

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



NUMERICKÉ APROXIMÁCIE HRANICE
PREDČASNÉHO UPLATNENIA AMERICKEJ OPCIE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**NUMERICKÉ APROXIMÁCIE HRANICE
PREDČASNÉHO UPLATNENIA AMERICKEJ OPCIE**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Andrej Kozák
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Numerické aproximácie hranice predčasného uplatnenia Americkej opcie
Numerical approximations of the early exercise boundary of American options

Cieľ: Americké call alebo put opcie sú charakterizované možnosťou ich predčasného uplatnenia. Pre klasický Black-Scholesov model je hranica uplatnenia opcia dobre známa a dostačujúco opísaná. V práci sa zameriame na analýzu tejto hranice pre realistické zovšeobecnenia Black-Scholesovej rovnice, ktoré sú opísané riešeniami nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc.

Vedúci: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 10.02.2015

Dátum schválenia: 11.02.2015
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Podakovanie

Ďakujem svojmu školiteľovi, prof. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc., za pomoc, odborné rady a užitočnú spätnú väzbu, ktoré mi veľmi pomohli počas vytvárania práce.

Abstrakt v štátnom jazyku

KOZÁK, Andrej: Numerické aproximácie hranice predčasného uplatnenia americkej opcie [diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava, 2016, 62 strán

V práci sa zaoberáme oceňovaním amerického typu call opcie a nájdením hranice predčasného uplatnenia. Doposiaľ nebol odvodený explicitný vzorec popisujúci priebeh ceny ani hranice predčasného uplatnenia, pre klasický Black-Scholesov model sú však v literatúre pomerne dobre popísané.

Klasický Black-Scholesov model má mnohé zjednodušujúce a nerealistické predpoklady. Skúmame preto jeho realistické zovšeobecnenia, ktoré majú spoločnú vlastnosť nekonštantnosti volatility, ktorá bude závisieť od samotnej ceny opcie, či jej druhej derivácie podľa ceny podkladovej akcie.

Konkrétne sa zameriame na Risk-Adjusted pricing methodology (RAPM) model, ktorý predpokladá transakčné náklady a riziko tkvejúce z nezabezpečeného replikačného portfólia. V práci odvodíme nelineárnu verziu PSOR algoritmu pre numerické riešenie úlohy v tvare nelineárnej komplementarity. Zároveň navrhne aproximáciu funkcie volatility s využitím explicitnej hodnoty parametra Gamma pre európsku opciu.

Kľúčové slová: oceňovanie opcií, Black-Scholesova rovnica, nelineárne modely, Risk-adjusted pricing methodology model, hranica predčasného uplatnenia

Abstract

KOZÁK, Andrej: Numerical approximations of the early exercise boundary of American option [master thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava, 2016, 62p.

The thesis is dealing with numerical pricing of American type of call options and describing the early exercise boundary. An explicit formula hasn't been derived neither for the price, nor for the boundary profile yet, however, for the standard Black-Scholes formula, they are both thoroughly described in literature.

The classical Black-Scholes model is built on several simplifying, yet unrealistic assumptions. We are investigating its realistic generalizations, which have a common feature of non-constancy of volatility. In these models, volatility depends on the price of an option itself, and also its second derivative with respect to price of an underlying stock.

In particular, we focus on Risk-Adjusted pricing methodology (RAPM) model, that includes transaction costs and risk from uncovered replicating portfolio among its assumptions. We will derive the nonlinear version of PSOR algorithm for the numerical solution of the nonlinear complementarity problem. Also, we suggest an approximation for the volatility function using the explicit formula for the value of parameter Gamma of the European option.

Keywords: option pricing, Black-Scholes equation, nonlinear models, Risk-adjusted pricing methodology model, early exercise boundary

Obsah

Úvod	3
1 Základy oceňovania opcí	4
1.1 Členenie opcí	4
1.2 Oceňovanie opcí	5
1.2.1 Black-Scholesova rovnica	6
1.2.2 Formulácia úlohy pre americké typy call opcí	8
2 Nelineárne modely	14
2.1 RAPM model	14
2.1.1 Transakčné náklady	15
2.1.2 Volatilné portfólio	18
2.1.3 Odvodenie nelineárnej Black-Scholesovej rovnice pre RAPM	20
2.2 Ďalšie príklady modelov s nekonštantnou volatilitou	22
3 Formulácia numerickej úlohy	25
3.1 Transformácia na úlohu v tvare nelineárnej komplementarity	25
3.1.1 Penalizovaná úloha	27
3.2 Transformácia súradníc	28
3.3 Diskretizácia metódou konečných diferencií	31
3.3.1 Explicitná a implicitná numerická schéma	33
3.4 PSOR algoritmus	37
3.4.1 Nelineárna Gauss-Seidelova SOR metóda	38
3.4.2 Rozšírenie na nelineárnu PSOR metódu	40
4 Numerické riešenie	42
4.1 Inicializácia algoritmu	42
4.2 Cyklus pre časové vrstvy	43
4.2.1 Výpočet volatility	44
4.2.2 Počet iterácií	50
4.2.3 Správanie v čase blízko maturity	51

4.3	Výpočet ceny opcie a hranice predčasného uplatnenia	52
5	Numerické experimenty	53
5.1	Parametre modelu RAPM	53
5.1.1	Parameter C	53
5.1.2	Parameter R a implikovaná volatilita	54
5.2	Vplyv parametrov na cenu a priebeh hranice predčasného uplatnenia .	55
	Záver	59

Úvod

Opcie sú jedným z najdôležitejších a najviac využívaných finančných derivátov na trhu. Či ako nástroj na poistenie, alebo ako trhová špekulácia, najdôležitejšou otázkou pri obchodovaní je vždy cena. Oceňovanie opcií bolo vždy náročným problémom a zaoberalo sa ním veľké množstvo matematikov a ekonómov.

Najväčším prelomom bol článok Blacka a Scholesa z roku 1973, ocenený aj Nobelovou cenou, v ktorom títo páni odvodili parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu európskej opcie. Táto rovnica bola pre call (kúpnu) i put (predajnú) opciu explicitne vyriešená. V prípade americkej opcie, ktorá umožňuje predčasné uplatnenie, je problém komplikovanejší a doposiaľ nebol explicitne vyriešený, rovnako, ako nebol explicitne popísaný časový priebeh hranice predčasného uplatnenia.

Black-Scholesov model je založený na množstve predpokladov, ktoré sa na trhu opakovane ukazujú ako priveľmi zjednodušujúce. Na základe toho vzniklo viacero rozširujúcich modelov odstraňujúcich niektoré z týchto nedostatkov.

Práca sa zaoberá oceňovaním americkej opcie a nájdením jej hranice predčasného uplatnenia v triede modelov, ktoré majú spoločnú vlastnosť, že sa na ne dá nazerať ako na pôvodný Black-Scholesov model s doplnujúcim predpokladom závislosti volatility ako funkcie premenných modelu. Zameriame sa pritom na RAPM model, ktorý odvodil Kratka ([11]) a zovšeobecnil ho Jandačka a Ševčovič ([9]). Model uvažuje o transakčných nákladoch pri obchodovaní a zároveň o riziku pri prinízkej frekvencii obnovovania replikačného portfólia.

V prvej kapitole predstavíme teoretické základy pre oceňovanie opcií a základný Black-Scholesov model. V druhej kapitole, odvolávajúc sa na [21], odvodíme RAPM model a uvedieme ďalšie známe modely s nekonštantnou volatilitou. Tretia kapitola formuluje úlohu oceňovania americkej opcie pri modeloch s nekonštantnou volatilitou do tvaru numerickej úlohy. V štvrtej kapitole popíšeme algoritmus riešenia tejto úlohy, uvedieme pritom aproximáciu parametra Gamma jeho známou hodnotou pre európsku opciu. V piatej kapitole vypočítame z dát hodnoty parametrov RAPM modelu a znázorníme vplyv rôznych parametrov na cenu a na hranicu predčasného uplatnenia.

1 Základy oceňovania opcí

Opcia je finančný derivát, čiže finančný nástroj odvodený a viažúci sa na určité podkladové aktívum. Poskytuje jej držiteľovi možnosť, ale nie povinnosť, toto podkladové aktívum kúpiť či predať za vopred určenú cenu (tzv. strike price alebo exercise price, označujeme E) a počas vymedzeného časového obdobia. Podkladovým aktívom môže byť akcia, ale aj komodita, zahraničná mena či ľubovoľný tovar alebo služba.

Opcie prirodzene vznikli už veľmi dávno, najstaršia známa zmienka pochádza až zo starovekého Grécka. Podľa [19] už Aristoteles vo svojom diele *Politika* spomína známeho tamojšieho filozofa a matematika, Tálesa, ktorý údajne vedel odhadnúť veľkú úrodu olív omnoho skôr než ich pestovatelia. Keďže očakával veľký dopyt po ich lisovaní, kúpil si od majiteľov lisov výhradné práva na lisovanie počas sezóny. Keď skutočne prišla veľká úroda, tieto práva pestovateľom, ktorí potrebovali olivy vylisovať, s veľkým ziskom predal.

Ďalší známy prípad z histórie je z obdobia známej tulipánovej horúčky v Holandskom kráľovstve počas 17. storočia. Vzhľadom na veľmi prudké a ťažko predvídateľné pohyby cien tulipánových cibúľ sa ich pestovatelia poisťovali pred náhlym poklesom cien nákupom predajných práv a naopak, obyvatelia si vo veľkých objemoch kupovali práva na nákup, čím sa poisťovali proti zvýšeniu ceny ([13], [19]).

Existujú teda dva základné typy opcí - opcie zaručujúce právo nakupovať voláme call opcie; tie zaručujúce právo predávať sa nazývajú put opcie.

Opcie slúžia, ako sme videli na príklade z tulipánovej horúčky, na poistenie voči riziku nárastu (call) prípadne poklesu (put) ceny podkladového aktíva. Tak ako v prípade Tálesa slúžia tiež na špekulácie na trhu, najmä v prípade že predpokladáme určitý vývoj ceny.

1.1 Členenie opcí

V súčasnosti na trhu rozlišujeme viacero rôznych štýlov opcí, ktoré sa medzi sebou líšia najmä v podmienkach na časové obdobie, kedy sú uplatniteľné a v spôsobe určenia

ceny, za ktorú sa podkladové aktívum predá alebo kúpi. Najčastejším druhom obchodovaných opcií sú európske opcie a americké opcie:

Európska opcia predstavuje právo kúpiť (call) alebo predať (put) podkladové aktívum vo vopred určenom časovom okamihu T , tzv. expirácia alebo maturita opcie, za vopred určenú cenu E - strike price.

Americká opcia predstavuje právo kúpiť (call) alebo predať (put) podkladové aktívum kedykoľvek pred uplynutím vopred určeného časového okamihu T - čiže v časovom intervale $[0, T]$, za vopred určenú cenu E - strike price.

Uvedené opcie sa súhrnne nazývajú, pre ich jednoduchosť, plain vanilla opcie. Ďalším rozšíreným štýlom sú ázijské opcie, ktorých strike price nie je vopred určená, ale počíta sa ako priemerná cena podkladového aktíva za dané obdobie ([21]).

1.2 Oceňovanie opcií

Pri opciách, ako pri všetkom, s čím obchodujeme, nás samozrejme bude zaujímať spravodlivá cena. Cenu opcie budeme označovať V a bude funkciou času t , v ktorom cenu určujeme, a ceny podkladového aktíva (v tomto čase) S .

Uvažujme prípad call opcie. Ak sa ju rozhodneme uplatniť, kupujeme aktívum v hodnote S za cenu E . Náš výnos, nazývajúci sa aj výplata, príp. payoff, je potom rozdiel $S - E$. V prípade, že hodnota aktíva je nižšia ako strike price, call opciu sa uplatniť neoplatí a teda jej výplata má hodnotu 0.

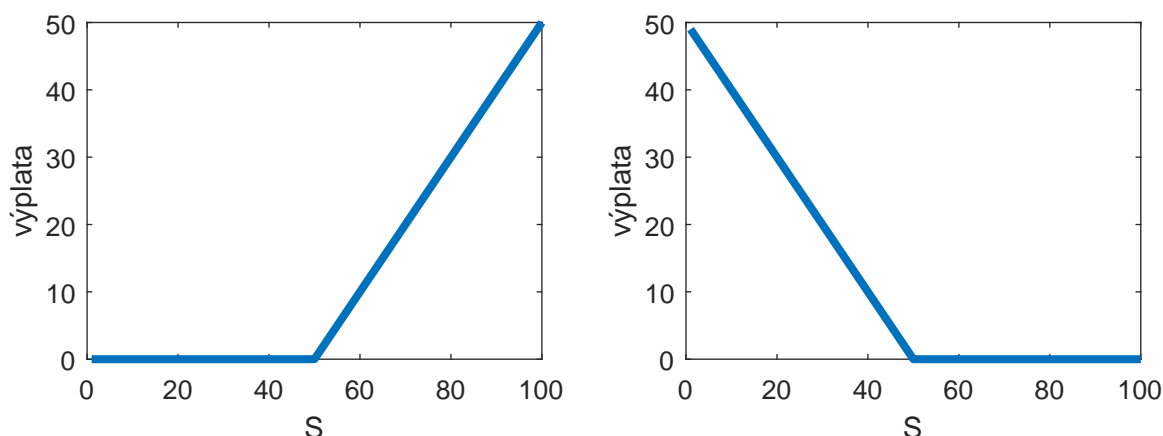
Celkovo teda môžeme výplatu $\bar{V}(S)$ ako funkciu ceny aktíva vyjadriť nasledovne:

$$\bar{V}_{call}(S) = \max(0, S - E) = (S - E)^+. \quad (1)$$

Pre put opciu analogicky:

$$\bar{V}_{put}(S) = \max(0, E - S) = (E - S)^+. \quad (2)$$

Výplatu je zvykom znázorňovať na takzvanom výplatnom (payoff) diagrame v závislosti od S (obr. 1).



Obr. 1: Výplatné diagramy call (vľavo) a put (vpravo) opcií pre $E = 50$.

1.2.1 Black-Scholesova rovnica

Dodnes najznámejší na najrozšírenejší model na oceňovanie opcií pochádza z roku 1973 od amerických ekonómov Blacka a Scholesa ([4]). Kľúčovou myšlienkou je hedging (zaistenie voči riziku) opcie pomocou samofinancovaného portfólia zloženého z podkladového aktíva a bezrizikových dlhopisov.

Pri odvodzovaní rovnice vychádzali Black a Scholes z viacerých zjednodušujúcich predpokladov, pričom mnohé z nich nie sú na skutočnom trhu realistické:

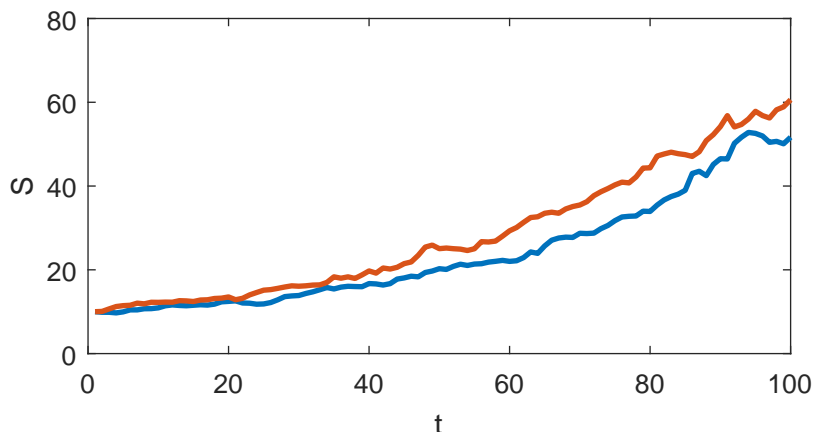
Brownov pohyb: Prvým z predpokladov je modelovanie ceny podkladového aktíva S geometrickým Brownovým pohybom, teda

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw, \quad (3)$$

pričom μ je drift aktíva, σ volatilita a w je stochastický Wienerov proces - spojitý proces s nezávislými, normálne rozdelenými prírastkami ([16]).

Bezriziková úroková miera: Ďalej sa predpokladá existencia bezrizikového aktíva so známym konštantným výnosom r . Zároveň je možné toto aktívum predávať a nakupovať v ľubovoľne veľkých aj zlomkových množstvách.

Frictionless market: Takisto sa predpokladá, že podkladové aktívum môžeme nakupovať aj predávať v ľubovoľných, dokonca záporných (tzv. short selling) množstvách.



Obr. 2: Dve náhodné realizácie geometrického Brownovho pohybu pre $\mu = 1$, $\sigma = 0.5$.

S obchodovaním nie sú spojené nijaké transakčné náklady a nemôže ovplyvniť cenu.

No arbitrage: Dôležitý predpoklad znamenajúci, že na trhu nesmie vzniknúť arbitrážna príležitosť. To zaručuje, že dve bezrizikové stratégie s rovnakým očakávaným výnosom musia mať rovnakú cenu.

Za týchto predpokladov odvodili Black a Scholes pre cenu V opcie v čase t , s podkladovým aktívom s cenou S a volatilitou σ platiacim spojitú dividendu s ročnou mierou q a pri bezrizikovej úrokovej miere r nasledovnú rovnicu:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (4)$$

Hlavnou myšlienkou ich odvedenia bolo vytvorenie tzv. replikačného portfólia, t.j. portfólia, zloženého z určitých objemov peňažných dlhopisov a podkladovej akcie, ktorého držanie je ekvivalentné držaniu opcie. Zloženie portfólia sa pre zachovanie tejto vlastnosti musí spojiť v čase prispôbovať vývoju ceny akcie. Je však samofinancované, čo znamená, že tieto úpravy spojitú v čase nepredstavujú žiadne dodatočné náklady. Portfólio sa zostaví tak, aby jeho cena bola v každom okamihu deterministická, t.j. nezávisela od diferenciálu wienerovho procesu dw . Tento prístup sa nazýva δ -hedging, pretože dôležitým záverom je, že pre počet podkladových akcií δ obsiahnutých v portfóliu platí $\delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$.

