

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



VALUE-AT-RISK A CONDITIONAL VALUE-AT-RISK AKO  
NÁSTROJE NA MERANIE RIZIKA PORTFÓLIA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**VALUE-AT-RISK A CONDITIONAL VALUE-AT-RISK AKO  
NÁSTROJE NA MERANIE RIZIKA PORTFÓLIA**

**DIPLOMOVÁ PRÁCA**

Študijný program: Ekonomicko - finančná matematika a modelovanie

Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci práce: Mgr. Soňa Kilianová, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

- Meno a priezvisko študenta:** Bc. Michaela Jašurková  
**Študijný program:** ekonomicko-finančná matematika a modelovanie  
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský  
**Sekundárny jazyk:** anglický
- Názov:** Value-at-Risk a Conditional Value-at-Risk ako nástroje na meranie rizika portfólia  
*Value-at-Risk and Conditional Value-at-Risk as tools for portfolio risk measurement*
- Cieľ:** Cieľom diplomovej práce je opísať nástroje na meranie trhového rizika portfólia, so zameraním na využitie mier Value-at-Risk (VaR) a Conditional Value-at-Risk (CVaR). Súčasťou práce bude okrem opisu teoretických aspektov tiež spracovanie základných metód výpočtu VaR a CVaR s aplikovaním na reálne data.
- Vedúci:** Mgr. Soňa Kilianová, PhD.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
**Dátum zadania:** 10.02.2015
- Dátum schválenia:** 11.02.2015  
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

**Pod'akovanie** Touto cestou by som sa veľmi rada poďakovala svojej vedúcej diplomovej práce Mgr. Soni Kilianovej, PhD. za vedenie, trpezlivosť a ochotu, cenné odborné rady, štylistické pripomienky a poskytnuté materiály, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Zároveň by som sa chcela poďakovať svojej rodine a priateľom za podporu a trpezlivosť počas písania práce, ale aj počas celého vysokoškolského štúdia.

## Abstrakt

JAŠURKOVÁ, Michaela: Value-at-Risk a Conditional Value-at-Risk ako nástroje na meranie rizika portfólia [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Soňa Kilianová, PhD., Bratislava, 2016, 71 s.

V práci sa zaoberáme nástrojmi na meranie rizika portfólia. Zameriavame sa na rizikové miery Value-at-Risk (VaR) a Conditional Value-at-Risk (CVaR). Opisujeme teoretické aspekty a základné parametrické a neparametrické metódy odhadu VaR a CVaR, a to historickú simuláciu, variančno-kovariančnú metódu a Monte Carlo simulácie. V praktickej časti dané metódy aplikujeme na ilustračné portfólio zložené z troch akcií a porovnáme ich.

**Kľúčové slová:** Riziko, Rizikové faktory, Rozdelenie strát, Value-at-Risk, Conditional Value-at-Risk

## Abstract

JASURKOVÁ, Michaela: Value-at-Risk and Conditional Value-at-Risk as tools for portfolio risk measurement [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Soňa Kilianová, PhD., Bratislava, 2016, 71 p.

In this master thesis we are concerned with tools for portfolio risk measurement. We focus on measures Value-at-Risk (VaR) and Conditional Value-at-Risk (CVaR). We describe theoretical aspects and general parametric and nonparametric methods of estimation VaR and CVaR, such as historical simulation method, variance-covariance method and Monte Carlo simulation method. In practical part of the thesis we apply the given methods to illustrative portfolio consisting of three stocks and compare them.

**Keywords:** Risk, Risk factors, Loss distribution, Value-at-Risk, Conditional Value-at-Risk

# Obsah

<b>Zoznam obrázkov</b>	<b>9</b>
<b>Úvod</b>	<b>11</b>
<b>1 Finančné riziko</b>	<b>13</b>
1.1 Trhové riziko . . . . .	13
1.2 Kreditné riziko . . . . .	14
1.3 Operačné riziko . . . . .	14
1.4 Ostatné riziká . . . . .	15
<b>2 Proces riadenia rizík</b>	<b>16</b>
2.1 Prečo riadiť riziko? . . . . .	17
2.2 Meranie rizík . . . . .	18
2.3 Základné koncepty procesu riadenia rizík . . . . .	20
<b>3 Value-at-Risk</b>	<b>23</b>
3.1 VaR pre normálne a Studentovo $t$ -rozdelenie strát . . . . .	25
<b>4 Conditional Value-at-Risk</b>	<b>27</b>
4.1 CVaR pre normálne a Studentovo $t$ -rozdelenie strát . . . . .	28
<b>5 Metódy výpočtu VaR a CVaR</b>	<b>29</b>
5.1 Historická simulácia . . . . .	30
5.2 Variančno-kovariančná metóda . . . . .	32
5.3 Monte Carlo simulácie . . . . .	36
<b>6 Aplikácia jednotlivých metód na reálne dáta a ich porovnanie</b>	<b>39</b>
6.1 Ilustračné portfólio . . . . .	39
6.2 Historická simulácia . . . . .	42
6.3 Variančno-kovariančná metóda . . . . .	43
6.4 Monte Carlo simulácie . . . . .	46
6.5 Všetky metódy . . . . .	47

<b>Záver</b>	<b>51</b>
<b>Literatúra</b>	<b>52</b>
<b>Príloha 1</b>	<b>55</b>
<b>Príloha 2</b>	<b>59</b>



## Zoznam obrázkov

1	Ilustračný príklad rozdelenia strát spolu s $\text{VaR}_{0.95}$ . . . . .	23
2	Hustota normálneho rozdelenia $N(0,1)$ a Studentovho $t$ -rozdelenia s 3, 4, a 5 stupňami voľnosti. . . . .	26
3	Ilustračný príklad rozdelenia strát spolu s $\text{CVaR}_{0.95}$ . . . . .	27
4	Volkswagen AG: a) historické ceny, b) denné relatívne zmeny. Zdroj dát: [21]. . . . .	39
5	Renault SA: a) historické ceny, b) denné relatívne zmeny. Zdroj dát: [20].	40
6	Ford Motor Co.: a) historické ceny, b) denné relatívne zmeny. Zdroj dát: [19]. . . . .	40
7	Výmenný kurz: a) historické hodnoty, b) denné relatívne zmeny. Zdroj dát: [22]. . . . .	40
8	a) Hustota rozdelenia strát b) Strata ilustračného portfólia. . . . .	41
9	$\text{VaR}$ a $\text{CVaR}$ odhadnuté pomocou historickej simulácie. . . . .	42
10	$\text{VaR}$ a $\text{CVaR}$ odhadnuté pomocou variančno-kovariančnej metódy za predpokladu normálneho rozdelenia. . . . .	44
11	$\text{VaR}$ a $\text{CVaR}$ odhadnuté pomocou variančno-kovariančnej metódy za predpokladu $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti. . . . .	45
12	$\text{VaR}$ a $\text{CVaR}$ odhadnuté pomocou variančno-kovariančnej metódy za predpokladu normálneho a $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti. . . . .	45
13	$\text{VaR}$ a $\text{CVaR}$ odhadnuté pomocou Monte Carlo simulácií za predpokladu normálneho rozdelenia. . . . .	46
14	$\text{VaR}$ a $\text{CVaR}$ odhadnuté pomocou Monte Carlo simulácií za predpokladu $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti. . . . .	46
15	Odhad $\text{VaR}$ pomocou historickej simulácie a variančno-kovariančnej metódy za predpokladu normálneho a $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti. . . . .	47
16	Odhad $\text{VaR}$ pomocou Monte Carlo simulácií za predpokladu normálneho a $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti. . . . .	48
17	Odhad $\text{CVaR}$ pomocou historickej simulácie a variančno-kovariančnej metódy za predpokladu normálneho a $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti. . . . .	48

18	Odhad CVaR pomocou Monte Carlo simulácií za predpokladu normálneho a $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti. . . . .	49
19	Histogram rozdelenia strát spolu s odhadom VaR a CVaR pomocou historickej simulácie, variančno-kovariančnej metódy a Monte Carlo simulácií za obdobie od 3.1.2012 do 31.12.2015. . . . .	50
20	VaR a CVaR odhadnuté pomocou variančno-kovariančnej metódy za predpokladu viacrozmerného $t$ -rozdelenia s rôznymi stupňami voľnosti. . . . .	55
21	VaR a CVaR odhadnuté pomocou Monte Carlo simulácií za predpokladu viacrozmerného $t$ -rozdelenia s 3 stupňami voľnosti. . . . .	56
22	VaR a CVaR odhadnuté pomocou Monte Carlo simulácií za predpokladu viacrozmerného $t$ -rozdelenia s 5 stupňami voľnosti. . . . .	56
23	Odhad VaR a CVaR pomocou historickej simulácie, variančno-kovariančnej metódy a Monte Carlo simulácií. . . . .	57
24	Odhad VaR pomocou historickej simulácie, variančno-kovariančnej metódy a Monte Carlo simulácií. . . . .	57
25	Odhad CVaR pomocou historickej simulácie, variančno-kovariančnej metódy a Monte Carlo simulácií. . . . .	58

## Úvod

Proces riadenia rizík prešiel za posledné desaťročia výrazným rozvojom. Samotné meranie rizík sa stalo významnou súčasťou každej finančnej inštitúcie. S tým je spojený rastúci záujem o jednotlivé prístupy a nástroje na meranie rizík. V práci sa zaoberáme mierami Value-at-Risk a Conditional Value-at-Risk a budeme vychádzať najmä z diel [6, 7, 13].

Motiváciou pre vznik práce bolo vytvorenie prehľadu o nástrojoch na meranie rizika portfólia s využitím mier Value-at-Risk a Conditional Value-at-Risk. Práca pozostáva zo šiestich kapitol, pričom prvých päť kapitol sa venuje teoretickým aspektom a opisu základných metód výpočtu. V poslednej kapitole sa nachádza praktická časť, v ktorej sú jednotlivé metódy aplikované na ilustračné portfólio.

Prvá kapitola sa týka finančného rizika a jeho jednotlivých druhov. Pozornosť venujeme najmä trhovému, kreditnému a operačnému riziku. Pre ďalšiu prácu s rizikom je potrebné vedieť správne identifikovať druh finančného rizika a jednotlivé rizikové faktory.

Druhá kapitola uvedie čitateľa do problematiky procesu riadenia rizík, pričom sú vysvetlené kroky procesu riadenia rizík a čitateľ je oboznámený s historickým pozadím riadenia rizík a regulácie. Venujeme sa meraniu rizík a zavádzame terminológiu a exaktné definície dôležitých pojmov potrebných pre ďalšiu prácu. Ako zdroj poznatkov pri prvých dvoch kapitolách sme použili najmä [7, 8, 13].

V tretej kapitole značnú pozornosť venujeme Value-at-Risk spolu s jeho alternatívnymi reprezentáciami založenými na predpokladoch pravdepodobnostných rozdelení. Okrem opisu vlastností sa venujeme jeho slabým a silným stránkam. Mierou Value-at-Risk sa zaoberajú napríklad diplomové práce [14, 18]. Dôvodom záujmu o Value-at-Risk spolu s podrobným opisom metód odhadu a výpočtu je prepojenosť Value-at-Risk s Conditional Value-at-Risk.

Štvrtá kapitola sa venuje miere Conditional Value-at-Risk. Podobne ako v predošlej kapitole uvedieme jej definíciu, opíšeme slabé a silné stránky a uvedieme alternatívne reprezentácie potrebné v parametrických metódach. Touto mierou sa zaoberajú diela [1, 7]. V prípade záujmu o definíciu Conditional Value-at-Risk ako optimalizačného problému odporúčame čitateľa na [16]. Porovnanie oboch mier nájdeme v článku [17].

V piatej kapitole detailne opisujeme základné metódy odhadu Value-at-Risk a Conditional Value-at-Risk. Neparametrickú metódu reprezentuje historická simulácia a z parametrických metód sa venujeme variančno-kovariančnej metóde a Monte Carlo simuláciám. Historická simulácia alebo Monte Carlo metódy používajú na odhad Conditional Value-at-Risk odhad Value-at-Risk, preto je potrebné opísať obe miery. Pri každej metóde uvádzame základnú myšlienku, algoritmus výpočtu, výhody a nevýhody a prípadné možnosti vylepšenia. Neparametrickým a semiparametrickým metódam odhadu sa venuje aj diplomová práca [10].

V poslednej kapitole sa venujeme empirickej analýze dát. Na ilustračné portfólio zložené z troch akcií, pričom jedna je denominovaná v zahraničnej mene, postupne aplikujeme jednotlivé metódy odhadu popísané v piatej kapitole a graficky znázorníme a analyzujeme výsledky. Prínosom práce a rozdielom v porovnaní s inými diplomovými prácami je, že sa okrem miery Value-at-Risk venujeme aj miere Conditional Value-at-Risk.

# 1 Finančné riziko

Pod pojmom riziko si obvykle predstavíme nebezpečenstvo straty alebo neúspechu. Riziko zohráva dôležitú úlohu napríklad v poisťovníctve, manažmente a finančníctve. Objektom nášho záujmu je riziko v kontexte finančníctva, a preto pod rizikom budeme ďalej v texte rozumieť finančné riziko. To si zdefinujeme ako potenciálnu budúcu finančnú stratu, ktorá je následkom použitého finančného nástroja alebo portfólia finančných nástrojov [12].

Pre ilustráciu uvažujme investora, ktorý vlastní portfólio zložené z niekoľkých akcií denominovaných v domácej aj zahraničnej mene. Dnešnú hodnotu portfólia poznáme, ale budúca hodnota je otázna. Pohyby cien na akciovom trhu a výmenných kurzov ovplyvňujú budúcu hodnotu portfólia. Vzniká riziko, že vplyv na budúcu hodnotu portfólia bude nepriaznivý. Riziko je spojené s náhodnosťou [7]. Má dve základné zložky, a to pravdepodobnosť nastatia a veľkosť dopadu. Naším cieľom je merať riziko, pričom vychádzame z teórie pravdepodobnosti, finančnej matematiky a štatistiky. Na úvod je potrebné zdefinovať hlavné typy rizika [8, 12]: trhové, kreditné a operačné riziko.

## 1.1 Trhové riziko

Trhové riziko v sebe zahŕňa zmenu cien finančných nástrojov citlivých na pohyby výmenných kurzov, úrokových sadzieb, na zmenu cien na akciovom trhu a cien komodít [12]. Poznáme nasledovné typy trhových rizík:

- akciové riziko,
- devízové riziko,
- úrokové riziko,
- komoditné riziko.

Pri trhovom riziku treba brať do úvahy, že ceny finančných nástrojov sú ovplyvnené viacerými rizikovými faktormi. Pri detailnejšej analýze sa môžeme zamerať na to, čo ovplyvňuje vývoj cien samotných rizikových faktorov. Napríklad na úrokovú sadzbu má vplyv inflácia, monetárna politika či očakávaný vývoj ekonomiky. Ilustračné portfólio v kapitole 6 bude vystavené akciovému a devízovému riziku.

## 1.2 Kreditné riziko

Vo všeobecnosti sa pod pojmom kreditné riziko rozumie potenciálna strata spôsobená neschopnosťou alebo neochotou dlžníka splatiť podľa pôvodnej dohody pohľadávky, napríklad úvery a dlhopisy. Okrem vyššie spomenutého základného prístupu v sebe kreditné riziko obsahuje aj [12]:

- riziko zníženia hodnoty dlhopisu, kde ako následok zníženia ratingu emitenta dlhopisu sa zvyšuje pravdepodobnosť, že dlhopis nebude splatený a jeho cena klesá,
- riziko vysporiadania, kde napríklad banka kúpi dlhopis od inej, zaplatí zaň hneď, ale vyrovnanie nastane až o 2 dni, v priebehu ktorých emitent dlhopisu skrachuje a nie je schopný ho splatiť,
- riziko z poskytnutých záruk,
- riziko z kreditných kariet a nevyčerpaných povolených prečerpaní na účtoch.

Pre viac informácií o kreditnom riziku a metódach jeho modelovania odporúčame čitateľa na [8, 11].

## 1.3 Operačné riziko

Operačné riziko v sebe obsahuje riziko zo straty spôsobenej [12]:

- externými alebo internými podvodmi,
- chybnými internými procesmi, ktoré sú spôsobené zlyhaním ľudského faktora alebo systémov v banke,
- vonkajšími udalosťami, napríklad zemetrasenie, povodeň a terorizmus.

Meranie operačného rizika je v porovnaní s trhovým a kreditným náročnejšie.

## 1.4 Ostatné riziká

Ďalšími rizikami sú riziko likvidity, modelu, strategické, právne, systémové a reputačné riziko [12]:

- Riziko likvidity je spojené so stratami spôsobenými neschopnosťou banky plniť si svoje záväzky v čase ich splatnosti, pretože na to nemá dostatok disponibilných prostriedkov.
- Riziko modelu sa spája s nesprávnou voľbou modelu. Napríklad model predpokladá, že výnosy finančných nástrojov majú normálne rozdelenie. Ak tento predpoklad nie je splnený, trhové ceny finančných nástrojov nekorešponujú s cenami predpovedanými modelom. Rozhodnutia na základe výsledkov modelu môžu viesť k podhodnoteniu rizika.
- Strategické riziko je spojené so zlým strategickým plánom, na základe ktorého spoločnosť nie je pripravená vhodne reagovať na meniace sa podnikateľské prostredie alebo nemá vhodne prerozdelené svoje zdroje, čo vedie k strate.
- Právne riziko predstavuje potenciálnu stratu spôsobenú nekompletnou právnou dokumentáciou, nekorektnou interpretáciou zákonov a prípadnými súdnymi procesmi, s ktorými sú spojené súdne trovy.
- Systémové riziko v sebe zahŕňa riziko kolapsu dôležitých finančných inštitúcií. Ten môže viesť ku kríze a zlyhaniu celkového finančného systému.
- Reputačné riziko predstavuje riziko zníženia kapitálu alebo zisku ako následok poškodenia dobrého mena banky alebo spoločnosti. Zdroje banky sú tvorené aj vkladmi verejnosti. Strata reputácie banky môže viesť k hromadným výberom vkladov a mať až likvidačné účinky. Transparentnosť a vhodná vládna politika sú užitočným nástrojom na zníženie tohto rizika.

Oboznámili sme sa s jednotlivými typmi rizík, čo využijeme v nasledujúcej kapitole pri procese riadenia rizík.

## 2 Proces riadenia rizík

Čo si vo všeobecnosti predstavíme pod pojmom riadenie rizík? Budúce udalosti môžu mať priaznivý aj nepriaznivý efekt. Riadenie rizík predstavuje vysporiadanie sa s nepriaznivým efektom. Najprv je potrebné ho identifikovať, určiť jeho veľkosť a následne si stanoviť stratégiu, ako sa s ním vysporiadať. Jedná sa o zložitý proces, ktorý je spojený s konceptmi a nástrojmi na meranie rizika, zbermi dát, matematickým aparátom, štatistickými modelmi, či vyhodnocovacími technikami. Proces riadenia rizík pozostáva z 3 krokov [12, 16]:

- Identifikácia rizík je prvým krokom procesu riadenia rizík. Hranice medzi jednotlivými druhmi rizík nie sú jednoznačne zadefinované. Predstavme si situáciu, že dlžník nesplatí úver. Ak je dôvodom nedostatok finančných prostriedkov, jedná sa o kreditné riziko. Dôvodom môže byť aj chybné vyhodnotenie klienta pri schvaľovacom procese úveru, vtedy sa jedná o operačné riziko. Riziká sú prepojené. Pre ďalšiu prácu s nimi je potrebné určiť, o aký typ rizika sa jedná a tiež určiť množinu rizikových faktorov. Tie zohrávajú dôležitú úlohu. Nevhodný alebo nedostatočný výber rizikových faktorov môže viesť k chybnému modelu, k podhodnoteniu rizík, a následne k stratégiám a rozhodnutiam prijatým na základe chybného modelu.
- Meranie rizík je kľúčovým bodom daného procesu a hlavným objektom nášho záujmu. Je spojené so zberom dát a činnosťami umožňujúcimi meranie a samotnými kvantitatívnymi technikami na meranie rizík. Medzi 3 základné zdroje dát patria historické dáta, teoretické modely a potenciálne scenáre. Pri historickej simulácii, ktorú opíšeme neskôr, používame historické dáta a na základe empirického rozdelenia zmien rizikových faktorov odhadujeme rozdelenie strát. Teoretické modely sú založené na predpokladoch o pravdepodobnostných rozdeleniach a vlastnostiach jednotlivých tried náhodných premenných. V teoretických modeloch vychádzame napríklad z predpokladu, že vektor zmien rizikových faktorov má normálne alebo Studentovo  $t$ -rozdelenie. Používame tiež ARMA procesy a GARCH modely bližšie zadefinované v [7]. Pri potenciálnych scenároch sú rozhodujúce názory expertov na možné scenáre spolu s pravdepodobnosťami ich



nastatia. Nástrojom na meranie rizík sa budeme podrobnejšie venovať neskôr v tejto kapitole.

