79$€	$53\,291,63$€
Sm. odchýlka platieb	$138,86$€	$456,35$€	$903,82$€	$1198,74$€
Priemer $\boldsymbol{r^V}$ - $\boldsymbol{r^F}$	$0,06\%$	$0,20\%$	$0,74\%$	$1,20\%$
Sm. odchýlka $\boldsymbol{r^V}$ - $\boldsymbol{r^F}$	$0,27\%$	$0,32\%$	$0,59\%$	$0,89\%$
Počet fixácií	938	1707	3746	5793

Tabuľka 4.3.2: Výsledky analýzy senzitivity vzhľadom k výške volatility variabilnej úrokovej sadzby.

Výsledky naznačujú, že zvýšením volatility variabilnej úrokovej sadzby sa zvyšuje smerodajná odchýlka priemerných platieb za úver. Zároveň stúpa aj počet prípadov, keď je optimálnym rozhodnutím úrokovú sadzbu zafixovať. Naopak, priemer výsledných platieb za úver s narastajúcou volatilitou klesá.

Ďalej môžeme pozorovať, že zvýšenie parametra σ^V vedie k nárastu priemerného rozdielu medzi úrokovými sadzbami v čase optimálnej fixácie. Podobne rastie aj smerodajná odchýlka rozdielu. Z toho môžeme usudzovať, že vyššia miera náhody vo variabilnej úrokovej sadzbe si pre zafixovanie vynucuje signifikantnejší rozdiel medzi úrokovými sadzbami.

V ďalšom kroku sme sa zamerali na analýzu citlivosti optimálnych stratégií vzhľadom na dlhodobú priemernú hodnotu variabilnej úrokovej sadzby. Tab. 4.3.3 obsahuje výsledky numerickej analýzy pre štyri zvolené hodnoty parametra μ^V, pre ktoré sme optimalizovali rozhodnutia. Pre každú z hodnôt zaznamenávame rovnaké pozorované veličiny, aké sú obsiahnuté v Tab. 4.3.2. V treťom stĺpci Tab. 4.3.3 sú uvedené údaje pre pôvodnú hodnotu parametra μ^V vystupujúcu v predpise procesu (4.3.2). Hodnoty ostatných parametrov CIR procesov sme ponechali na ich odhadnutej hodnote.

Hodnota priemeru μ^V	$0,02$	$0,036$	$0,05$	$0,08$
Priemer platieb	51 271, 16€	53 369, 62€	55 048, 73€	56 670, 08€
Sm. odchýlka platieb	329, 14€	456, 35€	470, 41€	635, 05€
Priemer r^V-r^F	–	0, 20%	0, 62%	2, 09%
Sm. odchýlka r^V-r^F	–	0, 32%	0, 46%	1, 00%
Počet fixácií	0	1707	11017	46301

Tabuľka 4.3.3: Výsledky analýzy senzitivity vzhľadom k výške dlhodobého priemeru variabilnej úrokovej sadzby.

Ako vidíme, zvyšovanie úrovne dlhodobého priemeru μ^V so sebou prináša v prvom rade nárast priemerných hodnôt výsledných platieb sa úver.

Približovaním sa dlhodobým priemerom variabilnej úrokovej sadzby k priemeru fixnej úrokovej sadzby rastie počet situácií, keď je pre klienta výhodnejšie úrokovú sadzbu zafixovať. Môžeme si všimnúť, že v prípade nízkej hodnoty $\mu^V = 0,02$ bolo pre klienta optimálnym riešením vôbec úrokovú sadzbu nefixovať a splácať úver pri variabilnej, bez ohľadu na simulovaný vývoj fixnej úrokovej sadzby. Počet fixácií úrokovej sadzby bol pre toto nastavenie dlhodobého priemeru rovný nule.

Na základe pozorovaného vplyvu hodnoty dlhodobého priemeru viariabilnej úrokovej sadzby na priemerný rozdiel úrokových sadzieb a jeho smerodajnú odchýlku možno predpokladať, že ak je výška dlhodobého priemeru variabilnej úrokovej sadzby približne na rovnakej úrovni ako hodnota dlhodobého priemeru fixnej úrokovej sadzby, prípadne vyššia, fixácia úrokovej sadzby sa stáva výhodnejšou. Avšak, vyššia dlhodobá rovnovážna hodnota variabilnej úrokovej sadzby si vynucuje väčší rozdiel aktuálnych hodnôt úrokových sadzieb v okamihu optimálnej fixácie.

Hodnoty uvedené v Tab. 4.3.2 a Tab. 4.3.3 ukazujú, že parametere CIR procesu pre variabilnú úrokovú sadzbu, σ^V a μ^V, sú štatistický významné parametre, ktoré majú vplyv na stanovenie optimálnej stratégie.

