UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ODHAD VÝŠKY DÔCHODKOV V DVOJPILIEROVOM SYSTÉME

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2016 Bc. Matej Ječmen

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ODHAD VÝŠKY DÔCHODKOV V DVOJPILIEROVOM SYSTÉME

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2016 **Bc. Matej JEČMEN**

26611889

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Matej Ječmen
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Odhad výšky dôchodkov v dvojpilierovom systéme.
Estimation of pensions in the two-pillar system.

Cieľ: Práca nadviaže na výsledky dynamického modelu sporenia v druhom pilieri slovenského dôchodkového systéme. Výška dôchodku sa bude posudzovať komplexne spolu s dôchodkom z prvého piliera.

Vedúci: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 10.02.2015

Dátum schválenia: 11.02.2015

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

....

študent vedúci práce

Poďakovanie Touto formou by som sa chcel poďakovať svojmu vedúcemu, Doc. Mgr. Igor Melicherčíkovi, Phd. za jeho odborný prístup, nápady a rady k mojej diplomovej práci ako aj za jeho ochotu a čas. Taktiež by som sa chcel poďakovať mojej rodine a priateľom za podporu a trpezlivosť.

Abstrakt v štátnom jazyku

JEČMEN, Matej: *Odhad výšky dôchodkov v dvojpilierovom systéme* [diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2016, 76 s.

Táto práca sa venuje problematike dvojpilierového dôchodkového systému a optimálneho sporenia v ňom. Cieľom je nadviazať na výsledky dynamického modelu sporenia v druhom pilieri a model rozšíriť aj o dôchodok získaný z prvého piliera. V práci skúmame aké sú optimálne hodnoty pomeru rozdelenia úspor do garantovaného a negarantovaného fondu v rôznych situáciách ako aj výslednú nasporenú čiastku v čase odchodu na dôchodok. Výsledky ďalej porovnávame so scenármi, v ktorých sme zmenili niektorý parameter a skúmame dopad zmeny parametra na výšku dôchodku. Odhadnutú výšku nasporených prostriedkov z obidvoch pilierov následne porovnávame s prípadom, keď sporíme len v prvom pilieri. To nám umožňuje odhadnúť pravdepodobnosť, že vstupom do druhého piliera budeme mať vyšší dôchodok.

Kľúčové slová: úloha stochastického optimálneho riadenia, úmrtnostné tabuľky, dôchodkové sporenie, CIR model, prvý a druhý dôchodkový pilier, garantovaný a negarantovaný fond, optimálne rozdelenie úspor

Abstrakt v cudzom jazyku

JEČMEN, Matej: *Estimation of pensions in the two-pillar system.* [master thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. Mgr. Igor Melichercčík, PhD., Bratislava, 2016, 76 pages.

This thesis focuses on the two-pillar pension system and optimal savings in mentioned system. Aim of the thesis is to build on the results of the dynamic model of savings in the second pillar and enhance the model by pension gained from the first pillar. In the thesis we study ratios of optimal division between guaranteed and non-guaranteed fund in distinct situations as well as level of savings at retirement age. Next we compare results with scenarios where the value of certain parameter has changed and we study the impact of the change on the amount of pension. Subsequently we copmpare estimated amount of savings from both pillars with situation when saving is done in the first pillar only. This enables us to estimate the probability that entry into the second pillar grants us higher pension.

Keywords: stochastic optimal control problem, mortality tables, retirement savings, CIR model, the first and the second pension pillar, guaranteed and non-guaranteed fund, optimal allocation of savings

Obsah

Úvod **9**

1 Úvod do teórie optimálneho riadenia **11**

1.1 Štandardná úloha optimálneho riadenia 11
1.2 Riešenie úlohy optimálneho riadenia 13
1.3 Stochastická úloha dynamického programovania 15

2 Pravidlá sporenia v I. a II. dôchodkovom pilieri **16**

2.1 Sporenie v prvom pilieri 16
2.2 Sporenie v druhom pilieri 17

3 Zostavenie modelu **20**

4 Numerické riešenie úlohy **28**

4.1 Charakteristika úlohy 28
4.2 Optimalizácia v čase $T-1$ 28
4.2.1 Generovanie simulácií 29
4.3 Optimalizácia v ostatných časoch 32
4.3.1 Odhad užitočnosti pomocou interpolácie 32
4.3.2 Odhad užitočnosti pomocou extrapolácie 34
4.4 Hodnoty použitých parametrov 40
4.5 Výpočet odhadu nasporenej čiastky 44

5 Výsledky **46**

5.1 Analýza referenčného scenára 46
5.2 Analýza citlivosti na zmenu parametrov 48
5.2.1 Zahrnutie zákonného ohraničenia v posledných 10 rokoch sporenia 49
5.2.2 Sporenie v druhom pilieri v kratšom období ako je doba sporenia 52
5.2.3 Vplyv úrovne vzdelania na výšku nasporených prostriedkov . . . 54
5.2.4 Vplyv volatility negarantovaného fondu na výsledky 57
5.2.5 Zmena výšky príspevkov do druhého piliera 58
5.2.6 Vplyv voľby obdobia z ktorého čerpáme dáta inflácie 61

5.2.7 Scenár so zmenenou averziou k riziku 63
5.2.8 Vplyv maximálnej hodnoty úrokovej miery pri numerickom výpočte 64
5.2.9 Scenár s odlišnou úrokovou mierou na začiatku sporenia 65
5.3 Zhrnutie výsledkov 66

Záver **69**

Zoznam použitej literatúry **71**

Príloha A **73**

Úvod

Podľa zákona je každá samostatne zárobkovo činná osoba povinná odvádzať časť zo svojho príjmu na dôchodkové sporenie. Často však dochádza ku rôznym zmenám pravidiel dôchodkového sporenia. Najväčšou zmenou za posledné obdobie bola reforma platná od roku 2004, ktorá priniesla zavedenie druhého (a tretieho) dôchodkového piliera. Pre ľudí odvádzajúcich príspevky do sociálnej poisťovne to znamenalo možnosť ovplyvniť výšku starobného dôchodku po dosiahnutí dôchodkového veku, ktorý sa upravil na 62 rokov pre obe pohlavia. Dostali možnosť výberu, či celú výšku príspevkov na dôchodkové sporenie vložia do priebežného prvého piliera alebo tieto príspevky rozložia v pomere definovanom podľa zákona do prvého a druhého zásluhového piliera. V rámci druhého piliera má sporiteľ navyše možnosť rozhodnúť, do ktorého, respektíve ktorých dvoch (pričom jeden z nich musí byť garantovaný), zo 4 fondov budú investované prostriedky v druhom pilieri. Na rozdiel od prvého piliera, výška dôchodku z druhého piliera nie je daná podľa exaktného vzorca, ale závisí od výkonnosti fondov, v ktorých máme investované svoje úspory. Cieľom každého sporiteľa je mať čo najvyšší dôchodok, preto je potrebné vykonať počas sporenia také kroky, ktorých výsledkom bude maximalizácia nasporenej čiastky pri určitej averzii k riziku sporiteľa.

Obsahom práce je formulácia a následné riešenie úlohy optimálneho riadenia pre hľadanie optimálnej stratégie sporenia v prípade, že sa sporiteľ rozhodne sporiť v prvom aj v druhom pilieri. Výsledkom je pomer optimálneho rozloženia finančných prostriedkov medzi garantovaný, predstavujúci najbezpečnejší, ale aj najmenej výnosný fond a negarantovaný fond, ktorý dosahuje vyšší očakávaný výnos, avšak s väčším rizikom. Optimálny pomer závisí od veku sporiteľa, aktuálne nasporenej čiastky a aktuálnej úrokovej miere.

Prínosom tejto práce je rozšírenie modelu oproti [13] aj o dôchodok získaný z prvého piliera. To má za následok komplexnejší pohľad na sporenie, pretože sporiteľa nezaujíma aký dôchodok získa z ktorého piliera, ale to, aká bude celková výška jeho dôchodku. Sporiteľ tak nemaximalizuje výšku užitočnosti z dôchodku len z druhého piliera, ale zo súčtu dôchodkov z prvého aj druhého piliera.

Ďalším prínosom práce je porovnanie dôchodkov so sporením len v prvom pilieri. Čitateľ tak má možnosť nahliadnuť ako výhodný je vstup do druhého piliera pri rôznych hodnotách parametrov ako aj na očakávanú výšku nasporených prostriedkov.

Prvá kapitola práce oboznamuje čitateľa so základmi teórie optimálneho riadenia a postupom riešenia úloh, ktoré sú použité pri riešení problému. V druhej kapitole sa zaoberáme princípmi sporenia v prvom aj v druhom pilieri. Obsahuje výpočet dôchodku z prvého piliera a obmedzenia, ktoré prináša sporenie v druhom pilieri. V ďalšej kapitole je uvedený model maximalizujúci výšku dôchodku podľa sporiteľovej averzie k riziku ako aj jeho odvodenie. Numerický postup riešenia je ilustrovaný v štvrtej kapitole. Uvádzame v nej aj parametre použité v scenári, voči ktorému sme porovnávali výsledky. Samotné výsledky sú popísané v záverečnej kapitole.

1 Úvod do teórie optimálneho riadenia

V úvodnej kapitole si zhrnieme teoretické poznatky, ktoré využijeme pri riešení nášho problému. Pozrieme sa na teóriu optimálneho riadenia, ktorú budeme čerpať z [2].

1.1 Štandardná úloha optimálneho riadenia

Majme k etáp, ktoré si označíme $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, v ktorých vždy dosiahneme určitý stav $x_i \in X_i$. Navyše sa v každej z týchto etáp robíme rozhodnutie $u_i \in U_i$. Dvojica hodnôt $[x_i, u_i]$ ovplyvňuje to, do akého stavu sa dostaneme v $i+1$-ej etape. Platí teda $x_{i+1} = f_i(x_i, u_i)$. Našim cieľom je nájsť takú postupnosť riadení $\mathcal{U} = \{u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}\}$, z ktorej dostaneme postupnosť stavov $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$, ktorá by viedla ku maximalizácií, respektíve minimalizácií našej účelovej funkcie. Tá býva v tvare súčtu výnosov $f_i^0(x_i, u_i)$ závislého od daného stavu x_i a zvoleného riadenia u_i v jednotlivých etapách $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$. Taktiež sa vyskytujú úlohy, kde hodnota účelovej funkcie je závislá len od stavu, do ktorého sa dostaneme v etape k, teda od x_k, alebo je súčtom obidvoch spomenutých možností. Vždy vychádzame z vopred daného stavu $x_0 = a$, pričom môžeme mať ohraničenie aj na koncový stav $x_k \in C$. Dostávame sa tak ku štandardnému tvaru úlohy optimálneho riadenia, ktorý vieme zapísať nasledovne.

$$\max_{u_i \in U_i} \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= f_i(x_i, u_i) && (2) \\ x_0 &= a && (3) \\ x_k &\in C && (4) \\ x_i &\in X_i && (5) \end{aligned}$$

kde $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$. Keďže máme na stavové aj riadiace premenné zadané určité podmienky ($u_i \in U_i$, (4) a (5)), optimálnu hodnotu účelovej funkcie musíme hľadať len medzi takými postupnosťami riadení, pri ktorých budú tieto podmienky splnené. Množinu takýchto postupností nazveme triedou prípustných riadení a označíme ho $\mathcal{P}$. Tým pádom môžeme hodnotu účelovej funkcie vyjadriť ako funkciu závislú od $\mathcal{U}$.

$$\mathcal{J}(\mathcal{U}) = \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i(\mathcal{U}), u_i)$$

Tým, že maximalizujeme účelovú funkciu za podmienky, že riadenie je prípustné, môžeme účelovú funkciu prepísať do nasledovného tvaru.

$$\max_{\mathcal{U}\in\mathcal{P}} \mathcal{J}(\mathcal{U})$$

V prípade, že by sme hľadali minimum účelovej funkcie, vieme úlohu previesť do štandardného tvaru tak, že budeme maximalizovať opačnú hodnotu pôvodnej účelovej funkcie. Optimálne riadenie nám pri takejto transformácii úlohy vyjde rovnaké, rozdiel bude len v opačnej hodnote účelovej funkcie v optime. Pri niektorých úlohách sa môžeme stretnúť s tým, že ohraničenia $u_i \in U_i$ alebo (5) chýbajú. Vtedy hovoríme o úlohách bez ohraničení na riadenie, respektíve stav. Príslušné množiny U_i a X_i sú vtedy zhodné s množinou hodnôt definičného oboru funkcií $f_i^0(x_i, u_i)$ a $f_i(x_i, u_i)$. Ak nám chýba ohraničenie (4), jedná sa o úlohu s voľným koncom. V prípade, že množina C v (4) obsahuje len jeden bod, hovoríme, že úloha má pevný koniec. Ak nemáme úlohu s voľným, ani s pevným koncom, hovoríme jej úloha s čiastočne pevným koncom. Príkladom na úlohu s čiastočne pevným koncom je, ak je množina C nejaký interval v prípade jednorozmernej stavovej premennej. Samozrejme, stavová ako aj riadiaca premenná môžu byť nielen jednorozmerné, ale aj viacrozmerné premenné.

Spomínali sme, že v účelovej funkcií nemusí byť len súčet výnosov v jednotlivých etapách, tak ako máme v štandardnej úlohe v (1), kedy sa jedná o Lagrangeovu úlohu. Účelová funkcia môže byť navyše závislá od koncového stavu, kedy je v tvare $\sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i) + \phi(x_k)$, pričom ϕ je daná funkcia, a nazýva sa úlohou v Bolzovom tvare. Ak je hodnota účelovej funkcie závislá len od koncového stavu $\phi(x_k)$, hovoríme o úlohe v Mayerovom tvare. Dôvod prečo je štandardný tvar úlohy optimálneho riadenia len v Lagrangeovom tvare je ten, že úlohy s jednotlivými tvarmi sa dajú navzájom na seba previesť, čo si aj ukážeme. Tým, že účelová funkcia pri Bolzovom tvare je súčtom účelových funkcií Lagrangeového a Mayerovho tvaru, stačí nám ukázať, že z Mayerovho tvaru vieme dostať Lagrangeov a naopak. Ak teda chceme previesť úlohu z Mayerovho tvaru na Lagrangeov, všetky funkcie f_i^0 pre $i = 0, 1, 2, \ldots, k-2$ budú rovné 0 a funkcia f_{k-1}^0 bude definovaná nasledovne.

$$f_{k-1}^0(x_{k-1}, u_{k-1}) = \phi(x_k) = \phi(f_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1}))$$

Pri prevádzaní úlohy z Lagrangeového tvaru na Mayerov musíme vytvoriť novú stavovú premennú y. Jej počiatočná hodnota je vždy 0 a v každej etape je navýšená o hodnotu výnosu v príslušnej etape. Hodnota účelovej funkcie bude rovná stavu y_k.

$$\begin{aligned} \max \quad & y_k \\ y_{i+1} &= y_i + f_i^0(x_i, u_i) \\ y_0 &= 0 \end{aligned}$$

1.2 Riešenie úlohy optimálneho riadenia

Najskôr si uvedieme definície niektorých pojmov z [2], z ktorých sa dá odvodiť riešenie úlohy optimálneho riadenia.

- Úloha optimálneho prechodu zo stavu x do množiny C v etapách $j, j+1, \ldots, k$, ktorú označíme $D_j(x)$:

$$\begin{aligned} \max_{u_i \in U_i} J_j(x, \mathcal{U}_j) &= \max_{u_i \in U_i} \sum_{i=j}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i) \\ x_{i+1} &= f_i(x_i, u_i) \\ x_j &= x \\ x_k &\in C \\ x_i &\in X_i \end{aligned}$$

  kde $i = j, j+1, \ldots, k-1$.

- Trieda prípustných riadení úlohy $D_j(x)$, ktorú označíme $\mathcal{P}_j(x)$ - je to množina postupností riadení $\mathcal{U} = \{u_j, u_{j+1}, \ldots, u_{k-1}\}$ pre ktoré sú splnené všetky ohraničenia úlohy $D_j(x)$.

- $\Gamma_j(x)$ označíme množinu takých riadení u_j, pre ktoré existuje $\mathcal{U} = \{u_j, u_{j+1}, \ldots, u_{k-1}\} \in \mathcal{P}_j(x)$.

- Hodnotová funkcia $V_j(x)$

$$V_j(x) = \max_{\mathcal{U}_j \in \mathcal{P}_j(x)} J_j(x, \mathcal{U}_j)$$

Podľa Lemmy v [2, str. 32] pre každé $x \in X_j$ a $j \in [0, k-2]$ platí $\mathcal{U}_j = \{u_j, u_{j+1}, \ldots, u_{k-1}\} \in \mathcal{P}_j(x)$ práve vtedy, keď $u_j \in \Gamma_j(x)$ a zároveň $\mathcal{U}_{j+1} = \{u_{j+1}, u_{j+2}, \ldots, u_{k-1}\} \in \mathcal{P}_{j+1}(x)$.

Pre účelovú funkciu navyše platí:

$$J_j(x,\mathcal{U}_|) = f_j^0(x,u_j) + J_{j+1}(f_j(x,u_j),\mathcal{U}_{j+1})$$

Z nej je v [2, str. 33] vyvodený dôsledok, ktorý nám hovorí, že pre všetky $j \in [0, k-2]$, $x \in X_j$ a $\bar{u}_j \in \Gamma_j(x)$ platí nasledovná rovnosť.

$$\mathcal{P}_{j+1}(f_j(x,\bar{u}_j)) = \{\mathcal{U}_{j+1} : \{\bar{u}_j,\mathcal{U}_{j+1}\} \in \mathcal{P}_j(x)\}$$

Ďalej je použitý predpoklad, pre všetky $j \in [0, k-1]$ a $x \in X_j$ platí, že v prípade existencie prípustného riadenia úlohy $D_j(x)$ existuje aj optimálne riadenie $\hat{\mathcal{U}}_j$, pre ktoré platí:

$$\max_{\mathcal{U}_j \in \mathcal{P}_j(x)} J_j(x,\mathcal{U}_j) = J_j(x,\hat{\mathcal{U}}_j)$$

Z toho sa dá dostať ku rovnici dynamického programovania, ktorá je nutnou ako aj postačujúcou podmienkou optimality. Jej odvodenie je uvedené v [2, str. 34].

$$V_j(x) = \max_{u \in \Gamma_j(x)} [f_j^0(x,u) + V_{j+1}(f_j(x,u))] \tag{6}$$

kde $x \in X_j$ pre $j = 0, 1, \ldots, k-1$, pričom

$$V_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x \in C \\ -\infty, & \text{ak } x \notin C \end{cases} \tag{7}$$

V prípade, že nechceme transformovať úlohu v Mayerovom, respektíve Bolzovom tvare do Lagrangeovho tvaru, hodnotová funkcia $V_k(x)$ má nasledovný tvar:

$$V_k(x) = \begin{cases} \phi(x), & \text{ak } x \in C \\ -\infty, & \text{ak } x \notin C \end{cases} \tag{8}$$

Výsledkom riešenia (6) v j-tej etape je funkcia nazývaná optimálna spätná väzba $\hat{\Gamma}_j(x)$, ktorá nám hovorí aké riadenie je v j-tej etape optimálne v závislosti od stavu x. Na základe toho vieme ďalej dopočítať hodnotovú funkciu $V_j(x)$ a použiť ju pri výpočte (6) v $j-1$-ej etape. Takýmto spôsobom sa dostávame od hodnotovej funkcie v k-tej etape (7), respektíve (8) až do 0-tej etapy. Riešime tak namiesto jednej zložitej úlohy (1) - (5) k jednoduchších (6) pri počiatočných podmienkach (7), respektíve (8).

Pri numerickom riešení úlohy (1) - (5) sa taktiež využíva rovnica dynamického programovania, avšak problém nastáva v prípade spojitej riadiacej alebo stavovej premennej. V takom prípade sa využíva diskretizácia premennej, čo znamená, že uvažujeme len konečný počet prípustných hodnôt stavov, respektíve riadení.

1.3 Stochastická úloha dynamického programovania

Stochastickou úlohou dynamického programovania sa myslí úloha optimálneho riadenia, kde vystupuje aj nejaká náhodná premenná, ktorej rozdelenie dopredu poznáme. Vo všeobecnosti môže mať táto náhodná premenná v každej etape iné rozdelenie. Náhodnosť môže ovplyvňovať to, do akého stavu sa dostaneme v nasledujúcej etape (teda je súčasťou funkcie f v (2)) alebo ovplyvňuje výnos v danej etape (funkciu f^0 v (1)). Druhým rozdielom medzi stochastickou a deterministickou úlohou optimálneho riadenia je účelová funkcia. Keďže nepoznáme stav, do ktorého sa v nasledujúcej etape dostaneme, respektíve výnos v danej etape, budeme sa snažiť maximalizovať strednú hodnotu súčtu výnosov v jednotlivých etapách. Navyše oproti deterministickej úlohe vypadnú ohraničenia na stavové premenné, pretože vplyvom náhodnosti by sme sa mohli dostať do neprípustného stavu. Dostávame tak nasledovný tvar úlohy, kde z_i je náhodná premenná.

$$\max_{u_i \in U_i} E \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i, z_i) \tag{9}$$

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= f_i(x_i, u_i, z_i) && (10) \\ x_0 &= a && (11) \\ z_i &\in Z_i && (12) \end{aligned}$$

Pri úlohe v Mayerovom tvare je maximalizovaná účelová funkcia v tvare $E(\phi(x_k))$, pri Bolzovom tvare má účelová funkcia tvar $E\left(\sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i, z_i) + \phi(x_k)\right)$. Spôsob riešenia stochastickej úlohy optimálneho riadenia (9) - (12) sa taktiež realizuje cez rovnicu dynamického programovania. Jej tvar je však mierne odlišný ako pri deterministickej úlohe, keďže sa líšia v účelovej funkcii.

$$V_j(x) = \max_{u \in U_j} E(f_j^0(x, u, z_j) + V_{j+1}(x, u, z_j)) \tag{13}$$

Keďže nemáme ohraničenie na koncový stav, $V_k = 0$ pre všetky hodnoty x_k. V prípade Bolzovho, respektíve Mayerovho tvaru máme $V_k = \phi(x_k)$.

2 Pravidlá sporenia v I. a II. dôchodkovom pilieri

Každý sporiteľ, ktorý si sporí v prvom aj v druhom pilieri, bude dostávať dôchodok z dvoch zdrojov, prvého a druhého piliera. To znamená, že dôchodok, ktorý dostane bude súčtom dôchodkov z oboch pilierov.

2.1 Sporenie v prvom pilieri

Výška mesačného dôchodku P sa dá vypočítať použitím vzorca (14), ktorý je použitý aj v zákone.

$$P = ADH_k * N * POMB \tag{14}$$

N predstavuje počet rokov, počas ktorých sporiteľ prispieva do sociálnej poisťovne. $POMB$ alebo priemerný osobný mzdový bod je priemerná hodnota osobných mzdových bodov za obdobie prispievania. Osobný mzdový bod je pomer hrubého príjmu v danom roku ku priemernej mzde v tom istom roku. To znamená, že ak je náš príjem 1000€mesačne a priemerná mzda v roku 2015 bola podľa [6] 882€, osobný mzdový bod bude pre tento rok 1000/882=1,134. Obmedzením je, že na hodnotu $POMB$ vyššiu ako 3 sa neprihliada, a teda maximum je $POMB = 3$. V prípade $POMB$ menšieho ako 1 alebo väčšieho ako 1,25 sa na výpočet dôchodku použije upravená hodnota $POMB$. Ak je nižší ako 1, je podľa [8] navýšený o rozdiel skutočného $POMB$ a 1 prenásobený hodnotou, ktorá sa každoročne zvyšuje od roku 2013 zo 17% o 1% až do roku 2018, kedy dosiahne 22%. Ak je hodnota $POMB$ vyššia ako 1,25, $POMB$ je naopak znížený o rozdiel $POMB - 1{,}25$ prenásobený každoročne sa znižujúcim koeficientom od roku 2013 z 80% o 4% až na hodnotu 60% v roku 2018. Aktuálna dôchodková hodnota ADH_k je peňažná hodnota jedného mzdového bodu v roku k. Toto číslo je každoročne určované podľa zákona v závislosti na vývoji priemernej mzdy. Pre človeka, ktorý celý život sporí iba v prvom pilieri a jeho osobný mzdový bod je počas života konštantný, má po dosiahnutí dôchodkového veku pri príslušnej aktuálnej dôchodkovej hodnote dôchodok približne na úrovni 50% svojej poslednej mzdy. Pre rok 2015 je podľa [7] aktuálna dôchodková hodnota na úrovni 10,6865€, pre rok 2016 je stanovená na 10,9930€.