- Riadenie rizík je posledným krokom procesu. Na základe predošlého bodu už vieme, akému riziku sme vystavení a stanovujeme si stratégie ako ho zmierniť, prípadne aké riziko sme ochotní podstúpiť. Model, ktorý sme vytvorili, chceme otestovať. Použijeme ho na historické dáta a testujeme jeho kvalitu. Tomuto procesu sa hovorí spätné testovanie. Vykonávame aj stresové testovanie, kde na základe stresových scenárov zisťujeme vplyv možných nepriaznivých udalostí.

## 2.1 Prečo riadiť riziko?

Otázkou je, prečo riadiť riziko a prečo v posledných dekádach rastie záujem o túto oblasť. Riadenie rizík je spojené s finančným priemyslom. Akademické inovácie z oblasti finančnej matematiky a derivátov v dvadsiatom storočí sa podpísali pod jeho rozvoj. Spomenieme napríklad teóriu oceňovania finančných derivátov, Markowitzov model portfólia, Capital Asset Pricing Model (CAPM) a Black-Scholesov model. Rástol objem opcií obchodovaných na finančných trhoch, aj pre samotné finančné trhy to bolo obdobie rozmachu.

Zrušenie Brettonwoodskej menovej sústavy spolu s ropným šokom v sedemdesiatych rokoch demonštrovali devízové a komoditné riziko. Krach Barings Bank, jednej z najstarších obchodných bánk na svete v roku 1995 so sebou prinášal otázku spúšťacieho efektu a systémového rizika. Toto sú príklady dôvodov, prečo rástol záujem o reguláciu a riadenie rizík. Za reguláciu z veľkej časti vďačíme Bazilejskej komisii pre bankový dohľad (Basel Committee on Banking Supervision), ktorá vydala Bazilejské dohody Basel I (1988), Basel II (2004) a Basel III (2010). Tie sa venujú trhovému, operačnému a kreditnému riziku, kapitálovej primeranosti bánk, minimálnej kapitálovej požiadavke, či kapitálovému konzervatívne vankúšu. Bazilejské dohody majú len odporúčací charakter. Pravidlá a opatrenia, ktoré navrhujú, sa stávajú právoplatnými až po zavedení do legislatívy. Pre bližšie informácie o Bazilejských dohodách odporúčame čitateľa na [3, 4].

Regulácia a riadenie rizík sa podieľajú na stabilite finančného a bankového systému. Predpokladá sa, že vhodný risk manažment zvyšuje hodnotu spoločnosti. Riadenie rizík zohráva významnú úlohu, či už z pohľadu regulátorov, bánk, bankových klientov, akcionárov spoločnosti, politikov aj samotnej verejnosti. V tejto podkapitole sme vychádzali z diela [7].

## 2.2 Meranie rizík

Meranie rizík je etapou procesu riadenia rizík, ktorej v tejto práci venujeme najväčšiu pozornosť. Nástroje na meranie rizika môžeme rozdeliť do 4 kategórií [7]:

- Výpočet rizika založený na teoretickej hodnote finančného nástroja spolu s priradeným rizikovým faktorom predstavuje najstarší spôsob na meranie rizika portfólia. Každému finančnému nástroju je priradený faktor vyjadrujúci jeho rizikovosť. Potom riziko portfólia je dané súčtom jednotlivých teoretických hodnôt finančných nástrojov, ktoré sú vážené priradeným faktorom. Hlavnou výhodou je jednoduchosť výpočtu. Tento prístup má viacero nedostatkov, napríklad neukazuje, že diverzifikáciou sa dá znížiť rizikovosť portfólia. Majme 2 portfóliá rovnakej hodnoty. Prvé portfólio obsahuje akcie len jednej spoločnosti. Druhé portfólio, dobre diverzifikované, obsahuje akcie rôznych spoločností. Na základe tohto prístupu by boli obe portfólia vystavené rovnakému riziku.
- Nástroje na meranie rizika založené na scenároch sú v prípade malého počtu rizikových faktorov užitočným prostriedkom na kvantifikovanie rizika. Uvažujme niekoľko scenárov, vyjadrujúcich ako sa v budúcnosti môže zmeniť hodnota rizikových faktorov. Príkladom scenára je zmena výmenného kurzu. Každý scenár napovedá o možnej budúcej hodnote portfólia a aj o prípadnej strate. Vezmeme do úvahy všetky scenáre a určíme maximálnu stratu portfólia. Nech množina  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$  reprezentuje jednotlivé scenáre možnej zmeny hodnoty rizikových faktorov a vektor  $w = (w_1, \dots, w_n)' \in [0, 1]^n$  je vektorom váh daných scenárov a nech  $l_{[t]}$  je príslušným operátorom strát portfólia v čase  $t$ . Potom riziko portfólia je dané vzťahom:

$$\psi[\mathcal{X}, w] := \max \{w_1 l_{[t]}(x_1), \dots, w_n l_{[t]}(x_n)\}.$$

Samotná voľba scenárov a priradenie váh nie je explicitne zadefinované, ich vhodnosť je na posúdení tvorcu modelu. Nejednoznačnosť voľby scenárov môže byť sporným bodom. Možným zlepšením danej metódy je jej kombinácia s nástrojmi na meranie rizika založenými na rozdelení strát.

- Analýza citlivosti sa zameriava na citlivosť hodnoty portfólia na zmenu rizikových faktorov. Pre portfólio zložené z finančných derivátov sú nástrojmi na meranie rizika Greeks, kde použitím diferenciálneho počtu zisťujeme napríklad, ako sa zmení hodnota opcie vzhľadom na zmenu ceny alebo volatility akcie. Ďalším nástrojom je durácia portfólia zloženého z dlhopisov, kde ako rizikový faktor uvažujeme úrokovú mieru.
- Nástroje na meranie rizika založené na rozdelení strát sú v praxi často používané. Finančné riziko sme zadefinovali ako potenciálnu budúcu finančnú stratu, tú chceme zmerať, alebo nájsť jej distribučnú funkciu, prípadne inú charakteristiku, pričom používame pravdepodobnostné a štatistické veličiny.

Odhady rozdelenia strát sú založené na historických dátach. Tie nie vždy dostatočne odrážajú súčasnú situáciu na trhu. V prípade, že historické dáta zachytávajú kľudné obdobie na trhu, ťažko predpokladať, že budú predpovedať turbulentné obdobia, ktoré môžu nastať. Treba tiež brať do úvahy, že dáta nie sú vždy kompletne. Niektoré nedostatky sa dajú odstrániť, napríklad už spomínanou kombináciou s nástrojmi na meranie rizika založenými na scenároch, ktoré by zachytili prípadné turbulentné obdobia. Faktom ale ostáva, že odhad rozdelenia strát je náročný proces.

Opodstatnenie merania rizika na základe rozdelenia strát vyplýva z prepojenia strát, rizika a riadenia rizík. Rozdelenie strát umožňuje tiež porovnávanie jednotlivých portfólií a zachytáva diverzifikačný efekt. Príkladom nástrojov na meranie rizika založených na rozdelení strát sú Value-at-Risk, Conditional Value-at-Risk a variancia.

Variancia ako nástroj na meranie rizika je spojená s Markowitzovým modelom portfólia opísaným v [15]. Predpokladom použitia variancie je existencia druhého momentu rozdelenia strát. Výhodou je jednoduchosť analytického použitia.

Popísali sme jednotlivé kategórie nástrojov na meranie rizika. Vybraným nástrojom sa budeme v ďalších kapitolách venovať detailnejšie.

### 2.3 Základné koncepty procesu riadenia rizík

V predchádzajúcej časti sme sa oboznámili s procesom riadenia rizík. V práci sa chceme bližšie venovať vybraným nástrojom na meranie rizík. Pre ich popis je potrebné zaviesť označenie, ktoré budeme ďalej používať a zadefinovať pojmy ako rizikové faktory, rozdelenie strát, či mapovanie rizika.

Nech riziko  $X$  je náhodnou premennou na pravdepodobnostnom priestore  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  a nech  $F_X(x)$  je jej distribučnou funkciou, teda

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Pod rizikom budeme rozumieť zmenu hodnoty rizikového faktoru [7]. Príkladom rizikových faktorov sú logaritmické ceny akcií, logaritmické výmenné kurzy a úroková miera. V prípade viacerých rizikových faktorov je riziko náhodným vektorom  $\mathbf{X}$ , pričom  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ , kde  $d$  je počet rizikových faktorov.

Portfólio je súbor finančných nástrojov. Hodnotu portfólia v čase  $t$  označíme  $V(t)$ . Ak  $\Delta$  je daný časový horizont, potom strata portfólia počas obdobia  $[t, t + \Delta]$  je daná vzťahom [8]:

$$L_{[t, t+\Delta]} := -(V(t + \Delta) - V(t)). \quad (1)$$

Uvažujeme fixný časový horizont  $\Delta$ , ktorý budeme pokladať za jednotku času. Vzhľadom k tomu, že sledujeme vývoj strát v čase s periodicitou sledovania  $\Delta$ , prechádzame z procesu  $L_{[t, t+\Delta]}$  na časový rad  $L_t$ . Potom si stratu vyjadríme vzťahom [7]:

$$L_{t+1} := -(V_{t+1} - V_t), \quad (2)$$

kde  $L_{t+1}$  označuje stratu zo dňa  $t$  na deň  $t + 1$ . Pod označením  $L_t$  budeme ďalej rozumieť rozdelenie  $\{L_t\}_{t \geq 0 | t \in \mathbb{R}}$ . Rozdelenie  $L_t$  nazývame rozdelenie strát. Hodnotu  $V(t)$  vyjadríme ako funkciu času  $t$  a  $d$ -rozmerného náhodného vektora  $Z_t = (Z_{t,1}, \dots, Z_{t,d})$  rizikových faktorov:

$$V_t = f(t, Z_t),$$

kde funkcia  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  popisuje zloženie portfólia. Táto reprezentácia hodnoty portfólia sa nazýva mapovanie rizika [9]. Voľba funkcie  $f$  a rizikových faktorov závisí od jednotlivých finančných nástrojov portfólia. V praxi je bežné, že náhodný vektor  $Z_t$  je 1000-rozmerný až 10000-rozmerný. Zmenu rizikových faktorov  $X_t$  si zdefinujeme nasledovne:

$$X_t := Z_t - Z_{t-1}. \quad (3)$$

Rozdelenie strát je určené rozdelením zmien rizikových faktorov. Použitím vyjadrenia  $X_{t+1} = Z_{t+1} - Z_t$  a mapovania rizika si vyjadríme stratu  $L_{t+1}$  [6]:

$$\begin{aligned} L_{t+1} &= -(V_{t+1} - V_t) \\ &= -(f(t+1, Z_{t+1}) - f(t, Z_t)) \\ &= -(f(t+1, Z_t + X_{t+1}) - f(t, Z_t)). \end{aligned}$$

Chceme vyjadriť funkcionálnu závislosť strát na zmenách rizikových faktorov. Za tým účelom zdefinujeme operátor strát  $l_{[t]} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$l_{[t]}(x) := -(f(t+1, Z_t + x) - f(t, Z_t)), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (4)$$

Potom môžeme vyjadriť stratu pomocou operátora strát:

$$L_{t+1} = l_{[t]}(X_{t+1}). \quad (5)$$

Sú situácie, kedy je vhodné vyjadriť stratu ako lineárnu funkciu zmien rizikových faktorov. Dôvodom je napríklad jednoduchšie analytické spracovanie. Linearizáciu strát používame pri variančno-kovariančnej metóde, ktorú uvedieme neskôr. Predpokladom linearizácie je diferencovateľnosť funkcie  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , ktorú používame na mapovanie rizika. Kvalita závisí od dĺžky časového obdobia  $\Delta$ . Lineárnu aproximáciu strát  $L_{t+1}$  označíme  $L_{t+1}^\Delta$  a lineárnu aproximáciu operátora strát  $l_{[t]}(x)$  označíme  $l_{[t]}^\Delta(x)$ . Lineárna aproximácia strát je potom daná vzťahom [7]:

$$L_{t+1}^\Delta = -(f_t(t, z_t) + \sum_{j=1}^d f_{z_j}(t, z_t) X_{t+1,j}), \quad (6)$$

linearizovaný operátor strát má tvar:

$$l_{[t]}^\Delta(x) = -(f_t(t, z_t) + \sum_{j=1}^d f_{z_j}(t, z_t) x_j), \quad (7)$$

kde  $f_t$  a  $f_{z_j}$  sú príslušné parciálne derivácie funkcie  $f$  podľa premenných  $t$  a  $z_j$  a  $j \in \{1, \dots, d\}$ , teda  $f_t(t, z_t) = \partial f / \partial t$  a  $f_{z_j}(t, z_t) = \partial f / \partial z_j$ . Výraz  $f_t(t, z_t)$  používame len v prípade explicitnej časovej závislosti, napríklad pri portfóliu zloženom z finančných derivátov [6].

Pripomíname, že rozdelenie strát je determinované rozdelením zmien rizikových faktorov. V súvislosti s vlastnosťami časového radu zmien rizikových faktorov rozlišujeme [6, 7]:

- nepodmienené rozdelenie strát, kde vychádzame z predpokladu, že  $X_t$  je stacionárnym časovým radom, teda že rozdelenie zmien rizikových faktorov je nemenné vzhľadom na posun času a  $X_t, X_{t-1}, \dots$  majú rovnaké rozdelenie. Potom distribučná funkcia rozdelenia strát je vyjadrená nasledovne:

$$F_{L_{t+1}}(x) = P(L_{t+1} \leq x).$$

V prípade, že jednotlivé metódy výpočtu a nástroje sú založené na nepodmienenom rozdelení strát, hovoríme o statickom riadení rizík.

- podmienené rozdelenie strát, ktorého distribučná funkcia je definovaná predpisom:

$$F_{L_{t+1}|\mathcal{F}_t}(x) = P(L_{t+1} \leq x | \mathcal{F}_t),$$

kde  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$  v sebe zahŕňa historické informácie týkajúce sa zmien rizikových faktorov až do času  $t$  vrátane. V prípade, že jednotlivé nástroje a techniky výpočtu vychádzajú z podmieneného rozdelenia strát, hovoríme o dynamickom riadení rizík. V porovnaní so stacionárnym riadením rizík sa jedná o zložitejší prístup.

V práci sa budeme venovať najmä nepodmienenému rozdeleniu strát. Podľa [6] sa realita nachádza niekde v strede medzi oboma prístupmi.

Zadefinovali sme dôležité pojmy a zaviedli označenie, ktoré budeme ďalej používať. Oboznámili sme sa s procesom riadenia rizík, s jeho historickým pozadím, významom, či jednotlivými etapami. Táto kapitola predstavuje základný prehľad o riadení rizík, potrebný pre ďalšiu časť práce, v ktorej sa budeme venovať nástrojom na meranie rizika založeným na rozdelení strát, a to Value-at-Risk a Conditional Value-at-Risk.

### 3 Value-at-Risk

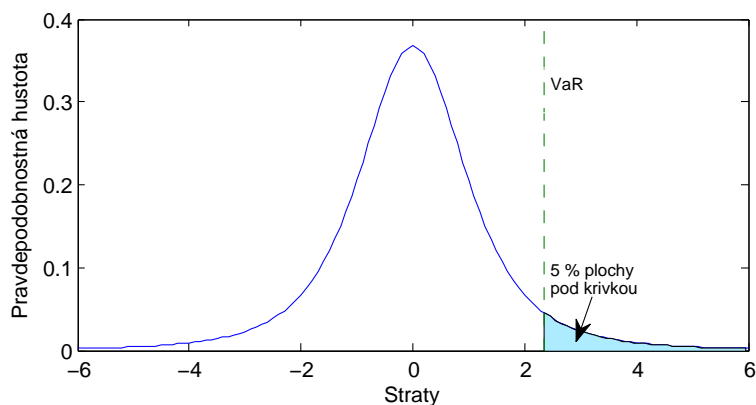
Value-at-Risk (ďalej len VaR), jeden z nástrojov na meranie rizika založených na rozdelení strát, je v praxi jedným z najpoužívanejších [13]. V súvislosti s portfóliom nám ako prvá napadne otázka, akú maximálnu stratu môžeme utrpieť. Pri takto položenej otázke zanedbávame informáciu ukrytú v rozdelení strát. Uvažujme, že v najhoršom prípade stratíme všetko. Táto informácia nemá pre nás veľkú výpovednú hodnotu. Hlavnou myšlienkou konceptu VaR je nahradiť maximálnu stratu maximálnou stratou, ktorá by nemala byť prekročená s danou mierou pravdepodobnosti  $\alpha \in (0, 1)$ .

Value-at-Risk portfólia so zvolenou mierou pravdepodobnosti  $\alpha$  je dané najmenším číslom  $l$  takým, že pravdepodobnosť nastatia straty  $L$  presahujúcej  $l$  nie je väčšia ako  $(1 - \alpha)$ , teda [7]:

$$\text{VaR}_\alpha = \inf \{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\}, \quad (8)$$

$$\text{VaR}_\alpha = \inf \{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}, \quad (9)$$

kde  $F_L(l)$  je distribučnou funkciou rozdelenia strát.



**Obr. 1:** Ilustračný príklad rozdelenia strát spolu s  $\text{VaR}_{0.95}$ .

Vidíme, že zo štatistického hľadiska predstavuje VaR kvantil rozdelenia strát. Tento fakt je pre nás veľmi užitočný. Z toho dôvodu je pre ďalšiu prácu potrebná exaktná definícia kvantilu.

Nech  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je rastúca funkcia, potom pre zovšeobecnenú inverziu  $T^{\leftarrow}$  funkcie  $T$  platí vzťah [7]:

$$T^{\leftarrow}(y) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}. \quad (10)$$

Nech  $\alpha \in (0, 1)$  je danou mierou pravdepodobnosti a  $F$  distribučnou funkciou. Potom zovšeobecnenú inverziu  $F^{\leftarrow}$  nazývame kvantilovou funkciou distribučnej funkcie  $F$  a je zadaná nasledovne [7]:

$$F^{\leftarrow}(\alpha) = \inf \{l \in \mathbb{R} : F(l) \geq \alpha\}. \quad (11)$$

Použitím definície zovšeobecnenej inverzie a vlastnosti distribučnej funkcie sformulujeme kritériá na výpočet  $\alpha$ -kvantilu. Bod  $x_0 \in \mathbb{R}$  je  $\alpha$ -kvantilom distribučnej funkcie  $F$  práve vtedy, keď sú splnené 2 podmienky, a to  $F(x_0) \geq \alpha$  a  $F(x) < \alpha$  pre  $\forall x < x_0$ . V niekoľkých bodoch zhrnieme nevýhody použitia VaR [13]:

- VaR je len kvantilom rozdelenia strát, nedáva informáciu o tom, čo sa deje po prekročení straty zodpovedajúcej VaR.
- VaR nie je subaditívna miera rizika. Súčet rizík dvoch samostatných portfólií by nemal prekročiť celkové riziko spojeného portfólia, to však nie je pri VaR vždy splnené.
- Riziko modelu je prítomné vždy, týka sa napríklad nesprávneho mapovania rizík alebo nesprávneho modelu štatistického rozdelenia zmien rizikových faktorov.

