

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



METÓDY ODHADU KREDITNÉHO RIZIKA
V PORTFÓLIU ÚVEROV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**METÓDY ODHADU KREDITNÉHO RIZIKA
V PORTFÓLIU ÚVEROV**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko - finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr. Ing. Pavol Jurča, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Jakub Šiška
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Metódy odhadu kreditného rizika v portfóliu úverov
Methods of credit risk measurement in credit portfolio

Cieľ: Cieľom diplomovej práce je porovnanie niekoľkých prístupov k modelovaniu kreditného rizika a odhadu parametrov týchto modelov v portfóliu úverov. Obsahom DP by mala byť implementácia jednotlivých metód, ich vzájomné porovnanie a analýza výsledkov.

Vedúci: Mgr. Ing. Pavol Jurča, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 10.02.2015

Dátum schválenia: 11.02.2015
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Podakovanie Chcel by som sa poďakovať Mgr. Ing. Pavlovi Jurčovi, PhD., vedúcemu mojej práce, za jeho pomoc, nápady a rady pri písaní práce a v neposlednom rade aj za jeho ochotu a trpezlivosť. Rovnako chcem poďakovať aj mojim kolegom Tonovi, Hanke a Jožkovi za možnosť konzultovať svoje nápady a za ich pripomienky, rady a pomoc so spracovaním dát. V neposlednom rade ďakujem aj mojej snúbenici Miške, rodine a blízkym za ich podporu.

Abstrakt

ŠIŠKA, Jakub: Metódy odhadu kreditného rizika v portfóliu úverov [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Ing. Pavol Jurča, PhD., Bratislava, 73s.

Práca sa venuje modelovaniu pravdepodobnosti zlyhania počas celej životnosti úverov - aktuálnej úlohe slovenského a európskeho bankovníctva. Banky musia implementovať nové účtovné štandardy IFRS 9, ktoré prinášajú významné zmeny v oblasti výpočtu opravných položiek. Pre niektoré skupiny úverov budú banky musieť odhadovať očakávanú stratu, ktorá môže nastať počas celej životnosti úverov, na rozdiel od súčasnej situácie, kedy banky počítajú očakávanú stratu len zo zlyhaní, ktoré nastanú v priebehu jedného roka. Kľúčovým prvkom výpočtu očakávanej straty z celej životnosti úverov je pravdepodobnosť zlyhania počas celej životnosti úveru. Jej modelovaniu pre portfólio hypotekárnych úverov poskytnutých bežným klientom sa venujeme v tejto diplomovej práci. Využívame už existujúce modely na odhad pravdepodobnosti zlyhania počas obdobia jedného roka, pričom navrhujeme a vzájomne porovnáme viaceré prístupy ako ich použiť na výpočet pravdepodobnosti zlyhania počas celej životnosti úveru. Existujúcu informáciu o skóre z jednoročného modelu doplníme o odhadovanú mieru zlyhania v závislosti od podielu splatenej istiny a pravdepodobnostné rozdelenie ratingu úveru v budúcnosti dané maticou prechodu medzi ratingovými triedami. Výsledky ukazujú výrazne lepšiu predikčnú schopnosť modelov využívajúcich maticu prechodu z hľadiska presnosti odhadu pravdepodobnosti zlyhania aj z hľadiska rozlišovania dobrých a zlých úverov. Rovnako indikujú dôležitosť modelovania zmeny správania úverov v čase.

Kľúčové slová: Kreditné riziko, Opravné položky, IFRS 9, Pravdepodobnosť zlyhania, Celá životnosť úveru

Abstract

ŠIŠKA, Jakub: Methods of credit risk measurement in credit portfolio [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Ing. Pavol Jurča, PhD., Bratislava, 73p.

The thesis deals with lifetime probability of default modelling - current challenge in Slovak and European banking sector. Banks have to implement the new accounting standards IFRS 9, which bring significant changes in the area of provisions calculation. For some groups of loans banks will be obliged to calculate lifetime expected credit losses, in contrast to the current situation, where banks calculate expected loss based on default events occurring within one year period of time. Key element of lifetime expected loss calculation is lifetime probability of default. It's modelling on portfolio of retail mortgages is the main subject of this thesis. We use already existing one-year probability of default models, while we will design and compare multiple approaches to using them to compute lifetime probability of default. Existing information about score from one-year model will be extended by expected default rate according to percentage of principal paid and future probability distribution of rating categories given by transition matrices of rating categories. Compared approaches to lifetime probability of default modelling use score from one year models, estimated default rate according to percentage of principal paid and future probability distribution of rating categories given by transition matrices. Results show, that models based on transition matrix significantly outperforms other models in terms of both model accuracy and its ability to differentiate between good and bad loans. Thesis also indicates importance of modelling possibility of change in loan behaviour in time.

Keywords: Credit risk, Provisions, IFRS 9, Probability of default, Lifetime

Obsah

Úvod	9
1 Kreditné riziko	11
1.1 Zlyhanie úverov	12
1.2 Meranie kreditného rizika	13
1.2.1 Pravdepodobnosť zlyhania	14
1.2.2 Expozícia v momente zlyhania	15
1.2.3 Strata v prípade zlyhania	17
1.2.4 Očakávaná strata	17
2 Opravné položky	18
2.1 Opravné položky	18
2.1.1 Prístupy k tvorbe opravných položiek	18
2.1.2 Modely tvorby opravných položiek	20
2.2 Nové účtovné štandardy	22
2.2.1 Rozdelenie finančných aktív	22
2.2.2 Významné zvýšenie kreditného rizika	24
2.2.3 Meranie očakávanej straty	26
3 Modelovanie	28
3.1 Jednoročný model	28
3.1.1 Fáza plánovania	29
3.1.2 Dátová fáza	29
3.1.3 Vzorkový interval a pozorovací interval	30
3.1.4 Metodika a logistická regresia	31
3.1.5 Finálna podoba modelu	37
3.2 Časový efekt	38
3.2.1 Časový efekt	39
3.3 Modely pravdepodobnosti zlyhania	48
3.3.1 Jednoduchý model	49
3.3.2 Škálovaný model	51

3.3.3	Logistický model so statickým správaním	53
3.3.4	Logistický model s dynamickým správaním	56
3.4	Testovanie modelov	60
3.4.1	Presnosť odhadu pravdepodobnosti zlyhania	61
3.4.2	Rozlišovanie dobrých a zlých úverov	65
	Záver	68
	Zoznam použitej literatúry	70
	Príloha A	71

Úvod

Primárnou oblasťou podnikania komerčných bánk na Slovensku sú úverové obchody. Pre bežných klientov, drobných podnikateľov, malé a stredné podniky a veľké korporácie banky poskytujú rôzne úverové produkty, ktoré sa líšia účelom, splatnosťou, objemom požičiavaných prostriedkov, alebo úrokovou sadzbou. Poskytovanie úverových produktov so sebou nevyhnutne nesie riziko, že si dlžník nesplní zmluvne dohodnuté záväzky, čím vznikne banke strata. Toto riziko sa nazýva kreditné riziko. Snahou banky je optimalizovať výnosovo - rizikový profil úverového portfólia napr. prostredníctvom odhadovania budúcich strát z kreditného rizika. Odhad výšky strát je pre banku dôležitý aj z účtovného hľadiska. Základným pilierom výpočtu očakávanej straty je pravdepodobnosť, že klient pri splácaní úveru zlyhá.

Práve vo výpočte opravných položiek nastáva pre všetky banky v EÚ od 1. januára 2018 zásadná zmena, ktorá mení spôsob výpočtu očakávanej straty. Momentálne banky delia všetky úvery na dve skupiny - skupinu zlyhaných úverov a skupinu nezlyhaných úverov. Nový účtovný štandard IFRS 9 (International Financial Reporting Standards) zavedie tretiu skupinu - skupinu znehodnotených úverov, u ktorých došlo k významnému navýšeniu rizika zlyhania. Azda najzásadnejšia zmena, ktorú prinášajú nové štandardy, je zmena výpočtu očakávanej straty. V súčasnej podobe sa očakávaná strata vypočítava len zo zlyhaní, ktoré nastanú v priebehu najbližšieho roka. Očakávanú stratu banka počíta na základe matematických modelov, ktoré odhadujú pravdepodobnosť zlyhania do jedného roka. V novom štandarde sa pre skupiny znehodnotených a zlyhaných úverov odhaduje strata, ktorá banke vznikne v dôsledku zlyhania kedykoľvek počas zostávajúcej životnosti úveru. Banky sú tak postavené pred úplne novú požiadavku úpravy ich matematicko-štatistických modelov, pretože odhad pravdepodobnosti zlyhania počas celej zostávajúcej životnosti úveru je úloha, ktorú účtovníctvo ani banková regulácia v doterajšej histórii slovenského bankovníctva nevyžadovali.

