

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



VYUŽITIE MEIXNEROVHO PROCESU
PRI MODELOVANÍ FINANČNÝCH TRHOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

VYUŽITIE MEIXNEROVHO PROCESU
PRI MODELOVANÍ FINANČNÝCH TRHOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko - finančná matematika a modelovanie

Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci práce: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Ivana Krasulová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Využitie Meixnerovho procesu pri modelovaní finančných trhov
Application of Meixner process in modeling financial markets

Cieľ: V klasickom Black-Scholesovom modeli sa predpokladá normalita rozdelenia výnosov akcií. Štatistické testy však zvyčajne zamietajú túto hypotézu. Meixnerov proces patrí medzi Lévyho procesy. V práci pôjde o preskúmanie možnosti kvalitnejšieho modelovania finančných trhov pomocou tohto procesu.

Vedúci: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 10.02.2015

Dátum schválenia: 11.02.2015
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Abstrakt

KRASULOVÁ, Ivana: *Využitie Meixnerovho procesu pri modelovaní finančných trhov* [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky;

Vedúci diplomovej práce: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2016.

V diplomovej práci sa zaoberáme Lévyho procesmi. Ide o porovnanie Black - Scholesovho modelu a modelu založeného na Meixnerovom procese. Na základe testovania trhových dát, logaritmických výnosov akcií, poukazujeme na nedostatky Black - Scholesovho modelu, ktoré sú odstránené využitím Meixnerovho procesu. Taktiež porovnáваме trhové ceny opcií s cenami získanými pomocou Black - Scholesovho modelu aj modelu s Meixnerovým procesom. Pri Meixnerovom procese sú využité dva prístupy získania ekvivalentnej martingalovej miery.

Kľúčové slová: nekonečne deliteľné rozdelenie, Lévyho procesy, Black - Scholesov model, Meixnerov proces, ekvivalentná martingalová miera, Esscherova transformácia

Abstract

KRASULOVÁ, Ivana: *Application of Meixner process in modeling financial markets* [Master's thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics;
Supervisor: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2016.

The thesis deals with Lévy processes. Compares the Black - Scholes model with the model based on the Meixner process. Based on empirical data testing, the asset log returns, we focus on the imperfections of the Black - Scholes model, which are removed using Meixner process. In the thesis we also compare market option prices with prices of Black - Scholes model and model with Meixner process. Two methods to obtain an equivalent martingale measure are used.

Keywords: infinitely divisible distribution, Lévy processes, Black - Scholes model, Meixner process, Equivalent Martingale Measure, Esscher transform

Obsah

Úvod	8
1 Základné pojmy pri modelovaní finančných trhov	10
1.1 Stochastický proces, filtrácia	10
1.2 Charakteristická funkcia	12
1.3 Ekvivalentná martingalová miera, Oceňovacia formulka	13
1.4 Wienerov proces, Brownov pohyb	14
2 Lévyho procesy	17
2.1 Všeobecné charakteristiky	17
2.2 Vlastnosti Lévyho procesov	20
2.3 Využitie na finančnom trhu	21
3 Black - Scholesov model	23
3.1 Nedostatky Black - Scholesovho modelu	26
3.1.1 Normalita výnosov	27
3.1.2 Stochastická volatilita	32
4 Meixnerovo rozdelenie, Meixnerov proces	34
4.1 Meixnerovo rozdelenie	34
4.2 Kalibrovanie Meixnerovho rozdelenia na reálne dáta	40
4.2.1 Grafické zobrazenie	40
4.2.2 Štatistické testy	43
4.2.3 Simulácia cien podkladového aktíva	43
5 Oceňovanie opcií	46
5.1 Black - Scholesov model	47
5.2 Meixnerov model	48
5.2.1 Esscherova transformácia	50
5.2.2 Ekvivalentná martingalová miera pomocou úpravy driftu	54
5.3 Porovnanie	54
Záver	59

Literatúra

61

Príloha

64

Úvod

V posledných rokoch sa čoraz viac teoretických ale aj praktických prác venuje problematike nesplnených predpokladov najznámejšieho modelu oceňovania, Black - Scholesovho modelu. Model založený na normálnom rozdelení je totiž len slabou aproximáciou reality, keďže logaritmické výnosy finančných dát majú väčšiu špicatosť než je špicatosť normálneho rozdelenia. Taktiež sa častejšie vyskytujú extrémnejšie hodnoty, teda rozdelenie trhových dát je zošikmené.

Práve pre tieto dôležité vlastnosti empirických dát sa začali využívať na modelovanie finančných trhov Lévyho procesy. Zaoberali sa nimi viacerí autori, spomenieme napríklad Cont a Tankov [2], Schoutens [14]. Z týchto prác budeme vychádzať aj v diplomovej práci. Medzi Lévyho procesy patrí aj Meixnerov proces. Vo finančnom svete bol využitý v roku 1999 v práci [6], neskôr v roku 2002 priniesol jeho finančnú aplikáciu v práci [16] aj Schoutens.

Jedným z problémov pri Lévyho procesoch je nejednoznačnosť ekvivalentnej martingalovej miery. Jednou z možností, ako ekvivalentnú martingalovú mieru získať, je Esscherova transformácia, ktorá pochádza už z roku 1932, kedy ju prvýkrát definoval Esscher. Pri oceňovaní finančných derivátov je vhodné využiť definíciu podľa Gerber a Shiu [5] z roku 1994. Konkrétne parametre Esscherovej transformácie pre Meixnerov proces nájdeme napríklad v [6]. Ďalšou možnosťou je ekvivalentná martingalová miera získaná pomocou úpravy driftu. Oba tieto prístupy využijeme v diplomovej práci.

Cieľom diplomovej práce bolo overiť predpoklady Black - Scholesovho modelu na trhových dátach a následne preskúmať možnosti lepšieho modelovania finančných trhov pomocou Meixnerovho procesu.

V prvej kapitole uvedieme základné definície a princípy finančného modelovania. Príjeme vlastnosti Wienerovho procesu, ktorý je základným stochastickým procesom. Druhá kapitola bude zameraná na Lévyho procesy. Priblížime jednak ich spojitost s nekonečne deliteľnými rozdeleniami ale taktiež aj ich vlastnosti. Tretia kapitola bude obsahovať okrem teoretických poznatkov o Black - Scholesovom modeli aj praktické overenie jeho predpokladov na trhových dátach, denných logaritmických výnosoch niekoľkých akcií. V štvrtej kapitole sa budeme venovať Meixnerovmu rozdeleniu a Meixnerovmu procesu, ktorý patrí medzi Lévyho procesy. Popíšeme dve metódy

odhadu parametrov pre Meixnerovo rozdelenie. Pomocou rovnakých metód ako v tretej kapitole otestujeme možnosť kvalitnejšieho modelovania finančných trhov vďaka tomuto procesu. Záverečná, piata kapitola bude obsahovať porovnanie Black - Scholesovho modelu a modelu s Meixnerovým procesom pri oceňovaní európskych kúpnych opcií akcie Yahoo.

1 Základné pojmy pri modelovaní finančných trhov

V prvej kapitole priblížime niekoľko pojmov a základných princípov, ktoré sú dôležité pri modelovaní finančných trhov. Definície a vlastnosti uvedené v tejto kapitole môžeme nájsť v [2], [4], [9], [14], [18].

1.1 Stochastický proces, filtrácia

Definícia 1.1. (σ - algebra) Nech Ω je neprázdna množina a nech $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$. Usporiadanú dvojicu (Ω, \mathcal{F}) nazývame σ - algebra, ak platí:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$
- Ak $(A_i)_{i \in I}$ je postupnosť množín patriacich do systému \mathcal{F} , tak $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$

kde 2^Ω je množina všetkých podmnožín množiny Ω a postupnosťou máme na mysli konečnú alebo nekonečnú spočítateľnú postupnosť. [7]

Uvažujme množinu všetkých pozorovaní Ω a σ - algebru \mathcal{F} . Pri finančnom modelovaní chápeme množinu Ω ako množinu scenárov, ktoré sa môžu na trhu udiť. Napríklad ak chceme modelovať cenu akcie v čase T ako náhodnú premennú X , ktorá je ovplyvnená mnohými faktormi ako sú dopyt a ponuka na trhu, ekonomické indikátory a mnohé ďalšie, vplyv týchto faktorov môžeme celkovo popísať pomocou abstraktnej premennej ω . Budúca cena akcie pri daných udalostiach je teda vyjadrená pomocou $X(\omega)$. Pravdepodobnostná miera \mathbb{P} na (Ω, \mathcal{F}) je funkcia, ktorá každej množine $A \in \mathcal{F}$ nazývanej udalosť, priradí pravdepodobnosť z intervalu $[0, 1]$. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ predstavuje pravdepodobnostný priestor.

Nesmieme však zabúdať na fakt, že postupom času získavame viac informácií, udalosti sú tým jasnejšie. Preto je dôležitý pojem filtrácie.

Definícia 1.2 (Filtrácia). Filtrácia alebo informačný tok na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je neklesajúci systém σ - algebier $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ takých, že

$$0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad (1)$$

(\mathcal{F}_t) je teda informácia prístupná v čase t . Pomocou nej môžeme rozlíšiť, ktoré hodnoty ostávajú stále náhodné a ktoré sa pomocou dostupných informácií stávajú ne-náhodnými. Pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spolu s filtráciou (\mathcal{F}_t) je filtrovaný pravdepodobnostný priestor. Namiesto toho, aby sme s časom menili pravdepodobnostnú mieru, zanecháme ju rovnakú a budeme modelovať dopad informácií podmienením (\mathcal{F}_t) .

Definícia 1.3 (Stochastický proces). Stochastický proces je súbor náhodných premenných $X = \{X_t, 0 \leq t < \infty\} = \{X_t(\omega), 0 \leq t < \infty, \omega \in \Omega\}$ na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s hodnotami v \mathbb{R}^d .

Stochastický proces je funkciou časovej premennej t , ktorá môže byť diskrétna alebo spojitá a premennej ω , ktorá popisuje neurčitost' v tom zmysle, že aj keď je známa počiatočná hodnota procesu, existuje množstvo možností, ako sa môže proces vyvíjať.

- pre t fixné je $X_t(\omega)$ náhodnou premennou, $\omega \in \Omega$ je číslo
- pre fixné ω je $X_t(\omega)$ funkciou času, nazývanou aj trajektória procesu priradená k ω

Špeciálnym typom stochastického procesu je Markovov proces. Pri procesoch s Markovovou vlastnosťou je pre odhad budúcej hodnoty dôležitá iba súčasná hodnota, minulosť sa zabúda resp. je obsiahnutá v súčasnej hodnote.

Definícia 1.4 (Adaptovaný proces). Stochastický proces je \mathcal{F}_t - adaptovaný, ak pre $\forall t \in [0, T]$ hodnota X_t je \mathcal{F}_t - merateľná. t.j. známa v čase t .

Definícia 1.5 (Cadlag funkcia). Funkcia $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ je cadlag funkciou, ak je spojitá sprava a má limitu zľava: $\forall t \in [0, T]$ limity

$$f(t_-) = \lim_{s \rightarrow t, s < t} f(s) \quad f(t_+) = \lim_{s \rightarrow t, s > t} f(s) \quad (2)$$

existujú a $f(t) = f(t_+)$.

Každá spojitá funkcia je Cadlag funkciou.

Definícia 1.6 (Martingal). Cadlag proces $(X_t)_{t \geq 0}$ je martingal vzhľadom k filtrácii $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ a miere \mathbb{P} , ak

- X je \mathcal{F}_t - adaptovaný
- $E[|X_t|]$ je konečná $\forall t \geq 0$
- $\forall s > t, E[X_s | \mathcal{F}_t] = X_t$

Uvažujme funkciu $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a delenie intervalu $\mathcal{D} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$. Označme $||\mathcal{D}|| = \max_{k=0, \dots, n-1} (t_{k+1} - t_k)$.

Definícia 1.7 (Prvá variácia funkcie). Prvá variácia funkcie f vzhľadom na delenie \mathcal{D} je

$$V_{\mathcal{D}}(f) = \lim_{||\mathcal{D}|| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \quad (3)$$

(ak limita existuje).

Ak je $\sup V_{\mathcal{D}}(f) < \infty$, potom má f na $[a, b]$ konečnú variáciu. V opačnom prípade hovoríme, že má nekonečnú variáciu. Stochastický proces má konečnú variáciu, ak majú trajektórie konečnú variáciu s pravdepodobnosťou 1.

1.2 Charakteristická funkcia

Významnú úlohu pri popise náhodnej premennej má charakteristická funkcia. Keďže z jej analytických vlastností vyplývajú vlastnosti náhodnej premennej. Charakteristická funkcia zároveň jednoznačne identifikuje rozdelenie náhodnej premennej, dve náhodné premenné s rovnakou charakteristickou funkciou sú rovnako rozdelené.

Definícia 1.8 (Charakteristická funkcia). Charakteristická funkcia náhodnej premennej v \mathbb{R}^d je funkcia $\phi_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná ako

$$\forall z \in \mathbb{R}^d \quad \phi_X(z) = E[e^{izX}] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{izX} dF(x) \quad (4)$$

pričom $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Charakteristická funkcia spĺňa $\phi(0) = 1, |\phi(z)| = 1 \forall z \in \mathbb{R}^d$ a je vždy spojitá.

1.3 Ekvivalentná martingalová miera, Oceňovacia formulka

Definícia 1.9 (Absolútna spojitosť). Nech \mathbb{P} a \mathbb{Q} sú pravdepodobnostné miery na (Ω, \mathcal{F}) . Potom \mathbb{Q} je absolútne spojitá vzhľadom na \mathbb{P} , $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$, vtedy a len vtedy, ak

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Definícia 1.10 (Ekvivalentné pravdepodobnostné miery). Nech \mathbb{P} a \mathbb{Q} sú pravdepodobnostné miery na (Ω, \mathcal{F}) . Ak \mathbb{Q} je absolútne spojitá vzhľadom na \mathbb{P} a \mathbb{P} je absolútne spojitá vzhľadom na \mathbb{Q} , potom \mathbb{P} a \mathbb{Q} sú ekvivalentné pravdepodobnostné miery, $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$.

Definícia 1.11 (Ekvivalentná martingalová miera). Pravdepodobnostná miera \mathbb{Q} je ekvivalentnou martingalovou mierou, ak

- \mathbb{Q} je ekvivalentná vzhľadom k \mathbb{P}
- diskontovaný proces ceny akcie $\{e^{-rt}S_t\}, t \geq 0$ je martingalom pri \mathbb{Q}

Existencia ekvivalentnej martingalovej miery implikuje trh bez arbitrážnej príležitosti. Trh je úplný, pokiaľ pre každý derivát existuje samofinancovaná stratégia, ktorá ho replikuje. Úplnosť trhu je spojená s jednoznačnosťou ekvivalentnej martingalovej miery. Napríklad v prípade Black - Scholesovho modelu existuje jediná ekvivalentná martingalová miera. Avšak vo väčšine modelov je trieda ekvivalentných mier väčšia. Pokiaľ existuje viac ako jedna ekvivalentná miera trh je neúplný.

Definícia 1.12 (Radon - Nikodymova derivácia). Nech \mathbb{P} a \mathbb{Q} sú pravdepodobnostné miery na (Ω, \mathcal{F}) také že $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Potom existuje jediná nezáporná funkcia $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ spĺňajúca

- Z je \mathcal{F} - merateľná
- $\mathbb{Q}(A) = \int_A Z(x) d\mathbb{P}(x) \quad \forall A \in \mathcal{F}$
- $\mathbb{Q}(A) < \infty$

Potom

$$Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \tag{5}$$

je Radon - Nikodymova derivácia \mathbb{Q} vzhľadom na \mathbb{P} .

Definícia 1.13 (Oceňovacia formulka európskych opcií). Uvažujme výplatnú funkciu derivátu v čase expirácie ako $G(\{S_t, 0 \leq t \leq T\})$. Pri európskych kúpnych opciách platí $G(\{S_t, 0 \leq t \leq T\}) = G(S_T) = (S_T - K)^+$, kde K predstavuje realizačnú cenu (strike price). Bezarbitrážna cena derivátu v čase t je

$$V_t = E_{\mathbb{Q}} [e^{-r(T-t)} G(\{S_u, 0 \leq u \leq T\}) | \mathcal{F}_t] \quad (6)$$

pričom \mathbb{Q} je ekvivalentná martingalová miera.

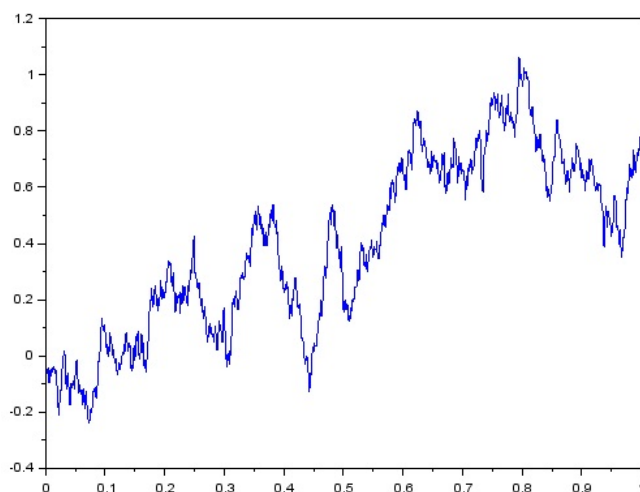
1.4 Wienerov proces, Brownov pohyb

Na zachytenie stochastického vývoja podkladových aktív sa využívajú Markovove náhodné procesy, medzi ktoré patrí aj Wienerov proces. Ten si popíšeme v tejto časti spolu s Brownovým pohybom, ktorý je jeho zovšeobecnením.