VaR sa používa na výpočet výšky vlastných zdrojov pre krytie trhových rizík. Nachádza sa aj v Bazilejských dohodách. Umožňuje hodnotiť rizikovosť celkového portfólia.

Prvé dva body vychádzajú priamo z definície VaR a nedajú sa odstrániť. Alternatívna miera CVaR už tieto nedostatky neobsahuje.



### 3.1 VaR pre normálne a Studentovo $t$ -rozdelenie strát

Pri niektorých metódach výpočtu VaR vychádzame z predpokladu o pravdepodobnostnom rozdelení strát, ktorý umožňuje zaviesť alternatívnu reprezentáciu VaR [7, 13]. Nech  $\alpha \in (0, 1)$ . Za predpokladu, že rozdelenie strát  $L$  má normálne rozdelenie so strednou hodnotou  $\mu$  a varianciou  $\sigma^2$ , teda:

$$L \sim N(\mu, \sigma^2),$$

vyjadríme VaR v tvare:

$$\text{VaR}_\alpha = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha), \quad (12)$$

kde  $\Phi$  je distribučnou funkciou normovaného normálneho rozdelenia a  $\Phi^{-1}(\alpha)$  je jej príslušný  $\alpha$ -kvantil.

Teraz odvodíme vyššie uvedené vyjadrenie VaR. Z definície VaR vieme, že:

$$P(L \leq \text{VaR}_\alpha) = \alpha.$$

Daný vzťah upravíme, aby sme mohli využiť fakt, že  $\frac{L-\mu}{\sigma}$  má normované normálne rozdelenie:

$$P\left(\frac{L-\mu}{\sigma} \leq \frac{\text{VaR}_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \alpha.$$

Použitím distribučnej funkcie normovaného normálneho rozdelenia sa dostávame k zápisu:

$$\Phi\left(\frac{\text{VaR}_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \alpha.$$

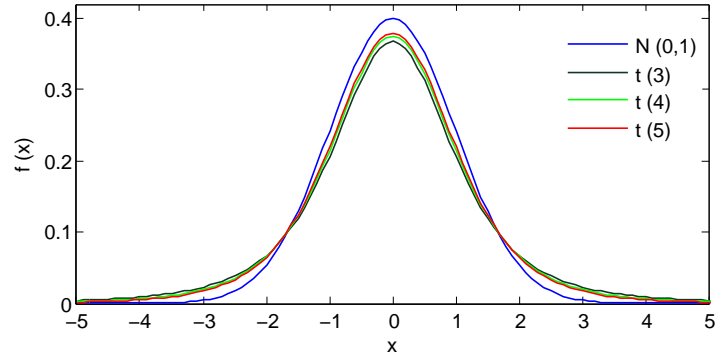
Následným invertovaním a úpravami vzťahu dostaneme uvedenú reprezentáciu VaR:

$$\frac{\text{VaR}_\alpha - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha),$$

$$\text{VaR}_\alpha = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha).$$

Na základe empirických pozorovaní sa dá predpokladať, že rozdelenie strát má ťažšie chvosty ako Gaussovo rozdelenie. Predpoklad normality zmien rizikových faktorov a samotných strát vedie k podhodnoteniu chvostov rozdelenia strát [6]. Na obrázku 2 vidíme hustotu normalizovaného normálneho rozdelenia a hustotu Studentovho  $t$ -rozdelenia s 3, 4 a 5 stupňami voľnosti. Studentovo  $t$ -rozdelenie má ťažšie chvosty

ako normálne rozdelenie. Predpoklad, že zmeny rizikových faktorov majú  $t$ -rozdelenie, vedie k menšiemu podhodnoteniu strát ako v prípade predpokladu normality zmien rizikových faktorov.



**Obr. 2:** Hustota normálneho rozdelenia  $N(0,1)$  a Studentovho  $t$ -rozdelenia s 3, 4, a 5 stupňami voľnosti.

Túto skutočnosť využijeme pri nasledujúcej alternatívnej reprezentácii VaR [7]. Predpokladajme, že rozdelenie strát  $L$  má Studentovo  $t$ -rozdelenie s  $\nu$  stupňami voľnosti, čo vyjadríme zápisom:

$$L \sim t(\nu, \mu, \sigma_L^2),$$

pričom  $\mu$  a  $\sigma^2$  sú momenty rozdelenia strát, teda stredná hodnota  $E(L) = \mu$  a variancia  $\sigma^2 = \text{var}(L) = \frac{\nu\sigma_L^2}{\nu-2}$ , kde  $\nu > 2$ . Potom strata  $L$  v tvare  $(L - \mu)/\sigma_L$  má štandardné Studentovo  $t$ -rozdelenie s  $\nu$  stupňami voľnosti:

$$\frac{L - \mu}{\sigma_L} \sim t(\nu).$$

Alternatívna reprezentácia VaR má potom tvar [7]:

$$\text{VaR}_\alpha = \mu + \sigma_L t_\nu^{-1}(\alpha),$$

ktorý môžeme vyjadriť aj nasledovne [13]:

$$\text{VaR}_\alpha = \mu + \sigma \sqrt{\frac{\nu - 2}{\nu}} t_\nu^{-1}(\alpha),$$

kde  $t_\nu$  označuje distribučnú funkciu Studentovho  $t$ -rozdelenia a  $t_\nu^{-1}$  je jej príslušný  $\alpha$ -kvantil.

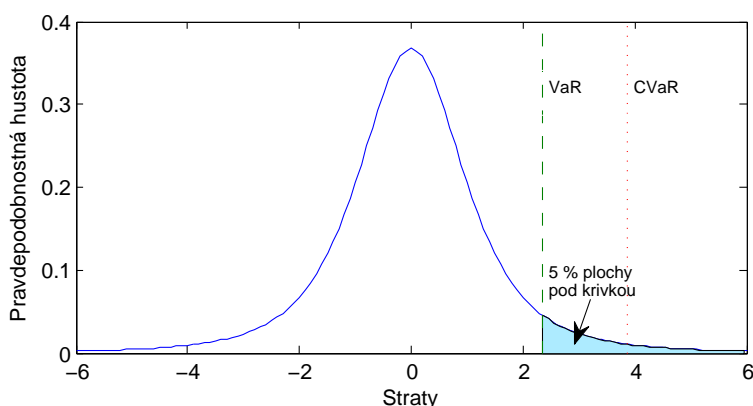
## 4 Conditional Value-at-Risk

Conditional Value-at-Risk (ďalej len CVaR) poznáme aj pod názvami Expected Shortfall, Average Value-at-Risk alebo Tail Value-at-Risk. V jednoduchosti si môžeme CVaR predstaviť ako priemer strát, keď VaR je prekročené, teda platí  $\text{CVaR}_\alpha \geq \text{VaR}_\alpha$  [7, 13]. CVaR nám dáva „what if“ informáciu o frekvencii a veľkosti vysokých strát. Pre stratu  $L$  so strednou hodnotou  $E(|L|) < \infty$  a s distribučnou funkciou  $F_L$  pri danej miere pravdepodobnosti  $\alpha \in (0, 1)$  definujeme CVaR ako [9]:

$$\text{CVaR}_\alpha(L) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u(L) du. \quad (13)$$

Pre integrovateľnú stratu  $L$  so spojitou distribučnou funkciou  $F_L$  a s mierou pravdepodobnosti  $\alpha \in (0, 1)$  je CVaR definované predpisom [6]:

$$\text{CVaR}_\alpha = E(L|L \geq \text{VaR}_\alpha). \quad (14)$$



**Obr. 3:** Ilustračný príklad rozdelenia strát spolu s  $\text{CVaR}_{0.95}$ .

Na obrázku 3 vidíme príklad hustoty rozdelenia strát, VaR a CVaR. VaR je často používaným nástrojom, ale v poslednom období sa do popredia dostáva aj CVaR. Niektorí risk manažéri preferujú CVaR pred VaR. Dôvodom je najmä, že CVaR je subaditívna miera, a že nám dáva informáciu aj o frekvencii a veľkosti obrovských strát. Dôkaz subaditivity miery CVaR nájde čitateľ v [1].

## 4.1 CVaR pre normálne a Studentovo $t$ -rozdelenie strát

Aj pre CVaR zavedieme alternatívne reprezentácie vychádzajúce z predpokladu pravdepodobnostných rozdelení.

Nech  $\alpha \in (0, 1)$ . Predpokladajme, že rozdelenie strát  $L$  má normálne rozdelenie so strednou hodnotou  $\mu$  a varianciou  $\sigma^2$ , teda  $L \sim N(\mu, \sigma^2)$ , potom pre CVaR platí [6]:

$$\text{CVaR}_\alpha = \mu + \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha}, \quad (15)$$

kde  $\Phi$  je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia a  $\phi$  je jeho hustota.

Pri výpočte CVaR použijeme štandardizované normálne straty:

$$\tilde{L} := (L - \mu)/\sigma.$$

Pre odvodenie vzťahu 15 na výpočet CVaR vyjadríme:

$$\text{CVaR}_\alpha = \mu + \sigma E \left( \frac{L - \mu}{\sigma} \middle| \frac{L - \mu}{\sigma} \geq q_\alpha \left( \frac{L - \mu}{\sigma} \right) \right), \quad (16)$$

kde  $q_\alpha$  je kvantilová funkcia štandardizovanej normálnej straty. Následne použijeme vzťah pre výpočet strednej hodnoty spojitej náhodnej veličiny [7]:

$$\text{CVaR}_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} l \phi(l) dl = \frac{1}{1 - \alpha} [-\phi(l)]_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha}.$$

Vieme, že na základe empirických pozorovaní má rozdelenie strát ťažšie chvosty ako normalizované normálne rozdelenie, a preto uvidíme aj alternatívnu reprezentáciu založenú na predpoklade Studentovho rozdelenia, ktoré má ťažšie chvosty ako normálne rozdelenie.

Pre CVaR za predpokladu, že straty majú Studentovo  $t$ -rozdelenie, platí vzťah [7]:

$$\text{CVaR}_\alpha(\tilde{L}) = \frac{g_\nu(t_\nu^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha} \left( \frac{\nu + (t_\nu^{-1}(\alpha))^2}{\nu - 1} \right),$$

opäť použijeme vzťah 16 a momenty rozdelenia strát za predpokladu Studentovho rozdelenia opísané v podkapitole 3.1:

$$\text{CVaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma \sqrt{\frac{\nu - 2}{\nu}} \frac{g_\nu(t_\nu^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha} \left( \frac{\nu + (t_\nu^{-1}(\alpha))^2}{\nu - 1} \right), \quad (17)$$

kde  $t_\nu$  je distribučnou funkciou a  $g_\nu$  je funkciou hustoty  $t$ -rozdelenia. Alternatívne reprezentácie spolu s dôkazom pochádzajú z [6, 7].

## 5 Metódy výpočtu VaR a CVaR

V tejto kapitole opíšeme základné metódy výpočtu a odhadu VaR a CVaR spolu s hlavnou ideou jednotlivých postupov, algoritmom výpočtu a ich slabými a silnými stránkami.

Pred samotným výpočtom je potrebné zvoliť mieru pravdepodobnosti  $\alpha$  a časový horizont  $\Delta$  [6]. Typické hodnoty pre  $\alpha$  sú  $\alpha = 0.95$  a  $\alpha = 0.99$ , pri kreditnom a operačnom riziku môže byť zvolená miera pravdepodobnosti vyššia, napríklad  $\alpha = 0.999$ . Pri trhovom riziku je obvyklý časový horizont  $\Delta = 1$  deň alebo  $\Delta = 10$  dní, pri kreditnom a operačnom riziku je zväčša  $\Delta = 1$  rok.

Rozhodujúcim krokom výpočtu VaR a CVaR je odhad rozdelenia zmien rizikových faktorov. Na základe techník, ktoré použijeme na tento odhad, rozdeľujeme metódy do dvoch základných kategórií [13]:

- parametrické metódy, ktoré vychádzajú z predpokladu na pravdepodobnostné rozdelenie zmien rizikových faktorov. Ak napríklad predpokladáme, že vektor zmien rizikových faktorov má viacrozmerne normálne alebo Studentovo  $t$ -rozdelenie, potom používame alternatívne reprezentácie VaR a CVaR opísané v predošlých kapitolách. Príkladom parametrickej metódy je variančno-kovariančná metóda.
- neparametrické metódy, tie sú založené na empirickom rozdelení zmien rizikových faktorov. Hlavnou výhodou je jednoduchosť implementácie. Príkladom neparametrickej metódy je historická simulácia.

Kombináciou neparametrických a parametrických metód vznikajú semiparametrické metódy. Teraz si bližšie popíšeme historickú simuláciu, variančno-kovariančnú metódu a Monte Carlo simulácie, ktoré použijeme na výpočet VaR a CVaR.

## 5.1 Historická simulácia

Neparametrickou metódou výpočtu VaR a CVaR je historická simulácia, ktorú uvedieme podľa [7]. Hlavná myšlienka historickej simulácie spočíva vo využití empirického rozdelenia zmien rizikových faktorov na odhad rozdelenia operátora strát  $l_{[t]}$ . Aplikovaním operátora strát  $l_{[t]}$  na  $n$  vektorov historických zmien rizikových faktorov dostaneme  $n$  hypotetických scenárov:

$$\tilde{L}_s = l_{[t]}(x_s) \quad s = t - n + 1, \dots, t,$$

ktoré vyjadrujú hypotetickú stratu portfólia v prípade, že zmena rizikových faktorov by bola rovnaká ako v deň  $s$ , kde  $s = t - n + 1, \dots, t$ . Tieto hypotetické straty použijeme na výpočet VaR a CVaR.

Je potrebné zvoliť počet pozorovaní použitých na zostavenie empirického rozdelenia [13]. Tento počet nazývame veľkosť okna a označujeme  $n$ . Čím je veľkosť okna väčšia, tým je odhad kvantilu presnejší. Z tohto pohľadu je ideálne zvoliť  $n$  veľké. Na druhej strane, ak použijeme  $n$  príliš veľké, používame staré pozorovania, ktoré nemusia dostatočne popisovať súčasné podmienky na trhu. Voľba príliš veľkého  $n$  má za následok pomalú reakciu na zmeny na trhu. Musíme rozhodnúť, ktoré dáta z minulosti sú ešte dosť aktuálne na určenie výšky rizika. Obdobie nesmie byť príliš dlhé, ale ani príliš krátke. Pri historickej simulácii vychádzame z predpokladu stacionarity zmien rizikových faktorov. Pri pohľade na empirické rozdelenie strát, v ktorom sa obvykle vyskytujú obdobia s vyššou aj s nižšou volatilitou, vidíme, že je potrebné daný predpoklad zvoľniť. Predpokladáme, že pri veľkosti okna  $n$  rozdelenie na nasledujúci deň je rovnaké ako rozdelenie príslušných vektorov zmien rizikových faktorov  $X_{t-n+1}, \dots, X_t$  za posledných  $n$  dní.

Teraz v niekoľkých krokoch opíšeme algoritmus výpočtu historickej simulácie pre VaR a CVaR [6]:

- Prvým krokom je výpočet zmien rizikových faktorov  $X_{t-n+1}, \dots, X_t$ , kde

$$X_{s+1,i} = Z_{s+1,i} - Z_{s,i}, \quad \text{kde } i = 1, \dots, d,$$

pričom  $d$  vyjadruje počet rizikových faktorov. Dostaneme  $n$  hypotetických  $d$ -rozmerných vektorov zmien rizikových faktorov, vychádzajúcich z historických dát.

- V ďalšom kroku skonštruujeme historicky simulované straty, tie predstavujú hypotetické scenáre:

$$\tilde{L}_s = l_{[t]}(X_s) \quad s = t - n + 1, \dots, t,$$

kde  $X_s$  je  $d$ -rozmerný vektor zmien rizikových faktorov. Teda pre stratu  $L$  máme  $n$  scenárov  $\tilde{L}_{t-n+1}, \dots, \tilde{L}_t$ , ktoré napovedajú, ako by mohla na základe empirického rozdelenia zmien rizikových faktorov vyzerat'.

- Vieme, že VaR predstavuje kvantil rozdelenia strát. Výpočtom  $\alpha$ -kvantilu  $q_\alpha$  rozdelenia historicky simulovaných strát dostaneme VaR:

$$\text{VaR}(\alpha) = q_\alpha(\tilde{L}),$$

kde  $\alpha$  je zvolená miera pravdepodobnosti. Používame pritom empirický kvantilový odhad.

- Každá simulovaná strata má rovnakú pravdepodobnosť výskytu, a teda rovnakú váhu. Použijeme definíciu CVaR 14 zo 4. kapitoly aplikovanú na historicky simulované straty:

$$\text{CVaR}_\alpha = E(\tilde{L} | \tilde{L} \geq \text{VaR}_\alpha), \quad (18)$$

teda spriemerovaním historicky simulovaných strát, keď VaR je prekročené, vypočítame CVaR.

V niekoľkých bodoch zhrnieme klady a zápory historickej simulácie [6, 13]:

- Získať dostatočné množstvo relevantných dát o zmenách rizikových faktorov môže byť problémom.
- Ak nastane po dlhom období s nízkou volatilitou obdobie s vysokou volatilitou, resp. turbulentné obdobie, historická simulácia nereaguje dostatočne rýchlo, čo vedie k podhodnoteniu rizík. V opačnom prípade, kedy po turbulentnom období nastane kľudné obdobie, naopak riziko nadhodnocuje.
- Historická simulácia je implementačne pomerne jednoduchou metódou, a preto bola v praxi často používanou. Ako dôsledok spomenutých nedostatkov ju v súčasnosti postupne nahrádzajú presnejšie metódy výpočtu.

- Výhodou je, že nepotrebujeme predpoklad na triedu štatistických rozdelení rizikových faktorov.

Použitím teórie extrémnych hodnôt na odhad chvostu rozdelenia strát by sa dala historická simulácia vylepšiť. V prípade záujmu o ďalšie informácie odporúčame čitateľa na [7], kde nájde opis štandardnej teórie extrémnych hodnôt založenej na zovšeobecnenom Pareto rozdelení.

Ďalším vylepšením historickej simulácie je filtrovaná historická simulácia. Preškáľovaním historických pozorovaní na terajšie podmienky sa zabezpečí rýchlejšia reakcia na zmeny na trhu. Táto metóda je spojená so snahou modelovať časový vývoj volatility použitím GARCH modelov. Jedná sa o semiparametrickú podmienenú metódu. Pre viac informácií odporúčame čitateľa na [2], kde je metóda bližšie popísaná.

V práci sa teórii extrémnych hodnôt ani filtrovanej historickej simulácii venovať nebudeme.

## 5.2 Variančno-kovariančná metóda

Variančno-kovariančná metóda je príkladom parametrickej metódy, teda vychádza z predpokladu na pravdepodobnostné rozdelenie vektora zmien rizikových faktorov. Najprv budeme predpokladať normálne rozdelenie, potom Studentovo  $t$ -rozdelenie.

Uvažujme normálne rozdelenie. Pri variančno-kovariančnej metóde vychádzame z nasledujúcich predpokladov [7]:

- vektor zmien rizikových faktorov  $X_{t+1}$  má viacrozmerné normálne rozdelenie:

$$X_{t+1} \sim N_d(\mu, \Sigma),$$

- linearizované straty  $L_{t+1}^\Delta$  sú dostatočne presnou aproximáciou.