Hlavnou úlohou tejto diplomovej práce je prispieť k riešeniu úlohy upraviť aktuálne využívané modely odhadu pravdepodobnosti zlyhania pre obdobie jedného roka na odhad pravdepodobnosti zlyhania počas celej zostávajúcej splatnosti úveru. V prvej kapitole uvedieme čitateľa do problematiky kreditného rizika a to najmä z pohľadu praktických otázok týkajúcich sa odhadu očakávanej straty. V ďalšej kapitole vysvet-

líme teóriu výpočtu opravných položiek, pričom sa zameriame najmä na problematiku rôznych prístupov k tomuto výpočtu. Detailne vysvetlíme, v čom spočíva plánovaná zmena v oblasti účtovníctva opravných položiek, ako aj dôvody tejto zmeny. V poslednej tretej kapitole najskôr opisujeme proces vývoja modelu jednoročnej pravdepodobnosti zlyhania a preskúmame vplyv času na zmeny správania úverov. Cieľom tejto práce je na základe týchto poznatkov a modelu odhadujúceho pravdepodobnosť zlyhania počas obdobia jedného roka preskúmať rôzne prístupy k odhadu pravdepodobnosti zlyhania hypotekárneho úveru počas celej zostávajúcej životnosti úveru. Prácu završíme porovnaním vytvorených modelov z hľadiska presnosti, s akou odhadujú pravdepodobnosť zlyhania a z hľadiska toho ich schopnosti predikcie zlyhania. Vývoj a testovanie modelov robíme na reálnych bankových dátach jednej z najväčších slovenských bánk.

1 Kreditné riziko

V tejto práci sa budeme takmer výlučne zaoberať úvermi poskytnutými bežným klientom. Existujú dva základné typy úverového obchodu - zabezpečené a nezabezpečené. Pri zabezpečenom úvere klient zaručuje svoje splácanie nehnuteľným majetkom ako sú domy, byty, pozemky, výrobné haly, alebo hnutelným majetkom, napr. autom, cennými papiermi, alebo hotovosťou. Zabezpečenie hnutelným majetkom sa častejšie využíva pri firemných klientoch. Nezabezpečené úvery nie sú kryté nehnuteľným ani hnutelným majetkom a spravidla nesú väčšie riziko ako zabezpečené úvery. Pri oboch typoch úverových obchodov banke hrozí riziko straty v dôsledku toho, že dlžník nebude plniť svoje zmluvné záväzky. Toto riziko nazývame kreditné riziko a stratu, ktorá nastane v dôsledku kreditného rizika, nazývame kreditná strata. Z účtovného hľadiska, ktorému sa viac budeme venovať neskôr, je dôležité, že banka si účtuje úvery, ktoré poskytuje na strane aktív. Zdroje, z ktorých úvery poskytuje, ako vklady bežných obyvateľov a firiem na bežné a termínované účty, pôžičky od iných bánk a centrálnej banky a taktiež aj vlastné imanie účtuje na strane pasív.

Kreditné riziko je podľa [1] strata, ktorá môže banke nastať s nenulovou pravdepodobnosťou z dôvodu neschopnosti, nevhôle alebo oneskorenia dlžníka pri splácaní svojich finančných záväzkov.

Kreditné riziko je prítomné v každom úverovom obchode. Vždy bude existovať nenulová pravdepodobnosť, že sa dlžník dostane do omeškania a prestane splácať záväzky v dôsledku neočakávaných udalostí. Príklady udalostí, ktoré vedú k zhoršeniu platobnej disciplíny fyzických osôb, sú strata zamestnania, dlhodobé zdravotné ťažkosti alebo úmrtie klienta. Právnické osoby môže do problémov priviesť napr. zmena ekonomickej situácie, vstup konkurentov na trh, cenová regulácia, ale aj problémy dodávateľov a odberateľov, alebo materských a dcérskych spoločností, ktoré sa môžu preniesť aj na danú spoločnosť. Pri žiadnom klientovi nevie banka vylúčiť udalosti vedúce ku stratám z kreditného rizika.

Ďalšou dôležitou vlastnosťou kreditného rizika je, že čím dlhšie trvá zmluvný záväzok, tým je riziko väčšie. Každým ďalším dňom sa zvyšuje šanca, že dlžník sa dostane do omeškania a následne pohľadávku nesplatí.

Snahou banky je zodpovedať si nasledovné otázky pre každú úverovú zmluvu:

1. Aké veľké riziko so sebou obchod nesie? Banku zaujíma, aká je nominálna veľkosť straty, ktorá jej vznikne, keď si dlžník nesplní zmluvne stanovené povinnosti.
2. Aká je pravdepodobnosť, že dlžník v splácaní zlyhá? Banka sa snaží odhadnúť pravdepodobnosť, že klient sa dostane do stavu, kedy už nesplatí celý úverový záväzok.
3. Akú sumu vie získať od klienta naspäť v prípade, že dôjde k zlyhaniu? Banka odhadne, koľko percent z celkovej dlžnej sumy sa podarí vymôcť.

Skôr, než môže banka začať s hľadaním odpovedí na tieto otázky, je nevyhnutná jasná a univerzálna definícia stavu zlyhania - stavu, keď už nie je pravdepodobné splatenie úveru.

1.1 Zlyhanie úverov

Existuje viacero konceptov spájaných s neschopnosťou zmluvnej protistrany splácať svoje záväzky a je potrebné medzi nimi rozlišovať. Uvedieme tri základné koncepty bežne využívané vo finančnej praxi.

Insolventnosť je stav, kedy je hodnota pasív firmy vyššia, ako hodnota jej aktív. Často sa stáva, že sa tento pojem zamieňa s bankrotom, avšak sú to odlišné stavy.

Druhým je zlyhanie (default) pri plnení zmluvných záväzkov, napríklad pri splácaní úverového obchodu. Jednou z príčin zlyhania môže byť práve insolventnosť.

Tretím stavom, ktorý sa využíva najmä u právnických osôb, je *bankrot*. Bankrot nastáva v momente, keď súd zhodnotí finančný stav zlyhaného dlžníka a následne hľadá možnosť dohody medzi manažmentom zlyhanej firmy a veriteľom finančného záväzku. Súd sa snaží nájsť spôsob, ako udržať zlyhanú firmu na trhu a uspokojiť nároky veriteľa odpredajom aktív firmy. Ak odpredaj aktív firmy nestačí na pokrytie dlhov, súd môže firmu v rámci konkurzného konania rozpredať.

Vo väčšine prípadov je kreditná strata následkom toho, že firma nie je schopná splatiť svoje záväzky. Príkladom takejto straty plynúcej z kreditného rizika môže byť pôžička firme, ktorá sa snaží dlhom financovať svoju rýchlu expanziu. Budúce finančné toky, ktoré vďaka expanzii získa, nemusia byť dostatočné na splácanie dlžôb. Iné, v praxi bežné prípady, sú firmy, ktoré vykazujú dobrú finančnú kondíciu v čase poskyt-

nutia dlhov, ale v budúcnosti ich produkt alebo služba nemusia byť schopné na trhu konkurovať.

Praktickým cieľom tejto diplomovej práce je vytvoriť model, ktorý bude odhadovať pravdepodobnosť zlyhania hypotekárneho úveru poskytnutého fyzickým osobám. Z tohto dôvodu budeme využívať nasledovné kvantitatívne definície zlyhania úverov fyzických osôb, resp. zlyhania fyzických osôb obsiahnuté v Bazilejskej dohode [2]. Banka sa môže na zlyhanie pozerať dvoma spôsobmi. Prvým pohľadom je zlyhanie úveru. Banka osobitne vyhodnocuje každý úverový obchod s klientom a osobitne posudzuje, či došlo k zlyhaniu daného úveru podľa nasledovnej definície:

Definícia 1.1. *(Zlyhanie úveru) Úver poskytnutý fyzickej osobe nazývame zlyhaný (rovnocenne hovoríme, že sa úver nachádza v stave zlyhania) ak dlžník na danom úvere mešká najmenej 90 dní so sumou v omeškaní najmenej 30 eur.*

Pri väčšine úverov je vhodnejšie vyhodnocovať zlyhanie na úrovni klientov. Zlyhanie klienta nastáva, ak platí nasledovná definícia:

Definícia 1.2. *(Zlyhanie klienta) Hovoríme, že dlžník banky, ktorý je fyzickou osobou, zlyhal (rovnocenne hovoríme, že sa klient nachádza v stave zlyhania), ak na niektorom úvere mešká najmenej 90 dní, pričom súčet všetkých čiastok v omeškaní je najmenej 30 eur.*

V praxi existujú okrem kvantitatívnych aj kvalitatívne podmienky zlyhania, napr. informácia o úmrtí klienta alebo informácia, že mal klient v minulosti odpísaný úver. Pre účely tejto práce budeme ďalej uvažovať iba kvantitatívne zlyhanie. Hypotekárne úvery pre bežných obyvateľov sú veľmi špecifické úverové obchody. Najčastejším účelom hypotekárneho úveru je financovanie vlastného bývania, čo má za následok odlišné správanie ako pri iných typoch úverov. Z tohto dôvodu budeme ďalej v tejto práci uvažovať zlyhanie na úrovni úveru.

