

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



MODELY SPOTOVÝCH CIEN ELEKTRICKEJ ENERGIE
S PREPÍNANÍM REŽIMOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2016

Štefan KRAKOVSKÝ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**MODELY SPOTOVÝCH CIEN ELEKTRICKEJ ENERGIE
S PREPÍNANÍM REŽIMOV**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr. Martin Harcek, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Štefan Krakovský
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Modely spotových cien elektrickej energie s prepínaním režimov
Regime switching models for electricity spot prices

Cieľ: Cieľom práce je preskúmať možnosti využitia stochastických modelov s Markovovým prepínaním režimov na modelovanie spotových cien elektriny na slovenskom trhu.

Vedúci: Mgr. Martin Harcek, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 10.02.2015

Dátum schválenia: 16.02.2015

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie:

Touto cestou sa chcem pod'akovať svojmu vedúcemu diplomovej práce Mgr. Martinovi Harcekovi, PhD. za ochotu a trpezlivosť, mojej rodine, priateľom a kolegom za ich neustálu podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

KRAKOVSKÝ, Štefan: Modely spotových cien elektrickej energie s prepínaním režimov [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Martin Harcek, PhD., Bratislava, 2016, 52 s.

Cieľom práce bolo skúmanie stochastických modelov s Markovovým prepínaním režimov na simulovanie spotových cien elektrickej energie kótovaných na slovenskom trhu. Práca zahŕňa popis špecifických vlastností spotových cien, ktorými sa líšia od cien iných komodít. Práca taktiež obsahuje základy teórie jump-diffusion procesov, mean-reversion procesov a modelov s Markovovým prepínaním režimov, ktoré sú bežne využívané na modelovanie spotových cien v zahraničí. Stochastický komponent časového radu sme očistili od ročnej, týždenej a dennej sezónnosti pomocou kľzavých priemerov a lineárnych modelov. Extrémne vysoké a nízke ceny sme zo stochastického komponentu odstránili na základe ich vzdialenosti od dlhodobého priemeru a modelovali ich exponenciálnym rozdelením. Pomocou vyššie uvedených procesov sme vytvorili tri modely s prepínaním režimov, ktoré sú vhodné na simulovanie scenárov spotových cien. Parametre procesov sme odhadovali metódou maximálnej vierohodnosti.

Kľúčové slová: spotové ceny elektrickej energie, sezónnosť, jump-diffusion, Markovove prepínanie režimov

Abstract

KRAKOVSKÝ, Štefan: Regime switching models for electricity spot prices [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Martin Harcek, PhD., Bratislava, 2016, 52 p.

The purpose of our study was to investigate the ability of stochastic models with Markov regime-switching to simulate scenarios of electricity spot prices in Slovakia. The thesis includes the description of the specific traits of spot prices, by which they differ from the prices of other commodities. The work also includes the basic theory behind jump-diffusion processes, mean reversion processes and Markov regime-switching models, which are commonly used to model spot prices abroad. The stochastic component was obtained by removing the yearly, weekly and daily seasonality using moving averages and linear regression models. Extremely high and low prices were filtered from the stochastic component based on their distance from the long-term mean and were fitted by exponential distributions. Using these processes, we have formulated three regime switching models, which are adequate for simulating spot price scenarios. The model parameters were estimated using maximum likelihood.

Keywords: electricity spot prices, seasonality, jump-diffusion, Markov regime-switching

Obsah

Úvod	8
1 Vlastnosti trhu a cien elektrickej energie	10
1.1 Popis časového radu.....	11
1.2 Špecifické vlastnosti cien elektrickej energie	13
2 Sezónnosť	15
2.1 Ročná sezónnosť	16
2.2 Týždenná sezónnosť.....	18
2.3 Denná sezónnosť	20
3 Modely spotových cien	23
3.1 Teoretický základ modelov	23
3.1.1. Afínny jump-diffusion proces	23
3.1.2. Markovove prepínanie režimov	25
3.1.3. Odhad parametrov mean reversion procesov	26
3.2 Odvodenie skokových modelov s prepínaním režimov	29
3.2.1. Stredný režim	31
3.2.2. Horný a dolný režim.....	33
3.2.3. Matica prechodu.....	36
3.3 Tri modely s prepínaním režimov	37
4 Výsledky a vyhodnotenie modelov	40
Záver	47
Zoznam použitej literatúry	50

Úvod

Vlády vyspelých krajín vykonali v posledných rokoch na ceste k liberalizácii trhov s elektrickou energiou a zemným plynom obrovské kroky. Z energetického sektora, riadeného spravidla spoločnosťami v postavení lokálnych monopolov, sa postupne stáva dynamické odvetvie, riadené základnými trhovými princípmi. Kým zahraničným trhom sa venuje niekoľko prác, v prípade Slovenska stále hovoríme o málo skúmanej tematike. Preto vznikla iniciatíva vytvoriť túto prácu, ktorej cieľom je vytvorenie modelu spotových cien elektrickej energie z historických dát spotových cien.

Spotové ceny elektrickej energie sa vyznačujú niekoľkými špecifickými vlastnosťami, ktoré sťažujú ich modelovanie. Sú to napr. vysoká volatilita, náhle skoky extrémnych rozmerov spôsobené ťažko pozorovateľnými činiteľmi, komplexná sezónnosť a prakticky nemožné uskladnenie elektrickej energie. Základ nášho skúmania tvorila bohatá zahraničná odborná literatúra, najmä analýzy nemeckej burzy EEX v Lipsku. Tieto práce ponúkajú široké spektrum interpretácií a metód na modelovanie cien. Vo viacerých prácach, vid' napr. [4, 6, 8] dospeli k najlepším výsledkom použitím mean reversion modelov rozšírených o skokové členy a režimy s Markovovým prepínaním. Niektoré práce uvažujú aj využitie historických cien forwardových zmlúv alebo viacfaktorové procesy¹, tie sme však v našej práci neaplikovali.

Kým stochastický komponent očistený od trendu a sezónnosti sa vo väčšine času pohybuje v blízkosti dlhodobého priemeru tvoreného marginálnymi nákladmi na výrobu jednotky komodity, vyššie spomenuté náhle skoky ho môžu na niekoľko hodín presunúť na extrémne vysokú alebo nízku hladinu. Vzdialenosť cien od dlhodobého priemeru môže prekročiť aj 10-násobok štandardnej odchýlky stochastického komponentu. Práce [4, 6] definujú okrem stredného, resp. bežného mean reversion režimu aj režimy, v ktorých má proces odlišné parametre, dlhodobý priemer však ostáva rovnaký. Režimy je možné interpretovať ako úseky, v ktorých v dôsledku vonkajšieho činiteľa je dlhodobý priemer nahradený extrémne vysokou alebo nízkou cenovou hladinou. Podobný prístup je aplikovaný napr. v práci [8], v ktorej je proces bežných cien v *hornom* a *dolnom* režime posunutý o náhodnú premennú s normálnym rozdelením. My sme vychádzali z podobnej myšlienky, v našom prípade je však horný a dolný režim riadený procesmi nezávislými od režimu bežných cien, pohybujúce sa okolo dlhodobých priemerov generovaných

¹ Vid' [1] alebo [22].

z exponenciálneho rozdelenia. Kým odborná literatúra zahŕňa množstvo prác s podobnou interpretáciou režimov, nami odvodené modely stochastického komponentu boli založené najmä na týchto troch.

Naša práca pozostáva zo štyroch kapitol. Na začiatku prvej kapitoly sme vymenovali rozličné prístupy k modelovaniu cien elektrickej energie na vzor práce [8]. V nasledovných podkapitolách sme popísali nami sledovaný časový rad a špecifické vlastnosti spotových cien elektrickej energie. Čerpali sme najmä z úvodných kapitol prác [1, 8, 12, 14].

V druhej kapitole sme z časového radu odstránili deterministický komponent, t.j. sezónnosť. Tá sa v prípade spotových cien skladá z ročnej, týždennej a dennej sezónnosti, ktorú sme v súlade s prácami [1, 8, 14] odhadovali lineárnymi regresnými modelmi.

V tretej kapitole sme sa sústredili na popis jump-diffusion procesov, modelov s Markovovým prepínaním režimov a odvodením vzťahov pre odhady parametrov mean reversion procesov. Čerpali sme najmä zo zdrojov [7, 9, 13, 21]. V ďalších dvoch podkapitolách sme na základe zahraničných prác odvodili naše tri modely, ktoré sa od seba líšia charakteristikou horného a dolného režimu.

Posledná kapitola obsahuje výsledky modelov, odhady parametrov a vyhodnotenie. Modely sme testovali porovnaním simulovaných scenárov s historickými cenami pomocou ukazovateľov MAE a RMSE.

1 Vlastnosti trhu a cien elektrickej energie

V tejto kapitole začneme vysvetlením problematiky a stanovením cieľov, v prvej podkapitole popíšeme časový rad, s ktorým budeme pracovať, a nakoniec vymenujeme niektoré špecifické vlastnosti spotových cien elektrickej energie.

Po rokoch postupnej liberalizácie trhov s elektrickou energiou vo vyspelých krajinách² sa začala veda zaoberať modelovaním ich stochastického charakteru.. Rýchlo sa ukázalo, že táto komodita sa vyznačuje komplexnou sezónnosťou a vysokou volatilitou. V praxi sa používajú rôzne prístupy na modelovanie cien elektrickej energie, môžeme ich rozlíšiť najmä podľa cieľov modelovania a interpretácie vplyvov vytvárajúcich hladinu cien. Na základe popisu v [8] vymenujeme niektoré z nich.

Fundamentálne modely

V prípade fundamentálnych modelov je snahou použiť všetky prístupné informácie získané dôslednou expertnou analýzou trhu a jeho štrukturálnych zmien. Medzi sledované činitele je možné zaradiť predpokladané zmeny legislatívy, vývoj dopytu, výrobné a prenosové kapacity, technológiu, termíny plánovaných odstávok jednotlivých elektrární alebo správanie dodávateľov. Tento prístup je hlavne vhodný na dlhodobé modelovanie rozhodovacích procesov a hladiny cien, nie však ich komplexného stochastického charakteru.

Modely rovnovážneho stavu

Tieto modely používajú úvahy z teórie hier sledovaním strategického správania účastníkov trhu. Snažia sa simulovať kompetitívny charakter účastníkov a analyzujú dlhodobý rovnovážny stav trhu na strane spotreby. Sú vhodné najmä na testovanie dynamiky rôznych nastavení trhu a legislatívnych opatrení.

Kvantitatívne modely a časové rady

Tieto modely sú vhodné na simulovanie krátkodobého správania spotových cien a oceňovanie derivátov. Obvykle analyzujú volatilitu a náhodný charakter cien odhadovaním parametrov tzv. mean reversion alebo ARMA modelov. Niektoré práce, ako napr. [1], okrem samotných historických cien uvažujú aj ceny implikované tzv.

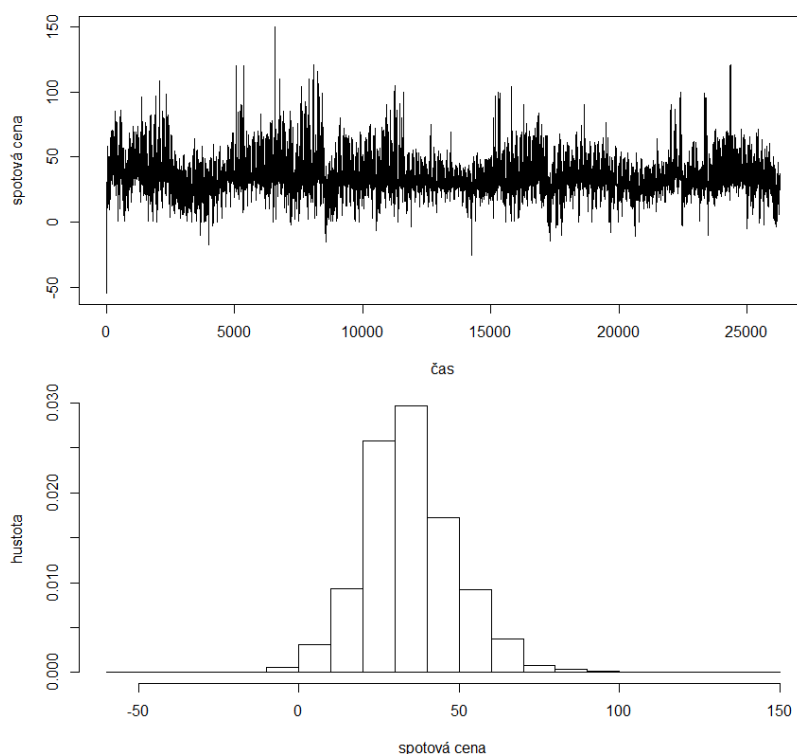
² Pre popis liberalizačného procesu na Slovensku vid' článok [3].

forwardovými zmluvami o dodávke, ktorých použitie môže za určitých okolností viesť k lepším výsledkom z pohľadu dlhodobých simulácií a prípadného oceňovania derivátov.

Keďže na Slovensku sú modely poslednej kategórie relatívne novou tematikou, snažili sme sa vytvoriť stochastický model na vzor bohatej zahraničnej literatúry. Nemecká burza EEX je v dôsledku blízkosti, podobnosti z pohľadu legislatívy a rozmanitosti odbornej literatúry ideálnym zdrojom nápadov. Práce zaoberajúce sa touto burzou, napr. [1, 4, 8], sa opierali hlavne o lineárne modely sezónnosti kombinované jump-diffusion modelmi s prepínaním režimov, ktoré sme sa rozhodli skúmať aj my. Výsledné modely by mali byť schopné vytvárať simulácie stochastického komponentu cien.

1.1 Popis časového radu

Nami sledovaný interval pokrýva trojročné obdobie cien (01.01.2013-31.12.2015) elektrickej energie v eurách na slovenskom trhu, vid' Obr. 1. Keďže sme pracovali s hodinovými dátami, časový rad obsahuje 26 280 bodov. V dňoch prechodu na zimný, resp. letný čas sme chýbajúcu hodinu doplnili obyčajnou lineárnou interpoláciou, resp. zvyšnú hodinu z časového radu odstránili. Časový rad neobsahuje prestupný rok.



Obr. 1 Priebeh a histogram historických spotových cien elektrickej energie (01.01.2013-31.12.2015)

Priebeh dňa je v praxi rozdelený na dve časti, tzv. *Peak* a *Off-Peak*. *Peak* označuje denné hodiny, keď v dôsledku rôznych aktivít je spotreba elektrickej energie spravidla výrazne vyššia (interval 08:00-20:00), *Off-Peak* nočné a ranné hodiny s nižšou spotrebou (zvyšná časť dňa). Priemerná cena v týchto intervaloch v rámci jedného dňa sa tiež niekedy označuje ako *Peak* a *Off-Peak*, celodenný priemer názvom *Base* (v súlade s terminológiu z praxe)

V odbornej literatúre nachádzame rôzne prístupy k modelovaniu elektrickej energie. Niektoré práce, napr. [23] modelujú *Base* ceny, t.j. denné priemery, iné zase hodinové. V dôsledku toho sú v časových radoch s *Base* cenami viachodinové výkyvy v rámci jedného dňa zahrnuté do jediného pozorovania.

Ďalším dôležitým rozdielom je prípadná logaritmizácia časového radu. Staršie práce s logaritmiami cien mohli pracovať bez ťažkostí, keďže záporné ceny elektrickej energie v niektorých hodinách na trhu neboli možné. So zápornými cenami sa práce v prípade logaritmizácie vysporiadávajú rôzne. [8] napr. záporné ceny nahradzuje hodnotami blízkymi k nule a do simulovaných cien ich následne pridáva podľa ich intenzity výskytu a odpozorovaného bimodálneho rozdelenia. My sme videli menšie zlo v práci s časovým radom bez logaritmizácie, aj z dôvodu, že chceme odpozorovať práve extrémny a nelineárny charakter vývoja cien.