Riešenie tejto rovnice nie je jednoznačné, jednoznačnosť si vyžaduje dodať navyše koncové podmienky. V prípade európskej opcie je koncovou podmienkou na cenu jej výplata. Z predpokladu „No arbitrage“ totiž plynie, že v okamihu expirácie má opcia presne takú cenu, ako veľký je jej, už známy, výnos. Pre call opciu máme teda navyše koncovú podmienku:

$$V(S, T) = \bar{V}_{call}(S) = (S - E)^+. \quad (5)$$

Riešenie rovnice je v tomto prípade známe ([21]), dá sa explicitne vyjadriť:

$$V_{call}^{EU}(S, t) = Se^{-q(T-t)}N(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (6)$$

pričom $N(\cdot)$ je hodnota kumulatívnej distribučnej funkcie normovaného normálneho rozdelenia daná integrálom

$$N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (7)$$

a d_1 a d_2 sme označili výrazy

$$d_1 = \frac{(r - q + \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \log(S/E)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad (8)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}. \quad (9)$$

Takisto je známe riešenie rovnice pre európsku put opciu, ľahko sa vypočíta z rovnice put-call parity, odvodennej napríklad v [16].

1.2.2 Formulácia úlohy pre americké typy call opcií

Americké opcie sú dnes, čo sa obchodovania na akciových trhoch týka, podstatne rozšírenejšie ako ich európske náprotivky ([18]). Okrem možnosti uplatniť ju v čase expirácie tak ako európsku, dáva americká opcia právo uplatnenia navyše aj v ktoromkoľvek okamihu dovtedy. V porovnaní s európskym typom teda poskytuje práva (no nie povinnosti) navyše a jej cena určite bude najmenej taká, alebo vyššia.

Podobne, jej cena nikdy neklesne pod hranicu výplaty - ak by sa tak stalo, bolo by možné si opciu kúpiť a ihneď uplatniť s vyššou výplatom, ako bola jej cena. Znamenalo by to arbitrážnu príležitosť - a teda zvýšený dopyt by cenu vytlačil späť na hodnotu rovnú výplate.

V prípade americkej call opcie bude zaujímavý len prípad $q > 0$, teda prípad, kedy podkladová akcia vypláca nenulové dividendy. V opačnom prípade, teda ak $q = 0$, dá sa ukázať ([21]), že

$$V_{call}^{EU} = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) > (S - E)^+, \quad (10)$$

teda cena európskej opcie je vždy vyššia ako jej výplata. Keďže $V^{US} \geq V^{EU}$, cena americkej opcie je takisto vždy vyššia ako je jej výplata, uplatniť ju predčasne nemá zmysel - držiteľ by sa pripravil o rozdiel. Takúto americkú opciu bude jej majiteľ vždy držať až do expirácie, čo ju robí identickou s európskym náprotivkom a vieme ju oceniť explicitným analytickým vzorcom (6).

Ak $q > 0$, z analytického vzorca pre výpočet ceny európskej opcie vyplýva:

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{V_{call}^{EU}(S, t)}{S} &= \lim_{S \rightarrow \infty} \left(e^{-q(T-t)}N(d_1) - \frac{Ee^{-r(T-t)}}{S}N(d_2) \right) \\ &= e^{-q(T-t)} < 1, \end{aligned} \quad (11)$$

pričom druhú rovnosť získame využitím nasledovných tvrdení:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} d_1 = \lim_{S \rightarrow \infty} d_2 = +\infty, \quad (12)$$

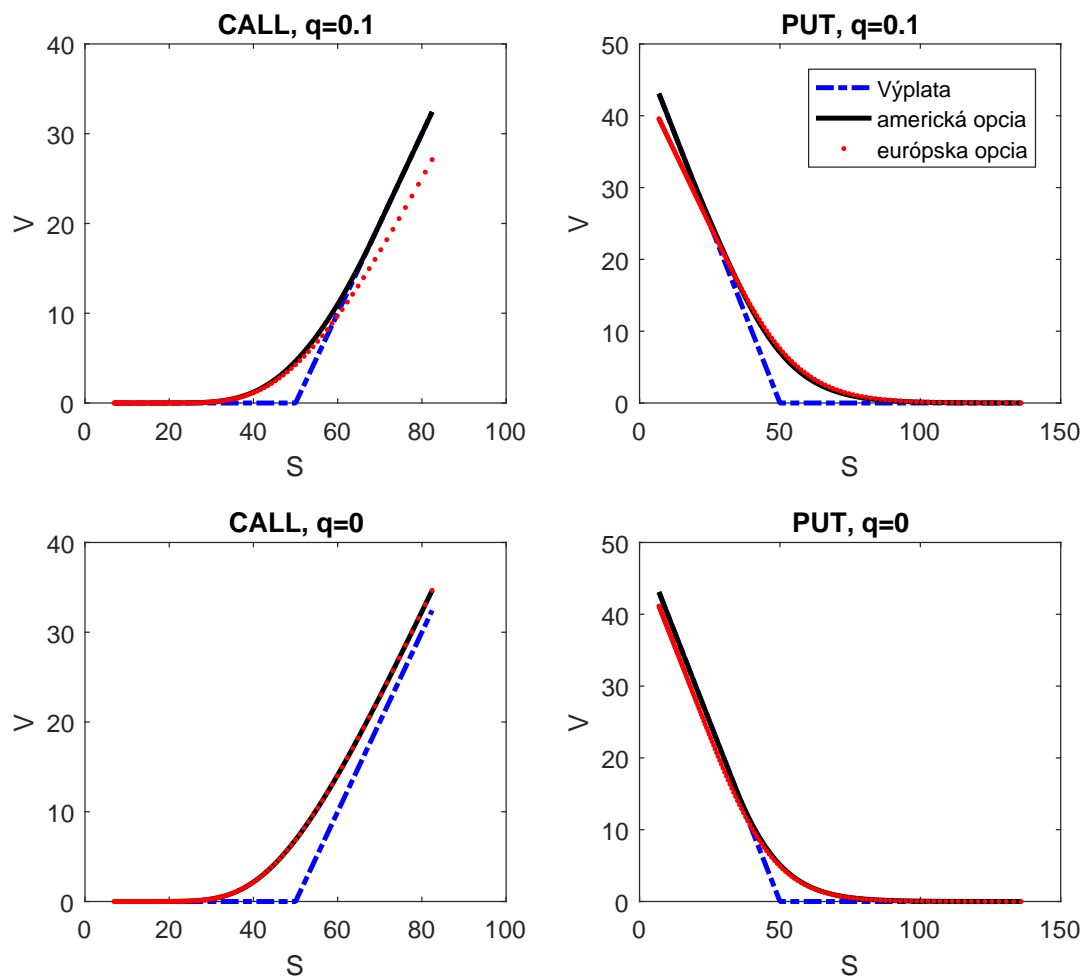
hodnota distribučnej funkcie normálneho rozdelenia má podľa [10] v $+\infty$ limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} N(x) = 1, \quad (13)$$

a vďaka konštantnosti čitateľa vzhľadom na S

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{Ee^{-r(T-t)}}{S} = 0. \quad (14)$$

Pretože limita zachováva nerovnosť, zo vzťahu (11) plynie, že od nejakého dostatočne



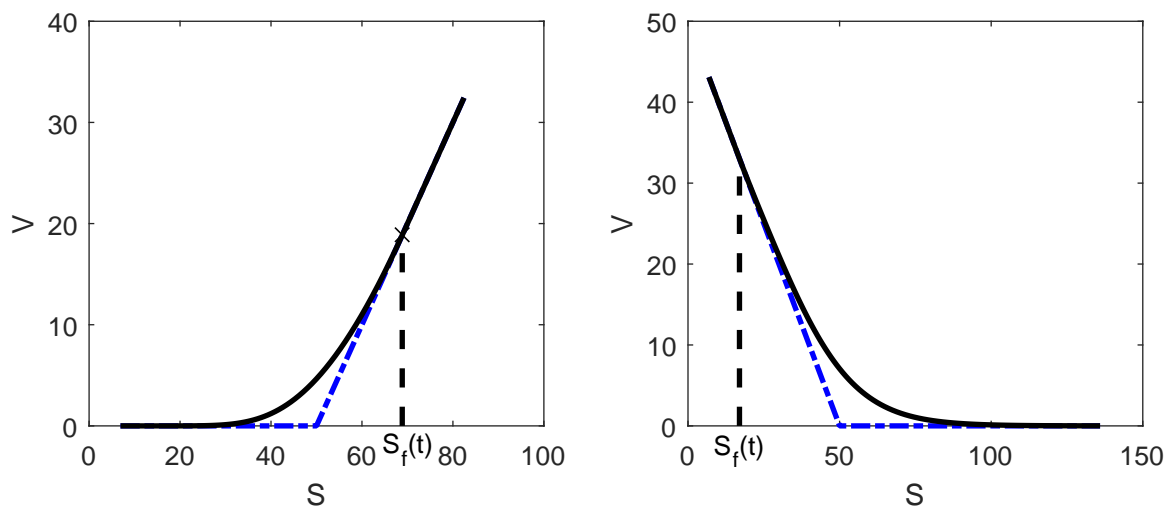
Obr. 3: Porovnanie cien americkej a európskej call a put opcie pre akciu vyplácajúcu, resp. nevyplácajúcu dividendy. Vidíme, že v prípade call opcie a nulových dividend je cena oboch typov opcií identická, pri kladných dividendách už cena európskej pretne výplatný diagram. Pre put opciu cena európskej opcie pretne výplatný v každom prípade a jej cena sa bude od americkej vždy líšiť.

veľkého S musí byť cena európskej opcie s pokladovou akciou vyplácajúcou dividendy nižšia ako je jej výplata, teda $V_{call}^{EU} < S - E$. Podobne by sa dalo uvažovať aj pre put opciu, kde navyše cena európskej opcie pretne výplatný diagram bez ohľadu na to, či sa vyplácajú dividendy, alebo nie.

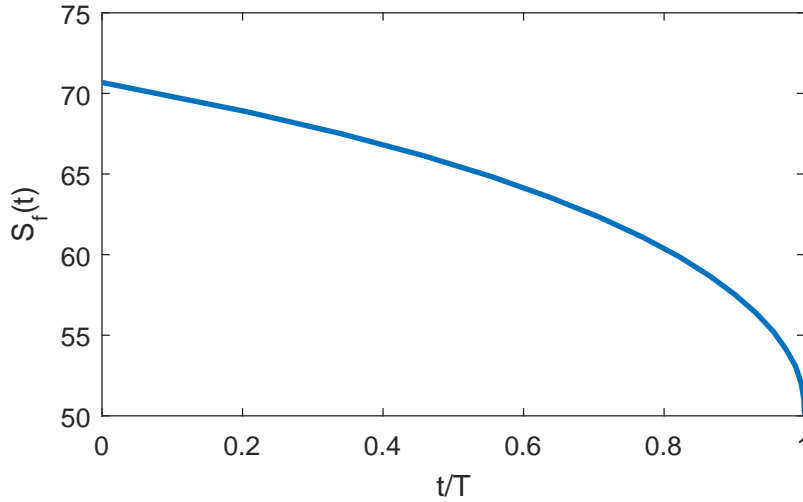
V uvedených prípadoch nebudeme americkú opciu nutne držať až do maturity, pretože by to znamenalo opäť jej identickosť s európskou. Potom by však jej cena, vychádzajúc z predošlého odstavca, mohla pre určité hodnoty S klesnúť pod hodnotu jej výplaty, čo, ako sme už uviedli, pre americkú opciu nie je prípustné. Jej cena je preto ostro vyššia ako cena európskej opcie.

Aby sme vedeli rozlíšiť prípady, kedy je rozumné opciu podržať a kedy naopak uplatniť, zavádzame pojem hranica predčasného uplatnenia americkej opcie, označujeme $S_f(t)$ (obr. 4). Pochopiteľne, táto hranica je funkciou času, čím sme bližšie k času expirácie, tým viac sa blíži k hodnote strike price. Jej priebeh pre call a put opciu znázorňuje

Ak je cena opcie vyššia ako jej výplata, opciu sa neoplatí uplatniť (ich rozdiel by bol stratou držiteľa). Naopak, ak je cena opcie rovná výplate, opciu nemá zmysel dlhšie držať, v prípade jej držania by sa majiteľ pripravil o prípadné dividendy. To znamená, že opciu je racionálne uplatniť práve vo chvíli, kedy jej cena je rovná výplate.



Obr. 4: Znázornenie hranice predčasného uplatnenia $S_f(t)$ v čase t pre call (vľavo) a put (vpravo) opciu. V oboch prípadoch je to hraničný bod, kde $V(S_f(t)) = \bar{V}(S)$.



Obr. 5: Časový priebeh hranice predčasného uplatnenia call opcie. Hranica je v čase klesajúca a v čase maturity $t = T$ je hranica rovná hodnote strike price E . Ak je cena S v čase t nižšia ako hranica $S_f(t)$, čo zodpovedá časti priestoru pod grafom hranice, opciu držíme. Naopak, ak je $S > S_f(t)$, teda v priestore nad grafom hranice, opciu uplatňujeme.

Zhrnieme definičné vlastnosti hranice predčasného uplatnenia (pre americkú call opciu):

- Ak $S < S_f(t)$, oplatí sa opciu držať a platí $V(S, t) > (S - E)^+$. V takom prípade budeme ďalej oceňovať opciu pomocou Black - Scholesovej rovnice.
- Ak $S \geq S_f(t)$, opciu uplatníme a teda platí $V(S, t) = (S - E)^+$ (nižšia byť cena nemôže, ako sme už zdôvodnili).

Riešime teda nasledovnú parciálnu diferenciálnu rovnicu:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (15)$$

pre $t \in [0, T]$, $S \in [0, S_f(t)]$, s koncovou podmienkou danou

$$V(S, T) = (S - E)^+, \quad (16)$$

a okrajovými podmienkami:

$$V(0, t) = 0, \quad (17)$$

$$V(S_f(t), t) = S_f(t) - E, \quad (18)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = 1. \quad (19)$$

Prvá okrajová podmienka hovorí, že cena podkladového aktíva klesne na nulu, t.j. nemá žiadnu hodnotu, preto sa s ním už neobchoduje a teda call opcia nebude uplatniteľná ($S = 0 < E$), jej hodnota je nulová.

Druhá podmienka prirodzene vyplýva z toho ako sme definovali hranicu S_f ak sa cena podkladovej akcie dostane na jej úroveň, má opcia hodnotu rovnú výplate.

Tretia je skôr technického charakteru, hovorí o C^1 hladkom napojení funkcie ceny na lineárnu funkciu výplaty, navyše, bez nej by riešenie systému nebolo jednoznačné. Kwok v [12] ju odvodzuje s interpretáciou, že cena americkej opcie by mala byť maximom z cien bariérových up-and-out opcií cez všetky spojité bariéry η v čase určujúce hranicu predčasného uplatnenia:

$$V_{call}^{US}(S, t) = \max_{\eta} V(S, t; \eta), \quad (20)$$

kde $V(S, t; \eta)$ je riešenie úlohy (15)-(19), pričom $S_f(t)$ je v nej nahradené $\eta(t)$.

2 Nelineárne modely

Black - Scholesov model má niekoľko veľmi zjednodušujúcich predpokladov. Či sa jedná o nulové transakčné náklady, absencia spätnej väzby trhu, alebo inú z vlastností základného modelu, na reálnom trhu sú tieto predpoklady neustále porušované, čo prirodzene vedie k snahe model rozšíriť tak, aby odrážal skutočné vlastnosti trhu. Za niečo vyše 40 rokov od odvodenia pôvodného modelu Blackom a Scholesom v [4] a súčasne Mertonom v [17] ich vzniklo viacero, v tejto časti predstavíme niekoľko z nich. Zameriame sa pritom najmä na RAPM model, ktorý v ďalších častiach použijeme na nájdenie ceny aj hranice predčasného uplatnenia americkej call opcie.

Zaujímavou spoločnou vlastnosťou nasledovných modelov je, že na všetky sa z matematického hľadiska da hľadiť ako na modifikáciu pôvodného modelu, pričom sa zmení iba volatilita, σ . Tá nebude viac konštantná, ale bude funkciou času, samotnej ceny opcie a často tiež jej druhej derivácie podľa ceny podkladovej akcie, známej ako parameter Γ (Gamma) opcie. Samozrejme, bude závisieť aj od konštantnej historickej volatility, ktorú budeme odteraz označovať symbolom $\hat{\sigma}$.

2.1 RAPM model

Pre nás najzaujímavejším z modelov s nekonštantnou volatilitou bude RAPM, teda Risk-adjusted pricing methodology (Metóda oceňovania prispôbená riziku), ktorý odvodil Kratka v [11] a podrobnejšie ho skúmali v [9] aj Jandačka a Ševčovič. Jeho základom je predpoklad transakčných nákladov, ktoré spôsobujú dvojaký problém: na jednej strane, nie je možné spojito prispôbovať replikačné portfólio, pretože by to viedlo k nekonečným transakčným nákladom, na strane druhej však v čase medzi dvomi diskretnými replikačnými transakciami vzniká riziko nekrytého (volatilného) portfólia, teda riziku, že dôjde k výraznej zmene ceny a viac nebude možné replikovať opciu bez dodatočných nákladov. RAPM potom minimalizuje celkové riziko dané súčtom jednotlivých prémieí za riziko transakčných nákladov a nekrytého portfólia.

Podobne, ako pri pôvodnom Black-Scholesovom modeli, uvažujme portfólio pozos-

távajúce z jednej opcie a δ akcií:

$$\Pi = V + \delta S. \quad (21)$$

Z pohľadu vypisovateľa, ktorý výmenou za vypísanie vlastný Π kusov bezkupónových jednotkových dlhopisov vyplácajúcich úrokovú mieru r , môžno argumentovať, že hodnota jeho majetku sa zvýši v priebehu času Δt o úroky $r\Pi\Delta t$ a zníži o dividendy, ktoré vyplatí držiteľovi portfólia za akciu v hodnote S , teda $\delta S q \Delta t$, formálne

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t - \delta S q \Delta t. \quad (22)$$

Tento prístup však neuvažuje práve dve zmienené riziká, ktoré sa k nemu viažu - transakčné náklady a volatilné portfólio. Zahrňme ich do modelu pridaním ďalších dvoch členov na stranu nákladov pre vypisovateľa:

- $r_{TC}S\Delta t$, kde r_{TC} označíme jednotkovú rizikovú prémie za transakčné náklady (transaction costs),
- $r_{VP}S\Delta t$, kde r_{VP} označíme jednotkovú rizikovú prémie za nechránené portfólio (volatile portfolio).

Diferenciál (22) bude teda v RAPM modeli rozšírený do podoby

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t - \delta S q \Delta t - (r_{TC} + r_{VP})S\Delta t. \quad (23)$$

V nasledujúcich častiach odvodíme modely pre výpočet výšky jednotlivých rizikových prémii r_{TC} a r_{VP} .