Záver

V predkladanej diplomovej práci sme sa zaoberali problematikou optimálneho splácania hypotekárneho úveru. Hľadanie optimálnej stratégie klienta, rozhodujúceho sa medzi fixáciou úrokovej sadzby a splácaním úveru pri variabilnej úrokovej sadzbe, sme naformulovali ako úlohu stochastického dynamického programovania s viacerými stavovými premennými.

V prvej kapitole sme objasnili pojem hypotekárny úver tak, ako ho vymedzuje Zákon o bankách, priblížili sme základné vlastnosti a kritéria, podľa ktorých možno hypotekárne úvery rozdeľovať. Bližšie sme sa pozreli na vývoj hypotekárnych úverov od ich vstupu na slovenský trh po súčasnosť a faktory, ktoré ovplyvňujú vývoj hypotekárnych úverov.

V druhej kapitole sme predstavili základné parametre modelu fixácie hypotekárneho úveru a špecifikovali premenné, potrebné na formuláciu optimálneho riadenia.

V tretej kapitole sme sa venovali modelovaniu úrokových sadzieb ako náhodných premenných. Prijali sme štandardný predpoklad: vývoj úrokových sadzieb sme charakterizovali pomocou CIR procesu. Podrobne sme popísali diskretizáciu náhodnej veličiny pomocou binomického modelu. Rozhodli sme sa modelovať fixnú úrokovú sadzbu pre stredné dĺžky fixácie, pretože pri tejto kategórii fixácie sme na základe historického vývoja úrokových sadzieb pozorovali, že premenlivosť a neistota na finančnom trhu na ňu najviac vplývajú. Variabilná úroková sadzba rovnako ako úrokové sadzby s nižšími fixáciami vykazovali nižšiu volatilitu, lebo sú schopné rýchlejšie sa prispôsobiť situáciám na trhu a prípadné fluktuácie sa na ich vývoji neodrážajú tak výrazne ako pri úrokových sadzbách s dlhšou dobou fixácie.

V druhej časti kapitoly sme binomický model jednej náhodnej premennej rozšírili o druhú náhodnú premennú (variabilnú úrokovú sadzbu) a upravili do tvaru, ktorý zohľadňuje vzájomnú koreláciu medzi oboma úrokovými sadzbami. Výslednou štruktúrou binomického modelu dvoch premenných boli dva trojrozmerné binomické stromy, každý závislý od času a hodnôt oboch úrokových sadzieb.

V poslednej kapitole sme priblížili postup riešenia problému fixácie hypotekárneho úveru metódou dynamického programovania. Našim cieľom bolo určiť optimálnu stratégiu voľby úrokovej sadzby, v závislosti od vývoja úrokových sadzieb (deterministický, stochastický) tak, aby sme minimalizovali výslednú sumu mesačných splátok za úver. Niektoré základné vlastnosti optimálnych rozhodnutí sme najskôr demonštrovali na prípade nami zvoleného deterministického vývoja úrokových sadzieb. Výslednú sumu splátok pri optimálnej stratégii voľby úrokových sadzieb sme porovnali so situáciami, ak by klient nechcel meniť svoje počiatočné rozhodnutie a úver splácal celý čas iba pri jednej úrokovej sadzbe: fixnej, resp. variabilnej.

V ďalšej časti kapitoly sme analyzovali model optimálneho splácania hypotekárneho úveru za predpokladu náhodnosti fixnej úrokovej sadzby. Zamerali sme sa na sledovanie faktorov, ktoré ovplyvňujú optimálne rozhodovanie. Prvým z faktorov, ktorý sme pozorovali bola dĺžka fixácie hypotekárneho úveru. Porovnaním optimálnych riešení pre dve rôzne dĺžky fixačného obdobia sme zistili, že predĺženie fixačného obdobia, pri zachovaní zvyšných parametrov hypotekárneho úveru, má za následok zníženie výslednej sumy splátok za úver. Ďalším z faktorov, ktorý sme menili a pozorovali jeho vplyv, bola výška variabilnej úrokovej sadzby, o ktorej sme predpokladali, že má počas celej doby trvania úveru konštantnú hodnotu. Znižovaním variabilnej úrokovej sadzby sa zvyšoval počet prípadov, v ktorých by optimálnou voľbou pre klienta bola voľba úrokovú sadzbu vôbec nefixovať. Zároveň klesal aj priemer výsledných platieb za úver. Naopak, zvyšovaním variabilnej úrokovej sadzby sa početnosť výberov úrokovú sadzbu vôbec nefixovať znížila, no priemer výsledných platieb zvýšil. Posledným signifikantným skúmaným faktorom bol jeden z parametrov CIR procesu: volatilita fixnej úrokovej sadzby. Zvýšením volatility sa zväčšil rozdiel medzi maximálnou a minimálnou možnou hodnotou fixnej úrokovej sadzby a jej generovanie sa stalo viac náhodné, čo sa odzrkadlilo na vyššom počte prípadov, keď bolo optimálne úrokovú sadzbu zafixovať. Zvýšenie volatility viedlo k zníženiu priemeru výsledných platieb za úver.