V Tab. 1 sme zhrnuli základné štatistické ukazovatele pre dáta s dennou a hodinovou granularitou. Ukazovatele v posledných troch riadkoch boli vypočítané na základe hodinových dát v jednotlivých rokoch pozorovaného obdobia. Ako vidíme, rok 2013 bol volatilnejší s porovnateľne vyšším priemerom cien. Minimá a maximá naznačujú, že cena je schopná ďaleko prekročiť vzdialenosť dvoj až trojnásobku štandardnej odchýlky od priemeru. Šikmosť je kladná pre každý rok, takže kladné skoky sú výraznejšie.

Tab. 1 Základné štatistiky časového radu

	Priemer	Minimum	Maximum	Štandardná odchýlka	Šikmosť	Špicatost'
Base dáta	34.74	0.86	79.60	10.08	-0.1354	0.5393
Hodinové dáta	34.74	-55.00	150.00	14.74	0.4890	1.7656
Peak hodiny	39.87	-25.60	150.00	14.89	0.4001	1.6820

Off-Peak hodiny	29.60	-55.00	130.05	12.65	0.4232	2.7890
Hodinové (2013)	37.20	-55.00	150.00	16.79	0.4041	1.3779
Hodinové (2014)	33.64	-25.60	105.03	13.27	0.3417	1.1668
Hodinové (2015)	33.38	-11.00	121.10	13.59	0.4900	2.1433

Vidíme, že minimálna cena vo všetkých časových radoch s hodinovou granularitou je záporná. Táto vlastnosť je daná zmenami na trhu s elektrickou energiou, kde aktuálne pravidlá umožňujú stabilizáciu elektrickej siete v prípade výrazného prebytku čisto trhovým mechanizmom, ešte pred nasadením tzv. podporných služieb, kedy sa náklady na stabilizáciu fakturujú účastníkom trhu. Tým je daná aj minimálna cena, ktorá je spravidla zdola ohraničená nákladmi na využitie podporných zdrojov.

1.2 Špecifické vlastnosti cien elektrickej energie

Povaha spotových cien elektrickej energie sa značne líši nielen od bežných aktív, ako sú dlhopisy alebo akcie, ale aj od ostatných komodít. V tejto kapitole sú uvedené základné špecifiká, ktoré je potrebné poznať pred modelovaním. Podobné informácie sú dostupné napr. v [1, 8, 12], resp. niektoré špecifiká slovenského trhu sú zverejnené v správach o trhu, viď napr. [20] alebo článok [3].

Problém uskladnenia elektrickej energie

Kým prevažnú väčšinu komodít, resp. aktív nie je problém dlhodobo skladovať, v prípade elektrickej energie to v súčasnosti, vzhľadom na aktuálne dostupné technológie, nie je možné vo väčšom meradle. Existujú rôzne metódy na vytvorenie krátkodobých úložísk (batérie, tepelné úložiská a pod.), avšak ich kapacity sú v porovnaní s dlhodobým dopytom veľmi nízke. Preto väčšina elektrickej energie vyrobenej v elektrárnach musí byť okamžite dodávaná spotrebiteľom.

Nízka elasticita dopytu

Keďže spotrebu zákazníkov môžu obchodníci a distribútori ovplyvniť iba zmenou koncových cien (čo má veľmi pomalý a obmedzený efekt) a uspokojenie dopytu je

zaručené regulátorom, výrobcovia musia zabezpečiť neustály chod celodenných aktivít spotrebiteľov stabilnou dodávkou elektrickej energie.

Mean reversion

Pre väčšinu komodít je typické, že ich cena sa pohybuje okolo dlhodobého priemeru, ktorý je určený marginálnymi nákladmi na výrobu jednotky danej komodity. Krátkodobé narušenie rovnováhy ponuky a dopytu rôznymi faktormi môže cenu dočasne zvýšiť alebo znížiť na inú hladinu, po čase sa však systém spravidla vráti do pôvodného stavu. Dlhodobé marginálne náklady môže zmeniť napr. prechod na efektívnejšiu technológiu čerpania. V prípade elektrickej energie sú marginálne náklady tvorené podielom jednotlivých zdrojov energie použitých na jej výrobu. Najnižšie náklady predstavujú elektrárne, ktoré využívajú obnoviteľné zdroje, t.j. fotovoltaičné, vodné, veterné. Potom nasledujú jadrové a najvyššie náklady si vyžadujú elektrárne využívajúce uhlie a zemný plyn. Pre bližšie informácie o dopade obnoviteľných zdrojov v Nemecku vid' [15]. Deficit veterných a slnečných dní, resp. zvýšený dopyt výrobcov prirodzene núti k prechodu na menej efektívne zdroje.

Sezónnosť

Tieto tri vlastnosti pomáhajú pri pochopení neobyčajne komplexnej sezónnosti cien, ktorá má tri vrstvy. Z celoročného hľadiska pozorujeme na väčšine trhov rozdiely medzi ročnými obdobiami dôsledkom zmeny počasia. Spotrebiteľia všetkých rádoov sú v zimných dňoch nútení kúriť, v horúcich letných zapnúť klimatizáciu. Tiež obnoviteľné zdroje nie sú rovnako prístupné v priebehu celého roka, jesenné mesiace sú veternejšie, letné slnečnejšie a pod.

Týždenná sezónnosť odzrkadľuje periodický charakter ľudských aktivít v priebehu týždňa. V pracovných dňoch sa využije oveľa väčšie množstvo elektrickej energie, ako počas víkendov alebo v dňoch pracovného pokoja.

Poslednou vrstvou je denná sezónnosť. Aj v tomto prípade je viditeľná výrazná periodickosť. Ako sme spomínali v predchádzajúcej kapitole, Peak obnáša oveľa vyššiu mieru ľudských aktivít ako Off-Peak. Obvykle pozorujeme dve špičky, jednu okolo obeda a jednu vo večerných hodinách (19:00 až 21:00), vid' Obr. 5. Naopak, na nočné hodiny sa dopyt spolu s cenou postupne zníži. Tvar dennej krivky má dokonca rozličný charakter v priebehu roka, ale aj týždňa. Večerná špička je napr. v lete menej výrazná (osvetlenie, domáce spotrebiče a pod.).

Tieto tri vrstvy sezónnosti, v dôsledku istej periodicity ľudských aktivít, určujú vývoj dlhodobého priemeru, okolo ktorého sa ceny pohybujú.

Skoky

Elektrická energia jednoznačne patrí medzi najviac volatilné aktíva na komoditných trhoch. Ako sme spomínali pri nízkej elasticite dopytu, výrobcovia musia neustále dodávať presné množstvo elektrickej energie. Ak toto množstvo prevýši kapacitu zdrojov s nízkymi marginálnymi nákladmi, musia prejsť na drahšie zdroje. V prípade náhleho výpadku niektorej elektrárne alebo zmeny počasia sa to môže prejaviť v obrovských skokoch v cenovej hladine. Podobné „kladné“ skoky nahor sú typické hlavne v špičkách, keď je dopyt vysoký.

V prípade niektorých elektrární dočasné prerušenie ich činnosti je nežiaduce v dôsledku toho, že ich následné zapnutie je technicky náročné, resp. nákladné. V hodinách veľmi nízkeho dopytu, typicky v noci alebo skoro ráno, sa distribútori snažia zbaviť sa prípadného nadbytku nakúpenej elektrickej energie. Toto sa obvykle prejaví ako „záporný“ skok na veľmi nízke, dokonca aj záporné cenové hladiny. V našom časovom rade sa vyskytlo 164 hodín so zápornou cenou, prevažne v nočných a ranných hodinách.

Prípady cenových hladín po kladných alebo záporných skokoch môžeme interpretovať ako krátke intervaly extrémnych marginálnych nákladov, ktoré dočasne nahradia dlhodobý priemer ceny.

2 Sezónnosť

V tejto kapitole sa budeme zaoberať vyňatím deterministického komponentu časového radu, ktorý je generovaný sezónnymi vplyvmi. Naš postup sa dá zjednodušene vyjadriť nasledovným vzťahom:

$$P_t = (x_t + s_t^3 + s_t^2)s_t^1, \quad (1)$$

kde P_t označuje reálne spotové ceny, x_t stochastický komponent a s_t^i postupne ročnú, týždennú a dennú vrstvu deterministického komponentu, resp. sezónnosti. Dôvody za výberom kombinácie aditívnej a multiplikatívnej sezónnosti vysvetlíme neskôr pri popise jednotlivých vrstiev. Naším cieľom bolo z jednej strany čo najlepšie odhadnúť

deterministický komponent pre simulované dáta, z druhej strany odstrániť trend a sezónnosť, aby sme získali čo najlepšie očistený stochastický komponent časového radu pre našu analýzu.

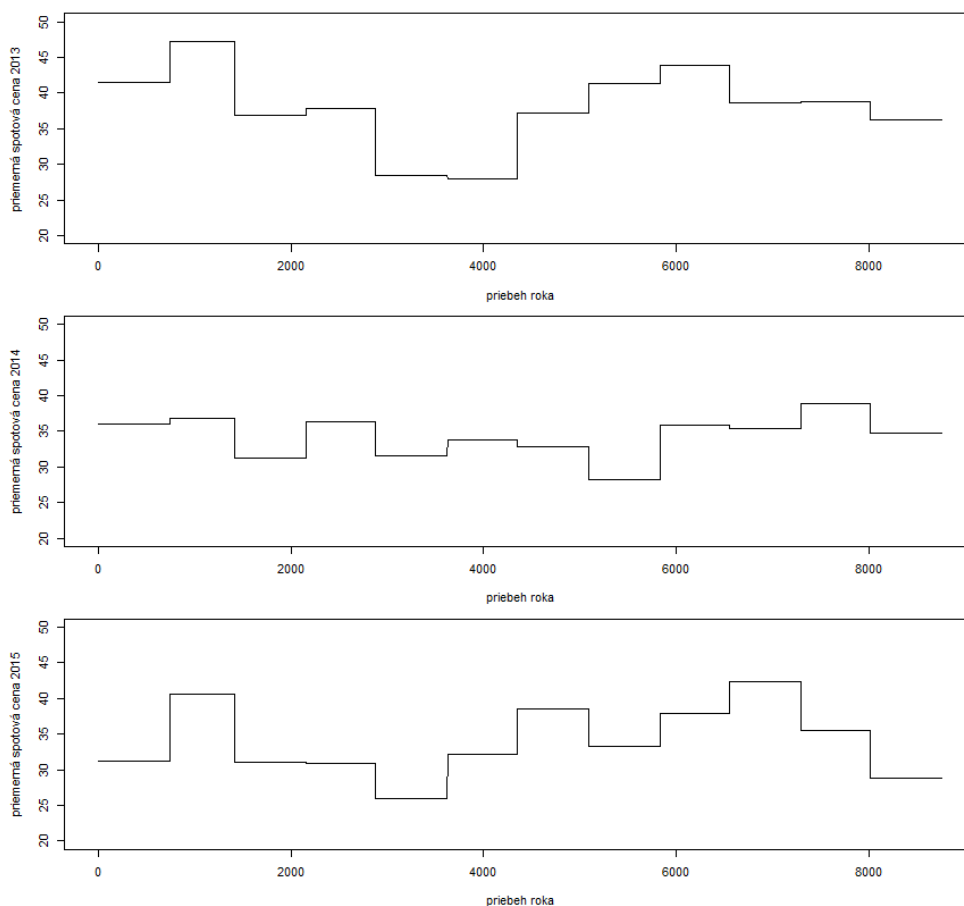
Ako sme už spomínali v predchádzajúcej kapitole, v porovnaní s inými komoditami má cena elektrickej energie výrazne komplexnú sezónnosť. Kým niektoré práce odhadujú ročnú, týždennú aj dennú sezónnosť jedným modelom, my sme sa ich snažili odstrániť postupne, podobne ako v [1, 14]. Parametre jednotlivých lineárnych modelov sme odhadovali metódou najmenších štvorcov. Čo sa týka koeficientov časových radov, d označuje dennú, kým t hodinovú granularitu. Rezíduá sú zo zápisov modelov vynechané.

2.1 Ročná sezónnosť

Hneď pri modelovaní trendu a ročnej sezónnosti narážame na problémy. Ročná sezónnosť je na väčšine trhov spôsobená počasím, hlavne jeho vplyvom na spotrebu elektrickej energie a obnoviteľné zdroje energie. Aj keby zakomponovanie teploty, veternosti, slnečnosti, či topenia snehu významne pomohla nášmu modelu, predikcia budúcich cien by si vyžadovala vytvorenie osobitných modelov pre tieto vysvetľujúce premenné. Odborná literatúra zaoberajúca sa elektrickou energiou sa o to prirodzene nepokúša. Práca [1] uvádza jednoduchý lineárny model extrémnych teplôt v dvoch nemeckých mestách, vysvetľujúcimi premennými sú však hodnoty goniometrických funkcií času.

V grafe Obr. 2 vidíme, že ročná sezónnosť v slovenských cenách, podobne ako v nemeckých³, je ťažko badateľná. Rozdiely medzi jednotlivými mesiacmi sčasti spôsobujú aj vplyvy počasia, vytvoriť dôveryhodný model periodickosti je však evidentne nemožné. Slovensko je malá krajina, silný vplyv preto majú i odstávky elektrární (plánované či neplánované), ktoré je nemožné predikovať matematickým modelom. Rozhodli sme sa preto vytvoriť lineárny model, ktorý slúži na simulácie a trend z časového radu odstrániť iným spôsobom. [8, 14] naznačujú odstránenie sezónnosti odčítaním mesačných priemerov, tie však spôsobujú neprirodzené skoky medzi mesiacmi. Najideálnejšou metódou sa ukázal byť centrováný kĺzavý priemer. Je to metóda bežne používaná v praxi na vyhladenie časových radov.

³ Vid' [1].



Obr. 2 Priemerné mesačné ceny v rokoch 2013, 2014 a 2015

V Tab. 1 vidíme, že ročný priemer cien nie je úplne konštantný. Preto sme na vzor postupu v prácach [1, 14] namiesto cien modelovali váhy jednotlivých dní v priebehu roka normalizované priemerom cien v danom roku. Tieto faktory je možné získať ako

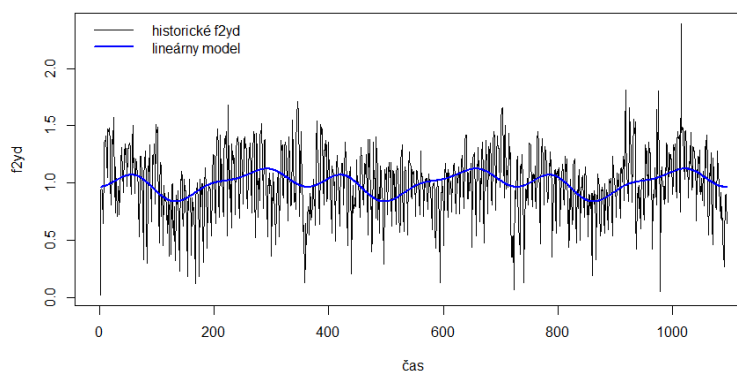
$$f2y_d = \frac{B_d}{\sum_{d, d \in year(d)} B_d \frac{1}{K(d)}}$$

kde B_d je Base cena aktuálneho dňa a $K(d)$ je počet dní v aktuálnom roku (v našom časovom rade vždy 365). Zápis $d, d \in year(d)$ predstavuje množinu dní d , ktoré patria do aktuálneho roka. Pozname, že faktory $f2y_d$ majú dennú granularitu. Dummy premenné pre každý jeden deň by predstavovali nezmyselne veľa vysvetľujúcich premenných, preto sme použili štandardný prístup s goniometrickými funkciami na odhad vypočítaných faktorov:

$$f2y_d = a + \sum_{i=1}^3 b_{1i} \cos\left(i \frac{2\pi}{365} Y T_d\right) + \sum_{i=1}^2 b_{2i} \sin\left(i \frac{2\pi}{365} Y T_d\right),$$

kde $Y T_d$ označuje aktuálny deň v roku. Počet goniometrických funkcií sme určili postupným pridávaním členov, až kým parameter posledného člena prestal byť štatisticky významný. Takto sme prišli k modelu s tromi kosínusovými a dvomi sínusovými členmi, ktorý je vhodný na predikciu trendu pre simulované dáta. Graf Obr. 3 nám ukazuje odhadnutú krivku faktorov ročnej sezónnosti, ktorou budeme upravovať simulované dáta. V prípade, že máme dostupný expertný odhad na dopad cien v dôsledku zmeny počasia alebo plánovanej odstávky niektorej elektrárne, krivku je možné na niektorých miestach zvýšiť alebo znížiť a upraviť napríklad exponenciálnym vyhladením.