Vzorec (14) vychádza zo vzorca (15), kde je namiesto priemerného osobného mzdového bodu prenásobeného počtom odpracovaných rokov použitý súčet osobných mzdových bodov OMB_i pre $i = 1, 2, 3, \ldots, N$.

$$P = \sum_{i=1}^{N} OMB_i * ADH_k \tag{15}$$

Vzorce (14) a (15) však môžeme použiť v takomto tvare len v prípade sporenia len v prvom pilieri, kedy celých 18% odvodov na dôchodok ide do prvého piliera. V prípade, že si sporiteľ sporí aj v druhom pilieri, je veľkosť odvodov do sociálnej poisťovne nižšia o príspevky do druhého piliera. Nemôže preto očakávať, že dôchodok získaný z prvého piliera bude rovnaký ako keby sporil iba v prvom pilieri. To sa dá docieliť tak, že osobný mzdový bod v i-tom roku bude prenásobený pomerom príspevku do prvého piliera ku príspevkom do oboch pilierov. Veľkosť príspevkov do prvého piliera označíme $d_i^{(1)}$, do druhého $d_i^{(2)}$, pričom tieto čísla vyjadrujú aká časť z príjmu ide do ktorého piliera. Podľa zákona teda aktuálne platí $d_i^{(1)} + d_i^{(2)} = 0.18$. Dostávame tak vzorec (16) pre výpočet mesačného dôchodku z prvého piliera pri sporení v druhom pilieri.

$$P = \sum_{i=1}^{N} OMB_i * \frac{d_i^{(1)}}{d_i^{(1)} + d_i^{(2)}} * ADH_k \tag{16}$$

2.2 Sporenie v druhom pilieri

Na rozdiel od prvého piliera, dôchodok z druhého piliera si dopredu vypočítať nevieme. Naše peniaze sú investované do rôznych akcií, respektíve dlhopisov a výnos z nich je náhodný. Hoci nepoznáme stav výnosu z druhého piliera, vieme aspoň nasimulovať rôzne scenáre vývoja našej investície a odhadnúť rozdelenie nasporenej čiastky v čase odchodu na dôchodok.

Ako sporitelia v druhom pilieri máme právo vybrať si, do akých cenných papierov budú investované naše peniaze. Na výber sú štyri druhy fondov, ktoré sa líšia výnosom, ale aj rizikovosťou. Najbezpečnejšou investíciou je vloženie peňazí do garantovaného dlhopisového fondu, avšak aj výnos je najnižší. Zvyšné 3 fondy sa spoločne nazývajú negarantovanými fondmi a líšia sa výnosnosťou ako aj rizikovosťou. Vyšší výnos, ale aj riziko, ako pri garantovanom fonde sa dá dosiahnuť investíciou do zmiešaného fondu, kde fond pozostáva zmiešaný z akcií a dlhopisov. Ďalej nasleduje akciový fond, kde prevládajú akcie, a teda dosahuje ešte vyšší výnos aj riziko. Najvýnosnejším a najrizikovejším fondom je indexový fond, kde sú úspory investované do portfólia sledujúceho určitý index. Okrem toho má sporiteľ možnosť vložiť investície do dvoch zo spomínaných fondov a peniaze rozložiť v ľubovoľnom pomere, avšak jeden z nich musí byť garantovaný fond. Zákon však obmedzuje investície do negarantovaných fondov v posledných 10 rokoch pred odchodom na dôchodok. V 52. roku života je sporiteľ povinný mať minimálne 10% svojich úspor investovaných v garantovanom fonde a každý ďalší rok sa táto povinnosť navyšuje o ďalších 10% až do 61. roku, kedy už musí byť celá suma investovaná v garantovanom fonde. Posledný rok pred dôchodkovým vekom tak už sporiteľ nerozhoduje o svojich úsporách. Existuje však výnimka, kedy po písomnom oznámení sporiteľa je možné mať v garantovanom fonde o polovicu menej majetku ako prikazuje zákon. Tým pádom je sporiteľ povinný mať v 52. roku života najmenej 5% svojich úspor investovaných v garantovanom fonde a každý ďalší rok sa táto hranica zvyšuje o 5%. Posledný rok pred dôchodkovým vekom je v tomto prípade minimálne 50% v garantovanom fonde.

Ďalším rozdielom sporenia v druhom pilieri je možnosť zvoliť si spôsob vyplácania nasporenej čiastky. Najbežnejším spôsobom je nákup doživotného dôchodku, čo znamená, že si sporiteľ vyberie poisťovňu, ktorá mu bude vyplácať tento dôchodok z druhého piliera. Ďalej je potrebné určiť si podmienky ako sa bude dôchodok vyplácať. Dôchodok môže byť počas doby poberania konštantný, ale taktiež je možné zvyšovanie dôchodku o vopred dohodnutú sumu. Čím je dohodnutý rast dôchodku vyšší, tým je počiatočná výška dôchodku nižšia. Navyše je možné mať dôchodok aj s pozostalostným dôchodkom, ktorý sa vypláca dedičom po dobu jedného alebo dvoch rokov po smrti sporiteľa v rovnakej výške ako keby nezomrel. Ak by sme si zvolili takýto dôchodok, jeho výška bude nižšia ako v prípade, že by neobsahovala pozostalostný dôchodok. Zo zákona je však možné zdediť dôchodok, ktorý nebol dôchodcovi vyplatený do siedmeho roku od vstupu na dôchodok, v dôsledku jeho smrti a to bez ohľadu na to, či si sporiteľ zvolil dôchodok s pozostalostným dôchodkom alebo bez neho.

V prípade, že nie je použitá celá nasporená suma na nákup doživotného dôchodku, je možné tieto peniaze buď vybrať - programový výber alebo použiť na zakúpenie dočasného dôchodku. Dočasný dôchodok je možné nakúpiť za zostatkové úspory v druhom pilieri na 5, 7 alebo 10 rokov. V prípade úmrtia sporiteľa počas poberania dočasného dôchodku nepodlieha nevyplatená časť dedeniu. Právo na uplatnenie nevyužitých úspor majú len tí sporitelia, ktorí splnia zároveň obe z nasledovných podmienok:

- súčet doživotných dôchodkov z prvého aj druhého piliera musí byť väčší ako dôchodok, ktorý by mal človek sporiaci 42 rokov, nevstúpil do druhého piliera a jeho priemerný osobný mzdový bod je rovný 1,25.

- súčet doživotných dôchodkov z prvého aj druhého piliera musí byť väčší ako dôchodok, ktorý by sme mali, ak by sme nesporili v druhom pilieri.

3 Zostavenie modelu

Pre účely nášho modelu budeme uvažovať sporenie v garantovanom a jednom negarantovanom fonde druhého piliera. S garantovaným fondom počítať musíme, pretože podľa zákona je povinnosť mať nejakú časť úspor v garantovanom fonde v posledných desiatich rokoch sporenia. Tento fond predstavuje najbezpečnejšiu, ale zároveň aj najmenej výnosnú voľbu. Ako výnosnejšiu a rizikovejšiu alternatívu použijeme negarantovaný fond. Pre popísanie správania sa negarantovaného fondu budeme používať dva parametre, strednú hodnotu výnosnosti v danom fonde a jeho volatilitu. Výnos v garantovanom fonde závisí od vývoja úrokovej miery. Na odhad správania sa úrokovej miery existuje niekoľko modelov, my použijeme odhad založený na CIR modeli.

Sporenie v druhom pilieri spočíva v tom, že každý mesiac odvádzame časť príjmu do dôchodcovskej správcovskej spoločnosti časť zo svojho príjmu. Tá podľa nášho rozhodnutia investuje naše úspory do daného fondu, respektíve do zvolených dvoch fondov v nami určenom pomere. Tento pomer ako aj fondy, do ktorých investujeme môžeme kedykoľvek zmeniť. Cieľom zmeny môže byť buď očakávanie vyššieho výnosu pri zvolení inej kombinácii fondov alebo snaha o zníženie rizikovosti alebo ku zmene dôjde v dôsledku zákonného obmedzenia počas posledných 10 rokoch sporenia, čo však my ovplyvniť nevieme. Hoci zmeny sú možné kedykoľvek, pri nezmenenom vývoji fondov nie je pravdepodobné aby sporiteľ mal záujem meniť parametre sporenia každý mesiac alebo častejšie. V prípade náhlej výraznej zmeny výnosnosti, prípadne volatility je možné zmeniť vstupné parametre modelu spraviť nový prepočet kedykoľvek počas sporenia. Má preto zmysel uvažovať zjednodušenie, že právo na rozhodnutie o parametroch sporenia máme každý rok a aj odvody zo mzdy sa uhrádzajú ročne. Znamená to, že sa v našom modeli úspory každý rok zúročia podľa výkonnosti daných fondov a rozhodnutia o rozdelení z roka predchádzajúceho. Navyše sa k tejto sume pripočítajú odvody za posledný rok a sporiteľ opäť rozhoduje ako rozdelí svoje úspory v roku nasledujúcom. V modeli použijeme rovnaké označenia a myšlienky odvodenia ako v [5]. Hodnota úspor v roku t bude teda označená ako s_t, ročná mzda v roku t ako w_t, percentuálna časť príspevkov do druhého piliera zo mzdy v roku t ako τ_t, výnos z garantovaného fondu počas t-teho roka ako $R^b(t-1,t)$, výnos z negarantovaného fondu počas t-teho roka ako $R^s(t-1,t)$ a pomer rozdelenia úspor medzi garantovaný a negarantovaný fond v roku t ako δ_t. Dostávame rekurentný vzorec stavu našich úspor (17).

$$s_{t+1} = s_t \left(\delta_{t+1} \exp(R^b(t, t+1)) + (1 - \delta_{t+1}) \exp(R^s(t, t+1))\right) + \tau_{t+1} w_{t+1} \qquad (17)$$

Sporiť začíname s prázdnym účtom, preto počiatočná podmienka bude (18).

$$s_0 = 0 \qquad (18)$$

Počiatočnú podmienku (18) s použitím (17) vieme prepísať do tvaru (19).

$$s_1 = \tau_1 w_1 \qquad (19)$$

Snahou sporiteľa bude aby mal čo najväčší dôchodok. Spôsobov ako môžu byť vyplatené naše úspory v druhom pilieri je viacero, preto je nutné aby sa náš model slúžiaci na optimálne sporenie v druhom pilieri dal použiť v prípade zvolenia akejkoľvek stratégie vyplácania úspor. Táto podmienka bude splnená, ak sa budeme snažiť maximalizovať nasporenú sumu s_N v poslednom N-tom roku. Čo však sporiteľa zaujíma viac ako celková nasporená suma s_t, je pomer tejto sumy k jeho poslednej ročnej mzde $d_t = \frac{s_t}{w_t}$. Toto číslo mu hovorí to, na akú dlhú dobu by mu tieto úspory vystačili, ak by chcel zostať na rovnakej životnej úrovni akú mal v poslednom roku sporenia. Pri takomto vyjadrení množstva úspor navyše nebude potrebné zadávať ako parameter výšku mzdy w_t. Ak medziročný rast mzdy $\frac{w_{t+1}}{w_t} - 1$ medzi rokmi t a $t+1$ označíme β_t, dostaneme nový rekurentný predpis a počiatočnú podmienku.

$$d_{t+1} = d_t \frac{\delta_{t+1} \exp(R^b(t, t+1)) + (1 - \delta_{t+1}) \exp(R^s(t, t+1))}{1 + \beta_t} + \tau_{t+1} \qquad (20)$$

$$d_1 = \tau_1 \qquad (21)$$

Rast mzdy závisí vo veľkej miere od najvyššieho dosiahnutého vzdelania. Dáta s vypočítaným kariérnym rastom, ktoré máme k dispozícii, sú očistené o infláciu, preto rast mzdy bude závisieť aj od nej. Namiesto výrazu $1 + \beta_t$ preto použijeme súčin $(1 + \beta_t^v)(1 + \beta_t^c)$, kde β_t^c predstavuje rast našej mzdy voči priemernej mzde (a teda aj osobného mzdového bodu) medzi rokmi t a $t+1$ vplyvom kariérneho rastu a β_t^v popisuje zmenu inflácie medzi rokmi t a $t+1$.

$$d_{t+1} = d_t \frac{\delta_{t+1} \exp(R^b(t, t+1)) + (1 - \delta_{t+1}) \exp(R^s(t, t+1))}{(1 + \beta_t^v)(1 + \beta_t^c)} + \tau_{t+1} \qquad (22)$$

$$d_1 = \tau_1 \qquad (23)$$

Každý sporiteľ má záujem o čo najväčší dôchodok, avšak odlišujú sa ochotou riskovať. Tým pádom potrebujeme do modelu zahrnúť parameter, ktorý by určoval sporiteľovu averziu k riziku. Preto je vhodné použiť v účelovej funkcii optimalizačnej úlohy funkciu užitočnosti, ktorej strednú hodnotu budeme maximalizovať. Pre náš model si zvolíme funkciu užitočnosti CRRA, ktorá je v tvare (24), kde $a > 0$ je parameter určujúci averziu k riziku. Čím je a väčšie, tým je ochota riskovať menšia.

$$U = \begin{cases} d^{1-a}, & \text{ak } a \in (0,1) \\ ln(d), & \text{ak } a = 1 \\ -d^{1-a}, & \text{ak } a > 1. \end{cases} \tag{24}$$

Účelová funkcia by teda bola v tvare (25).

$$\max_{\delta} E(U(d_N)) \tag{25}$$

V tomto modeli máme však zahrnutú len nasporenú sumu v druhom pilieri, vyjadrenú v počte ročných platov. Dopredu si vieme vypočítať očakávaný dôchodok z prvého piliera, ale problémom je, že dôchodok z neho je vždy vyplácaný mesačne a počet výplat je závislý na tom ako dlho budeme žiť. Nevieme preto určiť, koľko ročných platov c získame z prvého piliera. Ak by sa nám podarilo vymyslieť spôsob ako odhadnúť číslo c, v účelovej funkcii modelu by sme mohli k počtu ročných platov nasporených v druhom pilieri pripočítať c a následne z tohto súčtu maximalizovať strednú hodnotu užitočnosti.

$$\max_{\delta} E(U(d_N + c)) \tag{26}$$

Prvou možnosťou ako odhadnúť c je odhadnúť vek, ktorého sa dožijeme podľa toho ako sa cítime a na základe toho dopočítať dôchodok, ktorý by sme v takomto prípade dostali. Odhadovať však vek takýmto spôsobom, ktorého sa dožijeme v 25 rokoch, by sa dalo prirovnať hádaniu čísel, ktoré padnú v lotérii. Samozrejme, pokiaľ je badateľné zhoršenie nášho zdravotného stavu, odhad náš môže byť reálny. My sa však pozrieme na spôsob zodpovedajúci spravodlivému oceneniu anuity - dôchodku z prvého piliera. Na tento výpočet budeme potrebovať aktuálne úmrtnostné tabuľky na Slovensku z [12]. Tie nám udávajú aká je pravdepodobnosť úmrtia pre daný vek, čo môžeme využiť na výpočet hustoty veku úmrtia ľudí na Slovensku. Takisto je možné rozlišovať pohlavie alebo počítať z tabuliek, ktoré hovoria o pravdepodobnosti úmrtia nezohľadňujúcich pohlavie. Na základe vypočítanej hustoty vieme určiť priemerný vek úmrtia. Keďže k peniazom z prvého aj druhého piliera sa dostaneme až dosiahnutím dôchodkového veku, zaujíma nás priemerný vek úmrtia za podmienky, že sa dožijeme minimálne dôchodkového veku. V prípade úmrtia pred dosiahnutím tohto veku nezískavame zo sporenia nič bez ohľadu na to aké rozhodnutia sme počas prispievania vykonali. Nasporená suma z druhého piliera síce vstupuje do dedičného konania a taktiež môžu pozostalí poberať pozostalecký dôchodok, ale tým, že my, ako zosnulí, z nej už nedostaneme nič, nebudeme túto skutočnosť zahŕňať do nášho modelu.

Tým, že v úmrtnostných tabuľkách máme uvedené jednotlivé pravdepodobnosti úmrtia v i-tom celočíselnom veku pri podmienke, že sme dosiahli vek i, rozdelenie veku úmrtia pri podmienke dožitia sa minimálne dôchodkového veku bude diskrétne s krokom jedného roka. Ak označíme dôchodkový vek ako b_0, hodnotu hustoty tohto rozdelenia v j-tom roku, pričom $j \geq b_0$, vypočítame ako pravdepodobnosť úmrtia v j-tom roku prenásobenú rozdielom 1 a súčtu hodnôt hustoty v rokoch menších ako j a zároveň väčších alebo rovných ako v roku b_0. Ak označíme X ako náhodnú premennú veku úmrtia a p_i ako hodnotu pravdepodobnosti úmrtia v i-tom roku z úmrtnostných tabuliek, predpis hustoty vieme zapísať nasledovne.

$$P(X = x \mid X \geq b_0) = p_x \left(1 - \sum_{i=b_0}^{x-1} P(X = i \mid X \geq b_0)\right) \tag{27}$$

Na výpočet strednej hodnoty veku dožitia za podmienky dožitia sa dôchodkového veku m použijeme vypočítané hodnoty hustoty z (27) a dostávame vzorec (28).

$$m = \sum_{i=b_0}^{\infty} i * P(X = i \mid X \geq b_0) \tag{28}$$

Keďže v úmrtnostných tabuľkách je pri veku 100 a viac rokov pravdepodobnosť úmrtia v najbližšom roku rovnaká a menšia ako 1, výjde nám nenulová pravdepodobnosť úmrtia v ľubovoľne veľkom veku. Preto je vhodné určiť si nejakú hranicu, ktorú budeme považovať za maximálny vek dožitia b, a teda bude platiť $p_b = 1$. Tým pádom bude stačiť počítať strednú hodnotu m podľa vzorca (29).

$$m = \sum_{i=b_0}^{b} i * P(X = i \mid X \geq b_0) \tag{29}$$

Číslo m nám hovorí aká je priemerná doba poberania dôchodku z prvého piliera pri podmienke, že dosiahneme dôchodkový vek. Keďže štartovací dôchodok z prvého piliera je každoročne valorizovaný podľa priemerného rastu miezd a rastu cien, diskontovať tieto platby do času keď vstupujeme na dôchodok budeme tak, že m prenásobíme dôchodkom z prvého piliera v roku vstupu na dôchodok a 12, pretože dôchodok je vyplácaný mesačne. Dostávame tak hodnotu peňazí, ktorú priemerne získame z prvého piliera za podmienky, že sa dožijeme dôchodkového veku. Vzťah (16) si ešte upravíme tak, aby v ňom vystupoval len osobný mzdový bod na začiatku sporenia a rast našej kariéry, teda parametre β_t^c.

$$P = OMB_1 * ADH_k \sum_{i=1}^{N} \left(\prod_{j=1}^{i-1} (1+\beta_j^c) \frac{d_i^1}{d_i^1 + d_i^2} \right) \tag{30}$$

Osobný mzdový bod na začiatku sporenia teraz ľahko nahradíme osobným mzdovým bodom na konci sporenia.

$$P = OMB_N * ADH_k \sum_{i=1}^{N} \left(\prod_{j=i}^{N} \frac{1}{1+\beta_j^c} \frac{d_i^1}{d_i^1 + d_i^2} \right) \tag{31}$$

Teraz ročný dôchodok z prvého piliera v roku nástupu na dôchodok, teda v N-tom roku, prenásobíme priemerným vekom, ktorého sa človek dožije za podmienky, že dosiahne dôchodkový vek, a predelíme ho poslednou ročnou výplatou w_N. Toto číslo bude predstavovať počet rokov, na ktoré by nám stačil dôchodok vyplatený z prvého piliera pri dožití sa priemerného veku, ktorého sa človek dožije za podmienky, že dosiahne dôchodkový vek, pri zachovaní rovnakej životnej úrovne ako počas doby sporenia. Je to teda naše hľadané c.

$$c = \frac{12 * P * m}{w_N} = \frac{12 * OMB_N * ADH_N * m}{w_N} \sum_{i=1}^{N} \left(\prod_{j=i}^{N} \frac{1}{1+\beta_j^c} \frac{d_i^1}{d_i^1 + d_i^2} \right) \tag{32}$$

Hodnota ADH je určovaná tak, aby človek bez kariérneho rastu, ktorý sporí iba v prvom pilieri počas doby 40 rokov, mal dôchodok vo výške približne 50% poslednej mzdy. Budeme predpokladať, že toto číslo je konštantné, a teda je rovnaké v tomto roku ako v roku nástupu na dôchodok. To znamená, že človek poberajúci priemernú mzdu počas celého života ($OMB = 1$) po dobu N rokov bude mať vždy rovnaký pomer prvého ročného dôchodku a poslednej ročnej mzdy bez ohľadu na to bez ohľadu na to v ktorom roku dosiahol dôchodkový vek. Priemernú mzdu v čase t označíme ako $\bar{w_t}$.

$$\frac{12 * ADH_t * N}{\bar{w_t}} = \frac{12 * ADH_N * N}{\bar{w_N}} \tag{33}$$

Pomer prvého ročného dôchodku ku poslednej mzde je rovnaký ako v (33) aj v prípade osobného mzdového bodu rôzneho od 1 a príslušnej poslednej mzde w_N.

$$\frac{12 * ADH_t * N}{\bar{w_t}} = \frac{12 * ADH_N * N * OMB_N}{w_N} \tag{34}$$

Zlúčením vzorcov (32) a (34) dostávame nový vzorec (35) na výpočet čísla c. Hodnota sumy v ňom nám penalizuje to, že nesporíme len v prvom pilieri, ale aj v druhom ako aj kariérny rast.

$$c = \frac{12 * ADH_t * m}{\bar{w_t}} \sum_{i=1}^{N} \left(\prod_{j=i}^{N} \frac{1}{1+\beta_j^c} \frac{d_i^1}{d_i^1 + d_i^2} \right) \tag{35}$$

V prípade, že máme sporiteľa, ktorý sporí celý život len v prvom pilieri a počas života mal v každom roku rovnaký osobný mzdový bod, dostaneme hodnotu $m = 19{,}25$ a z toho nám vyjde $c = 9{,}097$.

Stále však nemáme model úplný, pretože v ňom vystupuje náhodnosť ukrytá vo výške výnosov z garantovaného a negarantovaného fondu. Nikdy nevieme dopredu povedať aký výnos dosiahneme v danom fonde počas budúceho alebo ktoréhokoľvek ďalšieho roku. Čo však vieme je to ako sa výška výnosov správala doteraz. Na základe toho vieme odhadnúť rozdelenie, ktorým sa výška výnosu riadi. Správanie negarantovaného fondu závisí od portfólia akcií, ktorý sleduje určitý index. V tomto prípade teda budeme modelovať vývoj hodnoty akcií. Pri modelovaní ceny akcií sa uvažuje, že výnos akcií sa riadi normálnym rozdelením. Z historických dát dokážeme odhadnúť jeho parametre, teda priemerný výnos a volatilitu. Opäť použijeme označenia z [5]. Hodnotu akcie, respektíve portfólia akcií, v čase t označíme ako P_t, strednú hodnotu výnosu príslušnej akcie, respektíve portfólia, ako μ_t^s a volatilitu ako σ_t^s. Potom podľa [5] platia pre výnos z akcií, respektíve portfólia, rovnosti (36).

$$R^s(t, t+1) = \ln \frac{P_{t+1}}{P_t} = \mu_t^s + \sigma_t^s \psi, \tag{36}$$

kde $\psi \sim N(0,1)$. Pri modelovaní výnosnosti garantovaného fondu sa využíva odlišný postup. Výnos dlhopisov je naviazaný na úrokovú mieru. Metód ako modelovať úrokovú mieru je viacero, my sa budeme zaoberať short-rate modelom CIR. Tento proces je definovaný stochastickou diferenciálnou rovnicou krátkodobej úrokovej miery (37).