V záverečnej časti kapitoly sme vykonali analýzu modelu za predpokladu náhodnosti oboch úrokových sadzieb (fixnej a variabilnej). Pozorovali sme predovšetkým vplyv zmeny parametrov CIR procesu: volatility a dlhodobej rovnovážnej hodnoty pre variabilnú úrokovú sadzbu na zmenu v optimálnom rozhodovaní klienta. Okrem priemeru výsledných platieb sme v tejto časti zaznamenávali aj rozdiel medzi variabilnou a fixnou úrokovou sadzbou pri optimálnej fixácii úrokovej sadzby. Výsledky analýzy naznačili, že priemer výsledných platieb za úver s narastajúcou volatilitou variabilnej úrokovej sadzby klesá. Naopak, zvyšovanie úrovne dlhodobého priemeru variabilnej úrokovej sadzby so sebou prináša nárast priemerných hodnôt výsledných platieb za hypotekárny úver. Zvyšovania volatitlity, resp. dlhodobého priemeru variabilnej úrokovej sadzby viedli k nárastu priemerného rozdielu medzi úrokovými sadzbami v čase optimálnej fixácie úrokovej sadzby. Vyššia miera náhody, resp. vyššia dlhodobá hodnota variabilnej úrokovej sadzby si vynucujú väčší rozdiel hodnôt úrokových sadzieb v čase optimálnej fixácie.

Model optimálneho splácania hypotekárneho úveru je možné rozšíriť o ďalšie rozhodnutia, ktorým je klient pri podpise zmluvy vystavený. Priamym rozšírením modelu by bolo zaradenie voľby o dĺžke fixácie. Dané rozšírenie by si vyžiadalo pridanie ďalších riadiacich a stavových premenných, čím by sa ešte zvýšila výpočtová náročnosť pri hľadaní optimálnej stratégie splácania.

Hlavným faktorom ovplyvňujúcim optimálnu stratégiu splácania hypotekárneho úveru je budúci vývoj úrokových sadzieb. Našu analýza je založená na predpoklade, že úrokové sadzby je možné modelovať ako mean-reversion proces. Avšak súčasný klesajúci trend vo vývoji úrokových sadzieb si môže vyžiadať prehodnotenie daného predpokladu.

Od marca 2016 vstúpila do platnosti novela Zákona o úveroch na bývanie, podľa ktorej si banka môže za predčasné splatenie hypotekárneho úveru účtovať poplatok v maximálnej výške 1% zo zostávajúcej čiastky úveru. Ako zmena v poplatkoch ovplyvní rozhodnutie o počiatočnej výške a dobe splácania hypotekárneho úveru, by mohlo byť zaujímavou otázkou pre ďalšie skúmanie.

Zoznam použitej literatúry

[1] Appolloni E.: *Efficient tree methods for option pricing*, dizertačná práca, Sapienza University of Rome, Rím, 2014, dostupné na internete (10.4.2016): http://padis.uniroma1.it/bitstream/10805/2400/1/Elisa_ Appolloni.pdf

[2] Bartošová D.: *Aplikácia option to switch*, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2014, dostupné na internete (6.5.2015): http://www.crzp.sk/crzpopacxe/openURL?crzpID=34c795f5-967a-48cb-8aec-f49adb3f52e7& crzpSigla=ukbratislava

[3] Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A.: *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica 53 (1985), 385–408

[4] Delenie hypotekárnych úverov, dostupné na internete (15.12.2015): http://www.hypouvery.sk/vsetko-o-hypotekach/Druhy-hypotekarnych-uverov

[5] Dhillon U. S. a kol.: *Choosing Between Fixed and Adjustable Rate Mortgages: Note*, Journal of Money, Credit and Banking 19 (1987), 260-267

[6] Halická M., Brunovský P., Jurča P.: *Optimálne riadenie*, Epos, Bratislava, 2009

[7] Hilliard J. E., Schwartz A. L., Tucker A. L.: *Bivariate Binomial Option Pricing With Generalized Interest Rate Processes*, The Journal of Financial Research 19 (1996), 585-602