Ako sme už vyššie spomenuli, z časového radu trend odstránime centrovaným kľzavým priemerom. Najlepšie výsledky sme získali kľzavým priemerom troch týždňov, pričom hodnoty pre prvých a posledných desať dní sme doplnili prvou a poslednou hodnotou kľzavého priemeru. Následne sme každý bod časového radu Base predelili prislúchajúcim bodom centrovaného kľzavého priemeru, čo nám umožnilo pokračovať v modelovaní ostatných vrstiev sezónnosti.



Obr. 3 Priebeh historických faktorov $f2y_d$ a lineárny model ročnej sezónnosti

2.2 Týždenná sezónnosť

Týždenná sezónnosť, na rozdiel od ročnej, je zreteľná aj v našom časovom rade. Bolo preto zbytočné odstraňovať sezónnosť kľzavým priemerom a použili sme na to odhadnutý model. Ďalej, v tomto modeli sme už nepotrebovali vysvetľovať faktory závisiace od celotýždňového priemeru (ako v prípade ročnej sezónnosti), keďže kľzavé priemery časový rad dostatočne vyrovnali. Preto tento komponent sezónnosti sme odstránili aditívnym

spôsobom. Navyše pri modelovaní očisteného stochastického komponentu sme potrebovali, aby bol dlhodobý priemer v blízkosti nuly.

Ako vysvetľujúce premenné sme použili dummy premenné jednotlivých dní v týždni. Náš model má na vzor postupu v [1] nasledovný tvar:

$$dey_d = c + \sum_{i=1}^6 d_i D_i,$$

kde dey_d označuje denné dáta očistené od ročnej sezónnosti odhadnutým kľzavými priermi, a D_i dummy premenné pre dni utorok až nedeľa. [1] zahŕňa dni pracovného pokoja do jednej kategórie s nedeľou, tento prístup má však tendenciu nadhodnotiť príslušné parametre. Rozhodli sme sa ich v rámci tohto modelu nechať medzi pracovnými dňami a v simuláciách im priradiť parametre pre sobotu. K problému dní pracovného pokoja sa vrátíme pri modelovaní dennej sezónnosti.

Alternatívou je jediná premenná, ktorá obsahuje informáciu o aktuálnom dni v týždni (nadobúda hodnoty 0 až 6). Výsledkom tohto odhadu je týždenná sezónnosť v tvare lineárnej krivky, s najvyššou hodnotou v pondelok a najnižšou v nedeľu. Takýto prístup však nie je postačujúci, keďže podhodnocuje ostatné pracovné dni.

Po odhadnutí týždennej sezónnosti môžeme odstrániť ročnú aj týždennú sezónnosť z hodinových dát. Každú hodinu najprv vydělíme faktorom $f2y_t$ z centrovaného kľzavého priemeru, potom odčítame dey_t odhadnutý modelom pre týždennú sezónnosť (v oboch krokoch použijeme hodnotu pre príslúchajúci deň). Výsledkom je časový rad dew_t s hodinovými dátami bez ročnej a týždennej sezónnosti:

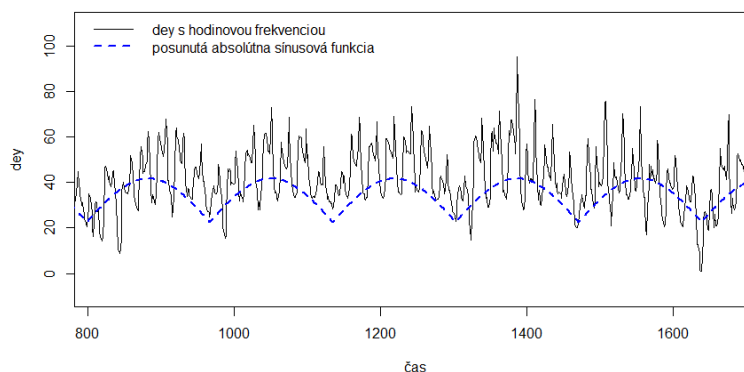
$$dew_t = \frac{P_t}{s_{d,d=day(t)}^1} - s_{d,d=day(t)}^2.$$

Podobne ako v (1), $s_{d,d=day(t)}^1$ označuje krivku centrovaného kľzavého priemeru faktorov $f2y_d$. Zápis $d, d = day(t)$ vracia deň d pre aktuálnu hodinu t . Krivka $s_{d,d=day(t)}^2$ predstavuje odhad $dey_{d,d=day(t)}$ a je z pohľadu časového radu s hodinovou granularitou schodovitá funkcia (t.j. po častiach konštantná).

Jej odčítanie môže spôsobiť „trhliny“ medzi niektorými dňami (viď graf Obr. 15). Alternatívnym modelom na týždennú sezónnosť môže byť tzv. posunutá absolútna sínusová funkcia navrhnutá napr. prácami [8, 14] vo forme:

$$dey_t = c \left| \sin \left[\frac{\pi}{168} (t - \varphi) \right] \right|,$$

kde φ je koeficient posunu, ktorý zabezpečuje zhodu medzi minimom absolútnej sínusovej funkcie a hodiny s minimálnou priemernou cenou v priebehu týždňa. Podobne ako v [8], aj v našom časovom rade to je siedma hodina nedele, a keďže náš časový rad začína prvou hodinou 1.1.2013 (čo bol utorok), $\varphi = -41$. Ako vidíme na grafe Obr. 4, tento model odhaduje tvar týždennej sezónnosti „kopčekom“, ktorý najvyššie ceny priraduje strede týždňa. Preto kým tento prístup zabezpečuje spojitý prechod medzi jednotlivými dňami, nesprávne odhaduje ceny v priebehu týždňa. Rozhodli sme sa ostať pri pôvodnom modeli.



Obr. 4 Spotové ceny bez ročnej sezónnosti a model posunutou absolútnou sínusovou funkciou

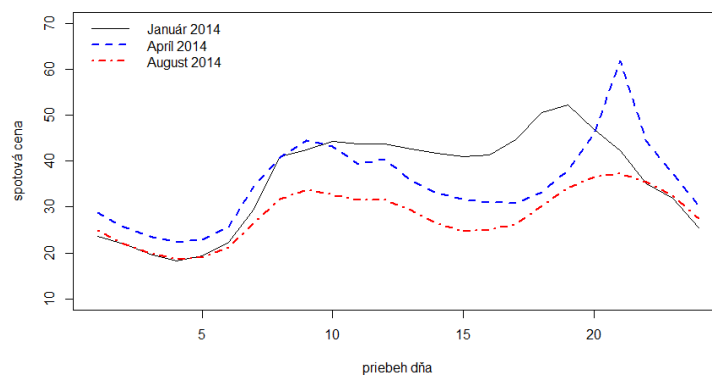
2.3 Denná sezónnosť

Na rozdiel od týždennej sezónnosti sa denná sezónnosť v priebehu roka postupne mení, viď Obr. 5. Dobrým príkladom je večerná špička, ktorá je výraznejšia v zimných mesiacoch. Ako vidíme na grafe Obr. 6, priebeh pracovných dní je viac-menej rovnaký, až na nižšiu cenovú hladinu v ranných hodinách pondelka a večerných hodinách piatku v dôsledku prechodu z víkendu na pracovné dni a naopak. Čo sa týka víkendov, nedeľa má významne nízke ceny aj v porovnaní so sobotou. [8] navrhuje výpočet priemerných 24-hodinových kriviek pre 12 kategórií určených podľa ročného obdobia: štyri pre všetky

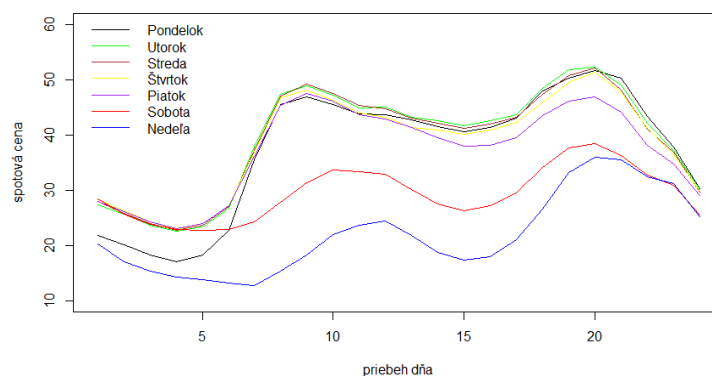
pracovné dni spolu, štyri pre sobotu a štyri pre nedeľu. [1] odhaduje parametre dvadsiatich lineárnych modelov, pričom hodiny rozdeľuje podľa mesiacov, vid' Tab. 2. Soboty a nedele tiež rozlišuje na základe ročného obdobia, pracovné dni podľa mesiaca. I keď druhý spôsob pracuje s oveľa vyšším počtom parametrov, rozličné tvary priemerných priebehov denných cien v jednotlivých mesiacoch viditeľný na grafe Obr. 5 nás presvedčil vybrať si tento postup.

Tab. 2 Rozdelenie dní v týždni do 20 kategórií

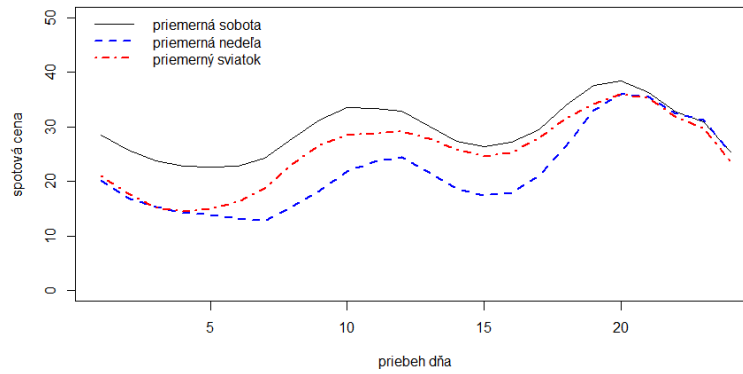
	Jan	Feb	Mar	Apr	Máj	Jún	Júl	Aug	Sep	Okt	Nov	Dec
PD	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sob	13	13	14	14	14	15	15	15	16	16	16	13
Ned	17	17	18	18	18	19	19	19	20	20	20	17



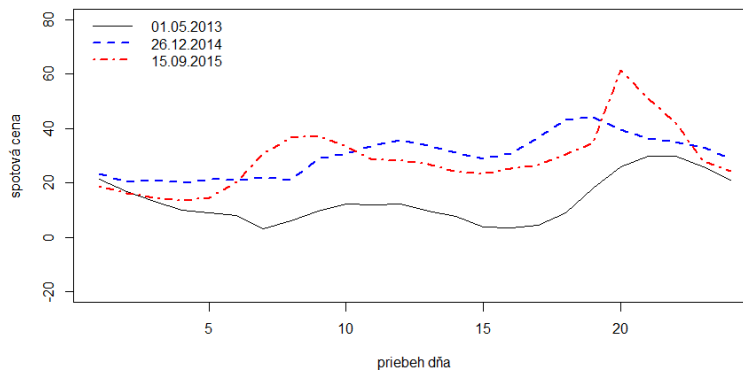
Obr. 5 Priemerné spotové ceny v niektorých mesiacoch roku 2014



Obr. 6 Priemerné spotové ceny dní v týždni



Obr. 7 Porovnanie priemerného priebehu sviatkov, soboty a nedele



Obr. 8 Priebeh troch sviatkov v roku 2014

Samotné lineárne modely sú podobné, ako v prípade týždennej sezónnosti:

$$dew_t^k = e^k + \sum_{i=1}^{23} f_i^k H_i^k,$$

kde H_i^k sú dummy premenné pre hodiny $i = 1, \dots, 23$ (nuly vo všetkých premenných označujú prvú hodinu) a jednotlivé modely $k = 1, \dots, 20$. Podobné výsledky by sme získali aj obyčajnými priemerami, ako je to napr. v práci [8].

Ďalší problém predstavovali dni pracovného pokoja, ktoré predstavujú 36 pozorovaní. Ako vidíme na grafe Obr. 7, priemerná krivka dňa pracovného pokoja leží medzi krivkami soboty a nedele. Ich zahrnutie pod soboty by spôsobilo relatívne podhodnotenie všetkých sobôt, odhad nediel by naopak zvyšovali. Na grafe Obr. 8 vidíme, že aj jednotlivé sviatky majú odlišné priebehy a môžu sa dokonca meniť z roka na rok. Preto sme sa rozhodli, že pri zostavovaní modelu ich necháme medzi pracovnými dňami. V prípade simulovaných dát je ich možné nahradiť odhadmi pre soboty či nedele alebo dokonca priemerným priebehom konkrétneho sviatku na základe dát z uplynulých rokov. Postupný rast časového

horizontu a nové dáta možno sprístupnia dostatok informácií na presnejšiu predikciu dní pracovného pokoja.

Odčítaním odhadu dennej sezónnosti sme získali stochastický komponent očistený od deterministických činiteľov:

$$s_t^3 = e^{k, k=category(t)} + \sum_{i=1}^{23} f_i^{k, k=category(t)} H_i^{k, k=category(t)},$$

$$ded_t = dew_t - s_t^3,$$

kde ded_t označuje x_t zo vzťahu (1) a zápis $k, k = category(t)$ vracia kategóriu lineárneho modelu podľa Tab. 2 pre aktuálnu hodinu t .

3 Modely spotových cien

V tejto kapitole sa snažíme vytvoriť modely na simulovanie stochastickej časti spotových cien. Základom našich myšlienok tvorili jump-diffusion procesy s Markovovým prepínaním režimu. Začneme popisom teoretických základov potrebných k našim modelom a nakoniec popíšeme nami odvodené modely.

3.1 Teoretický základ modelov

V nasledovných podkapitolách vysvetlíme základnú teóriu za našimi modelmi. Popíšeme niektoré poznatky o afínných jump-diffusion procesoch, modeloch s Markovovým prepínaním režimov a odhadovaní parametrov mean reversion procesov.