Definícia 1.14 (Wienerov proces). Stochastický proces $W = \{W_t, t \geq 0\}$ je Wienerov proces na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ak spĺňa

- s pravdepodobnosťou 1 sú trajektórie $W_t(\omega)$ spojité
- $W_0 = 0$
- náhodná premenná W_t má normálne rozloženie $N(0, t)$
- $W_{t+s} - W_s$ má $N(0, t)$ rozdelenie a prírastky $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ sú nezávislé pre $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$

Z poslednej vlastnosti Wienerovho procesu vyplýva, že je Markovovým procesom. Zároveň je Wienerov proces príkladom Lévyho procesov, ktoré si bližšie predstavíme v nasledujúcej kapitole.



Obr. 1: Wienerov proces

Girsanovova veta

Nech $W_t(\omega)$, je Wienerov proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nech $\gamma_t(\omega)$ je \mathcal{F}_t^W - adaptovaný proces, pre ktorý

$$E_{\mathbb{P}} \left(\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right) \right) < \infty. \quad (7)$$

Potom existuje miera \mathbb{Q} na (Ω, \mathcal{F}) taká, že

- $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$
- $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega) = \exp \left(- \int_0^T \gamma_t(\omega) dW_t(\omega) - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2(\omega) dt \right)$
- $\widetilde{W}_t(\omega) = W_t(\omega) + \int_0^t \gamma_s(\omega) ds$ je Wienerov proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$.

Definícia 1.15 (Brownov pohyb). Nech $W = \{W_t, t \geq 0\}$ je Wienerov proces. Pojmom Brownov pohyb sa označuje proces

$$B_t = \mu t + \sigma W_t \quad t \geq 0 \quad (8)$$

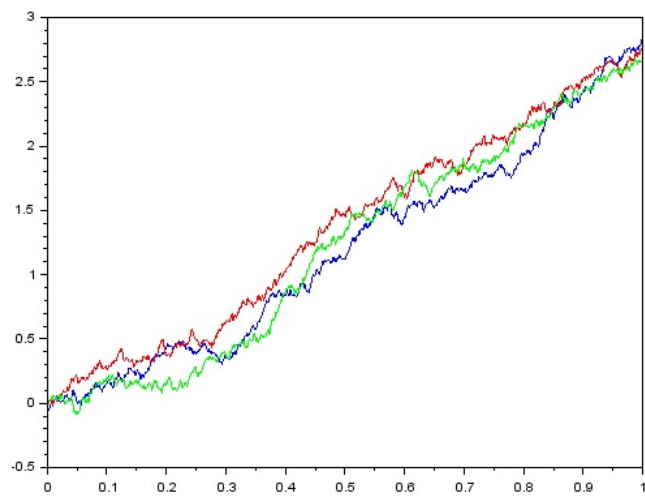
kde μ a $\sigma > 0$ sú konštanty.

Wienerov proces je teda Brownovým pohybom s driftom $\mu = 0$ a volatilitou $\sigma = 1$.

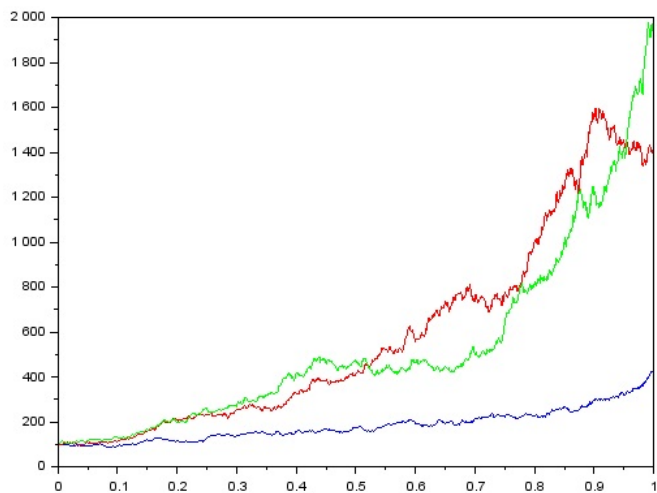
Definícia 1.16 (Geometrický Brownov pohyb). Nech $B = \{B_t, t \geq 0\}$ je Brownov pohyb s parametrami μ a σ , nech $Y_0 > 0$. Potom proces

$$Y_t = Y_0 e^{B_t} \quad t \geq 0 \quad (9)$$

je Geometrický Brownov pohyb.



Obr. 2: Brownov pohyb, $\mu = 3$; $\sigma = 0.5$



Obr. 3: Geometrický Brownov pohyb, $\mu = 3$; $\sigma = 0.5$; $Y_0 = 100$

2 Lévyho procesy

Lévyho procesy nesú názov podľa jedného zo zakladateľov modernej teórie stochastických procesov, francúzskeho matematika Paula Lévyho (1886 - 1971). Lévy taktiež významne prispel v štúdiu teórie pravdepodobnosti, zaoberal sa napríklad Zákonom veľkých čísel, Centrálnou limitnou vetou a najmä procesmi s nezávislými a stacionárnymi prírastkami. [12]

Využívajú sa v rôznych odvetviach, či už je to fyzika, strojárstvo, aktuárstvo, ekonomika a samozrejme finančná matematika. Práve vo finančnej matematike našli Lévyho procesy významné uplatnenie, keďže vďaka svojim vlastnostiam dokážu lepšie zachytiť empirické dáta finančného trhu. Modely so skokmi totiž umožňujú realistickejšie zachytenie dynamiky cien na trhu a väčšiu flexibilitu. [11].

Pri spracovaní kapitoly o Lévyho procesoch sme vychádzali z [2], [4], [11], [13].

2.1 Všeobecné charakteristiky

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ je filtrovaný pravdepodobnostný priestor a $T \in [0, \infty]$ je časový horizont.

Definícia 2.1 (Lévyho proces). Cadlag adaptovaný stochastický proces s reálnymi hodnotami $L = \{L_t, 0 \leq t \leq T\}$ kde $L_0 = 0$ je Lévyho procesom, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

- L má nezávislé prírastky, t.j. $L_t - L_s$ je nezávislé na \mathcal{F}_s pre všetky $0 \leq s < t \leq T$
- L má stacionárne prírastky, t.j. pre $0 \leq s, t \leq T$ rozdelenie $L_{t+s} - L_t$ nezávisí na t
- L je spojitý v pravdepodobnosti, t.j. pre $t \geq 0$ a $\forall \epsilon > 0$;

$$\lim_{s \rightarrow t} P(|L_t - L_s| > \epsilon) = 0$$

Prvá a druhá podmienka implikujú, že Lévyho proces je Markovov proces. Lévyho procesy sú dôsledkom takmer istej spojitosti trajektórií sprava aj Silnými Markovovými procesmi.

Tretia podmienka vylučuje procesy so skokmi vyskytujúcimi sa v nenáhodných časoch, nehovorí o spojitosti trajektórií. V danom čase t je pravdepodobnosť výskytu skoku nulová, pretože skoky sa v Lévyho procesoch vyskytujú v náhodných časoch.

Medzi Lévyho procesy patrí napríklad lineárny drift (deterministický proces), ale aj Brownov pohyb, ktorý je jediným nedeterministickým Lévyho procesom so spojitými trajektóriami. Na Brownovom pohybe (a teda normálnom rozdelení) je postavený Black-Scholesov model, ktorý si bližšie popíšeme v nasledujúcej kapitole.

Trieda Lévyho procesov je veľmi bohatá. Dokazuje to spojitosť Lévyho procesov s nekonečne deliteľnými rozdeleniami, ktorú si teraz ukážeme.

Definícia 2.2 (Nekonečne deliteľné rozdelenie). Rozdelenie P_X náhodnej premennej X je nekonečne deliteľné, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existujú i.i.d. (nezávislé rovnako rozdelené) náhodné premenné $X_1^{(1/n)}, \dots, X_n^{(1/n)}$ tak, že

$$X \stackrel{d}{=} X_1^{(1/n)} + \dots + X_n^{(1/n)} \quad (10)$$

teda platí rovnosť v rozdelení.

Resp. alternatívna definícia cez charakteristickú funkciu.

Definícia 2.3 (Nekonečne deliteľné rozdelenie). Rozdelenie P_X náhodnej premennej X je nekonečne deliteľné, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existuje náhodná premenná $X^{(1/n)}$ tak, že

$$\phi_X(u) = (\phi_{X^{(1/n)}}(u))^n \quad (11)$$

Uvedieme tri jednoduché príklady nekonečne deliteľných rozdelení, pričom využijeme definíciu pomocou charakteristickej funkcie.

Normálne rozdelenie

Nech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} \varphi_X(u) &= \exp\left(iu\mu - \frac{1}{2}u^2\sigma^2\right) = \exp\left(n\left(iu\frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}u^2\frac{\sigma^2}{n}\right)\right) = \exp\left(iu\frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}u^2\frac{\sigma^2}{n}\right)^n \\ &= (\varphi_{X^{(1/n)}}(u))^n \end{aligned}$$

a $X^{(1/n)} \sim N\left(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Poissonovo rozdelenie

Nech $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &= \exp(\lambda(e^{iu} - 1)) = \exp\left(\frac{\lambda}{n}(e^{iu} - 1)\right)^n \\ &= (\varphi_{X^{(1/n)}}(u))^n\end{aligned}$$

a $X^{(1/n)} \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$

Meixnerovo rozdelenie

Nech $X \sim \text{Meixner}(a, b, d, m)$

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &= e^{miu} \left(\frac{2\cos(b/2)}{\cosh((au - ib)/2)}\right)^{2d} = e^{n(\frac{m}{n}iu)} \left(\left(\frac{2\cos(b/2)}{\cosh((au - ib)/2)}\right)^{2\frac{d}{n}}\right)^n \\ &= (\varphi_{X^{(1/n)}}(u))^n\end{aligned}$$

a $X^{(1/n)} \sim \text{Meixner}\left(a, b, \frac{d}{n}, \frac{m}{n}\right)$

Veta 2.1 (Lévy - Khintchine reprezentácia). Nech je D nekonečne deliteľné rozdelenie.

Potom môže byť charakteristická funkcia vyjadrená ako

$$\phi_D(u) = e^{\psi(u)} \quad u \in \mathbb{R} \quad (12)$$

kde ψ je charakteristický exponent

$$\psi(u) = i\gamma u - \frac{u^2\sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1 - iux1_{|x|\leq 1})\nu(dx) \quad (13)$$

pričom $\gamma \in \mathbb{R}$ a ν je miera spĺňajúca

$$\int_{-1}^1 x^2\nu(dx) < \infty \quad \int_{|x|\geq 1} \nu(dx) < \infty$$

Trojica (γ, σ^2, ν) sa nazýva Lévyho alebo charakteristická trojica. γ je drift, σ Gaussovský alebo rozptylový koeficient a ν je miera na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nazývaná Lévyho miera. Spĺňa $\nu(\{0\}) = 0$ a udáva očakávaný počet skokov určitej veľkosti v danom časovom intervale dĺžky t . Zároveň hovorí o konečnosti momentov Lévyho procesu.

Definícia 2.4 (Lévyho miera). Ak je Lévyho miera v tvare

$$\nu(dx) = u(x)dx \quad (14)$$

potom $u(x)$ je Lévyho hustota.

Uvažujme Lévyho proces $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$, $n \in \mathbb{N}$, pre ľubovoľné $0 \leq t \leq T$

$$L_t = L_{\frac{t}{n}} + (L_{\frac{2t}{n}} - L_{\frac{t}{n}}) + \dots + (L_t - L_{\frac{(n-1)t}{n}}) \quad (15)$$

berúc do úvahy nezávislosť a stacionaritu prírastkov Lévyho procesu, rozdelenie náhodnej premennej L_t je nekonečne deliteľné.

Pre každý Lévyho proces platí

$$E[e^{uiL_1}] = e^{t\psi(u)} \quad (16)$$

$$= \exp \left\{ t \left(i\gamma u - \frac{u^2\sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1 - iux1_{|x| \leq 1}) \nu(dx) \right) \right\} \quad (17)$$

kde $\psi(u) := \psi_1(u)$ je Lévyho exponent L_1 , náhodnej premennej s nekonečne deliteľným rozdelením.

Videli sme, že každý Lévyho proces je spojený s nekonečne deliteľným rozdelením, taktiež to platí aj opačne. Teda pre každé nekonečne deliteľné rozdelenie existuje Lévyho proces [4].

2.2 Vlastnosti Lévyho procesov

Vlastnosť 2.1. Nech L je Lévyho proces s charakteristickou trojicou (γ, σ^2, ν)

- ak $\nu(\mathbb{R}) < \infty$, tak takmer všetky trajektórie L majú na každom kompaktnom intervale konečný počet skokov, Lévyho proces má konečnú aktivitu
- ak $\nu(\mathbb{R}) = \infty$, tak takmer všetky trajektórie L majú na každom kompaktnom intervale nekonečný počet skokov, Lévyho proces má nekonečnú aktivitu

Vlastnosť 2.2. Nech L je Lévyho proces s charakteristickou trojicou (γ, σ^2, ν)

- Nech $\sigma = 0$ a $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$, tak takmer všetky trajektórie L majú konečnú variáciu
- Nech $\sigma \neq 0$ alebo $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) = \infty$, tak takmer všetky trajektórie L majú nekonečnú variáciu

Vlastnosť 2.3. Nech L je Lévyho proces s charakteristickou trojicou (γ, σ^2, ν) , potom

- L_t má konečný p -ty moment pre $p \in \mathbb{R}^+$ $E|L_t|^p < \infty$ vtedy a len vtedy, ak $\int_{|x| \geq 1} |x|^p \nu(dx) < \infty$

- L_t má konečný p -ty exponenciálny moment pre $p \in \mathbb{R}$ $E[e^{pL_t}] < \infty$ vtedy a len vtedy, ak $\int_{|x| \geq 1} e^{px} \nu(dx) < \infty$

Z vlastností vyplýva, že variácia Lévyho procesu závisí od malých skokov (a Brownovho pohybu), vlastnosti momentov od veľkých skokov a aktivita závisí od všetkých skokov procesu.

Vlastnosť 2.4. Nech $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ je Lévyho proces s charakteristickou trojicou (γ, σ^2, ν) , pre $u \in \mathbb{R}$ $\int_{|x| \geq 1} e^{ux} \nu(dx) < \infty$ a κ je kumulant L_1 , t.j. $\kappa(u) = \log E[e^{uL_1}]$.

Potom proces

$$M_t = \frac{e^{uL_t}}{e^{t\kappa(u)}} \quad (18)$$

je martingal.

2.3 Využitie na finančnom trhu

Uvažujme proces ceny akcie

$$S_t = S_0 e^{L_t} \quad 0 \leq t \leq T \quad (19)$$

kde L_t je Lévyho proces s charakteristickou trojicou (γ, σ^2, ν) pri ekvivalentnej martingalovej miere \mathbb{Q} . Logaritmické výnosy $\log\left(\frac{S_{t+s}}{S_t}\right)$ majú rozdelenie prislúchajúce prírastkom Lévyho procesu L_t dĺžky s . Keďže $L_0 = 0$, $S_0 = S_0 e^{L_0} = S_0$.

Avšak tým, že využívame Lévyho proces, trh nie je úplný, a teda neexistuje len jedna ekvivalentná martingalová miera. Výnimkou sú iba modely s normálnym alebo Poissonovým rozdelením. [11] V piatej kapitole však ukážeme dva možné prístupy, ako môžeme ekvivalentnú martingalovú mieru získať.

Pri oceňovaní európskych kúpnych opcí s Lévyho procesmi sa dajú použiť viaceré metódy. Je to jednak metóda transformácií, ďalej parciálna integrálno - diferenciálna rovnica a metóda Monte Carlo. Metóda transformácií je najjednoduchšou a najrýchlejšou metódou, nevýhodou však je, že oceňovanie exotických derivátov nie je tak jednoduché. Metóda využíva Fourierovu resp. Laplaceovu transformáciu, následne sa integrály dajú numericky veľmi rýchlo vypočítať. Pri parciálnej integrálno - diferenciálnej rovnici najskôr rovnicu odvodíme, potom ju numericky riešime. Výhodou oproti metóde transformácií je, že sa dajú uvažovať aj komplikovanejšie výplatné funkcie (payoffy), avšak nevýhodou je výpočtová náročnosť oproti predchádzajúcej metóde. Metóda Monte

Carlo simulácií je najvýhodnejšia z pohľadu rozmanitosti derivátov, ktoré môžu byť jednoducho oceňované, avšak práve pri tejto metóde je výpočtová náročnosť najväčšia resp. metóda je najpomalšia. Podstatou metódy je nasimulovať cenu aktíva v čase T , $S_T = S_0 e^{L_T}$, S_{T_k} , $k = 1, \dots, N$ sú jednotlivé simulácie. Cena európskej kúpnej akcie $C_T(S, K)$ je odhadnutá ako priemerná cena $\widehat{C}_T(S, K)$ a zo Zákona veľkých čísel vyplýva

$$\widehat{C}_T(S, K) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} C_T(S, K) \quad (20)$$

V nasledujúcich dvoch kapitolách sa budeme bližšie venovať najskôr Black - Scholesovmu modelu, ktorý je založený na Brownovom pohybe a potom v štvrtej kapitole Meixnerovmu procesu. Pri oboch si najskôr bližšie popíšeme ich vlastnosti, jednak Lévyho charakteristiky, charakteristickú funkciu aj nekonečne deliteľné rozdelenie, ktoré je s daným procesom spojené. Taktiež budeme modelovať denné logaritmické výnosy akcií pomocou týchto dvoch modelov.

3 Black - Scholesov model

V tejto kapitole najskôr popíšeme najpoužívanejší model oceňovania finančných derivátov, Black - Scholesov model. Potom sa zameriame na jeho nedostatky, ktoré si overíme na trhových dátach. Pri spracovaní tretej kapitoly sme čerpali z [9], [13], [14],[18].