1.2 Meranie kreditného rizika

Kvantifikovanie rizika je jedna z najdôležitejších úloh, pred ktorými stoja špecialisti a manažéri kreditného rizika v bankách. Ich úlohou je optimalizovať výnosovo-rizikový

profil. Problémom, s ktorým si musia poradiť, je, že neexistuje jeden parameter vyjadrujúci veľkosť rizika pri danom úvere. Aby manažéri rizika získali celkový obraz o rizikivosti úverového obchodu, snažia sa opísať každý úver z nasledovných pohľadov:

- **Pravdepodobnosť zlyhania:** Pravdepodobnosť, že sa klient, resp. úver dostane do stavu zlyhania
- **Expozícia:** Množstvo finančných prostriedkov, ktoré bude dlžník banke dlžiť v momente zlyhania
- **Miera návratnosti:** Percento z dlžnej sumy, ktorú dokáže banka v prípade zlyhania získať naspäť
- **Čas do splatnosti:** Časový úsek, počas ktorého sa od klienta očakávajú splátky

1.2.1 Pravdepodobnosť zlyhania

Pravdepodobnosť zlyhania úveru vyjadruje, aká je pravdepodobnosť, že sa klient dostane na danom úvere do omeškania 90 alebo viac dní, pričom suma v omeškaní je najmenej 30 eur. Pravdepodobnosť zlyhania budeme označovať PD (z anglického názvu probability of default). Pravdepodobnosť zlyhania sa nevyhnutne viaže k časovému úseku, pre ktorý ju odhadujeme. Označme aktuálnu dlžnú sumu klienta v deň t symbolom θ_t a aktuálny počet dní, ktoré je klient v omeškaní ku dňu t symbolom τ_t . Potom pravdepodobnosť zlyhania úveru na časovom intervale (t_1, t_2) bude

$$PD_{t_1, t_2} = P[\exists t \in (t_1, t_2); \tau_t \geq 90 \wedge \theta_t \geq 30]. \quad (1.1)$$

V praxi sa najčastejšie využíva odhad pravdepodobnosti zlyhania pre obdobie jedného roka. Nech t_0 je dátum, ku ktorému PD odhadujeme. Jednoročnú pravdepodobnosť zlyhania budeme označovať PD_1 a platí

$$PD_1 = P[\exists t \in (t_0, t_0 + 365); \tau_t \geq 90 \wedge \theta_t \geq 30]. \quad (1.2)$$

V tejto práci sa budeme podrobne venovať odhadu PD pre obdobie celej životnosti úveru, ktorú budeme značiť PD_L , tzv. *lifetime PD* (z angličtiny lifetime = životnosť). Označme T očakávaný dátum splatnosti úveru. Potom platí

$$PD_L = P[\exists t \in (t_0, T); \tau_t \geq 90 \wedge \theta_t \geq 30]. \quad (1.3)$$

Odhadovať pravdepodobnosť zlyhania má pre banku veľký význam. Odhadnutá PD sa využíva pri schvaľovaní úverov, kde je v závislosti od poskytovaného produktu stanovená hranica PD , za ktorou sa už všetky úvery zamietajú. Ďalšou dôležitou oblasťou, kde sa PD využíva, je cenotvorba. Klienti sú na základe PD roztriedení do skupín, ktoré dostanú úrokovú sadzbu podľa svojej rizikovosti. Rovnako ako pri výpočte úrokovej sadzby pri schvaľovaní úveru sa PD využíva aj pri refixácii úrokovej sadzby hypoték. Model sa tiež využíva pri výpočte opravných položiek, výpočte očakávanej straty banky a pri výpočte kapitálovej požiadavky na krytie rizík.

Pri odhadovaní PD sa využíva predpoklad stacionarity správania klientov v rámci úverového portfólia. Na základe historických klientskych dát a informácií o zlyhaniach sa vytvára prediktívny model. Veľmi obľúbený je model založený na logistickej regresii, používa sa aj lineárna regresia, stromy, náhodné lesy, či neurónové siete. Konkrétnym matematickým prístupom k modelovaniu PD sa budeme venovať v tretej kapitole.

1.2.2 Expozícia v momente zlyhania

Expozícia v momente zlyhania vyjadruje celkovú sumu, ktorú dlžník bude dlžný banke (zostatok istiny, nezaplatené, ale zaúčtované úroky, poplatky a úroky z omeškania) v momente zlyhania úveru. Budeme ju označovať EAD (z angličtiny - exposure at default). Navzdory jednoduchému opisu ju však môže byť pri niektorých typoch úverov veľmi náročné presne vyčíslieť. Zavedieme pojmy, ktoré nám pomôžu rozlíšiť rôzne typy expozície.

Hrubá expozícia je najhorší možný scenár. Reprezentuje celkové množstvo finančných prostriedkov, ktoré má dlžník zaplatiť a teda celkové množstvo finančných prostriedkov, o ktoré banka príde, ak dôjde k zlyhaniu. Ak banka požičia klientovi 100 eur, hrubá expozícia bude zostatok zo 100 eur, ktorý ešte klient nesplatil, navýšený o očakávané splátky úrokov, poplatkov a úrokov z omeškania, ktoré už boli zaúčtované. Hrubá expozícia nepočíta so zabezpečením úveru.

Čistá expozícia je hodnota hrubej expozície znížená o hodnotu zabezpečenia, ktorým je úver krytý. V prípade zlyhania úveru sa tržbou z predaja predmetu zabezpečenia dá znížiť kreditná strata. Banka pred prijatím zabezpečenia musí poznať odpoveď na štyri základné otázky:

1. Kto je vlastníkom kolaterálu v prípade zlyhania dlžníka? Čo v prípade, že klient už ručí rovnakou nehnuteľnosťou v inej banke? Banka môže prijať len také zabezpečenie, o ktorom vie, či a aká časť hodnoty by v prípade zlyhania patrila inej spoločnosti. Na základe tejto informácie následne zníži hodnotu zabezpečenia vystupujúcu vo výpočte čistej expozície.
2. Vie banka zabezpečenie ohodnotiť? Pokiaľ zabezpečenie nie sú finančné prostriedky, môže byť určenie jeho hodnoty náročnou výzvou. Pre nestálosť hodnoty zabezpečenia môže veriteľ na jeho hodnotu aplikovať percentuálne zníženie. Napríklad ak externý znalec určí cenu nehnuteľnosti na 100 000 eur, banka môže túto sumu znížiť o 20% a akceptuje len 80% zo znalcom určenej hodnoty nehnuteľnosti. Banka bude ďalej uvažovať zabezpečenie so zníženou hodnotou 80 000 eur.
3. Dá sa zabezpečenie predať? Predmet zabezpečenia by mal pozostávať z likvidných položiek. Ako uvádza [1], aj pri tak likvidnom trhu ako je trh s rezidenčnými nehnuteľnosťami môže dôjsť k problémom. Hoci má banka v pri hypotekárnom úvere založenom nehnuteľnosťou v prípade zlyhania právo sa nehnuteľnosti zmocniť a predať ju, môže byť toto právo prakticky bezcenné, ak dôjde k rozsiahlej realitnej kríze, ako napríklad v Japonsku začiatkom deväťdesiatych rokov. Banky vtedy získali zabezpečenia ako napr. hotely a golfové ihriská, ktoré nebolo možné predať a nijako im nepomohli v zmiernení dopadu kreditnej straty.
4. Je hodnota zabezpečenia korelovaná s kreditnou kvalitou podkladového úveru? V takom prípade môže byť zabezpečenie pri znižovaní kreditného rizika bezcenné. [1] uvádza prípad úverového obchodu, v ktorom bola pôžička dcérskej firme zabezpečená akciami materskej spoločnosti. Zlyhanie dcérskej firmy viedol k zlyhaniu materskej, výsledkom čoho bola nulová hodnota zabezpečenia.