3.1.1. Afínny jump-diffusion proces

Definujme filtrovaný pravdepodobnostný priestor (Ω, \mathcal{F}, P) s filtráciou $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in (0, \infty)}$ a \mathcal{F}_t -merateľný jednorozmerný stochastický proces X_t^1 , ktorý je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dX_t^1 = \mu(X_t^1, t)dt + \sigma(X_t^1, t)dW_t, \quad (2)$$

kde na vzor klasického značenia je $\mu(\cdot, t)$ drift, $\sigma(\cdot, t) > 0$ volatilita a dW_t inkrement Wienerovho procesu s normálnym rozdelením. Je to proces spojité v čase, ktorý sa používa napr. na modelovanie cien akcií. Často však v stochastických procesoch pozorujeme náhle skoky, ktoré narúšajú ich spojitosť. [10] tento zápis medzi prvými rozšíril o „skokový člen“

$$dX_t^2 = \mu(X_t^2, t)dt + \sigma(X_t^2, t)dW_t + J(X_t^2, t)dq_t. \quad (3)$$

Člen dq_t je Poissonov proces, pre ktorý platí:

$$dq_t = \begin{cases} 1 & \text{s pravdepodobnosťou } \lambda_t dt \\ 0 & \text{s pravdepodobnosťou } 1 - \lambda_t dt \end{cases} \quad (4)$$

nezávislý od dW_t a $J(X_t, t)$ označuje veľkosť skoku v závislosti od hodnoty X_t^2 a času. Index t v zápise λ_t naznačuje, že intenzita výskytu skokov môže byť vyjadrená aj ako funkcia času. Proces X_t^2 sa označuje názvom *afinny jump-diffusion* proces. Samotný názov „jump-diffusion“ sa týka kombinácie „difúzneho“ člena dW_t a „skokového“ člena dq_t . V prípade konštantného driftu a konštantnej volatility, t.j. $\mu(\cdot, t) = \mu$ a $\sigma(\cdot, t) = \sigma$, hodnotu procesu X_t^2 v porovnaní s Brownovým pohybom X_t^1 v čase $t > 0$ môžeme vyjadriť ako

$$X_t^2 = X_t^1 + \sum_{i=1}^{N(t)} J(X_{t(i)}^2, t(i)),$$

kde $N(t)$ označuje počet skokov, ktoré nastali na intervale $(0, t]$ ⁴ a $t(i)$ je čas i -teho skoku. [11] naznačil aj analógiu Itôvej lemy pre jump-diffusion procesy v tvare:

$$dY_t = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(X_{t-}^2, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(X_{t-}^2, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] dt + \sigma(X_{t-}^2, t) \frac{\partial f}{\partial x} dW_t + [f(X_{t-}^2 + J(X_{t-}^2, t), t) - f(X_{t-}^2, t)] dq_t, \quad (5)$$

⁴ Ide o náhodnú premennú z Poissonovho rozdelenia s parametrom λ .

kde $Y_t = f(X_t^2, t)$ a X_{t-}^2 je limita zľava pre proces X_t^2 . Úlohou limity zľava je ošetriť nespojitosť X_t^2 v prípade skoku. Jedinou zmenou oproti zápisu Itôvej lemy pre stochastické procesy bez skokov je posledný sčítanec, t.j. zmena v hodnote funkcie spôsobená skokom v X_t^2 . Pre podrobný popis teórie za stochastickými procesmi bez skokov odporúčame [9].

3.1.2. Markovove prepínanie režimov

Veľa stochastických procesov má tendenciu meniť svoje chovanie vplyvom rôznych činiteľov. Cieľom modelov s prepínaním režimov je definovať (obvykle) konečný počet režimov, v ktorých má proces charakteristické správanie. Prepínanie medzi jednotlivými režimami môže riadiť jedna, resp. vektor premenných. V prípade modelov s *Markovovým prepínaním režimov* (angl. *Markov regime switching*), ktoré opísal [5], je riadiacou „skrytá“ premenná $\delta(t)$ s konečným počtom možných hodnôt $\delta(t) \in \{1, 2, \dots, m\} = M$ s Markovovou vlastnosťou

$$\begin{aligned} P(\delta(t) = i_t | \delta(t-1) = i_{t-1}, \delta(t-2) = i_{t-2}, \dots, \delta(0) = i_0) \\ = P(\delta(t) = i_t | \delta(t-1) = i_{t-1}), \end{aligned}$$

pre každé t a všetky stavy $i_{t-1}, \dots, i_t \in M$, pričom čas t je diskretný. Preto hodnota $\delta(t)$ v čase t závisí iba (resp. nanajvýš) od hodnoty v čase $t-1$. $\delta(t)$ je tzv. diskretný Markovov reťazec a je skrytá v zmysle, že ju nevieme priamo pozorovať. Hodnoty $\delta(t)$ môžeme označovať názvami *stav* alebo *režim*. Pravdepodobnosti prechodu sa obvykle označujú

$$P(\delta(t) = j | \delta(t-1) = i) = p_{ij}.$$

resp.

$$P(\delta(t) = j | \delta(t-1) = i) = p_{ij}^t,$$

Poznamenávame, že t v p_{ij}^t u nás označuje, že pravdepodobnosti prechodu nemusia byť konštantné v čase. Hodnoty p_{ij}^t môžeme postupne uložiť do *matice prechodu* \mathbb{P}^t , t.j.

$$\mathbb{P}^t = \begin{pmatrix} p_{11}^t & \cdots & p_{1m}^t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1}^t & \cdots & p_{mm}^t \end{pmatrix}.$$

Pre presnejší popis a ďalšie vlastnosti Markovových reťazcov a matic prechodu odporúčame [7].

3.1.3. Odhad parametrov mean reversion procesov

Pri modelovaní spotových cien sme sa zamerali na dve najpoužívanejšie varianty mean reversion modelu *Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders (CKLS)* vyvinutý pre krátkodobé úrokové miery v práci [2]. Jeho zápis v súlade so stochastickou diferenciálnou rovnicou (2) pre $\mu(X_t, t) = \kappa(\theta - X_t)$ a $\sigma(X_t, t) = \sigma X_t^\gamma$ je

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t)dt + \sigma X_t^\gamma dW_t, \quad (6)$$

kde $\gamma \geq 0$ označuje exponent a platí tiež $\kappa > 0$, $\sigma > 0$ a obvykle aj $\theta > 0$. Parameter θ sa zvykne označovať ako *dlhodobý priemer* a κ ako *rýchlosť (alebo miera) návratu*. Drift tohto tvaru nadobúda záporné hodnoty pre $X_t > \theta$ a kladné hodnoty pre $X_t < \theta$. Toto zabezpečuje tendenciu X_t znižovať jeho vzdialenosť od dlhodobého priemeru θ , pričom absolútna hodnota očakávanej hodnoty dX_t v čase t je priamo úmerná absolútnej hodnote vzdialenosti $|\theta - X_t|$ a rýchlosti návratu κ . Ako vidíme, veľkosť volatility ovplyvňuje aj aktuálna hladina procesu v závislosti od parametra γ . Tento parameter býva nastavený tak, aby premenná X_t nemohla klesnúť pod nulu.

Spomínané dve varianty sú *Vašíčkov model*, pre ktorý $\gamma = 0$ a *Cox-Ingersoll-Ross (CIR) model*, kde $\gamma = 1/2$. Vo Vašíčkovom modeli je volatility konštantná, kým v CIR modeli priblížením premennej X_t zhora k nule sa volatility tiež približuje k nule. Táto vlastnosť volatility CIR modelu v kombinácii so spojitost'ou procesu zabraňuje X_t nadobudnúť záporné hodnoty. Navyše ak pre parametre platí vzťah

$$2\kappa\theta \geq \sigma^2, \quad (7)$$

proces nadobúda kladné hodnoty s pravdepodobnosťou 1, pre odvodenie vid' napr. [2, 21].

Vašíčkov model sa dá vyriešiť pomocou klasickej Itôvej lemy pre stochastické procesy bez skokov (vid' (5), resp. [9]). Volatilitu budeme zatiaľ uvádzať vo forme σX_t^Y . Nech $Y_t = f(X_t, t) = X_t e^{\kappa t}$, potom

$$dY_t = d(X_t e^{\kappa t}) = \kappa \theta e^{\kappa t} dt + \sigma X_t^Y e^{\kappa t} dW_t,$$

čo po integrovaní od t po $t + 1$ a pre násobení $e^{-\kappa(t+1)}$ dáva

$$X_{t+1} = X_t e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa}) + \sigma e^{-\kappa(t+1)} \int_t^{t+1} X_s^Y e^{\kappa s} dW_s.$$

Prvé dva momenty podmieneného rozdelenia X_{t+1} od X_t sa dajú vyjadriť ako

$$E(X_{t+1}|X_t) = X_t e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa}),$$

$$E(X_{t+1}|X_t) = \sigma^2 e^{-2\kappa(t+1)} \text{Var} \left(\int_t^{t+1} X_s^Y e^{\kappa s} dW_s \right) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa}), \quad (8)$$

kde sa v poslednej rovnosti použije Itôva izometria a $X_t^Y = 1$. Tieto vzťahy sú všeobecne známe a sú odvodené napr. v [9, 21]. Pomocou Fokker-Planckovej rovnosti je v [21] odvodené tiež, že podmienené rozdelenie X_{t+1} od X_t má normálne rozdelenie s vyššie uvedenými parametrami. Preto X_{t+1} sa dá simulovať iterovaním vzťahu

$$X_{t+1} = X_t e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa}) + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa})} Z_t, \quad (9)$$

kde $Z_t \sim N(0,1)$. Parametre κ , θ a σ môžeme zistiť metódou maximálnej vierohodnosti alebo aj metódou najmenších štvorcov po prepise vzťahu na lineárny model. My sme použili metódu maximálnej vierohodnosti. Logaritmickeá vierohodnostná funkcia pre časový rad dĺžky $n + 1$ má tvar

$$\mathcal{L}(\kappa, \theta, \sigma) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ln(v^2) + \frac{[X_{i+1} - X_i e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa})]^2}{2v^2}, \quad (10)$$

kde $v^2 = \frac{\sigma^2}{\kappa} (1 - e^{-2\kappa})$ a po derivovaní podľa jednotlivých parametrov dostaneme odhady

$$\hat{\kappa} = -\ln \frac{\sum_{i=1}^n (X_{i+1} - \hat{\theta})(X_i - \hat{\theta})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta})^2}, \quad (11)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{i+1} - X_i e^{-\hat{\kappa}})}{n(1 - e^{-\hat{\kappa}})}, \quad (12)$$

$$\hat{v}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [X_{i+1} - X_i e^{-\hat{\kappa} t} + \hat{\theta}(1 - e^{-\hat{\kappa}})]^2. \quad (13)$$

Zo vzťahov (11), (12), (13) ktoré sú použité napr. v práci [8] a aj odvodené na stránke [19] môžeme získať odhady pre parametre Vašičkovho modelu analyticky. Prvý sčítanec na pravej strane (10) je pre tento postup zbytočný a odteraz ho budeme zo zápisu vynechávať.

Podobný postup v prípade CIR modelu je problematický. Pre modely CKLS v (8) v integráli vystupuje aj člen X_t^γ , ktorý pre $\gamma \neq 0$ už nie je konštantný. V CIR modeli má premenná X_{t+1} podmienená podľa X_t gamma rozdelenie, viď [21]. Na odhad parametrov sme preto použili *Nowmanov prístup*, ktorý je popísaný v [21] a pôvodne v [13]. Hlavnou ideou tohto prístupu je, že pre každé $s \in [t, t+1)$ predpokladáme konštantné $X_s^\gamma = X_t^\gamma$. (8) sa zmení na

$$E(X_{t+1}|X_t) = \sigma^2 e^{-2\kappa(t+1)} X_t^{2\gamma} \text{Var} \left(\int_t^{t+1} e^{\kappa s} dW_s \right) = \frac{\sigma^2 X_t^{2\gamma}}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa}), \quad (14)$$

a podmienené rozdelenie X_{t+1} je znovu normálne. Na simulovanie nových bodov je možné použiť

$$X_{t+1} = X_t e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa}) + \sqrt{\frac{\sigma^2 X_t^{2\gamma}}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa})} Z_t$$

alebo spätnú Eulerovu diskretizáciu

$$X_{t+1} = X_t + \kappa(\theta - X_t) + \sigma X_t^\gamma Z_t.$$

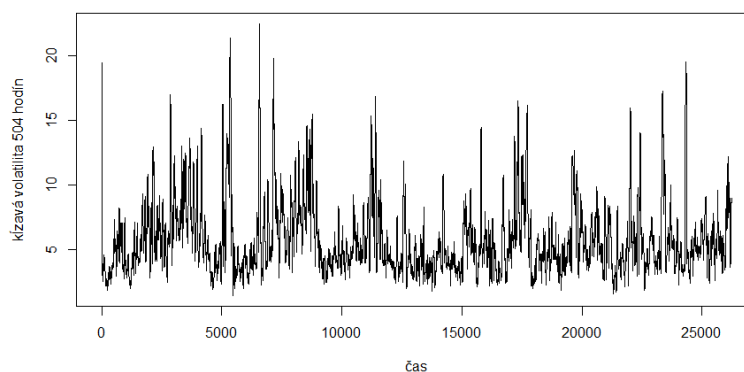
Na zabezpečenie nezápornosti X_{t+1} [18] navrhuje napr. obmenu

$$X_{t+1} = |X_t + \kappa(\theta - X_t) + \sigma X_t^\gamma Z_t|. \quad (15)$$

Absolútnu hodnotu sme mohli použiť aj v prípade Vašíčkovho modelu, jediným rozdielom je vplyv X_t^γ , t.j. vyššia volatilita pri vysokých hodnotách X_t . Takúto vlastnosť by mohli mať aj spotové ceny elektrickej energie, keďže v obdobiach s extrémnymi cenami by sme čakali vyššiu volatilitu.

3.2 Odvodenie skokových modelov s prepínaním režimov

Ako vidíme na grafe Obr. 16 stochastický komponent často nadobúda extrémne hodnoty. Potvrdiť prítomnosť skokov v procese môžeme overiť napr. analýzou kĺzavej volatility cien, vid' [1]. Graf Obr. 9 znázorňuje kĺzavú štandardnú odchýlku 168 pozorovaní pre sledované obdobie. Ako vidíme, volatilita je v istých úsekoch dočasne narušená, má však tendenciu vrátiť sa k svojej dlhodobej hladine. Keďže väčšina „kopcov“ v grafe má dĺžku približne 168 bodov, môžeme predpokladať, že sú spôsobené skokmi.



Obr. 9 Kĺzavá volatilita stochastického komponentu s priemerom tri týždne

Ako ukážeme neskôr, extrémne vysoké ceny sa líšia od extrémne nízkych okrem priemernej vzdialenosti od dlhodobého priemeru aj intenzitou výskytu. Práve ako [1]

modelujú stavové premenné získané analýzou hlavných komponentov zo spotových a forwardových cien Kalmanovým a Kimovým filtrom s veľmi dobrými výsledkami. Bežnejšie sú však jednoduché kombinácie mean reversion a skokových procesov v rámci modelov s Markovovým prepínaním režimov, napr. [4, 6, 12]. Niektoré práce skúmajú viacero modelov, pričom charakter procesov a režimov závisí od subjektívnej interpretácie chovania spotových cien. Skoky v spomínaných prácach sú najčastejšie modelované Vášičkovým modelom so skokmi, t.j. procesom typu (3) s driftom $\mu(X_t, t) = \kappa(\theta - X_t)$ a volatilitou $\sigma(X_t, t) = \sigma$. Skoky majú charakter Poissonových, resp. združených Poissonových procesov. Vo viacerých prácach sa vyskytuje napr. jump-diffusion proces so zápisom

$$dX_t = \kappa(\theta - X_{t-1})dt + \sigma dW_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_{t,i}, \quad (16)$$

kde $Y_{t,i}$ sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné premenné, obvykle z rozdelenia $N(\mu, \sigma)$, $N_t \sim Pois(\lambda)$. Rýchlosť návratu a volatilita môže byť v jednotlivých režimoch odlišná. Parametre takéhoto procesu je možné odhadnúť metódou maximálnej vierohodnosti (viď [6]), resp. v prípade modelov s prepínaním režimov metódou Markov Chain Monte Carlo (MCMC), viď [4]. Práce [2] a [17] dokonca používajú dva skokové členy pre modelovanie kladných a záporných skokov. Pre presnú definíciu a popis Poissonovho rozdelenia a Poissonových procesov viď [7]. Veľkosť skokov $J(X_t, t)$ je vo väčšine prác náhodná premenná s normálnym alebo lognormálnym rozdelením, resp. je vyjadrený ako súčet takýchto náhodných premenných, viď napr. (16).