Najznámejším a najviac používaným modelom je Black - Scholesov model (ďalej len BS model), ktorého základom je Geometrický Brownov pohyb. Dá sa povedať, že dosiaľ žiadny iný model nie je tak populárny a využívaný ako BS model, čo sa týka teórie aj praktického využitia. Modely ktoré lepšie zachytávajú realitu finančného trhu sú zložitejšie v zmysle väčšieho počtu parametrov, tým sa však stávajú náročnejšími aj pri výpočtoch a kalibrácii.

Nech je $S = \{S_t, t \geq 0\}$ proces ceny akcie. Ak označíme zmenu ceny akcie počas krátkého časového intervalu Δt ako $\Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t$, potom výnos za tento interval je $\frac{\Delta S_t}{S_t}$. Dá sa očakávať, že sa výnos skladá zo systematickej a náhodnej časti. μ je parameter predstavujúci priemerný výnos akcie a σ popisuje, ako veľmi cena akcie kolíše, teda volatilitu. Náhodnosť je zachytená pomocou Wienerovho procesu W_t . Zmena ceny akcie je teda

$$\Delta S_t = S_t(\mu\Delta t + \sigma\Delta W_t) \quad S_0 > 0 \quad (21)$$

a pre $\Delta t \rightarrow 0$ máme stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0 \quad (22)$$

ktorá má riešenie v tvare

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right) \quad (23)$$

Tento (exponenciálny) funcionál Brownovho pohybu je Geometrický Brownov pohyb. Platí aj

$$\log S_t - \log S_0 = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t. \quad (24)$$

Z vlastností Brownovho pohybu vyplýva, že logaritmický výnos má normálne rozdelenie $N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$. Toto je základným kameňom BS modelu.

Keďže Brownov pohyb patrí medzi Lévyho procesy, uvedieme základné charakteristiky tohto procesu aj z pohľadu vlastností a charakteristík Lévyho procesov, ktoré sme uviedli v druhej kapitole. Využijeme označenie $\tilde{\mu} = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$. Hustota príslušného rozdelenia, normálneho rozdelenia, je

$$f_L(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \tilde{\mu})^2}{2\sigma^2}\right], \quad (25)$$

charakteristická funkcia má tvar

$$\phi_L(u) = \exp\left[i\tilde{\mu}u - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right], \quad (26)$$

kanonický rozklad L je

$$L_t = \tilde{\mu}t + \sigma W_t \quad (27)$$

a Lévyho charakteristiky sú $(\tilde{\mu}, \sigma^2, 0)$. Brownov pohyb nemá monotónne trajektórie a tie majú neohraničenú variáciu na konečných časových intervaloch. [8]

Ako sme už uviedli v druhej kapitole, pri BS modeli je trh úplný, existuje teda jediná ekvivalentná martingalová miera \mathbb{Q} . Z Girsanovej vety vyplýva, že aj v rizikovo neutrálnej miere vývoj ceny akcie sleduje Geometrický Brownov pohyb. V rizikovo neutrálnom svete sa σ - parameter volatility nemení, mení sa však drift. Využívajúc prístup získania ekvivalentnej martingalovej miery tzv. Mean - correcting equivalent martingale measure, teda len úpravou driftu, dostávame proces ceny akcie v tvare

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right) \quad (28)$$

kde $r > 0$ je spojitá miera úročenia dlhopisu a $q \geq 0$ je dividendová miera.

V nasledujúcej časti najskôr uvedieme Black - Scholesovu parabolickú parciálnu diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje vývoj ceny derivátu ako funkciu ceny podkladového aktíva a času do expirácie. Taktiež explicitné formuly na oceňovanie vanilla opcií, teda kúpnych opcií a opcií na predaj európskeho typu.

Black - Scholesova parciálna diferenciálna rovnica na oceňovanie derivátov akcií (29) môže byť odvodená pomocou samofinancovanej stratégie tvorby portfólia s nulovým rastom investícií, základom je snaha dosiahnuť bezrizikové portfólio. Autorom tejto myšlienky je Merton.¹

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - q) S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \quad (29)$$

$V(S, t)$ je hodnota derivátu na dané aktívum, hladká funkcia dvoch premenných a T je čas expirácie. Okrajovú podmienku môžeme získať, pokiaľ je známa hodnota derivátu v čase jeho expirácie, teda $V(S, T)$. Hodnotu derivátu v ľubovoľnom čase do expirácie nájdeme riešením príslušnej parciálnej diferenciálnej rovnice.

Keďže poznáme koncovú podmienku pre európsku kúpnu opciu, pomocou niekoľkých transformácií sa dá získať Black - Scholesova formula pre oceňovanie európskych kúpnych opcií

$$V(S, t) = Se^{-q(T-t)} \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad (30)$$

kde $\Phi(\cdot)$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia a d_1, d_2 sú v tvare

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \quad (31)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t} \quad (32)$$

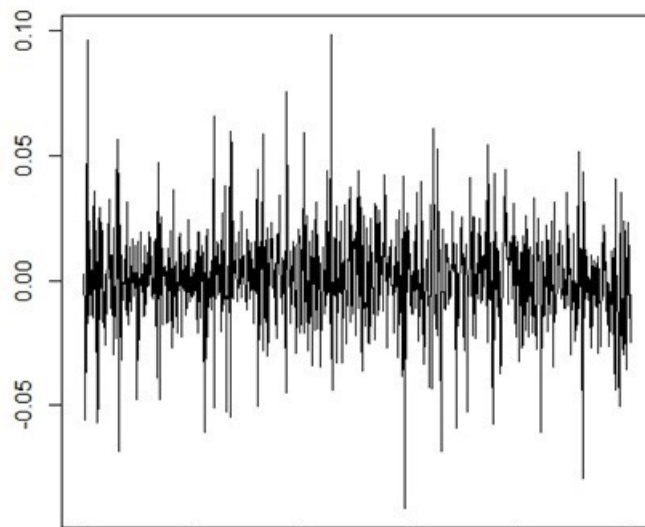
Následne využitím put-call parity získame aj explicitnú formulu pre predajné opcie

$$V(S, t) = Ke^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - Se^{-q(T-t)} \Phi(-d_1) \quad (33)$$

¹V roku 1997 získali Myron Scholes a Robert Merton tzv. Cenu Švédskej banky za ekonómiu na pamiatku A. Nobela, ktorá je označovaná aj ako Nobelova cena za ekonómiu. Bola tak ocenená dôležitosť a významnosť Black - Scholesovho modelu, ktorý v 1970-tych rokoch priniesli do sveta oceňovania opcií Fischer Black, Myron Scholes a Robert Merton.

3.1 Nedostatky Black - Scholesovho modelu

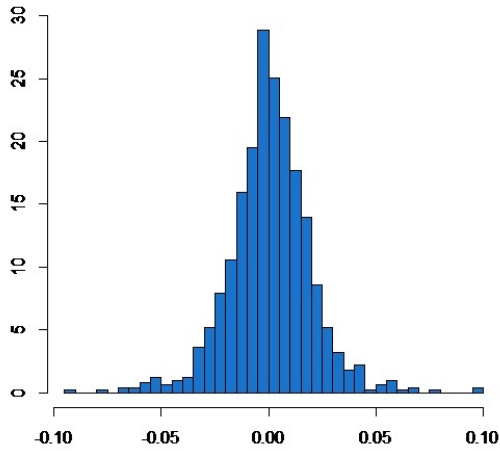
Táto podkapitola je zameraná na preskúmanie empirických vlastností finančných dát a na nedostatky BS modelu. Budeme pracovať s časovými radmi denných logaritmickejých výnosov niekoľkých akcií s časovým rozpätím 1008 pracovných dní (29. september 2011 - 2. december 2015). Dáta pochádzajú zo stránky <http://finance.yahoo.com/>. Príklad takéhoto časového radu môžeme vidieť na obrázku (Obr.4), ktorý zobrazuje denné logaritmickejé výnosy akcie Yahoo.



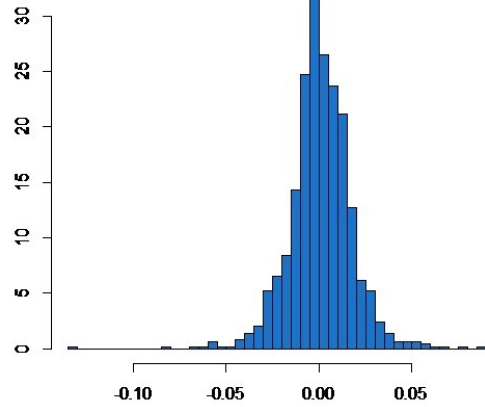
Obr. 4: Denné logaritmickejé výnosy akcie Yahoo

Pripomenieme, že platí: súčet k logaritmickejých výnosov za časové obdobie Δt je logaritmickejým výnosom za obdobie $k\Delta t$.

$$\begin{aligned} & (\ln(S_{t+\Delta t}) - \ln(S_t)) + (\ln(S_{t+2\Delta t}) - \ln(S_{t+\Delta t})) + \dots + \\ & + (\ln(S_{t+k\Delta t}) - \ln(S_{t+(k-1)\Delta t})) = \ln(S_{t+k\Delta t}) - \ln(S_t) \end{aligned} \tag{34}$$



Obr. 5: Histogram Yahoo.



Obr. 6: Histogram Apple.

Ako sme už ukázali pri prezentovaní BS modelu, výnosy by mali byť modelované pomocou prírastkov Brownovho pohybu, teda by mali byť normálne rozdelené a nezávislé. Pričom parametre normálneho rozdelenia by sa nemali meniť v čase. Tieto predpoklady si teraz overíme, využijeme pri tom rôzne metódy.

3.1.1 Normalita výnosov

Porovnanie momentov

Pri porovnávaní teoretických momentov normálneho rozdelenia a odhadnutých momentov z dát sa zameriame na tretí a štvrtý moment. Budeme pracovať s centrálnymi momentami. Tretí moment - šikmosť, hovoriaca o symetrii rozdelenia, je v prípade normálneho rozdelenia nulová, teda toto pravdepodobnostné rozdelenie je symetrické. Záporná (ľavostranná) šikmosť v prípade väčšiny nami pozorovaných akcií poukazuje na to, že väčšina hodnôt časového radu je väčšia ako priemer (vľavo sa vyskytujú extrémnejšie hodnoty, resp. vľavo má dlhší chvost). Rozdiel medzi pravostrannou a ľavostrannou šikmosťou znázorňujú obrázky Obr.5 a Obr.6.

Odhadnuté štvrté momenty popisujúce špicatosť rozdelenia budeme porovnávať s hodnotou 3, ktorá predstavuje špicatosť normálneho rozdelenia. Ak má rozdelenie sploštený vrchol, štvrtý moment je menší ako 3. Pri pohľade na tabuľku (Tabuľka 1) teda môžeme usúdiť, že dáta sú z rozdelení, ktoré majú špicatejší vrchol ako normálne

rozdelenie, a teda majú ťažšie chvosty. Z toho vyplýva, že veľké rozdiely medzi cenami akcií sa vyskytujú častejšie ako v modeli s normálne rozdelenými prírastkami. Špicatost totiž určuje, aký priebeh má rozdelenie okolo stredu, resp. charakterizuje výskyt extrémnych hodnôt. Toto je jedným z hlavných dôvodov, prečo sa začali používať procesy so skokmi.

	stredná hodnota	disperzia	šikmosť	špicatosť
normálne rozdelenie	μ	σ^2	0	3
GM	0,000411	0,000342	-0,02836	4,175772
KO	0,000256	0,0000866	-0,23224	3,938567
Yahoo	0,0007	0,000375	0,02836	5,807692
Intesa	0,000966	0,003458	-0,15478	19,98974

Tabuľka 1: Porovnanie momentov

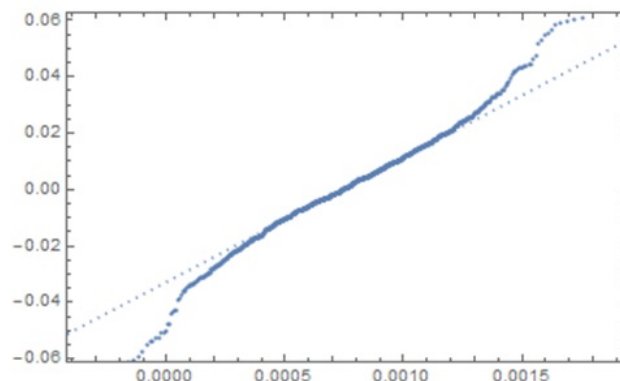
V tabuľke (Tabuľka 1) môžeme vidieť odhad prvých štyroch momentov z finančných dát ako aj teoretické momenty normálneho rozdelenia. Ako vidíme, ani jedny dáta podľa odhadov momentov nemajú normálne rozdelenie. Pre lepší popis vlastností denných logaritmickejých výnosov by sme potrebovali rozdelenie, ktoré má viac parametrov ako normálne rozdelenie.

Grafické porovnanie - QQ graf, jadrový odhad hustoty

Pri overovaní normality denných logaritmickejých výnosov akcií použijeme pre názornosť aj QQ - graf a porovnanie hustoty normálneho rozdelenia s empirickým odhadom hustoty, tzv. jadrovým odhadom hustoty.

QQ-graf (the quantile-quantile plot) je kvalitatívne veľmi účinnou metódou testovania dobrej zhody. Porovnáva pre každé $j = 1, \dots, n$ (pričom n je rozsah súboru dát, v našom prípade 1008 pozorovaní denných logaritmickejých výnosov) empirický $\frac{j-\frac{1}{2}}{n}$ - kvantil s $\frac{j-\frac{1}{2}}{n}$ - kvantilom daného rozdelenia, u nás normálneho rozdelenia. Čím viac graf kopíruje čiaru pod uhlom 45° , tým je pravdepodobnejšie, že dáta pochádzajú z daného rozdelenia. QQ - graf slúži však len na grafické znázornenie a priblíženie, nepokladá sa za formálny test, pretože nie je jasne definované, kedy sa nulová hypotéza

zamieta.



Obr. 7: QQ-graf denných logaritmických výnosov akcie Yahoo Normálne rozdelenie

Ako vidíme na obrázku (Obr.7), zobrazené body sa od čiary vzdiaľujú, a to hlavne na koncoch - chvostoch. Usudzujeme teda, že dáta nie sú z normálneho rozdelenia.

Jadrový odhad hustoty je odhad hustoty \hat{f} vypočítaný z náhodného výberu x_1, x_2, \dots, x_n ako

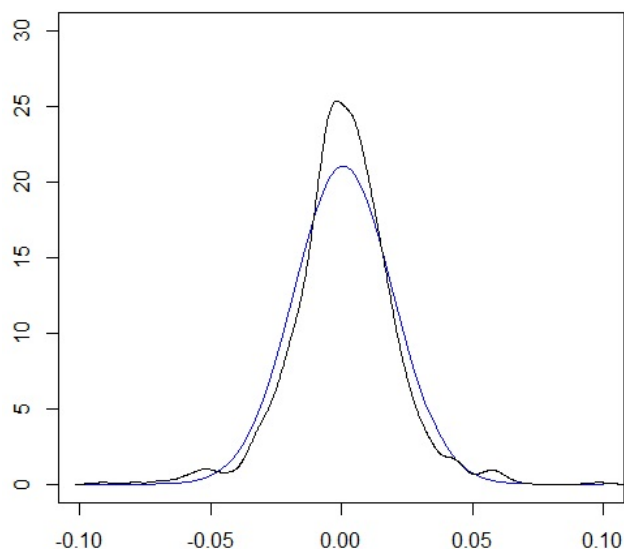
$$\hat{f}_h = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \quad (35)$$

kde $K(\cdot)$ je funkcia spĺňajúca

$$\int K(x) dx = 1 \quad (36)$$

a h je zvolená šírka okna. Existuje viacero možností pre výber funkcie $K(\cdot)$. My sme použili tzv. Gaussovské jadro, $K(\cdot)$ je hustota normovaného normálneho rozdelenia $N(0, 1)$ a h je zvolené podľa Silvermanovho pravidla palca ("Silverman's rule-of-thumb"), a teda má hodnotu $h = 1.06\sigma n^{-\frac{1}{5}}$.

Na grafe (Obr.8) vidíme porovnanie jadrového odhadu hustoty denných logaritmických výnosov akcie Yahoo ako aj hustotu normálneho rozdelenia, ktoré má parametre zhodné s aritmetickým priemerom a výberovou disperziou odhadnutou z trhových dát. Aj podľa tohoto grafického porovnania môžeme usúdiť, že normalita výnosov nie je splnená.



Obr. 8: Modrá je hustota normálneho rozdelenia s parametrami $\mu = 0,0008$ a $\sigma^2 = 0,000359$, čiernou je jadrový odhad hustoty denných logaritmickejých výnosov akcie Yahoo

Štatistické testy

Tušenie že denné logaritmickejé výnosy akcií nie sú normálne rozdelené potvrdíme aj štatistickými testami. Pri každom z testov budeme na vopred zvolenej hladine významnosti α testovať hypotézu, že denné logaritmickejé výnosy predstavujúce náhodný výber x_1, x_2, \dots, x_n sú z rozdelenia daného kumulatívnu distribučnou funkciou $\hat{F}(x; \theta)$.

$$H_0 : F_n(x) = \hat{F}(x; \theta) \quad vs. \quad H_1 : F_n(x) \neq \hat{F}(x; \theta) \quad (37)$$

kde

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{x_i \leq x} \quad (38)$$

je empirická kumulatívna distribučná funkcia.

Nulovú hypotézu na hladine významnosti α zamietame, ak je p - hodnota rovná alebo menšia ako hladina významnosti α . P - hodnota udáva pravdepodobnosť, že testovacia štatistika je ešte extrémnejšia za predkladu, že platí nulová hypotéza.

Využili sme Pearsonov χ^2 test, Kolmogorov - Smirnov test, Kuiperov test, Anderson Darling test a Crámer von Mises test. V nasledujúcej časti stručne popíšeme použité testy a uvedieme testovaciu štatistiku.