2.1.1 Transakčné náklady

Na trhu má každé aktívum dve rôzne ceny: ponuku (bid price), označíme S_{bid} , čo je suma za ktorú môžeme aktívum predať a dopyt (ask price), označíme S_{ask} , za ktorú je možné aktívum kúpiť, pričom, pochopiteľne, $S_{ask} \leq S_{bid}$, inak by na trhu vznikla arbitrážna príležitosť. Na modelovanie transakčných nákladov sa odvoláme na prístup Lelanda z [15]. Nech S označuje stred medzi ponukou a dopytom, $S = \frac{S_{ask} + S_{bid}}{2}$, potom

$$C = \frac{S_{ask} - S_{bid}}{S} \quad (24)$$

označuje náklady na kúpu a následný predaj daného aktíva na jednotku jeho strednej ceny.

Ak budeme na chvíľu uvažovať o nulových nákladoch nekrytého portfólia, t.j. $r_{VP} = 0$, platí pre zmenu portfólia Π :

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t - \delta S q \Delta t - r_{TC} S \Delta t. \quad (25)$$

Celkové transakčné náklady za čas Δt budú súčinom polovice jednotkových transakčných nákladov $\frac{C}{2}$ (pretože buď sa jedná len o nákup alebo len o predaj, nemá zmysel zároveň predávať a nakupovať rovnaké aktívum v jednom časovom okamihu) s objemom obchodovaných aktív $|\Delta\delta|$ a ich strednou cenou S , teda

$$r_{TC} S \Delta t = \frac{C}{2} |\Delta\delta| S. \quad (26)$$

Ostáva určiť hodnotu $|\Delta\delta|$. Ako vieme (napríklad zo [16]), pri replikácii opcie pomocou δ -hedgingu je $\delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$. Potom $\Delta\delta$ môžeme aproximovať výrazom

$$\Delta\delta \approx \frac{\partial\delta}{\partial S} \Delta S = -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Delta S. \quad (27)$$

Využime predpoklad geometrického Brownovho pohybu ceny S a za ΔS dosadíme vzťah

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \hat{\sigma} S \Delta w. \quad (28)$$

Dostávame

$$\Delta\delta \approx -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \mu S \Delta t - \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \hat{\sigma} S \Delta w. \quad (29)$$

Leland v [15] ukázal, že člen rádu Δt môžeme zanedbať, ponecháme len člen obsahujúci $\Delta w \sim N(0, \Delta t) = \sqrt{\Delta t} \cdot N(0, 1)$, ktorý je približne rádu $(\Delta t)^{1/2}$. Takisto pre dostatočne malé Δt navrhuje $|\Delta w|$ nahradiť jeho strednou hodnotou:

$$|\Delta w| \approx \mathbb{E}|\Delta w| = \sqrt{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx, \quad (30)$$

kde $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ je hustota normalizovaného normálneho rozdelenia $N(0, 1)$. Vzhľadom na absolútnu hodnotu je vhodné integrál rozdeliť na dve časti, na intervaly $x \in (-\infty, 0]$ a $x \in [0, \infty)$. Keďže $f(x) = f(-x)$, ich hodnota je rovnaká a teda stačí počítať na kladnom podintervale:

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx &= 2\sqrt{\Delta t} \int_0^{\infty} xf(x)dx = 2\sqrt{\Delta t} \int_0^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}\Delta t} \int_0^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx. \end{aligned} \quad (31)$$

Substituujeme $u = -\frac{x^2}{2}$, $du = -xdx$ v hraniciach 0 a $-\infty$. Ich výmenou napokon dostaneme :

$$\mathbb{E}|\Delta w| = \sqrt{\frac{2}{\pi}\Delta t} \int_{-\infty}^0 e^u du = \sqrt{\frac{2}{\pi}\Delta t} \left[e^u \right]_{-\infty}^0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}\Delta t}. \quad (32)$$

Dosadením výsledku (32) do (29) získame aproximáciu hodnoty $|\Delta\delta|$:

$$|\Delta\delta| \approx \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \hat{\sigma} S \sqrt{\frac{2}{\pi}\Delta t}, \quad (33)$$

a konečne, po jej dosadení do (26) dostávame:

$$r_{TC}S\Delta t = \frac{C}{2} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \hat{\sigma} S^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}\Delta t}, \quad (34)$$

z čoho vieme vyjadriť finálnu podobu jednotkovej prémie za transakčné náklady r_{TC} nasledovne:

$$r_{TC} = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \hat{\sigma} S \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}. \quad (35)$$

2.1.2 Volatilné portfólio

V tejto časti sa pokúsime oceniť riziko spojené s tým, že portfólio v čase medzi dvoma transakciami nereplikuje opciu, ktorej cena sa neustále mení, presne. Toto riziko vedie, podobne ako transakčné náklady k tomu, že vypisovateľ opcie si zaň vypýta prémii, teda zvýši cenu. Riziko bude tým vyššie, čím je portfólio volatilnejšie. To budeme merať pomocou variancie relatívnych prírastkov portfólia $Var\left(\frac{\Delta\Pi}{S}\right)$ za časový úsek Δt a r_{VP} od neho bude závisieť priamo.

Ak R označíme konštantný koeficient premie za riziko, potom celkovú premiu volatilného portfólia budeme počítat nasledovne:

$$r_{VP} = R \frac{Var\left(\frac{\Delta\Pi}{S}\right)}{\Delta t}. \quad (36)$$

Počítajme diferenciál nášho stochastického portfólia $\Pi = V + \delta\Delta S$ pomocou známej Itovej lemy ([16]), ktorá sa využíva aj pri odvodení Black-Scholesovej formuly. Pritom opäť využijeme predpoklad geometrického Brownovho pohybu $\Delta S = \mu S\Delta t + \hat{\sigma} S\Delta w$:

$$\begin{aligned} \Delta\Pi &= \frac{\partial\Pi}{\partial t}\Delta t + \mu S \frac{\partial\Pi}{\partial S}\Delta t + \hat{\sigma} S \frac{\partial\Pi}{\partial S}\Delta w + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} S^2 \frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}(\Delta w)^2 \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + \mu S \left(\frac{\partial V}{\partial S} + \delta \right) \Delta t + \hat{\sigma} S \left(\frac{\partial V}{\partial S} + \delta \right) \Delta w + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\Delta w)^2. \end{aligned} \quad (37)$$

Členy rádu Δt , teda $\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + \mu S \left(\frac{\partial V}{\partial S} + \delta \right) \Delta t$, sú deterministické, t.j. ich stredná hodnota je rovná im samým. Preto pri výpočte rozdielu $\Delta\Pi - \mathbb{E}(\Delta\Pi)$ sa odpočítajú a ostane:

$$\Delta\Pi - \mathbb{E}(\Delta\Pi) = \hat{\sigma} S \left(\frac{\partial V}{\partial S} + \delta \right) (\Delta w - \mathbb{E}(\Delta w)) + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} ((\Delta w)^2 - \mathbb{E}[(\Delta w)^2]). \quad (38)$$

Využime jednu z definičných vlastností Wienerovho procesu ([21]), ktorá hovorí, že $\Delta w \sim N(0, \Delta t)$. Potom $\mathbb{E}(\Delta w) = 0$ a $Var(\Delta w) = \mathbb{E}[(\Delta w)^2] = \Delta t$. Počítajme rozdeľenie výrazov:

$$\Delta w - \mathbb{E}(\Delta w) \sim \sqrt{\Delta t} \cdot N(0, 1) \quad (39)$$

a

$$(\Delta w)^2 - \mathbb{E}[(\Delta w)^2] \sim \Delta t \cdot (N(0, 1))^2 - \Delta t. \quad (40)$$

Dosadíme tieto výsledky do (38), získame rovnosť

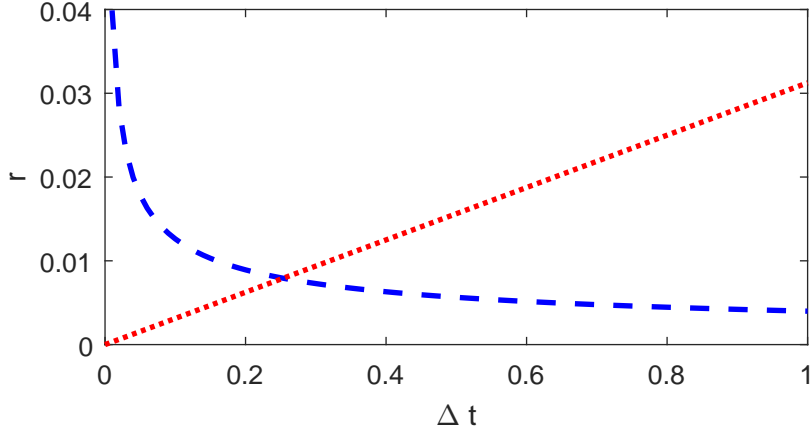
$$\Delta \Pi - \mathbb{E}(\Delta \Pi) = \hat{\sigma} S \left(\frac{\partial V}{\partial S} + \delta \right) \phi \sqrt{\Delta t} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (\phi^2 - 1) \Delta t, \quad (41)$$

kde ϕ je náhodná premenná s normalizovaným normálnym rozdelením $N(0, 1)$. Vďaka nej vieme dopočítať varianciu $\frac{\Delta \Pi}{S}$ nasledovne:

$$\begin{aligned} Var \left(\frac{\Delta \Pi}{S} \right) &= \frac{1}{S^2} \mathbb{E} \left((\Delta \Pi - \mathbb{E}(\Delta \Pi))^2 \right) \\ &= \frac{1}{S^2} \mathbb{E} \left(\left(\hat{\sigma} S \left(\frac{\partial V}{\partial S} + \delta \right) \phi \sqrt{\Delta t} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (\phi^2 - 1) \Delta t \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Opäť využime výsledok δ -hedgingu $\delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$, po jeho dosadení sa výraz zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned} Var \left(\frac{\Delta \Pi}{S} \right) &= \frac{1}{S^2} \mathbb{E} \left(\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (\phi^2 - 1) \Delta t \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \hat{\sigma}^4 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^2 (\Delta t)^2 \mathbb{E}((\phi^2 - 1)^2) \\ &= \frac{1}{2} \hat{\sigma}^4 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^2 (\Delta t)^2, \end{aligned} \quad (43)$$



Obr. 6: Závislosť jednotlivých jednotkových rizikových prémieí od času medzi obnoveniami replikačného portfólia Δt (r_{TC} čiarkovanou čiarou, r_{TP} bodkovanou)

kde v poslednej rovnosti sme využili, že štvrtý centrálny moment normovaného normálneho rozdelenia má hodnotu 3 ([23]), čiže $\mathbb{E}((\phi^2 - 1)^2) = 2$.

Napokon teda získavame hodnotu jednotkovej prémie za riziko volatilného portfólia:

$$r_{VP} = R \frac{Var\left(\frac{\Delta \Pi}{S}\right)}{\Delta t} = \frac{1}{2} R \hat{\sigma}^4 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)^2 \Delta t. \quad (44)$$

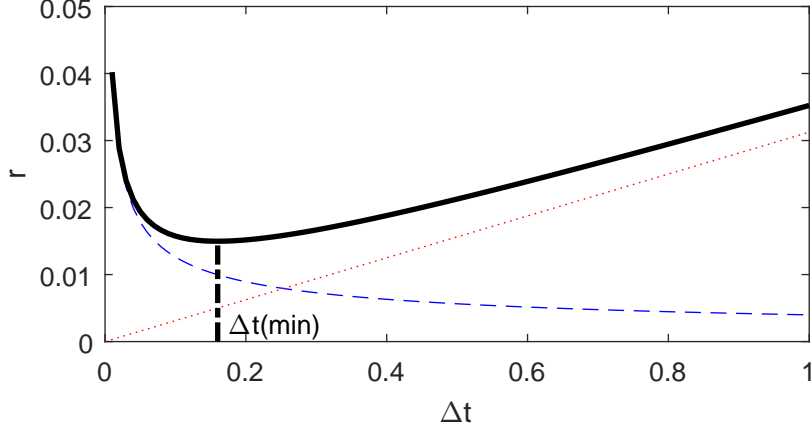
2.1.3 Odvodenie nelineárnej Black-Scholesovej rovnice pre RAPM

Pripomeňme, že celkovú prémiiu za riziko sme definovali ako súčet prémieí za transakčné náklady a nekrytého portfólia. Rizikovo averzný investor sa snaží minimalizovať celkové riziko, pričom jeho veľkosť ovplyvňuje prostredníctvom času medzi jednotlivými replikáciami Δt , od ktorého závisí ako r_{TC} , tak aj r_{VP} , r_{TC} však s rastúcim Δt klesá, kým r_{VP} rastie. Chceme teda riešiť minimalizačnú úlohu:

$$\min_{\Delta t} r_{TC} + r_{VP} = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \hat{\sigma} S \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} + \frac{1}{2} R \hat{\sigma}^4 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)^2 \Delta t. \quad (45)$$

Z podmienky prvého rádu dostávame derivovaním podľa Δt :

$$-\frac{1}{2} \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \hat{\sigma} S \frac{1}{\sqrt{(\Delta t)^3}} + \frac{1}{2} R \hat{\sigma}^4 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)^2 = 0. \quad (46)$$



Obr. 7: Celková prémie za riziko $r_{TC} + r_{VP}$ v závislosti od času medzi obnoveniami portfólia Δt a minimálna hodnota $\widetilde{\Delta t}$.

Z tohto výrazu po vyjadrení Δt získame nasledovnú optimálnu hodnotu času obnovenia portfólia

$$\widetilde{\Delta t} = \left(\frac{C}{\sqrt{2\pi}R} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\hat{\sigma}^2 \left(S \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \right)^{\frac{2}{3}}}. \quad (47)$$

Vypočítajme celkovú prémie za riziko dosadením optimálneho času naspäť do rovnice (45), po úpravách vyjde:

$$r_{TC}(\widetilde{\Delta t}) + r_{VP}(\widetilde{\Delta t}) = \frac{3}{2} \left(\frac{C^2 R}{2\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \hat{\sigma}^2 \left| S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right|^{\frac{4}{3}}. \quad (48)$$

Teraz ostáva už len postupovať podobne ako pri odvodení klasickej Black-Scholesovej rovnice, aplikovať Itovu lemu na funkciu ceny opcie $V(S, t)$, využiť predpoklad geometrického Brownovho pohybu S , predpoklad δ -hedgingu a rovnicu (23) pre diferenciál portfólia so zahrnutím prémiei za riziká a podľa [9] dostaneme Black-Scholesovu rovnicu v tvare

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV + (r_{TC} + r_{VP})S = 0. \quad (49)$$

Nakoniec dosadením optimálnej hodnoty $r_{TC} + r_{VP}$ vypočítanej v (48) a úpravami dostaneme finálnu Black-Scholesovu rovnicu pre RAPM model:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} S^2 \left(1 + \mu(S\Gamma)^{\frac{1}{3}}\right) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (50)$$

kde sme zaviedli označenie

$$\mu := 3 \left(\frac{C^2 R}{2\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (51)$$

a

$$\Gamma := \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}. \quad (52)$$

Ako sme uviedli v úvode tejto časti, model vieme matematicky reprezentovať ako modifikáciu pôvodného Black-Scholesovho modelu, pričom sa zmení len volatilita σ , ktorá nebude konštantná, ale bude funkciou

$$\sigma = \sigma(S, \Gamma, T - t). \quad (53)$$

V našom prípade vidíme, že rovnica (50) má tvar klasickej Black-Scholesovej rovnice keď σ^2 bude v tvare

$$\sigma^2 = \hat{\sigma}^2 \left(1 + \mu(S\Gamma)^{\frac{1}{3}}\right). \quad (54)$$

V prípade, že uvažujeme nulové r_{TC} aj r_{VP} , čiže konštanty $C = 0$ a $R = 0$, potom aj $\mu = 0$ a dostaneme $\sigma = \hat{\sigma}$, takže rovnica sa zjednoduší na pôvodnú Black-Scholesovu.

Uvedomme si, že vzhľadom na to, že sme uvažovali o rizikových premiách, ktoré si bude pýtať vypisovateľ, riešením tejto rovnice bude ask cena opcie (dopytová).

2.2 Ďalšie príklady modelov s nekonštantnou volatilitou

V krátkosti uvedieme ďalšie modely, ktorých spoločnou črtou je modifikácia volatility z konštanty na funkciu.

Lelandov model

Model odvodil Leland ([15]) v roku 1985, neskôr bol zovšeobecnený v [8]. Rozširuje Black-Scholesov model o transakčné náklady. Vzhľadom na to, že pri odvodení transakčných nákladov modelu RAPM sme použili Lelandov prístup, v Lelandovom modeli vyjde ich miera identicky ako v rovnici (35). Opäť treba mať na pamäti, že sme odvádzali ask cenu opcie. Volatilita σ má tvar

$$\sigma^2 = \hat{\sigma}^2 (1 + Le \operatorname{sign}(\Gamma)). \quad (55)$$

Konštanta Le sa nazýva Lelandovou konštantou, príp. Lelandovým číslom a má hodnotu

$$Le = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C}{\hat{\sigma} \sqrt{\Delta t}}.$$

Hodnota Γ bude v prípade európskych aj amerických put i call opcií vždy kladná pre všetky $S > 0$ (európska opcia) resp. $S \in (0, S_f(t))$ (americká opcia) a $t \in [0, T)$, preto $\operatorname{sign}(\Gamma)$ (signum - znamienková funkcia) bude v týchto prípadoch vždy rovné 1 a výraz sa zjednoduší.

Model Freya a Stremmeho

Frey a Stremme sa v [7] zamerali na modelovanie spätnej väzby trhu. Black-Scholesov model predpokladá, že investor môže nakupovať a predávať v ľubovoľnom okamihu ľubovoľné množstvo aktíva a navyše, za danú cenu, ktorá sa touto transakciou nezmení. Frey-Stremme model uvažuje o veľkom investorovi, ktorý replikovaním opcie môže zmeniť cenu podkladového aktíva.

Volatilita má v tomto prípade podobu

$$\sigma^2 = \hat{\sigma}^2 (1 - \rho \lambda(S) S \Gamma)^{-2}, \quad (56)$$

kde ρ je kladná konštanta a $\lambda(S) \geq 1$ je konvexná funkcia. Pre tento model sa podarilo odvodiť explicitné riešenie v [5].