Upravenú expozíciu, nazývanú aj expozícia v momente zlyhania *EAD* dostaneme, ako načerpanú časť hrubej expozície navýšenú o nenačerpanú časť vynásobenú kreditným konverzným faktorom *CCF* (z angličtiny, credit conversion factor). *CCF* odráža,

koľko percent z nenačerpanej časti limitu bude mať klient načerpaných v momente zlyhania. CCF je v prípade úverov 100% (napr. hypotekárne úvery s postupným čerpaním). Nižšiu hodnotu má pre produkty, pri ktorých klienti bežne nečerpajú celý povolený úverový rámec. Dobrým príkladom využitia CCF sú prečerpania na bežnom účte a kreditné karty. Banky schvália limity prečerpania na bežných účtoch klientov, ktoré následne v priemere klienti využívajú na 10 - 15%. Aká je v tomto prípade expozícia? Je to plná hrubá expozícia vo výške limitu prečerpania? Je to len priemerné percento z limitu, ktoré klient reálne čerpá? CCF slúži na odhad skutočnej načerpanej sumy v čase, keď dôjde k zlyhaniu. Expozíciu v momente zlyhania EAD vypočítame

$$EAD = \text{Načerpaná suma} + CCF \times \text{Nenačerpaná suma} \quad (1.4)$$

1.2.3 Strata v prípade zlyhania

Strata v prípade zlyhania vyjadruje, koľko percent z dlžnej sumy veriteľ stratí v prípade zlyhania dlžníka. Budeme ju označovať LGD (z anglického názvu loss given default). Hodnota LGD sa dá odvodiť z miery návratnosti (označujeme RR z angličtiny - recovery rate) Miera návratnosti vyjadruje percento z dlžnej sumy, ktorú vie banka získať späť v prípade zlyhania dlžníka, pričom platí vzťah

$$LGD = 1 - RR. \quad (1.5)$$

Nie vždy zlyhanie vyústí do straty 100 % z celkovej expozície. Vo veľkej väčšine prípadov vie veriteľ, či už priamo vymáhaním, predajom zabezpečenia alebo odpredajom pohľadávky tretej strane získať časť dlžnej sumy od dlžníka späť.

1.2.4 Očakávaná strata

Vynásobením jednoročnej pravdepodobnosti zlyhania, expozície v momente zlyhania a straty v prípade zlyhania dostávame jednoročnú očakávanú stratu z daného úveru. Očakávaná strata sa využíva pri tvorbe rezerv a odhade znehodnotenia úverových aktív banky. Pre očakávanú stratu platí

$$EL_1 = PD_1 \times EAD \times LGD. \quad (1.6)$$

Očakávanej strate a jej využitiu pri tvorbe opravných položiek sa budeme venovať v ďalšej kapitole.

2 Opravné položky z pohľadu regulácie a účtovníctva

Úlohou účtovníctva je podľa [3] objektívne a presne zaznamenávať skutočnosti a podávať objektívny, neskreslený pohľad na uplynulé skutočnosti. Z definície poslania účtovníctva vyplýva, že by účtovníctvo malo zachytávať a zaznamenávať znehodnotenie aktív baky. Takýmto znehodnotením je aj strata z úverového obchodu v dôsledku kreditného rizika. Podobne ako účtovníctvo, aj banková regulácia ovplyvňuje, akým spôsobom banka pracuje so stratou z úverových obchodov.

2.1 Opravné položky

Opravná položka je účtovná položka, ktorou banka upravuje hodnotu svojich aktív vzhľadom na ich znehodnotenie v dôsledku kreditného rizika. Existuje viacero modelov na výpočet opravných položiek, pričom princípy bankovej regulácie sú z dôvodu rozdielného zamerania vo viacerých aspektoch odlišné ako účtovný pohľad. Účtovníctvo sa už zo svojej podstaty snaží presne popísať skutočný stav a snaží sa zobrazovať straty, ktoré reálne vznikli. Na druhej strane stojí regulácia, ktorá sa snaží straty predvídať skôr ako nastanú. Modely pre výpočet opravných položiek sa môžu líšiť v prístupoch opísaných v ďalšej podkapitole.

2.1.1 Prístupy k tvorbe opravných položiek

Vzniknutá strata vs. očakávaná strata

Najzásadnejším rozporom medzi pohľadom účtovníctva a pohľadom regulácie je otázka, či by mali opravné položky odrážať iba stratu, ktorá naozaj vznikla, alebo aj stratu, o ktorej banka predpokladá, že vznikne. Vzniknutá strata je strata pri úvere, u ktorého existuje objektívny dôkaz jeho znehodnotenia, ako napr. jeho zlyhanie. Prístup vzniknutých strát sa snaží odhadnúť veľkosť straty pre úvery, u ktorých už bola strata objektívne identifikovaná. Na druhej strane, očakávaná strata sa počíta pre všetky úvery a má prediktívny charakter. Model predpokladá existenciu strát už prirodzene v úverových produktoch a nezaobrá sa identifikáciou vzniku konkrétnych stratových udalostí.

Individuálne ohodnotenie vs. portfóliové ohodnotenie

Banka sa pre jednotlivé skupiny úverových aktív môže rozhodnúť, či bude stratu počítať jednotlivo pre každý úver zvlášť, alebo stratu vypočíta portfóliovo. Je ťažké si predstaviť, že by banky pre stotisícové portfólia úverov poskytnutých bežným klientom pravidelne raz mesačne posudzovali každý úver a na základe expertného úsudku stanovili stratu, preto sa na odhad strát využíva štatistický model na úrovni nejakej homogénnej časti portfólia. Na druhej strane, vypočítavať stratu pre veľké korporácie s úverovou angažovanosťou v miliónoch eur pomocou štatistického prístupu by bolo problematické, pretože takýchto spoločností sú na slovenskom trhu rádovo desiatky a tým pádom by bolo prakticky nemožné vytvoriť pre ne odhad straty využívajúci robustný štatistický model.

Jednoročná očakávaná strata vs. strata počas celej životnosti úveru

Ďalšia otázka vynárajúca sa pri výpočte opravných položiek je, za aké obdobie odhadovať očakávanú stratu. Zatiaľ čo v súčasne platných účtovných štandardoch IAS 39 sa počíta s jednoročnou očakávanou stratou zadanou v podkapitole 1.2.4, v nových štandardoch IFRS 9, ktoré budú záväzné pre slovenské banky od 1. januára 2018, sa využíva aj očakávaná strata počas celej životnosti úveru, ktorú bližšie opíšeme v podkapitole 2.2.3 a ktorej výpočet je úlohou, s ktorou si do konca roka 2017 musia poradiť všetci manažéri rizika zaoberajúci sa jeho modelovaním. Kľúčovou časťou výpočtu straty počas celej životnosti úveru je model odhadujúci pravdepodobnosť zlyhania, ktoré môže nastať kedykoľvek počas zvyšnej životnosti úveru. Týmto modelom sa budeme podrobne zaoberať v praktickej časti tejto práce.

Súčasný stav vs. priemer za ekonomický cyklus

V tomto bode sa opäť rozchádza pohľad účtovníctva a regulácie. Účtovníctvo má za úlohu zobrazovať skutočný stav aktív, čo znamená, že aj odhady PD a EL by mali odrážať aktuálnu ekonomickú situáciu. Takýto odhad pravdepodobnosti zlyhania budeme označovať PD^{PiT} (z anglického Point in Time). Prístup vyžadovaný Bazilejskou dohodou [2] naopak vyžaduje, aby bol odhad PD založený na dlhodobom priemere, teda

aby odrážal priemerné ekonomické podmienky počas celého ekonomického cyklu. Odhad pravdepodobnosti zlyhania v zmysle Bazilejskej dohody budeme označovať PD^{TTC} (z anglického názvu Through The Cycle).

Jedným z problémov, ktoré so sebou nesie tvorba opravných položiek s odhadom pravdepodobnosti zlyhania PD^{PiT} , je procyklickosť. Hovoríme, že opravné položky sú procyklické, ak je ich veľkosť naviazaná na fázu ekonomického cyklu. V časoch ekonomického rastu je ich tvorba znížená, naopak, v čase recesie sa ich objem zvyšuje. Už v čase prepuknutia finančnej krízy sa objavili otázky, či je vhodné opravné položky vypočítavať podľa v súčasnosti platných medzinárodných účtovných štandardov využívajúcich PD^{PiT} . Procyklická tvorba opravných položiek prehľbuje problémy bánk v období finančnej recesie, čím sa recesia samotná ešte viac prehľbuje. Čoraz viac sa objavuje požiadavka na dynamickú tvorbu opravných položiek – vyššiu tvorbu opravných položiek v čase ekonomického rastu a zníženú tvorbu v čase ekonomických problémov. Vďaka dynamickej tvorbe si banka umelo zvýši náklady v dobe ekonomického rastu, čím si vytvorí rezervy na krytie strát v budúcnosti. Naopak, v čase recesie si zníži svoje náklady a straty kryje z vytvorených rezerv.

2.1.2 Modely tvorby opravných položiek

Uvedieme základné vlastnosti niektorých modelov výpočtu opravných položiek ako ich popisuje autorka v článku [3]. Ich výhody a nevýhody opíšeme vzhľadom na vyššie spomínané rozdiely.

Model vzniknutých strát - individuálne ohodnotenie

Model individuálne pre každý úver vyhodnotí, či existuje objektívny dôkaz udalosti vedúcej k strate. Model sa využíva pre veľkých firemných klientoch, pri ktorých už došlo k zlyhaniu. Výhodou modelu je pomerne jednoznačné identifikovanie vzniknutých strát. Spoločnou nevýhodou všetkých modelov vzniknutých strát je, že iba reagujú na už vzniknuté straty a nefungujú prediktívne.