Našou úlohou je odhadnúť rozdelenie linearizovaných strát:

$$L_{t+1}^\Delta = l_{[t]}^\Delta(X_{t+1}).$$

V podkapitole 2.3 sme zadefinovali linearizovaný operátor strát:

$$l_{[t]}^\Delta(x) = -(f_t(t, z_t) + \sum_{j=1}^d f_{z_j}(t, z_t)x_j),$$



čo vo vektorovom zápise predstavuje:

$$l_{[t]}^{\Delta}(x) = -(f_t + f_z^{\top} x).$$

Ak predpokladáme normálne rozdelenie zmien rizikových faktorov, potom aj  $f_z^{\top} X_{t+1}$  má normálne rozdelenie:

$$X_{t+1} \sim N_d(\mu, \Sigma) \quad \Rightarrow \quad f_z^{\top} X_{t+1} \sim N_d(f_z^{\top} \mu, f_z^{\top} \Sigma f_z).$$

Linearizované straty majú tiež normálne rozdelenie:

$$L^{\Delta} \sim N_d(-f_t - f_z^{\top} \mu, f_z^{\top} \Sigma f_z).$$

V predošlej kapitole sme zaviedli alternatívnu reprezentáciu VaR a CVaR vychádzajúcu z predpokladu normality rozdelenia strát:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{\alpha} &= \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha), \\ \text{CVaR}_{\alpha} &= \mu + \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

Ak použijeme parametre normálneho rozdelenia linearizovanej straty, odhady VaR a CVaR majú tvar:

$$\begin{aligned} \widehat{\text{VaR}}_{\alpha} &= -f_t - f_z^{\top} \widehat{\mu} + \sqrt{f_z^{\top} \widehat{\Sigma} f_z} \Phi^{-1}(\alpha), \\ \widehat{\text{CVaR}}_{\alpha} &= -f_t - f_z^{\top} \widehat{\mu} + \sqrt{f_z^{\top} \widehat{\Sigma} f_z} \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha}, \end{aligned}$$

kde  $\phi$  je hustota štandardného normálneho rozdelenia a  $\widehat{\mu}$  a  $\widehat{\Sigma}$  sú odhady vektora  $\mu$  a kovariančnej matice  $\Sigma$ . Opísali sme predpoklady, hlavnú myšlienku a náčrt postupu variančno-kovariančnej metódy vychádzajúc [7]. Už sme načrtli algoritmus odhadu VaR a CVaR, teraz ho zhrnieme v krokoch [6]:

- Z vektorov zmien rizikových faktorov  $x_{t-n+1}, \dots, x_t$  odhadneme vektor  $\mu$  a kovariančnú maticu  $\Sigma$ .

$$\begin{aligned} \widehat{\mu} &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \\ \widehat{\Sigma} &:= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \widehat{\mu})^2, \end{aligned}$$

kde  $n$  je veľkosť okna, ktorú zvolíme a uvažujeme situáciu, že zmeny rizikových faktorov a straty majú nepodmienené rozdelenie.

- Vypočítame  $f_t$  a  $f_z$ , kde  $f_t$  a  $f_{z_j}$  sú príslušné parciálne derivácie funkcie  $f$  podľa premenných  $t$  a  $z_j$  a  $j \in \{1, \dots, d\}$ , teda  $f_t(t, z_t) = \partial f / \partial t$  a  $f_{z_j}(t, z_t) = \partial f / \partial z_j$ . Už vieme, že výraz  $f_t$  používame len v prípade explicitnej časovej závislosti.
- Vyjadříme parametre rozdelenia linearizovaných strát:

$$L^\Delta \sim N_d(-f_t - f_z^\top \hat{\mu}, f_z^\top \hat{\Sigma} f_z).$$

- Vypočítame odhady VaR z odhadu rozdelenia linearizovaných strát:

$$\widehat{\text{VaR}}_\alpha = -f_t - f_z^\top \hat{\mu} + \sqrt{f_z^\top \hat{\Sigma} f_z} \Phi^{-1}(\alpha).$$

- Podobne vypočítame odhad CVaR z odhadu rozdelenia linearizovaných strát:

$$\widehat{\text{CVaR}}_\alpha = -f_t - f_z^\top \hat{\mu} + \sqrt{f_z^\top \hat{\Sigma} f_z} \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha}.$$

Kritika a nevýhody tohto postupu spočívajú podľa [6, 13] v:

- predpoklade normality. Pri zadaní alternatívnej reprezentácie VaR a CVaR vychádzajúcej z predpokladu normality sme už spomínali, že v tomto prípade môže dôjsť k podhodnoteniu rizika. Na základe empirických pozorovaní predpokladáme, že samotné rozdelenie strát má ťažšie chvosty ako normálne rozdelenie, teda že extrémne straty sa vyskytujú častejšie ako predpovedá daný model. Riešením je použitie  $t$ -rozdelenia namiesto normálneho.
- s linearizáciou je spojená aproximačná chyba, ktorú treba pri interpretácii výsledkov brať do úvahy. Kvalita aproximácie je najlepšia, ak odhadujeme VaR a CVaR v krátkom časovom horizonte, napríklad v prípade  $\Delta = 1$  rok by linearizácia nebola dobrou aproximáciou.

Pri tejto metóde nevykonávame simulácie ako napríklad pri historickej simulácii, čo je z technického hľadiska pozitívum.

Variančno-kovariančnú metódu vylepšíme použitím predpokladu, že zmeny rizikových faktorov majú viacrozmerné Studentovo  $t$ -rozdelenie [7]:

$$X_{t+1} \sim t_d(\nu, \mu, \sigma_L^2).$$

Potom aj linearizované straty majú Studentovo  $t$ -rozdelenie:

$$L_{t+1}^{\Delta} \sim t_d(\nu, -f_t - f_z^{\top} \widehat{\mu}, f_z^{\top} \widehat{\Sigma} f_z).$$

Opäť použijeme alternatívne reprezentácie z predošlých kapitol:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{\alpha} &= \mu + \sigma \sqrt{\frac{\nu - 2}{\nu}} t_{\nu}^{-1}(\alpha), \\ \text{CVaR}_{\alpha}(L) &= \mu + \sigma \sqrt{\frac{\nu - 2}{\nu}} \frac{g_{\nu}(t_{\nu}^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha} \left( \frac{\nu + (t_{\nu}^{-1}(\alpha))^2}{\nu - 1} \right). \end{aligned}$$

Teraz opíšeme algoritmus výpočtu:

- Prvé dva kroky postupu, odhad vektora  $\mu$ , kovariančnej matice  $\Sigma$  a výpočet  $f_t$  a  $f_z$ , ostávajú rovnaké.
- V ďalšom postupe najprv vyjadríme parametre rozdelenia linearizovaných strát:

$$L^{\Delta} \sim t_d(\nu, -f_t - f_z^{\top} \mu, f_z^{\top} \Sigma f_z).$$

- Následne vypočítame odhad VaR z odhadu rozdelenia linearizovaných strát:

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha} = -f_t - f_z^{\top} \widehat{\mu} + \sqrt{f_z^{\top} \widehat{\Sigma} f_z} \sqrt{\frac{\nu - 2}{\nu}} t_{\nu}^{-1}(\alpha).$$

- Vypočítame tiež odhad CVaR z už spomínaného rozdelenia linearizovaných strát:

$$\widehat{\text{CVaR}}_{\alpha}(L) = -f_t - f_z^{\top} \widehat{\mu} + \sqrt{f_z^{\top} \widehat{\Sigma} f_z} \sqrt{\frac{\nu - 2}{\nu}} \frac{g_{\nu}(t_{\nu}^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha} \left( \frac{\nu + (t_{\nu}^{-1}(\alpha))^2}{\nu - 1} \right).$$

Ak použijeme variančno-kovariančnú metódu vychádzajúcu z predpokladu Studentovho  $t$ -rozdelenia, aspoň čiastočne riešime otázku podhodnotenia chvostu rozdelenia strát, keďže  $t$ -rozdelenie má ťažšie chvosty ako normálne rozdelenie. Stále však treba brať do úvahy aproximačnú chybu linearizácie.

Okrem predpokladu Studentovho  $t$ -rozdelenia použitého na vylepšenie variančno-kovariančnej môžeme vychádzať napríklad z predpokladu viacrozmerneho zovšeobecného hyperbolického rozdelenia bližšie opísaného v [7].

Opísali sme prístup založený na nepodmieneanom rozdelení strát. Pri podmienenom rozdelení by sme na odhad parametrov  $\mu$  a  $\Sigma$  použili GARCH modely a EWMA procesy popísané napríklad v [7, 13].

### 5.3 Monte Carlo simulácie

Pri Monte Carlo simuláciách odhadujeme rozdelenie strát, pričom vychádzame z predpokladu na rozdelenie zmien rizikových faktorov. Hlavnou podstatou je, že simulujeme nové dáta rizikových faktorov [6].

Predpokladajme, že vektor zmien rizikových faktorov má normálne rozdelenie.

- Rovnako ako pri variančno-kovariančnej metóde z dát  $X_{t-n+1}, \dots, X_t$  odhadneme vektor  $\mu$  a kovariančnú maticu  $\Sigma$ .

$$\hat{\mu} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$\hat{\Sigma} := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2.$$

- Simulujeme  $m$  nezávislých realizácií náhodného vektora z viacrozmerného normálneho rozdelenia:

$$\tilde{x}_{t+1}^{(1)}, \dots, \tilde{x}_{t+1}^{(m)}.$$

Pri simulácii postupujeme nasledovne [13]:

- Vypočítame Choleského rozklad kovariančnej matice  $\Sigma$ :

$$\Sigma = AA^T,$$

kde matica  $A$  je dolnou trojuholníkovou maticou.

- Vygenerujeme  $d$ -rozmerný náhodný vektor  $Z$  z normalizovaného normálneho rozdelenia, teda  $Z \sim N_d(0, I)$ .
- Skonstruujeme vektor  $\tilde{X}$ :

$$\tilde{X} = \mu + AZ,$$

potom  $\tilde{X} \sim N(\mu, \Sigma)$ .

- Skonstruujeme  $m$  Monte Carlo simulovaných strát [6]:

$$\tilde{L}_{t+1}^{(i)} = l_{[t]} \tilde{X}_{t+1}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, m,$$

kde index  $i$  označuje jednotlivé simulované straty.

- Pri ďalšom výpočte postupujeme podobne ako pri historickej simulácii. VaR predstavuje kvantil rozdelenia strát. Vypočítame kvantil rozdelenia simulovaných strát  $\tilde{L}_{t+1}^{(i)}$  a dostaneme VaR:

$$\text{VaR}(\alpha) = q_\alpha(\tilde{L}_{t+1}^{(i)}).$$

- Spriemerovaním strát, keď VaR je prekročené vypočítame CVaR:

$$\text{CVaR}_\alpha = E(\tilde{L}_{t+1}^{(i)} | \tilde{L}_{t+1}^{(i)} \geq \text{VaR}_\alpha),$$

pričom každá simulácia má rovnakú váhu.

V postupe sme vychádzali z predpokladu normálneho rozdelenia  $\tilde{X}$ , teda  $\tilde{X} \sim N(\mu, \Sigma)$ . Predpokladajme, že  $\tilde{X}$  má viacrozmerné Studentovo  $t$ -rozdelenie. Okrem druhého bodu Monte Carlo simulácie by ostal postup rovnaký. Popíšeme si simuláciu  $m$  nezávislých realizácií náhodného vektora z viacrozmerného Studentovho  $t$ -rozdelenia s  $\nu$  stupňami voľnosti [6, 7]:

- Vypočítame Choleského rozklad kovariančnej matice  $\Sigma$ :

$$\Sigma = AA^\top,$$

kde matica  $A$  je dolnou trojuholníkovou maticou.

- Vygenerujeme  $d$ -rozmerný náhodný vektor  $Z$  z normalizovaného normálneho rozdelenia, teda  $Z \sim N_d(0, I)$ .
- Vygenerujeme náhodné číslo  $V$  z  $\chi_\nu^2$  rozdelenia, kde  $\nu$  vyjadruje počet stupňov voľnosti.
- Zdefinujeme  $W$ :

$$W = \frac{\nu}{V}.$$

- Skonstruujeme vektor  $\tilde{X}$ :

$$\tilde{X} = \mu + \sqrt{W} \sqrt{\frac{\nu - 2}{\nu}} AZ,$$

potom  $\tilde{X}$  má viacrozmerné Studentovo  $t$ -rozdelenie.

Teraz si v bodoch zhrnieme výhody a nevýhody Monte Carlo simulácií [7, 13]:

- Výhodou v porovnaní s variančno-kovariančnou metódou je, že nepotrebujeme straty linearizovať.
- Pri historickej simulácii sme museli brať do úvahy optimálnu veľkosť okna, aby sme nepoužívali príliš staré dáta. Teraz nie sme obmedzení pri počte simulácií,  $m$  môže byť oveľa väčšie ako  $n$ . Dostaneme tak presnejší výpočet empirických VaR a CVaR ako v prípade historickej simulácie.

Treba však brať do úvahy, že s rastúcim počtom simulácií rastie aj časová náročnosť výpočtu, keďže v praxi môže byť vektor zmien rizikových faktorov až 1000-rozmerný.

- Opäť sa stretávame s pomalou reakciou v prípade turbulentných období.
- Monte Carlo simulácie založené na predpoklade normality môžu viesť k podhodnoteniu rizík.

Táto metóda môže byť podmienená aj nepodmienená v závislosti od predpokladu rozdelenia zmien rizikových faktorov a strát. Dynamická verzia Monte Carlo simulácií, kedy predpokladáme, že vektor zmien rizikových faktorov má podmienené rozdelenie a používame GARCH modely, vychádzajúca z predpokladu Studentovho  $t$ -rozdelenia  $\tilde{X}$ , sa podľa [7] zdá byť vhodnou metódou pre odhad trhového rizika.

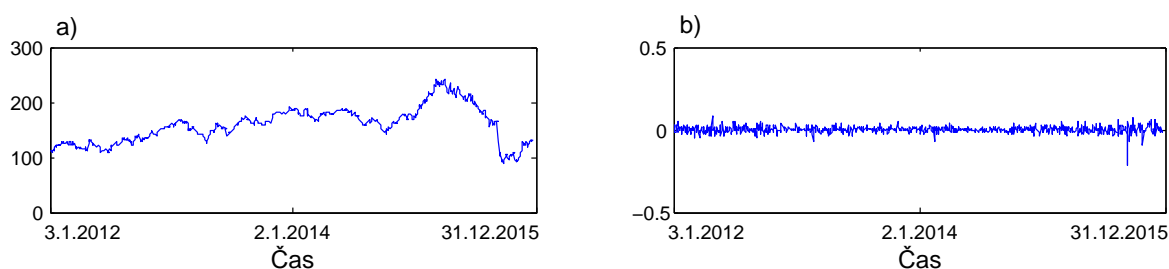
## 6 Aplikácia jednotlivých metód na reálne dáta a ich porovnanie

V tejto kapitole jednotlivé metódy výpočtu aplikujeme na reálne dáta. Za tým účelom sme si vytvorili ilustračné portfólio, ktoré bude pozostávať z 3 akcií, pričom jedna je v inej mene, aby dané portfólio bolo vystavené okrem akciového rizika aj devízovému. Výpočty podporujeme graficky reprezentovanými výsledkami.

### 6.1 Ilustračné portfólio

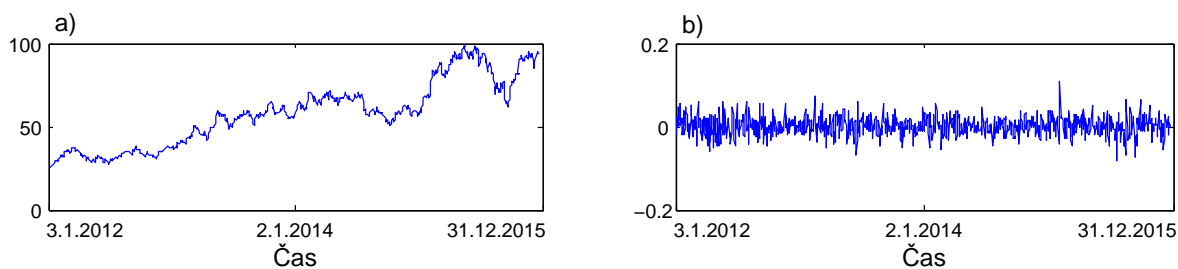
Pri aplikácii jednotlivých metód odhadu VaR a CVaR na ilustračné portfólio vychádzame z predpokladu, že sa jeho zloženie počas uvažovaného obdobia nezmenilo, teda že sme ani nekúpili ani nepredali žiadnu akciu. Používame upravené zatváracie ceny akcií (adjusted closing prices), ktoré v sebe zahŕňajú možné splity alebo dividendy [5]. Ilustračné portfólio je vystavené štyrom rizikovým faktorom. Pripomíname, že rizikovými faktormi sú logaritmické ceny akcií, logaritmické výmenné kurzy a úroková miera. V tomto prípade sú rizikové faktory logaritmické ceny akcií Volkswagen AG, Renault SA a Ford Motor Co. a logaritmický výmenný kurz:

- Volkswagen AG (VOW3.DE)



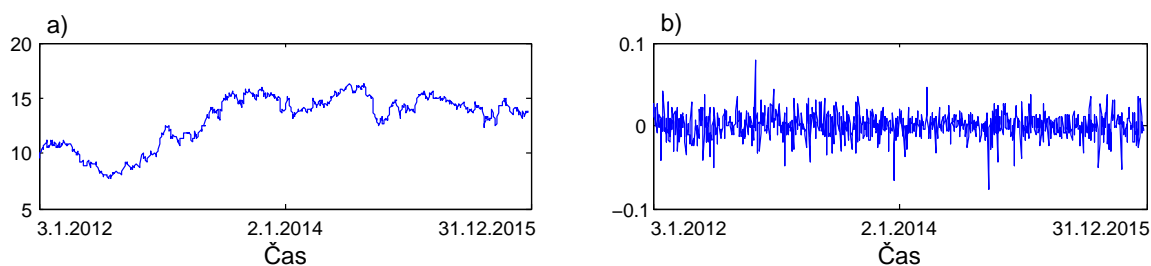
**Obr. 4:** Volkswagen AG: a) historické ceny, b) denné relatívne zmeny. Zdroj dát: [21].