Barles-Sonerov model

Barles a Soner v [3] do modelu okrem transakčných nákladov zahrnuli aj preferencie investora v podobe funkcie užitočnosti. Za predpokladu, že podkladové aktívum nevypláca dividendy, teda $q = 0$, odvodili Black-Scholesovu rovnicu s volatilitou v tvare

$$\sigma^2 = \hat{\sigma}^2 (1 + \Psi(a^2 e^{rt} S^2 \Gamma)), \quad (57)$$

kde a označuje investorovu averziu k riziku a pre Ψ platí obyčajná diferenciálna rovnica

$$\Psi'(x) = \frac{\Psi(x) + 1}{2\sqrt{x\Psi(x)} - x}, \quad (58)$$

s počiatočnou podmienkou $\Psi(0) = 0$. Numerickým riešením pomocou metódy konečných diferencií sa zaoberá [6].

3 Formulácia numerickej úlohy

Pripomeňme formuláciu úlohy, ktorú sme odvodili pre americkú call opciu pomocou konceptu voľnej hranice predčasného uplatnenia, avšak už s nekonštantnou volatilitou:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2(S, \Gamma, t)}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (59)$$

pre $t \in [0, T]$, $S \in [0, S_f(t)]$; s terminálnou podmienkou

$$V(S, T) = (S - E)^+, \quad (60)$$

a okrajovými podmienkami:

$$V(0, t) = 0, \quad (61)$$

$$V(S_f(t), t) = S_f(t) - E, \quad (62)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = 1. \quad (63)$$

3.1 Transformácia na úlohu v tvare nelineárnej komplementarity

Hlavnou myšlienkou odvodenia formulácie Black-Scholesovej rovnice v tvare úlohy nelineárnej komplementarity je takzvaná Black-Scholesova nerovnosť, ktorá platí v prípade americkej opcie na celom intervale $S \in (0, \infty)$. Predpokladajme $r \geq q \geq 0$. Nerovnosť má tvar

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2(S, \Gamma, t)}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0. \quad (64)$$

Táto nerovnosť je celkom prirodzená - za hranicou predčasného uplatnenia prichádzať totiž o dividendy v prípade držania opcie. Zaujímavá bude iba oblasť $S \in [S_f(t), \infty)$, na intervale $S \in (0, S_f(t))$, ako sme už skôr zdôvodnili, bude mať opcia cenu spĺňajúcu priamo Black-Scholesovu rovnicu, ktorá je silnejšia ako nerovnosť (64). Na intervale $S \in [S_f(t), \infty)$, priamo z definície hranice S_f vyplýva $V(S, t) = S - E$, $\forall t \in [0, T]$.

Chceme teda dokázať, že

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \Big|_{\substack{V(S,t)=S-E \\ S > S_f(t)}} \leq 0. \quad (65)$$

Postupujme podobne ako Ševčovič v [20]. Po dosadení a následnej úprave sa výraz zjednoduší:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \Big|_{\substack{V(S,t)=S-E \\ S > S_f(t)}} &= (r - q)S - r(S - E) \\ &= rE - qS \\ &\leq rE - qS_f(t). \end{aligned} \quad (66)$$

Stačí už len dokázať $rE - qS_f(t) \leq 0$, alebo ekvivalentne $S_f(t) \geq \frac{rE}{q}$, $\forall t \in [0, T]$.

Derivujeme okrajovú podmienku (62) podľa času a následne upravme:

$$V(S_f(t), t) = S_f(t), \quad (67)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) \frac{dS_f(t)}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}(S_f(t), t) = \frac{dS_f(t)}{dt}, \quad (68)$$

$$\frac{dS_f(t)}{dt} \left(1 - \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) \right) = \frac{\partial V}{\partial t}(S_f(t), t). \quad (69)$$

Teraz do rovnice (69) dosadíme tretiu okrajovú podmienku (63), ktorá má tvar $\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = 1$, tým pádom nám ostane zaujímavá rovnosť

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S_f(t), t) = 0. \quad (70)$$

Vďaka spojitosti ceny V a vďaka tomu, že limita zachováva spojitosť, môžeme tvrdiť, že Black-Scholesova rovnica platí aj pre $S \rightarrow S_f(t)$, čiže

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S_f(t), t) + \frac{\sigma^2}{2} S_f(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_f(t), t) + (r - q)S_f(t) \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) - rV(S_f(t), t) = 0. \quad (71)$$

Dosadením okrajových podmienok (62), (63) a odvodenej rovnosti (70) a následnou úpravou:

$$qS_f(t) - rE = \frac{\sigma^2}{2} S_f(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_f(t), t) \geq 0, \quad (72)$$

pričom posledná nerovnosť vyplýva zo zrejmej nezápornosti Γ v okolí $S_f(t)$.

Tým sme dokázali Black-Scholesovu nerovnosť (64) (pre call opciu), pričom rovnosť nastáva pre $S \in (0, S_f(t))$. Zároveň, už skôr sme zdôvodnili nerovnosť $V(S, t) - \bar{V}(S)$, ktorá naopak platí pre $S \in [S_f(t), \infty)$.

Tieto závery sa dajú zhrnúť do úlohy v tvare nelineárnej komplementarity nasledovne:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2(S, \Gamma, t)}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0, \quad (73)$$

$$V(S, t) - \bar{V}(S) \geq 0, \quad (74)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2(S, \Gamma, t)}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \right) (V(S, t) - \bar{V}(S)) = 0. \quad (75)$$

Obdobne sa dá postupovať pre put opciu, pre ktorú sa takisto dá dokázať Black-Scholesova nerovnosť, a preto je tiež riešením úlohy nelineárnej komplementarity (samozrejme, s rozdielnou výplatnou funkciou $\bar{V}(S) = (E - S)^+$).

3.1.1 Penalizovaná úloha

Úloha v tvare nelineárnej komplementarity sa dá ešte preformulovať, a to do tvaru penalizovanej úlohy (penalty formulation), kde namiesto dvoch nerovníc a jednej rovnice dostávame iba jediná rovnicu. Myšlienkou je pridať do Black-Scholesovej rovnice člen, ktorý bude zvoleným koeficientom $P \gg 0$ penalizovať, ak $V(S, t) < \bar{V}(S)$. Rovnica vyzerá nasledovne:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV + P \cdot \max(\bar{V}(S) - V(S, t), 0) = 0, \quad (76)$$

pričom maximum sa aplikuje po zložkách.

Keďže výraz $P \cdot \max(\bar{V}(S) - V(S, t), 0)$ je nezáporný, máme zaručenú platnosť Black-Scholesovej nerovnosti (73).

Pre hodnoty S , pre ktoré $\bar{V}(S) < V(S, t)$, zodpovedajúce (pre call opciu) $S < S_f(t)$, je $P \cdot \max(\bar{V}(S) - V(S, t), 0) = 0$, takže riešime samotnú Black-Scholesovu rovnicu, čo je konzistentné s naším modelom hranice predčasného uplatnenia. Pozrime sa, ako je to v prípade, že $\bar{V}(S) > V(S, t)$. Potom zaručene

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV < 0. \quad (77)$$

Výraz $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV$ dosahuje maximálnu hodnotu 0 pre európsku opciu a ako sme videli v (66), pre $V = S - E$, t.j. $\bar{V}(S) = V(S, t)$, je jeho hodnota rovná $rE - qS < 0$. Pre $\bar{V}(S) > V(S, t)$ môže nadobúdať hodnoty z intervalu $(rE - qS, 0)$. Vhodnou voľbou konštanty $P \gg 0$ môžeme teda hodnotu $\bar{V}(S) - V(S, t)$ ohraničiť:

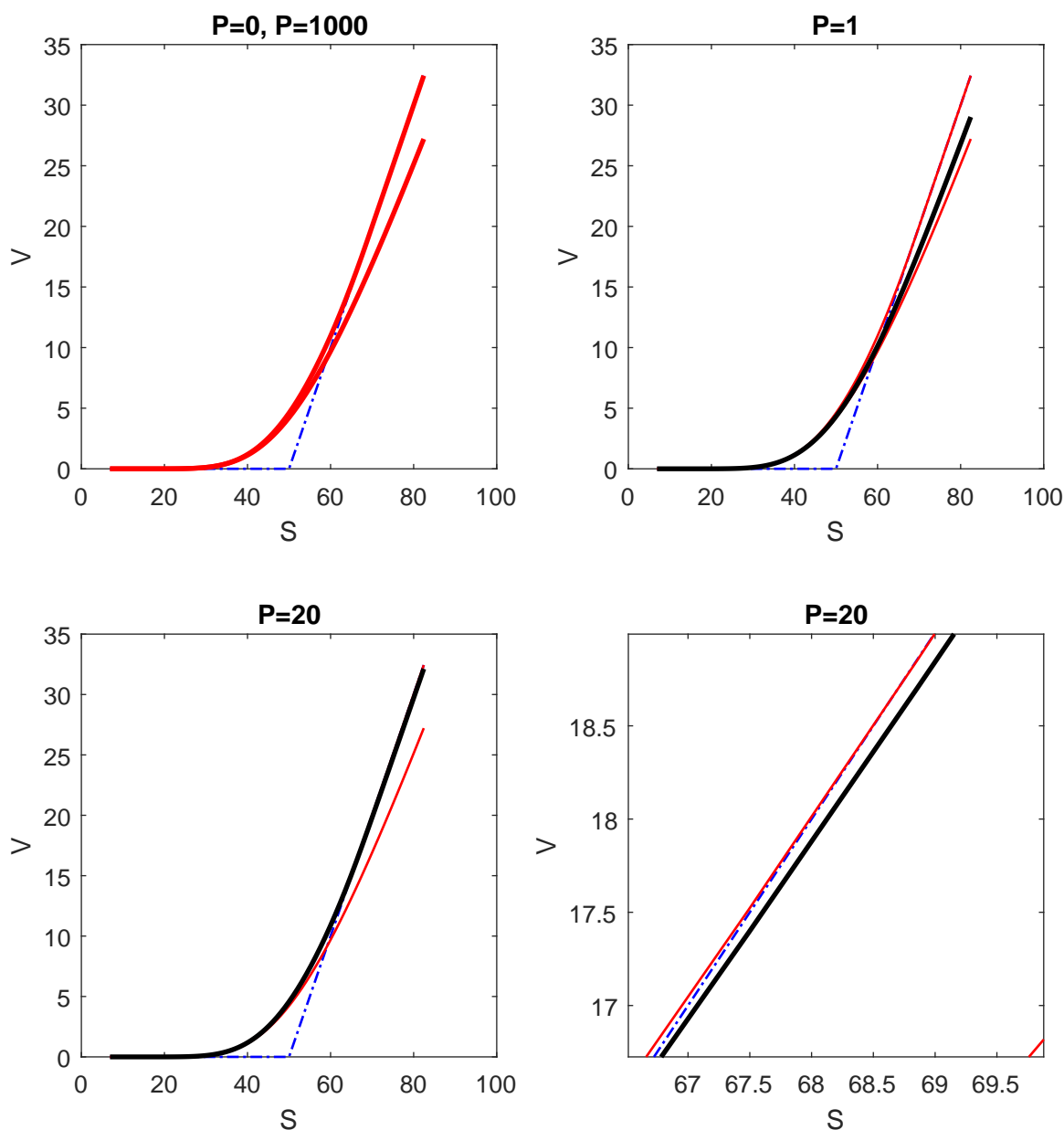
$$\bar{V}(S) - V(S, t) \leq \frac{qS - rE}{P}. \quad (78)$$

Špeciálne pre $P \rightarrow \infty$ $\bar{V}(S) - V(S, t) \rightarrow 0$ a teda sú asymptoticky splnené aj rovnice (74) a (75) formulácie v tvare nelineárnej komplementarity.

3.2 Transformácia súradníc

Pre ďalšie pokračovanie k numerickému riešeniu úlohy nájdenia hranice predčasného uplatnenia bude výhodné spraviť transformáciu času na čas do maturity a ceny podkladovej akcie na logaritmicnú cenu nasledovne:

$$\tau = T - t, \quad \tau \in [0, T], \quad (79)$$



Obr. 8: Na obrázkoch sú znázornené riešenia $V(S, t)$ penalizovanej úlohy pre rôzne hodnoty koeficientu P . Na obrázku vľavo hore, ak $P = 0$, úloha sa stáva klasickou Black-Scholesovou parciálnou diferenciálnou rovnicou, takže riešením je cena európskej opcie. Naopak, keď $P = 1000$, penalizácia je dostatočne vysoká, aby výsledná cena bola takmer identická s cenou danou riešením úlohy (ne)lineárnej komplementarity. Na ďalších dvoch obrázkoch vidíme porovnanie týchto riešení (tenšia čiara) s riešeniami pre $P = 1$ a $P = 20$ (hrubšia čiara). Na poslednom je detail riešenia pre $P = 20$ v okolí hranice predčasného uplatnenia.

$$x = \ln\left(\frac{S}{E}\right), \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (80)$$

Funkciu ceny opcie v transformovaných súradniciach označíme $u(\cdot, \cdot)$,

$$u(x, \tau) = V(Ee^x, T - \tau). \quad (81)$$

V literatúre ([21]) je užitočným zvykom spraviť nasledovnú transformáciu ceny opcie:

$$u(x, \tau) = Ee^{\alpha x + \beta \tau} V(S, t), \quad (82)$$

kde α a β sú parametre transformácie zvolené špeciálne tak, aby transformovaná Black-Scholesova rovnica nadobudla tvar rovnice vedenia tepla. V našom prípade takáto transformácia nebude výhodná, α a β totiž závisia od hodnoty $\hat{\sigma}$, ktorá je funkciou druhej derivácie ceny. Spôsobilo by to tak komplikácie na okrajoch mriežky numerickej schémy.

Vypočítajme transformáciu Black-Scholesovej rovnice pri nových súradniciach. Jednodlivé derivácie majú tvar:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad (83)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dS} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{Ee^x}, \quad (84)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{1}{(Ee^x)^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{-1}{(Ee^x)^2}. \quad (85)$$

Navyše, transformovaná výplatná funkcia, pre ktorú zavedieme označenie $g(\cdot)$, vyzerá pre call opciu nasledovne:

$$g(x) = \bar{V}(S) = (S - E)^+ = E(e^x - 1)^+. \quad (86)$$

Variancia pre RAPM model daná výrazom (54) má transformovanú hodnotu vyjadrenú:

$$\sigma^2 = \hat{\sigma}^2 \left(1 + \mu \left[\frac{1}{(Ee^x)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \right). \quad (87)$$

Napokon, Black-Scholesova rovnica bude po transformácií v nasledovnom tvare:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2(x, u_{xx} - u_x, \tau)}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + (r - q) \frac{\partial u}{\partial x} - ru \\ = & -\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2(x, u_{xx} - u_x, \tau)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(r - q - \frac{\sigma^2(x, u_{xx} - u_x, \tau)}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - ru = 0. \end{aligned} \quad (88)$$

3.3 Diskretizácia metódou konečných diferencií

Numerické riešenie si vyžaduje, vzhľadom na charakter samotného počítača, určitú diskretizáciu. V tejto časti, vychádzajúc zo [2], predstavíme koncept konečných diferencií ako metódu na numerickú aproximáciu derivácií a vďaka tomu riešenie (parciálnych) diferenciálnych rovníc. Odvodíme diskrétnu formu Black-Scholesovej rovnice v transformovanej podobe (88).

Cena opcie u sa nachádza v priestore danom časovou a priestorovou premennou $u : (-\infty, \infty) \times [0, T] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Definičným oborom je časť roviny, tú budeme chcieť pokryť mriežkou bodov, z ktorých v každom budeme poznať hodnotu funkcie u - reálne číslo.

Každý z mrežových bodov je jednoznačne určený dvojicou bodov (x_i, τ_j) , pritom, uvažujúc priestorový krok veľkosti h a časový krok k :

$$x_{i'} = i'h, \quad x_{i'} \in (-\infty, \infty) \implies i' = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (89)$$

$$\tau_j = jk, \quad \tau_j \in [0, T] \implies j = 0, 1, 2, 3, \dots, \frac{T}{k}. \quad (90)$$

Keďže pri implementácii musí mať mriežka aj v priestorovom rozmere konečný počet bodov, zvykne sa ohraničiť dostatočne širokým intervalom $x \in [-L, L]$, kde potom $i' = \frac{-L}{h} \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \frac{L}{h}$. Označme $n = \frac{L}{h}$ a $m = \frac{T}{k}$ premenné určujúce rozmer mriežky, daný $(2n + 1) \times (m + 1)$. Z praktických dôvodov zavedieme index i , $i = i' + n$ tak, aby nenadobúdala záporné hodnoty, potom

$$x_i = (i - n)h, \quad x_i \in [-L, L], \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2n. \quad (91)$$

Ďalej, vypočítanú aproximáciu hodnoty funkcie u v bode danom i, j označíme

$$u_i^j \approx u(x_i, \tau_j). \quad (92)$$

Odvoďme teraz prvú a druhú konečnú diferenciu, pomocou ktorých budeme aproximovať prvé a druhé derivácie u lineárnymi kombináciami hodnôt v susediacich mrežových bodoch. Predpokladajme, že funkcia u je dostatočne hladká, rozviňme ju do Taylorovho radu v okolí bodu u_i^j a pozrime sa na jeho hodnotu v susedných bodoch mriežky (najprv pre premennú x):

$$u(x_{i+1}, \tau_j) = u(x_i, \tau_j) + \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + O(h^3), \quad (93)$$

$$u(x_{i-1}, \tau_j) = u(x_i, \tau_j) - \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + O(h^3), \quad (94)$$

pričom sme využili, že vzdialenosť susedných bodov v priestorovej dimenzii je h :

$$x_{i+1} - x_i = h, \quad (95)$$

$$x_{i-1} - x_i = -h. \quad (96)$$

Počítaním rozdielu (93)-(94) a použitím označenia (92) dostávame

$$u_{i+1}^j - u_{i-1}^j = 2h \frac{\partial u}{\partial x} + O(h^3), \quad (97)$$

z toho vydelením $2h$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} + O(h^2). \quad (98)$$

Po zanedbaní členov rádu do h^2 získavame aproximáciu, ktorú nazývame centrálnou konečnou diferenciou prvého rádu. Ak by sme rozvinuli Taylorov rad iba do prvého

rádu a odpočítali u_i^j , dostali by sme spätnú, resp. doprednú diferenciu prvého rádu v tvare

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h} + O(h), \quad (99)$$

resp.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} + O(h). \quad (100)$$

Naopak, keď spravíme súčet (93)+(94), získame

$$u_{i+1}^j + u_{i-1}^j = 2u_i^j + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + O(h^4), \quad (101)$$

kde aproximačná chyba je až $O(h^4)$, pretože v tomto prípade môžeme rad rozviesť až do tretieho rádu, pričom členy rádu h^3 sa odpočítajú. Vydelením h^2 a vyjadrením druhej derivácie získame

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + O(h^2). \quad (102)$$

Po zanedbaní $O(h^2)$ získame aproximáciu druhej (parciálnej) derivácie, nazývame ju druhá centrálna diferencia, resp. centrálna diferencia druhého rádu.