Model vzniknutých strát - portfóliové ohodnotenie

Model skupinového znehodnotenia odhaduje veľkosť straty spoločne pre celé portfólio

homogénnych nezlyhaných úverov. Model sa využíva pre portfóliá nezlyhaných úverov poskytnutých bežným klientom. Príkladom môže byť portfólio hypotekárnych úverov. Výhodou modelu je možnosť aplikácie pre veľké portfóliá úverov. Nevýhodou je stále vyhodnocovanie iba už identifikovaných strát na množine nezlyhaných úverov.

Model očakávaných strát - jednoročný odhad

Tento model predpovedá očakávané straty na základe zlyhania úveru počas obdobia jedného roka. Model sa v súčasnosti používa na všetky typy nezlyhaných úverov, najmä na regulatívne účely. Základom modelu je odhad jednoročnej pravdepodobnosti zlyhania PD_1 . Výhodou modelu je, že straty predpovedá skôr ako vzniknú, rovnako aj možnosť aplikovať model na veľké portfóliá úverov. Nevýhodou je, že berie do úvahy len 12 mesačné obdobie, počas ktorého môže klient zlyhať a neskoršie zlyhania neberie do úvahy. V prípade použitia PD^{TTC} čiastočne zmierňuje procyklickosť tvorby opravných položiek.

Model očakávaných strát - celá životnosť úveru

Tento model bude po uvedení nových účtovných štandardov IFRS 9 do platnosti 1.1.2018 povinný pre určitú skupinu úverových obchodov všetkých typov. Model predpovedá očakávané straty počas celej životnosti úveru a budúce straty diskontuje pôvodne schválenou úrokovou mierou. Výhodou modelu je, že berie do úvahy všetky možné budúce straty v dostatočnom predstihu, pričom sa dá použiť pre veľké portfóliá úverov. Nevýhodou je riziko procyklickosti pri využití PD^{PiT} .

Skryté rezervy

Prístup stojí na tvorbe dodatočných opravných položiek k aktívam, bez toho aby boli zverejnené konkrétne detaily. Rezerva v bilancii sa vytvorí na úkor zníženého zisku. Výhodou modelu je, že vytvorené rezervy pokrývajú vyššie straty bánk v čase recesie a teda model nie je procyklický. Nevýhodou je nedostatočná transparentnosť, ktorá znižuje dôveru v banku.

Žiaden model tvorby opravných položiek nezabezpečí dostatočné množstvo zdrojov na krytie všetkých strát, ktoré môžu nastať. Napriek tomu sa odborníci z prostre-

dia účtovníctva usilujú zmierniť dopad finančných kríz na bankový sektor. Jednou z možností je práve lepšie predvídanie strát a zmierňovanie procyklickosti.

2.2 Nové účtovné štandardy v oblasti kreditnej kvality aktív

Počas finančnej krízy v rokoch 2007 - 2009 sa naplno prejavili niektoré problémy tvorby opravných položiek, ako napríklad procyklickosť opravných položiek a rezerv, obmedzenie časového rozsahu na jeden rok a zameranie sa na už vzniknuté straty. V reakcii na finančnú krízu medzinárodné fórum vlád a centrálnych bánk G20 (tvorí ho 19 samostatných ekonomicky najvyspelejších štátov sveta a Európska únia) prinieslo iniciatívu na vytvorenie nových účtovných štandardov. Nové štandardy majú odstrániť niektoré vyššie uvedené problémy doterajších účtovných štandardov.

Nové štandardy nazývané IFRS 9 obsahujú najmä dve zásadné zmeny. Prvá zmena sa týka klasifikácie aktív podľa ich kreditnej kvality. Zatiaľ čo v doteraz platných štandardoch IAS 39 členíme úvery na zlyhané a nezlyhané, v nových štandardoch pribudne tretia skupina aktív - znehodnotené. Druhá podstatná zmena sa týka výpočtu očakávanej straty. V súčasnosti platné štandardy využívajú jednoročnú odhadovanú stratu, teda stratu, ktorá pramení zo zlyhania klienta do 12 mesiacov od dátumu vykazovania. V IFRS 9 sa po prvýkrát objavuje zásadná zmena - pre niektoré skupiny aktív budú banky musieť počítať očakávanú stratu, ktorá môže nastať počas celej životnosti úveru. Znamená to, že budú musieť brať do úvahy aj zlyhanie, ktoré nastanú neskôr ako v priebehu nasledujúcich 12 mesiacov. Banky sú povinné IFRS 9 implementovať najneskôr 1. januára 2018. Významný rozdiel je aj to, že IAS 39 sa zameriava na vzniknuté straty, zatiaľ čo IFRS 9 implementuje koncept očakávanej straty, čím sa znižuje vyššie popísaný rozdiel medzi účtovným a regulatívnym pohľadom.

2.2.1 Rozdelenie finančných aktív

Súčasťou nových účtovných štandardov sú aj nové pravidlá pre klasifikáciu aktív. Uvedieme rozdelenie finančných aktív podľa ich kreditnej kvality. Podľa IFRS 9 sa budú finančné aktíva spojené s dlhom deliť na tri skupiny:

Neznehodnotené (Performing) aktíva

Skupina neznehodnotených aktív obsahuje finančné nástroje, u ktorých sa nezaznamenalo výrazné zhoršenie kreditnej kvality k dátumu vykazovania od prvotného hodnotenia kreditnej kvality (schvaľovania úverového obchodu). Pre tieto aktíva sa počíta 12-mesačná očakávaná strata. Úrokový výnos sa počíta z celej hodnoty expozície, bez zníženia o hodnotu opravných položiek. 12 mesačná očakávaná kreditná strata EL_1 je strata, ktorá banke vznikne v dôsledku zlyhania v období do 12 mesiacov od dátumu vykazovania. Do očakávanej straty sa nepočítajú iba splátky, ktoré počas týchto 12 mesiacov nebudú zaplatené, ale celková strata, ktorá v dôsledku zlyhania nastane, vynásobená pravdepodobnosťou zlyhania PD_1 . Očakávaná strata je pre túto skupinu aktív stratou v zmysle vzťahu (1.6).

Znehodnotené (Underperforming) aktíva

Druhá skupina finančných aktív sú aktíva, u ktorých došlo k významnému zhoršeniu kreditnej kvality v čase od ich pridania do portfólia (od schválenia alebo nákupu). Sú to však aktíva, u ktorých sa ešte nedá objektívne identifikovať zlyhanie. Výnimka z klasifikácie do tejto skupiny platí pre aktíva s nízkym kreditným rizikom. Pre skupinu znehodnotených aktív počítame očakávanú stratu, ktorá môže nastať počas celej zostávajúcej životnosti úveru. Budeme ju označovať EL_L . Úrokový výnos sa počíta rovnako ako pri skupine neznehodnotených aktív z celej hodnoty expozície, bez zníženia o hodnotu opravných položiek. EL_L je potom strata, ktorá vznikne na základe zlyhania, ktoré môže nastať kedykoľvek medzi dátumom vykazovania a očakávaným splatením úverového záväzku, inak povedané kedykoľvek v rámci očakávanej životnosti finančného nástroja. Celková očakávaná strata z daného úveru je potom vážený diskontovaný priemer strát za jednotlivé roky medzi dátumom vykazovania a dátumom splatnosti, pričom váhami sú pravdepodobnosti, že úver v jednotlivých rokoch zlyhá, pričom do daného roku nezlyhal.

Zlyhané (Non-performing) aktíva

Do tejto skupiny patria aktíva, u ktorých vieme identifikovať objektívny dôkaz zlyhania už v deň vykazovania. Pre tieto aktíva taktiež počítame očakávanú stratu pre obdobie celej životnosti aktíva EL_L . Úrokový výnos sa počíta na základe upravenej hodnoty

aktíva t.j. účtovnej hodnoty úveru zníženej o EL_L .

Účtovný štandard vyžaduje, aby manažment rizika zvážil všetky relevantné a dostupné informácie, keď porovnáva riziko zlyhania pri schvaľovaní, resp. nákupe úveru a riziko zlyhania v deň vykazovania. Následne rozhodne, či došlo k významnému zhoršeniu kreditnej kvality alebo nie a zaradí aktívum do jednej z uvedených skupín.

Banka by mala mať definíciu zlyhania konzistentnú s medzinárodnou definíciou zlyhania, danou Bazilejskou dohodou [2]. V EÚ je bazilejská dohoda implementovaná v legislatíve prostredníctvom smernice CRD IV (Capital Requirements Directives) a nariadenia CRR (Capital Requirements Regulations). Štandard zároveň predpokladá, že zlyhanie nenastane neskôr ako v momente, keď splátka úveru mešká 90 dní, okrem prípadov, keď má banka dôvodné a faktami podporené informácie, že k zlyhaniu dochádza neskôr a pre identifikáciu zlyhania je vhodnejší väčší počet dní v omeškaní.