Pri modelovaní dát s dennou granularitou je kombinácia mean reversion procesu so skokmi problematický, lebo návrat k dlhodobému priemeru v týchto procesoch je pomalší, než v realite. Extrémne vysoké alebo nízke cenové hladiny zriedkavo trvajú dlhšie ako deň. Preto [23] používa model vo forme

$$p_t = S_t + e^{X_t + J_t dq_t}, \quad (17)$$

kde p_t je spotová cena, S_t deterministický komponent a X_t je obyčajný mean reversion proces (6) s $\gamma = 0$. V takomto procese sú skoky v stochastickom komponente spotových cien nezávislé od mean reversion procesu. Člen $J_t dq_t$ má efekt iba v čase t a v čase $t + 1$

sa p_t okamžite vráti k dlhodobej hladine $S_t + e^{X_t}$. Proces X_t je v (17) uvedený ako argument exponenciálnej funkcie, keďže [23] pracuje s logaritmickej transformáciou cien.

My sme pracovali s podobným procesom, pričom okamžitému návratu k priemeru sme zabránili prepnutím režimu po skoku. Pridali sme navyše ďalší skokový člen, ktorý označuje skok nadol, podobne ako vo vyššie spomínaných prácach [2] a [17]. Takýto prístup uľahčuje odhad parametrov, simulovanie nových bodov a umožňuje osobitnú analýzu kladných a záporných skokov:

$$x_t = X_t + J_t^u dq_t^u + J_t^d dq_t^d, \quad (18)$$

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t)dt + \sigma dW_t, \quad (19)$$

kde $dq_t^u \sim \text{Pois}(p_u)$ a $dq_t^d \sim \text{Pois}(p_d)$ na vzor (4), $P(dq_t^u = 1, dq_t^d = 1) = 0$ pre každé t . Táto interpretácia je podobná ako v práci [8], avšak v tej stochastický komponent v hornom a dolnom režime predstavuje stredný režim charakterizovaný ARIMA procesom posunutým o náhodnú premennú s normálnym rozdelením. V iných sa obvykle mení iba rýchlosť návratu a volatilita procesu, parameter θ je však rovnaký pre všetky režimy. V našom prípade bude očakávaná hodnota na začiatku úseku dolného alebo horného režimu tvorená prvou hodnotou po skoku. Zameriame sa pritom na veľkosť extrémnych cien, nie na ich zmeny.

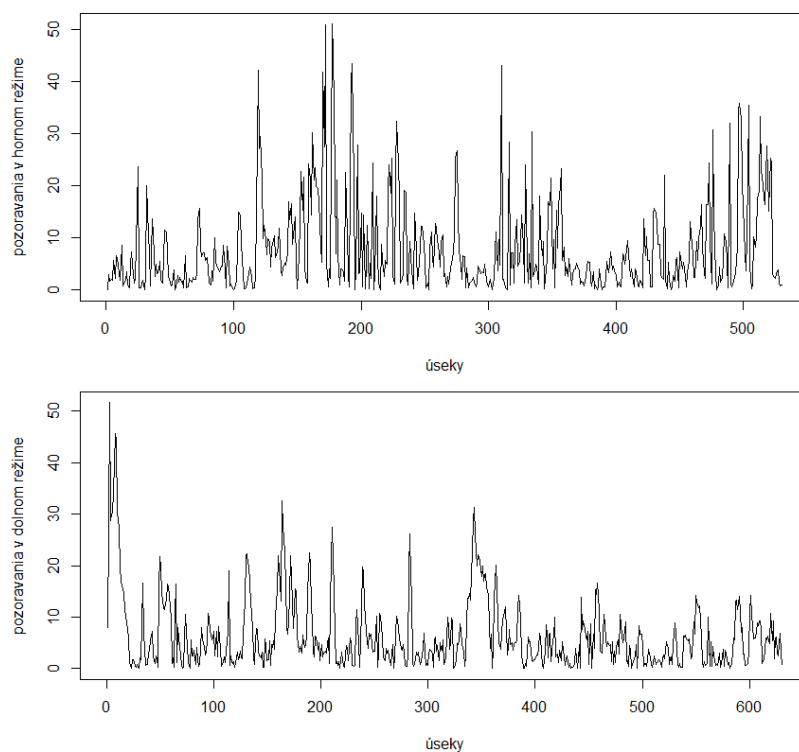
3.2.1. Stredný režim

Naša interpretácia režimov bola nasledovná. Ako sme spomínali v 1.2 *Špecifické vlastnosti cien elektrickej energie*, nečakané výpadky alebo zmeny počasia môžu spôsobiť extrémne vysoké, nadbytočná výroba elektriny extrémne nízke cenové hladiny. Podobné situácie obvykle trvajú niekoľko hodín a cena sa po nich vráti k dlhodobému priemeru. Hladinu cien v týchto krátkych intervaloch, resp. úsekoch sme považovali za dočasný priemer, keďže v dôsledku ťažko sledovateľného javu sa narušil prirodzený poriadok trhu. Definujeme preto *horný a dolný režim*, v ktorých sa cena pohybuje okolo nového, extrémne vysokého alebo nízkeho priemeru. Extrémne ceny sme na vzor [8, 12] definovali ako ceny, ktorých vzdialenosť od dlhodobého priemeru (v prípade našich očistených cien s dlhodobým priemerom v blízkosti nuly) prevyšuje hranicu násobku štandardnej odchýlky

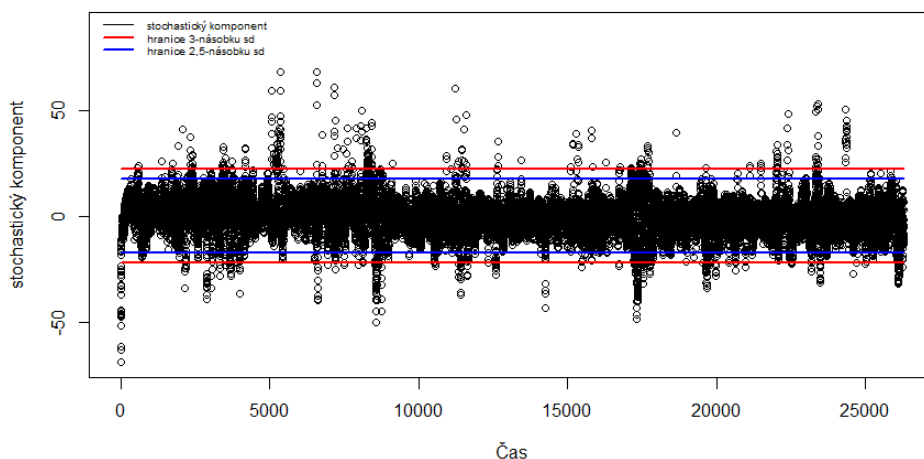
cien sd . Tieto ceny sme odstraňovali iteratívne, až kým sme nezískali filtrovaný časový rad, v ktorom sa každý bod nachádza v rámci takto stanovených medzí. Režim, ktorý predstavuje tieto filtrované (*bežné*) hodnoty označíme ako *stredný* režim. Zlou vlastnosťou takéhoto iteratívneho procesu je „prerušovaný“ charakter výsledného časového radu. Odborná literatúra uvádza rôzne riešenia, [4, 8, 12] ich uvádzajú niekoľko:

- generovanie nových hodnôt z normálneho rozdelenia
- nahradenie hornou, resp. dolnou hranicou tvorenou násobkom štandardnej odchýlky
- Markov Chain Monte Carlo (MCMC)
- lineárna interpolácia.

Generovanie náhodných hodnôt z normálneho rozdelenia môže do časového radu pridať neprirodzené veľké skoky, čo by zvyšovalo štandardnú odchýlku zmien. Nahradenie hraničnou hodnotou naopak priraduje krátke úseky z konštantnou cenou, t.j. s nulovými zmenami. Keďže tieto úseky ani v jednom prípade netrvali dlhšie než 24 hodín, namiesto MCMC metódy použitej v [4] sme sa rozhodli pre lineárnu interpoláciu. V prípade extrémnych hodnôt na začiatku alebo konci časového radu sme prvý, resp. posledný bod nahradili dlhodobým priemerom, čo nám umožnilo interpoláciu zvyšných bodov. Toto nám zabezpečí krátke úseky postupného prechodu medzi dvojicami bežných hodnôt. Na grafe Obr. 11 sme znázornili hranice, ktoré sme získali 2,5-, resp. 3-násobkom sd . Ako vidíme, 3-násobok sd ($3 \times 7,40$ 2) nevystihol dostatočne úzky pás pre bežné ceny, preto sme sa rozhodli pre 2,5-násobok sd ($2,5 \times 6,937$ 9). Získali sme 530 vysokých pozorovaní v hornom, a 630 nízkych v dolnom režime. Na grafoch Obr. 10 vidíme spojené úseky týchto hodnôt. Kým ceny v dolnom režime sú prirodzene záporné, pre lepšiu vizualizáciu a pre účely analýzy znázorňujeme a použijeme ich absolútne hodnoty. V tomto pomáha, že dlhodobý priemer časového radu sme v kapitole 2.2 *Týždenná sezónnosť* posunuli blízko k nule.



Obr. 10 Spojené úseky stochastického komponentu v hornom a dolnom režime



Obr. 11 Hranice tvorené 2,5- a 3-násobkom štandardnej odchýlky stochastického komponentu

3.2.2. Horný a dolný režim

Na základe grafu Obr. 10 sme predpokladali, že pravdepodobnostné rozdelenia takto získaných hodnôt vysokých a nízkych cien sa okrem nulovej pravdepodobnosti hodnôt menších než 2,5-násobok sd^5 vyznačujú aj ťažkým chvostom. Najlepšími kandidátmi preto

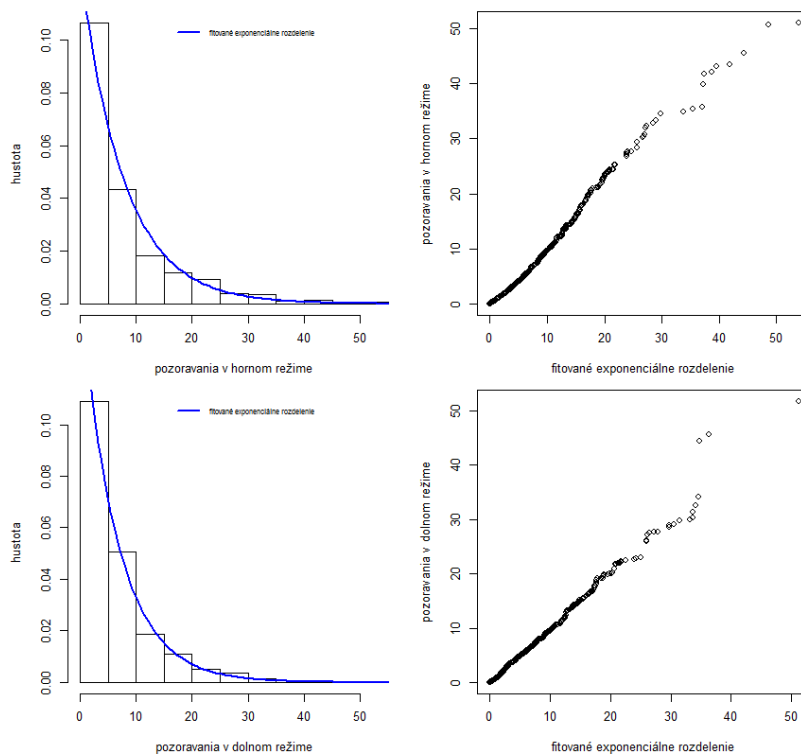
⁵ V prípade posunutých cien menších než 0, ako vidíme na grafe Obr. 10.

boli χ^2 -rozdelenie a exponenciálne rozdelenie. Na odhad parametrov oboch teoretických rozdelení sme na vysoké aj nízke ceny použili funkciu *fitdistr* z balíčka *MASS*. Táto funkcia pre oba teoretické rozdelenia používa odhad maximálnou vierohodnosťou. V prípade exponenciálneho rozdelenia získava presný odhad analyticky a pre χ^2 -rozdelenie používa optimalizáciu pomocou metódy limited-memory BFGS, vid' [16]. Aby sme mohli odhadovať parametre centrovaných rozdelení, od vysokých a absolútnych hodnôt nízkych cien sme odčítali hornú, resp. dolnú hranicu 2,5-násobku *sd*.

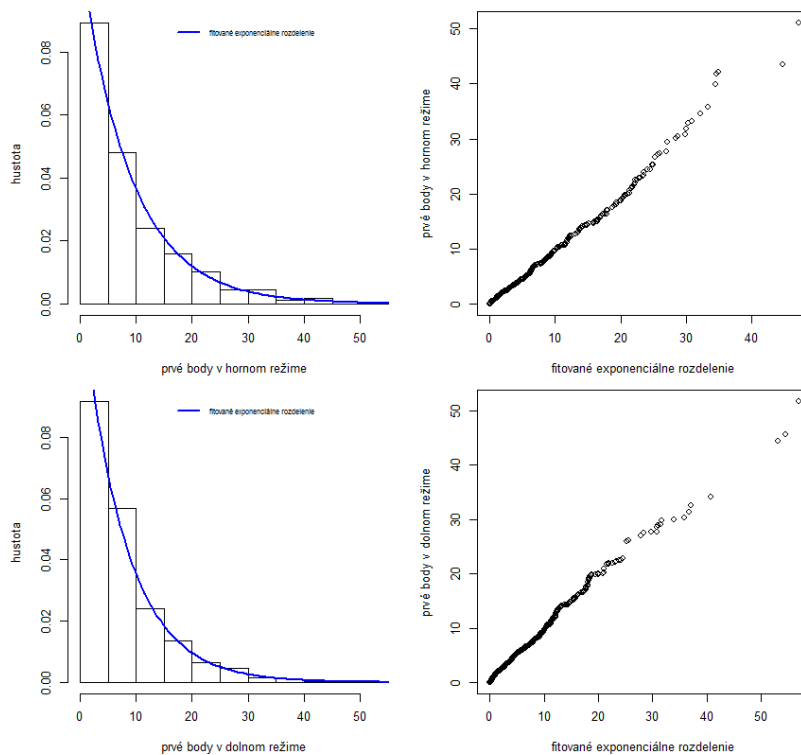
Výsledky sú uvedené v Tab. 3. Presnosť týchto odhadov sme overili vizuálne pomocou histogramov a Q-Q grafov a Kolmogorov-Smirnov testom sme porovnali teoretické rozdelenia s empirickými rozdeleniami vysokých a nízkych cien. Exponenciálne rozdelenie má z každého hľadiska lepšie výsledky, histogram a Q-Q graf sme uviedli v Obr. 12. V prípade prvých hodnôt všetkých úsekov extrémnych cien, ktoré v našich modeloch predstavujú dočasné priemerné cenové hladiny, sme tiež získali postačujúce p-hodnoty a grafy, vid' Tab. 3 a graf Obr. 13. Tieto výsledky svedčia o tom, že exponenciálne rozdelenia s príslušnými parametrami λ_3 a λ_4 , sú vhodnými kandidátmi na simulovanie dočasných priemerov cenovej hladiny. Horný režim označíme indexmi *u* a *d* a analogicky aj parametre λ_u a λ_d .