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma^b\sqrt{r_t}dZ_t, \tag{37}$$

pričom $\kappa, \theta, \sigma^b > 0$, kde θ predstavuje dlhodobú úrokovú mieru, κ reprezentuje rýchlosť konvergencie úrokovej miery ku dlhodobej úrokovej miere, σ^b je volatilita procesu a Z_t je Wienerov proces. Výhodou použitia tohto modelu je to, že nepripúšťa zápornú úrokovú mieru. Jeho myšlienka spočíva v tom, že existuje dlhodobá úroková miera θ, ku ktorej je aktuálna krátkodobá úroková miera r_t priťahovaná silou κ a do procesu vstupuje náhodnosť v podobe Wienerovho procesu. Výnos z dlhopisov sa dá modelovať pomocou bezkupónového dlhopisu so splatnosťou T_b, ktorý má v čase t hodnotu $P(t, T_b)$ nominálnou hodnotou 1. Hodnota dlhopisu $P(t, T_b)$ v čase t sa dá vyjadriť pri použití CIR modelu podľa [5] nasledovne.

$$P(t, T_b) = P(r_t, t, T_b) = A(T_b)e^{-B(T_b)r_t}, \tag{38}$$

kde

$$\begin{aligned} A(T_b) &= \left(\frac{2\gamma e^{\frac{(\kappa+\lambda+\gamma)T_b}{2}}}{(\kappa+\lambda+\gamma)(e^{\gamma T_b}-1)+2\gamma}\right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \\ B(T_b) &= \frac{2(e^{\gamma T_b}-1)}{(\kappa+\lambda+\gamma)(e^{\gamma T_b}-1)+2\gamma} \\ \lambda &= \sqrt{(\kappa+\lambda)^2+2\sigma^2} \end{aligned}$$

Aproximáciou riešenia diferenciálnej rovnice (38) je podľa [11] rekurentný vzťah pre krátkodobú úrokovú mieru (39).

$$r_{t+1} = g(r_t, \Phi) = \theta + e^{-\kappa}(r_t - \theta) + \sigma^b\sqrt{\frac{r_t}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa})}\Phi, \tag{39}$$

kde $\Phi \sim N(0, 1)$, pričom uvažujeme aj koreláciu medzi náhodnými premennými Φ a Ψ $cor(\Phi, \Psi) \in (-1, 1)$. To, že sa jedná len o aproximáciu a nie presné riešenie diferenciálnej rovnice (37) je zrejmé z toho, že v riešení (39) je možné dostať zápornú úrokovú mieru, ak hodnota Φ bude nízka záporná. Ak by sme dostali zápornú úrokovú mieru r_{t+1}, pre odhad úrokovej miery v roku $t+2$ by sme už nemohli použiť vzťah (39), pretože by došlo k odmocňovaniu záporného čísla. Preto je vhodné zabrániť tomu aby sa úrok dostal do záporných hodnôt. Riešením môže byť napríklad nasledovná úprava.

$$r_{t+1} = \max\left(0, \theta + e^{-\kappa}(r_t - \theta) + \sigma^b\sqrt{\frac{r_t}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa})}\Phi\right) \tag{40}$$

Hodnotu úrokovej miery teraz využijeme na odhad nášho výnosu z garantovaného fondu.

$$R^b(t, t+1) = r_t B(T_b) - \ln A(T_b) - r_{t+1} B(T_b - 1) + \ln A(T_b - 1) \tag{41}$$

V prípade dlhopisu na jeden rok ($T_b = 1$) bude v čase t vyzerať vzťah (41) nasledovne.

$$R^b(t, t+1) = r_t B(1) - \ln A(1), \tag{42}$$

pretože $\ln A(0) = B(0) = 0$. Tým, že v našom modeli budeme počítať optimálne rozdelenie svojich úspor každoročne, bude stačiť, ak použijeme vzťah (42) na výpočet výnosu z garantovaného fondu. Model, ktorý budeme používať na hľadanie optimálnej stratégie pri sporení v prvom a druhom pilieri bude teda úloha optimálneho riadenia s diskrétnym časom s dvomi stavovými premennými (úrok r_t a počet nasporených platov d_t) a jednou riadiacou premennou (rozdelenie úspor do garantovaného a negarantovaného fondu δ).

$$\begin{aligned}
&\max_\delta E(U(d_N + c)) \\
&d_{t+1} = d_t \frac{\delta \exp(R^b(t,t+1)) + (1-\delta)\exp(R^s(t,t+1))}{(1+\beta_t^v)(1+\beta_t^c)} + \tau_{t+1} \\
&d_1 = \tau_1 \\
&r_{t+1} = \max\left(0, \theta + e^{-\kappa}(r_t - \theta) + \sigma^b\sqrt{\frac{r_t}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa})}\Phi\right) \\
&r_0 = r \\
&R^b(t, t+1) = r_t B(1) - \ln A(1) \\
&R^s(t, t+1) = \mu_t^s + \sigma_t^s \psi
\end{aligned} \tag{43}$$

pričom konštanty sú dané

$$\begin{aligned}
c &= \frac{12 * ADH_t * m}{\bar{w}_t} \sum_{i=1}^{N} \left(\prod_{j=i}^{N} \frac{1}{1+\beta_j^c} \frac{d_i^1}{d_i^1 + d_i^2} \right) \\
A(T_b) &= \left(\frac{2\gamma e^{\frac{(\kappa+\lambda+\gamma)T_b}{2}}}{(\kappa+\lambda+\gamma)(e^{\gamma T_b} - 1) + 2\gamma} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \\
B(T_b) &= \frac{2(e^{\gamma T_b} - 1)}{(\kappa+\lambda+\gamma)(e^{\gamma T_b} - 1) + 2\gamma} \\
\lambda &= \sqrt{(\kappa+\lambda)^2 + 2\sigma^2}
\end{aligned}$$

4 Numerické riešenie úlohy

V predchádzajúcej kapitole sme si definovali úlohu, ktorú chceme riešiť. Potrebujeme však nájsť spôsob ako túto úlohu vyriešime numericky.

4.1 Charakteristika úlohy

Nakoľko sa jedná o pomerne komplikovanú úlohu, analytické riešenie sa nám nájsť nepodarilo, preto budeme musieť úlohu riešiť numericky. V našom prípade sa jedná o Mayerovu úlohu dynamického programovania s pevným časom. Stavovými premennými sú úroková miera r_t a počet nasporených ročných platov d_t. Riadiacou premennou je δ určujúca pomer investície nasporených peňazí medzi garantovaný a negarantovaný fond počas najbližšieho roku. Premenné r_t ako aj d_t dosahujú kladné hodnoty, zápornú úrokovú mieru nebudeme vo výpočtoch uvažovať. Horné ohraničenie na obe premenné vo všeobecnosti neexistuje, hoci nie je reálne mať ľubovoľne vysokú úrokovú mieru alebo nasporenú sumu. Kvôli riešeniu úlohy je však potrebné určiť si nielen nejaké dolné, ale aj horné ohraničenie na tieto premenné. Riadiaca premenná δ je ohraničená na interval $[0, 1]$. Ďalej budeme potrebovať diskretizovať všetky tri premenné. To znamená, že napriek tomu, že sa jedná o spojité premenné, zvolíme si konečnú množinu hodnôt medzi dolným a horným ohraničením, s ktorými budeme počítať. My si v našej úlohe pre každú zo spomínaných premenných určíme nejakú konštantnú vzdialenosť, ktorá bude pevná medzi všetkými hodnotami s ktorými budeme počítať.

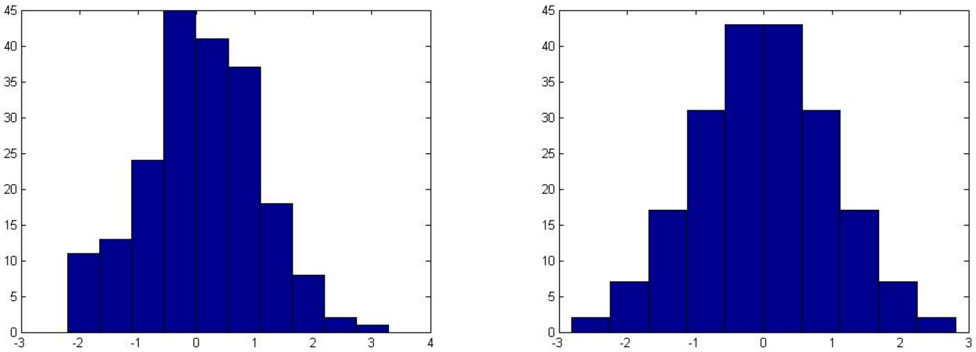
Ako sme už spomínali vyššie, riešenie úlohy dynamického programovania spočíva v riešení odzadu. To znamená, že potrebné hodnoty stavových premenných a optimálnych riadení počítame najprv pre časy na konci obdobia, v ktorom robíme optimalizáciu a postupne sa dostávame do skorších časov, až kým sa nedostaneme na začiatok úlohy. Cieľom úlohy je maximalizácia strednej hodnoty funkcie užitočnosti nasporenej čiastky (prepočítanej do počtu ročných platov v poslednom roku sporenia) na konci sporenia.

4.2 Optimalizácia v čase $T - 1$

Začneme teda v čase $T - 1$, ktorý je posledný, v ktorom hľadáme optimálnu hodnotu rozdelenia úspor do garantovaného, respektíve negarantovaného fondu. Pre každú dvojicu hodnôt možných stavov stavových premenných r_{T-1} a d_{T-1} budeme počítať optimálne rozdelenie úspor. To budeme určovať na základe toho, do akých stavov sa dostaneme v čase T pri daných hodnotách δ a vyberieme tú, pri ktorej dosahujeme najvyššiu strednú hodnotu užitočnosti. Pre obe stavové premenné máme rekurentný vzorec, vďaka ktorému vieme vypočítať do akého stavu sa dostaneme v čase T pri danej hodnote δ. V týchto rekurentných vzťahoch sa však vyskytujú aj dve korelované náhodné premenné z normálneho rozdelenia. Prvou možnosťou ako ich zahrnúť do výpočtu je použitie Monte Carlo simulácií, ktoré spočívajú v generovaní hodnôt z daného rozdelenia. Pre každú vygenerovanú hodnotu vypočítame nový stav, do ktorého sa dostaneme a vypočítame hodnotu užitočnosti, ktorú v danom stave máme. Zo všetkých takto vypočítaných hodnôt užitočnosti spravíme aritmetický priemer. Postup opakujeme pre všetky prípustné hodnoty riadení a vyberieme to, pri ktorom sme dostali najväčšiu strednú hodnotu užitočnosti a túto hodnotu užitočnosti si pre daný východzí stav zapamätáme.

4.2.1 Generovanie simulácií

Problémom použitia Monte Carlo simulácií je to, že k danému rozdeleniu sa približujú až pri veľkom počte simulácií. Keďže výpočty musíme robiť zároveň pre každú dvojicu stavov, každé možné riadene, každú simuláciu a v každom čase, museli by sme spraviť veľmi veľké množstvo výpočtov aby sme sa dostali k riešeniu pri dostatočne dobrej aproximácii požadovaného rozdelenia, čo by bol problém aj pri výkone dnešných počítačov. Tým, že poznáme rozdelenie, z ktorého sú náhodné premenné, môžeme nahradiť Monte Carlo simulácie metódou, ktorá bude presnejšie generovať dvojice hodnôt z požadovaného normálneho rozdelenia pri potrebe oveľa menej vygenerovaných hodnôt. Myšlienka tejto metódy sa dá najlepšie ukázať na potrebe vygenerovania n hodnôt z rovnomerného rozdelenia. Množina n hodnôt, ktorá by najlepšie popisovala rovnomerné rozdelenie bude taká, že keď si zoberieme ľubovoľný interval dĺžky $\frac{1}{n}$, ktorý je podmnožinu intervalu $[0, 1]$, bude obsahovať práve jedno z vygenerovaných čísel. To znamená, že všetky vygenerované čísla by boli navzájom od seba vzdialené $\frac{k}{n}$, kde $k \in \mathbb{N}$. Aby platilo, že stredná hodnota tohto výberu je $\frac{1}{2}$, musia byť vygenerované hodnoty rozmiestnené rovnomerne okolo hodnoty $\frac{1}{2}$. To znamená, že v tomto výbere n najlepšie popisujúcich rovnomerné rozdelenie budú hodnoty $\frac{k}{n} + \frac{1}{2n}$, kde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Na aplikovanie tejto metódy do normálneho rozdelenia využijeme inverznú transformáciu, popísanú v [3], spolu s práve vygenerovanými hodnotami popisujúce rovnomerné rozdelenie. Tá spočíva v tom, že tieto hodnoty dosadíme do inverznej funkcie k distribučnej funkcii normálneho rozdelenia so strednou hodnotou 0 a disperziou 1. Dostaneme tak hodnoty zodpovedajúce $(\frac{k}{n} + \frac{1}{2n}) * 100$ percentnému kvantilu normálneho rozdelenia $N(0,1)$. Porovnanie histogramov použitím Monte Carlo simulácií a generovaním príslušných kvantilov z normovaného normálneho rozdelenia pri sade 200 hodnôt môžeme vidieť na Obr. 1.



Obr. 1: Porovnanie histgramov vygenerovaných 200 hodnôt z normovaného normálneho rozdelenia použitím Monte Carlo simulácií (vľavo) a výpočtom z kvantilov (vpravo).

Samozrejme, pri Monte Carlo máme vždy inú množinu vygenerovaných hodnôt, ktoré sa niekedy viac, inokedy menej podobajú na rozdelenie, z ktorého pochádzajú. S rastúcim počtom vygenerovaných hodnôt sú vo všeobecnosti odchýlky od vygenerovaného rozdelenia menej badateľné. Ak ale máme len pomerne málo vygenerovaných hodnôt, môže dôjsť k zásadne rozdielnym výsledkom v našom výpočte pri dvoch rôznych spusteniach programu v dôsledku vygenerovania výrazne odlišnej sady hodnôt. Pre porovnanie ešte uvedieme v Tabuľke 1 strednú hodnotu a disperziu vygenerovaných hodnôt, z ktorých vznikli histogramy na Obr. 1. Vidíme, že stredná hodnota aj disperzia vyšla bližšie k 0, respektíve 1, v prípade výpočtu hodnôt. Je zrejmé, že v prípade inej vygenerovanej sady hodnôt by sme dostali iné výsledky, avšak keďže budeme potrebovať vygenerované len malé množstvo hodnôt kvôli časovej náročnosti programu a požadujeme aby sme nedostali výrazne iné výsledky pri opakovaných výpočtoch len v

	E()	var()
Monte Carlo	0,1052	0,9760
kvantily	0	0,9986

Tabuľka 1: Porovnanie stredných hodnôt a disperzií dát generovaných príslušnými metódami.

dôsledku inej sady vygenerovaných dát, lepšou voľbou bude použitie výpočtu hodnôt z kvantilov.

Našli sme spôsob ako získať dáta z normovaného normálneho rozdelenia, ktoré ho dostatočne dobre popisujú aj pri nižšom počte dát. My však v modeli potrebujeme dáta z dvojrozmerného normálneho rozdelenia, pričom jednotlivé zložky náhodného vektora majú byť z normovaného normálneho rozdelenia a zároveň je medzi nimi určitá korelácia, na čo využijeme poznatky z [3]. Pri Monte Carlo simuláciách by sme mohli vygenerovať dve hodnoty z normovaného normálneho rozdelenia predstavujúce jednotlivé zložky náhodného vektora. Tým, že sú tieto dve vygenerované hodnoty nezávislé, korelácia medzi nimi je nulová, a teda dáta pochádzajú z rozdelenia $N_2(0, I)$. Ak máme náhodnú viacrozmernú premennú X, ktorej kovariančná matica je Σ, pre náhodnú premennú AX, kde A je matica, bude kovariančná matica $A\Sigma A^T$. Túto vlastnosť teraz aplikujeme na náš problém. V ňom predstavuje matica Σ maticu I, pričom potrebujeme získať kovariančnú maticu $A\Sigma A^T = AA^T$. To znamená, že stačí, ak vektor vygenerovaných dvojíc hodnôt Y (každá z normovaného normálneho rozdelenia a navzájom nezávislé) prenásobíme maticou A, čím dostávame nové dvojice hodnôt AY. Keďže poznáme jednotlivé hodnoty matice AA^T, budeme potrebovať pomocou Choleského rozkladu dopočítať maticu A. Týmto postupom teda získame dvojice hodnôt, ktoré budú mať požadovanú koreláciu. My sme sa ale rozhodli, že budeme používať dáta vypočítané z príslušných kvantilov normálneho rozdelenia. Spôsob ako z jednorozmerného normálneho rozdelenia vytvoríme dvojrozmerné, pričom obe zložky náhodného vektora budú navzájom nezávislé, je nasledovný. V oboch zložkách vektora použijeme hodnoty vypočítané pri jednorozmernom rozdelení. Aby sme docielili nezávislosť zložiek náhodného vektora, ku každej vypočítanej hodnote prvej zložky náhodne priradíme hodnotu z druhej zložky tak, aby každá hodnota bola použitá práve raz. Tým, že využívame náhodný generátor, ktorý permutuje jednotlivé hodnoty a požadujeme nízky počet vektorov, pri každej rôznej permutácii dostaneme badateľne inú koreláciu. Jej stredná hodnota síce bude 0, avšak znamená to, že výsledok môže ovplyvniť daná permutácia. Tento problém je rovnaký aj v prípade Monte Carlo simulácií, avšak pri použití Monte Carlo simulácií sa výraznejšie môže odlišovať aj rozdelenie jednotlivých zložiek vektora od požadovaného. Aby sme aj v prípade vektorov vypočítaných z kvantilov určených na simulácie dostali požadovanú koreláciu medzi zložkami vektora, musíme jednotlivé vektory prenásobiť rovnakou maticou A ako v pri Monte Carlo simuláciách. Korelácia medzi zložkami vygenerovaných vektorov však nemusí byť rovná našej požadovanej korelácii, rovná sa jej len stredná hodnota korelácie vygenerovaných vektorov. To znamená, že pri každom novom výpočte bude korelácia iná. Pri riešení budeme používať vo všetkých časoch rovnakú sadu vektorov, a teda aj rovnakú hodnotu korelácie.

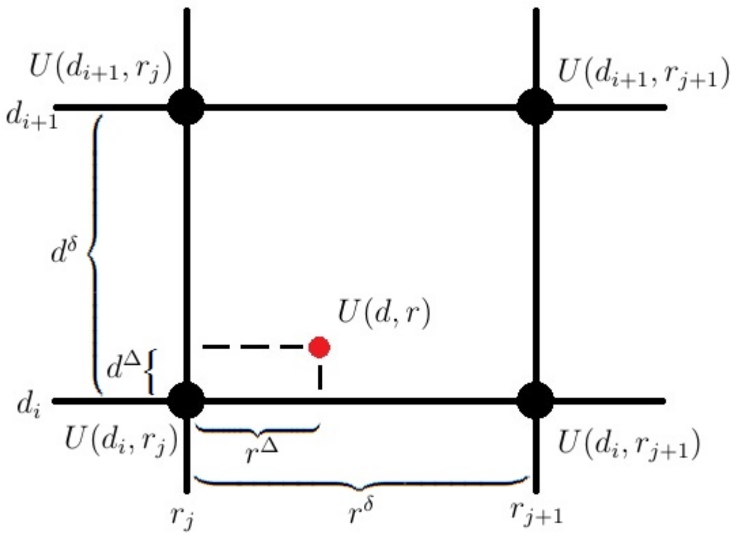
4.3 Optimalizácia v ostatných časoch

4.3.1 Odhad užitočnosti pomocou interpolácie

Takýmto spôsobom vieme nájsť optimálne riadenie v poslednom čase, keď robíme rozhodnutia, $T-1$. V ostatných časoch bude výpočet miene odlišný, pretože už nebudeme dosadzovať hodnoty daného stavu do funkcie užitočnosti, ale bude nás zaujímať aká je stredná hodnota užitočnosti v danom stave. Problémom je, že množinou hodnôt nasporenej čiastky vyjadrenej v pomere k poslednej mzde v nasledujúcom roku sú kladné reálne čísla, avšak my sme schopní vypočítať stredné hodnoty užitočnosti a optimálne riadenia v príslušnom čase len pre konečné množstvo hodnôt. To znamená, že ak chceme vypočítať strednú hodnotu užitočnosti, ktorú budeme mať, ak sa v nasledujúcom roku dostaneme do stavu keď máme aktuálne nasporené nejaké konkrétne množstvo a bude nejaká konkrétna úroková miera, len s nulovou pravdepodobnosťou budeme mať vypočítanú strednú hodnotu užitočnosti v tomto stave. Rekurentný vzťah pre naše úspory a úrokovú mieru je zhodný pre všetky časy, a teda vieme určiť, do akého stavu sa pri danej simulácii a pri danom riadení dostaneme. Lenže v ňom poznáme strednú hodnotu užitočnosti s nulovou pravdepodobnosťou, preto musíme nájsť spôsob ako využiť stavy, pre ktoré strednú hodnotu užitočnosti poznáme. Pre každú nasporenú čiastku máme vypočítané stredné hodnoty užitočnosti pri tých istých hodnotách úrokovej miery. Pritom vzdialenosti medzi nasporenými čiastkami d_t^δ a taktiež medzi úrokovými miermi r_t^δ, v ktorých sme robili výpočty, sú rovnaké. Máme teda akúsi mriežku bodov, v ktorých poznáme strednú hodnotu užitočnosti. Najjednoduchším riešením bude interpolácia lineárnym splajnom. Zoberieme si všetky štyri stavy, v ktorých máme vypočítané stredné hodnoty užitočnosti, ktoré zároveň spĺňajú tieto podmienky:

- jedná sa o najbližšiu menšiu alebo najbližšiu väčšiu nasporenú hodnotu od daného stavu
- jedná sa o najbližšiu menšiu alebo najbližšiu väčšiu hodnotu úrokovej miery od daného stavu

Hľadaná stredná hodnota užitočnosti v danom stave a čase bude váženým priemerom stredných hodnôt užitočnosti v závislosti od toho ako ďaleko sa daný stav nachádza od príslušných bodov. Keďže používame lineárny splajn, súčet váh bude rovný 1. Majme



Obr. 2: Ilustrácia k odvodeniu výpočtu strednej hodnoty užitočnosti pomocou inerpolácie.

teda stav s nasporeným d počtom ročných platov pri úrokovej miere r. Strednú hodnotu užitočnosti máme vypočítanú pre nasporených d_i a d_{i+1} ročných platov pri úrokovej miere r_j a r_{j+1}, pričom $d_i < d < d_{i+1}$ a $r_j < r < r_{j+1}$. Táto situácia je zobrazená na obrázku 2. Rozdiel medzi hodnotami d a d_i máme označené ako d^Δ a rozdiel medzi r a r_j ako r^Δ. Strednú hodnotu užitočnosti v stave $[d, r_j]$ vypočítame ako lineárnu kombináciu stredných hodnôt užitočnosti $U(d_i, r_j)$ a $U(d_{i+1}, r_j)$ nasledovne.

$$U(d, r_j) = \frac{(d^\delta - d^\Delta)U(d_i, r_j) + d^\Delta U(d_{i+1}, r_j)}{d^\delta}$$

Analogicky vieme odhadnúť strednú hodnotu užitočnosti v stave $[d, r_{j+1}]$.

$$U(d, r_{j+1}) = \frac{(d^\delta - d^\Delta)U(d_i, r_{j+1}) + d^\Delta U(d_{i+1}, r_{j+1})}{d^\delta}$$

Teraz využijeme vypočítané stredné hodnoty užitočnosti v stavoch $[d, r_j]$ a $[d, r_{j+1}]$ na odhad v stave $[d, r]$.

$$\begin{aligned} U(d, r) &= \frac{(r^\delta - r^\Delta)U(d, r_j) + r^\Delta U(d, r_{j+1})}{r^\delta} = \\ &= \frac{(r^\delta - r^\Delta)((d^\delta - d^\Delta)U(d_i, r_j) + d^\Delta U(d_{i+1}, r_j))}{d^\delta r^\delta} + \\ &+ \frac{r^\Delta((d^\delta - d^\Delta)U(d_i, r_{j+1}) + d^\Delta U(d_{i+1}, r_{j+1}))}{d^\delta r^\delta} \end{aligned}$$

Tým sme vyjadrili strednú hodnotu užitočnosti v požadovanom stave $[d, r]$.

4.3.2 Odhad užitočnosti pomocou extrapolácie

Pomocou lineárneho splajnu však stále nedokážeme vypočítať strednú hodnotu užitočnosti a optimálne riadenie pre ľubovoľný stav, do ktorého sa dostaneme v nasledujúcom čase. Lineárny slajn je použiteľný len ak existujú stavy, v ktorých je hodnota úrokovej miery vyššia alebo rovná, hodnota úrokovej miery nižšia alebo rovná, nasporená hodnota vyššia alebo rovná a nasporená hodnota menšia alebo rovná ako v požadovanom stave a vo všetkých z nich poznáme strednú hodnotu užitočnosti. Podmienka, že musí existovať stav, kedy je hodnota úrokovej miery nižšia alebo rovná ako v požadovanom stave, bude platná vždy, ak budeme robiť výpočty aj pre úrokovú mieru rovnú 0, pretože do záporných hodnôt sa dostať nevieme. Čo sa týka pomeru nasporenej sume ku poslednej mzde, tá je vždy väčšia ako 0. Napriek tomu je vhodné vypočítať hodnotu užitočnosti aj pre tento stav v každom čase, pretože nasporenú sumu inak zdola ohraničiť nevieme a vďaka lineárnemu splajnu budeme vedieť odhadnúť strednú hodnotu užitočnosti pre ľubovoľne malý stav. Stav, do ktorého sa dostaneme z nasporenej čiastky veľkosti 0 bude v budúcom roku navýšená len o príspevky, nakoľko v garantovanom aj v negarantovanom fonde nemáme investované žiadne úspory. Hodnota riadenia pre takéto stavy je preto nepodstatná, lebo pre ľubovoľné riadenie sa dostaneme vždy do rovnakého stavu. Pre horné ohraničenie úrokovej miery je rozumné si zvoliť nejakú hodnotu, o ktorej nepredpokladáme, že by mohla byť prekročená. Keďže nepredpokladáme, že bude prekročená, v prípade prekročenia v našich simuláciách budeme uvažovať úrokovú mieru rovnú maximálnej možnej, ktorú sme si zvolili. Poslednou situáciou, ktorú nevieme vyriešiť pomocou lineárneho splajnu je tá, keď sa dostaneme do stavu s nasporenou čiastkou vyššou ako je maximálna v nasledujúcom čase, pri ktorej máme vypočítanú strednú hodnotu užitočnosti. V diplomovej práci [13], v ktorej sa uvažovalo sporenie len v druhom pilieri, sa tento problém riešil pomocou myšlienky, že ak máme už nasporenú veľkú čiastku v pomere ku poslednej mzde, príspevky do druhého piliera sú v porovnaní s nasporenou čiastkou malé, tak ich zanedbáme. To znamená, že nasporené množstvo peňazí sa už len úročí v garantovanom, respektíve negarantovanom fonde až do konca sporenia a nie je navyšovaná o pravidelné príspevky. V takomto prípade optimálne riadenie nezávisí od veľkosti nasporeného majetku. V našej úlohe sa však táto veta aplikovať nedá. Samotná funkcia užitočnosti je síce rovnaká, ale v našom prípade počítame užitočnosť nielen z nasporených prostriedkov v druhom, ale aj v prvom pilieri. Ku premennej d_t teda pripočítavame konštantu c, kvôli ktorej nám toto zjednodušenie nevyrieši náš problém. Musíme preto nájsť iný spôsob ako odhadnúť strednú hodnotu užitočnosti pre stavy, kde je nasporené viac. My na to využijeme extrapoláciu. Je potrebné nájsť si nejakú vhodnú funkciu, pomocou ktorej budeme dopočítavať stredné hodnoty užitočnosti v stavoch s väčšími nasporenými čiastkami ako je maximálna, ktorej strednú hodnotu užitočnosti poznáme. Funkcia užitočnosti, ktorú vo výpočte používame je v tvare (24). Vo všeobecnosti je možné použiť ľubovoľný parameter $a > 0$. Pre zjednodušenie použijeme len parametre $a > 1$. Znamená to, že sa zameriame skôr na ľudí s väčšou averziou k riziku. Vo výsledkoch však uvidíme, že zaujímavejšie výsledky dostávame práve pri väčšej averzii k riziku. Funkcia užitočnosti sa tak zjednodušila do tvaru $U(d) = -(d + c)^{1-a}$, kde $a > 1$. Parameter c je kladný ako aj premenná d. To vedie k tomu, že hodnoty užitočnosti sú vždy záporné. Navyše vieme, že je funkcia užitočnosti rastúca a konkávna vzhľadom na d. Vlastnosti funkcie vyjadrujúcej strednú hodnotu užitočnosti vzhľadom na d v danom čase a pri danej úrokovej miere sú popísané vo Vete 1.