2.2.2 Významné zvýšenie kreditného rizika

Všeobecná klasifikačná schéma z predchádzajúceho odseku má aj výnimky. Pre aktíva, u ktorých už pri nákupe (resp. schválení) boli jasne dostupné dôkazy kreditného znehodnotenia podľa definície v IFRS 9 [4], sa počíta EL_L už od podpisu zmluvy, banka nečaká, kým dôjde k zhoršeniu kreditnej kvality. Príkladom takéhoto nákupu aktíva môže byť nákup úverovej pohľadávky s výrazne zníženou cenou.

Naopak pre aktíva, ktoré majú veľmi nízke kreditné riziko, je v modeli výnimka z používania EL_L . Pokiaľ majú k dátumu vykazovania nízky stupeň rizika, banka nemusí vyhodnocovať, či došlo k významnému nárastu rizika a počíta 12-mesačnú očakávanú stratu EL_1 .

Kreditné riziko finančného nástroja musí byť vyhodnotené bez ohľadu na zabezpečenie. To znamená, že aj hypotekárny úver krytý v dvojnásobnej výške zabezpečením, ktoré by postačovalo na pokrytie všetkých strát spojených so zlyhaním dlžníka, sa nepovažuje automaticky za úver s nízkym rizikom. Za úver s nízkym kreditným rizikom nepovažujeme ani úver, ktorý má nízku rizikovosť v porovnaní s ostatnými úvermi banky, ktorá ho poskytuje, alebo v porovnaní s inými úvermi z rovnakého segmentu klientov.

Ak úver prekročí hranicu, ktorá bude stanovená ako hranica nízkeho kreditného rizika, nie je automaticky potrebné počítať EL_L , avšak je to signál pre manažment rizika, aby vyhodnotil, či došlo k významnému nárastu rizika od pripísania aktíva do portfólia.

Keď banka vyhodnocuje, či došlo k významnému zvýšeniu kreditného rizika, nepozera sa na zmenu EL_L , ale na zmenu v pravdepodobnosti zlyhania zodpovedajúcu obdobiu celej zostávajúcej životnosti daného úveru PD_L . Vo všeobecnosti by mala banka porovnať PD_L vypočítanú v dobe podpisu úverovej zmluvy s PD_L platnou ku dňu vykazovania. Štandard však obsahuje výnimku, ktorá dovoľuje bankám použiť pre porovnanie 12-mesačnú pravdepodobnosť zlyhania PD_1 v prípade, že sa neočakáva odlišný výsledok porovnania od toho, ktorý by dosiahli s použitím PD_L . To však neznamená, že v tomto prípade môže banka použiť 12-mesačný odhad pravdepodobnosti zlyhania bez akejkoľvek úpravy. Ako sme už spomenuli v kapitole o opravných položkách, PD_1 používané pre regulatívne účely a v súčasnosti využívané bankami je kalibrované na celý ekonomický cyklus, označili sme ich PD_1^{TTC} . To znamená, že reprezentuje pravdepodobnosť zlyhania v ekonomicky neutrálnom období v rámci ekonomického cyklu. PD_1 používaná pre porovnanie v zmysle IFRS 9 však má odzrkadľovať reálnu pravdepodobnosť zlyhania v daný časový okamih pri súčasných ekonomických podmienkach, teda hovoríme o PD_1^{PiT} . PD_1^{PiT} vyžadovaná IFRS 9 sa bude meniť počas priebehu ekonomického cyklu, avšak regulátormi vyžadovaná PD_1^{TTC} ostane na rovnakej hladine. Dôsledkom toho bude, že počas kľudných časov bude regulátorom požadovaná PD_1^{TTC} vyššie, než PD_1^{PiT} a naopak, v období finančnej recesie bude vyššie PD_1^{PiT} . Nový štandard neurčuje, akým spôsobom sa má regulatívne PD_1^{TTC} prekalibrovať na PD_1^{PiT} a ponecháva to na úsudok manažérov rizika banky.

Vo všeobecnosti by mal byť finančný nástroj zatriedený do skupiny znehodnotených aktív skôr, než k zlyhaniu dôjde. EL_L by sa mala vypočítavať skôr než sa úver dostane do omeškania. Pokiaľ sú dostupné dostatočné prediktívne informácie, banka sa nemôže spoliehať iba na údaje o omeškaní a mala by vyhodnotiť významný nárast rizika na základe týchto informácií. Avšak, ak informácie, ktoré by dopĺňali údaje o počte dní po splatnosti, nie sú dostupné, štandard predpokladá, že k významnému zhoršeniu kreditnej kvality nedôjde neskôr ako pri 30 dňoch po lehote splatnosti. Tento predpoklad

je možné vyvrátiť iba v prípade, ak existuje objektívny dôkaz, že bez ohľadu na počet dní po splatnosti nedošlo k zvýšeniu rizika.

Výpočet EL_L sa môže robiť individuálne alebo portfóliovo. V niektorých prípadoch sa faktory ovplyvňujúce nárast rizika nedajú vyhodnocovať individuálne, a vtedy je nutné očakávanú kreditnú stratu vyhodnocovať na portfóliovej úrovni. Banka sa nesmie vyhýbať výpočtu EL_L tým, že bude brať do úvahy iba individuálne ukazovatele rizika, ak portfóliové dáta poukazujú na významné zvýšenie kreditného rizika.

V popise štandardov IFRS 9 [4] sú príklady, ako analyzovať nárast rizika portfóliovo. Individuálne expozície môžu byť zoskupené do malých sub-portfólií na základe spoločných črt dlžníka, ako napr. geografická lokalita alebo správanie. Banky môžu tiež odhadnúť, pre aké percento portfólia došlo k významnému zvýšeniu kreditného rizika a počítať EL_L len pre toto percento. Ak banka nemá k dispozícii prediktívne informácie na individuálnej báze, čo môže byť napríklad prípad spotrebných úverov, a vyhodnocuje významný nárast kreditného rizika len na základe počtu dní v omeškani, IFRS 9 vyžaduje, aby banky brali do úvahy aj prediktívne informácie na portfóliovej báze.

2.2.3 Meranie očakávanej straty

Očakávaná kreditná strata je rozdiel medzi zmluvne dohodnutými peňažnými tokmi a peňažnými tokmi, ktoré banka očakáva. Banky musia pri výpočtoch zohľadňovať časovú hodnotu peňažných tokov bez ohľadu na to, či odhadujú EL_1 alebo EL_L . Je potrebné diskontovať očakávané peňažné toky úrokovou mierou dohodnutou pri podpise zmluvy, alebo súčasnou zafixovanou úrokovou mierou v prípade, že má úver plávajúcu úrokovú mieru. Túto úrokovú mieru budeme označovať r . Označme t_i začiatky jednotlivých jednoročných období od dátumu vykazovania, pričom t_0 je dátum vykazovania a t_M dátum splatnosti daného úveru. Pre časový interval medzi t_i a t_{i+1} budeme označovať pravdepodobnosť zlyhania $PD_{t_i, t_{i+1}}$, stratu v prípade zlyhania LGD_{t_i} a expozíciu v momente zlyhania EAD_{t_i} . Potom pre EL_L platí

$$EL_L = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{(1+r)^i} (1 - PD_{t_0, t_i}) \times PD_{t_i, t_{i+1}} \times LGD_{t_i} \times EAD_{t_i}. \quad (2.1)$$

Pri finančných aktívach, pri ktorých sa dá jednoznačne určiť, akú sumu z úveru klient načerpal, je EL_L rozdielom dohodnutých a očakávaných peňažných tokov počas

ostávajúcej doby životnosti úveru. Pri nenačerpaných úverových záväzkoch, ako napr. kreditných kartách a prečerpaniach na účtoch, je výpočet o niečo zložitejší. EL_L je rozdiel medzi zmluvne dohodnutými a očakávanými peňažnými tokmi, ktoré by banka dostávala pri očakávanej výške čerpania finančných prostriedkov v rámci schváleného úverového limitu. Odhady EL_L pre úverové záväzky musia byť konzistentné s očakávaným využívaním týchto úverových záväzkov, či už na 12-mesačnom horizonte pre EL_1 , alebo na celej životnosti úveru pre EL_L . Odhad čerpanej sumy sa vo vzťahu (2.1) prejaví v parametri EAD .

Pre niektoré typy úverov je náročné určiť dobu záväzku. Príkladom môžu byť povolené prečerpania na účte, ktoré nemajú obmedzenú platnosť, alebo revolvingové podnikateľské úverové linky, pri ktorých môže klient využiť úver opakovane. Pre tieto typy úverov sa nedá jednoznačne stanoviť doba, počas ktorej banke hrozí kreditné riziko. Banky by mali zohľadniť nasledovné faktory:

- dobu, počas ktorej bola banka vystavená kreditnému riziku pri podobných finančných nástrojoch,
- časový úsek po významnom zvýšení kreditného rizika, v ktorom dochádza k zlyhaniu u podobných úverových produktov,
- činnosti, ktoré banka podnikne v prípade, že dôjde k významnému navýšeniu kreditného rizika, ako napr. zrušenie úverovej linky, zníženie limitu alebo zrušenie nenačerpanej časti limitu

Modelovanie pravdepodobnosti zlyhania, ktoré môže nastať počas celej životnosti úveru je náročná úloha, ktorou sa počas najbližších dvoch rokov musia intenzívne zaoberať všetky slovenské banky. Úloha je ešte náročnejšia pre produkty, kde nie je k dispozícii dostatočne dlhý historický rad pozorovaní ako sú na Slovensku napr. hypotekárne úvery. Modelovaniu ich pravdepodobnosti zlyhania počas celej životnosti PD_L sa budeme venovať v nasledovnej kapitole.