Tab. 3 Odhady fitovaného exponenciálneho rozdelenia hodnôt stochastického komponentu v úsekoch v hornom a dolnom režime a prvých hodnôt úsekov. P-hodnoty označujú výsledky Kolmogorov-Smirnov testu.

parameter	odhad	p-hodnota
df_1	4.805 9	2.20E-16
df_2	4.427 3	2.87E-13
λ_1	0.128 5	0.033 2
λ_2	0.154 2	0.252 7
$\lambda_3 (\lambda_u)$	0.111 8	0.856 9
$\lambda_4 (\lambda_d)$	0.130 4	0.094 2



Obr. 12 Histogramy stochastického komponentu v hornom a dolnom režime s krivkami hustôt fitovaných exponenciálnych rozdelení a ich Q-Q grafy



Obr. 13 Histogramy prvých bodov úsekov v hornom a dolnom režime s krivkami hustôt fitovaných exponenciálnych rozdelení a ich Q-Q grafy

3.2.3. Matica prechodu

Keďže hranica 2,5-násobku *sd* jednoznačne určila, do ktorého režimu jednotlivé hodnoty patria, mohli sme odhadnúť pravdepodobnosti prechodu v matici \mathbb{P} . Na vzor postupu uvedeného v [7, kapitola 4.1] a použitého napr. v [8] sme pravdepodobnosti prechodu p_{ij} odhadovali z početnosti pozorovaných prechodov medzi jednotlivými režimami. V našom prípade indexy *u* (*up*), *b* (*base*) a *d* (*down*) označujú postupne *dolný*, *stredný* a *horný* režim. Pripomíname, že ide o množinu možných hodnôt skrytej premennej $\delta(t)$ z podkapitoly 3.1.2 *Markovove prepínanie režimov*. Hodnota n_{ij} označuje početnosť pozorovaných prechodov z režimu *i* do režimu *j*. Odhady pravdepodobností p_{ij} sú preto

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i},$$

kde $n_i = \sum_{j=1}^3 n_{ij}$. V prípade, že $n_i = 0$, sme položili $\hat{p}_{ij} = 0$. Ako zjednodušenie pre všetky odhady používame označenie p_{ij} .

Ako sme spomínali v kapitole (vlastnosti cien), pravdepodobnosti skokov v priebehu dňa nemusia byť homogénne. Vytvorili sme preto 24 matic \mathbb{P}^h $h = 1, 2, \dots, 24$, v ktorých p_{ij}^h je pravdepodobnosť, že v hodine *h* je proces v režime *i* a v hodine *h* + 1 bude v režime *j* (samozrejme v prípade $h = 24$ položíme $h + 1 = 1$). Simulovanie týmito maticami by nebolo vhodné kvôli nízkemu počtu výskytu v hornom, resp. dolnom režime v prípade niektorých hodín. Napríklad $n_{dd}^{23} = 8$, kým $n_{db}^{23} = 0$, v dôsledku čoho $p_{dd}^{23} = 1$. Na základe týchto hodnôt sme sa nakoniec rozhodli vytvoriť tri matice prechodu. \mathbb{P}^1 pre špičky, t.j. $h \in \{11, 12, 13, 14, 19, 20, 21, 22\}$, \mathbb{P}^2 pre nočné hodiny, t.j. $h \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 23, 24\}$ a \mathbb{P}^3 pre zvyšok. Výsledné početnosti a pravdepodobnosti prechodu sú v Tab. 4. Ako vidíme, pravdepodobnosť výskytu v hornom režime je najvyššia pre maticu \mathbb{P}^1 , pravdepodobnosť výskytu v dolnom režime v \mathbb{P}^2 a hodnoty \mathbb{P}^3 ležia medzi hodnotami matic \mathbb{P}^1 a \mathbb{P}^2 . Môžeme si všimnúť, že pravdepodobnosti prechodu medzi horným a dolným režimom sú nulové v oboch smeroch.

Tab. 4 Početnosti prechodov medzi režimami a odhady pravdepodobností prechodov

Poč.	n_{dd}	n_{db}	n_{du}	n_{bd}	n_{bb}	n_{bu}	n_{ud}	n_{ub}	n_{uu}
1	136	62	0	53	8 112	110	0	114	173

2	176	46	0	63	9 514	14	0	31	10
3	173	37	0	28	7 135	90	0	69	133
Pravd.	p_{dd}	p_{db}	p_{du}	p_{bd}	p_{bb}	p_{bu}	p_{ud}	p_{ub}	p_{uu}
1	0.686 9	0.313 1	0.000 0	0.006 4	0.980 3	0.013 3	0.000 0	0.397 2	0.602 8
2	0.792 8	0.207 2	0.000 0	0.006 6	0.992 0	0.001 5	0.000 0	0.756 1	0.243 9
3	0.823 8	0.176 2	0.000 0	0.003 9	0.983 7	0.012 4	0.000 0	0.341 6	0.658 4

Odborná literatúra používa aj alternatívne metódy na odhad týchto pravdepodobností. [23] napr. uvádza algoritmus expectation-maximization. Kým táto metóda je rigorózna, v prípade viacerých matic prechodu je ju ťažké použiť, preto najvyššiu pridanú hodnotu vidíme v nami zvolenom postupe.

3.3 Tri modely s prepínaním režimov

V tejto kapitole uvádzame naše tri modely stochastického komponentu x_t , postavené na základe vyššie uvedenej teórie. Stredný režim v každom prípade predstavuje proces (18), resp. (19), keďže skokové členy dq_t^u , dq_t^d okamžite prepnú režim do horného, resp. dolného režimu. Na základe výsledkov z 3.2.3 *Horný a dolný režim* zmeníme zápis procesu (18) nasledovným spôsobom:

$$x_t = X_t + (|2,5sd - x_t| + J_t^u)dq_t^u + (|-2,5sd - x_t| - J_t^d)dq_t^d, \quad (20)$$

kde $J_t^1 \sim \text{Exp}(\lambda_u)$, $J_t^2 \sim \text{Exp}(\lambda_d)$, $dq_t^1 \sim \text{Pois}(p_{bu}^t)$, $dq_t^2 \sim \text{Pois}(p_{bd}^t)$. Parametre λ_u , λ_d sme určili v podkapitole 3.2.2 *Horný a dolný režim* a parametre p_{23}^t , p_{21}^t sú určené podľa odhadov pravdepodobností prechodu v podkapitole 3.2.3 *Matica prechodu*:

$$p_{bu}^t = p_{bu}^{k,k=\text{category}(t)}, p_{bd}^t = p_{bd}^{k,k=\text{category}(t)},$$

kde $k, k = \text{category}(t)$ v tomto prípade vracia informáciu, ktorá z matic \mathbb{P}^k $k \in \{1,2,3\}$ má byť v čase t použitá. Prepínanie režimov v našich modeloch môže pripomínať tzv. threshold (prahové) modely, v ktorých prepínanie riadi prekročenie tzv. prahovej hodnoty pozorovanou premennou (tu by to bola výška x_t), avšak tento jav je stále riadený

skrytou premennou $\delta(t) \in \{1,2,3\}$, ktorá má Markovovu vlastnosť. Dokonca výsledná cena v čase $t + 1$ po skoku nezávisí od výšky ceny v čase t . Proces stochastického komponentu budeme odteraz označovať $x_t^{\delta(t)}$ na základe aktuálneho režimu.

Bežný režim tým pádom predstavuje proces (20), keď $dq_t^u = 0$, $dq_t^d = 0$ a platí $dx_t^b = dX_t$, $\delta(t) = b$. Ak nastane skok nahor, t.j. $dq_t^u = 1$, hodnota procesu sa najprv zvýši na extrémnu hladinu ($|2,5sd - x_t| + J_t^u$) a proces prepne do horného režimu x_t^u , $\delta(t) = u$. Návrat je riadený rozdelením v treťom riadku aktuálnej matice prechodu. V hornom režime nie je možné presunúť sa do dolného, čo platí aj naopak. Ak v bežnom režime nastane skok nadol, t.j. $dq_t^d = 1$, hodnota procesu sa najprv zníži na extrémnu hladinu ($|-2,5sd - x_t| - J_t^d$) a proces prepne do dolného režimu x_t^d , $\delta(t) = d$. Návrat je riadený rozdelením v prvom riadku aktuálnej matice prechodu. Postupný presun výšky stochastického komponentu x_t^b k dlhodobému priemeru po skončení horného alebo dolného režimu ovplyvňuje iba správanie mean reversion procesu x_t^b .

Na odhad parametrov stredného režimu použijeme vzťahy (11), (12), (13) a nové hodnoty budeme simulovať pomocou (9).

Model 1

Režimy extrémnych cien budú v tomto modeli opísané martingálmi, t.j.

$$dx_t^u = \sigma^u dW_t,$$

$$dx_t^d = \sigma^d dW_t.$$

Vlastnosti martingálov sú popísané napr. v [9] a v praxi predstavujú jeden z najjednoduchších možností na popis stochastických procesov. Ako sme spomínali vyššie, prvý bod úseku, ktorý sa riadi horným alebo dolným režimom, je generovaný náhodnou premennou J_t^u alebo J_t^d . Hodnoty parametrov σ^u , σ^d sme určovali na tých pozorovaných úsekoch extrémnych cien nášho časového radu, ktoré trvali aspoň dve hodiny. To znamená, že na každom úseku dĺžku $n > 1$ vstupuje do odhadu $n - 1$ zmien. Po spojení všetkých úsekov v oboch režimoch extrémnych cien by odhady parametrov zohľadnili aj zmeny medzi poslednými a prvými bodmi po sebe nasledujúcich úsekov. Podobný prístup sme použili aj v prípade ostatných modelov.

Model 2

Režimy extrémnych cien budú v tomto modeli opísané Vašíčkovým modelom, podobne, ako stredný režim:

$$dx_t^u = \kappa^u(\theta^u - x_t^u)dt + \sigma^u dW_t,$$

$$dx_t^d = \kappa^d(\theta^d - x_t^d)dt + \sigma^d dW_t.$$

Pre odhad parametrov v tomto modeli sme použili obmenu logaritmickú vierohodnostnej funkcie (10). Ako sme spomenuli vyššie, spojenie všetkých úsekov v hornom, resp. dolnom režime by spôsobilo nesprávne odhady parametrov. Logaritmická vierohodnostná funkcia (10) by v takomto prípade interpretovala časový rad spojených úsekov horného režimu znázornený na grafe Obr. 10 ako proces, ktorý sa pohybuje okolo kladnej hodnoty θ^u na každom úseku a parametre κ^u , σ^u by odhadovala analogicky. Preto je dôležité zohľadniť iba úseky dĺžky aspoň dve hodiny, a do sumy v zápise logaritmickú vierohodnostnej funkcie ich pridávať postupne. Parameter θ^u sme neodhadovali, vždy bola rovná prvej hodnote daného úseku:

$$\mathcal{L}(\kappa^u, \sigma^u) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{m_j-1} \ln(v^2) + \frac{\left[x_{t_j+i+1}^u - x_{t_j+i}^u e^{-\kappa^u t} + x_{t_j}^u (1 - e^{-\kappa^u}) \right]^2}{2v^2}, \quad (21)$$

kde $v^2 = \frac{(\sigma^u)^2}{\kappa^u} (1 - e^{-2\kappa^u})$, n je počet pozorovaných úsekov v hornom režime s dĺžkou aspoň dve hodiny, m_j je počet pozorovaní v úseku $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ a t_j je čas prvého bodu úseku j . Odhadovali sme iba parametre κ^u , σ^u , t.j. jednotný volatilný charakter horného režimu nezávisle od cenovej hladiny. Parametre κ^d , σ^d dolného režimu sme odhadovali analogicky.

Model 3

Režimy extrémů sú v tomto modeli opísané CIR modelom:

$$dx_t^u = \kappa^u(\theta^u - x_t^u)dt + \sigma^u(x_t^u - 2,5sd)^{\gamma} dW_t,$$

$$dx_t^d = \kappa^d(\theta^d - x_t^d)dt + \sigma^d|x_t^d + 2,5sd|^\gamma dW_t,$$

t.j. $\gamma = 1/2$. Postupovali sme podobne ako v prípade Modelu 2, použili sme však Nowmanov prístup a na základe variancie (14) položili

$$v_i^2 = \frac{(\sigma^u)^2 (x_{t_j+i}^u)^{2\gamma}}{\kappa^u} (1 - e^{-2\kappa^u}).$$

Najprv sme maximalizovali funkciu $\mathcal{L}(\kappa^u, \sigma^u)$, a potom sme sa pokúsili odhadnúť aj parameter γ^u vo funkcii $\mathcal{L}(\kappa^u, \sigma^u, \gamma^u)$. Cieľom bolo zistiť, či má cenová hladina významný vplyv na volatilitu procesu. Analogicky sme postupovali aj v prípade dolného režimu. Na simulovanie týchto režimov sme použili vzťah (15). Proces s parametrom $\gamma = 1$ je skúmaný napr. v práci [14].

4 Výsledky a vyhodnotenie modelov

Na grafoch Obr. 14, Obr. 15 a Obr. 16 vidíme časový rad v jednotlivých fázach úpravy sezónnosti. Vydelenie ročnej sezónnosti kľzavými priemermi faktorov $f2y_d$ ho vyrovnal a odčítanie kriviek odhadnutých lineárnymi modelmi postupne odstránil týždennú a dennú sezónnosť. Na grafoch Obr. 15 a Obr. 16 vidíme autokorelačné funkcie cien po jednotlivých krokoch odstránenia sezónnosti. Každý krok úspešne znížil periodický charakter, až kým sezónnosť z dát skoro úplne zmizla. Koeficienty modelov sú zhrnuté v Tab. 5. Čo sa týka dennej sezónnosti, Tab. 6 obsahuje výsledky dvadsiatich lineárnych modelov (viď Tab. 2) v kontexte počtu štatisticky významných premenných a koeficientu determinácie. Ako vidíme, v niektorých modeloch sa značný počet premenných neukázal byť štatisticky významným, ale pre dodržanie konzistencie sme ponechali všetky modely. Podobný výsledok bol pozorovaný aj v [1].

Odhady parametrov modelov stochastického komponentu sme zhrnuli v Tab. 5. Ako vidíme, horný režim sa všeobecne vyznačuje vyššou volatilitou a nižšou rýchlosťou návratu k dlhodobému priemeru. Stĺpec CKLS (u) označuje výsledky maximalizáciou funkcií $\mathcal{L}(\kappa^u, \sigma^u, \gamma^u)$ a $\mathcal{L}(\kappa^d, \sigma^d, \gamma^d)$. Odhady parametrov γ^u, γ^d získané týmto spôsobom naznačujú, že $\gamma = 1/2$ v Modeli 3 vysoko nadhodnocuje vplyv hladiny cien na volatilitu procesu. Navyše neplatí ani vzťah (7).