Pearson χ^2 test (χ^2 - test) je najznámejším testom dobrej zhody, ktorý porovnáva teoretické a empirické početnosti. Testovacia štatistika

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{n_i - np_i}{np_i} \quad (39)$$

má pri $n \geq 50$ za platnosti H_0 približne Chí - kvadrát rozdelenie s $k - t - 1$ stupňami voľnosti. Pričom I_1, I_2, \dots, I_k je rozklad reálnej osi na disjunktné intervaly, n_i je počet pozorovaní spadajúcich do intervalu I_i , p_i je pravdepodobnostná miera I_i určená distribučnou funkciou $\widehat{F}(x; \theta)$, np_i je teoretická početnosť v intervale I_i , k je počet tried a t počet odhadovaných parametrov.

Kolmogorov Smirnov test (KS - test) Kolmogorova - Smirnova vzdialenosť D_n je definovaná ako maximálna vzdialenosť medzi $F_n(x)$ a $\widehat{F}(x; \theta)$. Ak sú parametre θ známe, testovacia štatistika má tvar

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - \widehat{F}(x; \theta)| \quad (40)$$

Kuiper test je obdobou KS - testu, taktiež meria vzdialenosť medzi empirickou a teoretickou distribučnou funkciou. Jeho testovacia štatistika má tvar [20]

$$K = \sup_x (F_n(x) - \widehat{F}(x; \theta)) - \inf_x (F_n(x) - \widehat{F}(x; \theta)) \quad (41)$$

Anderson Darling test (AD - test) je istou modifikáciou KS - testu, ale dáva väčšiu pozornosť na chvosty resp. je citlivejší na odchýlky na chvostoch, čo je výhodou napr. pri aplikáciách v analýze rizík. Na rozdiel od KS - testu, pri ktorom kritické hodnoty nezávisia od testovaného rozdelenia, pri AD - teste sa kritické hodnoty počítajú pre konkrétne rozdelenie, tým sa test stáva viac citlivým avšak aj výpočtovo náročnejším. Testovacia štatistika má tvar

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i - 1) \log (F(z_i; \theta)(1 - F(z_{n-i+1}; \theta))) \quad (42)$$

Ak chceme testovať, či $\widehat{F}(x; \theta)$ je normálne rozdelenie so známymi parametrami $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, testovacia štatistika je v tvare

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i - 1) \log (\Phi(z_i)(1 - \Phi(z_{n-i+1}))) \quad (43)$$

kde $z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$ pre $i = 1, 2, \dots, n$ a $\Phi(\cdot)$ je distribučná funkcia normálneho rozdelenia.

Pokiaľ sú parametre neznáme, používa sa testovacia štatistika

$$T_n = A_n^2 \left(1 + \frac{4}{n} - \frac{25}{n^2} \right). \quad (44)$$

Crámer von Mises test (CM - test) Testovacia štatistika tohto testu je v tvare

$$W^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i-1}{2n} - F_n(x_i) \right)^2 \quad (45)$$

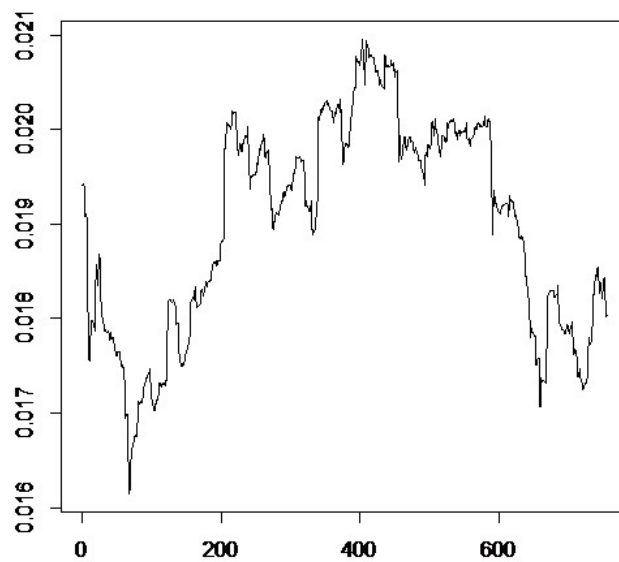
	χ^2 test	KS-test	Kuiper-test	AD-test	CM-test
GM	$4,0803 \cdot 10^{-8}$	$2,241561 \cdot 10^{-206}$	$1,650046 \cdot 10^{-800}$	0	$2,553513 \cdot 10^{-15}$
KO	$2,7530 \cdot 10^{-5}$	$3,100377 \cdot 10^{-218}$	$1,070458 \cdot 10^{-843}$	0	$4,218848 \cdot 10^{-15}$
Yahoo	$5,0365 \cdot 10^{-7}$	$9,58626 \cdot 10^{-202}$	$6,251210 \cdot 10^{-796}$	0	$9,32587 \cdot 10^{-15}$
Intesa	10^{-140}	$5,223039 \cdot 10^{-148}$	$6,105573 \cdot 10^{-590}$	0	$3,885781 \cdot 10^{-15}$

Tabuľka 2: Výsledky testov Normálne rozdelenie

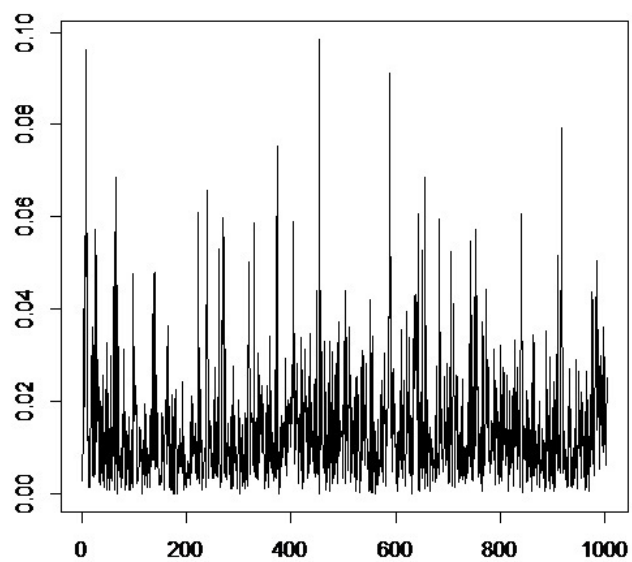
V tabuľke (Tabuľka 2) vidíme p - hodnoty všetkých použitých testov na jednotlivé dáta predstavujúce denné logaritmické výnosy akcií. Keďže p - hodnoty sú menšie ako 5%, čo je nami zvolená hladina významnosti, nulovú hypotézu o normalite zamietame.

3.1.2 Stochastická volatilita

Z dát môžeme taktiež pozorovať, že odhadnutá volatilita sa stochasticky mení s časom, resp. mení sa prostredie. Potvrďuje to jednak historická volatilita (Obr.9), ktorá popisuje, ako volatilné bolo aktívum v predchádzajúcom období. Historickú volatilitu akcie Yahoo zobrazenú na grafe sme získali pomocou odhadu štandardnej odchýlky denných logaritmických výnosov predchádzajúceho roka. Následne sme ju prenásobili odmocninou z 250, čo predstavuje priemerný počet obchodných dní v kalendárnom roku. Vidíme, že historická volatilita kolíše. Na druhom obrázku (Obr.10) môžeme vidieť absolútnu hodnotu denných logaritmických výnosov akcie Yahoo. Je zjavné zhlukovanie volatility - sú viditeľné obdobia s vysokým absolútnym výnosom a obdobia s nízkym absolútnym výnosom. Práve fakt, že po veľkých zmenách ceny akcie pravdepodobnejšie nasleduje veľká zmena motivuje k využitiu modelu, kde je volatilita stochastická.



Obr. 9: Historická volatilita



Obr. 10: Zhlukovanie volatility

4 Meixnerovo rozdelenie, Meixnerov proces

Pre kvalitné oceňovanie derivátov, optimalizáciu portfólia či riadenie rizík, musíme mať aj kvalitný model podkladového aktíva. Je potrebné priblížiť sa čo najviac modelom k realite, zachytiť všetky vlastnosti, ktoré vyplývajú z trhových dát. Na základe nesplnených predpokladov v Black - Scholesovom modeli sme sa rozhodli využiť Lévyho procesy, ktoré vhodne popisujú jednak skoky ale aj ťažké chvosty pozorované pri trhových dátach. My sme sa zamerali na Meixnerov proces. V tejto kapitole najskôr popíšeme Meixnerovo rozdelenie a z neho odvodený Meixnerov proces. Potom ho podobne ako v predchádzajúcej kapitole otestujeme pomocou štatistických testov aj graficky. Budeme vychádzať z [10], [13], [14], [15], [16].

4.1 Meixnerovo rozdelenie

Funkcia hustoty Meixnerovho rozdelenia $Meixner(a, b, d, m)$ je

$$f(x; a, b, d, m) = \frac{(2\cos(b/2))^{2d}}{2a\pi\Gamma(2d)} e^{\frac{b(x-m)}{a}} \left| \Gamma\left(d + \frac{i(x-m)}{a}\right) \right|^2 \quad (46)$$

kde parametre spĺňajú

$$a > 0 \quad -\pi < b < \pi \quad d > 0 \quad m \in \mathbb{R} \quad (47)$$

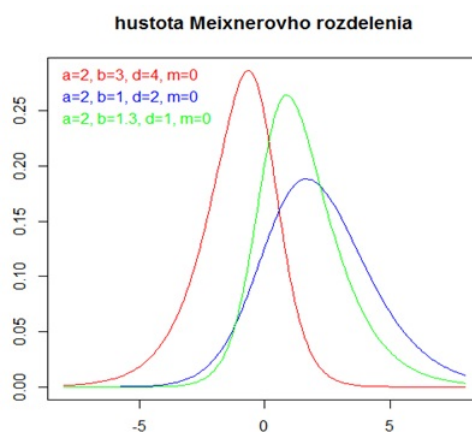
$\Gamma(\cdot)$ je Gamma funkcia a $i = \sqrt{-1}$.

V tabuľke (Tabuľka 3) vidíme vyjadrenie momentov Meixnerovho rozdelenia $Meixner(a, b, d, m)$ pomocou parametrov. Je zrejmé, že špicatosť Meixnerovho rozdelenia, bude vždy väčšia ako 3, čo predstavuje špicatosť Normálneho rozdelenia.

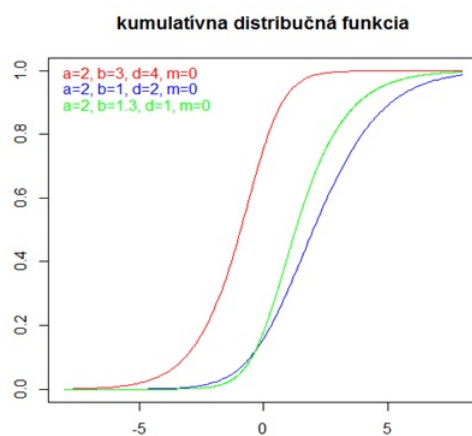
	Meixnerovo rozdelenie
stredná hodnota	$m + ad \operatorname{tg}\left(\frac{b}{2}\right)$
disperzia	$\frac{a^2 d}{1 + \cos(b)}$
šikmosť	$\sin(b) \sqrt{\frac{1}{d(1 + \cos(b))}}$
špicatosť	$3 - \frac{\cos(b) - 2}{d}$

Tabuľka 3: Porovnanie momentov

Význam jednotlivých parametrov bližšie približuje nasledujúci obrázok, ktorý porovnáva hustoty Meixnerovho rozdelenia s rôznymi parametrami. Taktiež uvádzame aj porovnanie kumulatívnych distribučných funkcií týchto rozdelení. Parameter m je parametrom polohy, a a d ovplyvňujú špicatosť rozdelenia - a udáva, ako ťažké sú chvosty; d škálu a parameter b určuje šikmosť.

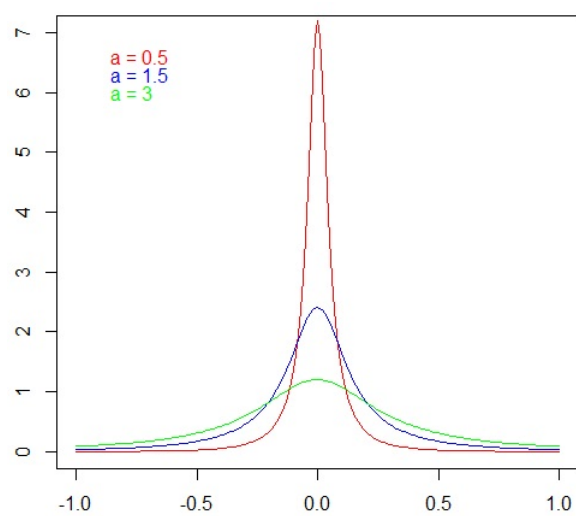


Obr. 11: Hustota Meixnerovho rozdelenia

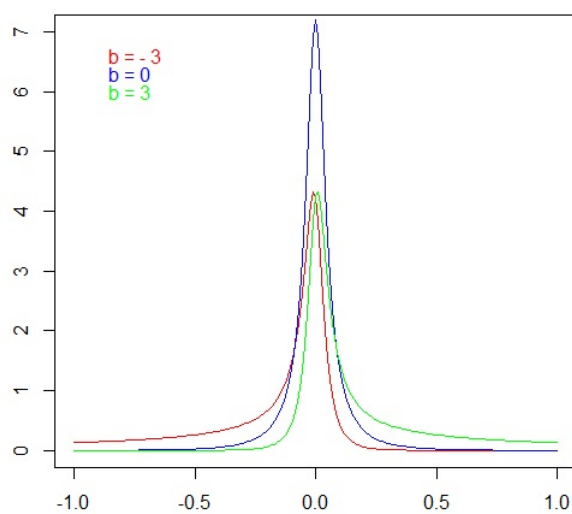


Obr. 12: Kumulatívna distribučná funkcia Meixnerovho rozdelenia

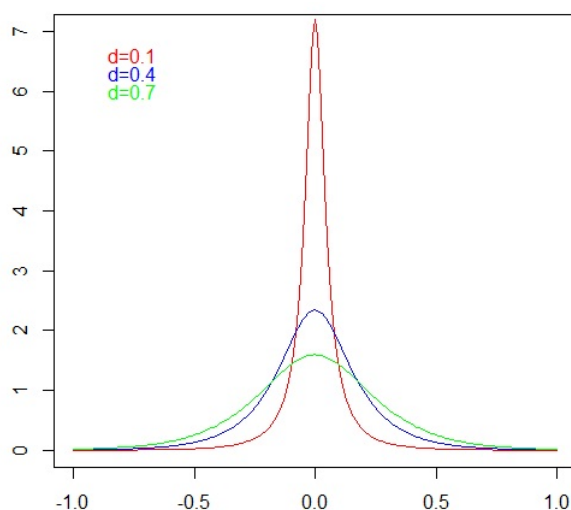
Pre názornosť uvádzame aj obrázky s porovnaním dôsledkov zmeny len jedného z parametrov na hustotu Meixnerovho rozdelenia.



Obr. 13: Vplyv parametra a na hustotu Meixnerovho rozdelenia, $a \in \{0,5; 1,5; 3\}$; $b = 0$; $d = 0,1$; $m = 0$



Obr. 14: Vplyv parametra b na hustotu Meixnerovho rozdelenia, $b \in \{-3,0,3\}$, $a = 0,5$; $d = 0,1$; $m = 0$



Obr. 15: Vplyv parametra d na hustotu Meixnerovho rozdelenia, $d \in \{0, 1; 0, 4; 0, 7\}$; $a = 0, 5$; $b = 0$; $m = 0$

Na odhad parametrov Meixnerovho rozdelenia sa používajú dve metódy. Jednou z nich je Metóda momentov. Základnou myšlienkou Metódy momentov je odhad prvých štyroch momentov z trhových dát a následne využitím vzťahov medzi parametrami a momentami, ktoré sme prezentovali v Tabuľke 3 určiť odhady parametrov Meixnerovho rozdelenia. Všeobecné vyjadrenie odhadnutých parametrov je potom

$$\bar{d} = \frac{1}{\bar{\kappa}_2 - \bar{\kappa}_1^2 - 3} \quad (48)$$

$$\bar{b} = \text{sign}(\bar{\kappa}_1) \arccos(2 - \bar{d}(\bar{\kappa}_2 - 3)) \quad (49)$$

$$\bar{a} = \bar{S} \sqrt{\frac{1 + \cos(\bar{b})}{\bar{d}}} \quad (50)$$

$$\bar{m} = \bar{X} - \bar{a}\bar{d} \operatorname{tg}\left(\frac{\bar{b}}{2}\right) \quad (51)$$

pričom musí byť splnená podmienka

$$\bar{\kappa}_2 \geq 2\bar{\kappa}_1^2 + 3 \quad (52)$$

a využili sme označenie \bar{X} pre aritmetický priemer, \bar{S} pre smerodajnú odchýlku.

$\bar{\kappa}_1$ a $\bar{\kappa}_2$ sú odhady tretieho a štvrtého centrálného momentu vypočítané nasledovne

$$\bar{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^k \quad (53)$$

$$\bar{\kappa}_1 = \frac{\bar{\mu}_3}{\bar{\mu}_2^{3/2}} \quad (54)$$

$$\bar{\kappa}_2 = \frac{\bar{\mu}_4}{\bar{\mu}_2^2} \quad (55)$$

Presný postup odvodenia vzťahov uvádzame v prílohe.