- Renault SA (RNO.PA)

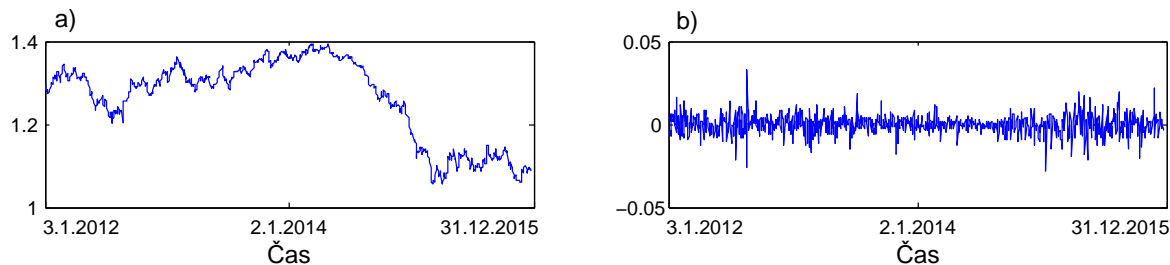


**Obr. 5:** Renault SA: a) historické ceny, b) denné relatívne zmeny. Zdroj dát: [20].

- Ford Motor Co. (F), ktorá je denominovaná v dolároch



**Obr. 6:** Ford Motor Co.: a) historické ceny, b) denné relatívne zmeny. Zdroj dát: [19].



**Obr. 7:** Výmenný kurz: a) historické hodnoty, b) denné relatívne zmeny. Zdroj dát: [22].

Na obrázkoch 4 - 7 vidíme historické ceny jednotlivých akcií spolu s ich dennými relatívnymi zmenami a historické hodnoty a denné relatívne zmeny výmenného kurzu dolár za 1 euro za obdobie 4 rokov od 3.1.2012 do 31.12.2015. Hodnotu portfólia  $V(t)$  v čase  $t$  vyjadríme nasledovne:

$$V_t = S_{t,1} + S_{t,2} + S_{t,3}/FX_t, \quad (19)$$

kde  $FX_t$  je výmenný kurz dolár za euro a  $S_{t,i}$ ,  $i = 1, 2, 3$  označujú ceny akcií ilustračného portfólia v čase  $t$ . Rizikovými faktormi sú logaritmicke ceny akcií a logaritmicke



výmenný kurz. Náhodný vektor rizikových faktorov  $Z_t$  je 4-rozmerný a má tvar:

$$Z_t = [\ln(S_{t,1}), \ln(S_{t,2}), \ln(S_{t,3}), \ln(FX_t)]. \quad (20)$$

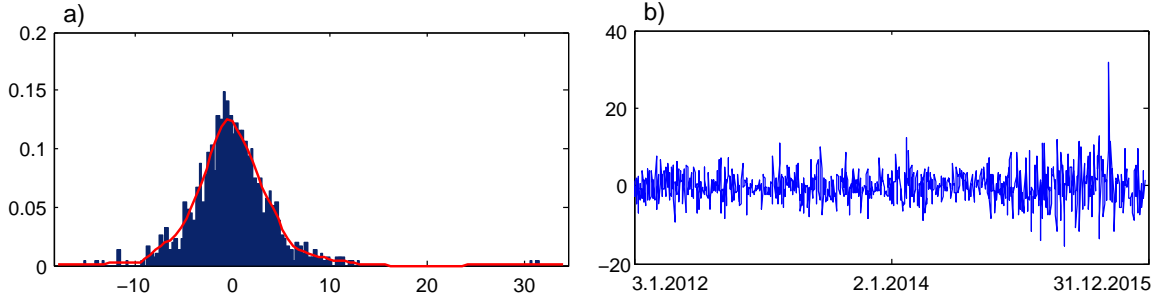
Vektor zmien rizikových faktorov zadaný ako  $X_t = Z_t - Z_{t-1}$  má potom tvar:

$$X_t = \left[ \ln \frac{S_{t,1}}{S_{t-1,1}}, \ln \frac{S_{t,2}}{S_{t-1,2}}, \ln \frac{S_{t,3}}{S_{t-1,3}}, \ln \frac{FX_t}{FX_{t-1}} \right]. \quad (21)$$

Rozdelenie zmien rizikových faktorov je určujúce pre rozdelenie strát. Teraz zmapujeme riziko:

$$V_t = f(t, Z_t) = \exp(Z_{t,1}) + \exp(Z_{t,2}) + \exp(Z_{t,3} - Z_{t,4}), \quad (22)$$

čo znamená, že hodnotu portfólia vyjadríme ako funkciu času a rizikových faktorov. Pri mapovaní rizika sme použili vzťahy 19 a 20. Pripomíname, že stratu portfólia sme zdefinovali ako  $L_{t+1} = -(V_{t+1} - V_t)$ .



**Obr. 8:** a) Hustota rozdelenia strát b) Strata ilustračného portfólia.

Na obrázku 8 vidíme stratu portfólia spolu s pravdepodobnostnou hustotou rozdelenia strát. Použitím mapovania rizika dostaneme nasledovný predpis pre stratu:

$$\begin{aligned} L_{t+1} &= -(f(t+1, Z_t + X_{t+1}) - f(t, Z_t)) \\ &= -(\exp(Z_{t,1} + X_{t+1,1}) + \exp(Z_{t,2} + X_{t+1,2}) + \exp(Z_{t,3} - Z_{t,4} + X_{t+1,3} - X_{t+1,4}) \\ &\quad - (\exp(Z_{t,1}) + \exp(Z_{t,2}) + \exp(Z_{t,3} - Z_{t,4}))) \\ &= [S_{t,1}, S_{t,2}, S_{t,3}/FX_t] \begin{bmatrix} \exp(X_{t+1,1}) - 1 \\ \exp(X_{t+1,2}) - 1 \\ \exp(X_{t+1,3} - X_{t+1,4}) - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ten použijeme pri historickej simulácii a aj pri Monte Carlo simuláciách. Pri variančno-kovariančnej metóde používame linearizované straty:

$$L_{t+1}^{\Delta} = -(f_t(t, z_t) + \sum_{j=1}^d f_{z_j}(t, z_t) X_{t+1,j}).$$

Vzhľadom k tomu, že nie je prítomná explicitná časová závislosť,  $f_t(t, z_t)$  neuvažujeme.

Vyjadríme jednotlivé  $f_{z_j}(t, z_t)$  pre  $j = 1, \dots, 4$ :

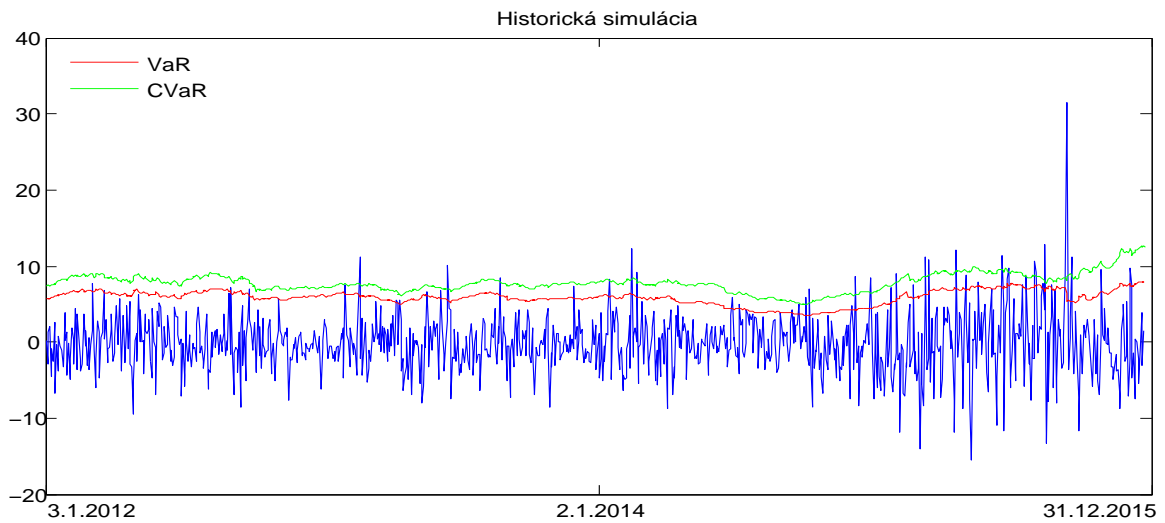
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_1} &= \exp(Z_{t,1}), & \frac{\partial f}{\partial z_2} &= \exp(Z_{t,2}), \\ \frac{\partial f}{\partial z_3} &= \exp(Z_{t,3} - Z_{t,4}), & \frac{\partial f}{\partial z_4} &= -\exp(Z_{t,3} - Z_{t,4}). \end{aligned}$$

Linearizovaná strata má potom tvar:

$$L_{t+1}^{\Delta} = - \left[ S_{t,1}, S_{t,2}, \frac{S_{t,3}}{F_t}, -\frac{S_{t,3}}{F_t} \right] \begin{bmatrix} X_{t+1,1} \\ X_{t+1,2} \\ X_{t+1,3} \\ X_{t+1,4} \end{bmatrix}.$$

## 6.2 Historická simulácia

Pri historickej simulácii sme zvolili veľkosť okna 250 dní. Obvykle sa volí veľkosť okna 250, 500, 1000 dní v závislosti od dĺžky celého časového obdobia. V našom prípade má celé časové obdobie 4 roky od 3.1.2012 do 31.12.2015 a na historickú simuláciu používame dáta z časového obdobia 3.1.2011 až 31.12.2015.



**Obr. 9:** VaR a CVaR odhadnuté pomocou historickej simulácie.

Na obrázku 9 vidíme historickú simuláciu VaR a CVaR. Rok 2014 môžeme označiť za obdobie s nižšou volatilitou v porovnaní s rokom 2015. V grafe pri pohľade na spomínané obdobie vidíme pomalšiu reakciu na turbulentné obdobie v roku 2015. To môže viesť k podhodnoteniu rizík.

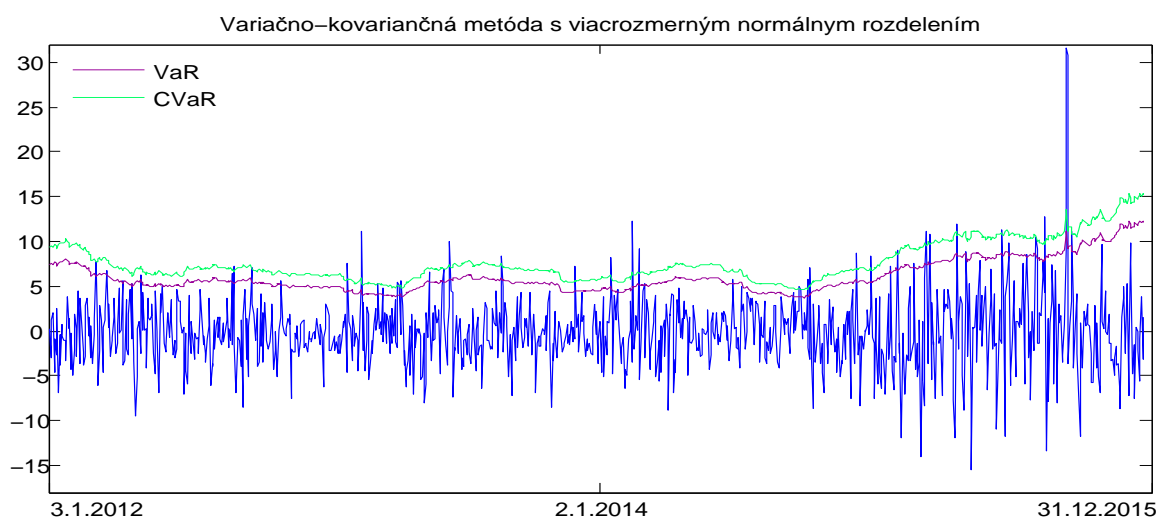
Historickej simulácii sme sa venovali v podkapitole 5.1. Jedným zo spomínaných záporov tejto metódy je problém získať dostatočné množstvo relevantných dát. V našom prípade sme používali pomerne krátke časové obdobie a so získaním relevantných údajov sme nemali problém.

Hlavnou výhodou je, že nevychádzame z predpokladov na rozdelenie zmien rizikových faktorov a tiež jednoduchosť výpočtu v porovnaní s ostatnými metódami, čo môžeme potvrdiť.

### **6.3 Variančno-kovariančná metóda**

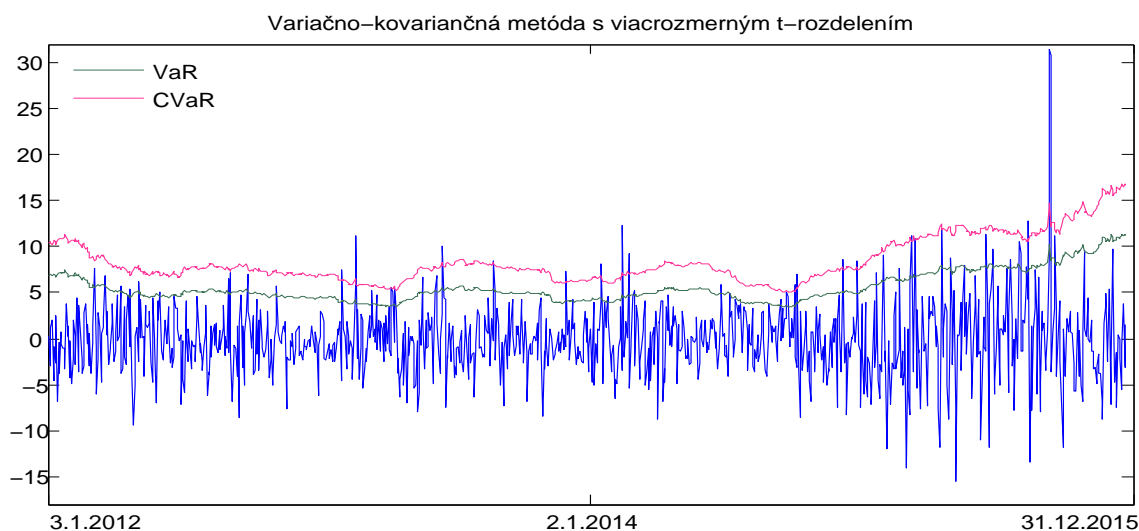
Pri variančno-kovariančnej metóde sme vždy z posledných 100 dát odhadli parametre rozdelení. Pri historickej simulácii sme zvolili 250-dňové okno. V podkapitole 5.1 sme sa vyjadrili k výberu dĺžky okna v súvislosti s presnosťou odhadu kvantilu a aktuálnosťou dát pri historickej simulácii. V prípade variančno-kovariančnej metódy sme sa na základe pozorovaní rozhodli použiť 100 dát namiesto 250. Ak použijeme menšie okno, pozorujeme lepšie prispôbenie sa.

Najprv sa budeme venovať variančno-kovariančnej metóde vychádzajúcej z predpokladu, že vektor zmien rizikových faktorov má normálne rozdelenie, ktorú vidíme na obrázku 10.



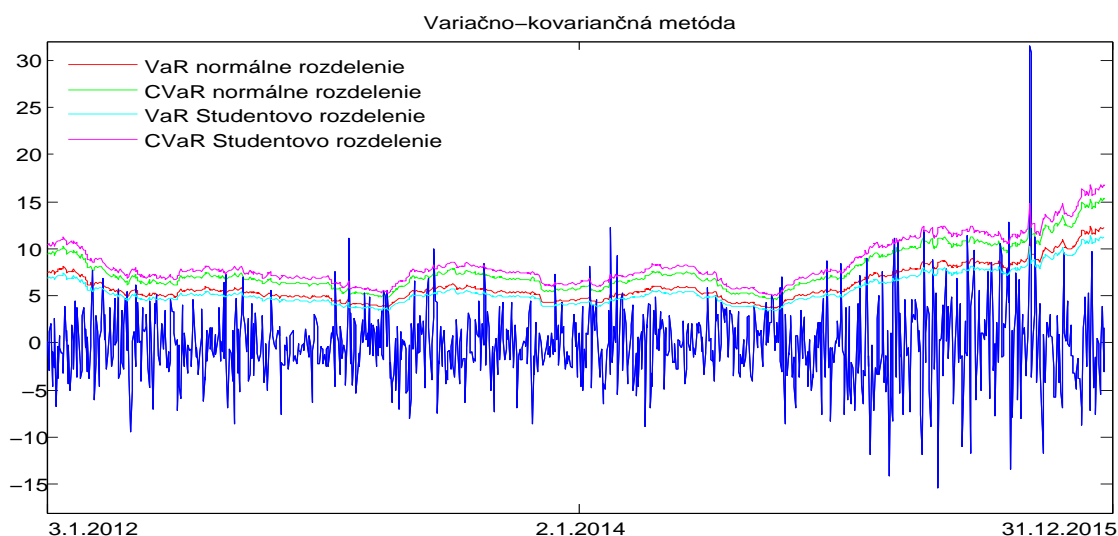
**Obr. 10:** VaR a CVaR odhadnuté pomocou variančno-kovariančnej metódy za predpokladu normálneho rozdelenia.

V porovnaní s historickou simuláciou v tomto prípade pozorujeme rýchlejšiu reakciu na turbulentné obdobie. V podkapitole 5.2 sme spomínali, že na základe empirických pozorovaní sa dá predpokladať, že rozdelenie strát ma ťažšie chvosty ako normálne rozdelenie. Táto skutočnosť môže viesť k podhodnoteniu rizika. Z toho dôvodu uvádzame variančno-kovariančnú metódu vychádzajúcu z predpokladu, že vektor zmien rizikových faktorov má Studentovo rozdelenie s  $\nu$  stupňami voľnosti. Vo finančníctve sa používa 3, 4 a 5 stupňov voľnosti [6]. My sme použili 4 stupne voľnosti, výsledok vidíme na obrázku 11. V prílohe 1 sa nachádza graf obsahujúci túto metódu s 3, 4 a 5 stupňami voľnosti.



**Obr. 11:** VaR a CVaR odhadnuté pomocou variančno-kovariančnej metódy za predpokladu  $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti.

Na obrázku 12 vidíme, že táto metóda vychádzajúca z predpokladu Studentovho rozdelenia je v prípade VaR prísnejšia ako keď vychádzame z predpokladu normality.

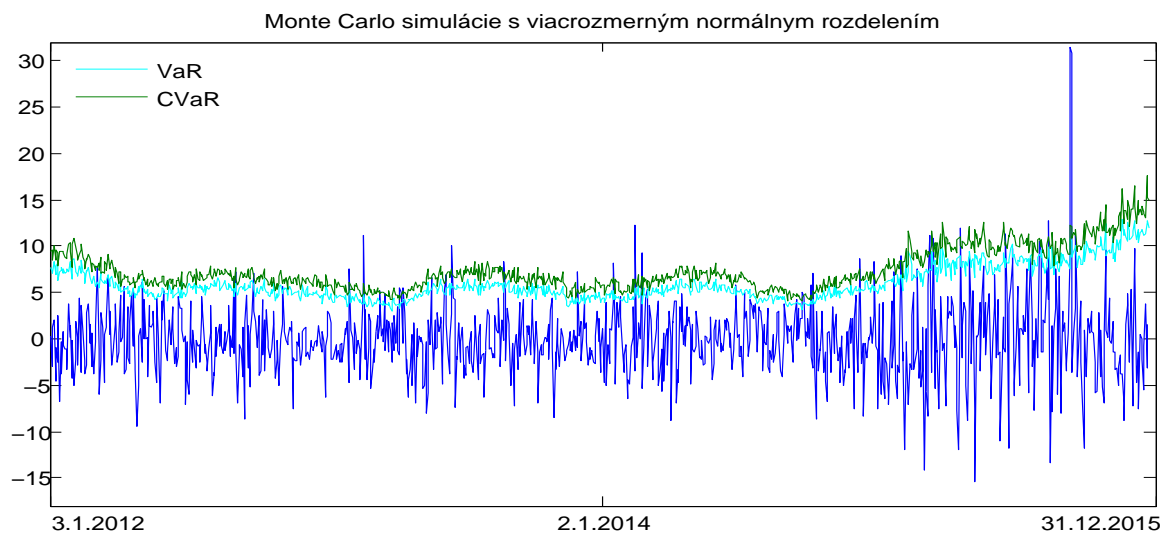


**Obr. 12:** VaR a CVaR odhadnuté pomocou variančno-kovariančnej metódy za predpokladu normálneho a  $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti.