3 Modelovanie pravdepodobnosti zlyhania úverov

Praktickou úlohou tejto práce je vyvinúť model, ktorý bude predpovedať pravdepodobnosť zlyhania pre obdobie celej zostávajúcej životnosti úveru PD_L pre hypotekárne úvery poskytnuté bežným klientom. Pre výpočet očakávanej straty, ktorá nastane v dôsledku zlyhania v období celej zostávajúcej životnosti úveru EL_L daný vzťahom (2.1) budeme potrebovať aj pravdepodobnosti zlyhania pre jednotlivé jednorôčné obdobia v rámci zostávajúcej životnosti úveru. Ak si pre $i = 0, 1, \dots, M$ označíme okamihy na začiatku jednorôčných období medzi dátumom vykazovania a dátumom splatnosti t_0, t_1, \dots, t_M , kde t_0 je dátum vykazovania a t_M je dátum splatnosti, pravdepodobnosti zlyhania $PD_{t_0, t_1}, PD_{t_1, t_2}, \dots, PD_{t_{M-1}, t_M}$, potom PD_L dostaneme ako

$$PD_L = 1 - \prod_{i=0}^{M-1} (1 - PD_{t_i, t_{i+1}}). \quad (3.1)$$

Neskôr v práci budeme využívať kumulatívne pravdepodobnosti zlyhania - pravdepodobnosť, že úver zlyhá do k rokov od dátumu pozorovania, pričom $0 \leq k \leq M$. Pre kumulatívnu pravdepodobnosť zlyhania platí

$$PD_C(k) = 1 - \prod_{i=0}^{k-1} (1 - PD_{t_i, t_{i+1}}). \quad (3.2)$$

Navrhujeme rôzne prístupy k odhadu $PD_{t_i, t_{i+1}}$. Vstupmi do modelu budú premenné opisujúce správanie klienta a premenná, ktorá bude opisovať klientov postup v čase pri splácaní hypotekárneho záväzku. Neskôr ukážeme, že pravdepodobnosť zlyhania sa mení v závislosti od doby, ktorú už klient úver spláca a veľkosti záväzku, ktorý mu ostáva. Rovnako predpokladáme, že správanie klienta sa môže s časom meniť a pokúsime sa odhadnúť pravdepodobnostné rozdelenie pre kategórie jeho správania s pomocou markovových reťazcov a matice prechodu druhého rádu.

Skôr než detailne popíšeme jednotlivé časti PD_L modelu, ukážeme, akým spôsobom banky vyvíjajú jednorôčné PD_1 modely, ktoré budú základom pre vývoj PD_L modelu.

3.1 Vývoj modelu na odhad pravdepodobnosti zlyhania počas jedného roka

Vývoj PD_1 modelu je náročný proces, ktorý od začiatku zbierania dát po finálne schválenie regulátorom a implementáciu modelu do produkčného prostredia môže štatistikom

v banke trvať až dva roky. Autor vo svojom diele [6] veľmi dobre opisuje celý proces vývoja PD_1 modelu.

3.1.1 Fáza plánovania

Celý proces vývoja PD_1 modelu je časovo náročný a zdĺhavý proces, preto je v prvom kroku dôležité ujasniť si, s akým cieľom banka model vyvíja. Cieľom môže byť vytvoriť nový model pre špeciálny podsegment klientov, alebo zahrnúť do modelu nové informácie, ktoré doteraz neboli dostupné. Na vývoji modelu sa podieľajú okrem človeka, ktorý má na starosti vývoj samotného matematického modelu, aj správcovia databáz, ktorých dáta sa pri modeli použijú, špecialisti na schvaľovanie úverov, pracovníci IT, ktorí budú nový model implementovať, testerí overujúci, či bol model správne implementovaný a v neposlednom rade špecialisti na validáciu štatistických modelov, ktorí testujú prediktívne kvality nového matematického modelu.

3.1.2 Dátová fáza

Celý proces pokračuje zberom údajov zo žiadosti o daný úver, ako sú informácie o veku, príjme, zamestnaní alebo bydlisku klienta. Tieto údaje sa nazývajú aplikačné. Druhou skupinou údajov sú informácie o správaní klienta na jeho bežných účtoch, zostatkoch, pohyboch na účtoch, trvalých príkazoch a podobne. Tieto údaje budeme volať transakčné. Treťou skupinou sú údaje o správaní klienta na úverových účtoch. Informácie o kreditných kartách, spotrebných úveroch, povolených prečerpaniach na bežných účtoch a hypotékach majú banky k dispozícii jednak z interných databáz, ale aj z externých úverových registrov. Tieto údaje budeme nazývať behaviorálne. Špeciálnou podskupinou behaviorálnych údajov sú údaje popisujúce platobnú disciplínu klienta na úvere, pre ktorý sa PD_1 bude odhadovať. Sú to údaje, ktoré nie sú dostupné v čase schvaľovania úveru, avšak pri odhadovaní PD_1 neskôr počas životnosti úveru majú častokrát najväčšiu výpovednú hodnotu.

Problémom pri výbere dát je ich kvalita. Údaje často obsahujú veľké percento chýbajúcich hodnôt. Niektoré údaje sa mohli v minulosti zbierať, avšak v čase implementácie modelu sa už zbierať nemusia. Prípadne aj naopak, pre niektoré údaje nemusí byť dostupný dostatočne dlhý historický rad na to, aby sa dala posúdiť ich výpovedná

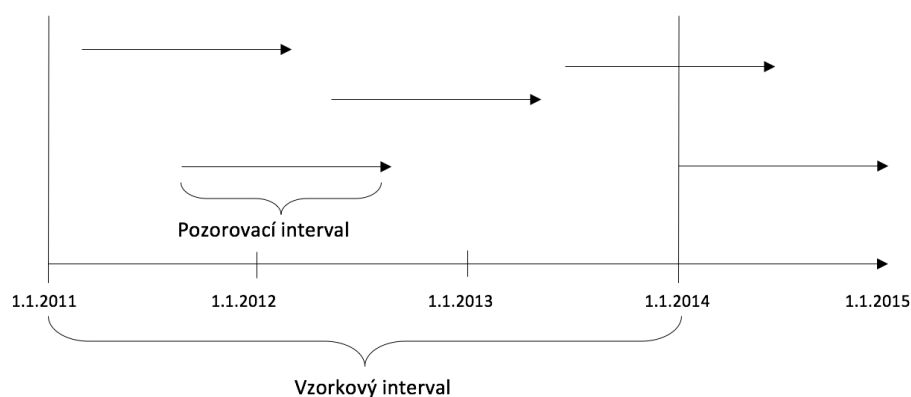
hodnota.

Vývojová vzorka by mala čo najlepšie reprezentovať populáciu, ktorú bude model následne posudzovať. Preto je nevyhnutné niektoré úvery z vývojovej vzorky vylúčiť. Ako uvádza [6], môžu to byť napr. úvery poskytnuté zamestnancom banky, VIP klientom alebo klientom zo zahraničia. Rovnako je potrebné vylúčiť aj úvery, ktoré boli vyhodnotené ako podvody. Zo vzorky je vhodné vylúčiť aj úvery, u ktorých došlo k predčasnému splateniu alebo úmrtiu klienta. Vylúčiť by sa mali aj úvery poskytnuté v geografickej lokalite, kde už banka neposkytuje svoje služby, alebo úvery špeciálneho typu, resp. úvery poskytnuté na špecifické účely, ktoré už banka neposkytuje.

3.1.3 Vzorkový interval a pozorovací interval

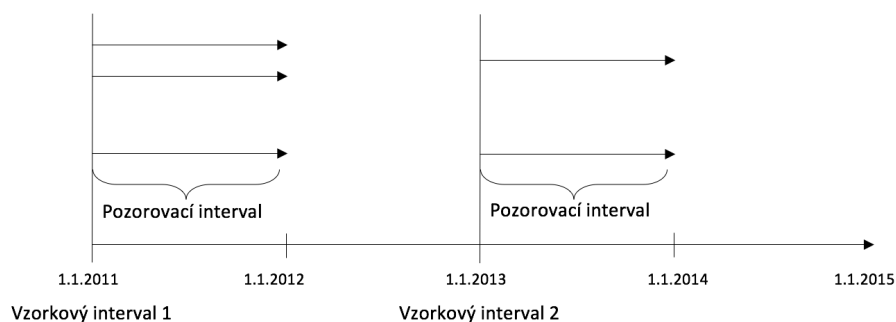
Výber konkrétnych pozorovaní do vývojovej vzorky veľmi závisí od toho, pre aký typ údajov sa daná časť modelu vyvíja. Jeden z prístupov k vývoju modelov využívaný najmä pre úvery poskytnuté bežným klientom vyvíja časť modelu založenú na aplikačných údajoch na vzorke novootvorených obchodov, zatiaľ čo časť modelu založená na behaviorálnych údajoch sa vyvíja na pozorovaniach všetkých otvorených úverových obchodov.