Veta 1. *Majme úlohu (43), kde funkcia užitočnosti v účelovej funkcii je záporná, rastúca a konkávna vzhľadom na premennú d. Potom pre funkciu $f_{t,r}(d+c)$ vyjadrujúcu strednú hodnotu užitočnosti vzhľadom na $d > 0$ v danom čase t a pri danej úrokovej miere r platí, že je záporná a rastúca.*

Dôkaz: Postupne si prejdeme zápornosť aj rastúcosť:

- Nech je v čase $t+1$ funkcia užitočnosti, respektíve funkcia strednej hodnoty funkcie užitočnosti pri danej úrokovej miere záporná. Pre každý stav v čase t počítame na základe simulácií strednú hodnotu funkčných hodnôt užitočnosti, respektíve stredných hodnôt funkcie užitočnosti, ktoré sú podľa predpokladu záporné. Potom aj táto stredná hodnota zo samých záporných hodnôt záporná. Indukciou sa dostaneme do ľubovoľného času, kde zápornosť platí rovnako.

- Nech je v čase $t+1$ funkcia užitočnosti, respektíve funkcia strednej hodnoty funkcie užitočnosti pri danej úrokovej miere rastúca. Máme dva stavy v čase t, v ktorých je nasporená hodnota rovná $d_t^{(1)}$ a $d_t^{(2)}$, pričom $d_t^{(1)} < d_t^{(2)}$ a úroková miera je v nich rovnaká r_t. Vygenerujeme množinu vektorov z dvojrozmerného normálneho rozdelenia s príslušnými parametrami, pomocou ktorých budeme robiť simulácie. Zoberme ľubovoľný (i-ty) z náhodných vektorov $[\psi_i, \Phi_i]^T$, kde jedna zložka bude predstavovať hodnotu ψ a druhá Φ z (43). Keďže východzia úroková miera r_t pri oboch stavoch je rovnaká, pri danej simulácii sa dostaneme do stavu r_{t+1} bez ohľadu na to, koľko sme mali v čase t nasporené. Takisto výnosnosť z negarantovaného fondu $R^s(t, t+1)$ bude pri danej simulácii zhodná. Majme teda v čase t nasporené $d_t^{(1)}$. Zvoľme optimálnu stratégiu $\hat{\delta}_1$, teda také rozdelenie medzi garantovaný a negarantovaný fond, ktorý nám prinesie v čase $t+1$ najväčšiu strednú hodnotu užitočnosti. V čase $t+1$ teda budeme mať nasporené $d_{t+1}^{(1)}(\hat{\delta}_1, \psi_i, \Phi_i) = d_t^{(1)} \frac{\hat{\delta}_1 \exp(R^b(t,t+1)) + (1-\hat{\delta}_1)\exp(R^s(t,t+1))}{(1+\beta_t^v)(1+\beta_t^c)} + \tau_{t+1}$. Teraz si predstavme, že máme v čase t nasporené $d_t^{(2)}$. Uvažujme rovnaké rozdelenie úspor $\hat{\delta}_1$ medzi garantovaný a negarantovaný fond ako v prvom prípade. Teraz už nemusí byť toto rozdelenie úspor nutne optimálne. Pri rovnakej simulácii sa dostaneme do stavu s nasporenými $d_{t+1}^{(2)}(\hat{\delta}_1, \psi_i, \Phi_i) = d_t^{(2)} \frac{\hat{\delta}_1 \exp(R^b(t,t+1)) + (1-\hat{\delta}_1)\exp(R^s(t,t+1))}{(1+\beta_t^v)(1+\beta_t^c)} + \tau_{t+1}$ ročnými platmi. Keďže $d_t^{(1)} < d_t^{(2)}$, tak potom platí aj nasledovný rad implikácií:

$$\begin{array}{rcl} d_{t+1}^{(1)}(\hat{\delta}_1, \psi, \Phi) & < & d_{t+1}^{(2)}(\hat{\delta}_1, \psi, \Phi) \\ & \Downarrow & \\ f_{t,r_t}(d_{t+1}^{(1)}(\hat{\delta}_1, \psi, \Phi)) & < & f_{t,r_t}(d_{t+1}^{(2)}(\hat{\delta}_1, \psi, \Phi)) \\ & \Downarrow & \\ E(f_{t,r_t}(d_{t+1}^{(1)}(\hat{\delta}_1, \psi, \Phi))) & < & E(f_{t,r_t}(d_{t+1}^{(2)}(\hat{\delta}_1, \psi, \Phi))) \end{array}$$

Pri vychádzaní zo stavu $d_t^{(2)}$ sme ale nepoužili optimálne riadenie $\hat{\delta}_2$. Keďže

$$\hat{\delta}_2 = \arg\max_{\delta} E(f_{t,r_t}(d_{t+1}^{(2)}(\delta, \psi, \Phi)))$$

Z toho vyplýva, že $E(f_{t,r_t}(d_{t+1}^{(2)}(\hat{\delta}_2, \psi, \Phi))) > E(f_{t,r_t}(d_{t+1}^{(2)}(\hat{\delta}_1, \psi, \Phi)))$, a teda aj $E(f_{t,r_t}(d_{t+1}^{(2)}(\hat{\delta}_2, \psi, \Phi))) > E(f_{t,r_t}(d_{t+1}^{(1)}(\hat{\delta}_1, \psi, \Phi)))$, čím je rastúcosť dokázaná. Indukciou sa dostaneme do ľubovoľného času t.

Z Vety 1 vyplýva, že extrapolačnú funkciu budeme hľadať takú, ktorá je na intervale kladných čísel záporná a rastúca. Naša funkcia užitočnosti je konkávna a zároveň o extrapolačnej funkcii vieme, že je rastúca a ohraničená nulou zhora. Doplníme teda požiadavku aby aj extrapolačná funkcia bola konkávna, čo sa nevylučuje s rastúcosťou a ohraničenosťou zhora. Táto extrapolačná funkcia bude v každom čase a pri každej úrovni úrokovej miery rovnaká s tým, že príslušné parametre v nej si samostatne v každom čase a pri každej úrovni úrokovej miery nakalibrujeme. Naša funkcia užitočnosti je v tvare $U(d) = -(d+c)^{1-a}$, kde c a a sú parametre. Nakoľko sú funkčné hodnoty extrapolačnej funkcie v čase $T-1$ vypočítavané z hodnôt funkcie užitočnosti a obe majú podobné vlastnosti, budeme požadovať aby existovali hodnoty parametrov extrapolačnej funkcie také, že naša funkcia užitočnosti bude zhodná s extrapolačnou funkciou pri týchto parametroch. Parametre, ktoré má funkcia užitočnosti, zachováme. Spravíme v nej len kozmetickú úpravu exponentu, kde vynecháme zväčšenie o 1. Extrapolačná funkcia $f(d)$ s parametrami h a j má teda zatiaľ tvar $f(d) = -(d+h)^{-j}$. Parameter j mení tvar krivky funkcie $f(d)$. Aby platilo, že pre každé $d > 0$ bude funkčná hodnota menšia ako 0 a zároveň rastúca, platí to aj pre veľmi veľké d idúce do ∞. Preto musí byť parameter $j > 0$. Zmenou parametra h posúvame celú funkciu doľava, respektíve doprava vzhľadom na d. Aby pre každé $d > 0$, nielen veľmi veľké d, existovala funkčná hodnota, musí $d + h > 0$, a preto $h \geq 0$. Ďalej doplníme ešte parameter, ktorý bude meniť rýchlosť rastu funkcie na celom definičnom obore, teda parameter g, ktorý násobí celý výraz. Dostávame tak funkciu (44).

$$f(d) = -g(d + h)^{-j} \tag{44}$$

Táto funkcia by nám teda mala pomôcť pri odhade strednej hodnoty užitočnosti v stave, do ktorého sa dostaneme pri danej simulácii v nasledujúcom čase, pričom pomer nasporenej čiastky ku poslednej mzde je väčší ako v ľubovoľnom stave v danom čase, v ktorom sme strednú hodnotu vypočítali. Pri výpočte stredných hodnôt užitočnosti a optimálnych riadení v čase t poznáme stredné hodnoty užitočnosti v čase $t + 1$ v konečnom počte hodnôt d a v konečnom počte hodnôt úrokovej miery. Ako sme spomenuli vyššie, pre každú hodnotu úrokovej miery, v ktorej robíme výpočty, odhadneme parametre samostatne. Na základe danej simulácie potom využijeme extrapolačnú funkciu s príslušnými parametrami. Keďže máme tri neznáme parametre, na ich určenie budeme potrebovať tri rovnice. Zvolíme si teda tri stavy v čase $t+1$, v ktorých sú známe stredné hodnoty užitočnosti pri danej úrokovej miere. Pomery nasporenej čiastky a poslednej mzdy označíme d_1, d_2 a d_3, pričom predpokladáme $0 \leq d_1 < d_2 < d_3$. Príslušné stredné hodnoty užitočnosti sú U_1, U_2 a U_3, a teda $U_1 < U_2 < U_3 < 0$. Dostávame tak sústavu (45) - (47) troch rovníc o troch neznámych.

$$U_1 = -g(d_1 + h)^{-j} \tag{45}$$

$$U_2 = -g(d_2 + h)^{-j} \tag{46}$$

$$U_3 = -g(d_3 + h)^{-j} \tag{47}$$

Parametra g sa zbavíme tak, že predelíme rovnicu (45) rovnicou (46) a rovnicu (45) rovnicou (47). Dostávame tak dve rovnice (48), (49) o dvoch neznámych.

$$\frac{U_1}{U_2} = \left(\frac{d_1 + h}{d_2 + h}\right)^{-j} \tag{48}$$

$$\frac{U_1}{U_3} = \left(\frac{d_1 + h}{d_3 + h}\right)^{-j} \tag{49}$$

Pre hodnotu parametra j platia dve rovnosti.

$$\frac{\ln \frac{U_1}{U_2}}{\ln \frac{d_2+h}{d_1+h}} = j \tag{50}$$

$$\frac{\ln \frac{U_1}{U_3}}{\ln \frac{d_3+h}{d_1+h}} = j \tag{51}$$

Teraz môžeme rovnice (50) a (51) zlúčiť.

$$\frac{\ln \frac{U_1}{U_2}}{\ln \frac{d_2+h}{d_1+h}} = \frac{\ln \frac{U_1}{U_3}}{\ln \frac{d_3+h}{d_1+h}} \tag{52}$$

Rovnicu (52) upravíme, čím dostávame (53).

$$\frac{\ln \frac{U_1}{U_2}}{\ln \frac{U_1}{U_3}} = \frac{\ln\left(1 + \frac{d_2-d_1}{d_1+h}\right)}{\ln\left(1 + \frac{d_3-d_1}{d_1+h}\right)} \tag{53}$$

To, že vieme nájsť h spĺňajúce (53) ako aj postup numerického riešenia tejto rovnice uvádzame v Prílohe A. Keď teda máme vypočítanú hodnotu parametra h a potrebujeme vyjadriť chýbajúce parametre g a j. Parameter j vieme dopočítať z rovnice 50, respektíve 51. Z toho už ľahko vypočítam aj parameter g, z ľubovoľnej z rovníc (45) - (47).

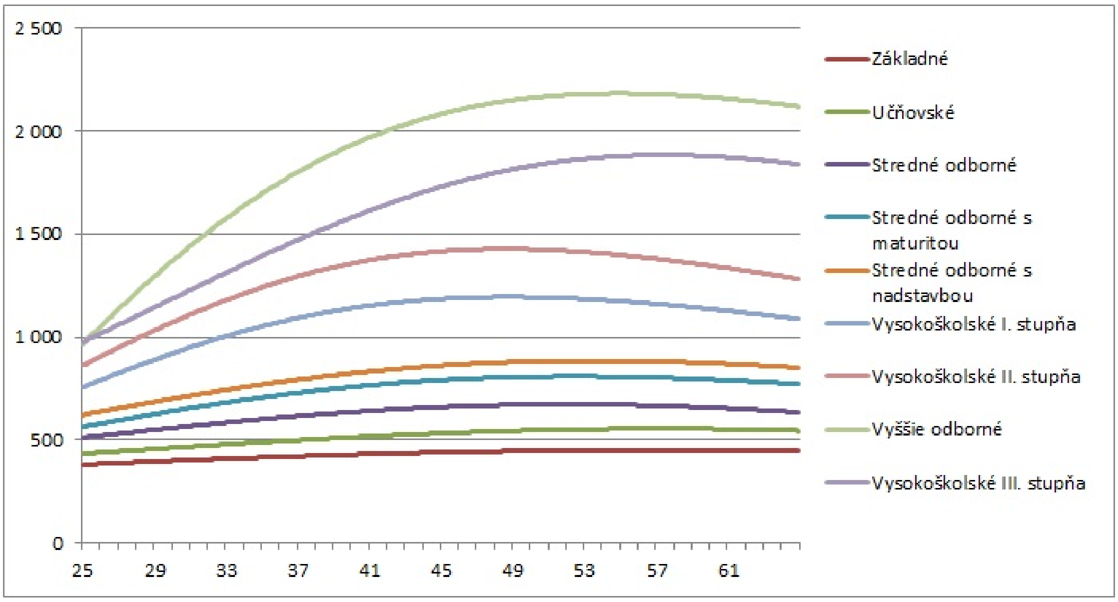
$$g = -U_i(d_i + h)^j$$

Tento postup vykonáme v danom čase pre každú z úrokových mier, pre ktoré vypočítavame stredné hodnoty užitočnosti a pre každú z nich dostaneme samostatné parametre g, h a j.

Pokiaľ potrebujeme zistiť strednú hodnotu funkcie užitočnosti v danom čase pri jednej z úrokových mier, v ktorých sme hľadali extrapolačnú funkciu, do extrapolačnej funkcie dosadíme príslušné parametre a hodnotu d. Funkčná hodnota je odhadom strednej hodnoty užitočnosti v danom stave. Pokiaľ ale nie je úroková miera rovná niektorej z tých, v ktorých sme robili výpočty, použijeme opäť lineárny splajn. Vypočítame hodnotu extrapolačnej funkcie použitím parametrov pre dve najbližšie úrokové miery, medzi ktorými sa naša úroková hodnota nachádza a v ktorých sme vypočítali potrebné parametre. Výsledná stredná hodnota užitočnosti bude lineárnou kombináciou týchto dvoch hodnôt v závislosti od toho, ako sa naša úroková miera od nich líši, presne tak ako pri interpolácii. Pokiaľ je úroková miera väčšia ako je ľubovoľná z úrokových mier, pre ktoré sme odhadovali príslušné parametre, opäť použijeme parametre pre maximálnu úrokovú mieru.

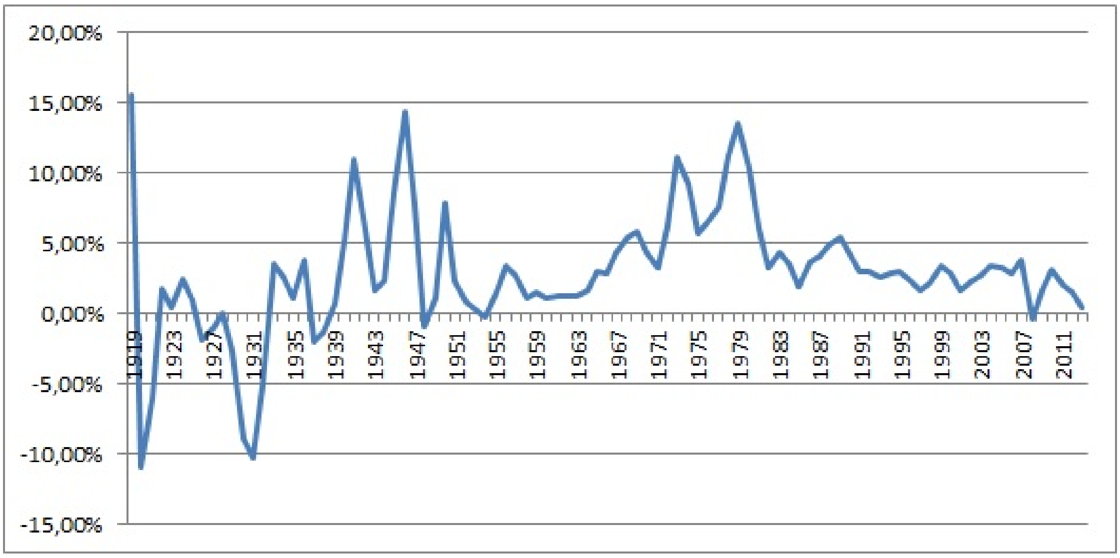
4.4 Hodnoty použitých parametrov

Ako východzie hodnoty jednotlivých parametrov budeme používať parametre použité v [5] s tým, že ich budeme meniť a porovnávať výsledky. V našich výpočtoch budeme uvažovať človeka, ktorý pracuje, a teda aj odvádza príspevky do prvého aj druhého piliera, 40 rokov. Veľkosť súčtu príspevkov do oboch pilierov tvorí 18% zo mzdy sporiteľa. Pomer medzi príspevkom do prvého a druhého piliera je aktuálne 14% ku 4% zo mzdy. Podľa zákona sa majú od roku 2017 postupne zvyšovať príspevky do druhého piliera o 0,25% na úkor prvého až do výšky 6%, ktorá by mala byť dosiahnutá v roku 2024. V ďalších obdobiach predpokladáme, že sa príspevky meniť nebudú, a teda do druhého piliera pôjde 6% a do prvého piliera 12% z našej mzdy. Čo sa týka ročnej valorizácie miezd, budeme uvažovať kariérny rast podľa najvyššieho dosiahnutého vzdelania. Pre každú skupinu použijeme odhad pre kariérny rast vypočítaný na základe výšky miezd v závislosti od veku v danej skupine. Ako dáta použijeme [10] zobrazené na Obrázku 3, kde máme už odhadnutú výšku miezd pre všetky skupiny v závislosti od veku, avšak dáta v sebe nezahŕňajú mieru inflácie. Kariérny rast miezd vypočítame ako pomer odhadnutej mzdy vo veku $i+1$ rokov a odhadnutej mzdy vo veku i zmenšený o 1. Tým dostaneme hodnotu parametrov β^c_{i-22} pre požadovanú skupinu. Výšku inflácie



Obr. 3: Výška hrubej mzdy podľa najvyššieho dosiahnutého vzdelania a veku, bez inflácie.

predikovať nebudeme, ale použijeme historické dáta inflácie v USA vypočítanej z indexu spotrebiteľských cien, označovaného CPI. Podľa [4] je CPI vážený priemer cien tovarov a služieb v spotrebnom koši, ktorý obsahuje napríklad stravu, náklady na dopravu, či zdravotnú starstlivosť. Jednotlivé váhy sú volené na zálade dôležitosi danej položky spotrebného koša. Dáta s mesačnými hodnotami CPI v USA za obdobie 1919 - 2014 sme použili z [9]. Mieru ročnej inflácie z nich vypočítame ako medziročnú zmenu priemernej hodnoty CPI. Tým, že dáta obsahujú čísla za 95 rokov a v našom modeli uvažujeme sporenie počas 40 rokov, musíme si zvoliť obdobie, z ktorého použijeme vypočítané hodnoty inflácie. Keďže podľa [14] sa aktuálna hodnota inflácie pohybuje okolo 0, vyberieme si obdobie 1950 - 1990, kde je v úvodných rokoch inflácia taktiež v okolí 0. V našom modeli budeme hodnoty inflácie dosadzovať za parameter β_t^v.



Obr. 4: Vývoj inflácie vypočítaný z indexu spotrebiteľských cien CPI za obdbie 1919 - 2014.

Ďalej potrebujeme určiť parametre jednotlivých fondov. Negarantovaný fond bude reprezentovaný indexom S&P 500, pričom na odhad parametrov bol použitý jeho vývoj v období 1871-2012. Stredná hodnota výnosu tohto fondu μ^s je tak rovná 8,44% p.a. a disperzia σ^s je 14,17% p.a. Parametre CIR modelu na modelovanie úrokovej miery slúžiacej na výpočet výnosu z garantovaného fondu boli kalibrované na úrokovej miere EURIBOR v období 1999-2012 pomocou metódy maximálnej vierohodnosti publikovanej v [1] a vypočítané v [5]. Ich hodnoty sú nasledovné: κ=0,8993, θ=0,0226 a σ^b=0,148. V modeli uvažujeme aj koreláciu ρ medzi negarantovaným a garantovaným fondom odhadovanú v období 1962-2012, ktorá je rovná -0,01082.

Teraz nám zostáva si určiť parametre slúžiace k numerickému riešeniu úlohy. Potrebujeme teda parametre, ktoré nám určia maximálne hodnoty d_t^{max}, v ktorých budeme robiť výpočty v čase t, vzdialenosť medzi jednotlivými hodnotami d_t^{δ}, v ktorých budeme robiť výpočty a takisto maximálnu hodnotu úrokovej miery r_t^{max} a vzdialenosť medzi úrokovými mierami, v ktorých budeme robiť výpočty r_t^{δ}. Navyše potrebujeme určiť parametre, ktoré budú slúžiť na výpočet parametrov v extrapolačnej funkcii a množinu riadení, z ktorých budeme vyberať tú optimálnu.

Ako maximálnu možnú úrokovú mieru r_t^{max} použijeme hodnotu 3% p.a. Vzhľadom na aktuálny vývoj predpokladáme, že úroková miera nebude príliš narastať a udrží sa na úrovni 3%. Pri sporení dĺžky 40 rokov môže byť toto ohraničenie príliš nízke, preto pre porovnanie použijeme aj vyššie hodnoty r_t^{max} a budeme pozorovať či táto zmena nejako ovplyvní naše výsledky pri zachovaní ostatných parametrov. Nevýhodou však bude nižšia presnosť spôsobená väčšími rozostupmi medzi úrokovými mierami, v ktorých robíme výpočty pri zachovaní rovnakej časovej náročnosti. Počet hodnôt úrokovej miery na výpočty stanovíme na 31, čím dosiahneme rozostupy medzi nimi na r_t^{δ}=0,1% pri $r_t^{max} = 3\%$. Pri väčších maximálnych úrokových mierach budú rozostupy pochopiteľne väčšie.

Aby sme mohli pri výpočtoch uvažovať aj možnosť zákonného ohraničenia na minimálny podiel investovaných úspor v garantovanom fonde v posledných rokoch sporenia, potrebujeme aby vzdialenosti medzi jednotlivými prípustnými riadeniami boli maximálne 10%. Navyše existuje výnimka, kedy je možné mať investovanú len polovicu (alebo viac) úspor v garantovanom fonde ako určuje zákon, preto musíme rozostupy medzi prípustnými riadeniami znížiť minimálne na 5%. Nakoľko sa jedná o výpočtovo náročnú úlohu, použijeme rozostupy medzi uvažovanými riadeniami práve 5%, čím dostávame maximálne 21 prípustných riadení v každom stave.