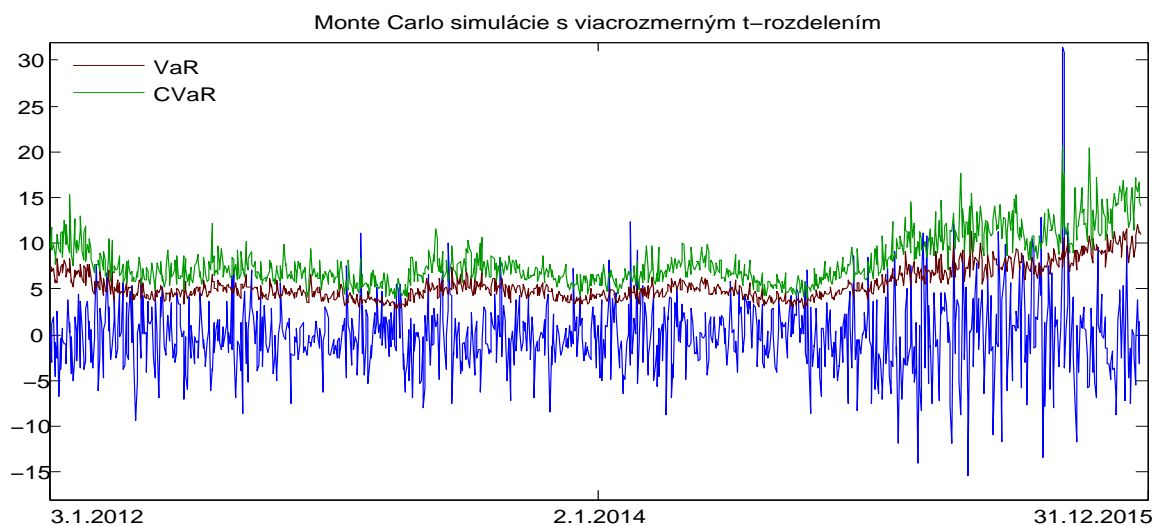
Pri danej metóde používame linearizované straty, s čím je spojená aproximačná chyba. Treba tiež brať do úvahy chybu spojenú s predpokladmi na rozdelenie zmien rizikových faktorov. Ak predpoklady nie sú splnené, jedná sa o riziko modelu. To je v určitej miere prítomné vždy.

## 6.4 Monte Carlo simulácie

Pri Monte Carlo simuláciách sme vždy z posledných 100 dní odhadli parametre rozdelení a potom simulovali 250 vektorov. Na obrázkoch 13 a 14 vidíme odhad VaR a CVaR pomocou Monte Carlo Simulácií za predpokladu normálneho a Studentovho rozdelenia.



**Obr. 13:** VaR a CVaR odhadnuté pomocou Monte Carlo simulácií za predpokladu normálneho rozdelenia.



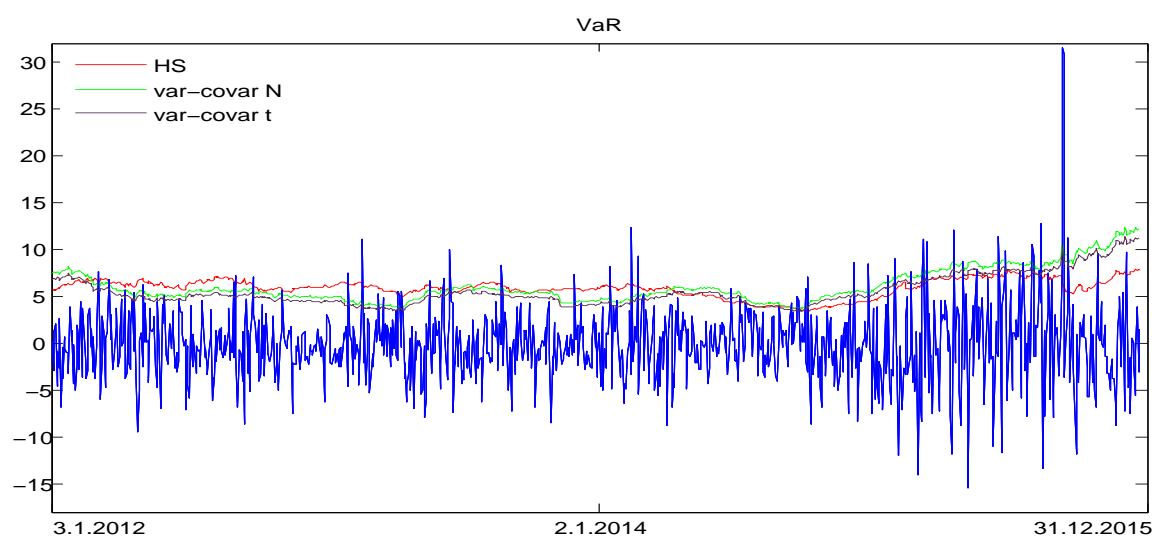
**Obr. 14:** VaR a CVaR odhadnuté pomocou Monte Carlo simulácií za predpokladu  $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti.

Odhad VaR a CVaR v oboch prípadoch pomerne rýchlo reagujú na zmeny na trhu. Opäť pozorujeme, že odhad VaR pomocou Monte Carlo simulácií za predpo-

kladu Studentovho rozdelenia sa zdá prísnejší ako v prípade predpokladu normality, pretože v prípade predpokladu Studentovho rozdelenia dochádza k menšiemu podhodnoteniu extrémnych strát ako v prípade predpokladu normálneho rozdelenia variančno-kovariančnej metódy alebo Monte-Carlo simulácií. V Prílohe 1 nájde čitateľ aj Monte Carlo simulácie vychádzajúce z predpokladu Studentovho rozdelenia s 3 a 5 stupňami voľnosti.

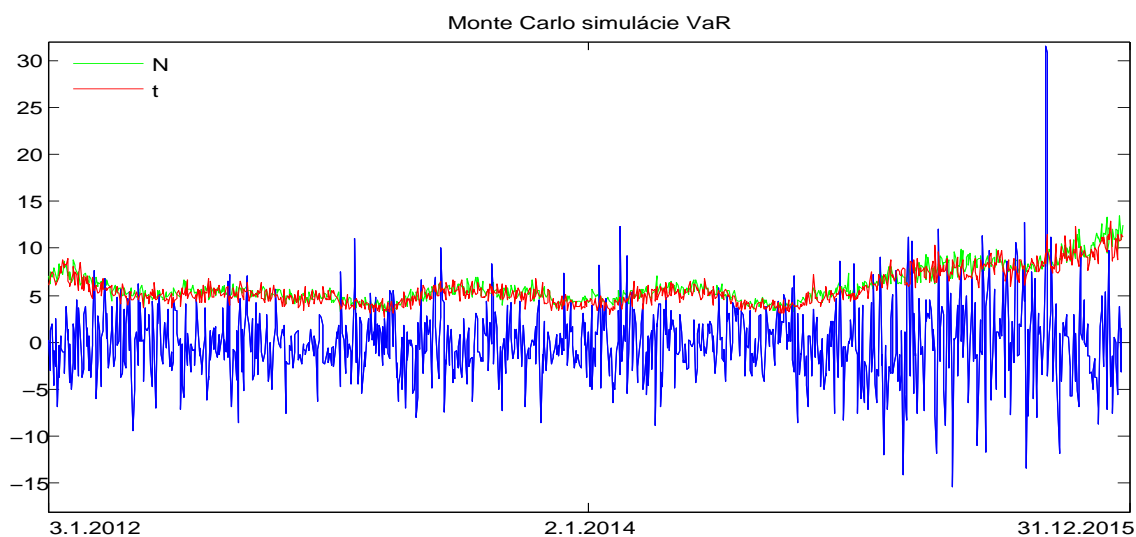
## 6.5 Všetky metódy

Teraz jednotlivé metódy porovnáme.

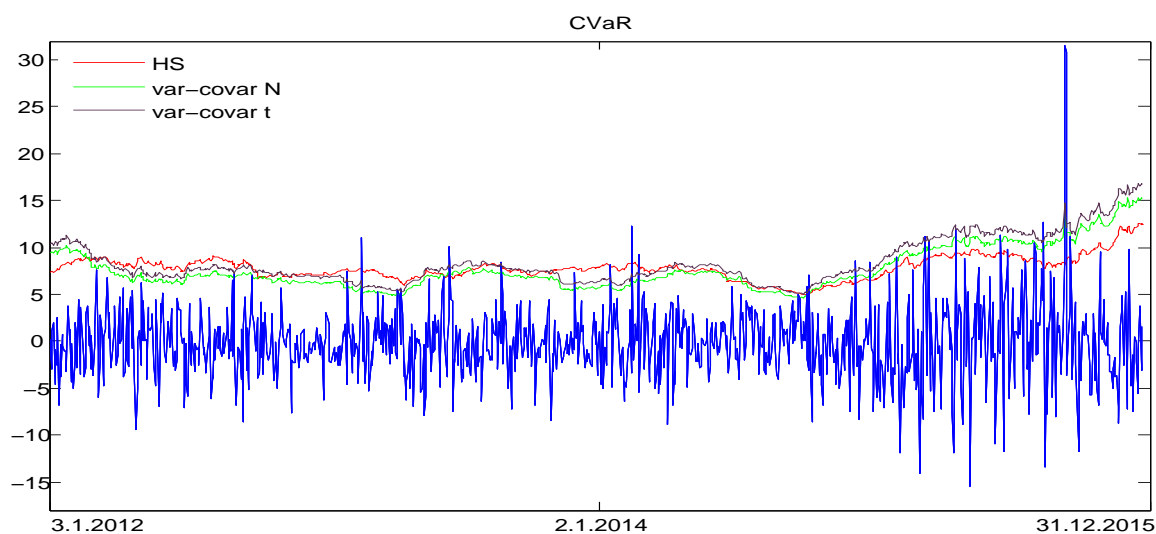


**Obr. 15:** Odhad VaR pomocou historickej simulácie a variančno-kovariančnej metódy za predpokladu normálneho a  $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti.

Vidíme, že historická simulácia pomalšie reaguje na zmeny na trhu v porovnaní s variančno-kovariančnou metódou. Na obrázkoch 16 a 18 vidíme odhady VaR a CVaR pomocou Monte Carlo simulácií za predpokladu normálneho a  $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti. Pre lepšiu vizualizáciu a prehľadnosť obrázkov uvádzame odhady pomocou ostatných metód a pomocou Monte Carlo simulácií zvlášť. V prípade záujmu nájde čitateľ odhady pomocou všetkých metód v jednom grafe v Prílohe 1.



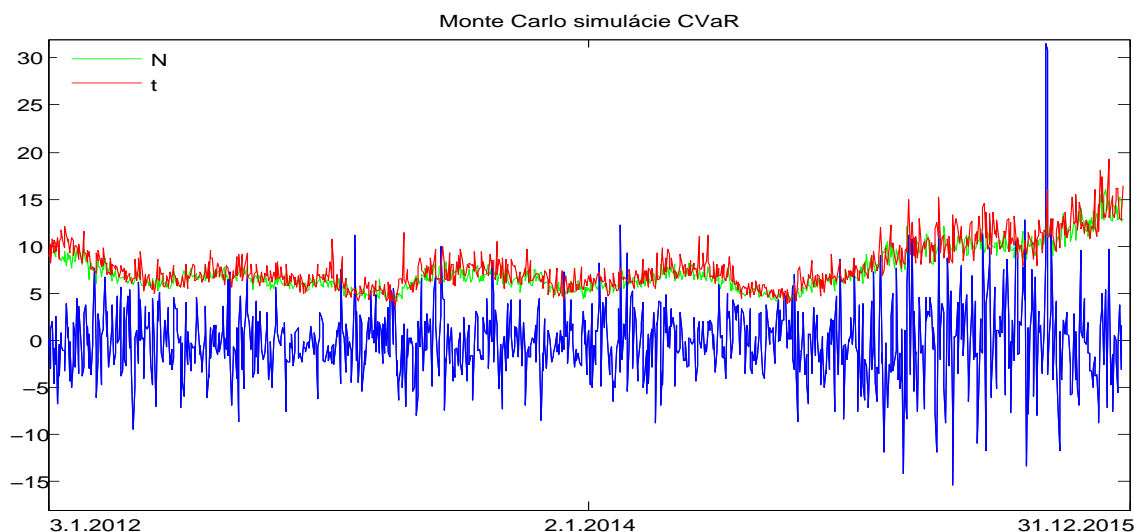
**Obr. 16:** Odhad VaR pomocou Monte Carlo simulácií za predpokladu normálneho a  $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti.



**Obr. 17:** Odhad CVaR pomocou historickej simulácie a variančno-kovariančnej metódy za predpokladu normálneho a  $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti.

Rok 2014 je pomerne kľudným obdobím v porovnaní s rokom 2015. Odhady CVaR pomocou historickej simulácie a variančno-kovariančnej metódy za predpokladu normálneho a  $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti sa v roku 2014 nelíšia tak výrazne ako v roku 2015. Pri pohľade na obdobie roku 2015 vidíme reakcie odhadov pomocou vyššie spomenutých metód na zmeny na trhu po pomerne kľudnom období. Odhad pomocou historickej simulácie reaguje na zmenu najpomalšie.



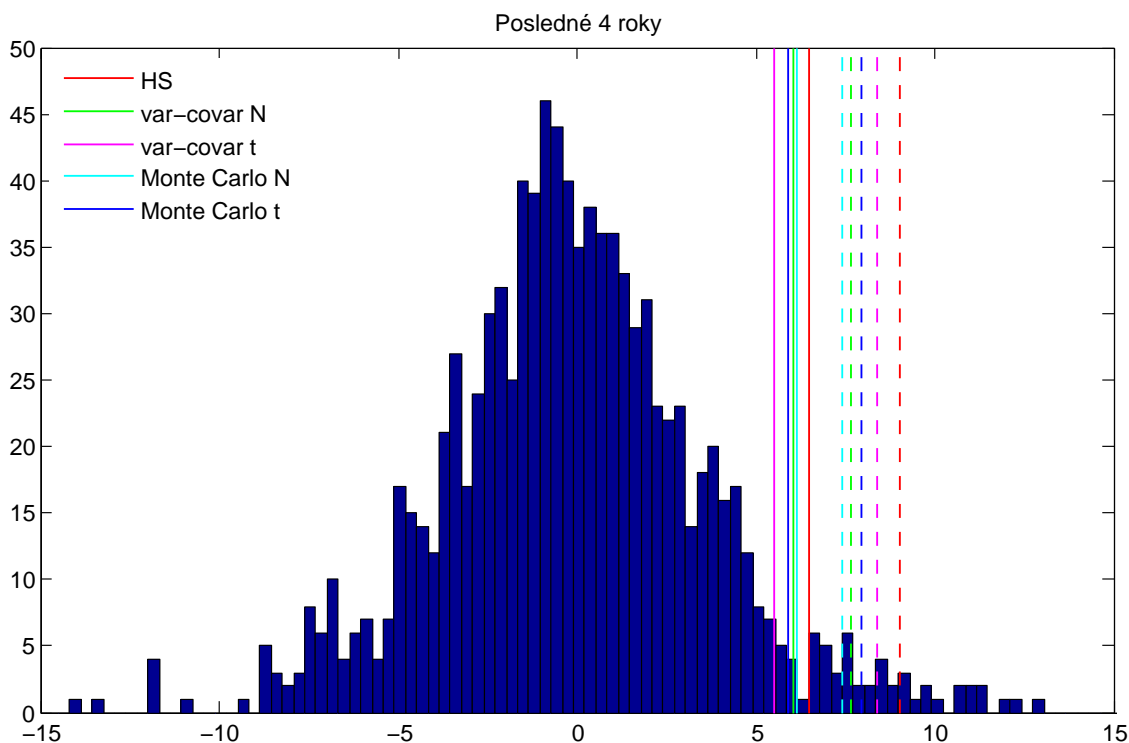


**Obr. 18:** Odhad CVaR pomocou Monte Carlo simulácií za predpokladu normálneho a  $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti.

Na obrázku 19 vidíme histogram strát spolu s hodnotami VaR a CVaR pre jednotlivé metódy. Pri historickej simulácii sme v tomto prípade použili empirické dáta za posledné 4 roky na hypotetické scenáre. Pri variančno-kovariančnej metóde sme odhadovali parametre normálneho aj Studentovho rozdelenia za posledné 4 roky. Tak isto pri Monte Carlo simuláciách, kde sme urobili 5000 simulácií. V tabuľke 1 sa nachádzajú odhady VaR a CVaR horeuvedených metód.

Metóda	VaR	CVaR
HS	6.4746	9.0404
Var-Covar N	6.0532	7.6391
Var-Covar t	5.5317	8.4060
Monte Carlo N	6.1673	7.3956
Monte Carlo t	5.9238	7.9747

**Tabuľka 1:** Odhad VaR a CVaR pomocou historickej simulácie, variančno-kovariančnej metódy a Monte Carlo simulácií za obdobie od 3.1.2012 do 31.12.2015.



**Obr. 19:** Histogram rozdelenia strát spolu s odhadom VaR a CVaR pomocou historickej simulácie, variančno-kovariančnej metódy a Monte Carlo simulácií za obdobie od 3.1.2012 do 31.12.2015.

Pri pohľade na histogram vidíme, že hodnoty odhadu VaR pomocou Monte Carlo simulácií sa výrazne nelíšia. Určitý rozdiel prítomný je a je spôsobený ťažkými chvostami Studentovho rozdelenia. Podobne aj odhad CVaR pomocou Monte Carlo simulácií sa výrazne nelíši. Najvyššie odhady VaR a CVaR dostávame pomocou historickej simulácie. Vidíme tiež podobné hodnoty odhadu VaR pomocou variančno-kovariančnej metódy a Monte Carlo simulácií za predpokladu normálneho rozdelenia, obdobne pri odhade CVaR.

## Záver

V práci sme sa zamerali na miery Value-at-Risk a Conditional Value-at-Risk na meranie rizika portfólia. Cieľom diplomovej práce bolo opísať ich teoretické aspekty, základné metódy výpočtu a aplikovať ich na reálne dáta.

VaR aj CVaR majú svoje klady aj zápory. Niektoré skupiny risk manažérov preferujú jednu mieru, iní zase druhú. Podobne je to s metódami výpočtu. Treba brať do úvahy predpoklady jednotlivých metód a tiež ich konzervatívnosť. V diplomovej práci sme na reálne dáta aplikovali 5 metód na odhad VaR a 5 metód na odhad CVaR. Nám sa najlepšie javili metódy vychádzajúce z predpokladu Studentovho rozdelenia. V prípade historickej simulácie sme pozorovali pomalšiu reakciu na zmeny na trhu. U variančno-kovariančnej metódy a Monte Carlo simulácií za predpokladu normálneho a Studentovho rozdelenia sme pozorovali rýchlejšie reakcie na zmeny na trhu ako pri historickej simulácii. Na základe empirických pozorovaní rozdelenia strát sa kvôli jeho ťažkým chvostom predpoklad Studentovho rozdelenia zdá vhodnejší.

Prínosom práce bolo zorientovanie sa v danej problematike a získanie prehľadu o VaR a CVaR. Dúfame, že práca poskytne čitateľovi dostatočný prehľad o týchto mierach rizika a metódach ich výpočtu. Možným rozšírením práce by bolo uvažovanie podmieneného rozdelenia strát a následný dynamický risk manažment.