Na kontrolu kvality simulácií sme na vzor [1, 8] vypočítali priemerné hodnoty ukazovateľov *MAE* (angl. *mean absolute error*) a *RMSE* (angl. *root-means-square-error*) $N = 1\,000$ simulácií pre všetky tri modely⁶:

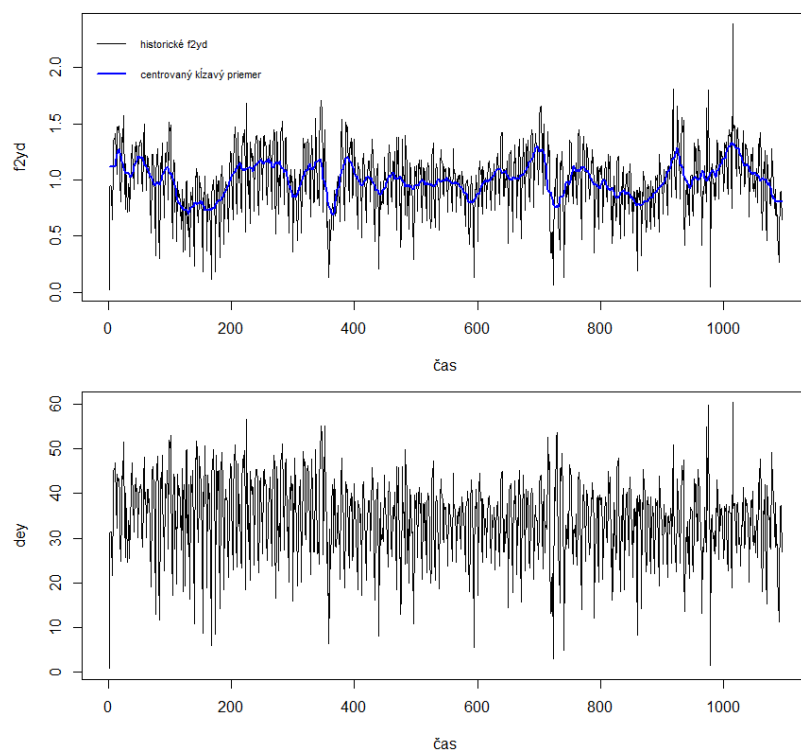
$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |P_t - P_{kt}^s|,$$

$$RMSE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (P_t - P_{kt}^s)^2},$$

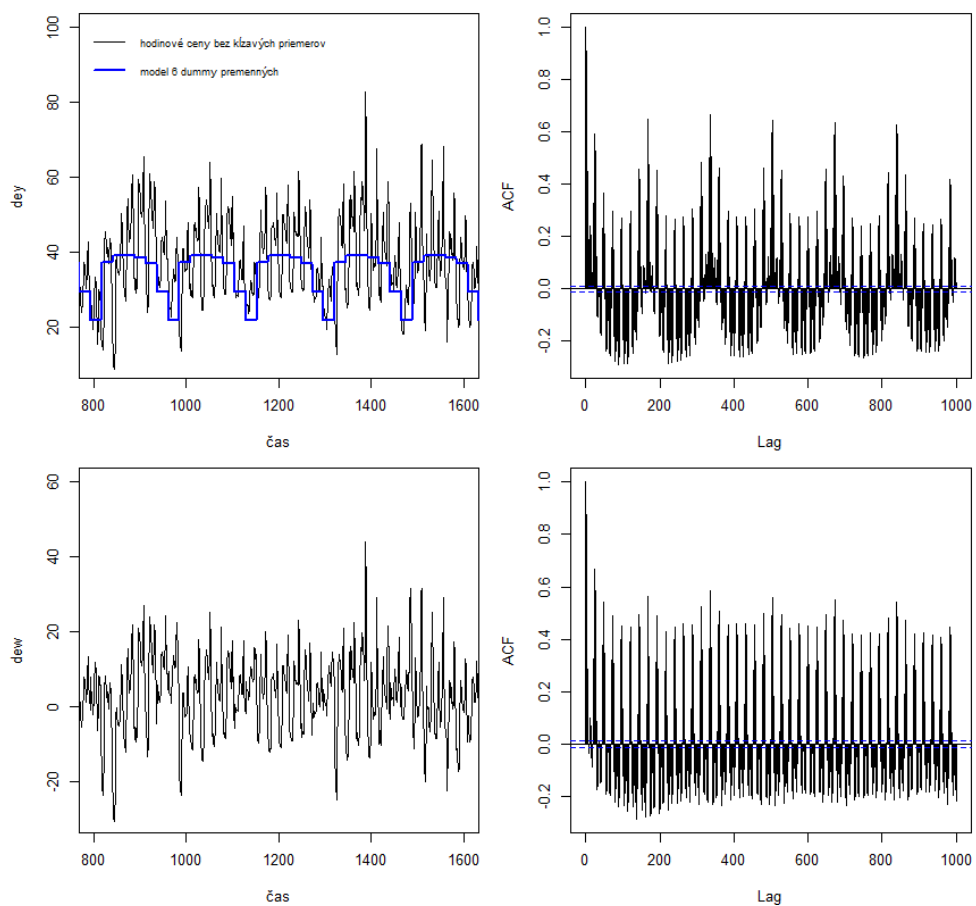
v ktorých P_{kt}^s označuje odhad ceny zo simulácie k pre čas t . Validačnou vzorkou P_t sú ceny z intervalu 01.01.2016-28.02.2016 ($T = 1\,416$). Keďže výskyt skokov je náhodný, ukazovatele sme na vzor [8] vypočítali aj pre dáta zoradené podľa výšky cien, tzv. *PDC* (angl. *price duration curve*). Výsledky sme zhrnuli v Tab. 8. Ako vidíme, hodnoty ukazovateľov sú relatívne vysoké. Dôvodom je nízka priemerná cena v týchto dvoch mesiacoch, rovná 27,77. Na základe cien v predošlých rokoch lineárny model použitý na simulovanie ročnej sezónnosti predpokladal jemný nárast, viď Obr. 3. Vyskúšali sme preto odstrániť trend z validačnej vzorky kľzavým priemerom, (podobne ako v kapitole 2.1 *Ročná sezónnosť*) a porovnať ju so simulovanými cenami bez ročnej sezónnosti. Hodnoty ukazovateľov v Tab. 9. po odstránení ročnej sezónnosti, resp. trendu sú oveľa lepšie, hlavne v prípade zoradených dát. Toto je viditeľné aj na grafe Obr. 17. Ako sme spomínali aj v kapitole 2.1 *Ročná sezónnosť*, odhadovať ročnú sezónnosť stochastickým modelom je problematické, vhodným postupom by preto mohlo byť simulovanie cien bez trendu a doplniť ho na základe prístupných informácií o trhu a expertných odhadov.

Čo sa týka kvality modelov, z pohľadu odhadov parametrov funkciami $\mathcal{L}(\kappa^u, \sigma^u, \gamma^u)$ a $\mathcal{L}(\kappa^d, \sigma^d, \gamma^d)$ a hodnoty ukazovateľov *MAE* a *RMSE* bez ročnej sezónnosti Model 1 a Model 2 vykázali relatívne lepšiu schopnosť simulovať spotové ceny, ako Model 3. Môže to byť aj v dôsledku toho, že prvé dva modely nechajú cenu voľne prekročiť hranicu 2,5-násobku sd . Na grafe Obr. 18 vidíme simulovaný scenár Modelu 1 spolu s historickými dátami.

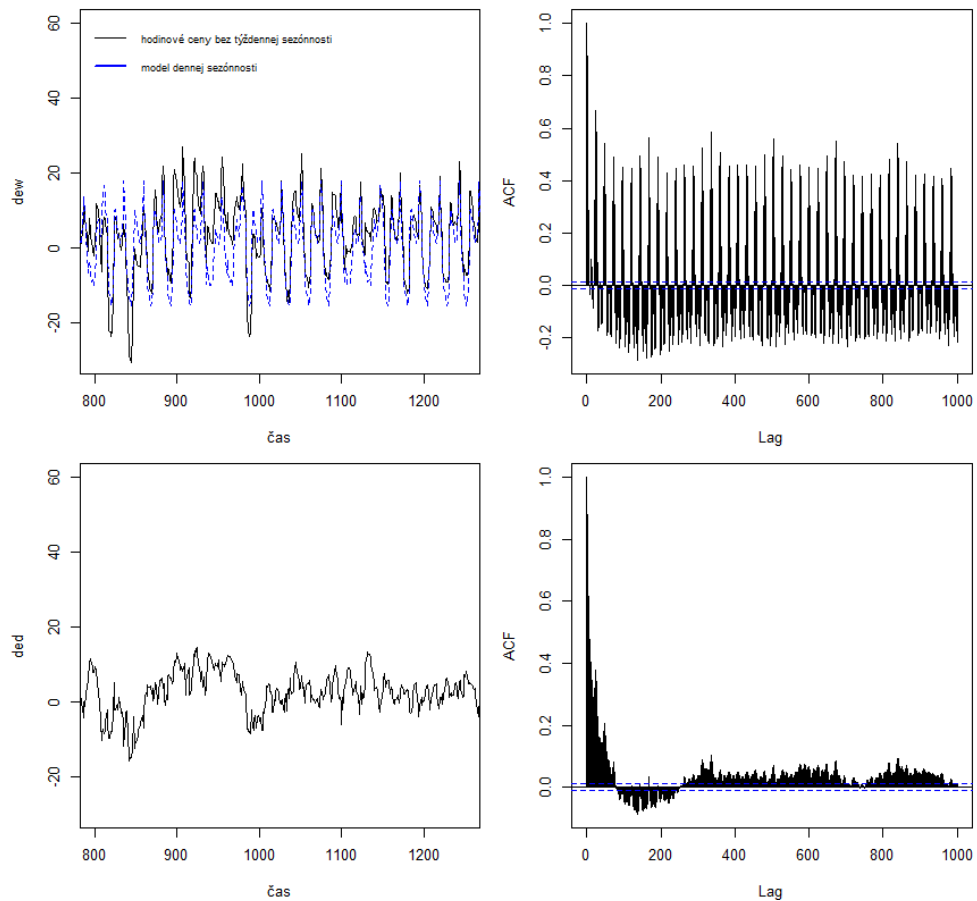
⁶ Sezónnosť sme pridali podľa vzťahu (1).



Obr. 14 Faktory f2yd a kľavý priemer troch týždňov



Obr. 15 Spotové ceny bez ročnej sezónnosti s krivkou lineárneho modelu 6 dummy premenných a spotové ceny po odstránení týždennej sezónnosti



Obr. 16 Spotové ceny bez týždennej sezónnosti s krivkou lineárneho modelu dennej sezónnosti a výsledný stochastický komponent

Tab. 5 Výsledky lineárnych modelov ročnej a týždennej sezónnosti

Parameter	Odhad	Št. chyba	t-štatistika	p-hodnota
a	1.000 1	0.008 3	121.133 0	$<2e-16$
b_{11}	0.047 8	0.011 7	4.098 0	4.48E-05
b_{12}	-0.034 9	0.011 7	-2.990 0	0.002 9
b_{13}	-0.048 3	0.011 7	-4.138 0	3.78E-05
b_{21}	-0.070 0	0.011 7	-5.991 0	2.82E-09
b_{22}	0.043 7	0.011 7	3.741 0	0.000 2
c	37.414 3	0.504 8	74.120 0	$<2e-16$
d_1	1.835 3	0.712 7	2.575 0	0.010 2
d_2	1.552 0	0.712 7	2.177 0	0.029 7
d_3	1.057 5	0.712 7	1.484 0	0.138 2

d_4	-0.342 8	0.713 9	-0.480 0	0.631 2
d_5	-8.095 5	0.713 9	-11.340 0	<2e-16
d_6	-15.745 1	0.713 9	-22.056 0	<2e-16

Tab. 6 Výsledky lineárnych modelov dennej sezónnosti

Model	Popis modelu	R ²	Počet štat. významných parametrov
1	Pracovný deň Jan	0.4976	21
2	Pracovný deň Feb	0.6730	21
3	Pracovný deň Mar	0.6271	21
4	Pracovný deň Apr	0.4714	22
5	Pracovný deň Máj	0.4905	24
6	Pracovný deň Jún	0.6143	24
7	Pracovný deň Júl	0.3771	22
8	Pracovný deň Aug	0.3789	22
9	Pracovný deň Sep	0.6216	21
10	Pracovný deň Okt	0.5423	20
11	Pracovný deň Nov	0.6737	19
12	Pracovný deň Dec	0.3797	18
13	Sobota Zima	0.3519	15
14	Sobota Jar	0.3193	16
15	Sobota Leto	0.3746	18
16	Sobota Jeseň	0.3879	17
17	Nedeľa Zima	0.4799	22
18	Nedeľa Jar	0.4833	16
19	Nedeľa Leto	0.4865	22
20	Nedeľa Jeseň	0.4600	18

Tab. 7 Odhady parametrov modelov stochastického komponentu

Stredný režim				
θ	0.009 8			
κ	0.129 2			
σ	3.967 2			
	Model 1 (u)	Model 2 (u)	Model 3 (u)	CKLS (u)
κ^u	.	0.364 1	0.381 9	0.353 5
σ^u	8.082 6	11.944 4	6.764 6	10.060 5
γ^u	.	.	.	0.093 1
	Model 1 (d)	Model 2 (d)	Model 3 (d)	CKLS (d)
κ^d	.	0.167 1	0.195 4	0.162 9
σ^d	4.280 5	6.108 8	5.119 7	4.905 1
γ^d	.	.	.	0.118 0

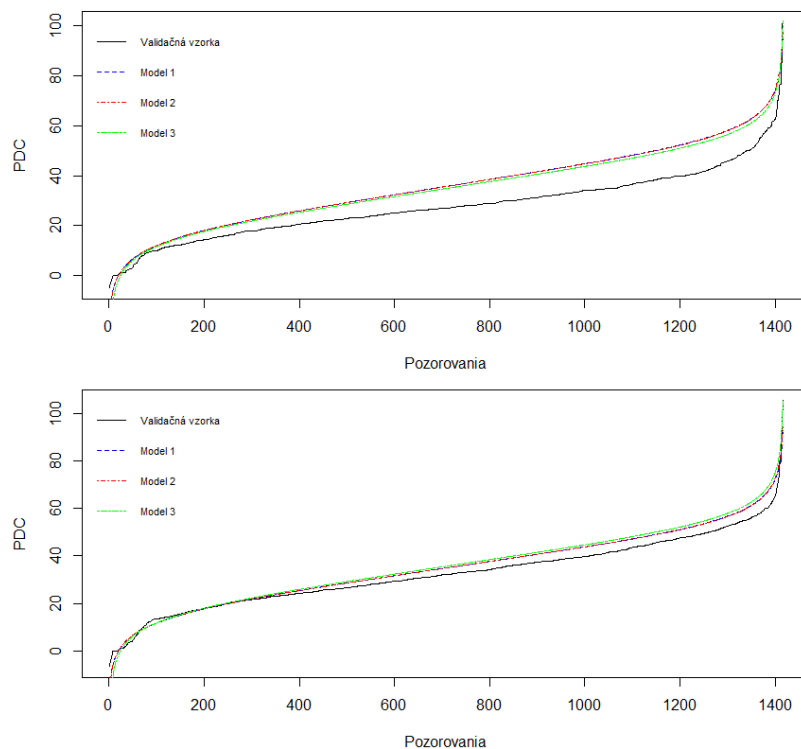
Tab. 8 Priemer a štandardná odchýlka pre hodnoty ukazovateľov MAE a RMSE 1 000 simulácií cien jednotlivých modelov. Posledné tri riadky obsahujú hodnoty pre dáta zoradené podľa výšky cien, t.j. PDC

	MAE	št. odch. MAE	RMSE	št. odch. RMSE
Model 1	13.848 4	0.827 1	17.421 3	1.042 1
Model 2	13.844 2	0.840 4	17.465 4	1.059 6
Model 3	13.023 5	0.803 8	16.453 7	1.028 1
Model 1 (PDC)	8.101 4	1.086 3	8.866 8	1.078 5
Model 2 (PDC)	8.090 9	1.125 6	8.846 8	1.110 1
Model 3 (PDC)	7.343 3	1.119 9	8.030 5	1.119 5