Aby sme vhodne zvolili parametre na určenie maximálnej hodnoty d_t^{max} v čase t a rozostupy medzi hodnotami d_t^{δ}, v ktorých robíme výpočty, spravíme pár simulácií aby sme vedeli, aké hodnoty premenná d_T za obdobie T rokov dosiahne. Rozdielom oproti úrokovej miere je, že pripúšťame prekročenie hodnoty d_t^{max} v čase t, v ktorom robíme výpočty použitím extrapolácie. V tomto odhade zatiaľ nebudeme uvažovať náš kariérny rast, pretože nám stačí len hrubý odhad hodnoty d_T a navyše budeme používať rovnaké parametre delenia hodnoty d_t (teda parametre d_t^{max} a d_t^{δ}) pre všetky skupiny ľudí, a teda bude momentálne $\beta_t^c = 0$. Očakávaný výnos z negarantovaného fondu je vyšší ako z garantovaného, preto na tento odhad použijeme stratégiu investície len do negarantovaného fondu počas celých T rokov, čo znamená $\delta_{t+1} = 0$ v (20). V každom roku náhodne vygenerujeme hodnotu náhodnej premennej ψ, ktorá je vo vzorci pre výpočet výnosu z akcií v negarantovanom fonde (36), čím dostaneme hodnotu $R^s(t, t+1)$. Prenásobením výnosu a pripočítaním príspevkov dostávame z hodnoty d_t použitím (20) novú hodnotu d_{t+1}. Tento postup opakujeme až kým sa nedostaneme do času T. Výslednú hodnotu d_T si zapamätáme a rovnakým spôsobom simulácie dostatočne veľa krát opakujeme. Tieto simulácie sa dajú popísať pomocou nasledovných vzťahov.

$$\begin{aligned} d_{t+1} &= d_t \frac{\exp(R^s(t,t+1))}{1+\beta_t^v} + \tau_{t+1} \\ d_1 &= \tau_1 \end{aligned}$$

Nakoľko sa nejedná o časovo náročnú operáciu, počet simulácií stanovíme kvôli presnejšiemu odhadu rozdelenia hodnôt d_T v tejto zjednodušenej úlohe na 100000 simulácií. Pri takto veľkom počte simulácií dostaneme síce vplyvom náhodnosti vždy inú maximálnu hodnotu d_T, avšak rozdiely sú minimálne. Maximálna hodnota d_T pre $T = 40$ nám pri 100000 simuláciách vychádza približne 8,1. Nakoľko sme pri výpočte použili zjednodušenia ako je pevne daný pomer medzi negarantovaným a garantovaným fondom a taktiež zanedbanie kariérneho rastu, budeme uvažovať maximálnu hodnotu $d_{40}^{max} = 10$. Šírku delenia d_t^{δ} pre každé t stanovíme na 0,1, čo v čase $T = 40$ predstavuje 101 stavov tejto premennej. Hodnotu d_t^{max} pre $t \neq T$ by sme mohli použiť rovnakú ako pre čas T, avšak je zbytočné robiť výpočty aj pre stavy, v ktorých máme nasporených príliš veľa ročných platov za krátke obdobie. Z dlhodobého hľadiska je očakávaný rast d_t v čase, pričom rast je exponenciálny. Keďže počiatočná hodnota úspor je 0, môžeme stanoviť d_t^{max} ako lineárnu funkciu vzhľadom na t s tým, že $d_0^{max} = 0$ a $d_{40}^{max} = 10$. To znamená, že by malo platiť d_t^{max}=0,25t pre $t = 1, 2, 3, \ldots, 40$. Aby sme zachovali d_t^{δ}=0,1 pre každé t, hodnotu d_t^{max} budeme musieť pre nepárne t zaokrúhliť buď nadol alebo nahor. My použijeme zaokrúhlenie nahor, čím dostaneme $d_t^{max} = 0.25t + 0.05$ pre $t = 1, 3, 5, \ldots, 39$. S veľkou pravdepodobnosťou by sme mali stále zostať v stave $d_t < d_t^{max}$. Ak by sme túto hodnotu aj prekročili, stále môžeme použiť extrapoláciu alebo zmeniť parametre d_t^{max}.

Čo sa týka parametrov pre extrapoláciu, budeme potrebovať určiť si presnosť ϵ na výpočet parametra h, dĺžku intervalu, v ktorom hľadáme h a nasporené čiastky d_1, d_2 a d_3 z nasledujúceho roku, v ktorých poznáme stredné hodnoty užitočnosti. Pre hodnoty d_t máme zvolenú šírku siete d_t^δ=0,1. Pre ε použijeme presnejšiu hodnotu a to ε=0,01. Veľkosť počiatočného intervalu na výpočet h stanovíme na 10, čím sa ku hodnote h dostaneme po 10 iteráciách. Zostáva nám teda určiť nasporené čiastky $d_1 < d_2 < d_3$. Hodnotu d_1 sme v Prílohe stanovili na 0. Parameter d_3 zvolíme tak aby sa rovnal hodnote d_{t+1}^{max}. Je to z toho dôvodu aby sa reálne stredné hodnoty užitočnosti extrapolovaných hodnôt čo najmenej líšili od funkčných hodnôt extrapolačnej funkcie. Keďže vypočítaná stredná hodnota užitočnosti v bode $d_3 = d_{t+1}^{max}$ je rovná funkčnej hodnote extrapolačnej funkcie v d_{t+1}^{max}, odhad strednej hodnoty užitočnosti v stavoch $d_t > d_{t+1}^{max}$ by mal byť lepší ako keby $d_3 < d_{t+1}^{max}$. Posledným chýbajúcim parametrom je d_2, ktorý zvolíme ako aritmetický priemer d_1 a d_3, a teda $\frac{d_{t+1}^{max}}{2}$. Pokiaľ nemáme vypočítanú strednú hodnotu užitočnosti pre tento stav, zoberieme najbližšiu väčšiu hodnotu d_{t+1}, v ktorej ju vypočítanú máme.

4.5 Výpočet odhadu nasporenej čiastky

Doteraz sme sa zaoberali modelom, ktorým vieme vypočítať optimálne rozhodnutia v rôznych stavoch aby sme dosiahli maximálnu hodnotu užitočnosti. V skutočnosti nás ale netrápi hodnota tejto užitočnosti, ale to, koľko budeme mať reálne nasporené v danom čase t, teda koľko ročných platov d_t sme do času t nasporili. Keďže sa jedná o náhodnú premennú, presnú hodnotu povedať nevieme, ale len odhad jej rozdelenia. Na odhad rozdelenia počtu nasporených platov v ľubovoľnom budúcom čase t využijeme opäť Monte Carlo simulácie a vypočítané optimálne riadenia na rozloženie nasporených peňazí do negarantovaného a garantovaného fondu. Princíp výpočtu bude taký, že si v každej simulácii vygenerujeme $T = 40$ náhodných dvojrozmerných vektorov, kde sú obe zo zložiek z normálneho rozdelenia $N(0, 1)$. Zároveň je medzi nimi korelácia ρ, o ktorej predpokladáme, že bude v príslušnom roku medzi výnosom z negarantovaného a garantovaného fondu. Zložky vygenerovaných náhodných vektorov budú predstavovať náhodné premenné ψ a Φ z (36) a (40) v rôznych časoch. Ich dosadením získame veľkosť výnosu z príslušných fondov pre daný rok. Ďalej na základe stavu, v ktorom sa nachádzame v danom čase, určíme optimálne riadenie. S využitím vzorca (22) a parametrov negarantovaného a garantovaného fondu, rastu miezd a veľkosti príspevkov v príslušnom roku získame stav, do ktorého sa dostaneme v nasledujúcom roku pri danej simulácii. Takto môžeme pokračovať až do času 40, kedy dostaneme rad hodnôt d_t v danej simulácii. Ako počiatočnú podmienku môžeme uvažovať buď (23) a budeme začínať v čase 1 alebo začneme v čase t_0, v ktorom sa aktuálne nachádzame, a použijeme aktuálne hodnoty d_{t_0} a r_{t_0} ako počiatočné podmienky. Opäť však musíme riešiť problém s tým, že hodnotu optimálneho pomeru máme vypočítanú len v niekoľkých stavoch, zatiaľ čo dostať sa vieme do ∞ stavov. V prípade, že je naša aktuálne nasporená hodnota d_t menšia ako d_t^{max}, vieme nájsť také $k_1 \in \mathbb{N}_0$, že $k_1 d_t^\delta \leq d_t \leq (k_1+1)d_t^\delta$, pričom v stavoch $k_1 d_t^\delta$ a $(k_1+1)d_t^\delta$ poznáme optimálne hodnoty riadení. Takisto, ak $r_t \leq r_t^{max}$, vieme nájsť $k_2 \in \mathbb{N}_0$, že $k_2 r_t^\delta \leq r_t \leq (k_2+1)r_t^\delta$, pričom v stavoch $k_2 r_t^\delta$ a $(k_2+1)r_t^\delta$ poznáme optimálne hodnoty riadení. Ak sú obe podmienky splnené, optimálne riadenie odhadneme opäť pomocou splajnu, teda z optimálnych riadení v stavoch $[k_1 d_t^\delta, k_2 r_t^\delta]$, $[k_1 d_t^\delta, (k_2+1)r_t^\delta]$, $[(k_1+1)d_t^\delta, k_2 r_t^\delta]$ a $[(k_1+1)d_t^\delta, (k_2+1)r_t^\delta]$. V prípade prekročenia hodnoty r_t^{max} budeme používať optimálne riadenie v stave s úrokovou mierou r_t^{max}. Ak by sme prekročili hodnotu d_t^{max} zase využijeme extrapoláciu na odhad optimálneho riadenia, avšak už len lineárnu. Zoberieme si teda 2 stavy, v ktorých máme v danom čase nasporené najviac (d_t^{max} a $d_t^{max} - d_t^\delta$) pri úrokovej miere $k_2 r_t^\delta$ a $(k_2+1)r_t^\delta$ a budeme uvažovať, že optimálne riadenie ďalej rastie alebo klesá lineárne, až kým nedosiahne buď 0 alebo 1. Predpis funkcie optimálnych riadení $h(d_t)$ pri úrokovej miere r_t bude teda pre $d_t > d_t^{max}$ nasledovný.

$$h(d_t) = min\left(max\left(h(d_t^{max}) + (d_t - d_t^{max})\frac{h(d_t^{max}) - h(d_t^{max} - d_t^\delta)}{d_t^\delta}, 0\right), 1\right) \tag{54}$$

kde hodnota $h(d_t^{max})$ je optimálne riadenie v stave $[d_t^{max}, r_t]$ a hodnota $h(d_t^{max} - d_t^\delta)$ je optimálne riadenie v stave $[d_t^{max} - d_t^\delta, r_t]$. Výsledkom bude použitie lineárneho splajnu hodnôt $h(d_t)$ pri úrokovej miere $k_2 r_t^\delta$ a $(k_2+1)r_t^\delta$.

Týmto spôsobom dostaneme pre každú simuláciu rad hodnôt d_t pre $t = 1, 2, \ldots, T$, respektíve $t = t_0, t_0+1, \ldots, T$. Tieto simulácie zopakujeme 100000, čím dostaneme 100000 hodnôt d_t v každom čase t. Získali sme tak odhad rozdelenia premennej d_t v čase t a ďalej ho môže použiť napríklad na výpočet kvantilov v rôznych časoch.

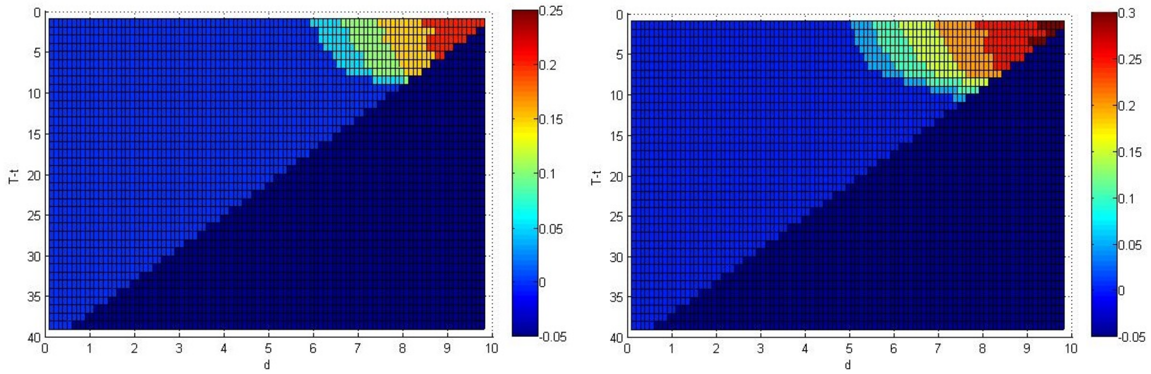
5 Výsledky

V kapitole 3 sme si definovali problém, ktorý chceme riešiť. Jeho výsledkom sú optimálne hodnoty rozdelenia úspor v druhom dôchodkovom pilieri medzi garantovaný a negarantovaný fond pri danej hodnote úspor, úrokovej miere a čase. Na základe nich vieme odhadnúť, koľko budeme mať nasporené pri dosiahnutí dôchodkového veku. Určíme si referenčný scenár a budeme sledovať ako sa nám mení výsledok v prípade zmeny jednotlivých parametrov.

5.1 Analýza referenčného scenára

Ako referenčný scenár si definujeme takú situáciu, v ktorej budeme uvažovať hodnoty parametrov uvedené v podkapitole 4.4. Čo sa týka averzie k riziku, tú zvolíme $a = 9$, čo vyjadruje pomerne vysokú averziu. Ďalej budeme uvažovať sporiteľa s ukončeným vysokoškolským vzdelaním II. stupňa. Zákonné obmedzenie v posledných 10 rokoch na minimálnu investíciu do garantovaného fondu v referenčnom scenári do výpočtu nezahrnieme. Pri odhade d_T budeme uvažovať úrokovú mieru r_0 v čase $t = 0$ rovnú 0,5%.

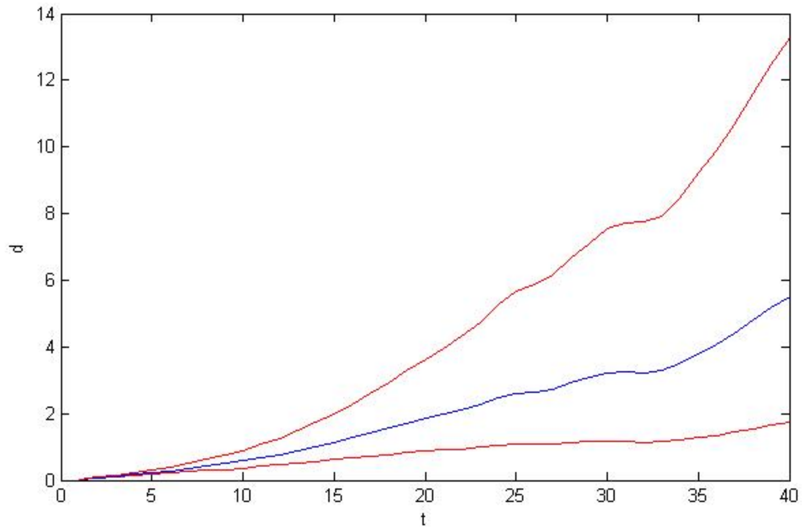
Odhad dôchodku získaného z prvého piliera pri referenčnom scenári za podmienky, že celých 40 rokov sporíme v prvom aj v druhom pilieri, nám vyšiel vo výške 6,1198 ročných platov v poslednom roku sporenia. V prípade, že by sme pri rovnakých podmienkach sporili len v prvom pilieri, dostali by sme z neho 9,0499 ročných platov. Dôležitou informáciou pre nás bude, či vieme tento rozdiel vykompenzovať úsporami z druhého piliera. Ten je závislý na výkonnosti fondov, do ktorých sme investovali. Optimálny pomer pre rozdelenie nasporenej čiastky medzi negarantovaný a garantovaný fond v každom čase t a každej hodnote d_t pri vybraných úrokových mierach sú zobrazené na Obr. 5. Os označená $T - t$ predstavuje zostávajúci počet rokov do dôchodku, os označená ako d vyjadruje počet nasporených platov a príslušné farby v jednotlivých stavoch predstavujú optimálnu hodnotu rozdelenia medzi garantovaný a negarantovaný fond. Hodnota rovná 0 predstavuje investíciu všetkých úspor do negarantovaného fondu, hodnota 1 investíciu všetkých úspor do garantovaného fondu, hodnoty z $(0, 1)$ príslušný pomer medzi oboma fondmi a záporné hodnoty sú znakom toho, že sa jedná o málo pravdepodobnú situáciu s príliš vysokými úsporami vzhľadom na čas, a preto sme v danom stave optimálne riadenie nepočítali. Úrokové miery, v ktorých sú zobrazené optimálne riadenia, sú 0,6% a 2,1%.



Obr. 5: Zobrazenie optimálneho rozdelenia úspor medzi fondy v referenčnom scenári pri úrokovej miere 0,6% (vľavo) a 2,1% (vpravo).

Podľa Obr. 5 je badateľné, že pri 0,6% aj 2,1% úrokovej miere je vo väčšine skúmaných stavov optimálnou stratégiou investícia len do negarantovaného fondu. Prvý krát, kedy sme našli stav, v ktorom je optimálne investovať časť úspor aj do garantovaného fondu pri úrokovej miere 2,1% je až v 29. roku sporenia (teda 11 rokov do konca sporenia) v prípade nasporenia aspoň 7,3 ročných platov. Pri úrokovej miere 0,6% sme našli takýto stav až v 31. roku sporenia pri nasporených minimálne 7,3 ročných platoch. Najmenší počet nasporených ročných platov, pri ktorom je optimálne investovať aj do garantovaného fondu, je v prípade úrokovej miery 2,1% v poslednom roku sporenia, a to 5 ročných platov. Pri úrokovej miere 0,6% sa tak stane taktiež v poslednom roku sporenia pri nasporení aspoň 5,9 ročných platov. Ďalej môžeme z Obr. 5 vidieť, že optimálne riadenie je pri danej úrokovej miere a v danom čase neklesajúca vzhľadom na d_t. To znamená, že čím viac máme nasporené, tým väčšia časť úspor je pri optimálnom rozdelení investovaná do garantovaného fondu. Čo sa týka závislosti optimálneho riadenia od času pri danej úrokovej miere a danom počte nasporených platov, väčšinou je s časom neklesajúce, avšak neplatí to vždy. Príkladom je stav pri úrokovej miere 0,6% a nasporených 8,6 ročných platoch, v 37. roku je optimálne riadenie rovné 0,2, v 38. roku sporenia len 0,15. Táto výnimka je spôsobená medziročnou zmenou v inflácii.

Teraz sa pozrieme ku akým nasporeným hodnotám sa vieme dostať s využitím



Obr. 6: Pohľad na vývoj počtu nasporených platov v referenčnom scenári v čase.

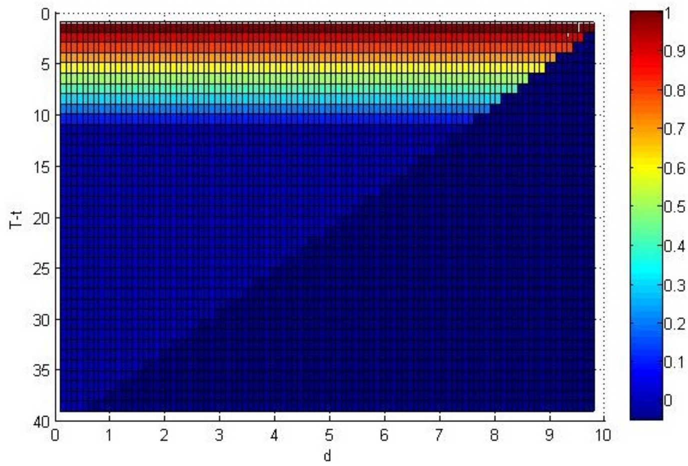
optimálnych riadení. Obr. 6 nám vyjadruje ako sa mení hodnota d_t vzhľadom na t. Modrou je vyznačená priemerná nasporená hodnota d_t v čase t. Červené krivky predstavujú 2,5% a 97,5% kvantil hodnôt d_t. Znamená to, že s 95% pravdepodobnosťou sa v danom čase nachádzame medzi týmito dvoma kvantilmi. Po 40 rokoch sporenia tak budeme mať nasporených priemerne 5,5180 ročných platov z druhého piliera a s 95% pravdepodobnosťou budeme mať nasporené medzi 1,7297 a 13,2678 ročnými platmi. K tomu však musíme pripočítať to, čo získame z prvého piliera, čo predstavuje 6,1198 ročných platov. Aby sa nám oplatilo sporiť v dvoch pilieroch, musí byť tento súčet väčší ako to, čo by sme získali len zo sporenia v prvom pilieri, čo znamená 9,0499 ročných platov. Zo 100000 simulácií nám vyšlo, že nasporený počet ročných platov z dvoch pilierov je väčší v 80,49% prípadov ako keby sme sporili len v jednom pilieri.

5.2 Analýza citlivosti na zmenu parametrov

Teraz sa pozrieme na to, ako nám ovplyvní výsledky zmena niektorých parametrov vzhľadom na referenčný scenár. Vypočítame si teda výnos z prvého piliera a z druhého piliera a tento súčet budeme porovnávať s dôchodkom aký by sme mali, ak by sme sporili pri rovnakých podmienkach len v prvom pilieri. V prípade sporenia len v prvom pilieri vplýva na počet nasporených ročných platov len kariérny profil sporiteľa.

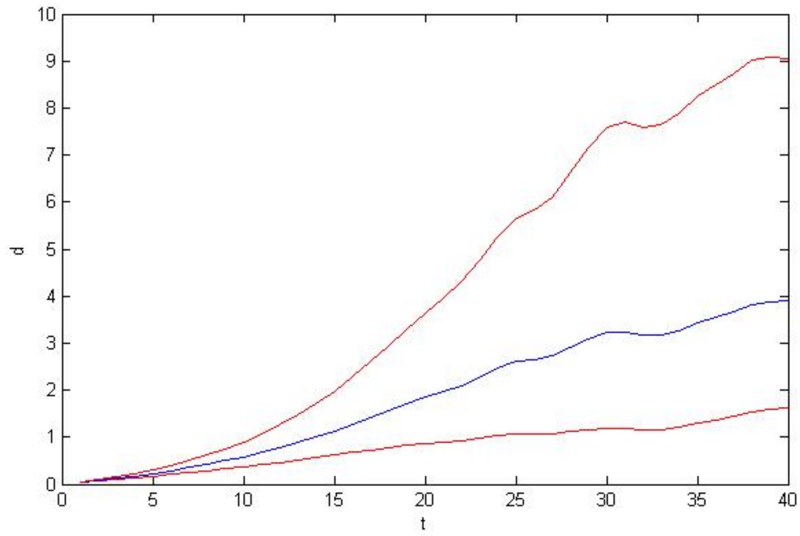
5.2.1 Zahrnutie zákonného ohraničenia v posledných 10 rokoch sporenia

Ako sme spomínali vyššie, v posledných 10 rokoch sporenia v druhom pilieri je podľa zákona povinnosť investovať časť úspor do garantovaného fondu. Minimálne množstvo prostriedkov v garantovanom fonde sa každoročne zvyšuje o 10% z celkového objemu v druhom pilieri, až v poslednom roku sporenia musí byť investovaná celá časť úspor v garantovanom fonde. Na požiadanie je však možné znížiť minimálne množstvo úspor v garantovanom fonde o polovicu. Pozrieme sa teda na to, aký vplyv na konečné bohatstvo bude mať toto zákonné obmedzenie a či je výhodné požiadať o zníženie úspor investovaných v garantovanom fonde.



Obr. 7: Zobrazenie optimálneho rozdelenia úspor pri zákonnom obmedzení na investíciu do garantovaného fondu.

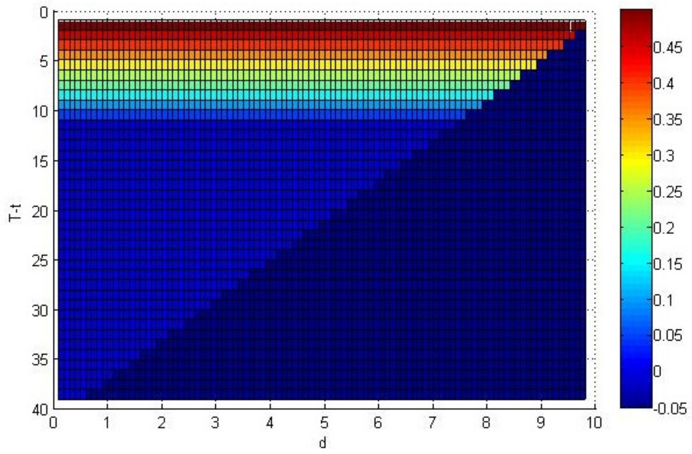
Na Obr. 7 môžeme vidieť aké je optimálne riadenie pri uvažovaní každoročného rastu minimálnej investície do garantovaného fondu o 10% v posledných 10 rokoch sporenia. Nakoľko nám vyšli rovnaké optimálne hodnoty riadení v skúmaných stavoch pri úrokovej miere 0,6% aj 2,1%, uvádzame len jeden obrázok optimálnych riadení. Môžeme si všimnúť, že v každom zo skúmaných stavoch je investícia do garantovaného fondu pri týchto úrokových mierach minimálna možná. To znamená, že počas prvých 30 rokov máme investované všetky svoje úspory v negarantovanom fonde. Do garantovaného fondu začneme investovať až v ďalších rokoch, presne tak ako je určený minimálny podiel úspor v garantovanom fonde.



Obr. 8: Pohľad na vývoj počtu nasporených platov pri zákonnom obmedzení na investíciu do garantovaného fondu.

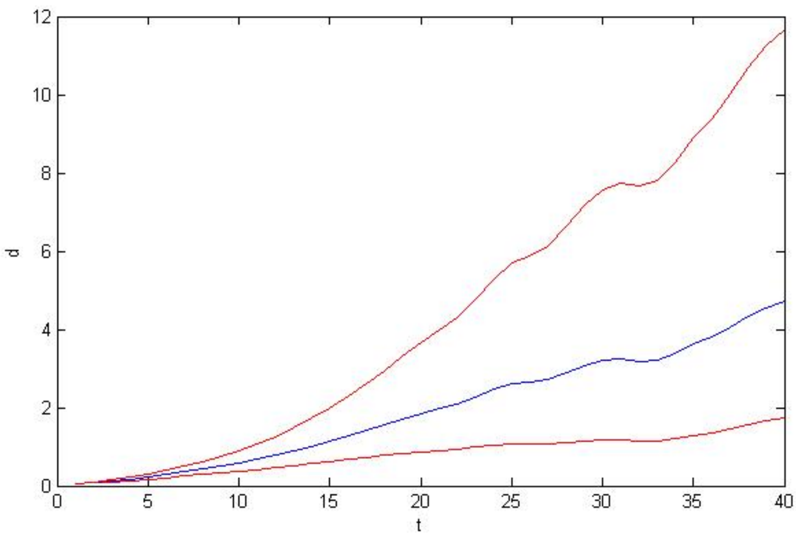
Obr. 8 nám zobrazuje ako sa mení počet nasporených ročných platov v čase. Opäť nám červené krivky vyznačujú 2,5% a 97,5% kvantil v danom čase a modrá krivka vyjadruje priemerný nasporený počet platov z druhého piliera. Na konci sporenia budeme mať nasporených priemerne 3,8998 ročných platov, pričom na 95% budeme v intervale 1,6270 a 9,041. Oproti referenčnému scenáru sa nám síce znížil priemerný počet platov aj skúmané kvantily, došlo však ku zúženiu 95% intervalu. Navyše hodnota 2,5% kvantilu nie je tak výrazne nižšia oproti referenčnému scenáru ako priemerný počet ročných platov a 97,5% kvantil. Zákonným ohraničením sa tak investícia do druhého piliera stáva menej rizikovou, avšak prináša aj nižší očakávaný výnos. Výnos z prvého piliera je rovnaký ako v prípade referenčného scenára, teda 6,1198. Keďže sa jedná o sporiteľa s rovnakým vzdelaním ako v referenčnom scenári, jeho kariérny rast, a teda aj hodnota dôchodku pri sporení len v prvom pilieri je taktiež rovnaká. Pravdepodobnosť, že je súčet dôchodkov z dvoch pilierov väčší ako len z prvého nám vyšla 63,11%. Dôsledkom nižšieho očakávaného výnosu je aj nižšia pravdepodobnosť, že nasporíme viac ako v prípade sporenia len v prvom pilieri.