Ďalšou možnosťou ako určiť parametre rozdelenia je Metóda maximálnej vierohodnosti. Podstatou tejto metódy je nájsť také hodnoty parametrov, ktoré maximalizujú vierohodnostnú funkciu

$$L(x; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (56)$$

resp. logaritmicnú vierohodnostnú funkciu

$$\begin{aligned} l(x; \theta) &= \log \left(\prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \right) \\ &= \log \left(\prod_{i=1}^n \frac{(2\cos(b/2))^{2d}}{2a\pi\Gamma(2d)} e^{\frac{b(x_i-m)}{a}} \left| \Gamma \left(d + \frac{i(x_i-m)}{a} \right) \right|^2 \right) \\ &= n \log \left(\frac{(2\cos(b/2))^{2d}}{2a\pi\Gamma(2d)} \right) + \frac{b}{a} \sum_{i=1}^n (x_i - m) + \sum_{i=1}^n \log \left(\left| \Gamma \left(d + \frac{i(x_i-m)}{a} \right) \right|^2 \right) \end{aligned}$$

S predpokladom, že existuje jediné maximum a $l(x; \theta)$ je hladká diferencovateľná funkcia, parametre získame riešením rovníc

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_i}(x; \theta) = 0 \quad (57)$$

Na urýchlenie výpočtov pri metóde Maximálnej vierohodnosti sa ako štartovací bod používa odhad parametrov z Metódy momentov.

Charakteristická funkcia Meixnerovho rozdelenia $Meixner(a, b, d, m)$ má tvar

$$\phi(u; a, b, d, m) = e^{imu} \left(\frac{\cos(b/2)}{\cosh((au - ib)/2)} \right)^{2d} \quad (58)$$

z čoho vyplýva, že toto rozdelenie je nekonečne deliteľné.² Ako sme už uviedli v 2. kapitole, pre každé nekonečne deliteľné rozdelenie máme stochastický proces - Lévyho proces. Stochastický Meixnerov proces $\{M_t, t \geq 0\}$ má nezávislé a stacionárne prírastky, $M_0 = 0$ a rozdelenie M_t je dané Meixnerovým rozdelením $Meixner(a, b, dt, mt)$.

Lévyho triplet resp. trojica Lévyho charakteristík je v prípade Meixnerovho procesu $(\gamma, 0, \nu(dx))$, t.j. nemá Brownovu časť

$$\nu(dx) = d \frac{e^{\frac{bx}{a}}}{x \sinh(\frac{\pi x}{a})} dx \quad (59)$$

$$\gamma = a d \tan\left(\frac{b}{2}\right) - 2d \int_1^\infty \frac{\sinh(\frac{bx}{a})}{\sinh(\frac{\pi x}{a})} dx \quad (60)$$

Dôkaz môžeme nájsť v ([10] str. 136). Keďže platí, že $\int_{-\infty}^\infty |x| \nu(dx) = \infty$ proces má nekonečnú variáciu. [15] Existujú všetky momenty tohto rozdelenia. [17]

Kumulatívna vytvárajúca funkcia Meixnerovho rozdelenia je

$$\kappa_X(t) = 2d \log\left(\cos\left(\frac{b}{2}\right)\right) - 2d \log\left(\cos\left(\frac{at + b}{2}\right)\right) + mt \quad (61)$$

kde

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad (62)$$

je momentová generujúca funkcia a

$$\kappa_X(t) = \log(M_X(t)) \quad (63)$$

Presné odvodenie charakteristickej aj kumulatívnej vytvárajúcej funkcie Meixnerovho rozdelenia je v prílohe.

²Odvodenie bolo uvedené ako príklad pri definícii nekonečne deliteľného rozdelenia v druhej kapitole.

4.2 Kalibrovanie Meixnerovho rozdelenia na reálne dáta

Podobne ako v tretej kapitole aj v tejto kapitole využijeme časové rady denných logaritmických výnosov niekoľkých akcií. Pomocou Metódy momentov odhadneme pre každú z akcií parametre Meixnerovho rozdelenia. Následne otestujeme jednak graficky ako aj štatistickými testami, že práve Meixnerovo rozdelenie je v porovnaní s normálnym rozdelením lepšie v zmysle, že lepšie zachytáva vlastnosti denných logaritmických výnosov. Práve vďaka štyrom parametrom Meixnerovho rozdelenia, dokážeme lepšie popísať aj ťažké chvosty a šikmosť trhových dát.

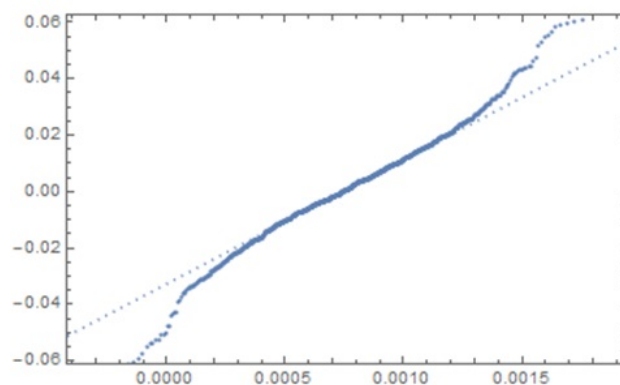
V nasledujúcej tabuľke (Tabuľka 4) prezentujeme pre každú zo štyroch akcií odhadnuté parametre Meixnerovho rozdelenia pomocou Metódy momentov.

	\bar{a}	\bar{b}	\bar{d}	\bar{m}
GM	0,053239	-0,02088	0,241481	0,000556
KO	0,025763	-0,167133	0,259117	0,000815
Yahoo	0,041408	-0,091363	0,417661	0,001604
Intesa	0,023715	-0,4459	1,678416	0,010141

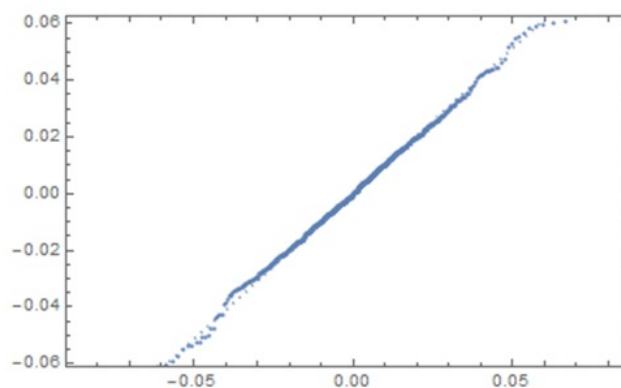
Tabuľka 4: Odhadnuté parametre

4.2.1 Grafické zobrazenie

Pri pozorovaní či empirické dáta pochádzajú z Meixnerovho rozdelenia využijeme aj QQ-graf a porovnanie jadrového odhadu hustoty s hustotou príslušného Meixnerovho rozdelenia, t.j. Meixnerovho rozdelenia s odhadnutými parametrami jednotlivých akcií. Aby sme poukázali na zlepšenie oproti Normálnemu rozdeleniu, opätovne uvádzame aj obrázky z kapitoly o BS modeli. Ako vidíme na QQ-grafoch, Meixnerovo rozdelenie lepšie zachytáva ťažšie chvosty. Porovnanie odhadov hustôt (Obr. 18) zas poukazuje na zlepšenie pri zachytení špicatosti dát.

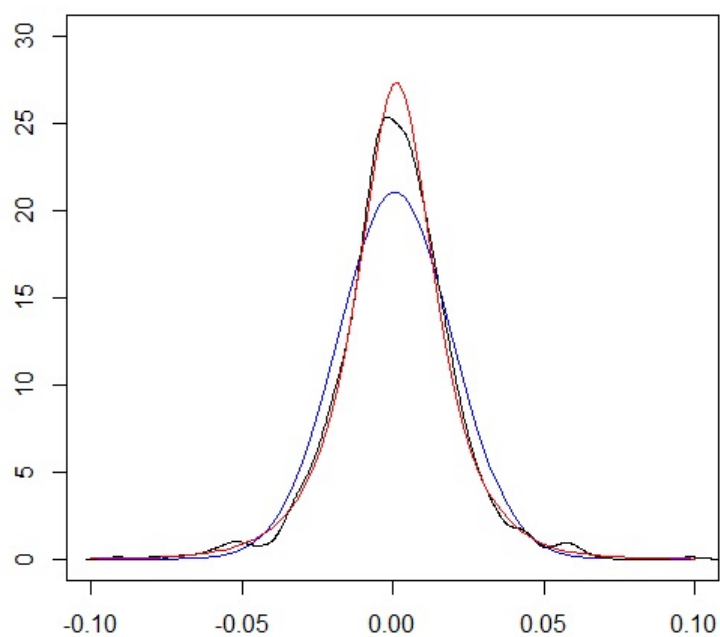


Obr. 16: QQ-graf denných logaritmickejých výnosov akcie Yahoo Normálne rozdelenie

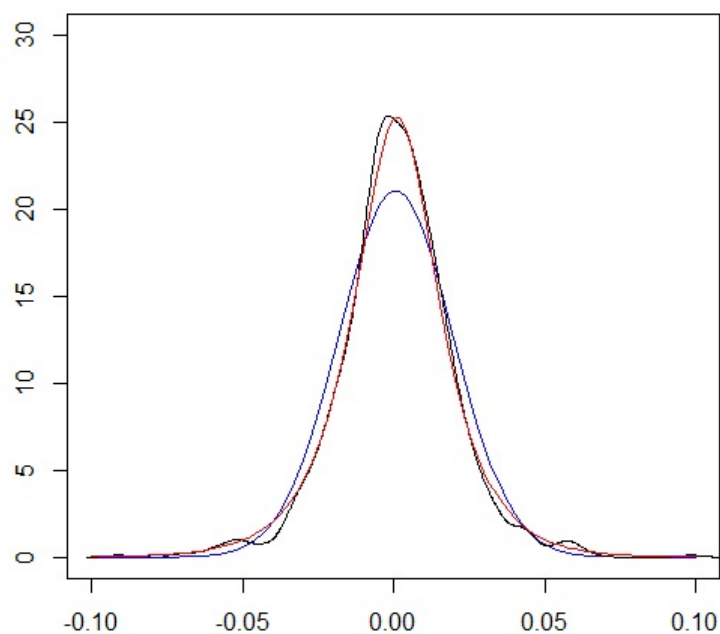


Obr. 17: QQ-graf denných logaritmickejých výnosov akcie Yahoo Meixnerovo rozdelenie

Pri porovnaní hustoty sme ďalej využili aj možnosť úpravy parametrov. A to v zmysle Metódy najmenších štvorcov, kedy sa vychádza z odhadov získaných pomocou metódy momentov, a potom sa parametre upravujú, aby sa získalo čo najlepšie zachytenie dát. Keďže vieme, že parameter d má vplyv na špicatosť rozdelenia a z porovnania jadrového odhadu hustoty a hustoty Meixnerovho rozdelenia vidíme, že špicatosť nie je dobre zachytená, rozhodli sme sa upraviť práve parameter d . Uvádžeme aj porovnanie hustôt práve po tejto zmene (Obr. 19). Nový parameter \bar{d} odhadnutého Meixnerovho rozdelenia pre akciu Yahoo je $\bar{d} = 0,467661$.



Obr. 18: Porovnanie hustôt pre akciu Yahoo, modré je normálne rozdelenie, čiernou jadrový odhad hustoty a červenou hustota Meixnerovho rozdelenia



Obr. 19: Porovnanie hustôt pre akciu Yahoo, modré je normálne rozdelenie, čiernou jadrový odhad hustoty a červenou hustota Meixnerovho rozdelenia so zmeneným parametrom d

4.2.2 Štatistické testy

V tretej kapitole sme podrobne popísali štatistické testy, ktorými sme testovali zhodu empirických dát s normálnym rozdelením. V tejto časti využijeme rovnaké testy, nulová hypotéza však bude postavená v zmysle, či testované dáta pochádzajú z Meixnerovho rozdelenia s príslušnými parametrami. Výsledky testov sme zhrnuli v tabuľke (Tabuľka 5). Uvádzame aj p - hodnoty testov zhody so zmeneným rozdelením, zmeneným parametrom \bar{d} , čiže pre akciu Yahoo budeme mať dva výsledky.

	χ^2	KS-test	Kuiper-test	AD-test	CM-test
GM	0,065876	0,107906	0,002296	0,065210	0,089222
KO	0,023466	0,134027	0,007204	0,230920	0,148003
Yahoo	0,0969941	0,790379	0,761846	0,984602	0,95142
Yahoo zmena d	0,163661	0,527388	0,222497	0,323671	0,429006
Intesa	0,531073	0,891599	0,803636	0,866338	0,848102

Tabuľka 5: Výsledky testov Meixnerovo rozdelenie

Na hladine významnosti 5% hypotézu o tom, že denné logaritmické výnosy sú z príslušného Meixnerovho rozdelenia pri väčšine testov nezamietame. Ako môžeme vidieť, testy ukazujú, že pôvodne odhadnuté Meixnerovo rozdelenie pre akciu Yahoo je lepšie, aj keď sa pri grafickom porovnaní jadrového odhadu hustoty ako lepšie zdalo práve upravené rozdelenie. To však lepšie zachytávalo len špicatosť rozdelenia. Ďalej preto budeme pracovať s pôvodným rozdelením odhadnutým pomocou Metódy momentov.

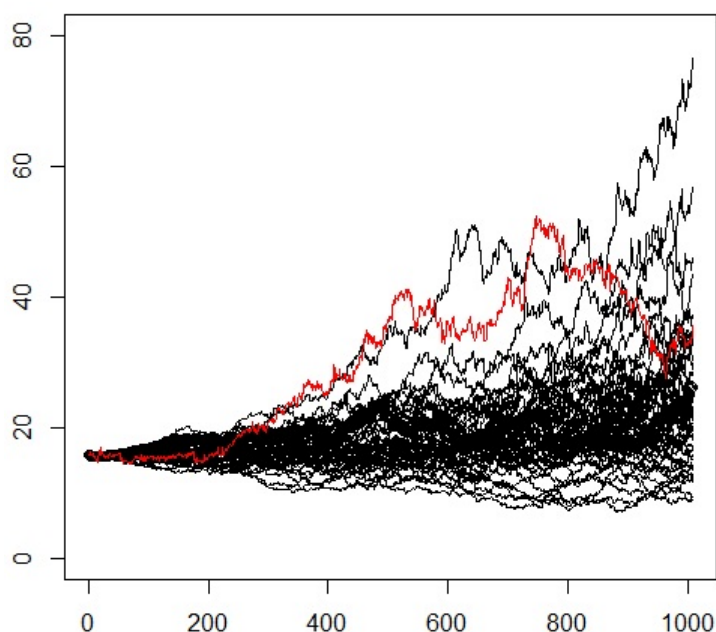
4.2.3 Simulácia cien podkladového aktíva

V predchádzajúcich častiach sme si overili, že denné logaritmické výnosy majú Meixnerovo rozdelenie a hypotézu o Normálnom rozdelení sme zamietli. V ďalšom ukážeme, ako sa empirický vývoj ceny podkladového aktíva líši od trajektórií Meixnerovho rozdelenia, ktoré má príslušné odhadnuté parametre. Taktiež uvedieme aj porovnanie s odhadnutým Normálnym rozdelením.

Pri simuláciách sme používali štatistický softvér R. Spravili sme 50 simulácií vývoja ceny akcie Yahoo od 30.11.2011 po 2.12.2015, čo predstavuje 1008 pracovných dní. Pri

Meixnerovom procese vieme, že M_t je dané Meixnerovým rozdelením $Meixner(a, b, dt, mt)$, preto sme parametre d, m pri simulovaní s postupujúcim časom menili. Získali sme tak 50 vývojov denných logaritmickejých výnosov a spätnými úpravami sme sa dostali k cenám podkladového aktíva. Pre získanie simulácií z normálneho rozdelenia sme využili funkciu `rnorm()` a odhadnutý priemer a smerodajnú odchýlku.

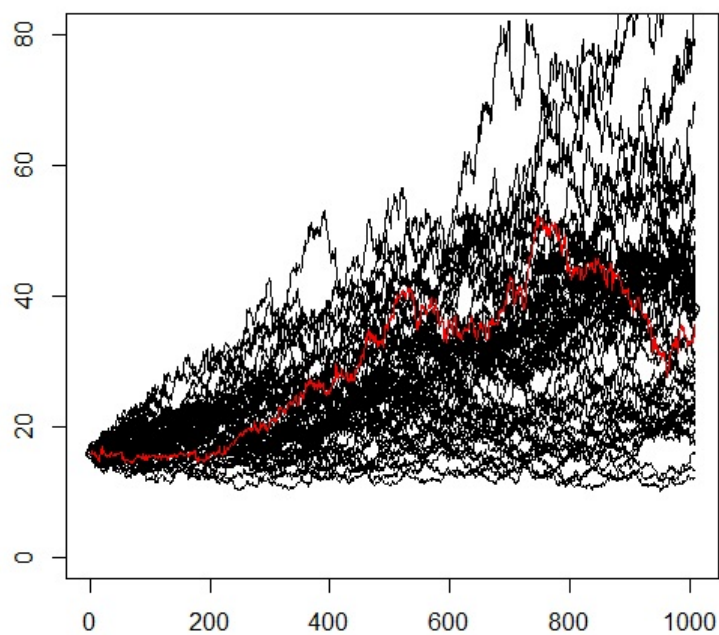
Na obrázku uvádzame reálny vývoj ceny akcie Yahoo v danom časovom intervale ako aj nasimulované trajektórie z Meixnerovho rozdelenia (Obr.20) a Normálneho rozdelenia (Obr.21). Vychádzali sme z hodnoty 15,7 čo predstavuje cenu akcie 30.11.2011.