## Literatúra

- [1] Acerbi, C., Nardio, C., Sirtori, C.: *Expected Shortfall as a tool for Financial Risk Management*, working paper, 2001, dostupné na internete: <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0102304v1.pdf>
- [2] Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K. a Vosper, L.: *VaR without correlations for portfolio of derivative securities*, Univerzity of Westminster, London, 1997, dostupné na internete: <https://doc.rero.ch/record/9092/files/wp9904.pdf>
- [3] Basel Committee on Banking Supervision: *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards - A Revised Framework Comprehensive Version*, Bank for International Settlements, 2006, dostupné na internete: <http://www.bis.org/publ/bcbs128.pdf>
- [4] Basel Committee on Banking Supervision: *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems*, Bank for International Settlements, 2010, dostupné na internete: <http://www.bis.org/publ/bcbs189.pdf>
- [5] Daniélsson, J.: *Financial Risk Forecasting*, Wiley Finance, United Kingdom, 2011
- [6] Embrechts, P.: *Masterclass on Quantitative Risk Management*, prednášky, Institute for New Economic Thinking Cambridge, 2014, dostupné na internete: <http://www.inet.econ.cam.ac.uk/files/EmbrechtsMasterClassINETCambridge.pdf>
- [7] Embrechts, P., Frey, R., McNeil, A. J.: *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press, New Jersey, 2005
- [8] Embrechts, P., Furrer, H., Kaufmann, R.: *Different Kinds of Risk in Handbook of Financial Time Series*, Springer, Berlin, 2009, dostupné na internete: [https://people.math.ethz.ch/~embrecht/ftp/PE\\_HJF\\_RK\\_2006.pdf](https://people.math.ethz.ch/~embrecht/ftp/PE_HJF_RK_2006.pdf)
- [9] Embrechts, P., Hofert, M.: *Statistics and Quantitative Risk Management for Banking and Insurance*, Annual Review of Statistics and its Applications 1, 2014, 493-514, dostupné na internete: [https://people.math.ethz.ch/~embrecht/ftp/qrm\\_stat\\_review.pdf](https://people.math.ethz.ch/~embrecht/ftp/qrm_stat_review.pdf)

- [10] Harcek, M.: *Neparametrické a semiparametrické metódy odhadu Value-at-Risk*, Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2010, 84 s., dostupné na internete: <http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2010/harcek/diplomovka.pdf>
- [11] Jurča, P.: *Credit risk*, Prednášky z Kvantitatívnych metód v riadení rizík, FMFI UK, Bratislava, 2016, dostupné na internete: <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/jurca/qrm/Chapter5.pdf>
- [12] Jurča, P.: *Introduction*, Prednášky z Kvantitatívnych metód v riadení rizík, FMFI UK, Bratislava, 2016, dostupné na internete: <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/jurca/qrm/Chapter1.pdf>
- [13] Jurča, P.: *Value-at-Risk and other risk measures*, Prednášky z Kvantitatívnych metód v riadení rizík, FMFI UK, Bratislava, 2016, dostupné na internete :<http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/jurca/qrm/Chapter2.pdf>
- [14] Krátka, J.: *GARCH modely a Value-at-Risk aplikácie*, Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2006, 90 s., dostupné na internete: <http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2006/kratka/diplomovka.pdf>
- [15] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, Bratislava, 2005
- [16] Pflug, G., Ch., Römisch, W.: *Modeling, Measuring and Managing Risk*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore, 2007
- [17] Sarykalin, S., Serraino, G., Uryasev, S.: *Value-at-Risk vs. Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization*, Tutorial in Operations Research, 2008, 270-294, dostupné na internete: [http://www.ise.ufl.edu/uryasev/files/2011/11/VaR\\_vs\\_CVaR\\_INFORMS.pdf](http://www.ise.ufl.edu/uryasev/files/2011/11/VaR_vs_CVaR_INFORMS.pdf)
- [18] Štalmach, M.: *Value-at-Risk: Nástroj na meranie trhového rizika*, Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2007, 95 s., dostupné na internete: <http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2007/stalmach/diplomovka.pdf>

### **Internetové zdroje:**

[19] <http://finance.yahoo.com/q/hp?s=F&a=00&b=1&c=2011&d=00&e=1&f=2016&g=d&z=66&y=0>

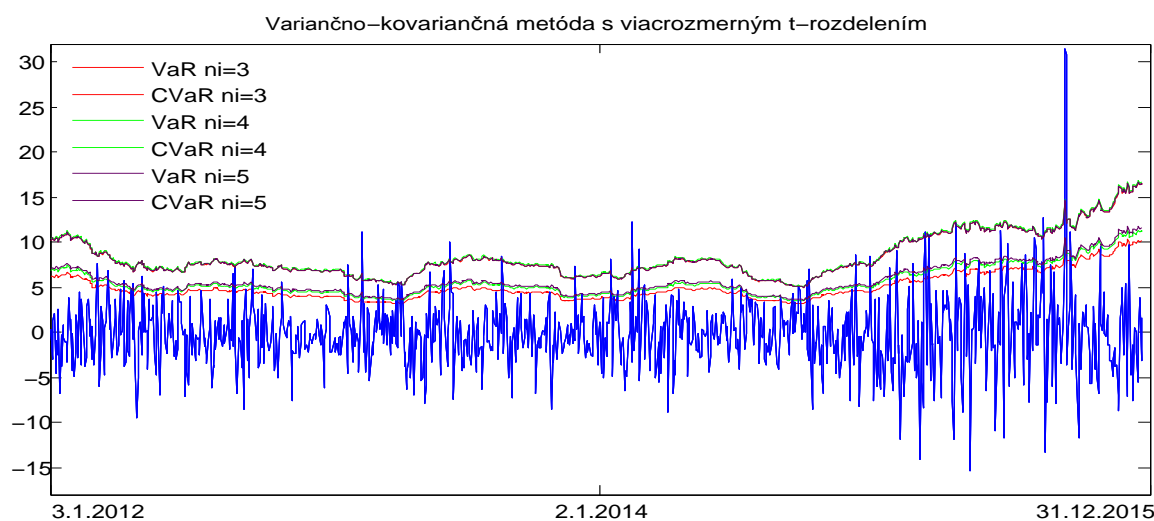
[20] <http://finance.yahoo.com/q/hp?s=RNO.PA&a=00&b=1&c=2011&d=00&e=1&f=2016&g=d>

[21] <http://finance.yahoo.com/q/hp?s=VOW3.DE&a=00&b=1&c=2011&d=00&e=1&f=2016&g=d>

[22] [http://www.nbs.sk/sk/statisticke-udaje/kurzovy-listok/grafy-kurzov/\\_USD](http://www.nbs.sk/sk/statisticke-udaje/kurzovy-listok/grafy-kurzov/_USD)

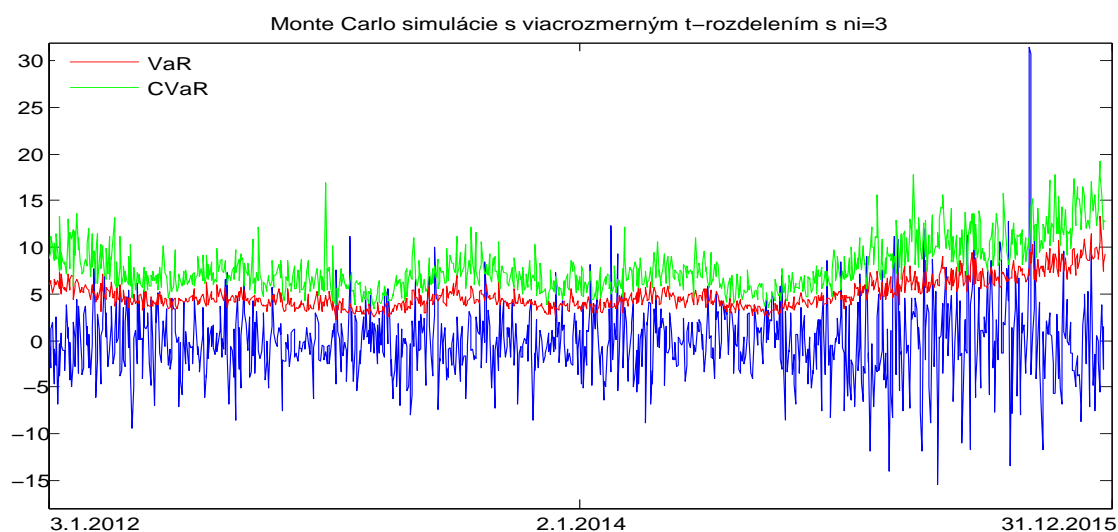
## Príloha 1

Obsahom prílohy 1 je doplňujúci grafický materiál ku kapitole 6. V podkapitole 6.3 sme uviedli, že vo finančníctve sa pri variančno-kovariančnej metóde a Monte-Carlo simuláciách za predpokladu viacrozmerného  $t$ -rozdelenia na odhad VaR a CVaR obvykle používa 3, 4 a 5 stupňov voľnosti. V kapitole 6 sme zvolili 4 stupne voľnosti. Pre doplnenie uvádzame obrázky 20 - 22, kde používame viacrozmerné  $t$ -rozdelenie aj s 3 a 5 stupňami voľnosti. Na obrázku 20 vidíme variančno-kovariančnú metódu vychádzajúcu z predpokladu, že vektor zmien rizikových faktorov má viacrozmerné  $t$ -rozdelenie s 3, 4 a 5 stupňami voľnosti.



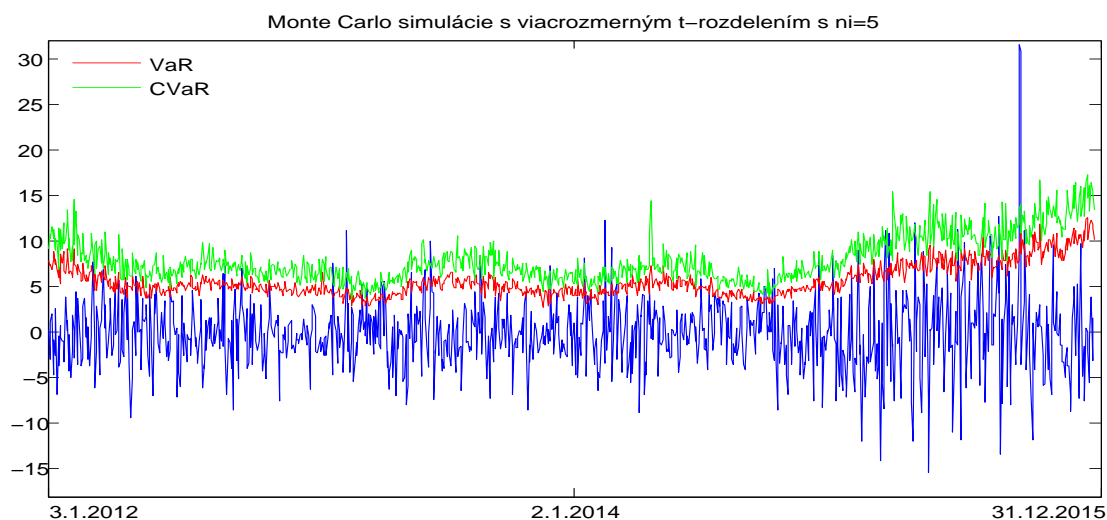
**Obr. 20:** VaR a CVaR odhadnuté pomocou variančno-kovariančnej metódy za predpokladu viacrozmerného  $t$ -rozdelenia s rôznymi stupňami voľnosti.

Obrázok 21 zobrazuje odhad VaR a CVaR pomocou Monte Carlo simulácií za predpokladu, že vektor zmien rizikových faktorov má viacrozmerné  $t$ -rozdelenie s 3 stupňami voľnosti.



**Obr. 21:** VaR a CVaR odhadnuté pomocou Monte Carlo simulácií za predpokladu viacrozmerného  $t$ -rozdelenia s 3 stupňami voľnosti.

Obrázok 22 zobrazuje odhad VaR a CVaR pomocou Monte Carlo simulácií za predpokladu, že vektor zmien rizikových faktorov má viacrozmerné  $t$ -rozdelenie s 5 stupňami voľnosti.

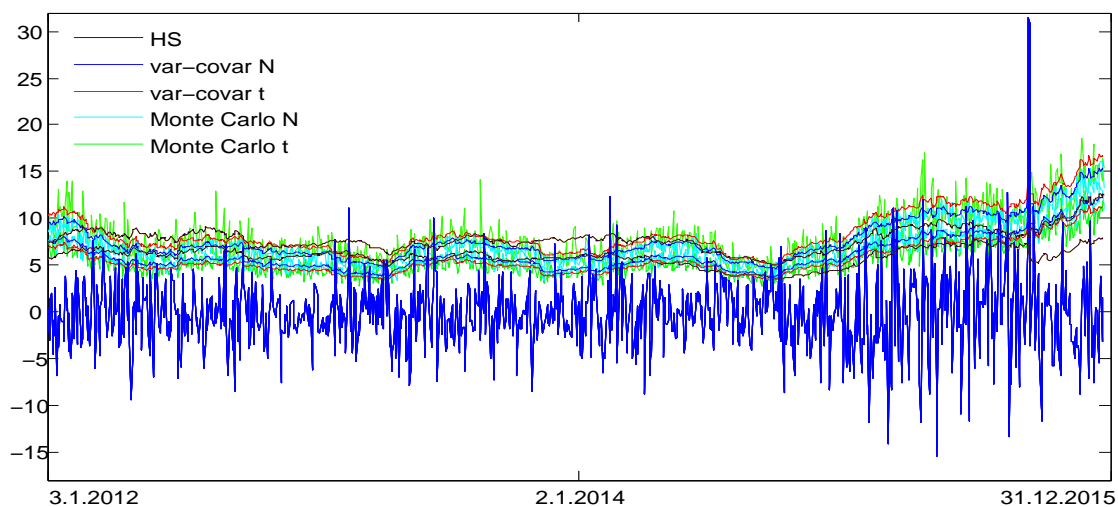


**Obr. 22:** VaR a CVaR odhadnuté pomocou Monte Carlo simulácií za predpokladu viacrozmerného  $t$ -rozdelenia s 5 stupňami voľnosti.

Na obrázkoch 23 - 25 vidíme odhady VaR a CVaR pomocou všetkých metód popísaných v kapitole 6, a to historickej simulácie, variančno-kovariančnej metódy za predpokladu normálneho aj  $t$ -rozdelenia a Monte Carlo simulácií za predpokladu normálneho

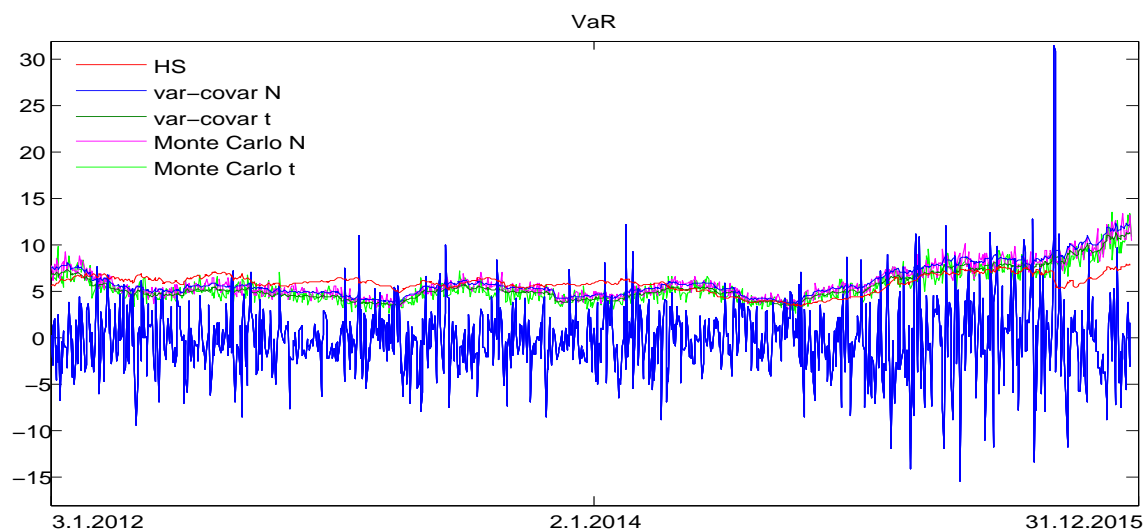


aj  $t$ -rozdelenia.

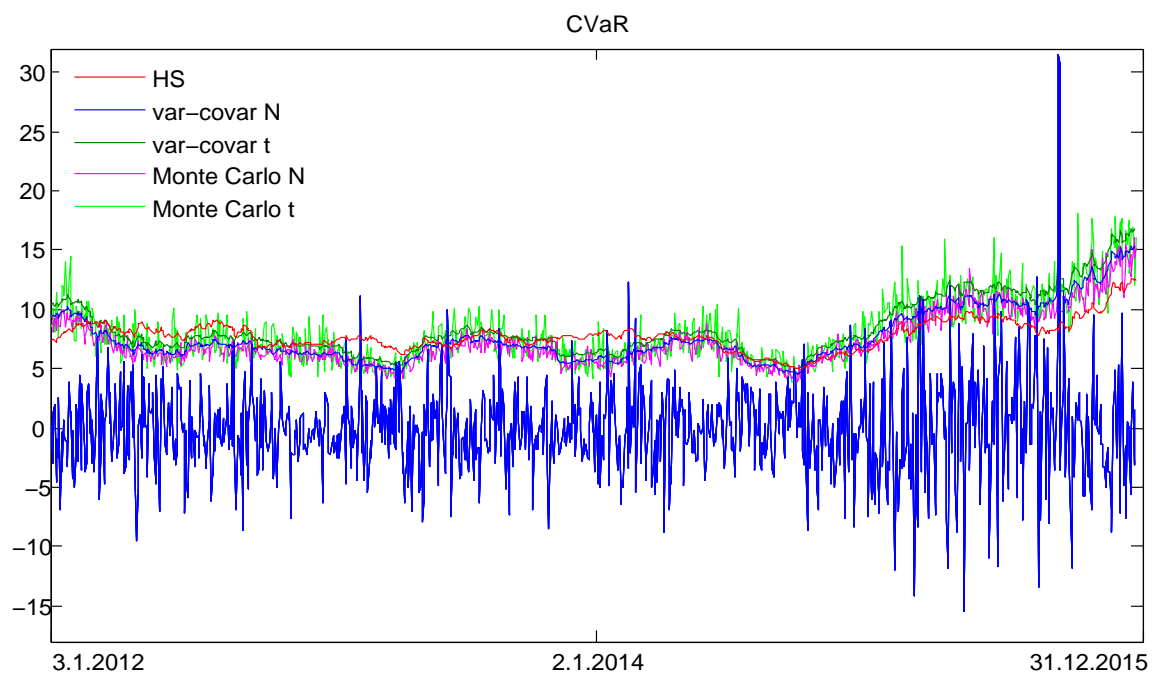


**Obr. 23:** Odhad VaR a CVaR pomocou historickej simulácie, variančno-kovariančnej metódy a Monte Carlo simulácií.

Pre lepšiu vizualizáciu uvádzame oddelene obrázok 24 odhadu VaR a obrázok 25 odhadu CVaR.



**Obr. 24:** Odhad VaR pomocou historickej simulácie, variančno-kovariančnej metódy a Monte Carlo simulácií.



**Obr. 25:** Odhad CVaR pomocou historickej simulácie, variančno-kovariančnej metódy a Monte Carlo simulácií.

## Príloha 2

Obsahom prílohy 2 je zdrojový kód programovacieho prostredia MATLAB, ktorý v sebe zahŕňa implementované metódy výpočtu VaR a CVaR opísané v 5. kapitole, a to historickú simuláciu, variančno-kovariančnú metódu a Monte Carlo simulácie.