V prípade, že by sme sa rozhodli požiadať o zníženie povinnej minimálnej hranice na investíciu v garantovanom fonde, bude situácia veľmi podobná. Optimálne riadenia v skúmaných stavoch, zobrazené na Obr. 9, pri úrokovej miere 0,6% a 2,1% sú zhodné,



Obr. 9: Zobrazenie optimálneho rozdelenia úspor pri znížení zákonného obmedzenia na investíciu do garantovaného fondu.

pričom do garantovaného fondu je optimálne investovať najmenšie možné množstvo financií.



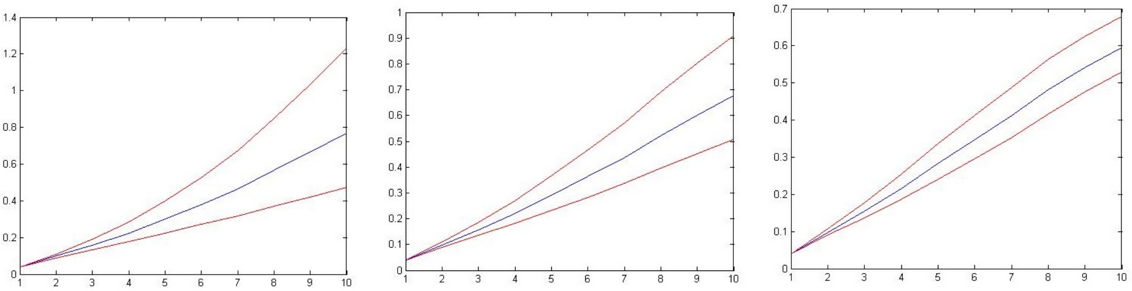
Obr. 10: Pohľad na vývoj počtu nasporených platov pri zníženom zákonnom obmedzení na investíciu do garantovaného fondu.

Čo sa týka priebehu nasporených prostriedkov v druhom pilieri pri zníženom obmedzení na minimálnu investíciu do garantovaného fondu, počas prvých 30 rokoch je takmer identický so scenárom bez obmedzení (referenčný) ako aj scenáru so zahrnutím zákonného obmedzenia. V nasledujúcich 10 rokoch už dochádza ku zmene, keď priemerné počty nasporených ročných platov ako ako aj 2,5% a 97,5% kvantily sú nižšie ako v referenčnom scenári, ale vyššie ako v prípade zákonných obmedzení. Priemerný počet nasporených ročných platov tak po 40 rokoch sporenia dosiahne 4,7335 a s pravdepodobnosťou 95% budeme mať nasporené aspoň 1,7280 a menej ako 11,6601 ročných platov. Rozdiel v 2,5% kvantile v porovnaní s referenčným scenárom je len 0,0017 ročných platov. Stredná hodnota počtu nasporených ročných platov je už výraznejšie nižšia ako v referenčnom scenári, ale aj výrazne vyššia ako pri zákonnom ohraničení. Šírka 95% intervalu v čase 40 je taktiež medzi scenárom bez ohraničení a so zákonným ohraničením.

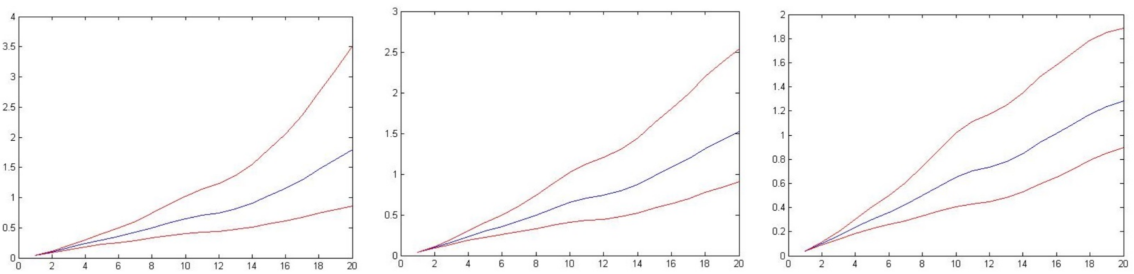
Z prvého piliera dostaneme rovnakú čiastku ako v predchádzajúcich scenároch, teda 6,1198, a tento súčet budeme porovnávať s rovnakou hodnotou 9,0499, čo predstavuje počet platov získaných len zo sporenia v prvom pilieri. Súčet nasporených hodnôt z prvého a druhého piliera nám vyšli väčšie ako pri sporení len v prvom pilieri v 74,63% prípadov.

5.2.2 Sporenie v druhom pilieri v kratšom období ako je doba sporenia

V tejto časti sa pozrieme na to ako sa zmení množstvo nasporených prostriedkov, ak vstúpime do druhého piliera až po niekoľkých rokoch sporenia. To znamená, že počas prvých rokov budeme odvádzať do prvého piliera celých 18% z našej mzdy, čím sa nám v konečnom dôsledku zvýši aj výška dôchodku z prvého piliera. Keďže do druhého piliera vstúpime až neskôr, nasporená čiastka z druhého piliera bude zase naopak, nižšia. Vplyv neskoršieho vstupu do druhého piliera budeme skúmať pri sporení v druhom pilieri počas posledných 10, respektíve 20 rokoch. Uvažovať pritom budeme scenáre bez zákonných ohraničení, so zákonným ohraničením ako aj so zníženým ohraničením. Tým, že sporíme v druhom pilieri len 10, respektíve 20 rokov, stačí nám hľadať optimálne riadenia len pre nižšie počty nasporených ročných platov. Pri sporení len 10 rokov v druhom pilieri nastavíme parametre d_t^{max} tak, aby v poslednom roku sporenia platilo d_{40}^{max}=2,5 a v prvom roku sporenia v druhom pilieri $d_{30}^{max} = 0$. Pri 20 rokoch sporenia parametre nastavíme tak, aby $d_{40}^{max} = 5$ a $d_{20}^{max} = 0$. Výsledkom riešenia týchto úloh bude vo všetkých skúmaných stavoch optimálne to riadenie, v ktorom je najväčšia možná časť úspor investovaná do negarantovaného fondu. To pri úlohe bez ohraničení znamená stálu investíciu v negarantovanom fonde, pri zákonných ohraničeniach je optimálne mať investované práve takú časť úspor v garantovanom fonde ako je určená minimálna hranica podľa zákona.



Obr. 11: Priebeh počtu nasporených platov pri sporení 10 rokov v druhom piliri. Vľavo bez obmedzenia, uprostred po znížení zákonného ohraničenia a vpravo pri zákonnom ohraničení.



Obr. 12: Priebeh počtu nasporených platov pri sporení 20 rokov v druhom piliri. Vľavo bez obmedzenia, uprostred po znížení zákonného ohraničenia a vpravo pri zákonnom ohraničení.

Na Obr. 11 a 12 môžeme vidieť, že opäť platí, že čím viac sme investovali do negarantovaného fondu, tým väčší očakávaný výnos vieme dosiahnuť, avšak pri väčšej rizikovosti. Kvôli prehľadnosti uvedieme hodnoty 2,5% a 97,5% kvantilu ako aj priemerný počet nasporených ročných platov z druhého piliera pri sporení 10 a 20 rokov v Tabuľke 2. Môžeme v nej vidieť, že priemer a 97,5% kvantil počtu ročných platov je vo všetkých prípadoch najväčší pri scenári bez ohraničenia a najmenší pri zákonnom ohraničení. Rozdiel nastáva pri 2,5% kvantile, kedy pri 10 ročnom sporení je poradie opačné a pri 20 ročnom sporení je najväčší pri zníženom ohraničení.

	10 rokov			20 rokov		
	2,5%	mean	97,5%	2,5%	mean	97,5%
bez ohraničení	0,4708	0,7690	1,2283	0,8579	1,7980	3,5169
znížené ohraničenia	0,5067	0,6763	0,9085	0,9044	1,5192	2,5375
zákonné ohraničenia	0,5285	0,5955	0,6792	0,8977	1,2808	1,8879

Tabuľka 2: Porovnanie priemeru a 2,5% a 97,5% kvantilov počtu nasporených platov v druhom pilieri pri 10 a 20 ročnom sporení.

	10 rokov	20 rokov
bez ohraničení	51,64%	54,70%
znížené ohraničenia	26,66%	36,79%
zákonné ohraničenia	0,19%	11,98%

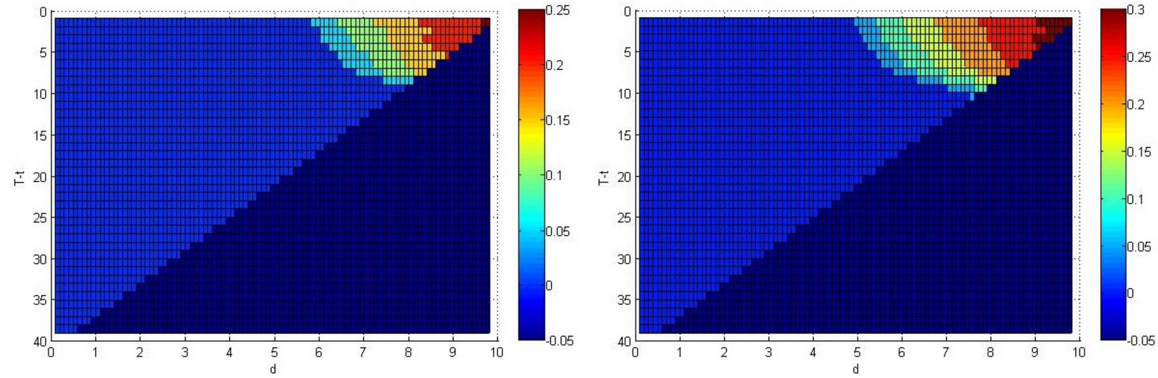
Tabuľka 3: Pravdepodobnosti, že vstupom do druhého piliera nasporíme viac, ak v druhom pilieri sporíme len 10 alebo 20 rokov.

Pri sporení po dobu 10 rokov v druhom pilieri získame z prvého piliera 8,3172 a v prípade 20 rokov sporenia v druhom pilieri 7,4647 ročných platov. Keď porovnáme jednotlivé súčty z prvého a druhého piliera s hodnotou, ktorú by sme získali sporením len v prvom pilieri, dostaneme pravdepodobnosti (uvedené v Tabuľke 3), že sa nám vyplatí vstup do druhého piliera. Môžeme si v nej všimnúť, že čím neskôr do druhého piliera vstúpime, tým je menšia pravdepodobnosť, že na tomto rozhodnutí zarobíme.

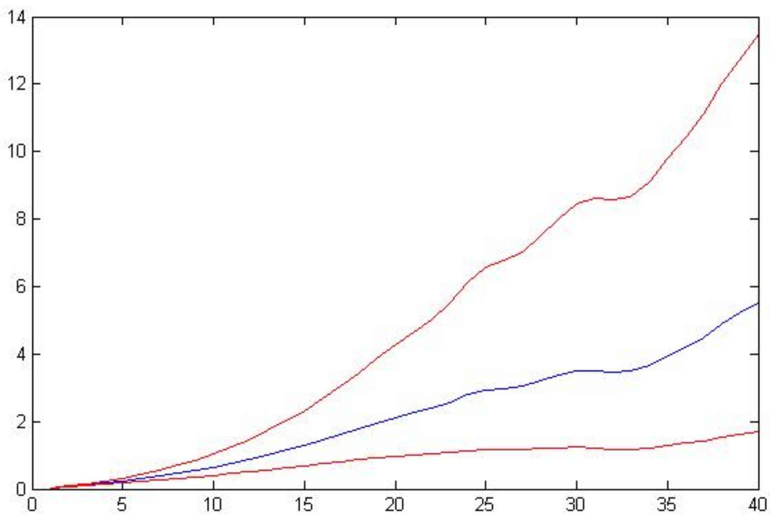
5.2.3 Vplyv úrovne vzdelania na výšku nasporených prostriedkov

Na Obr. 3 máme zobrazený vývoj miezd podľa najvyššieho dosiahnutého vzdelania. Pre porovnanie s vysokoškolským vzdelaním II. stupňa v referenčnom scenári si zvolíme základné a vyššie odborné vzdelanie.

Optimálne riadenia u základoškolsky vzdelaných ľudí na Obr. 13 je veľmi podobné vysokoškolsky vzdelaným ľuďom II. stupňa v referenčnom scenári, či už pri úrokovej miere 0,6% alebo 2,1%. Pozrieme sa teda na to, koľko ročných platov je možné nasporiť pri základoškolskom vzdelaní v druhom pilieri. Podľa Obr.14 môžeme vidieť, že



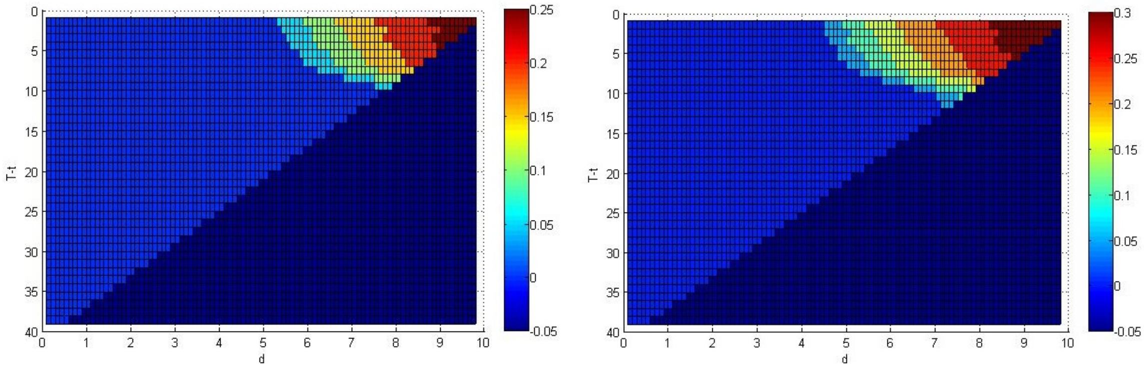
Obr. 13: Zobrazenie optimálneho rozdelenia úspor medzi fondy pri základoškolskom vzdelaní pri úrokovej miere 0,6% (vľavo) a 2,1% (vpravo).



Obr. 14: Priebeh počtu nasporených platov pri základoškolskom vzdelaní.

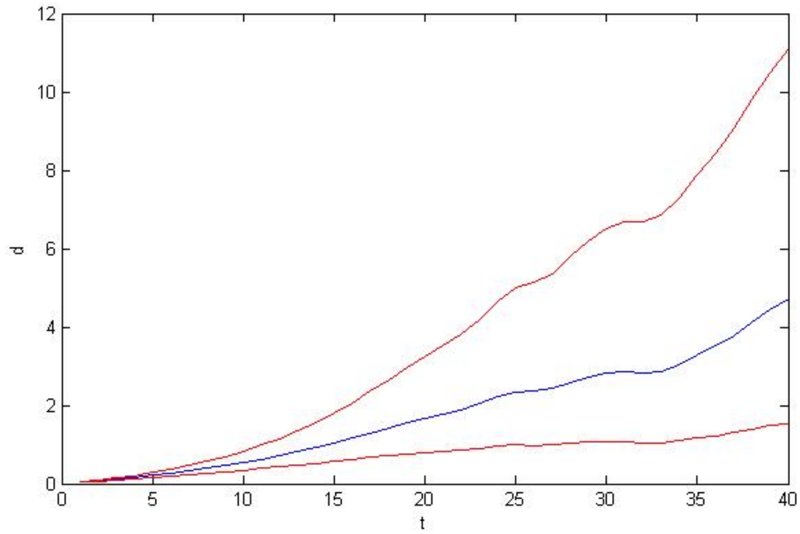
nielen optimálne riadenia, ale aj priebeh nasporeného počtu ročných platov je veľmi podobný referenčnému scenáru. 2,5% a 97,5% kvantily na konci sporenia dosahujú hodnoty 1,6871 a 13,4818, pričom priemerná hodnota nasporených platov je 5,5119, čo sú hodnoty veľmi blízke referenčnému scenáru. Z prvého piliera pri sporení v dvoch pilieroch je možné získať 5,9190 ročných platov, pričom ak by sme sporili len v prvom pilieri, získal by sme z neho 8,7308. Pravdepodobnosť, že by sa nám vyplatilo prejsť na začiatku sporenia do druhého piliera je tak 81,92%.

Pozrime sa teda aká je situácia pri vyššom odbornom vzdelaní. Hodnoty optimálnych riadení máme zobrazené na Obr. 15. Optimálne riadenia sa voči referenčnému scenáru



Obr. 15: Zobrazenie optimálneho rozdelenia úspor medzi fondy pri vyššom odbornom vzdelaní pri úrokovej miere 0,6% (vľavo) a 2,1% (vpravo).

odlišujú mierne vyššími investíciami do garantovaného fondu, avšak stále sú veľmi podobné.



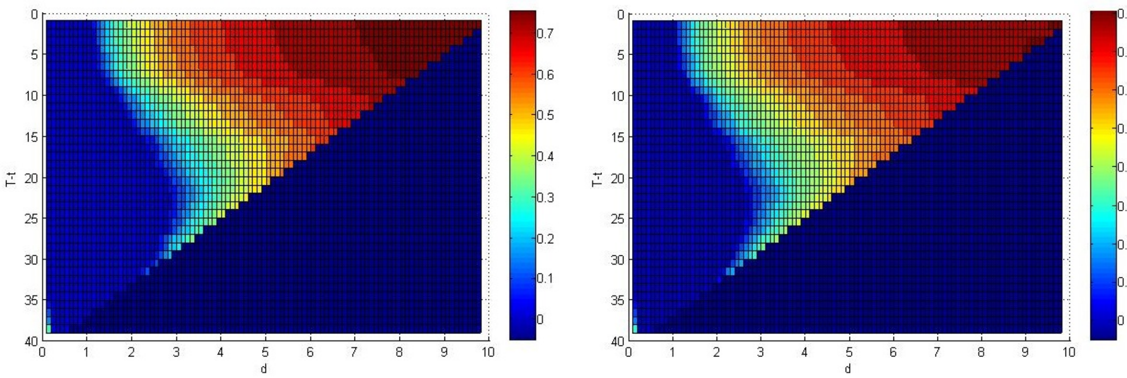
Obr. 16: Priebeh počtu nasporených platov pri vyššom odbornom vzdelaní.

Počet ročných platov, ktoré by sme si vedeli nasporiť je v prípade vyššieho odborného vzdelania o niečo nižší ako pri referenčnom scenári. Môžeme to vidieť na Obr. 16, kedy na konci sporenia našetríme priemere 4,7145, pričom 95% interval je 1,5396 a 11,0959. To, čo získame z prvého piliera, je 5,4054 ročných platov. Pre porovnanie, ak by sme v druhom pilieri nesporili, získali by sme z prvého piliera 8,0129 ročných platov.

Tieto rozdiely oproti referenčnému scenár môžeme vysvetliť tým, že ľudia s vyšším odborným vzdelaním majú vyšší kariérny rast ako vysokoškolsky vzdelaní ľudia II. stupňa. Dôsledkom toho nám vyšli aj mierne konzervatívnejšie optimálne riadenia na investíciu do negarantovaného fondu. Pravdepodobnosť, že vstupom do druhého piliera nasporíme viac ako keby sme boli iba v prvom je 79,53%, čo je podobná hodnota ako v prípade referenčného scenára.

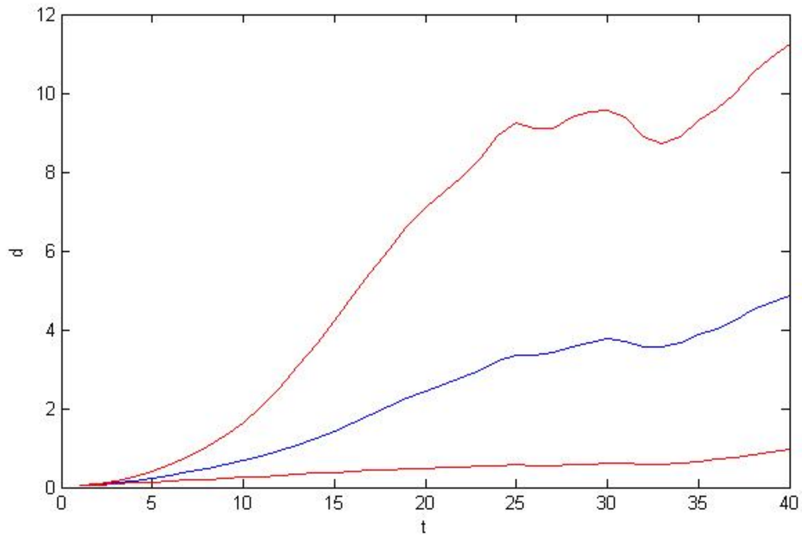
5.2.4 Vplyv volatility negarantovaného fondu na výsledky

Volatilita negarantovaného fondu v referenčnom scenári je rovná 14,17%. Na zistenie vplyvu volatility na výsledky budeme uvažovať scenár, kde volatilita indexvého fondu bude rovná 30%. Optimálne riadenia pre tento scenár môžeme vidieť na Obr. 17. Podľa



Obr. 17: Zobrazenie optimálneho rozdelenia úspor medzi fondy pri zvýšenej volatilite negarantovaného fondu pri úrokovej miere 0,6% (vľavo) a 2,1% (vpravo).

optimálnych riadení v tomto scenári by sme mali výrazne väčšiu časť z nasporených peňazí vložiť do garantovaného fondu ako pri referenčnom scenári. Je to spôsobené tým, že máme pomerne vysokú averziu k riziku rovnú 9 a negarantovaný fond je vo veľkej miere volatilný. Pozrime sa na to, aký to bude mať vplyv na celkové výnosy. Podľa Obr. 18 bude počet nasporených ročných platov z druhého piliera nižší ako v referenčnom scenári. Po 40 rokoch sporenia dostaneme v priemere 4,8734 ročných platov a s 95% pravdepodobnosťou budeme medzi 0,9609 a 11,2629 ročnými platmi. vidíme, že hlavne 2,5% je výrazne nižší ako v referenčnom scenári, a to z toho dôvodu, že pri nízkych nasporených čiastkach je optimálne investovať čo najväčší objem do

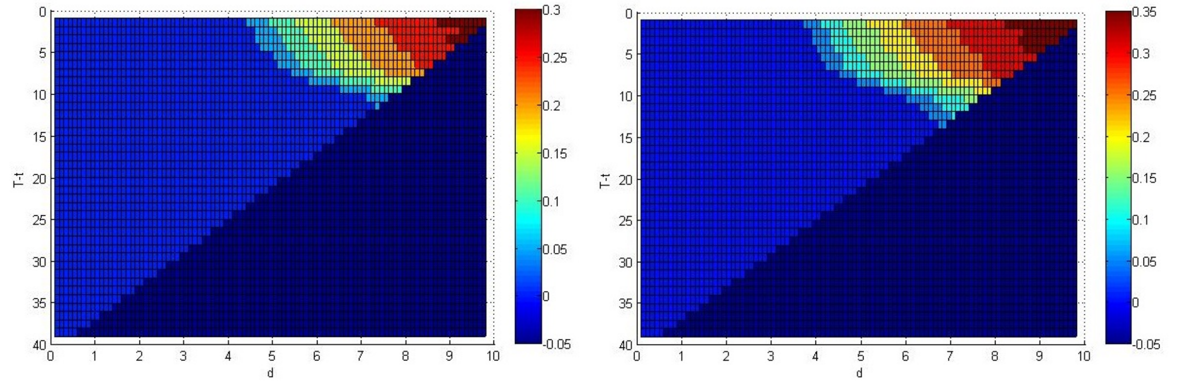


Obr. 18: Priebeh počtu nasporených platov pri zvýšenej volatilite negarantovaného fondu.