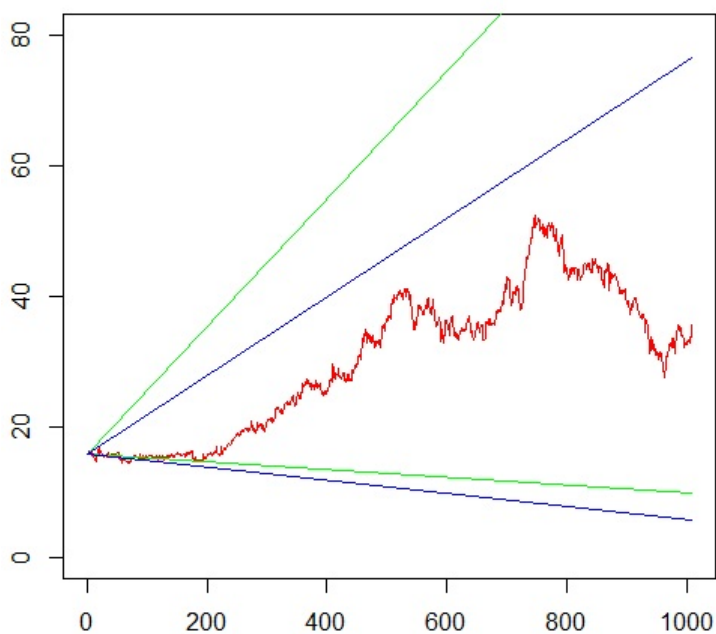
Obr. 20: Červenou je zobrazená realita, čiernou sú simulácie z príslušného Meixnerovho rozdelenia

Ďalší obrázok (Obr.22) zobrazuje jednak reálny vývoj ako aj hranice dané extrémnymi hodnotami určenými simuláciami. Ako môžeme vidieť, Meixnerovo rozdelenie zachytáva lepšie nielen spodnú hranicu reálneho vývoja ceny podkladového aktíva, ale taktiež aj horná hranica je presnejšia, interval nie je až taký široký. Pozreli sme sa hlbšie do histórie vývoja ceny akcie Yahoo, konkrétne na rovnako veľké časové obdobie 1008 pracovných dní pred 30.11.2011, aby sme si overili, či skutočne môže cena akcie tak poklesnúť. Keďže dňa 28.11.2007 bola hodnota akcie 26,2 a dňa 20.11.2008 poklesla na úroveň 8,95 (cca. 66% pokles) a v našom pozorovaní je spodná hranica simulácií na úrovni 6,997, to znamená že z hodnoty 15,7 poklesla o cca. 56%, môžeme považovať

výsledok získaný simuláciami za reálny.



Obr. 21: Červenou je zobrazená realita, čiernou sú simulácie z príslušného Normálneho rozdelenia

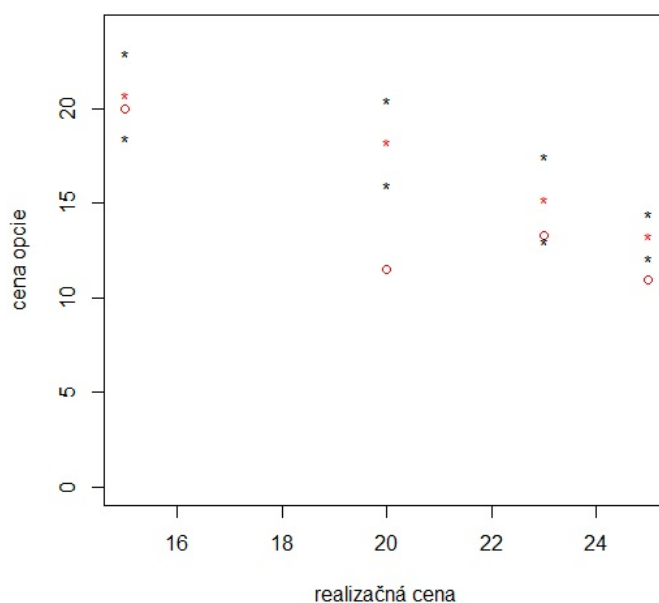


Obr. 22: Červenou je zobrazená realita, modoru sú vyznačené hranice simulácií Meixnerovho rozdelenia, zelené sú hranice Normálneho rozdelenia

5 Oceňovanie opcií

Záverečná kapitola bude popisovať praktické využitie Meixnerovho procesu pri modelovaní finančných derivátov, opcií. Porovnáme BS model s modelom založeným na Meixnerovom procese. Uvedieme výsledky BS modelu, ktorého parametre budú odhadnuté na základe informácií o cenách opcií. Pri modeli s Meixnerovým procesom využijeme dva prístupy získania ekvivalentnej martingalovej miery, ktoré porovnáme.

Budeme pracovať s 25 opciami na akciu Yahoo s rôznymi maturitami a realizačnými cenami. Dáta pochádzajú zo dňa 2.12.2015, kedy cena Adj.Close akcie Yahoo bola 35,65. Na obrázku (Obr.23) vidíme opcie s maturitou $T = 19.1.2018$. Je to jednak závislosť trhovej last ceny opcie (poslednej obchodovanej) od realizačnej ceny, taktiež sme zobrazili mid ceny (priemer medzi bid a ask cenou opcie) v závislosti od realizačnej ceny. Obrázky pre opcie s inými maturitami sa nachádzajú v prílohe. V prílohe sa nachádza aj tabuľka so všetkými opciami. Pri spracovaní piatej kapitoly budeme čerpať z [2], [3].



Obr. 23: Opcie akcie Yahoo s $T = 19.1.2018$, čierne sú bid a ask ceny, červená hviezdička mid cena a červený krúžok last cena

5.1 Black - Scholesov model

V tretej kapitole sme pri popise BS modelu uviedli aj explicitné vzorce na oceňovanie kúpnych a predajných opcií európskeho typu. Teraz bližšie popíšeme spôsob oceňovania opcií, ktorý je založený nielen na údajoch získaných z časových radov denných logaritmickej výnosov podkladového aktíva, ale využíva aj informácie o obchodovaných opciách. Keďže je postupnosť pri kalibrovani opačná ako pri klasickom oceňovaní derivátov, nazýva sa aj inverzným problémom oceňovania. Podstatou riešenia inverzného problému oceňovania je odhad parametrov modelu pomocou minimalizácie odchýlky medzi trhovými cenami a cenami opcií získanými modelom.

Ako mieru zhody medzi trhovými cenami a cenami modelu sme využili strednú kvadratickú chybu (RMSE)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{\text{pocet opcii}} \sum_{\forall \text{opcie}} (\text{trhova cena} - \text{cena v modeli})^2} \quad (64)$$

Ďalšími možnosťami sú priemerná absolútna chyba (AAE),

$$AAE = \frac{1}{\text{pocet opcii}} \sum_{\forall \text{opcie}} |\text{trhova cena} - \text{cena v modeli}| \quad (65)$$

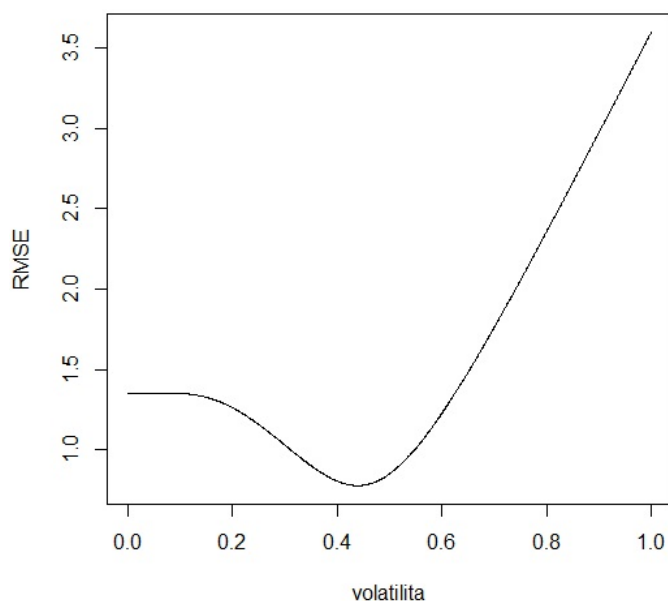
priemerná absolútna chyba ako percento primernej ceny opcie (APE),

$$APE = \frac{1}{\text{priemerna cena}} \frac{1}{\text{pocet opcii}} \sum_{\forall \text{opcie}} |\text{trhova cena} - \text{cena v modeli}| \quad (66)$$

a priemerná relatívna percentuálna chyba (ARPE),

$$ARPE = \frac{1}{\text{pocet opcii}} \sum_{\forall \text{opcie}} \frac{|\text{trhova cena} - \text{cena v modeli}|}{\text{trhova cena}}. \quad (67)$$

Obr. 24 prezentuje aké sú hodnoty RMSE pri zmene sigmy, ktorá je z intervalu (0, 1). Hodnota parametra sigma, pri ktorej bola stredná kvadratická chyba minimálna je 0,439.



Obr. 24: Nájdenie minimálneho RMSE zmenou volatility

Ako vidíme (Obr. 26), pri optimalizovaní parametra BS modelu v zmysle nájdenia sigmy, ktorá minimalizuje strednú kvadratickú chybu medzi trhovými cenami a cenami modelu je rozdiel medzi cenami BS modelu a trhovými cenami v porovnaní s predchádzajúcim obrázkom (Obr. 25), kedy bol parameter BS modelu určený z dát denných logaritmických výnosov menší.

Uvádzame aj hodnotu RMSE pre porovnanie. S optimalizovanou sigmou je to 0,7776, so sigmou odhadnutou z dát 1,3537.

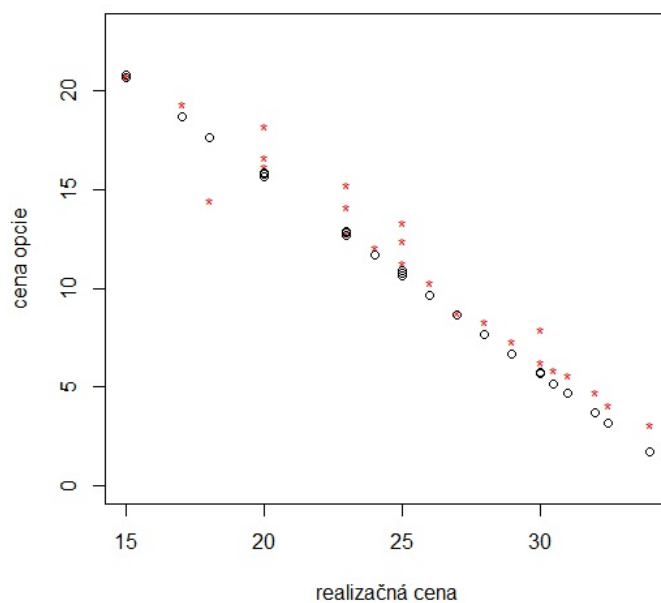
5.2 Meixnerov model

Pri Meixnerovom procese je už riešenie inverzného problému komplikovanejšie. Ukážeme však, že pri Meixnerovom modeli stačí na to, aby sme získali postačujúce výsledky aj iný prístup. Náčrt riešenia inverzného problému Meixnerovho procesu uvidíme na konci diplomovej práce, ako jej možné rozšírenie.

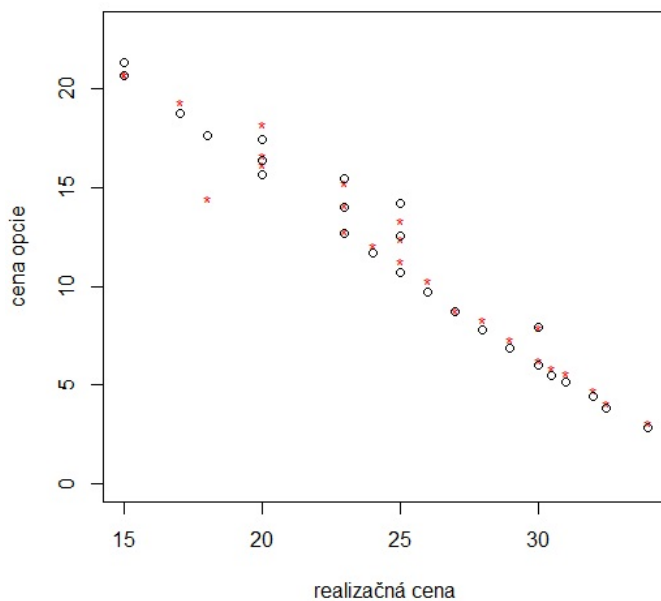
Nahradením Geometrického Brownovho procesu v BS modeli Lévyho procesom, konkrétne Meixnerovým procesom

$$S_t = S_0 e^{M_t} \quad (68)$$

získame model, v ktorom sú denné logaritmické výnosy akcie modelované pomocou Meixnerovho rozdelenia $Meixner(a, b, d, m)$.



Obr. 25: Červenou sú trhové mid ceny, čiernou sú ceny podľa BS modelu



Obr. 26: Červenou sú trhové mid ceny, čiernou sú ceny podľa BS modelu s optimalizovanou sigmou

Ako sme uviedli v prvej kapitole, bezarbitrážna cena európskych kúpnych opcií v čase $t \in [0, T]$ je daná

$$V_t = E_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \quad (69)$$

kde \mathbb{Q} je ekvivalentná martingalová miera a $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ je prirodzená filtrácia $M = \{M_t, 0 \leq t \leq T\}$.

Keďže pri Meixnerovom modeli je trh neúplný, t.j. existuje viacero ekvivalentných martingalových mier \mathbb{Q} , vybrali sme si dva prístupy získania ekvivalentnej martingalovej miery, ktoré postupne popíšeme, a potom uvedieme a porovnáme výsledky oceňovania opcií pomocou každého z nich.

5.2.1 Esscherova transformácia

Pri spracovaní tejto časti sme vychádzali z [10], [13], [14].

Esscherova transformácia sa často využíva v poistnej matematike a taktiež je vhodným nástrojom pri oceňovaní derivátov, ak sa dajú logaritmy cien podkladového aktíva popísať stochastickým procesom s nezávislými a stacionárnymi prírastkami. Vďaka Esscherovej transformácii získame ekvivalentnú pravdepodobnostnú mieru, pod ktorou je diskontovaný proces ceny podkladového aktíva martingalom.

Nech $(X_t)_{t \geq 0}$ je Lévyho proces s charakteristickou trojicou (γ, σ^2, μ) pri pravdepodobnostnej miere \mathbb{P} . Uvažujme proces ceny akcie nevyplácajúcej dividendy $S_t = S_0 e^{X_t}$ a Lévyho mieru ν spĺňajúcu

$$\int_{|x| \geq 1} e^{\vartheta x} \nu(dx) < \infty \quad \vartheta \in \mathbb{R} \quad (70)$$

Predpokladajme, že existuje momentová generujúca funkcia X_t

$$M_{X_t}(\vartheta) = E^{\mathbb{P}}(e^{\vartheta X_t}) = E^{\mathbb{P}}\left(\frac{S_t^\vartheta}{S_0^\vartheta}\right). \quad (71)$$

Pomocou Esscherovej transformácie získame ekvivalentnú pravdepodobnostnú mieru, pod ktorou je X_t Lévyho proces s nulovou Gaussovskou časťou, Lévyho mierou

$$e^{\vartheta x} \nu(dx) \quad (72)$$

a driftom

$$\gamma + \int_{-1}^1 x(e^{\vartheta x} - 1) \nu(dx). \quad (73)$$

Radon-Nikodymova derivácia pri zmene mier je

$$\frac{d\mathbb{Q}_\vartheta}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{e^{\vartheta X_t}}{E^{\mathbb{P}}(e^{\vartheta X_t})} = \frac{e^{\vartheta X_t}}{M_{X_t}(\vartheta)} \quad (74)$$

Diskontovaný proces ceny $\{e^{-rt}S_t\}_{t \geq 0}$ je martingal pri Q_ϑ

$$S_0 = E^{\mathbb{Q}_\vartheta}(e^{-rt}S_t) \quad (75)$$

$$= E^{\mathbb{Q}_\vartheta}(S_0 e^{-rt} e^{X_t}) \quad (76)$$

$$= S_0 e^{-rt} E^{\mathbb{Q}_\vartheta}(e^{X_t}) \quad (77)$$

Keďže $E\left(\frac{e^{\vartheta X_t}}{M_{X_t}(\vartheta)}\right) = 1$ potom

$$e^{rt} = E^{\mathbb{Q}_\vartheta}\left(\frac{e^{(1+\vartheta)X_t}}{M_{X_t}(\vartheta)}\right). \quad (78)$$

Nech ϑ^* je riešenie, potom \mathbb{Q}_{ϑ^*} je martingalová miera Esscherovej transformácie s hustotou

$$f_{X_t}^{\vartheta} = \frac{e^{\vartheta X_t}}{M_{X_t}(\vartheta)}. \quad (79)$$

$$e^{rt} = E^{\mathbb{Q}_{\vartheta^*}}\left(\frac{e^{(1+\vartheta^*)X_t}}{M_{X_t}(\vartheta^*)}\right) \quad (80)$$

$$= \frac{M_{X_t}(1 + \vartheta^*)}{M_{X_t}(\vartheta^*)} \quad (81)$$

$$= \frac{(M_{X_1}(1 + \vartheta^*))^t}{(M_{X_1}(\vartheta^*))^t} \quad (82)$$

Využijúc

$$M_{X_t}(\vartheta) = (M_{X_1}(\vartheta))^t \quad (83)$$

dostávame

$$e^r = \frac{M_{X_1}(1 + \vartheta^*)}{M_{X_1}(\vartheta^*)} \quad (84)$$

a ϑ^* je riešením poslednej rovnice.