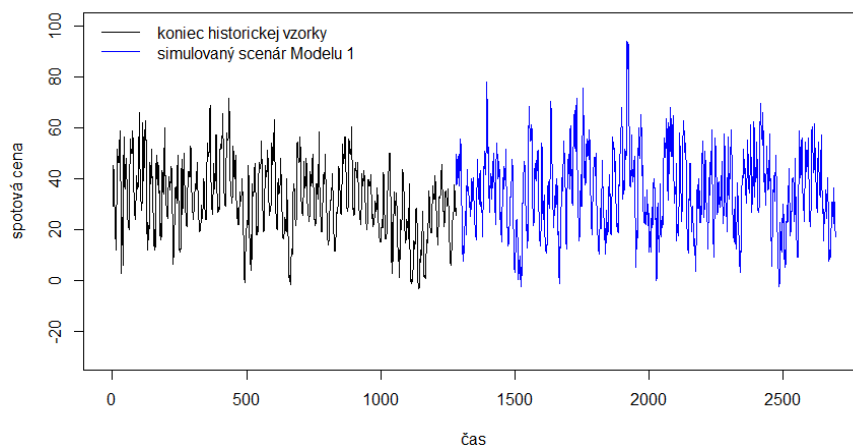
Tab. 9 Priemer a štandardná odchýlka pre hodnoty ukazovateľov MAE a RMSE 1 000 simulácií cien bez ročnej sezónnosti jednotlivých modelov. Posledné tri riadky obsahujú hodnoty pre dáta zoradené podľa výšky cien, t.j. PDC

	MAE	št. odch. MAE	RMSE	št. odch. RMSE
Model 1	11.282 7	0.666 8	14.622 4	0.894 3

Model 2	11.290 9	0.689 5	14.683 4	0.929 5
Model 3	11.598 2	0.690 7	15.476 3	1.065 0
Model 1 (PDC)	2.917 5	0.858 9	3.482 9	0.906 0
Model 2 (PDC)	2.903 2	0.877 4	3.480 8	0.929 2
Model 3 (PDC)	3.617 3	0.989 1	4.234 5	1.089 8



Obr. 17 Priemerné PDC jednotlivých modelov a PDC validačnej vzorky (Hore); Priemerné PDC jednotlivých modelov a PDC validačnej vzorky bez ročnej sezónnosti (Dole)



Obr. 18 Simulovaný scenár obdobia 01.01.2016-28.02.2016 spojený s historickými spotovými cenami

Záver

V tejto diplomovej práci sme sa venovali spotovým cenám elektrickej energie. Prvá podkapitola, *1.2 Špecifické vlastnosti cien elektrickej energie*, zhrnula niektoré dôležité vlastnosti spotových cien, ktorými sa líšia od cien iných komodít. Sústredili sme sa hlavne na problém uskladnenia elektrickej energie, na nízku elasticitu dopytu, na tendenciu cien pohybovať sa v blízkosti dlhodobého priemeru, na dôvody za komplexnou sezónnosťou a na náhle skoky v cenovej hladine. Popísali sme ich na základe úvodných kapitol niektorých prác venujúcich sa nemeckému trhu, napr. [1, 8, 14].

V druhej kapitole sme sa zamerali na očistenie stochastického komponentu časového radu od trendu a sezónnosti. V podkapitole *2.1 Ročná sezónnosť* sme objavili, že ročná sezónnosť v slovenských spotových cenách, na rozdiel od niektorých zahraničných trhov, je ťažko badateľná, viď Obr. 2. Rozhodli sme sa preto odhadnúť lineárny regresný model pre účely budúcich odhadov, ktorý na vzor postupu práce [1] ako vysvetľujúce premenné používa goniometrické funkcie času. Následne sme trend odstránili pomocou centrovaného kľzavého priemeru 21 dní, čím sme časový rad dostatočne vyrovnali. V prípade týždennej sezónnosti sme znovu použili jednu z metód navrhnutých v práci [1] a tento komponent sme modelovali lineárnym modelom šiestich dummy premenných jednotlivých dní v týždni. Dennú sezónnosť sme modelovali podobne pomocou 23 dummy premenných, pričom sme, opäť na vzor práce [1], rozdelili rok na 20 kategórii (viď Tab. 2). Odstránenie ročného trendu a následne aj týždennej a dennej sezónnosti podľa vzťahu (1) postupne znížil periodický charakter časového radu, čo vidíme aj na autokorelačných funkciách na Obr. 15 a Obr. 16. Získali sme tým pádom stochastický komponent pre ďalšiu analýzu. Parametre sme odhadovali metódou najmenších štvorcov.

Najrozsiahlejšou kapitolou bola tretia. V podkapitole *3.1 Teoretický základ modelov* sme postupne zhrnuli teóriu za jump-diffusion procesmi, mean reversion procesmi a modelmi s Markovovým prepínaním režimov. Čerpali sme najmä z prác [7, 9, 10, 13, 21]. V podkapitole *3.1.3 Odhad parametrov mean reversion procesov* sme odvodili bežne používané analytické vzťahy pre odhad parametrov Vašíčkovho modelu pomocou maximálnej vierohodnosti. V prípade parametrov CIR modelu sme si zvolili Nowmanov prístup, viď (10) a (14).

Pokračovali sme odvodením skokových modelov na základe vyššie uvedenej teórie a postupov v niektorých zahraničných prácach. Odborná literatúra najviac používa mean reversion procesy so skokmi. Ďalej sme budovali najmä na myšlienkach uvedených napr.

v prácach [4, 6, 8, 17, 22, 23]. Podobne, ako autori [8], extrémne vysoké a nízke cenové hladiny trvajúce niekoľko hodín sme interpretovali ako hladiny, ktoré dočasne nahradia dlhodobý priemer cien tvorený marginálnymi nákladmi na výrobu jednotky elektrickej energie. Na vzor prác [8, 12] sme z časového radu iteratívne vyfiltrovali ceny, ktoré prekročili vzdialenosť 2,5-násobku štandardnej odchýlky cien od dlhodobého priemeru a doplnili ich lineárnou interpoláciou. Filtrovaný časový rad sme označili ako stredný režim, vysoké a nízke ceny ako horný, resp. dolný režim. Na rozdiel od iných prác, namiesto zmien sme sa zamerali na rozdelenie samotných cien v hornom a dolnom režime a v podkapitole 33.2.2 *Horný a dolný režim* sme zistili, že ich je možné simulovať exponenciálnym rozdelením. Podobne je to aj v práci [8], tam sa však v hornom a dolnom režime iba pripočítava, resp. odčítava náhodná premenná z normálneho rozdelenia od procesu stredného režimu. Na vzor prác [17, 22] a procesu (17) z práce [23] sme k mean reversion procesu pridali dva nezávislé skokové členy pre skoky nahor a nadol, čím sme získali proces pre stredný režim (18). Skokové členy predstavujú prechod do horného a dolného režimu, pričom výška skoku nezávisí od aktuálnej hladiny ceny v strednom režime pred skokom, iba posunie cenu na novú extrémnu hladinu generovanú z exponenciálneho rozdelenia. Návratu k dlhodobému priemeru zabraňujú parametre horného, resp. dolného režimu, v ktorých nový priemer je rovný prvej hodnote po skoku, t.j. hodnote z exponenciálneho rozdelenia. Túto úpravu stredného režimu (18) sme vyjadrili vzťahom (20). Intenzitu výskytu skokov nahor a nadol sme odhadovali na základe početnosti prechodov medzi režimami a vytvorili sme tri matice prechodu pre rôzne hodiny v kapitole 33.2.3 *Matica prechodu*. Tieto odhady sme vypočítali na základe postupu v [4].

V podkapitole 3.3 *Tri modely s prepínaním režimov* sme popísali tri verzie horného a dolného režimu. V Modeli 1 sme tieto režimy vyjadrili ako martingály. Tým pádom očakávaná hodnota na začiatku úseku je rovná prvej hodnote úseku. Volatilitu procesov sme odhadovali na intervaloch, ktoré trvali aspoň dve hodiny. Bolo to z dôvodu, že zmeny medzi poslednými a prvými hodnotami úsekov by mohli neprirodzene zvýšiť odhad volatility. Podobne sme postupovali aj v prípade zvyšných dvoch modelov. V Modeli 2 sa horný a dolný režim riadia Vašíčkovými modelmi. Obmenou logaritmickej vierohodnostnej funkcie (10) sme získali funkciu (21). Ako sme spomínali vyššie, dočasný priemer predstavuje prvá cena aktuálneho úseku. Odhadovali sme tým pádom iba parametre rýchlosť návratu a volatilita, ktoré boli osobitne pre horný a dolný režim odhadnuté pre celé sledované obdobie. Podobne sme postupovali v prípade Modelu 3, v ktorom režimy predstavovali CIR modely. Odmocnina vo volatilita zabránili tomu, aby

ceny v režimoch prekročili hranicu 2,5-násobku štandardnej odchýlky. Rozhodli sme sa spraviť osobitný odhad, do ktorého sme zahrnuli aj parameter γ .

V poslednej kapitole sme vyhodnotili výsledky modelov sezónnosti a stochastického komponentu. Výsledky lineárnych modelov ročnej, týždennej a dennej sezónnosti sme zhrnuli v Tab. 5 a Tab. 6, resp. na grafoch Obr. 15, Obr. 16. Parametre Modelov 1 až 3 získané metódou maximálnej vierohodnosti sme zhrnuli v Tab. 7. Stredný režim má prirodzene najnižšiu volatilitu. Čo sa týka extrémnych režimov, dolný režim je menej volatilný a vykazuje nižšiu tendenciu ostať v blízkosti dočasného priemeru tvoreného prvou hodnotou úseku v režime. Odhad parametra γ naznačil, že vplyv vzdialenosti stochastického komponentu od dlhodobého priemeru nie je významný. Aby sme porovnali kvalitu simulovaných scenárov týchto modelov, pre všetky tri sme spustili 1 000 scenárov pre obdobie 01.01.2016-28.02.2016 a vypočítali priemer ukazovateľov MAE a RMSE s reálnymi cenami. Poznamenávame, že kým ročný trend sme z časového radu odstránili pomocou klzavého priemeru, pre simulácie sme použili lineárny model goniometrických funkcií času. Zistili sme, že lineárny model ročnej sezónnosti má skutočne problém predpovedať periodickosť v rámci roka. Keďže prvé dva mesiace roku 2016 sa vyznačovali porovnateľne nižšími priermi ako náš časový rad, modely cenovú hladinu nadhodnotili. Odstránením trendu z historických pozorovaní validačnej vzorky klzavým priemerom sme získali porovnateľne lepšie výsledky, vid' Tab. 8 a Tab. 9. Dospeli sme k záveru, že medziročný trend je na Slovensku ťažké modelovať lineárnym modelom. Na druhej strane expertný odhad trendu budúcich spotových cien získaných z externých informácií môže v kombinácii s modelmi stochastickej zložky, týždennej a dennej sezónnosti vytvoriť dôveryhodné simulácie. Testy nepreukázali významný rozdiel medzi našimi tromi modelmi, i keď Model 3 vykázal relatívne slabšie výsledky.

Hlavný prínos našej práce je otvorenie tematiky modelovania slovenských spotových cien elektrickej energie a dôkladná analýza ich sezónnosti a stochastického komponentu. Na rozdiel od iných prác, horný a dolný režim sme interpretovali ako dočasné nahradenie dlhodobého priemeru hodnotou z exponenciálneho rozdelenia. Veľkosti týchto priemerov sme pritom modelovali samotnými cenami namiesto ich zmien. Získali sme modely, ktoré bez medziročného trendu vytvárajú kvalitné simulácie scenárov budúcich cien.

Budúce výskumy sa môžu zamerať na vytvorenie komplexnejších modelov, ktoré uvažujú napr. aj ceny forwardových zmlúv, resp. používajú viacfaktorové modely a Kalmanove filtre. Tieto metódy možno dokázať prispieť k presnejším simuláciám a lepším odhadom medziročného trendu spotových cien elektrickej energie.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Blöchlinger, L., *Power Prices – A Regime-Switching Spot/Forward Price Model with Kim Filter Estimation*, Dissertation, University of St. Gallen, St. Gallen, 2008
- [2] Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A., Sanders, A. B., *An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate*, *Journal of Finance* 47 (1992), no. 3, 1209-1227
- [3] Článok energia komplexne a vecne, *Ako funguje trh s elektrinou na Slovensku*, Dostupné na internete (01.05.2016):
<http://energia.dennikn.sk/dolezite/elektrina-a-elektromobilita/ako-funguje-trh-s-elektρινou-na-slovensku/0749>
- [4] De Jong, C., *Nonlinear Analysis of Electricity Prices*, Working Paper ERIM ERS-2001-48-F&A, Erasmus University Rotterdam, Rotterdam, 2005
- [5] Hamilton, J. D., *A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle*, *Econometrica* 57 (1989), no. 2, 357-384
- [6] Huisman, R., Mahieu, R., *Regime Jumps in Electricity Prices*, Working Paper ERIM ERS-2001-48-F&A, Erasmus University Rotterdam, Rotterdam, 2001
- [7] Janková, K., Kilianová, S., Brunovský, P., Bokes, P., *Markovove reťazce a ich aplikácie*, epos, Bratislava, 2015
- [8] Keles, D., Genoese, M., Möst, D., Fichtner, W., *Comparison of extended mean-reversion and time series models for electricity spot price simulation considering negative prices*, *Energy Economics* 34 (2012), 1012-1032
- [9] Melicherčík, I., Olšárová, L., Úradníček, V., *Kapitoly z finančnej matematiky*, epos, Bratislava, 2005

- [10] Merton, R. C., *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, Journal of Financial Economics 3 (1976), 125-144
- [11] Merton, R. C., *Continuous-Time Finance*, Easil Blackwell, Oxford, 1990
- [12] Nampala, H., *A stochastic mean-reverting jump-diffusion model with multiple mean reversion rates*, Dissertation, University of Dar es Salaam, 2009
- [13] Nowman, K. B., *Gaussian Estimation of Single-Factor Continuous Time Models of The Term Structure of Interest Rates*, Journal of Finance 52 (1997), no. 4, 1695-1706
- [14] Paraschiv, F., *Price Dynamics in electricity markets*, Working Papers on Finance No. 2013/2014, Institute of Operations Research and Computational Finance (IOR/CF – HSG), 2013
- [15] Paraschiv, F., Erni, D., Pietsch, R., *The impact of renewable energies on EEX day-ahead electricity prices*, Energy Policy 73 (2014), 196-210
- [16] R Documentation, *Maximum-likelihood Fitting of Univariate Distributions*, Dostupné na internete (01.05.2016) :
<https://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/MASS/html/fitdistr.html>
- [17] Seifert, J., Uhrig-Homburg, M., *Modelling jumps in electricity prices: theory and empirical evidence*, Review of Derivative Research 10 (2007), 59-85
- [18] Shao, A., *A fast and exact simulation for CIR process*, Dissertation, University of Florida, Gainesville, 2012
- [19] sitmo, *Calibrating the Ornstein-Uhlenbeck (Vasicek) model*, Dostupné na internete (01.05.2016):
<http://www.sitmo.com/article/calibrating-the-ornstein-uhlenbeck-model/>

- [20] Správa energy analytics, *Report: Energetický trh SR 2015*, Dostupné na internete (01.05.2016):
<http://www.energyanalytics.sk/sk/aktualita/190/>
- [21] Ševčovič, D., Stehliková, B., Mikula, K., *Analytical and Numerical Methods For Pricing Financial Derivatives*, Nova Science Publisher, Inc., New York, 2011
- [22] Villaplana, P., *Pricing Power Derivatives: a two-factor jump-diffusion approach*, Working Paper 03-18, Business Economics Series 05, Charles III University of Madrid, Getafe, 2003
- [23] Weron, R., Bierbrauer, M., Trück, S., *Modeling electricity prices: jump diffusion and regime switching*, *Physica A* 336 (2004), 39-48