V prípade časovej dimenzie je postup úplne analogický, pričom, keďže budeme v algoritmoch postupovať po jednotlivých časových vrstvách, využijeme jedine doprednú diferenciu prvého rádu v tvare

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} + O(k). \quad (103)$$

3.3.1 Explicitná a implicitná numerická schéma

Teraz môžeme parciálne derivácie v Black-Scholesovej rovnici nahradiť konečnými parciálnymi diferenciami. Môžeme to urobiť viacerými metódami, podľa toho ktorý typ

diferencií použijeme.

Základná myšlienka algoritmu výpočtu ceny podľa [21] je pre obe schémy rovnaká:

1. Začneme nultou časovou vrstvou, t.j. počiatočnou podmienkou, $u_i^0 = g(x)$.
2. Ak už máme vypočítaných prvých $j - 1$ časových vrstiev, vypočítame hodnoty u_i^j v j -tej časovej vrstve pre všetky i .
3. Zvýšime j a opakujeme body 2. a 3. až kým $j = m$.

Explicitná schéma, alebo tiež Eulerova spätná metóda, využíva spätnú diferenciu podľa času. To rozlíšime podľa toho, že priestorové diferencie pri výpočte j -tej časovej vrstvy uvažujeme z $j - 1$ -vej vrstvy, v ich prípade môžeme použiť centrálnu diferenciu. Príslušné derivácie teda aproximujeme nasledovne:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} \approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{h}, \quad (104)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1}^{j-1} - u_{i-1}^{j-1}}{2h}, \quad (105)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{h^2}. \quad (106)$$

Diskretizovaná Black-Scholesova rovnica nadobudne tvar

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{h} = \frac{\sigma_{ij}^2}{2} \frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{h^2} + \left(r - q - \frac{\sigma_{ij}^2}{2} \right) \frac{u_{i+1}^{j-1} - u_{i-1}^{j-1}}{2h} - ru_i^j. \quad (107)$$

Z tejto rovnice vieme explicitne vyjadriť u_i^j len pomocou hodnôt z predošlej vrstvy, ktorú už poznáme. Táto jednoduchosť však prináša aj negatíva v podobe obmedzujúcich podmienok stability metódy. To je dôvodom, prečo sa často využíva implicitná schéma.

Implicitná schéma, alebo Eulerova dopredná metóda, využíva doprednú diferenciu podľa času, priestorové body berieme z j -tej, t.j. práve počítanej časovej vrstvy. V tomto prípade budú diferencie v j -tej vrstve vyzeráť nasledovne:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} \approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{h}, \quad (108)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h}, \quad (109)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \quad (110)$$

a Black-Scholesova rovnica v diskretizovanom tvare:

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{h} = \frac{\sigma_{ij}^2}{2} \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + \left(r - q - \frac{\sigma_{ij}^2}{2} \right) \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} - ru_i^j. \quad (111)$$

Z nej vieme vyjadriť člen z predošlej časovej vrstvy u_i^{j-1} :

$$\begin{aligned} u_i^{j-1} &= k \left[\frac{1}{2h} \left(r - q - \frac{1}{2} \sigma_{i-1,j}^2 \right) - \frac{\sigma_{i-1,j}^2}{2h^2} \right] u_{i-1}^j \\ &+ k \left[1 + \frac{2}{h^2} \frac{\sigma_{ij}^2}{2} + r \right] u_i^j \\ &+ k \left[-\frac{1}{2h} \left(r - q - \frac{1}{2} \sigma_{i+1,j}^2 \right) - \frac{\sigma_{i+1,j}^2}{2h^2} \right] u_{i+1}^j. \end{aligned} \quad (112)$$

Sústavu vieme zapísať aj v maticovej podobe:

$$A^j u^j + b^j = u^{j-1}, \quad (113)$$

pričom matica A^j je tridiagonálna a má tvar:

$$A^j = \begin{pmatrix} d_1^j & r_2^j & 0 & \dots & 0 \\ l_1^j & d_2^j & r_3^j & 0 & \\ 0 & l_2^j & d_3^j & r_4^j & 0 & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & 0 & l_{2n-4}^j & d_{2n-3}^j & r_{2n-2}^j & 0 \\ & & 0 & l_{2n-3}^j & d_{2n-2}^j & r_{2n-1}^j \\ 0 & \dots & & 0 & l_{2n-2}^j & d_{2n-1}^j \end{pmatrix}$$

pri označení

$$d_i^j = k \left[1 + \frac{2}{h^2} \frac{\sigma_{ij}^2}{2} + r \right], \quad (114)$$

$$l_i^j = k \left[\frac{1}{2h} \left(r - q - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^2 \right) - \frac{\sigma_{ij}^2}{2h^2} \right], \quad (115)$$

$$r_i^j = k \left[-\frac{1}{2h} \left(r - q - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^2 \right) - \frac{\sigma_{ij}^2}{2h^2} \right], \quad (116)$$

a vektor b^j

$$b^j = (l_0^j u_0^j, 0, \dots, 0, r_{2n}^j u_{2n}^j)^T, \quad (117)$$

pozostávajúci z okrajových členov z rovnice (112) pre $i = 0$ a $i = 2n$, ktoré sú v súčine $A^j u^j$ vynechané. Predpokladajme, že $\sigma_{0,j}^2 = \sigma_{1,j}^2$ a podobne $\sigma_{2n,j}^2 = \sigma_{2n-1,j}^2$, teda okrajové hodnoty volatility budeme aproximovať prvou a poslednou známou hodnotou. Vzhľadom na tvar vzťahu pre σ_i^j pri použití metódy konečných diferencií, ktorý uvádzame nižšie, totiž tieto okrajové hodnoty nevieme dopočítať. Potom platí $l_0^j = l_1^j$ a $r_{2n}^j = r_{2n-1}^j$.

Tieto okrajové členy využijeme na zapracovanie okrajových podmienok do modelu. Využijeme pritom predpoklad, že pre dostatočne nízku, resp. vysokú cenu podkladovej akcie je takmer isté, že nebude, resp. bude (pre americkú call opciu) uplatnená a tým pádom jej výplata je „takmer deterministická“. Konkrétne, ak cena akcie je omnoho vyššia ako je strike price, potom cena opcie je prakticky rovná výplatnej hodnote. Ak cena akcie je príliš nízka (takmer 0), hodnota - a teda aj cena - opcie je prakticky nulová, teda opäť rovná payoff hodnote pri danej cene. V oboch extrémnych prípadoch teda môžeme hodnotu opcie aproximovať konštantnou hodnotou výplaty, t.j.

$$\phi := u_0^j = g_0, \quad (118)$$

$$\psi := u_{2n}^j = g_{2n}. \quad (119)$$

Pre call opciu máme využijúc jej známu funkciu výplaty (86) $\phi = 0$ a $\psi = E(e^L - 1)$.

Špeciálne pre klasický Black-Scholesov model je σ_i^j konštanta pre všetky i a j , b^j a A^j sú teda tiež konštantné pre všetky j a sústavu (113) vieme prepísať do tvaru

$$Au^j = u^{j-1} - b. \quad (120)$$

V každej časovej vrstve j tak de facto riešime sústavu

$$Au = v, \quad (121)$$

pričom matica A aj vektor $v =$ sú známe.

Pre RAPM model, a všeobecne pre modely s nekonštantnou volatilitou, sa situácia komplikuje. Hodnotu σ_i^j z (87) v implicitnej schéme aproximujeme pomocou konečných nasledovne:

$$\sigma_{ij}^2 = \hat{\sigma}^2 \left(1 + \mu \left[\frac{1}{Ee^{x_i}} \left(\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} - \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j}{2h} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \right). \quad (122)$$

Vidíme, že hodnota σ_{ij}^2 a s ňou aj A^j a b^j závisí od samotného riešenia u^j v rovnakej časovej vrstve a sústava

$$A^j(u^j)u^j + b^j = u^{j-1} \quad (123)$$

je preto nelineárna.

S týmto problémom sa vysporiadame v časti 3.4 modifikáciou PSOR algoritmu. Použitím implicitnej schémy sme dostali výraz pre výpočet časového kroku v implicitnej forme, t.j. ako riešenie sústavy rovníc. Samozrejme, v porovnaní s explicitnou formou, kde sme ho dostali v tvare súčinu, je to nevýhodou. Napriek tomu však zostaneme pri implicitnej schéme, je totiž na rozdiel od explicitnej numericky nepodmienečne stabilná.

3.4 PSOR algoritmus

V tejto časti odvodíme algoritmus pre iteračné numerické riešenie úlohy nelineárnej komplementarity. Pôvodný PSOR algoritmus, podľa ktorého postupuje (??), rieši úlohu lineárnej komplementarity, schématicky zadanú nasledovne:

$$Au - v \geq 0, \quad (124)$$

$$u \geq g, \quad (125)$$

$$(Au - v)(u - g) = 0. \quad (126)$$

Avšak, v predošlej časti sme prišli k záveru, že v prípade RAPM (a ostatných modelov s nekonštantnou volatilitou) má sústava nelineárny tvar:

$$A(u)u - v(u) \geq 0, \quad (127)$$

$$u \geq g, \quad (128)$$

$$(A(u)u - v(u))(u - g) = 0. \quad (129)$$

Originálny PSOR algoritmus teda budeme musieť mierne modifikovať tak, aby riešil našu nelineárnu verziu problému.

3.4.1 Nelineárna Gauss-Seidelova SOR metóda

SOR (succesive over-relaxation) metóda je iteračná metóda, teda hľadá približné riešenie systému $Au = v$. Rozšírime ju pre náš prípad tak, aby riešila systém $A(u)u = v(u)$. Uvažujme rozklad matice $A(u)$ na súčet dolnej trojuholníkovej, diagonálnej a hornej trojuholníkovej matice $L(u) + D(u) + U(u)$, pričom každá z týchto matíc bude tvorená prvkami matice A v príslušnej časti a nulami inde. Systém $A(u)u = v(u)$ môžeme dosadením $A(u) = L(u) + D(u) + U(u)$, prenásobením konštantou ω a pripočítaním vektora $D(u)u$ ekvivaletne zapísať

$$D(u)u + \omega(L(u) + D(u) + U(u))u = D(u)u + \omega v(u). \quad (130)$$

V tejto chvíli bude výhodné niekoľkými jednoduchými krokmi upraviť výraz do ekvivaletného tvaru

$$(D(u) + \omega L(u))u = (1 - \omega)D(u)u + \omega(v(u) - U(u)u). \quad (131)$$

Vynásobením maticou $(D(u) + \omega L(u))^{-1}$, ktorá existuje práve vtedy, keď matica $A(u)$ má všetky členy na diagonále nenulové (čo budeme predpokladať), dostávame po úprave pravej strany rovnicu v tvare

$$u = T(u)u + c(u), \quad (132)$$

kde

$$T(u) = (D(u) + \omega L(u))^{-1}(1 - \omega)D(u)u, \quad (133)$$

$$c(u) = (D(u) + \omega L(u))^{-1} \omega(v(u) - A(u)u).$$

Štandardne sa lineárne systémy pri numerickom riešení upravujú do tvaru $u = Tu + c$, na ich riešenie totiž existuje jednoduchá iteračná schéma:

$$u^{p+1} = Tu^p + c, \quad (135)$$

pričom u^0 je dané (obvykle 0). Pomocou Banachovej vety o pevnom bode sa dá dokázať ([21]), že táto schéma konverguje pre $p \rightarrow \infty$ do $u^p \rightarrow u$, ktoré je riešením (132) a to práve vtedy, keď $\|T\| < 1$ (pri ľubovoľnej norme). Často používanou normou je spektrálna norma, ktorá vracia maximálne vlastné číslo (v absolútnej hodnote) matice. Zároveň, čím je táto norma nižšia, tým rýchlejšia bude vo všeobecnosti rýchlosť konvergencie. K tomu sa viaže voľba parametra ω , ktorá sa volí tak aby ju minimalizovala. Young vo svojej dizertačnej práci [24] v roku 1950 dokázal, že optimálna hodnota pre ω je

$$\omega = 1 + \left(\frac{\rho}{1 + \sqrt{1 - \rho}} \right)^2, \quad (136)$$

kde ρ je maximálna vlastná hodnota matice T . Zrejme pre $\rho \in (0, 1)$ platí $\hat{\omega} \in (1, 2)$. Pre zrýchlenie algoritmu sa však presnú hodnotu počítať neoplatí, obyčajne sa uvažuje približne $\omega \in [1.5; 1.7]$.

Vráťme sa k nášmu prípadu nelineárneho systému (132) a zvoľme nasledovnú iteračnú schému:

$$u^{p+1} = T(u^p)u^p + c(u^p). \quad (137)$$

S nelinearitou sa teda vysporiadame takým spôsobom, aby členy v nelineárnom tvare boli použité z predošlej iterácie. Rovnica (131) po aplikovaní iteračnej schémy (137) nadobudne podobu:

$$(D(u^p) + \omega L(u^p))u^{p+1} = (1 - \omega)D(u^p)u^p + \omega(v(u^p) - A(u^p)u^p). \quad (138)$$

Zapísané bodovo:

$$\left(A_{ii}^{(p)} u_i^{(p+1)} + \omega \sum_{j<i} A_{ij}^{(p)} u_i^{(p+1)} \right) = (1 - \omega) A_{ii}^{(p)} u_i^{(p)} + \omega \left(v_i^{(p)} - \sum_{j>i} A_{ij}^{(p)} u_j^{(p)} \right) \quad (139)$$

$$u_i^{(p+1)} = \frac{\omega}{A_{ii}^{(p)}} \left(v_i^{(p)} - \sum_{j<i} A_{ij}^{(p)} u_i^{(p+1)} - \sum_{j>i} A_{ij}^{(p)} u_j^{(p)} \right) + (1 - \omega) u_i^{(p)}. \quad (140)$$

Tu sa ukazuje výhoda uvažovania rovnice (131) práve v takomto tvare - členy, ktoré už boli v príslušnom kroku $(p+1)$ -vej iterácie vypočítané, sa použijú ešte v tom istom kroku pri výpočte členov vektora u s vyššími indexami i (na rozdiel od známej Jacobiho metódy).

Odvodili sme teda iteračnú metódu, pomocou ktorej vieme numericky riešiť nelineárny systém $A(u)u = v(u)$. V ďalšom budeme predpokladať, že táto metóda konverguje, teda $\lim_{p \rightarrow \infty} u^p = u$.

3.4.2 Rozšírenie na nelineárnu PSOR metódu

Štandardná metóda PSOR (projected succesive over-relaxation) je rozšírenie SOR metódy tak, aby riešila úlohu zadanú v tvare lineárnej komplementarity (124)-(126). V rovnakom zmysle rozšírime nelineárnu SOR metódu tak, aby sme vedeli pomocou nej riešiť úlohu v tvare nelineárnej komplementarity (127)-(129).

Jej podstatou je, že zabezpečuje, aby nebola porušená nerovnosť $u \geq g$ a to prirodzeným spôsobom - v každom kroku iterácie vezme maximum z hodnoty danej výpočtom SOR zo (140) a príslušným prvkom g . Formálne:

$$u_i^{p+1} = \max \left(\frac{\omega}{A_{ii}^{(p)}} \left(v_i^{(p)} - \sum_{j<i} A_{ij}^{(p)} u_i^{(p+1)} - \sum_{j>i} A_{ij}^{(p)} u_j^{(p)} \right) + (1 - \omega) u_i^{(p)}, g_i \right). \quad (141)$$

Zostáva dokázať, že pri takomto postupe platí aj nerovnosť $A(u)u \geq v(u)$ a samozrejme rovnosť $(A(u)u - v(u))_i (u_i - g_i) = 0$. K prvej spomenutej sa dá, berúc do úvahy predpoklad kladnosti diagonálnych prvkov A_{ii} , ľahko dopracovať zo zrejmej nerovnosti

$$u_i^{(p+1)} \geq \frac{\omega}{A_{ii}^{(p)}} \left(v_i^{(p)} - \sum_{j<i} A_{ij}^{(p)} u_i^{(p+1)} - \sum_{j>i} A_{ij}^{(p)} u_j^{(p)} \right) + (1 - \omega) u_i^{(p)} \quad (142)$$

spätne postupom, ktorým sme odvodili rovnosť (140) z pôvodnej úlohy $A(u)u - v(u) = 0$ nahradením znamienka rovnosti znamienkom nerovnosti.

Pre dokázanie rovnosti $(A(u)u - v(u))_i (u_i - g_i) = 0$ stačí dokázať, že ak $u_i > g_i$, potom $(A(u)u)_i = v_i(u_i)$. Ale ak $u_i > g_i$, tak, vzhľadom na predpoklad $\lim_{p \rightarrow \infty} u^p = u$ a fakt, že limita zachováva nerovnosť, maximum sa v (141) bude nadobúdať, od dostatočne vysokého p , pre $\frac{\omega}{A_{ii}^{(p)}} \left(v_i^{(p)} - \sum_{j < i} A_{ij}^{(p)} u_i^{(p+1)} - \sum_{j > i} A_{ij}^{(p)} u_j^{(p)} \right) + (1 - \omega)u_i^{(p)}$, teda bude

$$u_i^{p+1} = \frac{\omega}{A_{ii}^{(p)}} \left(v_i^{(p)} - \sum_{j < i} A_{ij}^{(p)} u_i^{(p+1)} - \sum_{j > i} A_{ij}^{(p)} u_j^{(p)} \right) + (1 - \omega)u_i^{(p)}, \quad (143)$$

čoho výsledkom je v prípade konvergencie (140) u splňajúce $A(u)u = v(u)$.

Napokon teda máme definovanú iteračnú schému, pomocou ktorej budeme vedieť riešiť úlohy nelineárnej komplementarity v tvare (127)-(129).

4 Numerické riešenie

V tejto časti zhrnieme poznatky z predošlých kapitol do konečného algoritmu pre oceňovanie americkej opcie v RAPM modeli a nájdenie jej hranice predčasného uplatnenia. Navrhujeme prístup, ako aproximovať parameter Γ opcie tak, aby jeho nespojitosť nespôsobovala numerické problémy.