### Dáta

Dáta popisujúce jednotlivé ceny akcií pochádzajú zo stránky Yahoo Finance, zdroj: [19, 20, 21]. Dáta popisujúce výmenný kurz pochádzajú zo stránky Národnej banky Slovenska, zdroj: [22].

```
[num,txt,row]=xlsread('data.xlsx');
data=num(1:1:end,:);
n=length(data);

% Ilustračné portfólio sa skladá z 3 akcií, pričom akcia Ford Motor Co. je
% denominovaná v zahraničnej mene, ilustračné portfólio je vystavené 4
% rizikovým faktorom
F=data(:,1); % akcia Ford Motor Co.
VOW=data(:,2); % akcia Volkswagen AG
RNO=data(:,3); % akcia Renault SA
FX=data(:,4); % výmenný kurz

% Časový horizont je jeden deň
% Alfa je zvolená miera pravdepodobnosti
alfa=0.95;

% Denné relatívne zmeny pre každý rizikový faktor
X_F=log(F(2:end)./F(1:end-1));
X_VOW=log(VOW(2:end)./VOW(1:end-1));
X_RNO=log(RNO(2:end)./RNO(1:end-1));
X_FX=log(FX(2:end)./FX(1:end-1));

% Vektor zmien rizikových faktorov
X=[X_F,X_VOW,X_RNO,X_FX];
```

## Historická simulácia VaR

Algoritmus výpočtu historickej simulácie pre VaR sa nachádza v podkapitole 5.1.

```
% Prvým krokom je výpočet zmien rizikových faktorov: X_F, X_VOW, X_RNO,  
% X_FX, ten sa nachádza v popise dát  
hs_VaR=[];  
L=[];  
alfa=0.95;  
for i=251:n-1  
    L_hyp=[];  
    L_hyp_n=[];  
    hs_CVaR_n=[];  
    % Výpočet hodnoty portfólia  
    V(i)= RNO(i)+VOW(i)+F(i)/FX(i);  
    % Výpočet straty portfólia  
    L(i)=- (V(i)-V(i-1));  
    % Výpočet hypotetických scenárov na základe historických dát  
    % Veľkosť okna je 250  
    for j=i-250:i-1  
        L_RNO=RNO(i)*(exp(X_RNO(j))-1);  
        L_VOW=VOW(i)*(exp(X_VOW(j))-1);  
        L_FX=- (F(i)/FX(i))*(exp(X_F(j)-X_FX(j))-1);  
        L_hyp=[L_hyp,-(L_VOW+L_RNO+L_FX)];  
    end  
    % Na konci cyklu máme pre každú hodnotu i=251:n-1 250 hypotetických scenárov,  
    % tie použijeme na výpočet VaR ako kvantilu empirického rozdelenia strát  
    hs_VaR(i-250)=quantile(L_hyp,alfa);
```

## Historická simulácia CVaR

Algoritmus výpočtu historickej simulácie pre CVaR sa nachádza v podkapitole 5.1.

```
% Prvým krokom je výpočet zmien rizikových faktorov: X_F, X_VOW, X_RNO,  
% X_FX, ten sa nachádza v popise dát  
hs_VaR=[];  
L=[];  
hs_CVaR=[];  
alfa=0.95;  
for i=251:n-1  
    L_hyp=[];  
    L_hyp_n=[];  
    hs_CVaR_n=[];  
    % Výpočet hodnoty portfólia  
    V(i)= RNO(i)+VOW(i)+F(i)/FX(i);  
    % Výpočet straty portfólia  
    L(i)=-(V(i)-V(i-1));  
    % Výpočet hypotetických scenárov na základe historických dát  
    % Veľkosť okna je 250  
    for j=i-250:i-1  
        L_RNO=RNO(i)*(exp(X_RNO(j))-1);  
        L_VOW=VOW(i)*(exp(X_VOW(j))-1);  
        L_FX=-(F(i)/FX(i))*(exp(X_F(j)-X_FX(j))-1);  
        L_hyp=[L_hyp,-(L_VOW+L_RNO+L_FX)];  
    end  
    % Na konci cyklu máme pre každú hodnotu i=251:n-1 250 hypotetických scenárov,  
    % tie použijeme na výpočet VaR ako kvantilu empirického rozdelenia strát  
    hs_VaR(i-250)=quantile(L_hyp,alfa);  
    % Každú hodnotu hypotetickej straty porovnáme s vypočítanou  
    % hodnotou VaR a straty >= VaR spriemerujeme, tak vypočítame CVaR  
    for k=1:250  
        if L_hyp(k)>=hs_VaR(i-250)  
            L_hyp_n=[L_hyp_n,L_hyp(k)];  
        end  
    end  
    hs_CVaR_n=mean(L_hyp_n);  
end  
hs_CVaR=[hs_CVaR,hs_CVaR_n];  
end
```

## Variančno-kovariančná metóda VaR

Algoritmus výpočtu VaR pre variančno-kovariančnú metódu sa nachádza v podkapitole 5.2. Najprv uvedieme danú metódu vychádzajúcu z predpokladu normality.

```
vc_n_VaR=[];
alfa=0.95;
for i=251:n-1
    % Prvým krokom postupu je odhad vektora mi a kovariančnej matice sigmy z
    % historických dát, zvolili sme veľkosť okna 100
    window=100;
    mi=mean([r_F(i-window:i,:) r_VOW(i-window:i,:) r_RNO(i-window:i,:) r_FX(i-window
        :i,:)]);
    sigma=cov([r_F(i-window:i,:) r_VOW(i-window:i,:) r_RNO(i-window:i,:) r_FX(i-
        window:i,:)]);
    % Druhým krokom postupu je výpočet f_t a f_z
    % Nie je prítomná explicitná časová závislosť, výraz f_t neuvažujeme
    % Výpočet zložiek vektora f_z
    d_RNO=RNO(i);
    d_VOW=VOW(i);
    d_F=F(i)/FX(i);
    d_FX=-F(i)/FX(i);
    % Vektor f_z, ktorý použijeme na výpočet parametrov rozdelenia
    % linearizovaných strát
    d_L=[d_F,d_VOW,d_RNO,d_FX];
    % Vyjadrenie parametrov rozdelenia linearizovaných strát
    mi_L=d_L*mi';
    sigma_L=d_L*sigma*d_L';
    % Výpočet odhadu VaR
    vc_n_VaR(i)= -mi_L+sqrt(sigma_L)* norminv(alfa,0,1);
end
```

Teraz uvedieme variančno-kovariančnú metódu vychádzajúcu z predpokladu Studentovho  $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti.

```

vc_t_VaR=[];
% Počet stupňov voľnosti ni
% ni=3;
ni=4;
% ni=5;
alfa=0.95;
for i=251:n-1
    % Prvým krokom postupu je odhad vektora mi a kovariančnej matice sigmy z
    % historických dát, zvolili sme veľkosť okna 100
    window=100;
    mi=mean([r_F(i-window:i,:) r_VOW(i-window:i,:) r_RNO(i-window:i,:) r_FX(i-window
        :i,:)]);
    sigma=cov([r_F(i-window:i,:) r_VOW(i-window:i,:) r_RNO(i-window:i,:) r_FX(i-
        window:i,:)]);
    % Druhým krokom postupu je výpočet f_t a f_z
    % Nie je prítomná explicitná časová závislosť, výraz f_t neuvažujeme
    % Výpočet zložiek vektora f_z
    d_RNO=RNO(i);
    d_VOW=VOW(i);
    d_F=F(i)/FX(i);
    d_FX=-F(i)/FX(i);
    % Vektor f_z, ktorý použijeme na výpočet parametrov rozdelenia
    % linearizovaných strát
    d_L=[d_F,d_VOW,d_RNO,d_FX];
    % Vyjadrenie parametrov rozdelenia linearizovaných strát
    mi_L=d_L*mi';
    sigma_L=d_L*sigma*d_L';
    % Výpočet odhadu VaR
    vc_t_VaR(i)= -mi_L+sqrt(sigma_L)*sqrt((ni-2)/ni)*tinv(alfa,ni);
end

```

## Variančno-kovariančná metóda CVaR

Najprv uvedieme variančno-kovariančnú metódu vychádzajúcu z predpokladu normality opísanú v podkapitole 5.2.

```
vc_n_CVaR=[];
alfa=0.95;
for i=251:n-1
    % Prvým krokom postupu je odhad vektora mi a kovariančnej matice sigmy z
    % historických dát, zvolili sme veľkosť okna 100
    window=100;
    mi=mean([r_F(i-window:i,:) r_VOW(i-window:i,:) r_RNO(i-window:i,:) r_FX(i-window
        :i,:)]);
    sigma=cov([r_F(i-window:i,:) r_VOW(i-window:i,:) r_RNO(i-window:i,:) r_FX(i-
        window:i,:)]);
    % Druhým krokom postupu je výpočet f_t a f_z
    % Nie je prítomná explicitná časová závislosť, výraz f_t neuvažujeme
    % Výpočet zložiek vektora f_z
    d_RNO=RNO(i);
    d_VOW=VOW(i);
    d_F=F(i)/FX(i);
    d_FX=-F(i)/FX(i);
    % Vektor f_z, ktorý použijeme na výpočet parametrov rozdelenia
    % linearizovaných strát
    d_L=[d_F,d_VOW,d_RNO,d_FX];
    % Vyjadrenie parametrov rozdelenia linearizovaných strát
    mi_L=d_L*mi';
    sigma_L=d_L*sigma*d_L';
    % Výpočet odhadu CVaR
    vc_n_CVaR(i)=-mi_L+sqrt(sigma_L)*normpdf(norminv(alfa,0,1),0,1)/(1-alfa);
end
```



Teraz uvedieme variančno-kovariančnú metódu vychádzajúcu z predpokladu Studentovho  $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti.

```

vc_t_CVaR=[];
% Počet stupňov voľnosti ni
% ni=3;
ni=4;
% ni=5;
alfa=0.95;
for i=251:n-1
    % Prvým krokom postupu je odhad vektora mi a kovariančnej matice sigmy z
    % historických dát, zvolili sme veľkosť okna 100
    window=100;
    mi=mean([r_F(i-window:i,:) r_VOW(i-window:i,:) r_RNO(i-window:i,:) r_FX(i-window
        :i,:)]);
    sigma=cov([r_F(i-window:i,:) r_VOW(i-window:i,:) r_RNO(i-window:i,:) r_FX(i-
        window:i,:)]);
    % Druhým krokom postupu je výpočet f_t a f_z
    % Nie je prítomná explicitná časová závislosť, výraz f_t neuvažujeme
    % Výpočet zložiek vektora f_z
    d_RNO=RNO(i);
    d_VOW=VOW(i);
    d_F=F(i)/FX(i);
    d_FX=-F(i)/FX(i);
    % Vektor f_z, ktorý použijeme na výpočet parametrov rozdelenia
    % linearizovaných strát
    d_L=[d_F,d_VOW,d_RNO,d_FX];
    % Vyjadrenie parametrov rozdelenia linearizovaných strát
    mi_L=d_L*mi';
    sigma_L=d_L*sigma*d_L';
    % Výpočet odhadu CVaR
    vc_t_CVaR(i)=-mi_L+sqrt(sigma_L)*sqrt((ni-2)/ni)*((ni+(tinv(alfa,ni))^2)/(ni-1))
        *tpdf(tinv(alfa,ni),ni)/(1-alfa);
end

```

## Monte Carlo simulácie VaR

Monte Carlo simulácie sme opísali v podkapitole 5.3. Najprv uvidíme Monte Carlo simulácie vychádzajúce z predpokladu normality.

```
mc_n_VaR=[];
for i=251:n-1
    % Prvým krokom postupu je odhad vektora mi a kovariančnej matice sigmy
    % z historických dát, zvolili sme veľkosť okna 100
    window=100;
    mi=mean([r_F(i-window:i,:) r_VOW(i-window:i,:) r_RNO(i-window:i,:) r_FX(i-window
        :i,:)]);
    sigma=cov([r_F(i-window:i,:) r_VOW(i-window:i,:) r_RNO(i-window:i,:) r_FX(i-
        window:i,:)]);
    L=[];
    L_n=[];
    % V cykle simulujeme m náhodných vektorov s viacrozmerným normálnym
    % rozdelením s parametrami mi a sigma, z nich použitím mapovania rizika
    % vypočítame m strát. Vypočítame VaR.
    for j=1:250
        % Simulácia náhodného vektora z viacrozmerného normálneho
        % rozdelenia, v našom prípade sa jedná o 4-rozmerné normálne
        % rozdelenie, kvôli 4 rizikovým faktorom
        Z=normrnd(0,1,4,1);
        % Choleského rozklad odhadnutej kovariančnej matice
        S=chol(sigma);
        % A je dolná trojuholníková matica
        A=S';
        % Viacrozmerný normálny vektor s parametrami mi a sigma
        X=mi'+A*Z;
        d_RNO=RNO(i)*(exp(X(3))-1);
        d_VOW=VOW(i)*(exp(X(2))-1);
        d_F=(F(i)/FX(i))*(exp(X(1)-X(4))-1);
        % Simulovaná strata
        L=[L,-(d_RNO+d_VOW+d_F)];
    end
    % VaR vypočítame ako kvantil rozdelenia simulovaných strát
    mc_n_VaR(i-250)=quantile(L,alfa);
end
```

Teraz uvedieme Monte Carlo simulácie vychádzajúce z predpokladu Studentovho  $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti.

```

mc_t_VaR=[];
mc_t_CVaR=[];
% Počet stupňov voľnosti ni
% ni=3;
ni=4;
alfa=0.95;
% ni=5;
for i=251:n-1
    % Prvým krokom postupu je odhad vektora  $\mu$  a kovariančnej matice  $\sigma$ 
    % z historických dát, zvolili sme veľkosť okna 100
    window=100;
    mi=mean([r_F(i-window:i,:) r_VOW(i-window:i,:) r_RNO(i-window:i,:) r_FX(i-window
        :i,:)]);
    sigma=cov([r_F(i-window:i,:) r_VOW(i-window:i,:) r_RNO(i-window:i,:) r_FX(i-
        window:i,:)]);
    L=[];
    L_n=[];
    % V cykle simulujeme  $m$  náhodných vektorov s viacrozmerným Studentovým
    % rozdelením s parametrami  $\mu$ ,  $\sigma$  a  $n$ , z nich použitím mapovania rizika
    % vypočítame  $m$  strát. Vypočítame VaR.
    for j=1:250
        % Simulácia náhodného vektora z viacrozmerného normálneho
        % rozdelenia, v našom prípade sa jedná o 4-rozmerné normálne
        % rozdelenie, kvôli 4 rizikovým faktorom
        Z=normrnd(0,1,4,1);
        % Choleského rozklad odhadnutej kovariančnej matice
        S=chol(sigma);
        % A je dolná trojuholníková matica
        A=S';
        % W je pomer  $n$  a náhodného čísla z  $\chi^2$ -kvadrátu s  $n$  stupňami
        % voľnosti
        W=n/chi2rnd(n);
        % Viacrozmerný vektor so Studentovým rozdelením s parametrami  $\mu$ ,
        %  $\sigma$  a  $n$ 
        X=mi'+sqrt(W)*A*Z*sqrt((n-2)/n);
    end
end

```

```

d_RNO=RNO(i)*(exp(X(3))-1);
d_VOW=VOW(i)*(exp(X(2))-1);
d_F=(F(i)/FX(i))*(exp(X(1)-X(4))-1);
% Simulovaná strata
L=[L,-(d_RNO+d_VOW+d_F)];
end
% VaR vypočítame ako kvantil rozdelenia simulovaných strát
mc_t_VaR(i-250)=quantile(L,alfa);
end

```

## Monte Carlo simulácie CVaR

Najprv uvedieme Monte Carlo simulácie vychádzajúce z predpokladu normality.

```
mc_n_VaR=[];
mc_n_CVaR=[];
for i=251:n-1
    % Prvým krokom postupu je odhad vektora mi a kovariančnej matice sigmy
    % z historických dát, zvolili sme veľkosť okna 100
    window=100;
    mi=mean([r_F(i-window:i,:) r_VOW(i-window:i,:) r_RNO(i-window:i,:) r_FX(i-window
        :i,:)]);
    sigma=cov([r_F(i-window:i,:) r_VOW(i-window:i,:) r_RNO(i-window:i,:) r_FX(i-
        window:i,:)]);
    L=[];
    L_n=[];
    mc_n_CVaR_n=[];
    % V cykle simulujeme m náhodných vektorov s viacrozmerným normálnym
    % rozdelením s parametrami mi a sigma, z nich použitím mapovania rizika
    % vypočítame m strát. Vypočítame VaR a CVaR.
    for j=1:250
        % Simulácia náhodného vektora z viacrozmerného normálneho
        % rozdelenia, v našom prípade sa jedná o 4-rozmerné normálne
        % rozdelenie, kvôli 4 rizikovým faktorom
        Z=normrnd(0,1,4,1);
        % Choleského rozklad odhadnutej kovariančnej matice
        S=chol(sigma);
        % A je dolná trojuholníková matica
        A=S';
        % Viacrozmerný normálny vektor s parametrami mi a sigma
        X=mi'+A*Z;
        d_RNO=RNO(i)*(exp(X(3))-1);
        d_VOW=VOW(i)*(exp(X(2))-1);
        d_F=(F(i)/FX(i))*(exp(X(1)-X(4))-1);
        % Simulovaná strata
        L=[L,-(d_RNO+d_VOW+d_F)];
    end
    % VaR vypočítame ako kvantil rozdelenia simulovaných strát
    mc_n_VaR(i-250)=quantile(L,alfa);
```

```

for k=1:250
    % Každú hodnotu simulovanej straty porovnáme s vypočítanou
    % hodnotou VaR a tie straty >= VaR spriemerujeme, tak vypočítame
    % CVaR
    if L(k)>=mc_n_VaR(i-250)
        L_n=[L_n,L(k)];
    end
    mc_n_CVaR_n=mean(L_n);
end
mc_n_CVaR=[mc_n_CVaR,mc_n_CVaR_n];
end

```

Teraz uvedieme Monte Carlo simulácie vychádzajúce z predpokladu Studentovho  $t$ -rozdelenia so 4 stupňami voľnosti.

```

mc_t_VaR=[];
mc_t_CVaR=[];
% Počet stupňov voľnosti ni
% ni=3;
ni=4;
alfa=0.95;
% ni=5;
for i=251:n-1
    % Prvým krokom postupu je odhad vektora  $\mu$  a kovariančnej matice  $\sigma$ 
    % z historických dát, zvolili sme veľkosť okna 100
    window=100;
    mi=mean([r_F(i-window:i,:) r_VOW(i-window:i,:) r_RNO(i-window:i,:) r_FX(i-window
        :i,:)]);
    sigma=cov([r_F(i-window:i,:) r_VOW(i-window:i,:) r_RNO(i-window:i,:) r_FX(i-
        window:i,:)]);
    L=[];
    L_n=[];
    mc_t_CVaR_n=[];
    % V cykle simulujeme  $m$  náhodných vektorov s viacrozmerným Studentovým
    % rozdelením s parametrami  $\mu$ ,  $\sigma$  a  $n_i$ , z nich použitím mapovania rizika
    % vypočítame  $m$  strát. Vypočítame VaR a CVaR.
    for j=1:250
        % Simulácia náhodného vektora z viacrozmerného normálneho
        % rozdelenia, v našom prípade sa jedná o 4-rozmerné normálne

```

```

% rozdelenie, kvôli 4 rizikovým faktorom
Z=normrnd(0,1,4,1);
% Choleského rozklad odhadnutej kovariančnej matice
S=chol(sigma);
% A je dolná trojuholníková matica
A=S';
% W je pomer ni a náhodného čísla z chí-kvadrátu s ní stupňami
% voľnosti
W=ni/chi2rnd(ni);
% Viacrozmerný vektor so Studentovým rozdelením s parametrami mi,
% sigma a ni
X=mi'+sqrt(W)*A*Z*sqrt((ni-2)/ni);
d_RNO=RNO(i)*(exp(X(3))-1);
d_VOW=VOW(i)*(exp(X(2))-1);
d_F=(F(i)/FX(i))*(exp(X(1)-X(4))-1);
% Simulovaná strata
L=[L,-(d_RNO+d_VOW+d_F)];

end

% VaR vypočítame ako kvantil rozdelenia simulovaných strát
mc_t_VaR(i-250)=quantile(L,alfa);
for k=1:250
    % Každú hodnotu simulovanej straty porovnáme s vypočítanou
    % hodnotou VaR a tie straty >= VaR spriemerujeme, tak vypočítame
    % CVaR
    if L(k)>=mc_t_VaR(i-250)
        L_n=[L_n,L(k)];
    end
    mc_t_CVaR_n=mean(L_n);
end
mc_t_CVaR=[mc_t_CVaR,mc_t_CVaR_n];
end

```