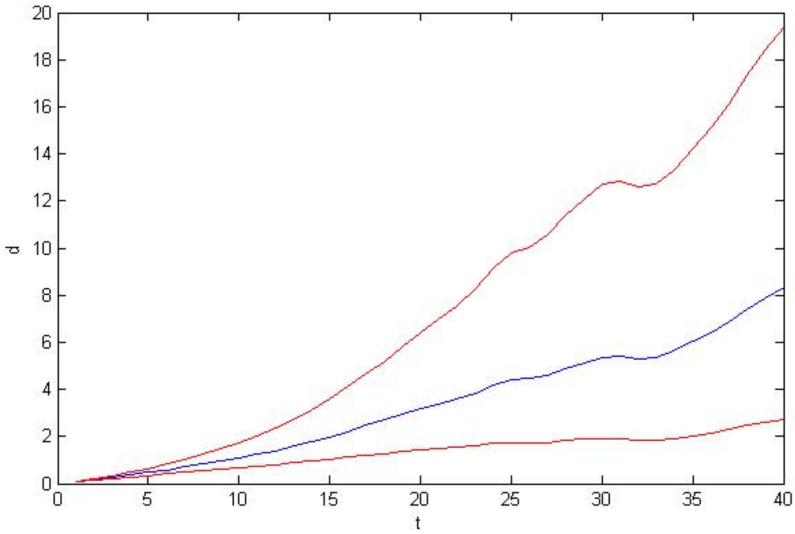
negarantovaného fondu, ktorý má vysokú volatilitu. Veľkosť 95% intervalu je napriek väčšej volatilite menšia ako v referenčnom scenári vplyvom optimálnych riadení odporúčajúcim investíciu veľkej časti majetku do garantovaného fondu. Po pripočítaní nasporených financií z prvého piliera bude tento súčet v 74,44% prípadov väčší ako keby sme sporili v len prvom pilieri.

5.2.5 Zmena výšky príspevkov do druhého piliera

Teraz sa pozrieme aký vplyv na úspory bude mať zmena výšky príspevkov do druhého piliera na 9% z našej mzdy na úkor príspevkov do druhého piliera. Tie by klesli na hodnotu 9% zo mzdy. V referenčnom modeli máme výšku príspevkov do druhého piliera v prvom roku sporenia stanovenú na 4%, pričom každoročne je navyšovaná o 0,25% až kým nedosiahne úroveň 6%, na ktorej zotrvá až do konca sporenia. Hodnoty optimálnych riadení v aktuálnom scenári zobrazené na Obr. 19 nabádajú na mierne vyššie investície do garantovaného fondu, ale rozdiely nie sú tak dramatické ako pri zvýšenej volatilite. Na Obr. 20 vidíme, že úspory z druhého piliera budú výrazne vyššie ako pri referenčnom scenári. Priemerná nasporená hodnota bude dosahovať 8,3202 ročných platov, pri 2,5% a 97,5% kvantiloch rovných 2,7457 a 19,3682 platov. Vidíme, že sa tak zväčšil 95% interval na konci sporenia, čo znamená vyššie riziko pri sporení

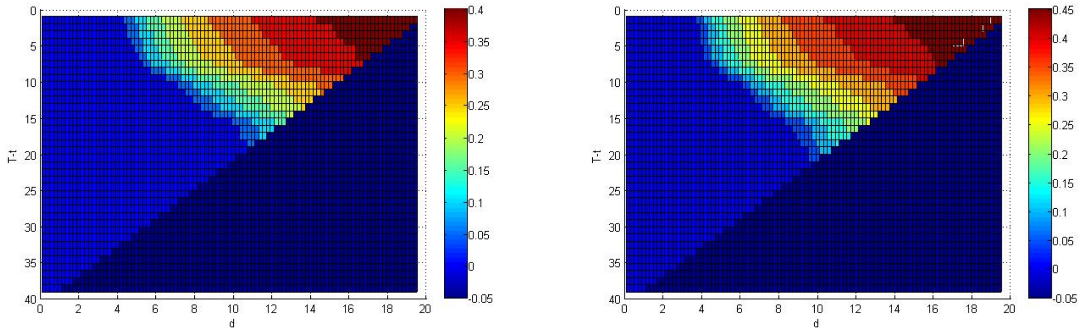


Obr. 19: Zobrazenie optimálneho rozdelenia úspor medzi fondy pri zvýšení príspevkov do drhého piliera pri úrokovej miere 0,6% (vľavo) a 2,1% (vpravo).



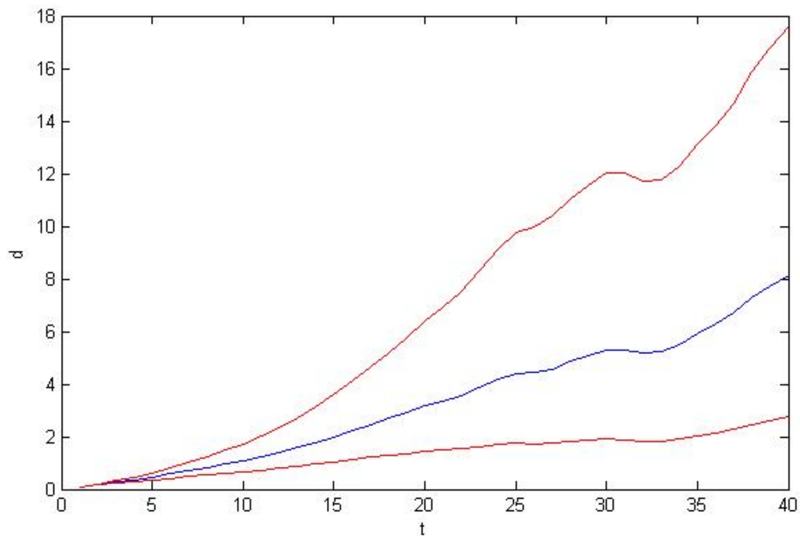
Obr. 20: Priebeh počtu nasporených platov pri zvýšení príspevkov do druhého piliera.

v druhom pilieri. Nakoľko sa zvýšili príspevky do druhého piliera, musel sa oproti referenčnému scenáru znížiť dôchodok z prvého piliera, ktorý je teraz na úrovni 4,525 ročných platov. Keď porovnáme súčet nasporených prostriedkov z oboch pilierov, s pravdepodobnosťou 83,31% bude vyšší ako keby sme nevstúpili do druhého piliera. Problém však je, že hodnoty 97,5% kvantilov sú výrazne vyššie ako maximálne hodnoty počtu nasporených platov v jednotlivých časoch d_t^{max}, ktoré sme uvažovali pri numerickom výpočte, čo mohlo nezanedbateľne ovplyvniť výsledky. Situáciu si teda prepočítame ešte raz, pričom použijeme 2 násobne vyššie hodnoty d_t^{max}. Optimálne hodnoty riadení pri úrokovej miere 0,6% a 2,1% sú zobrazené na Obr. 21. Pri použití



Obr. 21: Zobrazenie optimálneho rozdelenia úspor medzi fondy pri zvýšení príspevkov do drhého piliera a so zväčšeným rozsahom na nasporenú čiastku pri úrokovej miere 0,6% (vľavo) a 2,1% (vpravo).

optimálnych riadení so zväčšeným rozsahom na nasporenú čiastku bude priebeh nasporenej čiastky v čase vyzerať tak ako ilustruje Obr. 22. Porovnaním Obr. 20 a 22 vidíme,



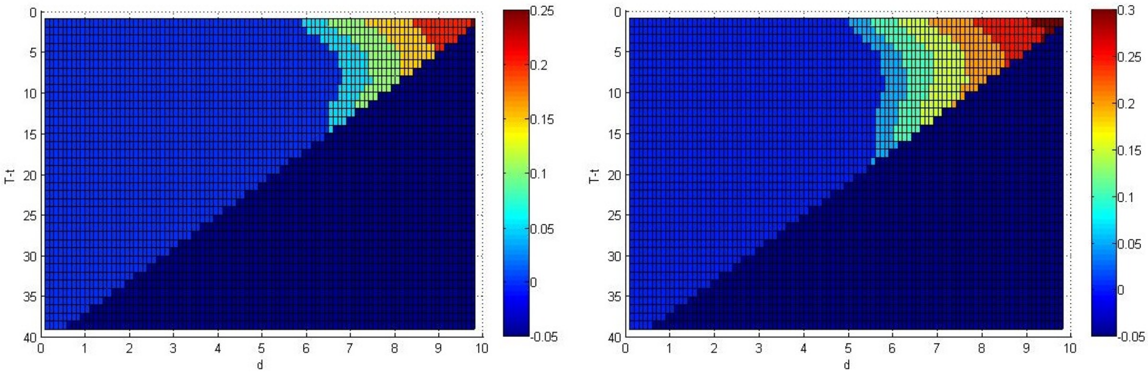
Obr. 22: Priebeh počtu nasporených platov pri zvýšení príspevkov do druhého piliera a so zväčšeným rozsahom na nasporenú čiastku.

že na výšku nasporenej čiastky zmena parametrov nemala výrazný vplyv. Mierne poklesla hodnota 2,5% kvantilu (2,7416) a priemerná hodnota nasporenej čiastky (8,1395) na konci sporenia. Väčší rozdiel môžeme pozorovať len pri 97,5% kvantile (17,6182).

Pravdepodobnosť, že sa nám vstup do druhého piliera vyplatí taktiež mierne poklesla na hodnotu 83,08%.

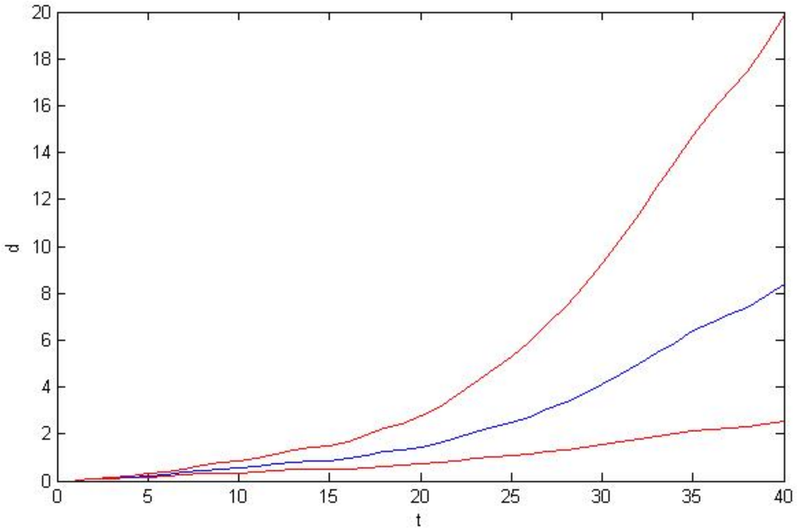
5.2.6 Vplyv voľby obdobia z ktorého čerpáme dáta inflácie

V referenčnom scenári uvažujeme vývoj inflácie rovnaký aký bol počas obdobia 1950-1990. Počas tohto obdobia bola úroveň inflácie zozačiatku nízka, približne v strede obdobia prudko narástla až nakoniec opäť poklesla. Pre porovnanie si zoberieme obdobie 1930-1970, v ktorom bol na začiatku prudký nárast inflácie, nasledoval pokles a na konci obdobia inflácia opäť stúpla. Na Obr. 23 si môžeme všimnúť zmenu tvaru vrs-

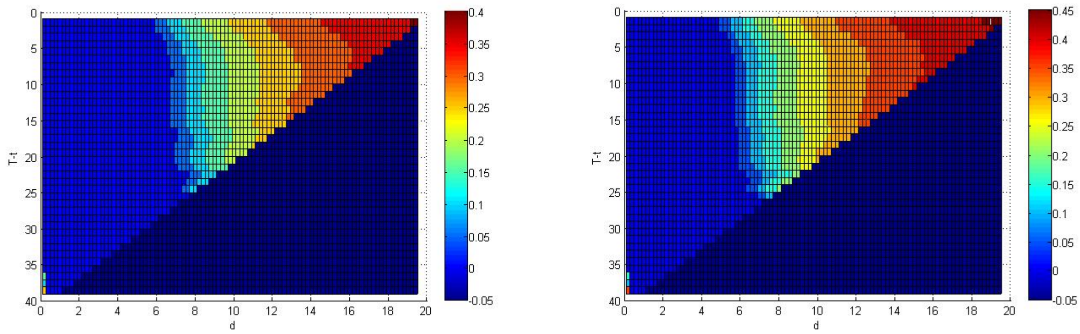


Obr. 23: Zobrazenie optimálneho rozdelenia úspor medzi fondy pri zmenených hodnotách inflácie pri úrokovej miere 0,6% (vľavo) a 2,1% (vpravo).

tevníc spájajúcich stavy s rovnakými optimálnymi riadeniami, ktoré spôsobila zmena inflácie. Rozsah hodnôt optimálnych riadení v skúmaných stavoch pri úrokovej miere 0,6% a 2,1% je však zhodný s referenčným scenárom. Čo sa týka priebehu investovaných financií v druhom pilieri, je zobrazený na Obr. 24. Môžeme na ňom vidieť výraznú zmenu oproti referenčnému scenáru, kde je priemerný počet nasporených platov (8,3806) ako aj 2,5% a 97,5% kvantily (2,525 a 19,8686) takmer zhodné so scenárom s príspevkami do druhého piliera vo výške 9%, hoci výška príspevkov do druhého piliera bola zhodná s príspevkami v referenčnom modeli. Hodnota dôchodku z prvého piliera je v tomto prípade zhodná s referenčným modelom. Pravdepodobnosť, že si vstupom do druhého piliera zvýšime dôchodok je výrazne vyššia, 95,04%. Aj v tomto scenári sme výraznejšie prekročili hodnotu d_t^{max}, výsledky preto opäť prepočítame použitím

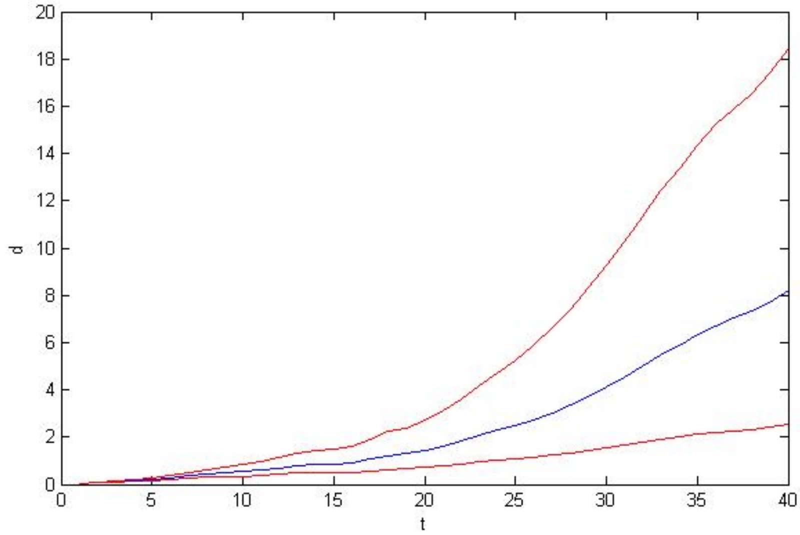


Obr. 24: Priebeh počtu nasporených platov pri zmene hodnôt inflácie.



Obr. 25: Zobrazenie optimálneho rozdelenia úspor medzi fondy pri zmenených hodnotách inflácie a so zväčšeným rozsahom na nasporenú čiastku pri úrokovej miere 0,6% (vľavo) a 2,1% (vpravo).

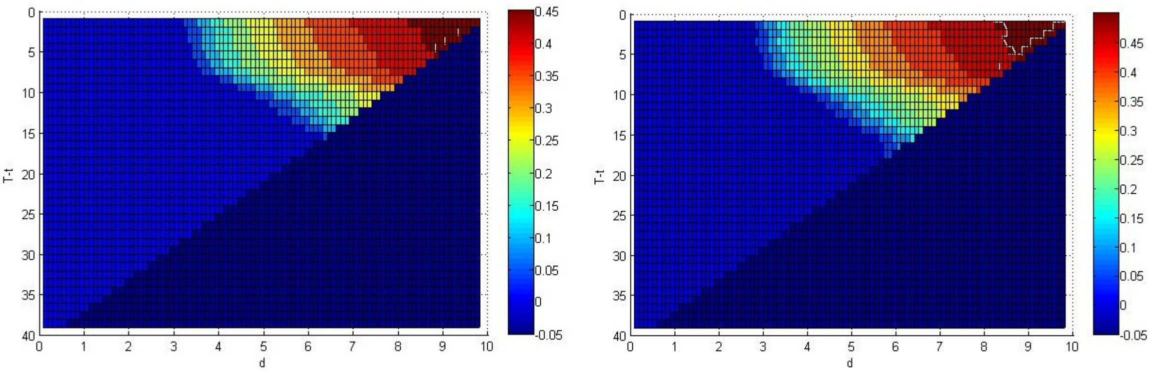
2 násobných hodnôt. Obr. 23 nám zobrazuje hodnoty optimálnych pomerov garantovaného a negarantovaného fondu pri uvažovaní väčšieho rozsahu na nasporenú čiatku. Keď sa pozrieme na Obr. 26, môžeme si všimnúť len malý rozdiel oproti pôvodnému výpočtu, ktorý je zobrazený na Obr. 24. Dokazujú to aj hodnoty 2,5% a 97,5% kvantilu na konci sporenia, rovné 2,5523 a 18,4600 ročných platov. Priemerný počet nasporených platov pitom mierne klesol na 8,2134. Pravdepodobnosť, že bude vstup do druhého piliera pre nás výhodnejší zase naopak, mierne vzrástla na 95,07%.



Obr. 26: Priebeh počtu nasporených platov pri zmene hodnôt inflácie a so zväčšeným rozsahom na nasporenú čiastku.

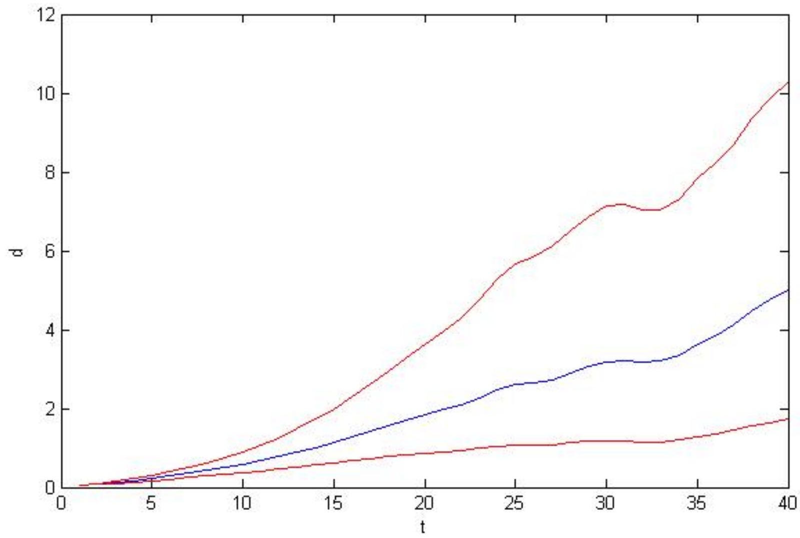
5.2.7 Scenár so zmenenou averziou k riziku

Hoci sme povedali, že v referenčnom scenári máme pomerne silnú averziu k riziku, kvôli lepšej ilustrácii hodnôt optimálnych riadení sa pozrieme na ešte extrémnejšiu hodnotu averzie rovnú 13. Optimálne riadenia máme zobrazené na Obr. 27. Vidíme, že pomery



Obr. 27: Zobrazenie optimálneho rozdelenia úspor medzi fondy pri vyššej averzii k riziku pri úrokovej miere 0,6% (vľavo) a 2,1% (vpravo).

medzi odporúčanou investíciou do garantovaného a negarantovaného fondu sú výrazne vyššie ako v referenčnom scenári. Obr. 28 nám ilustruje to, že zvýšenie averzie viedlo ku



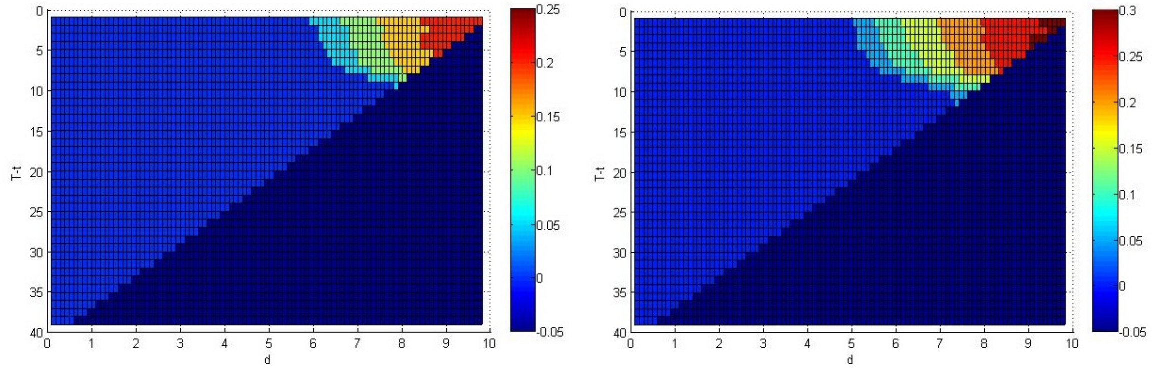
Obr. 28: Priebeh počtu nasporených platov pri vyššej averzii k roziku.

zníženiu 97,5% kvantilu (10,3546), avšak 2,5% kvantil (1,7237) zostal takmer rovnaký ako v referenčnom scenári. Tým pádom aj priemerný počet ročných platov klesol na úroveň 4,9948.

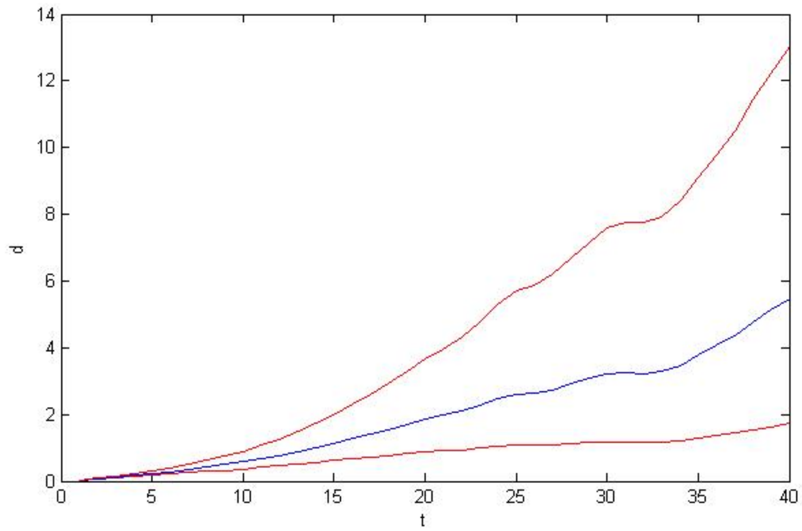
5.2.8 Vplyv maximálnej hodnoty úrokovej miery pri numerickom výpočte

Pri numerickom riešení úlohy sme si museli ohraničiť stavovú premennú r_t, predstavujúcu úrokovú mieru. Vzhľadom na hodnoty aktuálnych úrokových mier sa hodnota 3% môže zdať dostatočne veľká ako horné ohraničenie. Na druhú stranu, 40 rokov sporenia je dostatočne dlhé obdobie na to aby sa hodnoty úrokovej miery výraznejšie pohli. Z tohto pohľadu môže byť horná hranica 3% prinízka. Pozrieme sa teda na to ako ovplyvní výsledky zmena maximálnej úrokovej miery na úroveň 9%.

Optimálne riadenia na Obr. 29 sú pri rovnakej úrovni úrokovej miery takmer identické s referenčným scenárom. Pozrieme sa teda koľko budeme mať nasporené z druhého piliera po zmene parametra. Podľa Obr. 30 je aj priebeh nasporených prostriedkov v druhom pilieri takmer rovnaký, čo dokazujú aj skúmané hodnoty na konci sporenia. Priemerný počet ročných platov nám vyšiel 5,4837 a 95% interval má hranice 1,7218 a 13,0463, čo sú hodnoty blízke referenčnému scenáru. Po zaokrúhlení nám vyšla dokonca úplne rovnaká pravdepodobnosť, že sa nám prechod do druhého piliera vyplatí, teda



Obr. 29: Zobrazenie optimálneho rozdelenia úspor medzi fondy so zvýšeným prípustným rozsahom úrokovej miery pri hodnote 0,6% (vľavo) a 2,1% (vpravo).

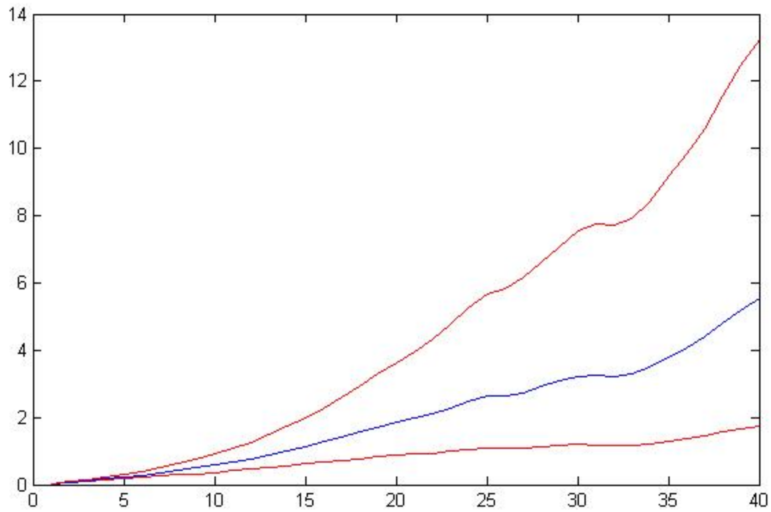


Obr. 30: Priebeh počtu nasporených platov so zvýšeným prípustným rozsahom úrokovej miery.

80,49%.