Esscherova transformácia pre Meixnerovo rozdelenie

Ak $X_1 \sim M(a, b, d, m)$

$$e^r = \frac{M_{X_1}(1 + \vartheta^*)}{M_{X_1}(\vartheta^*)} \quad (85)$$

$$= \frac{\exp(2d \log(\cos(\frac{b}{2})) - 2d \log(\cos(\frac{a(1+\vartheta^*)+b}{2})) + m(1 + \vartheta^*))}{\exp(2d \log(\cos(\frac{b}{2})) - 2d \log(\cos(\frac{a\vartheta^*+b}{2})) + m\vartheta^*)} \quad (86)$$

z čoho vyplýva

$$r = 2d \log\left(\frac{\cos(\frac{a\vartheta^*}{2} + \frac{b}{2})}{\cos(\frac{a\vartheta^*}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2})}\right) + m \quad (87)$$

Po úpravách dostávame

$$\exp\left(\frac{r-m}{2d}\right) = \frac{\cos\left(\frac{a\vartheta^*}{2} + \frac{b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a\vartheta^*}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right)} \quad (88)$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{a\vartheta^*}{2} + \frac{b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a\vartheta^*}{2} + \frac{b}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2}\right) - \sin\left(\frac{a\vartheta^*}{2} + \frac{b}{2}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \quad (89)$$

$$= \frac{1}{\cos\left(\frac{a}{2}\right) - \tan\left(\frac{a\vartheta^*}{2} + \frac{b}{2}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \quad (90)$$

A následne algebraickými úpravami prevrátených hodnôt oboch strán rovnosti dostávame riešenie

$$\exp\left(\frac{m-r}{2d}\right) = \cos\left(\frac{a}{2}\right) - \tan\left(\frac{a\vartheta^*}{2} + \frac{b}{2}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\right) \quad (91)$$

$$-\tan\left(\frac{a\vartheta^*}{2} + \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\exp\left(\frac{m-r}{2d}\right) - \cot\left(\frac{a}{2}\right) \quad (92)$$

$$\frac{a\vartheta^*}{2} + \frac{b}{2} = -\arctan\left(\frac{-\cos(a/2) + e^{\frac{m-r}{2d}}}{\sin(a/2)}\right) \quad (93)$$

$$\vartheta^* = -\frac{1}{a}\left(b + 2\arctan\left(\frac{-\cos(a/2) + e^{\frac{m-r}{2d}}}{\sin(a/2)}\right)\right) \quad (94)$$

Pomocou Esscherovej transformácie sme získali pravdepodobnostnú mieru \mathbb{Q} , ktorá má rozdelenie *Meixner*($a, a\vartheta^* + b, d, m$).

Transformácia zachováva nekonečnú deliteľnosť rozdelenia a charakteristický triplet Lévyho rozdelenia má po Esscherovej transformácii tvar

$$\gamma^{\vartheta^*} = \gamma + \sigma^2\vartheta^* + \int_{-1}^1 (\exp(\vartheta^*x) - 1)\nu(dx) \quad (95)$$

$$\sigma^{\vartheta^*} = \sigma \quad (96)$$

$$\nu^{\vartheta^*}(dx) = \exp(\vartheta^*x)\nu(dx) \quad (97)$$

Teraz uvedieme odvodenie ceny európskej predajnej (put) opcie a následne pomocou put - call parity aj cenu európskej kúpnej (call) opcie. Využijeme pri tom nasledujúcu Lemu, ktorej dôkaz sa nachádza napríklad v [13].

Lema 5.1 (Factorization formula). Nech je S_t náhodná premenná, f merateľná funkcia a ϑ , k a t sú reálne čísla, $t \geq 0$. Potom

$$E^{\mathbb{Q}^\vartheta}(S_t^k f(S_t)) = E^{\mathbb{Q}^\vartheta}(S_t^k)E^{\mathbb{Q}^{\vartheta+k}}(f(S_t)) \quad (98)$$

\mathbb{Q}^ϑ je pravdepodobnostná miera parametrizovaná ϑ .

V ďalšom bude \mathbb{Q}_ϑ označovať pravdepodobnostnú mieru Esscherovej transformácie. $\vartheta = \vartheta^*$.

Podľa oceňovacej formulky (kapitola 1) vieme

$$P(S_0, E, r, T, \theta) = E^{\mathbb{Q}_{\vartheta^*}}(e^{-rT} \max(E - S_T, 0)) \quad (99)$$

$$= E^{\mathbb{Q}_{\vartheta^*}}(e^{-rT}(E - S_T)(1_{E \geq S_T})) \quad (100)$$

$$= Ee^{-rT} E^{\mathbb{Q}_{\vartheta^*}}(1_{E \geq S_T}) - e^{-rT} E^{\mathbb{Q}_{\vartheta^*}}(S_T 1_{E \geq S_T}). \quad (101)$$

Využitím Lemy platí

$$E^{\mathbb{Q}_{\vartheta^*}}(S_T 1_{E \geq S_T}) = E^{\mathbb{Q}_{\vartheta^*}}(S_T) E^{\mathbb{Q}_{\vartheta^*+1}}(1_{E \geq S_T}) \quad (102)$$

a pomocou tohto vzťahu dostávame

$$P(S_0, E, r, T, \theta) = Ee^{-rT} E^{\mathbb{Q}_{\vartheta^*}}(1_{(\log K/S_0) \geq S_T}) - S_0 E^{\mathbb{Q}_{\vartheta^*+1}}(1_{(\log K/S_0) \geq S_T}) \quad (103)$$

$$= Ee^{-rT} \int_{-\infty}^{(\log K/S_0)} f(x, \theta, \vartheta^*) dx - S_0 \int_{-\infty}^{(\log K/S_0)} f(x, \theta, \vartheta^* + 1) dx \quad (104)$$

kde

$$f(x, \theta, \vartheta^*) = \frac{(2\cos(\frac{b+a\vartheta^*}{2}))^{2d}}{2a\pi\Gamma(2d)} e^{\frac{(b+a\vartheta^*)(x-m)}{a}} \left| \Gamma\left(d + \frac{i(x-m)}{a}\right) \right|^2 \quad (105)$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad -\pi < b < \pi, \quad d > 0, \quad m \in \mathbb{R}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Cena európskej kúpnej opcie je

$$C(S_0, E, r, T, \theta) = P(S_0, E, r, T, \theta) + S_0 - Ee^{-rT} \quad (106)$$

$$= S_0 \int_{(\log K/S_0)}^{\infty} f(x, \theta, \vartheta^* + 1) dx - Ee^{-rT} \int_{(\log K/S_0)}^{\infty} f(x, \theta, \vartheta^*) dx. \quad (107)$$

Uvedené teoretické výsledky sme využili pri oceňovaní opcií akcie Yahoo. Ako sme videli, pri Esscherovej transformácii sa zmení len parameter b , a to v závislosti od ϑ^* . Pre akciu Yahoo máme $\vartheta^* = 11,60719$, parameter b sa teda zmení z $-0,091363$ na hodnotu $0,389271$.

5.2.2 Ekvivalentná martingalová miera pomocou úpravy driftu

Ďalším prístupom na získanie ekvivalentnej martingalovej miery pri neúplných trhoch je tzv. Mean - correcting equivalent martingale measure, teda Ekvivalentná martingalová miera pomocou úpravy driftu. Vychádzajúc zo [14] vieme, že nová hodnota driftu je v tvare

$$m_n = m_s + r - q - \log \phi(-i) \quad (108)$$

kde m_s je predošlá hodnota a $\phi(\cdot)$ označuje charakteristickú funkciu.

Ako sme uviedli v tretej kapitole, logaritmický výnos v BS modeli má normálne rozdelenie $N((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t)$. $m_s = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ a $\log \phi(-i) = \mu$. Preto je

$$m_n = r - q - \frac{\sigma^2}{2}. \quad (109)$$

Pre Meixnerov proces má nový parameter tvar

$$m_n = r - q - 2d \left(\log \left(\cos \left(\frac{b}{2} \right) \right) - \log \left(\cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) \right). \quad (110)$$

Pre akciu Yahoo je nový parameter $m_n = 0,0058845$. Pri oceňovaní opcií pomocou tejto ekvivalentnej martingalovej miery sme využívali simulácie procesu.

5.3 Porovnanie

Na záver diplomovej práce uvádzame porovnanie cien opcií pre BS model a Meixnerov model s oboma martingalovými mierami. Keďže sa v prípade inverzného problému kalibrovania BS modelu ako vstupné parametre využívajú aj trhové ceny, uvedieme porovnanie modelov pre oba prípady, teda pre last aj mid ceny. Zakaždým sme si vybrali 10 opcií, ktoré sme ocenili pomocou troch modelov. Pri BS modeli sme hľadali minimálne RMSE len s ohľadom na týchto 10 opcií. Porovnanie cien, hodnoty RMSE ako aj parametre každého modelu uvádzame v tabuľkách.

strike	T	last	Meixner Esscher	Meixner mean	BS
25	15.1.2016	11	10,6656	10,67119	10,66559513
26	15.1.2016	9,5	9,666219	9,671904	9,66621894
27	15.1.2016	9	8,666843	8,672357	8,66684274
28	15.1.2016	8,19	7,667467	7,672936	7,66746655
30	15.1.2016	6,29	5,668714	5,674277	5,66871416
31	15.1.2016	5,15	4,66934	4,674859	4,66933797
30	15.7.2016	6	5,746564	5,775345	5,74656425
20	20.1.2017	15,9	15,76821	15,82067	15,76820928
23	20.1.2017	13,48	12,78594	12,83895	12,78594067
23	19.1.2018	13,3	12,90405	13,00257	12,90405208
		RMSE	0,431348	0,4090744	0,4313483

Tabuľka 6: Porovnanie modelov last ceny

Môžeme vidieť, že najnižšiu hodnotu RMSE dosiahol Meixnerov model s martingalovou mierou získanou úpravou driftu (Meixner mean). Hodnota RMSE Meixnerovho modelu s Esscherovou transformáciou (Meixner Esscher) sa od RMSE BS modelu nelíši. Rozhodli sme sa preto nájsť také parametre, pri ktorých by RMSE dosiahlo nižšiu hodnotu aj pre Meixner Esscher. Berúc do úvahy obmedzenia na parametre pri definícii Meixnerovho rozdelenia, zobrali sme niekoľko hodnôt v okolí odhadnutých parametrov a následne sme otestovali všetky možné kombinácie. Zo všetkých 4624 kombinácií parametrov sme vybrali dve, pri ktorých bola hodnota RMSE najnižšia, tieto modely označujeme Meixner Esscher 2 a Meixner Esscher 3. V Tabuľke 7 už uvádzame okrem výsledkov predchádzajúcich troch modelov aj výsledky pre nové dva. V porovnaní s Meixner Esscher sme dosiahli lepšiu hodnotu RMSE, ale stále ostáva najnižšou práve hodnota RMSE Meixner mean modelu. V Tabuľke 7 môžeme vidieť aj zmenu parametrov.

	Meix. Esscher	Meix. Esscher 2	Meix. Esscher 3	Meixner mean	BS
<i>a</i>	0,041408	0,081408	0,046408	0,041408	
<i>b</i>	0,389271	0,726872	0,54188	- 0,09136	
<i>d</i>	0,467661	0,437661	0,452661	0,467661	
<i>m</i>	0,001604	-0,002396	-0,000396	0,005811	
	10,6656	10,665595	10,665595	10,67119	10,665595
	9,666219	9,666218	9,666219	9,671904	9,666219
	8,666843	8,66684	8,698468	8,672357	8,666843
	7,667467	7,667454	7,667467	7,672936	7,667467
	5,668714	5,66847	5,668714	5,674277	5,668714
	4,66934	4,897077	4,669338	4,674859	4,669338
	5,746564	5,746312	5,746564	5,775345	5,746564
	15,76821	15,768209	15,768209	15,82067	15,768209
	12,78594	12,785941	12,785941	12,83895	12,785941
	12,90405	12,904052	12,904052	13,00257	12,904052
RMSE	0,431348	0,4115815	0,4290153	0,4090744	0,431348

Tabuľka 7: Porovnanie modelov last ceny 2

Podobne sme ocenili opcie aj vzhľadom na mid cenu. Porovnanie troch modelov uvádzame v Tabuľke 8. Opäť sme najnižšiu hodnotu RMSE získali pre Meixner mean model. Avšak pre všetky tri modely sa ceny modelu opcií nachádzajú v intervale (bid,ask). Aj pri mid cenách sme spomedzi nami testovaných 4624 kombinácií parametrov vybrali tie dva modely, ktoré mali najnižšiu hodnotu RMSE, Meixner Esscher 2 a Meixner Esscher 3. Oba majú nižšiu hodnotu RMSE než pôvodný Meixner Esscher model (Tabuľka 9).

strike	T	bid	ask	mid	Meixner Esscher	Meixner mean	BS
15	15.1.2016	19,3	22,2	20,75	20,65936	20,66505	20,65935708
23	15.1.2016	11,65	14	12,825	12,66435	12,66995	12,66434752
24	15.1.2016	10,3	13,9	12,1	11,66497	11,67053	11,66497133
25	15.1.2016	10,55	12	11,275	10,6656	10,67119	10,66559513
26	15.1.2016	8,7	11,9	10,3	9,666219	9,671904	9,66621894
27	15.1.2016	7,8	9,75	8,775	8,666843	8,672357	8,66684274
17	15.7.2016	17,55	21,25	19,4	18,70472	18,73349	18,70471974
20	20.1.2017	14,4	18,9	16,65	15,76821	15,82067	15,76820928
23	20.1.2017	12	16,25	14,125	12,78594	12,83895	12,78594067
25	20.1.2017	10,5	14,4	12,45	10,79776	10,85046	10,79776160
				RMSE	0,8241339	0,7956007	0,8241339

Tabuľka 8: Porovnanie modelov mid ceny

Na záver môžeme zhodnotiť, že sme najlepšie ocenenie opcií dosiahli pomocou Meixner mean modelu. Nesmieme zabúdať na fakt, že tento model sme získali jednoduchou úpravou driftu, kým BS model sme optimalizovali a pomocou Meixner Esscher modelu sme ani po malých úpravách parametrov nedokázali dospieť k lepšiemu výsledku. Je však pravda, že odchýlky neboli natoľko výrazné, aby sme niektorý z modelov považovali za zlý.

Pravdepodobne najlepšou voľbou by bol Meixnerov model, ktorý by sme podobne ako BS model optimalizovali. Teda by sme využili nielen informácie z denných logaritmickej výnosov akcie ale aj z trhových cien obchodovaných opcií. Pri Meixnerovom procese je však riešenie inverzného kalibračného problému podstatne zložitejšie, jedná sa o nelineárny problém najmenších štvorcov. Pri jeho riešení by sa využila relatívna entropia, ako miera vzdialenosti dvoch ekvivalentných martingalových mier a taktiež špeciálne zvolené váhy jednotlivých derivátov. Riešenie by bolo nájdené napr. vďaka BFGS metóde.

	Meix. Esscher	Meix. Esscher 2	Meix. Esscher 3	Meixner mean	BS
<i>a</i>	0,041408	0,011408	0,016408	0,041408	
<i>b</i>	0,346473	0,445308	0,040810	- 0,09136	
<i>d</i>	0,467661	0,437661	0,437661	0,467661	
<i>m</i>	0,001604	0,000604	0,004604	0,005885	
	20,65936	20,659357	20,659357	20,66505	20,659357
	12,66435	12,664348	12,664348	12,66995	12,664348
	11,66497	11,664971	11,664971	11,67053	11,664971
	10,6656	10,665595	10,691365	10,67119	10,665595
	9,666219	9,666219	9,666219	9,671904	9,666219
	8,666843	8,666843	8,666843	8,672357	8,666843
	18,70472	18,704720	18,704720	18,73349	18,70472
	15,76821	15,911467	15,768209	15,82067	15,768209
	12,78594	12,785941	12,785941	12,83895	12,785941
	10,79776	10,797762	10,823395	10,85046	10,797762
RMSE	0,8241339	0,8099286	0,8171399	0,7956007	0,8241339

Tabuľka 9: Porovnanie modelov mid ceny 2

Kalibračný problém by bol v tvare:

Uvažujme predchádzajúci model s pravdepodobnostnou mierou \mathbb{P}_0 a charakteristickou trojicou Lévyho procesu $(\gamma_0, \sigma_0, \nu_0)$. Nájdite θ , ktorá minimalizuje

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^N \omega_i |C^\theta(T_i, K_i) - C_i|^2 + \alpha \varepsilon(Q_\theta | P_0)$$

kde ω_i sú váhy, C_i predstavujú trhové ceny uvažovaných opcí, $C^\theta(T_i, K_i)$ sú ceny z modelu, $\varepsilon(Q_\theta | P_0)$ je relatívna entropia modelu $(\gamma(\theta), \sigma(\theta), \nu(\theta))$ vzhľadom na predchádzajúci model a α je regularizačný parameter. [2].

Záver

Cieľom teoretickej časti bolo priblíženie Lévyho procesov, najmä Meixnerovho procesu. Hlavný cieľ diplomovej práce však spočíval v praktickej časti. V overení predpokladov Black - Scholesovho modelu na trhových dátach a v preskúmaní kvalitnejšieho modelovania finančných trhov pomocou Meixnerovho procesu.

V prvých dvoch kapitolách, ktoré boli čisto teoretické, sme popísali základné pojmy a princípy potrebné pri modelovaní finančných trhov a Lévyho procesy. Vychádzali sme hlavne z [2], [11], [13]. Tretia kapitola rovnako ako aj štvrtá obsahovali jednak teoretický základ pre Black - Scholesov model a Meixnerov proces ako aj praktické otestovanie vhodnosti modelovania finančných trhov pomocou daného modelu. Predpoklady modelov sme otestovali na denných logaritmických výnosoch niekoľkých akcií. V prípade Black - Scholesovho modelu sme grafickými metódami ale aj štatistickými testami zamietli normalitu výnosov. Taktiež sme zhodnotili, že nie je splnený ani predpoklad nemennosti parametrov, keďže volatilita sa časom menila. V štvrtej kapitole, pri Meixnerovom procese sme už nulovú hypotézu nezamietli, dáta pochádzali z daného rozdelenia, ktoré sme odhadli pomocou Metódy momentov. V záverečnej kapitole sme sa venovali oceňovaniu európskych kúpnych opcií akcie Yahoo. Využili sme Black - Scholesov model s parametrom sigma, ktorý bol zvolený v zmysle minimalizácie odchýlky medzi trhovými cenami a cenami modelu. Pri oceňovaní pomocou Meixnerovho procesu sme využili dve metódy nájdenia ekvivalentnej martingalovej miery - Esscherovu transformáciu a Ekvivalentnú martingalovú mieru s upraveným driftom. V závere sme uviedli porovnanie modelov. Pri Esscherovej transformácii sme otestovali ako budú vplývať malé zmeny parametrov rozdelenia na RMSE. Videli sme, že najlepším a dá sa povedať aj najjednoduchším spôsobom oceňovania opcií je využitie Meixnerovho procesu s ekvivalentnou martingalovou mierou nájdenou pomocou úpravy driftu. Taktiež sme priniesli stručný prehľad riešenia inverzného kalibračného problému s Meixnerovým procesom, ktorý by bol adekvátnym pri porovnávaní s optimalizovaným Black - Scholesovým modelom.