[8] Longstaff F. A.: *Optimal Recursive Refinancing and The Valuation of Mortgage-backed Securities*, Working Paper no. 10422. The National Bureau of Economic Research, Cambridge, 2004, dostupné na internete (29.4.2016): http://www.nber.org/papers/w10422.pdf

[9] Lyun Y. D.: *The Binomial Model*, electronic papers, National Taiwan University, Taiwan, 2013, dostupné na internete (30.10.2015): http://www.csie.ntu.edu.tw/ lyuu/finance1/2013/20130522.pdf

[10] Manola A., Urošević B.: *Option-based Valuation of Mortgage-backed Securities*, Economic Annals 55 (2010), 42-66

[11] Marenčík M., Števík A.: *Vývoj v oblasti hypotekárneho bankovníctva v Slovenskej republike v roku 1999*, BIATEC 8 (2000), 9-10

[12] MathWorks: Maximum Likelihood Estimation of the Cox-Ingersoll-Ross Process, dostupné na internete (20.11.2015):
http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/37297-maximum-likelihood-estimation-of-the-cox-ingersoll-ross-process–the-matlab-implementation/content/CIRestimation.m

[13] MathWorks: Simulate a Cox-Ingersoll-Ross Process, dostupné na internete (20.11.2015):
www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/16670-simulate-a-cox-ingersoll-ross-process/content/cirpathdemo/cirpath.m

[14] Melicherčík I., Olšarová L.: *Kapitoly z finančnej matematiky 2*, Bratia Sabovci, s. r. o., Zvolen, 2005

[15] Nawalkha S. K., Beliaeva N.: *Efficient Trees for CIR and CEV Short Rate Models*, Journal of Alternative Investments (2007), 71-90

[16] Nelson D. B., Ramaswamy K.: *Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models*, The Review of Financial Studies 3 (1990), 393-430

[17] Poskytovatelia hypotekárnych úverov, dostupné na internete (11.1.2016):
http://www.nbs.sk/sk/dohlad-nad-financnym-trhom-prakticke-informacie/zoznamy-subjektov-registre-a-formulare/zoznamy-subjektov/bankovnictvo/hypotekarne-banky-spravcovia-a-ich-zastupcovia

[18] Postup pri vybavovaní hypotéky, dostupné na internete (17.1.2016):
http://planovanie.sk/index.php/hypoteka/postup-pri-vybavovani-hypoteky.html

[19] Sivák R. a kol.: *Hypotekárne bankovníctvo.*, SPRINT, Bratislava, 2007

[20] Stanton R., Wallace N.: *Mortgage Choice: What's the Point?*, Real Estate Economics 26 (1998), 173-205

[21] Stehlíková B.: *Cvičenia z finančných derivátov*, elektronické študijné materiály, FMFI UK, Bratislava, 2009, dostupné na internete (23.3.2016): http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/fd09/cv/cv9.html

[22] Štatistika NBS - úrokové miery, dostupné na internete (9.3.2016): http://www.nbs.sk/sk/statisticke-udaje/menova-a-bankova-statistika/urokova-statistika/bankova-urokova-statistika-uvery

[23] Štatistika NBS o úveroch na bývanie za rok 2016, dostupné na internete (24.2.2016): http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Dohlad/Hypo/2016/2016-01-SK.pdf

[24] Typy hypotekárnych úverov, dostupné na internete (15.12.2015): https://totalmoney.sk/viaco/typy-hypotekarnych-uverov

[25] Úroky hypotekárnych úverov, dostupné na internete (3.2.2016): https://totalmoney.sk/hypoteky/prehlad-urokovych-sadzieb/

[26] Vybrané údaje NBS o hypotekárnom bankovníctve a úveroch na bývanie, dostupné na internete (17.1.2016): http://www.nbs.sk/sk/dohlad-nad-financnym-trhom-prakticke-informacie/publikacie-a-vybrane-udaje/vybrane-udaje/informacie-o-hypotekarnom-bankovnictve-a-uveroch-na-byvanie

[27] Výpočet anuitnej splátky úveru, dostupné na internete (25.10.2015): https://totalmoney.sk/slovnik/A/anuitna-splatka/

[28] Vývoj hypotekárneho trhu, dostupné na internete (26.2.2016): http://www.nextfuture.sk/banky/vyvoj-hypotekarneho-trhu-priniesol-dostupnejsie-uvery/

[29] Zákon č. 483/2001 Z. z. o bankách a o zmene a doplnení niektorých zákonov

[30] Zákon č. 530/1990 Zb. o dlhopisoch