5.2.9 Scenár s odlišnou úrokovou mierou na začiatku sporenia

V referenčnom scenári uvažujeme pri simuláciách úrokovú mieru r_0 v čase začiatku sporenia rovnú 0,5%. V tomto scenári sa pozrieme na to, aký vplyv má zmena tejto štartovacej úrokovej miery na 2%. Hodnoty optimálnych riadení budú zhodné s referenčným scenárom, líšiť sa bude len priebeh hodnoty majetku v druhom pilieri. To



Obr. 31: Priebeh počtu nasporených platov so zvýšenou štartovacou úrokovou mierou.

nám vyjadruje Obr. 31. Rozdiel oproti referenčnému scenáru nie je badateľný, čo nám ukazujú aj hodnoty počtu nasporených platov po 40 rokoch. Priemerná hodnota je rovná 5,5324 a hodnoty 2,5% a 97,5% kvantilu sú 1,7300 a 13,2452. V porovnaní s referenčným scenárom došlo ku veľmi miernemu zvýšeniu priemernej nasporenej čiastky ako aj hodnoty 2,5% kvantilu. Naopak, mierne poklesla hodnota 97,5% kvantilu. Súčet nasporenej čiastky z prvého a z druhého piliera bude na 80,56% väčší oproti sporeniu v prvom pilieri.

5.3 Zhrnutie výsledkov

Ako sme mohli vidieť, zmenou niektorých parametrov sme dosiahli veľmi blízke hodnoty nasporených prostriedkov ako v prípade referenčného scenára, inokedy sa líšili výraznejšie. Prekvapivo najväčšie rozdiely vo výsledkoch sme dostali zmenou obdobia, z ktorého sme použili hodnoty inflácie. Svoj podiel na vyššom výnose z druhého piliera mala aj záporná hodnota inflácie počas niekoľkých rokov. Naopak, pri zvýšení príspevkov do druhého piliera vzrástol očakávaný počet nasporených ročných platov len mierne, zatiaľ čo šírka 95% intervalu, a teda aj rizikovosť, vzrástla nezanedbateľne. Takisto aj pravdepodobnosť, že sa nám prechod do druhého pri tomto scenári oplatí, je len mierne vyššia ako v referenčnom scenári. V oboch prípadoch sme kvôli vyšším nasporeným čiastkam v druhom pilieri model prepočítali s použitím väčšej hodnoty d_t^{max} aby použitie extrapolácie neskresľovalo výsledky. Pre sporiteľa je zaujímavejšie sledovať pravdepodobnostné rozdelenie nasporenej čiastky predovšetkým v nižších hodnotách, kde sme pri využití extrapolácie pozorovali len minimálne rozdiely. Veľké odchýlky sme nepozorovali ani v pravdepodobnostiach, že sa nám prechod do druhého piliera oplatí, preto môžeme o extrapolácii prehlásiť, že pri použití v rozumnej miere dokáže dostatočne dobre dopočítavať chýbajúce hodnoty.

V prípade zahrnutia zákonného ohraničenia na investíciu do garantovaného fondu, respektíve po žiadosti o zníženie tohto ohraničenia na polovicu, došlo podľa očakávaní ku zníženiu rizikovosti investície, avšak za cenu nižšieho očakávaného výnosu ako aj nižšej pravdepodobnosti, že sa investícia do druhého piliera oplatí. Vo viacerých scenároch sa nám potvrdilo, že žiadosť o zníženie povinnej minimálnej časti investovanej v garantovanom fonde predstavuje kompromis medzi lepšou výnosnosťou v referenčnom scenári a bezpečnosťou v scenári so zákonným ohraničením. Podľa aktuálnych zákonov nemôžeme uvažovať sporenie bez ohraničení, preto by sme mali pri hľadaní optimálnej stratégie používať práve znížené ohraničenie. Z našich výsledkov sa zdá byť žiadosť o zníženie investície do garantovaného fondu výhodná.

Pri skúmaní vplyvu ukončeného vzdelania na výšku dôchodku a pravdepodobnosť, že sa nám prechod do druhého piliera oplatí, nám vyšlo, že nemôžeme očakávať výrazné rozdiely medzi týmito skupinami. Hlavne pri pravdepodobnosti výhodnosti vstupu do druhého piliera boli rozdiely malé. Čo sa týka počtu nasporených platov, čím väčší kariérny rast budeme počas života mať, tým menší počet nasporených ročných platov z oboch pilierov dostaneme.

Veľký vplyv na to, či sa nám investícia do druhého piliera oplatí, sme mohli pozorovať pri zmene dĺžky sporenia v druhom pilieri. Podľa výsledkov nám vychádza, že čím skôr do druhého piliera vstúpime, tým väčšia pravdepodobnosť, že náš dôchodok bude vyšší ako v prípade keby zostaneme sporiť len v prvom pilieri. Dôvod je ten, že čím dlhšie sporíme v druhom pilieri, tým je väčšia priemerná hodnota investovaných úspor v druhom pilieri, ktorá sa nám úročí podľa výkonnosti daných fondov.

Pri zvýšenej averzii ku riziku ako aj pri vyššej volatilite sme mohli vidieť optimálne riadenia odporúčajúce investíciu vo väčšej miere do garantovaného fondu. Vplyvom toho sme dosiahli pokles očakávanej nasporenej čiastky z druhého piliera, a teda aj pravdepodobnosti, že vstupom do druhého piliera nasporíme viac ako sporením len v jednom pilieri.

Takmer žiadnu zmenu v nasporených hodnotách alebo pravdepodobnostiach nepriniesla zmena parametrov týkajúcich sa úrokovej miery, maximálnej uvažovanej a štartovacej v čase 0. Pri maximálnej uvažovanej miere r_t^{max} to môžeme zdôvodniť tým, že vzhľadom na použité parametre CIR modelu nebolo potrebné uvažovať vyššie hodnoty úrokovej miery. V prípade, že by došlo ku výraznejšiemu nárastu úrokovej miery, pravdepodobne by nám vyšli aj iné parametre nakalibrovaného CIR modelu. Pri zmene štartovacej úrokovej miery bola podobnosť s referenčným scenárom spôsobená tým, že optimálne hodnoty riadení výrazne preferovali negarantovaný fond, a teda výnos z garantovaného fondu mal len nízky vplyv na výsledok.

Vo väčšine scenárov sme mohli vidieť, že prechod do druhého piliera nám prinesie s pravdepodobnosťou väčšou ako 50% väčšiu hodnotu nasporených prostriedkov ako keby sme zostali len v prvom pilieri. Pri simuláciách však netreba zabúdať na ohraničenia investície vyplývajúce zo zákona, ktoré výšku očakávaného dôchodku znížia. Mohli sme sa presvedčiť, že je dôležité použiť aj správne parametre, pretože zlý výber parametrov môže zásadne zmeniť výsledky.

Záver

Táto práca sa venovala problematike sporenia v prvom a druhom dôchodkovom pilieri. Hľadali sme také investičné stratégie v rámci druhého piliera, ktoré by sporiteľovi priniesli čo najväčšiu užitonosť z celkového nasporeného dôchodku. Nadviazali sme tak na prácu [13], oproti ktorej vstupoval do modelu aj odhadnutý dôchodok z prvého piliera. Následne sme na základe simulácií odhadovali výšku nasporených prostriedkov spolu v prvom a druhom pilieri v rôznych scenároch a porovnávali ich s nasporenými prostriedkami, ktoré by sme získali sporením len v prvom pilieri.

Hlavným prínosom našej práce bolo rozšírenie modelu o dôchodok získaný z prvého piliera, čím sme dostali komplexnejší pohľad na dôchodkové sporenie. Nájdené stratégie tak nemaximalizovali užitočnosť z dôchodku z druhého piliera, ale z celkovej výšky dôchodku. Kvôli využiteľnosti modelu na rôzne skupiny ľudí sme uvažovali aj kariérny rast, ktorý závisel od najvyššieho dosiahnutého vzdelania sporiteľa. Ako ďalší prínos práce by som uviedol odhad výšky prostriedkov získaných sporením v prvom a druhom pilieri a následné porovnanie s nasporenou čiastkou, ktorú by sme získali sporením len v prvom pilieri. Taktiež sme odhadli pravdepodobnosť, s ktorou sa sporiteľovi oplatí prejsť do druhého piliera. Výpočty sme vykonávali pre rôzne scenáre, v ktorých boli zmenené niektoré hodnoty parametrov. Následne sme pozorovali, aký vplyv na výsledky mala táto zmena parametrov.

Z výsledkov, ktoré nám v práci vyšli, môžeme vidieť, že optimálny pomer medzi garantovaným a negarantovaným fondom bol rastúci vo všetkých scenároch vzhľadom na počet nasporených ročných platov a vo väčšine prípadov aj s približujúcim sa dôchodkovým vekom. Podobné výsledky boli publikované aj v práci [13], avšak pri zahrnutí dôchodku aj z prvého piliera do modelu sú optimálne rozhodnutia sporiteľa v druhom pilieri rizikovejšie, a teda ochotnejšie investuje do negarantovaného fondu. Je to spôbené tým, že dôchdok z prvého piliera je v modeli považovaný za istý, zatiaľ čo v [13] takáto "istota" nebola uvažovaná.

Čo sa týka jednotlivých scenárov, podľa očakávaní optimálne riadenia pri zvýšenej averzii k riziku ako aj pri väčšej volatilite negarantovaného fondu vo väčšej miere odporúčali investíciu do garantovaného fondu. Prekvapením boli len malé rozdiely v nasporenej čiastke pri zvýšení príspevkov do druhého piliera, avšak volatilita nasporenej čiastky sa výrazne zvýšila. Zásadný vplyv na výsledky mala zmena obdobia, z ktorej sme použili pri výpočte hodnoty inflácie. Voľba maximálnej hodnoty úrokovej miery stanovenej na 3% použitej kvôli numerickému výpočtu sa pri daných parametroch neukázala ako nesprávna, nakoľko zvýšením tejto hodnoty na 9% boli rozdiely vo výsledkoch len minimálne. Pri iných hodnotách parametrov by však voľba vyššej maximálnej úrokovej miery mohla byť opodstatnená. Keďže musí každý sporiteľ v posledných 10 rokoch sporenia investovať nejakú časť svojich úspor v druhom pilieri aj do garantovaného fondu, podľa našich výsledkov je žiadosť o zníženie povinného objemu úspor v garantovanom fonde rozumným kompromisom medzi bezpečnoťou pri zákonnom obmedzení a vyššou výnosnosťou, keď neuvažujeme žiadne obmedzenia. Ďalej nám vo výsledkoch vyšlo, že čím sporiteľ vstúpi do druhého piliera skôr, tým má väčšiu pravdepodobnosť, že naspori viac ako keby sporil len v prvom pilieri a taktiež má vyššiu očakávanú hodnotu svojho majetku na konci sporenia.

Ako sa teda vo výsledkoch ukázalo, aj zmeny parametrov, ktoré sa zdajú na prvý pohľad nepodstatné, môžu viesť ku zásadne odlišným výsledkom. Pri výpočtoch je preto potrebné mať na mysli, že niektoré z parametrov nemusia byť dobre odhadnuté a stratégia, ktorá nám vyšla ako optimálna, v skutočnosti optimálnou byť nemusí. Najzásadnejším rizikom, ktoré je aj problém predikovať a môže výrazne ovplyvniť konečnú hodnotu našich úspor je politické riziko. Zmenami v zákonoch počas doby sporenia môžeme zo dňa na deň prísť o časť svojich úspor, a teda ani výpočet optimálneho sporenia nie je zárukou vysokého dôchodku.

Zoznam použitej literatúry

[1] Brigo, D., Dalessandro, A., Neugebauer, M., Triki, F., *A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management*, ArXiv e-prints, Cornell University Library (2008), dostupné na internete (7.3.2016):
http://adsabs.harvard.edu/abs/2008arXiv0812.4210B

[2] Halická, M., Brunovský, P., Jurča, P.: *Optimálne riadenie*, Nakladateľstvo EPOS, Bratislava, 2009

[3] Harman, R.: *Stochastické simulačné metódy*, elektronické študijné materiály, FMFI UK, Bratislava, 2015, dostupné na internete (27.3.2016):
http://www.iam.fmph.uniba.sk/ospm/Harman/sim.pdf

[4] Investopedia: Consumer Price Index, dostupné na internete (28.3.2016):
http://www.investopedia.com/terms/c/consumerpriceindex.asp

[5] Melicherčík, I., Szucs, G., Vilček, I.: *Investment Strategies in Defined-Contribution Pension Schemes*, AMUC 84(2) (2015), 191-204, dostupné na internete (6.3.2016):
http://www.defm.fmph.uniba.sk/ludia/melichercik/papers/msv_amuc.pdf

[6] Priemerná mzda na Slovensku, dostupné na internete (28.3.2016):
http://www.minimalnamzda.sk/priemerna-mzda.php

[7] Sociálna poisťovňa: slovník pojmov, dostupné na internete (28.3.2016):
http://www.socpoist.sk/slovnik-pojmov/11s?prm1=670

[8] Sociálna poisťovňa: slovník pojmov, dostupné na internete (21.4.2016):
http://www.socpoist.sk/slovnik-pojmov/11s?prm1=614

[9] Šebo, J., a kol.: *Consumer Price Index for All Urban Consumers*, UMB, Banská Bystrica, 2014

[10] Šebo, J., Virdzek, T., Šebová, Ľ.: *A not so safe saving strategy – the case of Slovakia*, Working Paper, UMB, Banská Bystrica, 2014

[11] Ševčovič, D., Stehlíková, B., Mikula, K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Nakladateľstvo STU, Bratislava, 2009

[12] Štatistický úrad Slovenskej republiky: úmrtnostné tabuľky za SR, dostupné na internete (28.3.2016):
http://archiv.statistics.sk/html/showdoc.dodocid=33032.html

[13] Vilček, I.: *Investičné stratégie v sporivom pilieri dôchodkového systému na Slovensku*, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2007, dostupné na internete (6.3.2016):
http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2013/vilcek/diplomovka.pdf

[14] Worldwide inflation data: historic CPI inflation Slovakia, dostupné na internete (28.3.2016):
http://www.inflation.eu/inflation-rates/slovakia/historic-inflation/cpi-inflation-slovakia.aspx

Príloha A: Dôkaz existencie a spôsob hľadania riešenia rovnice (53)

Keďže $1 < \frac{U_1}{U_2} < \frac{U_1}{U_3}$, hodnota výrazu ľavej strany (53) je vždy väčšia ako 0 a menšia ako 1. Vieme, že $h \geq 0$, tak platí aj $1 < 1 + \frac{d_2-d_1}{d_1+h} < 1 + \frac{d_3-d_1}{d_1+h}$, preto aj hodnota pravej strany výrazu (53) bude väčšia ako 0 a menšia ako 1. Navyše platí, že pravá strana (53) je klesajúca vzhľadom na h pre $h \geq 0$, čo aj dokážeme. To, že je daná funkcia klesajúca znamená, že jej derivácia bude záporná pre $h \geq 0$.

$$\left(\frac{\ln\left(1+\frac{d_2-d_1}{d_1+h}\right)}{\ln\left(1+\frac{d_3-d_1}{d_1+h}\right)}\right)' = \frac{-\frac{d_1+h}{d_2+h}\frac{d_2-d_1}{(d_1+h)^2}\ln\left(\frac{d_3+h}{d_1+h}\right)+\frac{d_1+h}{d_3+h}\frac{d_3-d_1}{(d_1+h)^2}\ln\left(\frac{d_2+h}{d_1+h}\right)}{\ln^2\left(1+\frac{d_2-d_1}{d_1+h}\right)} = \\ = \frac{-\frac{d_2-d_1}{d_2+h}\ln\left(\frac{d_3+h}{d_1+h}\right)+\frac{d_3-d_1}{d_3+h}\ln\left(\frac{d_2+h}{d_1+h}\right)}{\ln^2\left(1+\frac{d_2-d_1}{d_1+h}\right)} < 0 \tag{55}$$

Klesajúcosť je splnená práve vtedy, keď je čitateľ (55) záporný, a teda platí nasledovná nerovnosť.

$$\frac{d_2-d_1}{d_2+h}\ln\left(\frac{d_3+h}{d_1+h}\right) > \frac{d_3-d_1}{d_3+h}\ln\left(\frac{d_2+h}{d_1+h}\right) \tag{56}$$

Keďže zlomky $\frac{d_2-d_1}{d_2+h}$ a $\frac{d_3-d_1}{d_3+h}$ sú kladné pre $h \geq 0$ a $d_3 > d_2 > d_1 \geq 0$, môžeme obe strany nerovnice (56) nimi predeliť bez otočenia znamienka nerovnosti.

$$\frac{d_3+h}{d_3-d_1}\ln\left(\frac{d_3+h}{d_1+h}\right) > \frac{d_2+h}{d_2-d_1}\ln\left(\frac{d_2+h}{d_1+h}\right) \tag{57}$$

Nerovnosť (57) je splnená práve vtedy, keď je funkcia $\frac{x+h}{x-d_1}\ln\left(\frac{x+h}{d_1+h}\right)$ vzhľadom na x pre $x > d_1$ rastúca. To znamená, že jej derivácia musí byť kladná.

$$\left(\frac{x+h}{x-d_1}\ln\left(\frac{x+h}{d_1+h}\right)\right)' = -\frac{d_1+h}{(x-d_1)^2}\ln\left(\frac{x+h}{d_1+h}\right) + \frac{x+h}{x-d_1}\frac{d_1+h}{x+h}\frac{1}{d_1+h} = \\ = -\frac{d_1+h}{(x-d_1)^2}\ln\left(\frac{x+h}{d_1+h}\right) + \frac{1}{x-d_1} > 0$$

$$\begin{aligned} 1 &> \frac{d_1+h}{x-d_1}\ln\left(\frac{x+h}{d_1+h}\right) \\ \frac{x-d_1}{d_1+h} &> \ln\left(1+\frac{x-d_1}{d_1+h}\right) \end{aligned} \tag{58}$$

Pre $x > d_1$, $d_1 \geq 0$ a $h \geq 0$ je zlomok $\frac{x-d_1}{d_1+h} > 0$, a teda nerovnosť (58) je splnená. Tým je dokázaná rastúcosť (57) a tá je ekvivalentná s klesajúcosťou pravej strany (53), čo sme chceli ukázať.

Teraz ukážeme, že existuje $h \geq 0$ pre ktoré je rovnosť (53) splnená. Pre každé $h \geq 0$ a $0 < d_1 < d_2 < d_3$ je pravá strana (53) definovaná a navyše je vzhľadom na h spojitá. Spočítame teda limity pre h idúce do 0 a do ∞.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{d_2-d_1}{d_1+h}\right)}{\ln\left(1+\frac{d_3-d_1}{d_1+h}\right)} = \frac{\ln\frac{d_2}{d_1}}{\ln\frac{d_3}{d_1}} \tag{59}$$

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{d_2-d_1}{d_1+h}\right)}{\ln\left(1+\frac{d_3-d_1}{d_1+h}\right)} = \ldots \tag{60}$$

Keďže čitateľ aj menovateľ limity v (60) konvergujú do 0 pre h idúce do nekonečna, môžeme použiť L'Hospitalovo pravidlo.

$$\cdots = \lim_{h\to\infty} \frac{\frac{d_1+h}{d_2+h}\frac{d_1-d_2}{(d_1+h)^2}}{\frac{d_1+h}{d_3+h}\frac{d_1-d_3}{(d_1+h)^2}} = \lim_{h\to\infty} \frac{\frac{d_1-d_2}{d_2+h}}{\frac{d_1-d_3}{d_3+h}} = \frac{d_1-d_2}{d_1-d_3}\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{d_3-d_2}{d_2+h}\right) = \frac{d_2-d_1}{d_3-d_1} \tag{61}$$

Navyše ešte vypočítame limitu pravej strany (53) pre h idúce do $-d_1$.

$$\lim_{h\to -d_1} \frac{\ln\left(1+\frac{d_2-d_1}{d_1+h}\right)}{\ln\left(1+\frac{d_3-d_1}{d_1+h}\right)} = \frac{d_1-d_2}{d_1-d_3}\lim_{h\to -d_1}\left(\frac{d_3+h}{d_2+h}\right) = 1 \tag{62}$$

Aby existovalo h, ktoré spĺňa (53), musí platiť nasledovná nerovnosť.

$$\frac{\ln\frac{d_2}{d_1}}{\ln\frac{d_3}{d_1}} \geq \frac{\ln\frac{U_1}{U_2}}{\ln\frac{U_1}{U_3}} > \frac{d_2-d_1}{d_3-d_1} \tag{63}$$

Najprv sa pozrieme na druhú časť (63), pričom si ju prepíšeme do nového tvaru.

$$\begin{aligned} \frac{\ln\frac{U_1}{U_2}}{\ln\frac{U_1}{U_3}} &> \frac{d_2-d_1}{d_3-d_1} \\ \frac{\ln|U_2|-\ln|U_1|}{d_2-d_1} &< \frac{\ln|U_3|-\ln|U_1|}{d_3-d_1} \end{aligned} \tag{64}$$

Z konkávnosti vzhľadom na d a zápornosti funkcie strednej hodnoty užitočnosti (44) platí nerovnosť (65)

$$\frac{U_2-U_1}{d_2-d_1} > \frac{U_3-U_1}{d_3-d_1} \tag{65}$$

Nerovnica (64) nám teda hovorí, že funkcia $\ln(-f(d))$ je konvexná. Z (44) si za $f(d)$ dosadíme našu extrapolačnú funkciu a vypočítame druhú deriváciu.

$$\begin{aligned} (\ln(-f(d)))'' &= \left(\frac{f'(d)}{f(d)}\right)' = \frac{f''(d)f(d)-f'^2(d)}{f^2(d)} = \ldots \\ f'(d) &= jg(d+h)^{-j-1} \\ f''(d) &= -j(j+1)g(d+h)^{-j-2} \\ \ldots &= \frac{g^2j(j+1)(d+h)^{-2j-2}-g^2j^2(d+h)^{-2j-2}}{g^2(d+h)^{-2j}} > 0 \end{aligned}$$

pre $j > 0$, a teda pre našu extrapolačnú funkciu platí druhá časť nerovnosti (63). Teraz sa pozrieme na prvú nerovnosť v (63). Tá ak platí, tak nám hovorí, že ak existuje nejaké h, ktoré spĺňa (53), potom existuje $h \geq 0$ spĺňajúce (53). Vidíme, že limita (62) je rovná 1 a vieme, že ľavá strana (53) je menšia ako 1. To znamená, že z platnosti druhej nerovnosti v (63) a spojitosti pravej strany (53) existuje $h \geq -d_1$ spĺňajúce (53). Vo všeobecnosti nemusí nutne vyjsť $h \geq 0$, preto bude najlepším riešením zvoliť d_1 čo najmenšie. Použijeme teda najmenšiu možnú hodnotu pre d_1. Ak by sme zvolili $d_1 = 0$, hodnota výrazu $\frac{\ln \frac{d_2}{d_1}}{\ln \frac{d_3}{d_1}}$ by nebola definovaná. Jedná sa o limitu pravej strany pre $h \to 0$, to je ale zhodné s limitou $h \to -d_1$ a tá je rovná 1. Takže použiť $d_1 = 0$ môžeme. V takomto prípade bude teda aj prvá nerovnosť (63) splnená, a teda vieme nájsť $h \geq 0$ spĺňajúce (53), pretože extrapolačná funkcia je vzhľadom na d spojitá.

Zo spojitosti extrapolačnej funkcie vzhľadom na d vyplýva, že existuje h spĺňajúce (53). Teraz potrebujeme nájsť spôsob ako nájdeme hodnotu h v danom čase a pri danej úrokovej miere. Najprv nájdeme interval, na ktorom sa vyhovujúce h nachádza. Zvolíme si nejaký interval. Kedže $h \geq 0$, zvolíme taký, kde dolná hranica je rovná 0. Ďalej definujeme funkciu $g(x)$ závislú od h vychádzajúcu z (53).

$$g(h) = \frac{\ln \frac{U_1}{U_2}}{\ln \frac{U_1}{U_3}} - \frac{\ln \left(1 + \frac{d_2 - d_1}{d_1 + h}\right)}{\ln \left(1 + \frac{d_3 - d_1}{d_1 + h}\right)}$$

Funkcia $g(h)$ je rastúca, pričom h vyhovuje (53) práve vtedy, keď $g(h) = 0$. Hľadaná hodnota h sa nachádza v intervale vtedy, keď funkčná hodnota $g(h)$ v dolnej hranici intervalu je menšia alebo rovná 0 a zároveň funkčná hodnota v hornej hranici intervalu je väčšia alebo rovná 0. Keďže $h \geq 0$, funkčná hodnota $g(h)$ v dolnej hranici počiatočného intervalu je vždy menšia alebo rovná 0. Preto potrebujme sledovať funkčnú hodnotu v hornej hranici intervalu. Ak je väčšia alebo rovná ako 0, našli sme hľadaný interval. Ak nie je, za dolnú hranicu nového intervalu zvoľme hornú hranicu terajšieho intervalu a hornú volíme nejakú väčšiu hodnotu. Takto postupujeme až kým nenájdeme vyhovujúci interval. Teraz potrebujeme nájsť hodnotu h. Presnú hodnotu nezistíme, preto si musíme zvoliť presnosť, ktorá nám postačuje na vypočítanú hodnotu h. V každom kroku si zvolíme hodnotu vnútri nášho intervalu, v našom prípade to bude vždy polovica intervalu, a zistíme funkčnú hodnotu $g(h)$ v tomto bode. Ak je menšia ako 0, vybraný bod bude novou dolnou hranicou intervalu, v opačnom prípade bude hornou hranicou. Tento postup opakujeme až kým nie je dĺžka intervalu menšia ako zvolená presnosť na hodnotu h. Potom za h dosadíme ľubovoľný bod zo vzniknutého intervalu, v našom prípade jeho stred.