4.1 Inicializácia algoritmu

Vstupmi do modelu sú:

- charakteristiky opcie:
 - strike price E ,
 - čas do maturity T ,
 - typ opcie - payoff (budeme uvažovať call opciu),
- charakteristiky podkladovej akcie a trhu:
 - historická volatilita $\hat{\sigma}$,
 - miera vyplácaných dividend q ,
 - bezriziková úroková miera r ,
 - rizikový koeficient $\mu = 3 \left(\frac{C^2 R}{2\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$ RAPM modelu zahŕňajúci, mieru transakčných nákladov C a mieru rizika nekrytého portfólia R ,
- charakteristiky numerickej schémy:
 - ohraničenie priestorovej premennej L ,
 - veľkosť priestorového kroku h resp. parameter určujúci počet mrežových bodov n , $nh = L$,
 - veľkosť časového kroku k resp. parameter určujúci počet mrežových bodov m , $mk = T$,
 - relaxačný parameter SOR metódy ω .

Vložíme počiatočnú podmienku $u^0 = g$ a vzhľadom na nulovosť druhej derivácie g podľa ceny akcie $\sigma_{i,0}^2 = \hat{\sigma}$ pre všetky i . Na základe toho dopočítame A^0 a b^0 zo vzťahov.

4.2 Cyklus pre časové vrstvy

Vytvoríme cyklus, ktorý bude prechádzať po jednej časovej vrstvy $j = 1, \dots, m$ a v každej z nich vypočíta pomocou nelineárneho PSOR algoritmu danú úlohu nelineárnej komplementarity $A^j u^j = u^{j-1} - b^j$. V rámci každej časovej vrstvy bude teda vnorený ďalší cyklus, ktorý bude predstavovať iteračný proces PSOR algoritmu.

Pre prvú iteráciu použijeme hodnoty predošlej časovej vrstvy, čiže

$$u^{j(1)} = u^{j-1}, \quad (144)$$

$$\sigma^{j(1)} = \sigma^{j-1}, \quad (145)$$

$$A^{j(1)} = A^{j-1}, \quad (146)$$

$$b^{j(1)} = b^{j-1}. \quad (147)$$

Následne v $(p+1)$ -vej iterácii vypočítame aproximáciu u_i^j pre $i = 2, \dots, 2n-2$ nasledovne:

$$\begin{aligned} u_i^{j(p+1)} &= \frac{\omega}{A_{ii}^{j(p)}} \left(u_i^{j(p)} - \sum_{k < i} A_{ik}^{j(p)} u_i^{j(p+1)} - \sum_{k > i} A_{ik}^{j(p)} u_i^{j(p)} \right) + (1 - \omega) u_i^{j(p)} \\ &= \frac{\omega}{d_i^{j(p)}} \left(u_i^{j-1} - l_{i-1}^{j(p)} u_{i-1}^{j(p+1)} - r_{i+1}^{j(p)} u_{i+1}^{j(p)} \right) + (1 - \omega) u_i^{j(p)}, \end{aligned} \quad (148)$$

kde

$$d_i^{j(p)} = k \left[1 + \frac{(\sigma_{ij}^2)^{(p)}}{h^2} + r \right], \quad (149)$$

$$l_i^{j(p)} = k \left[\frac{1}{2h} \left(r - q - \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^2)^{(p)} \right) - \frac{(\sigma_{ij}^2)^{(p)}}{2h^2} \right], \quad (150)$$

$$r_i^{j(p)} = k \left[-\frac{1}{2h} \left(r - q - \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^2)^{(p)} \right) - \frac{(\sigma_{ij}^2)^{(p)}}{2h^2} \right], \quad (151)$$

vektor $b^{j(p)}$ má pre dané i nulové hodnoty. Špeciálne pre okrajové body bude platiť:

$$u_1^{j(p+1)} = \frac{\omega}{d_1^{j(p)}} \left(u_1^{j-1} + l_0^{j(p)} \phi - r_2^{j(p)} u_2^{j(p)} \right) + (1 - \omega) u_1^{j(p)}, \quad (152)$$

$$u_{2n-1}^{j(p+1)} = \frac{\omega}{d_{2n-1}^{j(p)}} \left(u_{2n-1}^{j-1} + l_{2n-2}^{j(p)} u_{2n-2}^{j(p)} - r_{2n}^{j(p)} \psi \right) + (1 - \omega) u_{2n-1}^{j(p)}, \quad (153)$$

pričom $l_0^j = l_1^j$ a $r_{2n}^j = r_{2n-1}^j$. Zostáva dopočítať volatilitu $(\sigma_{ij}^2)^{(p+1)}$, pomocou ktorej potom vieme získať aj hodnoty ostatných premenných úlohy.

4.2.1 Výpočet volatility

Pripomeňme, že označenie $\Gamma = \Gamma(S, t)$ používame pre druhú deriváciu ceny opcie podľa ceny podkladovej akcie, $\Gamma(S, t) := \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t)$.

Vychádzajúc zo vzorca (122) :

$$(\sigma_{ij}^2)^{(p+1)} = \hat{\sigma}^2 \left(1 + \mu \left[(Ee^{x_i}) \Gamma_{num}^{j(p+1)} \right]^{\frac{1}{3}} \right), \quad (154)$$

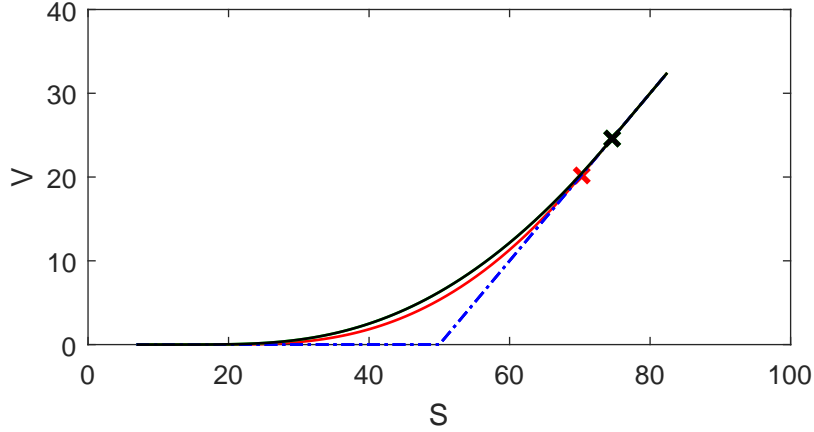
kde numerická aproximácia druhej derivácie ceny opcie podľa ceny podkladovej akcie je daná

$$(\Gamma_{num})_i^{j(p+1)} = \frac{1}{(Ee^{x_i})^2} \left(\frac{u_{i+1}^{j(p+1)} - 2u_i^{j(p+1)} + u_{i-1}^{j(p+1)}}{h^2} - \frac{u_{i+1}^{j(p+1)} + u_{i-1}^{j(p+1)}}{2h} \right). \quad (155)$$

Ako poukazujú Jandačka a Ševčovič v [9] a potvrdzujú naše numerické experimenty, funkcia Γ_{num} je na hranici predčasného uplatnenia, teda v bode S_f , nespojitá. Táto nespojitosť sa prostredníctvom rovnice (154) následne prejaví v nespojitosti σ_{ij}^2 .

Samotná funkcia u je pomerne citlivá na zmenu volatility. Na obrázku 9 vidíme porovnanie hranice predčasného uplatnenia dvoch opcií, ktoré sa líšia iba v hodnote parametra $\hat{\sigma}^2$.

Nespojitosť σ_{ij}^2 potom spôsobuje numerické problémy pri výpočte ceny. Hneď v nasledujúcej iterácii vzniká na grafe funkcie u v okolí hranice predčasného uplatnenia



Obr. 9: Porovnanie cien amerických opcí pre rôzne volatility, $\sigma = 0.3$ resp. $\sigma = 0.35$. Výrazný rozdiel je viditeľný najmä medzi hranicami predčasného uplatnenia (vyznačenými krížikom).

nespojitosťou spôsobená oscilácia. Tá sa prejaví osciláciou aj na grafe Γ_{num} a následne celý systém osciluje. Túto postupnosť zobrazuje obrázok 10.

Navrhujeme preto nasledovnú aproximáciu funkcie Γ_{num} . Využime fakt, že pre európsku call opciu bola hodnota $\Gamma_{EU}(S, t)$ odvodená derivovaním explicitného vzťahu pre výpočet jej ceny (6) dvakrát podľa S v podobe:

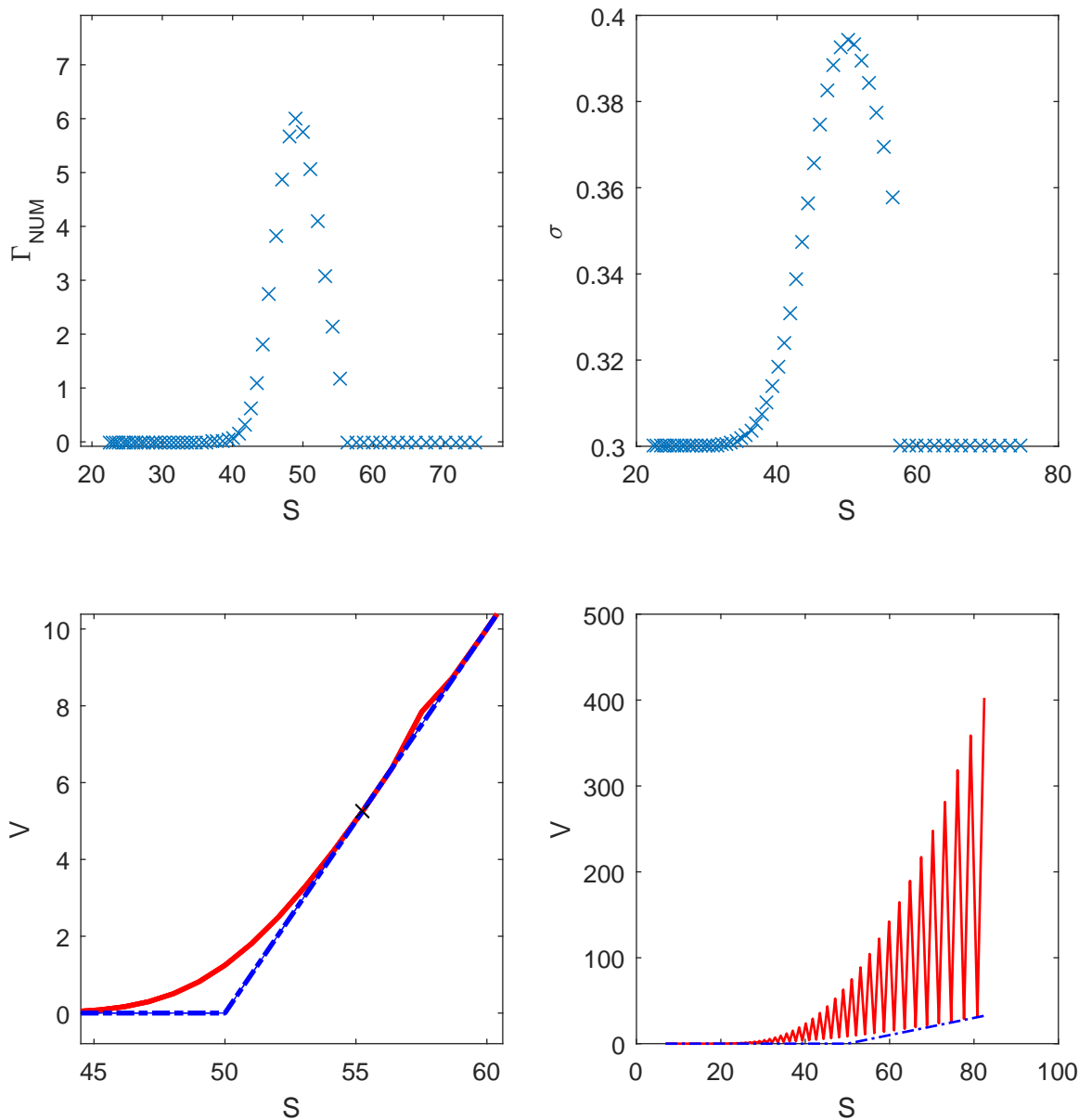
$$\Gamma_{EU}(S, t) = e^{-q(T-t)} \frac{e^{-\frac{1}{2}d_1^2}}{\hat{\sigma} \sqrt{2\pi(T-t)}S}, \quad (156)$$

kde d_1 je dané vzťahom (8). Funkcia Γ_{EU} je v S spojitá a má maximum v blízkosti strike ceny $S = E$ (obr. 11).

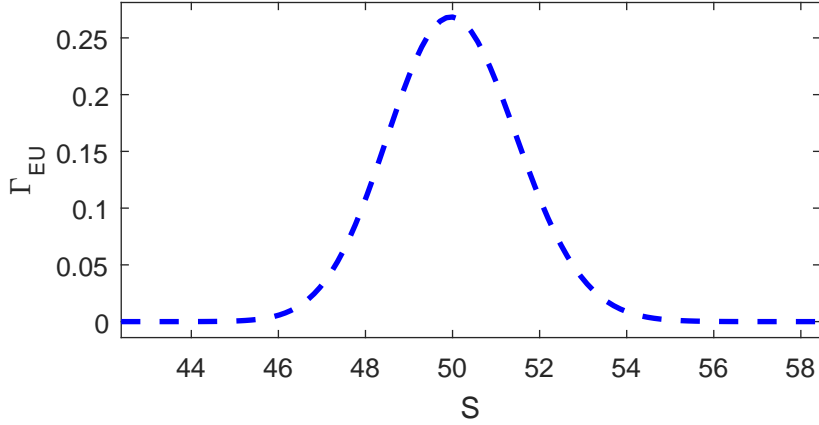
Definujme operáciu \mathcal{F} predpisom

$$\mathcal{F}(\Gamma) = \Gamma_{EU} \cdot \frac{\Gamma(S)|_{S=E}}{\Gamma_{EU}(S)|_{S=E}}. \quad (157)$$

Táto operácia prenášobuje funkciu $\Gamma_{EU}(S, t)$ danú (156) takým koeficientom $\frac{\Gamma(E)}{\Gamma_{EU}(E)}$, aby hodnota výslednej funkcie v strike price, teda v bode $S = E$, v ktorého blízkosti nadobúda maximum, bola rovnaká, ako je hodnota vstupnej funkcie $\Gamma(E, t)$. Keď ju aplikujeme na našu Γ_{num} , výsledkom bude spojitá funkcia $\mathcal{F}(\Gamma_{num})$, ktorej hodnoty budú rovnaké v okolí $S = E$. Hodnotu $\mathcal{F}(\Gamma_{num})$ teda použijeme ako aproximáciu Γ_{num} vo vzťahu pre výpočet volatility (154).



Obr. 10: Numerické problémy s výpočtom funkcie Γ_{num} . Vrchné obrázky zobrazujú nespojitosť Γ_{num} v mieste hranice predčasného uplatnenia a následne nespojitosť volatility σ . Obrázok vľavo dole ukazuje, ako sa táto nespojitosť v najbližom kroku iterácie prejaví na funkcii u - na jej grafe vzniká oscilácia. Obrázok vpravo dole ukazuje oscilácie konečnej vypočítanej funkcie u .



Obr. 11: Funkcia Γ_{EU} je spojitá a symetrická okolo hodnoty $S = E = 50$.

Vyjadrieme diskretizovanú hodnotu Γ_{EU}^j v transformovaných súradniciach v j -tej časovej vrstve:

$$(\Gamma_{EU})_i^j = e^{-q\tau_j} \frac{e^{-\frac{1}{2}(d_i^j)^2}}{\hat{\sigma} \sqrt{2\pi\tau_j} E e^{x_i}} \quad (158)$$

a d_i^j je dané výrazom

$$d_i^j = \frac{(r - q + \frac{\hat{\sigma}^2}{2})\tau_j + x_i}{\hat{\sigma} \sqrt{\tau_j}}. \quad (159)$$

Využime, že $S = E$ práve vtedy, keď $e^{x_i} = 1$, teda $x_i = 0$, čo platí pre $i = n$. Hodnoty $\Gamma_{num}(E)$ a $\Gamma_{EU}(E)$ majú po diskretizácii tvar:

$$\Gamma_{num}^j(E) = (\Gamma_{num})_n^j = \frac{1}{E^2} \left(\frac{u_{n+1}^j - 2u_n^j + u_{n-1}^j}{h^2} - \frac{u_{n+1}^j + u_{n-1}^j}{2h} \right), \quad (160)$$

$$\Gamma_{EU}^j(E) = (\Gamma_{EU})_n^j = e^{-q\tau_j} \frac{e^{-\frac{1}{2}(d_n^j)^2}}{\hat{\sigma} \sqrt{2\pi\tau_j} E}. \quad (161)$$

Dopočítajme $(p + 1)$ -vú iteráciu aproximácie volatility pomocou operácie $\mathcal{F}(\Gamma_{num})$ danej (157):

$$\begin{aligned}
(\sigma_{ij}^2)^{(p+1)} &= \hat{\sigma}^2 \left(1 + \mu \left[E e^{x_i} \mathcal{F} \left((\Gamma_{num})_i^{j(p+1)} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \right) \\
&= \hat{\sigma}^2 \left(1 + \mu \left[E e^{x_i} (\Gamma_{EU})_i^j \frac{(\Gamma_{num})_n^{j(p+1)}}{(\Gamma_{EU})_n^j} \right]^{\frac{1}{3}} \right) \tag{162} \\
&= \hat{\sigma}^2 \left(1 + \mu \left[\frac{E e^{x_i} e^{-q\tau_j} e^{-\frac{1}{2}(d_i^j)^2}}{\hat{\sigma} \sqrt{2\pi\tau_j} E e^{x_i}} \frac{\frac{1}{E^2} \left(\frac{u_{n+1}^{j(p+1)} - 2u_n^{j(p+1)} + u_{n-1}^{j(p+1)}}{h^2} - \frac{u_{n+1}^{j(p+1)} + u_{n-1}^{j(p+1)}}{2h} \right)}{e^{-q\tau_j} \frac{e^{-\frac{1}{2}(d_n^j)^2}}{\hat{\sigma} \sqrt{2\pi\tau_j} E}} \right]^{\frac{1}{3}} \right) \\
&= \hat{\sigma}^2 \left(1 + \mu \left[\frac{e^{\frac{1}{2}((d_n^j)^2 - (d_i^j)^2)}}{E} \left(\frac{u_{n+1}^{j(p+1)} - 2u_n^{j(p+1)} + u_{n-1}^{j(p+1)}}{h^2} - \frac{u_{n+1}^{j(p+1)} + u_{n-1}^{j(p+1)}}{2h} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \right).
\end{aligned}$$