Prínos diplomovej práce spočíva jednak v priblížení Meixnerovho procesu ale taktiež aj v jeho praktickom využití pri modelovaní finančných trhov. Nemenej dôležité je porovnanie metód na nájdenie ekvivalentnej martingalovej miery. Prínosom pre autorku

je možnosť praktického využitia viacerých metód testovania dobrej zhody na trhových dátach. Taktiež aj porovnanie Black -Scholesovho modelu a modelu s Meixnerovým procesom pri oceňovaní finančných derivátov.

Potenciálne možnosti rozšírenia diplomovej práce sú vo využití Meixnerovho modelu so stochastickou volatilitou. Taktiež riešenie inverzného kalibračného problému aj v prípade modelu s Meixnerovým procesom. Išlo by o nelineárny problém najmenších štvorcov. Pri jeho riešení by sa využila relatívna entropia, ako miera vzdialenosti dvoch ekvivalentných martingalových mier a taktiež špeciálne zvolené váhy jednotlivých derivátov.

Literatúra

- [1] Bu, Yongqiang., *Option pricing using Lévy processes*, Master Thesis, CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY - Department of Mathematical Statistics, Goteborg, Sweden, 2007 , dostupné na internete (11.4.2016): <http://www.math.chalmers.se/~palbin/YongqiangBu.pdf>
- [2] Cont, R., Tankov, P., *Financial Modelling With Jump Processes*, CRC Press LLC, 2004
- [3] Cont, R., Tankov, P., *Non-parametric calibration of jump-diffusion option pricing models*, Journal of Computational Finance 7 (2004), dostupné na internete (11.4.2016): <http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/ramacont/papers/entropy.pdf>
- [4] Deville, D., *On Lévy processes for option pricing: Numerical methods and calibration to index options*, diplomová práca, Universita Politecnica delle Marche - Facolta di Economia, Ancona, Taliansko, 2007, dostupné na internete (11.4.2016): http://ddeville.me/static/media/research/univpm_thesis.pdf
- [5] Gerber, H., U., Shiu, E., S., W., *Option pricing by Esscher transforms*, Trans. Soc. Act. 46 (1994), 99 - 191,
- [6] Grigelionis, B., *Processes of Meixner type*, Lithuanian Mathematical Journal 39 (1999), 33 - 41, dostupné na internete (11.4.2016): <http://down.cenet.org.cn/upfile/54/200761521830144.pdf>
- [7] Harman, R., *Pravdepodobnosť a štatistika*, učebné texty, Univerzita Komenského v Bratislave - Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Bratislava, 2014, dostupné na internete (11.4.2016): <http://www.iam.fmph.uniba.sk/ospm/Harman/pinf.pdf>
- [8] Kyprianou, A., E., *Lévy processes and continuous state - branching processes: part I*, učebné texty, University of Bath - Department of Mathematical Sciences, Bath, 2008, dostupné na internete (11.4.2016): <http://www.maths.bath.ac.uk/~ak257/LCSB/part1.pdf>

- [9] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V., *Kapitoly z finančnej matematiky*, EPOS, Bratislava, 2005
- [10] Mazzola, E., Muliere, P., *Reviewing alternative characterizations of Meixner process*, Probability Surveys 8 (2011), 127 – 154
- [11] Papapantoleon, A., *An introduction to Lévy processes with application in finance*, skriptá, University of Piraeus, Greece, 2005, dostupné na internete (11.4.2016): <http://arxiv.org/pdf/0804.0482.pdf>
- [12] Paul Lévy, dostupné na internete (11.4.2016): <http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/ramacont/levy.html>
- [13] Robbertse, J., L., *On the modeling of asset returns and the calibration of european option pricing model*, a dissertation, University of Johannesburg - Faculty of Science, Juhoafrická republika, 2006, dostupné na internete (11.4.2016): <https://ujdigispace.uj.ac.za/bitstream/handle/10210/756/MSc%20Dissertation%20-%20Wickes%20Robbertse.pdf?sequence=1>
- [14] Schoutens, W., *Lévy Processes in Finance - Pricing Financial Derivatives*, John Wiley & Sons Inc., 2003
- [15] Schoutens, W., *Meixner Processes in Finance*, K.U.Leuven, Belgium, 2001, dostupné na internete (11.4.2016): <http://www.eurandom.tue.nl/reports/2001/002-report.pdf>
- [16] Schoutens, W., *The Meixner Process: Theory and Applications in Finance*, K.U.Leuven, Belgium, 2002, dostupné na internete (11.4.2016): <http://www.eurandom.tue.nl/reports/2002/004-report.pdf>
- [17] Sihlobo, O., *Stochastic Time-Changed Lévy Processes with their Implementation*, University of Cape Town - Faculty of Commerce, Department of Actuarial Science, Juhoafrická republika, 2014, dostupné na internete (11.4.2016): http://open.uct.ac.za/bitstream/handle/11427/13156/thesis_com_2014_sihlobo_o.pdf?sequ

- [18] Ševčovič, D., Stehlíková, B., Mikula, K., *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Slovenská technická univerzita v Bratislave, Bratislava, 2009
- [19] Tankov, P., *Lévy Processes in Finance: Inverse Problems and Dependence Modelling*, Ecole Polytechnique, France, 2004, dostupné na internete (11.4.2016): <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00007944/document>
- [20] Zápražná, D., *Lévyho procesy vs. Black - Scholesov model*, diplomová práca, Univerzita Komenského v Bratislave - Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Bratislava, 2012, dostupné na internete (11.4.2016): <http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2012/zaprazna/diplomovka.pdf>

Príloha

Charakteristická funkcia Meixnerovho rozdelenia

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= E[e^{itX}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2\cos(b/2))^{2d}}{2a\pi\Gamma(2d)} \exp\left(\frac{b(x-m)}{a} + itx\right) \left| \Gamma\left(d + \frac{i(x-m)}{a}\right) \right|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2\cos(b/2))^{2d}}{2a\pi\Gamma(2d)} \exp\left(\left(\frac{b+iat}{a}\right)(x-m) + itm\right) \left| \Gamma\left(d + \frac{i(x-m)}{a}\right) \right|^2 dx \\ &= \frac{(2\cos(b/2))^{2d}}{(2\cos(\frac{b+iat}{2}))^{2d}} e^{itm} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2\cos(\frac{b+iat}{2}))^{2d}}{2a\pi\Gamma(2d)} \exp\left(\left(\frac{b+iat}{a}\right)(x-m)\right) \left| \Gamma\left(d + \frac{i(x-m)}{a}\right) \right|^2 dx}_{=1} \\ &= \frac{(2\cos(b/2))^{2d}}{(2\cos(\frac{b+iat}{2}))^{2d}} e^{itm} \\ &= \left(\frac{\cos(\frac{b}{2})}{\cos(-i(\frac{at-ib}{2}))}\right)^{2d} e^{itm} \\ &= \left(\frac{\cos(\frac{b}{2})}{\cosh(\frac{at-ib}{2})}\right)^{2d} e^{itm}\end{aligned}$$

Kumulatívna vytvárajúca funkcia Meixnerovho rozdelenia

$$\begin{aligned}\kappa_X(t) &= \log(\phi_X(-it)) \\ &= \log\left(\left(\frac{\cos(\frac{b}{2})}{\cosh(-i(\frac{at+b}{2}))}\right)^{2d} e^{tm}\right) \\ &= \log\left(\left(\frac{\cos(\frac{b}{2})}{\cos(\frac{at+b}{2})}\right)^{2d} e^{tm}\right) \\ &= 2d \log\left(\cos\left(\frac{b}{2}\right)\right) - 2d \log\left(\cos\left(\frac{at+b}{2}\right)\right) + mt\end{aligned}$$

Metóda momentov

Z nasledujúcich vzťahov odvodíme odhady parametrov $\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}, \bar{m}$

$$\bar{X} = m + ad \operatorname{tg} \left(\frac{b}{2} \right) \quad (111)$$

$$\bar{S}^2 = \frac{a^2 d}{1 + \cos(b)} \quad (112)$$

$$\bar{\kappa}_1 = \sin(b) \sqrt{\frac{1}{d(1 + \cos(b))}} \quad (113)$$

$$\bar{\kappa}_2 = 3 - \frac{\cos(b) - 2}{d} \quad (114)$$

Umocnením (113) a využitím $\sin^2(b) + \cos^2(b) = 1$ získame

$$\bar{\kappa}_1^2 = \frac{1 - \cos(b)}{d} \quad (115)$$

Vzťah (114) môžeme pomocou predchádzajúcej rovnosti upraviť na

$$\bar{\kappa}_2 = 3 + \frac{1}{d} + \frac{1 - \cos(b)}{d} = 3 + \frac{1}{d} + \bar{\kappa}_1^2 \quad (116)$$

z čoho získame odhad

$$\bar{d} = \frac{1}{\bar{\kappa}_2 - \bar{\kappa}_1^2 - 3} \quad (117)$$

a vyjadrením zo (114) aj

$$\cos(b) = 2 + \bar{d}(3 - \bar{\kappa}_2). \quad (118)$$

Keďže b je parameter šikmosti, musí mať rovnaké znamienko ako odhad šikmosti z dát, preto

$$\bar{b} = \operatorname{sign}(\bar{\kappa}_1) \arccos(2 + \bar{d}(3 - \bar{\kappa}_2)). \quad (119)$$

Dosadením vzťahu pre $\cos(b)$ a odhadu \bar{d} do (112) získame odhad aj pre parameter \bar{a}

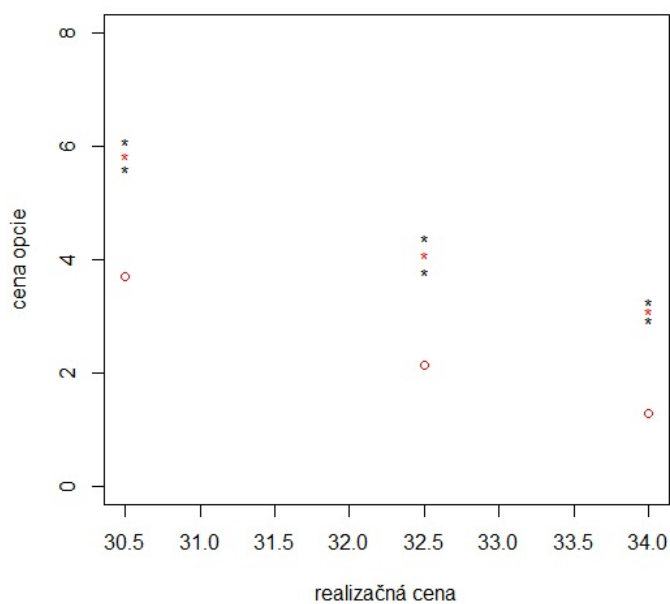
$$\bar{a} = \sqrt{\bar{S}^2 \left(\frac{1 + \cos(\bar{b})}{\bar{d}} \right)} \quad (120)$$

Zo (111) máme

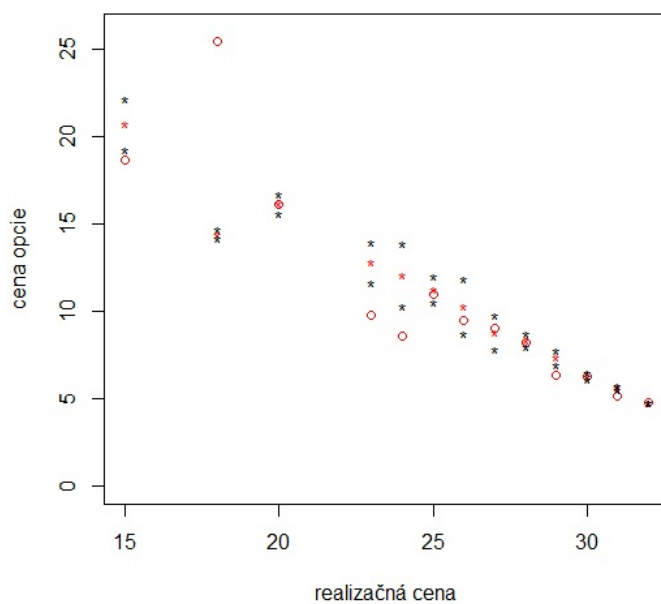
$$\bar{m} = \bar{X} - \bar{a}\bar{d} \operatorname{tg} \left(\frac{\bar{b}}{2} \right) \quad (121)$$

Zdroj: [13]

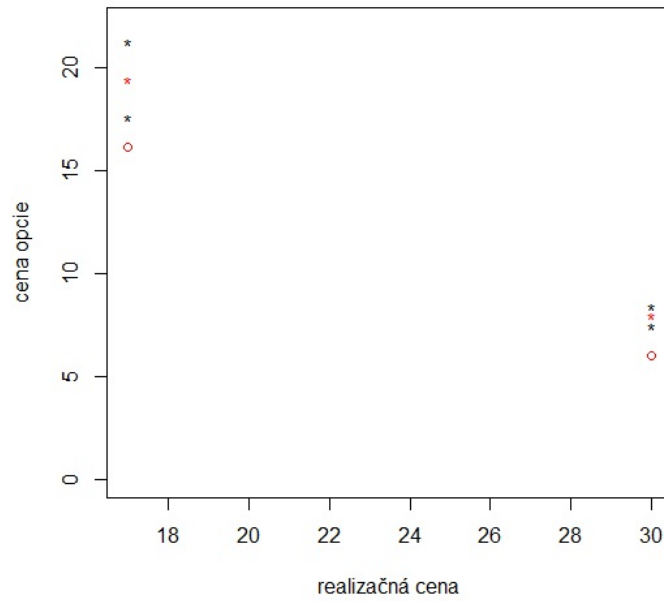
Opcie



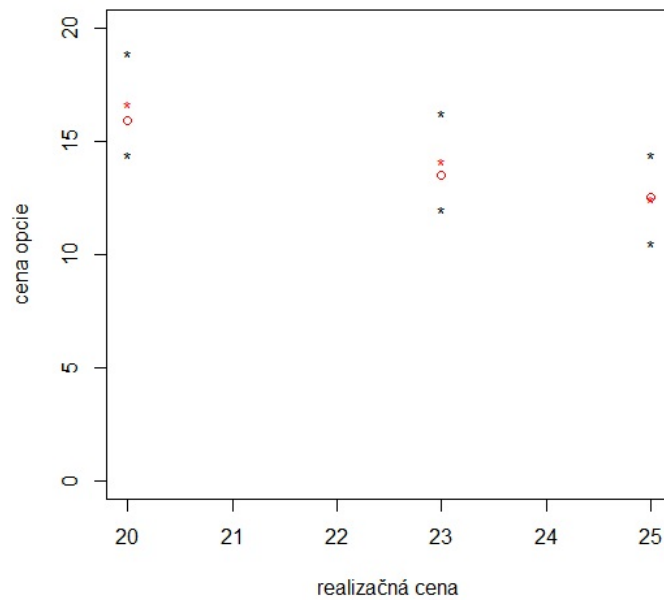
Obr. 27: Opcie akcie Yahoo s $T = 8.1.2016$, čierne sú bid a ask ceny, červená hviezdička mid cena a červený krúžok last cena



Obr. 28: Opcie akcie Yahoo s $T = 15.1.2016$, čierne sú bid a ask ceny, červená hviezdička mid cena a červený krúžok last cena



Obr. 29: Opcie akcie Yahoo s $T = 15.7.2016$, čierne sú bid a ask ceny, červená hviezdička mid cena a červený krúžok last cena



Obr. 30: Opcie akcie Yahoo s $T = 20.1.2017$, čierne sú bid a ask ceny, červená hviezdička mid cena a červený krúžok last cena

T	realizačná cena	last cena	bid cena	ask cena	mid cena
8.1.2016	30,5	3,7	5,6	6,1	5,85
8.1.2016	32,5	2,13	3,8	4,4	4,1
8.1.2016	34	1,29	2,94	3,25	3,095
15.1.2016	15	18,65	19,3	22,2	20,75
15.1.2016	18	25,52	14,2	14,7	14,45
15.1.2016	20	16,15	15,6	16,75	16,175
15.1.2016	23	9,79	11,65	14	12,825
15.1.2016	24	8,6	10,3	13,9	12,1
15.1.2016	25	11	10,55	12	11,275
15.1.2016	26	9,5	8,7	11,9	10,3
15.1.2016	27	9	7,8	9,75	8,775
15.1.2016	28	8,19	7,95	8,7	8,325
15.1.2016	29	6,3	6,95	7,75	7,35
15.1.2016	30	6,29	6,1	6,45	6,275
15.1.2016	31	5,15	5,5	5,75	5,625
15.1.2016	32	4,8	4,75	4,8	4,775
15.1.2016	17	16,15	17,55	21,25	19,4
15.1.2016	30	6	7,45	8,4	7,925
20.1.2017	20	15,9	14,4	18,9	16,65
20.1.2017	23	13,48	12	16,25	14,125
20.1.2017	25	12,5	10,5	14,4	12,45
19.1.2018	15	20	18,5	23	20,75
19.1.2018	20	11,5	16	20,5	18,25
19.1.2018	23	13,3	13	17,5	15,25
19.1.2018	25	10,94	12,15	14,5	13,325

Tabuľka 10: Opcie na akciu Yahoo