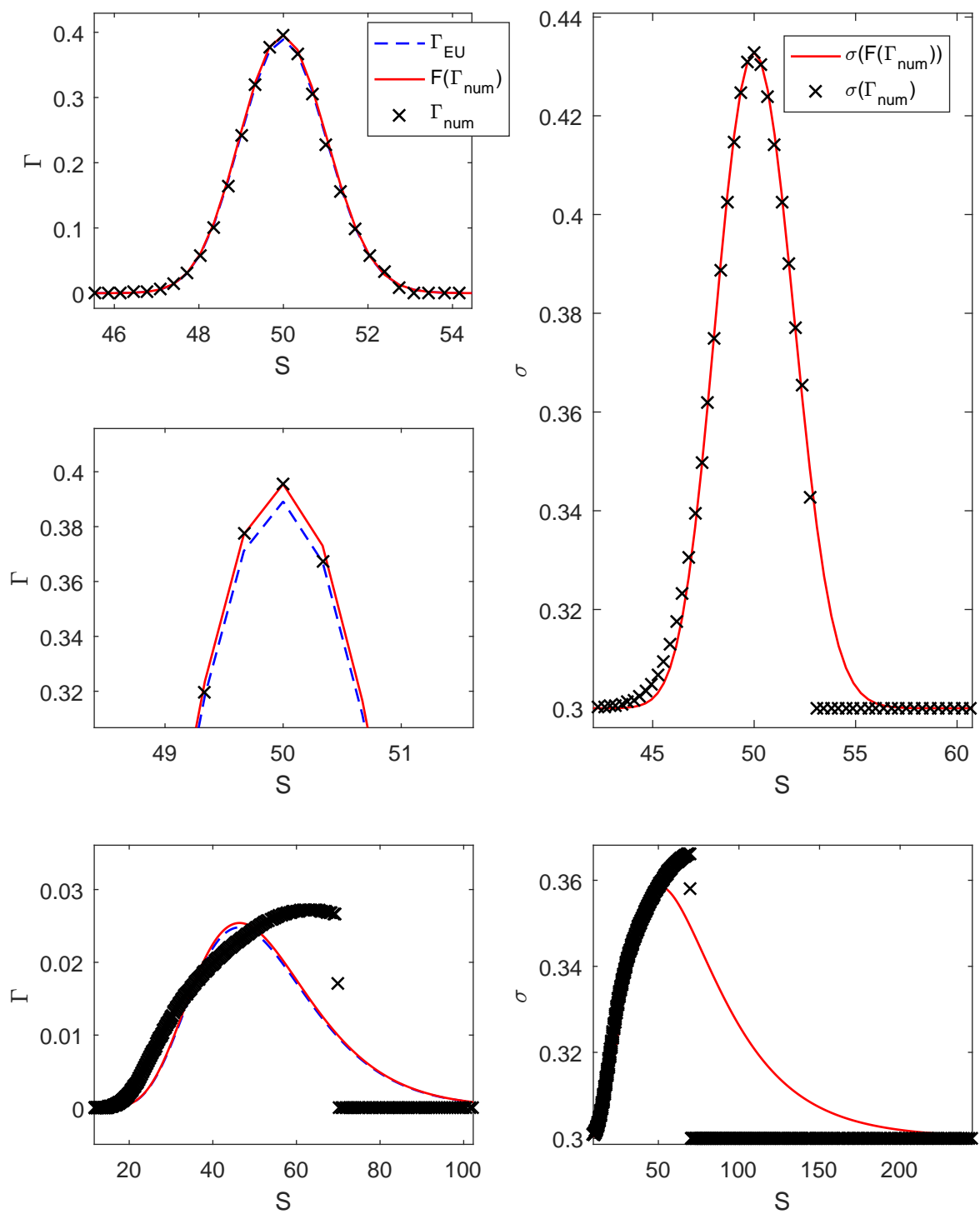
Na obrázku 12 vidíme, že nespojitost funkcie volatility sa s postupom času zhoršuje, navyše, funkcia nemá v čase T klesajúcu časť. Čo je však dôležitejšie, numerické experimenty s touto metódou ukazujú, že nie je konzistentná s očakávaniami vychádzajúcimi z teórie. Konkrétne, ako možno vidieť na obrázku 13, pre vyššiu hodnotu parametra μ sa nedosahuje v pre každú cenu podkladovej akcie vyššia cena opcie. To je v nesúlade s tým, že vyššia hodnota parametra μ zodpovedá vyššej hodnote prémie za riziko, teda nutne vyššej cene opcie. Túto aproximáciu teda napokon nepoužívame.

Navrhujeme tak alternatívnu aproximáciu, a to nasledovne:

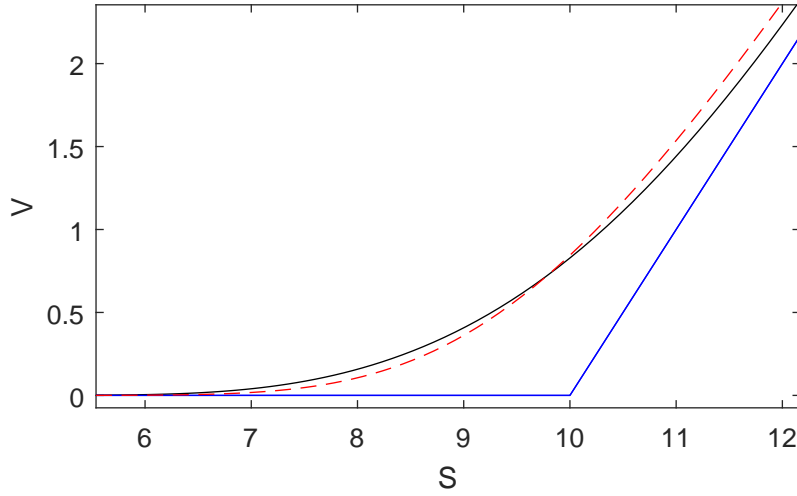
$$\mathcal{G}(\Gamma(S)) = \begin{cases} \Gamma_{EU}(S) \cdot \frac{\max_s \Gamma(s)}{\max_s \Gamma_{EU}(s)} & \text{ak } S \leq \underset{s}{\operatorname{argmax}} \Gamma_{EU}(s) \\ \max_s \Gamma_{EU}(s) & \text{inak} \end{cases} \tag{163}$$

Operácia \mathcal{G} prenášobuje funkciu Γ_{EU} tak, aby maximálna hodnota výslednej funkcie zodpovedala maximu vstupnej funkcie Γ . Zároveň pre všetky $S > \underset{s}{\operatorname{argmax}} \Gamma_{EU}(s)$, teda od hodnoty S , v ktorej sa nadobúda maximum funkcie Γ_{EU} , položíme výslednú funkciu rovnú hodnote tohoto maxima. Technicky, pre $S > S_f$ by sme mohli nahradiť konštantnú hodnotu klesajúcou funkciou, napríklad posunutou hodnotou Γ_{EU} (obr. 14), avšak na výsledok to nebude mať vplyv. Obrázok 14 ukazuje, že aproximácia daná \mathcal{G} zachováva profil funkcie Γ_{num} v čase omnoho lepšie.

Určíme teda $(p+1)$ -vú iteráciu aproximácie volatility pri použití \mathcal{G} , ktorú budeme



Obr. 12: Na obrázkoch vidíme porovnanie hodnôt Γ (vľavo) a σ (vpravo) pôvodne a po aproximácii pomocou operácie \mathcal{F} . Obrázok vľavo v strede je priblížením obrázka vľavo hore v okolí $S = E$. Tri vrchné obrázky sú zobrazením v čase t^* blízko do maturity ($t = 0.005T$), dolné v čase $t = 0$.



Obr. 13: Cena opcie pre $\mu = 0.33$ (súvislá čiara) pretína cenu pre $\mu = 0$, čo je v rozpore s teóriou.

používať aj v neskorších experimentoch. Pre $i \leq \operatorname{argmax}_i (\Gamma_{EU})_i^j$:

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij}^2)^{(p+1)} &= \hat{\sigma}^2 \left(1 + \mu \left[E e^{x_i} \mathcal{G}((\Gamma_{num})_i^{j(p+1)}) \right]^{\frac{1}{3}} \right) \\ &= \hat{\sigma}^2 \left(1 + \mu \left[E e^{x_i} (\Gamma_{EU})_i^j \frac{\max_i (\Gamma_{num})_i^{j(p+1)}}{\max_i (\Gamma_{EU})_i^j} \right]^{\frac{1}{3}} \right), \end{aligned} \quad (164)$$

zatiaľ čo pre $i \geq \operatorname{argmax}_i (\Gamma_{EU})_i^j$:

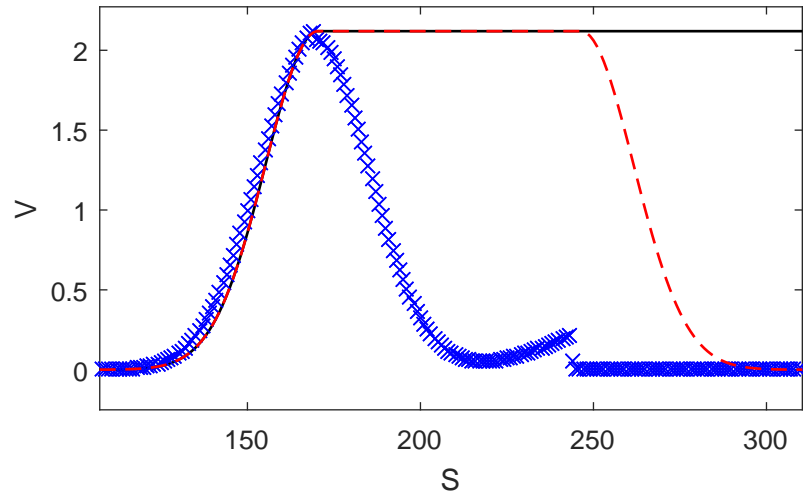
$$(\sigma_{ij}^2)^{(p+1)} = \hat{\sigma}^2 \left(1 + \mu \left[E e^{x_i} \max_i (\Gamma_{num})_i^{j(p+1)} \right]^{\frac{1}{3}} \right). \quad (165)$$

Následne, s využitím (149)-(151) vieme dopočítať $d_i^{j(p+1)}$, $l_i^{j(p+1)}$, $r_i^{j(p+1)}$. Tým pádom poznáme všetky potrebné hodnoty v $(p+1)$ -vej iterácii.

4.2.2 Počet iterácií

Pri voľbe počtu iterácií treba hľadiť na jednej strane na presnosť, na druhej strane na rýchlosť konvergencie. Kritériom konvergencie PSOR algoritmu bude dostatočne malá zmena vektora ceny u^j . Presnejšie, povieme, že algoritmus skončí, ak je splnená podmienka

$$\|u^{j(p+1)} - u^{j(p)}\|_{\infty} = \max_i |u_i^{j(p+1)} - u_i^{j(p)}| < 10^{-\alpha}, \quad (166)$$



Obr. 14: Na obrázku je znázornené porovnanie numerickej počítanej hodnoty Γ_{num} (vyznačená krížikmi) a aproximácie pomocou G (súvislá čiara). V prípade, že pre hodnoty S za hranicou predčasného uplatnenia nahradíme aproximáciu konštantou posunutou funkciou Γ_{EU} , riešenie sa nezmení. Obdobný priebeh má potom funkcia volatility.

kde α je požadovaný rád presnosti. Pre pri požadovanej presnosti 10^{-5} je potrebných v priemere 15.2 iterácií, pre 10^{-7} je to asi 29.6, pritom s rastúcim j má počet iterácií mierne klesajúci charakter.

4.2.3 Správanie v čase blízko maturity

Hodnoty Γ_{num} sú v blízkosti maturity, teda v $\tau \approx 0$ pomerne nepresné. Cena u^j sa líši od hodnoty výplaty len nepatrne a iba v niekoľkých bodoch, pritom výplata v bode strike price nemá definovanú druhú deriváciu. Navyše, pri odvodení transakčných nákladov RAPM modelu Lelandov prístup predpokladá $\tau > \Delta t$. Ševčovič a Jandačka ([9]) navrhujú rozdeliť celkový časový interval $[0, T]$ na dva podintervaly, $[0, \tau_*]$, kde $\tau_* \ll T$ a $[\tau_*, T]$. Pre $\tau > \tau_*$ uvažujeme RAPM model tak, ako bol odvodený.

Na intervale $[0, \tau_*]$, teda veľmi blízko času maturity, už nebude prebiehať obnovovanie portfólia. V takom prípade budeme opciu oceňovať v klasickom Black-Scholesovom modeli, teda nastavíme $\mu = 0$.

Pri našich výpočtoch budeme používať $\tau_* = 0.005T$, teda portfólio nebudeme obnovovať 0.5% času pred maturitou, čo pri ročnej maturite zodpovedá približne poslednému

dňu pred maturitou.

4.3 Výpočet ceny opcie a hranice predčasného uplatnenia

Po vypočítaní hodnôt u_i^j pre všetky i a j sa k cene opcie dopracujeme jednoducho spätnou transformáciou. Hodnota u_i^j predstavuje aproximáciu u v bode x_i , τ^j , zaujímať nás bude najmä na počiatku, v čase $\tau = T$. Platí

$$u(x_i, T) = u((i - n)h, T) = V(Ee^{(i-n)h}, 0). \quad (167)$$

V prípade, že potrebujeme poznať cenu v bode, v ktorom ju nemáme vypočítanú, teda mimo mriežky, obyčajne sa postupuje lineárnou, prípadne kvadratickou interpoláciou najbližších mrežových bodov.

K hranici predčasného uplatnenia sa dopracujeme využitím jej definičnej vlastnosti, ktorá pre call opciu hovorí, že je to najnižší taký bod, v ktorom je cena identická s hodnotou payoff, $V(S, t) = S - E$. Jej hodnotu teda nájdeme nasledovne:

$$S_f(t) = \underset{S}{\operatorname{argmin}}(V(S, t) - (S - E) \approx 0). \quad (168)$$

5 Numerické experimenty

V tejto kapitole sa budeme venovať numerickým výsledkom algoritmu odvodeného v predošlej časti. Pozrieme sa na implikované hodnoty parametrov RAPM modelu a tiež zobrazíme vplyv jednotlivých parametrov na cenu a priebeh hranice predčasného uplatnenia.

5.1 Parametre modelu RAPM

Parametrom zahŕňajúcim celkové riziko v RAPM modeli je μ dané výrazom $\mu = 3 \left(\frac{C^2 R}{2\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$, kde C označuje jednotkovú prémiiu za transakčné náklady a R jednotkovú prémiiu za nekryté portfólio.

5.1.1 Parameter C

Parameter C , daný vzťahom

$$C = \frac{S_{ask} - S_{bid}}{S_{mid}} = 2 \frac{S_{ask} - S_{bid}}{S_{ask} + S_{bid}}, \quad (169)$$

vyjadruje jednotkové (vzhľadom na strednú cenu) náklady na kúpu a vzápätí predaj podkladovej akcie. V tabuľke 1 vidíme jeho odhady pre rôzne podkladové aktíva zo vzťahu (169) podľa aktuálnych ask a bid cien. Koeficient C sa medzi jednotlivými akciami líši, v našich pokusoch je však vždy rádovo rovný $C \approx 0.01$. To zodpovedá aj záverom [21] či [22].

Podkladová akcia	S_{ask}	S_{bid}	C
Procter&Gamble (PG)	80.68	78.52	0.0271
Microsoft (MSFT)	50.91	50.55	0.0071
Alphabet (GOOGL)	729.30	720.05	0.0128
Tesla Motors (TSLA)	252.85	246.93	0.0237
Bank of America Corporation (BAC)	14.94	14.78	0.0108
The Coca-Cola Company (KO)	45.13	44.25	0.0197

Tabuľka 1: Odhad C .

Zdroj: <http://finance.yahoo.com>, 28.4.2016 pred začatím obchodovania

5.1.2 Parameter R a implikovaná volatilita

Parameter R RAPM modelu sme definovali ako koeficient prémie za riziko. Na rozdiel od koeficientu C ho však nemáme viazaný konkrétnym vzťahom. Zostáva možnosť, ako uvádza [21], počítať jeho implikovanú hodnotu, t.j. nájsť takú hodnotu R_{impl} , aby cena opcie $V = V(S, t; E, C, R, \hat{\sigma})$ vypočítaná modelom bola rovná trhovej cene opcie V_{market} s rovnakými charakteristikami.

Problémom je, že obyčajne sa porovnaním modelu s trhovou cenou počíta implikovaná volatilita $\hat{\sigma}_{impl}$ a, pochopiteľne, z jednej implicitne zadanej rovnice nie je možné jednoznačne dopočítať hodnoty dvoch nezávislých parametrov. Ševčovič, Stehlíková a Mikula ([21]) ponúkajú nasledovné riešenie. Zavedme strednú cenu opcie V_{mid} danú

$$V_{mid} = \frac{V_{ask} - V_{bid}}{2}. \quad (170)$$

Táto cena zodpovedá modelu s nulovým koeficientom R , teda $V_{mid} = V(S, t; E, C, 0, \hat{\sigma})$. V takom prípade ale koeficient μ RAPM modelu má takisto nulovú hodnotu a riešenie zodpovedá cene americkej opcie v štandardnom Black-Scholesovom modeli.

Postupujeme teda nasledovne: pre danú opciu najprv vypočítame implikovanú volatilitu $\hat{\sigma}$ z úlohy lineárnej komplementarity Black-Scholesovho modelu

$$V_{mid} = V(S, t; E, C, 0, \hat{\sigma}_{impl}). \quad (171)$$

Následne pomocou úlohy nelineárnej komplementarity RAPM modelu s už známou volatilitou $\hat{\sigma}_{impl}$ nájdeme implikovanú hodnotu R_{impl} :

$$V_{ask} = V(S, t; E, C, R_{impl}, \hat{\sigma}_{impl}). \quad (172)$$

Implicitne zadane rovnice môžeme riešiť jednoduchou bisekčnou alebo sečnicovou metódou ([1]), prípadne, ako [9], riešiť ich ako sústavu dvoch rovníc pomocou Newton-Kantorovichovej metódy.

Uvažovali sme opciu vypísanú na akciu spoločnosti Procter&Gamble s maturitou 20. Januára 2017. Tabuľka 2 zobrazuje strike price a trhové ask a bid ceny opcie (z 28.4.2016) a dopočítané hodnoty $\hat{\sigma}_{impl}$ a R_{impl} :

E (strike)	V_{bid}	V_{ask}	$\hat{\sigma}_{impl}$	R_{impl}
72.5	8.55	8.7	0.1881	0.0388
75	6.65	6.8	0.1764	0.0310
77.5	4.95	5.1	0.1650	0.0287
80	3.55	3.65	0.1564	0.0091
82.5	2.39	2.49	0.1487	0.0096
85	1.5	1.62	0.1420	0.0247
87.5	0.85	1	0.1357	0.0981
90	0.47	0.56	0.1309	0.0548
92.5	0.25	0.36	0.1302	0.2637
95	0.13	0.17	0.1264	0.0545

Tabuľka 2: Odhad implikovanej volatility a parametra R .

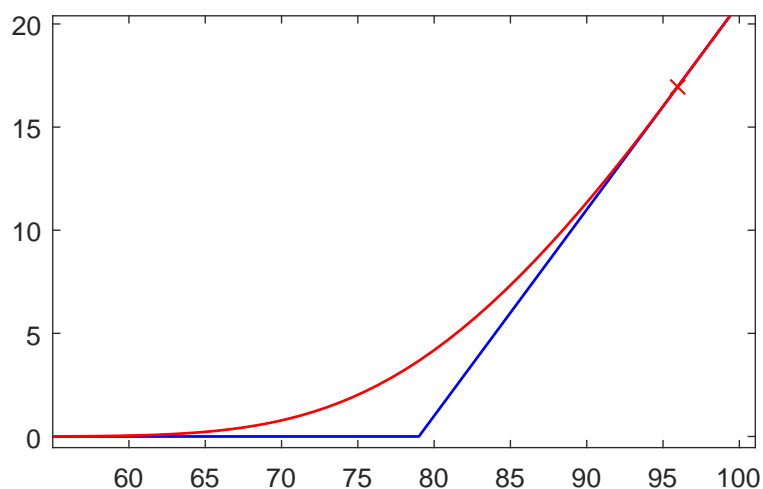
Zdroj: <http://finance.yahoo.com>, 28.4.2016 pred začatím obchodovania

Pritom trhová cena akcie bola $S_{mid} = 79.6$, spoločnosť vypláca dividendy v ročnej miere $q = 0.0334$ a bezriziková úroková miera je daná $r = 0.016$. Za C sme dosadili hodnotu vypoitanu v časti 5.1.2 $C = 0.0271$. Priemerné vypoitane hodnoty implikovaných parametrov sú rovné $\bar{\sigma}_{impl} = 0.15$ a $\bar{R}_{impl} = 0.0613$.

Vypoitame cenu opcie s rovnakými parametrami, použijúc priemerné hodnoty implikovaných parametrov avšak pre strike cenu rovnú 79. Priebeh funkcie ceny vidíme na obrázku 15, pre trhovú cenu akcie $S_{mid} = 79.6$ je nami vypoitana ponuková cena opcie v RAPM modeli $V_{ask} = 3.98$. Hranica predčasného uplatnenia má hodnotu $S_f(T) = 95.94$.

5.2 Vplyv parametrov na cenu a priebeh hranice predčasného uplatnenia

Parametre R a C sa vo vzťahu $\mu = 3 \left(\frac{C^2 R}{2\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$ vyskytujú iba v súčine, zmena R má na model rovnaký vplyv ako zmena C^2 . Keďže tieto parametre predstavujú rizikové prémie, s ich zvyšujúcimi sa hodnotami očakávame zvyšovanie ceny a rovnako aj hranice predčasného uplatnenia. Obe znazornujeme pre rôzne hodnoty parametra R na obraz-

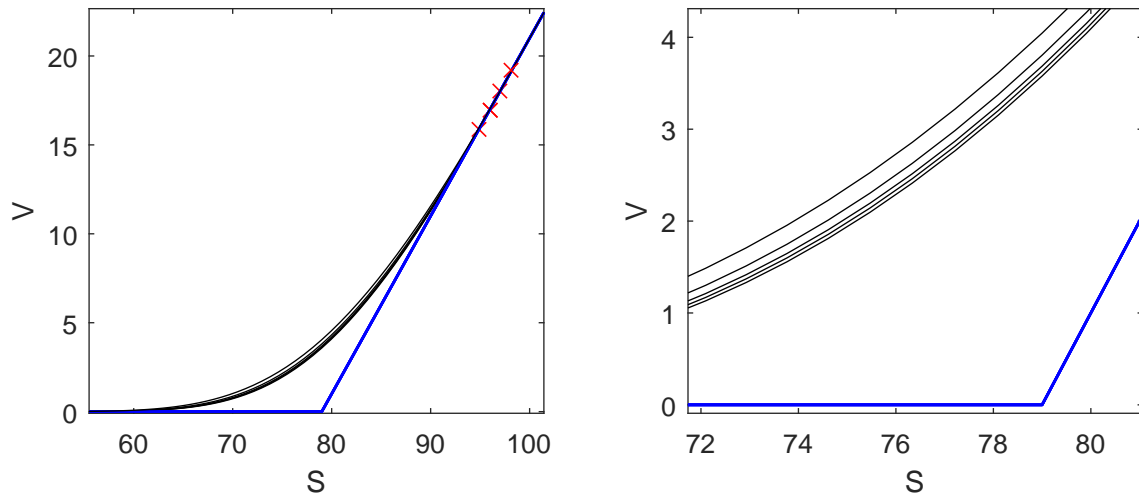


Obr. 15: Cena opcie P&G s $E = 79$, $C = 0.0271$, $R = 0.0613$, $\hat{\sigma} = 0.15$, $r = 0.016$, $q = 0.0334$, $t = 266/365$.

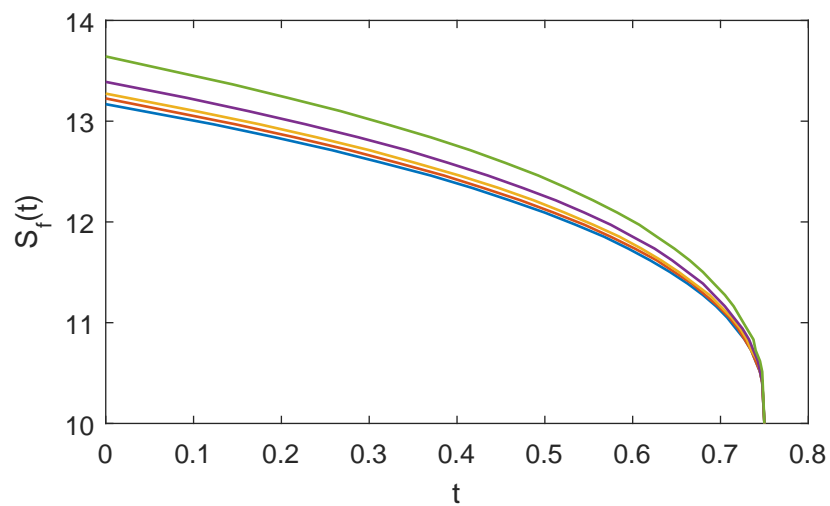
koch 16 a 17. Keďže hodnoty priebehu hranice predčasného uplatnenia dostávame iba v diskretných bodoch, používame lineárnu interpoláciu pomocou ktorej ju dostaneme do spojitkej podoby.

Na obrázku 18 vidíme priebeh hranice predčasného uplatnenia pre rôzne veľkosti časopriestorovej diskretizačnej mriežky. Viditeľnejší vplyv má parameter udávajúci počet priestorových krokov n , ktorého zvyšovanie, teda spresňovanie vypočítaných hodnôt, vedie k posunu krivky nahor. Vplyv zmeny m je nevýrazný, ale jeho zvyšovanie rovnako vedie k miernemu zvýšeniu hranice.

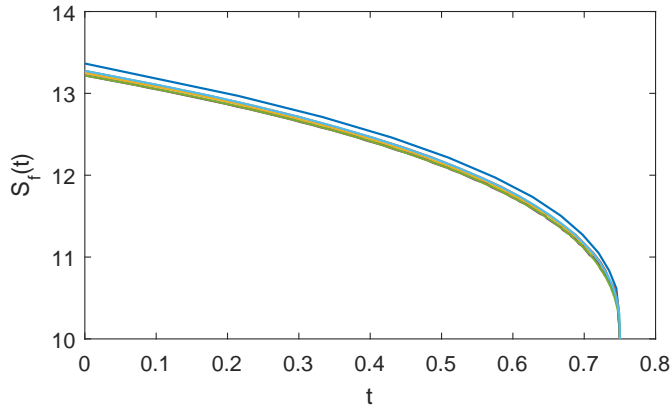
Ostatné parametre modelu, používané aj v klasickom Black-Scholesovom modeli, majú očakávaný efekt na cenu aj hranicu predčasného uplatnenia opcie - zvýšením historickej volatility sa cena a teda aj hranica zvýšia, rovnako predĺžením času do maturity. Takisto pozitívne závisia od úrokovej miery r , naopak pri zvyšovaní dividendového výnosu q pozorujeme ich pokles.



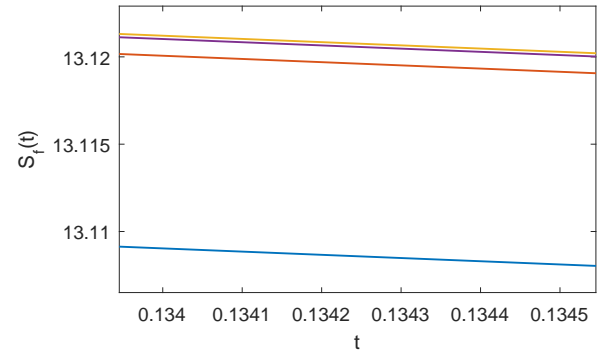
Obr. 16: Cena opcie pre rôzne hodnoty parametra $R = 0, 0.01, 0.1, 1, 10$. Ostatné parametre majú rovnakú hodnotu ako v predošlej časti. Vpravo je obrázok priblížený v blízkosti strike ceny.



Obr. 17: Časový priebeh hranice predčasného uplatnenia pre rôzne hodnoty parametra $R = 0, 0.01, 0.1, 1, 10$. Ostatné parametre majú rovnakú hodnotu ako v predošlej časti.

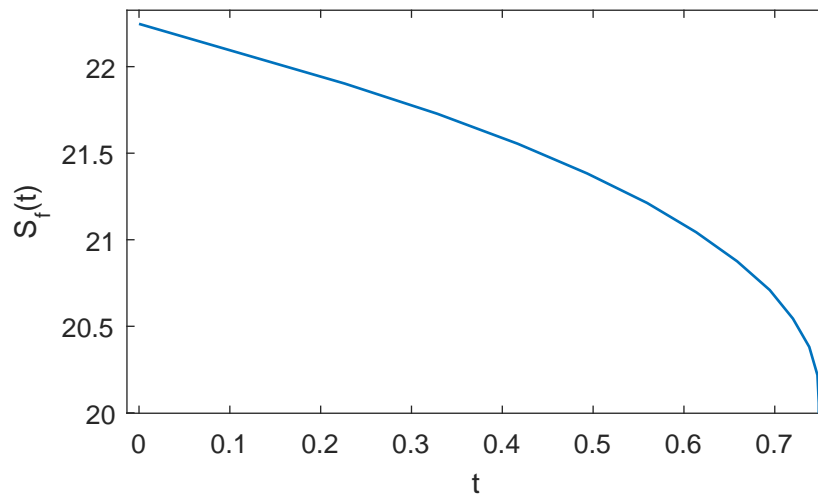


(a)



(b)

Obr. 18: Vplyv veľkosti mriežky na výšku hranice predčasného uplatnenia. Na obrázku (a) je viditeľný výrazný vplyv parametra n , zobrazené sú hodnoty pre $n = 100, 200, 300, 800$ a $m = 300$, vyššie n zodpovedá vyššiemu profilu hranice. Na obrázku (b) naopak slabý vplyv m , zobrazené sú hodnoty pre $n = 100$ a $m = 100, 500, 5000, 15000$, opäť vyššie m znamená vyššie hodnoty hranice.



Obr. 19: Podľa [21] v prípade $r > q$ má hranica v čase uplatnenia počiatkový skok, t.j. jej hodnota v čase $t \rightarrow T$ je rovná E_q^r . Graf zobrazuje priebeh hranice v RAPM modeli pre $E = 10$, $r = 0.1$, $q = 0.05$.

Záver

Práca bola zameraná na numerické nájdenie ceny a hranice predčasného uplatnenia amerického typu call opcie, pre ktoré doposiaľ neboli nájdené explicitné vzťahy. Špeciálne sme sa zamerali na ask (ponukovú) cenu opcie, avšak k bid (dopytovej) cene sa dá dopracovať podobným spôsobom. Využili sme pri tom model RAPM, ktorý je realistickým nelineárnym rozšírením Black-Scholesovho modelu s nekonštantnou volatilitou závisiacou od samotnej ceny opcie a jej druhej derivácie. Model zahŕňa predpoklad transakčných nákladov a rizika nekrytého portfólia spojeného s nízkou frekvenciou obnovovania replikačného portfólia. Pritom riešenie tohoto modelu pre americké opcie je v literatúre len málo popísané.

V prvých dvoch kapitolách sme položili teoretický základ pre oceňovanie opcií amerického typu. Uviedli sme odvodenie RAPM modelu a predstavili sme niekoľko ďalších modelov, vyznačujúcich sa spoločnou vlastnosťou nekonštantnosti volatility a tým nelinearity modelu.

Prínosom práce bolo odvodenie iteračnej numerickej schémy pre nelineárny prípad úlohy v tvare komplementarity pomocou metódy konečných diferencií. Vychádzali sme pri tom zo PSOR algoritmu na riešenie lineárnych systémov, založenom na Gauss-Seidelovej iteračnej metóde, ktorý sme prispôbili nelinearite úlohy.

Ďalej, vo štvrtej kapitole sme uviedli algoritmus na riešenie danej úlohy nelineárnej komplementarity. Pritom sme navrhli nahradenie numerického výpočtu volatility, ktorý pre svoju nespojitosť spôsoboval oscilácie vypočítanej funkcie ceny opcie, násobkom volatility opcie európskeho typu, ktorá je spojitá a je známe jej explicitné vyjadrenie.

V poslednej kapitole sme použili reálne trhové ceny opcie, pomocou ktorých sme odhadli hodnotu implikovanej hodnoty parametrov modelu a tak ocenili opciu, ktorá sa na trhu nechachádza. Znázornili sme tiež vplyv parametrov RAPM modelu na priebeh ceny opcie a na priebeh hranice predčasného uplatnenia.

Zoznam citovanej literatúry

- [1] ALLEN, M.B., ISAACSON, E.L.: Numerical analysis for applied science, *John Wiley Sons*, 1998
- [2] BABUŠÍKOVÁ, J.: Numerické metódy, poznámky k prednáškam, FMFI UK, Bratislava, 2015, dostupné na internete (25.4.2016): http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/~babusikova/numerika4mef_cast2.pdf
- [3] BARLES, G., SONER, H.M.: Option Pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation, *Finance Stochast. 2*, 1998, str. 369-397
- [4] BLACK, F., SCHOLES, M.: The pricing of options and corporate liabilities, *The Journal of Political Economy 81*, 1973, str. 637-654
- [5] BORDAG, L.A., CHMAKOVA, A.Z.: Explicit solutions for a nonlinear model of financial derivatives, *International Journal of Theoretical and Applied Finance 10* 2007, str. 1-21
- [6] DÜRING, B., FOURNIER, M., JÜNGEL, A.: High order compact finite difference schemes for a nonlinear Black-Scholes equation, *International Journal of Theoretical and Applied Finance 7* 2003, str 767-789
- [7] FREY, R., STREMME, A.: Market Volatility and Feedback Effects from Dynamic Hedging, *Mathematical Finance vol. 7* 1997, str. 351-374
- [8] HOGGARD, T., WHALLEY, A.E., WILMOTT, P.: Hedging option portfolios in the presence of transaction costs, *Advances in Futures and Options Research* 1994, str. 21-35
- [9] JANDAČKA, M., ŠEVČOVIČ, D.: On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile, *Journal of Applied Mathematics*, 2005, no.3, str. 235-258
- [10] JANKOVÁ, K., PÁZMAN, A.: Pravdepodobnosť a štatistika, *Univerzita Komenského*, Bratislava, 2013

- [11] KRATKA, M.: No mystery behind the smile, *Risk* 9, 1998, str. 67-71
- [12] KWOK, Y.: Mathematical Models of Financial Derivatives, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, Berlín, 2008
- [13] LAUKO, M.: Numerické a analytické aproximácie hranice predčasného uplatnenia americkej put opcie, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2009
- [14] LAUKO, M., ŠEVČOVIČ, D.: Comparison of numerical and analytical approximations of the early exercise boundary of the American put option *The ANZIAM Journal*, 2011
- [15] LELAND, H.E.: Option pricing and replication with transaction costs, *Journal of finance* 40, 1985, str. 1283-1301
- [16] MELICHERČÍK, I., OLŠAROVÁ L., ÚRADNÍČEK V.: Kapitoly z finančnej matematiky, *EPOS*, Bratislava, 2005
- [17] MERTON, R.C.: Theory of rational option pricing, *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 1973, str. 141-183
- [18] POITRAS, G.: Risk Management, Speculation, and Derivative Securities, *Elsevier Academic Press*, Cambridge, 2002
- [19] POITRAS, G.: The Early History of Option Contracts, *Hafner and Zimmermann, Vincenz Bronzin's Option Pricing Models: Exposition and Appraisal*, New York, 2009, kap. 18
- [20] ŠEVČOVIČ, D.: Analysis of the free boundary for the pricing of an American call option, *European Journal of Applied Mathematics*, 2001, no.1, str. 25-37
- [21] ŠEVČOVIČ, D., STEHLÍKOVÁ, B., MIKULA, K.: Analytical and numerical methods for pricing financial derivatives, *Nova Science Publishers*, New York, 2010
- [22] STEHLÍKOVÁ, B.: Financial derivatives, prednášky, FMFI UK, Bratislava, 2014
- [23] SOMORČÍK, J.: Počítačová štatistika, prednášky, FMFI UK, Bratislava, 2013

- [24] YOUNG, D.M.: Iterative methods for solving partial difference equations of elliptical type, dizertačná práca, Harvard University, Cambridge, 1950