Banky predpokladajú, že správanie klientov v budúcnosti bude odrážať správanie klientov v prítomnosti. Na základe tohto predpokladu sa vyberú úverové obchody poskytnuté v minulosti, pričom sa sleduje ich správanie počas časového intervalu. Časový interval, počas ktorého sa sleduje zlyhanie úveru, máva spravidla takú dĺžku, na aké dlhé obdobie chce banka pravdepodobnosť zlyhania odhadovať. Všetky slovenské banky v súčasnosti využívajú odhad pravdepodobnosti zlyhania počas jedného roka, preto aj interval, počas ktorého banka úver sleduje, máva spravidla dĺžku jeden rok. Výnimočne môžu banky sledovať správanie úveru aj na intervale väčšej dĺžky a následne spätne prekalibrovať vyvinutý model na jednoročný interval. Počas časového intervalu sa sleduje len informácia, či daný úver zlyhal, alebo nie. Tento interval nazývame *pozorovací interval*. Obdobie, z ktorého vyberáme pozorovania, nazývame *vzorkový interval*. Príkladom vzorkového a pozorovacieho intervalu môže byť vzorka, do ktorej vyberieme úvery schválené medzi 1.1.2011 a 1.1.2014. Každý úver sledujeme počas pozorovacieho intervalu dĺžky jeden rok a určíme, či počas neho došlo k zlyhaniu alebo nie. Príklad



Obr. 1: Vzorkový a pozorovací interval pre vývoj aplikačnej časti modelu vyvíjaného na vzorke nových schválených úverov

je zobrazený na obrázku 1. Pri vývoji behaviorálnej časti modelu nás budú zaujímať všetky otvorené úverové obchody, nie len nové schválené úvery. Pre tieto úvery môže byť vzorkový interval zjednotením viacerých dátumov pozorovaní. Na obrázku 2 je prí-



Obr. 2: Vzorkový a pozorovací interval pre vývoj behaviorálnej časti modelu, v ktorom sú všetky otvorené úvery počas dvoch dátumov pozorovaní

klad vývojovej vzorky, kde je vzorkový interval zjednotením dvoch dátumov pozorovaní - 1.1.2011 a 1.1.2013. Pozorovací interval je rovnako ako na predchádzajúcom obrázku obdobie jedného roka.

3.1.4 Metodika a logistická regresia

Výber matematickej techniky použitej pre vývoj modelu závisí od faktorov, akými môžu sú

- kvalita dostupných dát,

- informačný systém banky, do ktorého bude model implementovaný,
- interpretovateľnosť výsledkov - v praxi sa často vyžaduje, aby boli výsledky ekonomicky interpretovateľné a dali sa vysvetliť aj vyššiemu manažmentu banky, bez nutnosti ovládať komplikovanú matematickú a štatistickú teóriu,
- právne a regulátorne možnosti - model PD_1 na odhad pravdepodobnosti zlyhania podlieha zákonom, pravidlám stanoveným materskými spoločnosťami a schváleniu modelu regulátorom,
- možnosť sledovať a porovnávať kvalitu modelov.

Existuje viacero matematických techník, ktoré by sa dali využiť na odhad PD_1 - napr. logistická regresia, rozhodovacie stromy, náhodné lesy alebo neurónové siete.

Najmä pre vyššie spomínané dôvody je najvyužívanejším modelom na odhad PD_1 logistická regresia. Alan Agresti v knihe [7] zaoberajúcej sa analýzou kategoriálnych dát označuje logistickú regresiu ako najdôležitejší model pre kategoriálne dáta, kde je vysvetľovanou premennou binárna premenná. Je čím ďalej tým viac využívaná, s veľmi širokou množinou možných aplikácií.

Označme si binárnu vysvetľovanú premennú, ktorá hovorí, či úver v priebehu obdobia jedného roka zlyhá alebo nezlyhá, symbolom Y a vysvetľujúce premenné X_1, X_2, \dots, X_{m-1} spoločne označíme X . Nech pre podmienenú pravdepodobnosť, že sa úver v priebehu jedného roka dostane do stavu zlyhania, ak realizácia náhodnej premennej X má hodnotu x , platí

$$p(x) = P[Y = 1|X = x] = 1 - P[Y = 0|X = x].$$

Potom logistický model hovorí

$$p(x) = \frac{e^{\beta^T x}}{1 + e^{\beta^T x}} = \frac{1}{1 + e^{-\beta^T x}}. \quad (3.3)$$

Šanca je pomer pravdepodobnosti, že udalosť nastane k pravdepodobnosti, že udalosť nenastane, teda $ODD = \frac{p(x)}{1-p(x)}$. Môžeme preto napísať lineárny vzťah medzi logaritmom šance nazývaným *logit* a vysvetľovanou premennou

$$\text{logit}(p(x)) = \ln \frac{p(x)}{1-p(x)} = \beta^T x = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{m-1} x_{m-1}. \quad (3.4)$$

Pozrime sa na interpretáciu parametra β v rovnici (3.4). Znamienko pri β_i určuje, či $p(x)$ s rastúcim x_i rastie alebo klesá. Pre $\beta_i = 0$ dostávame nezávislosť x_i a Y . Ak vyexponujeme obe strany rovnice 3.4, dostávame

$$\frac{p(x)}{1-p(x)} = e^{\beta^T x} = e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{m-1} x_{m-1}}, \quad (3.5)$$

čo po úprave dáva vzťah

$$\frac{p(x)}{1-p(x)} = e^{\beta_0} e^{\beta_1 x_1} \dots e^{\beta_{m-1} x_{m-1}}, \quad (3.6)$$

z ktorého môžeme vidieť, že šanca je exponenciálne závislá od realizácií jednotlivých vysvetľujúcich premenných x_i . Presnejšie povedané, ak sa vysvetľujúca premenná x_i zvýši o 1, šanca stúpne e^{β_i} krát.

Označme počet pozorovaní n , pričom prvých k pozorovaní je $y_1 = y_2 = \dots = y_k = 0$ (prvých k úverov nezlyhalo) a zvyšných $n - k$ pozorovaní je $y_{n-k+1} = \dots = y_n = 1$ ($n - k$ úverov zlyhalo). Potom koeficienty β z rovnice (3.4) dostaneme pomocou metódy maximálnej vierohodnosti maximalizovaním funkcie vierohodnosti (3.7), kde $P(Y_i = 1)$ je pravdepodobnosť zlyhania i -teho úveru, ktorú odhadol model

$$L_{model} = \prod_{i=1}^n P(Y_i = y_i), \quad (3.7)$$

kde pre $1 \leq i \leq n - k$ a $n - k + 1 \leq j \leq n$

$$P(Y_i = 0) = 1 - \frac{1}{1 + e^{-\beta^T x_i}} \text{ a}$$

$$P(Y_j = 1) = \frac{1}{1 + e^{-\beta^T x_j}}.$$

Odhad $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_{m-1})^T$ metódou maximálnej vierohodnosti dostávame ako

$$\hat{\beta} = \underset{\beta \in \mathbb{R}^m}{\operatorname{argmax}} L_{model}. \quad (3.8)$$

Test pomerom vierohodností

Pre vytvorený model by sme chceli otestovať, či má model zmysel, t.j. či prináša datočnú informáciu v porovnaní s modelom nezávislom od vysvetľujúcich premenných. Otestujeme hypotézu o nulovosti koeficientov β $H_0 : \beta_1 = 0 \wedge \beta_2 = 0 \wedge \dots \wedge \beta_{m-1} = 0$ vs. β $H_1 : \beta_1 \neq 0 \vee \beta_2 \neq 0 \vee \dots \vee \beta_{m-1} \neq 0$. Z dôvodu využitia v programe R odvodíme pre

túto hypotézu test pomerom vierohodností pomocou parametrov, ktoré sú výstupom funkcie $\text{glm}()$.

Najskôr si vytvoríme model, ktorý bude mať rovnako veľa parametrov ako pozorovaní a dostaneme saturovaný model, ktorý bude mať funkciu vierohodnosti $L_{\text{satúr}}$. Označme potom devianciu modelu DEV_{model} , pre ktorú platí

$$DEV_{\text{model}} = -2 \ln \frac{L_{\text{model}}}{L_{\text{satúr}}}. \quad (3.9)$$

Ďalej vytvoríme model, ktorý bude mať iba jeden parameter β_0 , nezávislý od vysvetľujúcich premenných. Označme jeho devianciu

$$DEV_{\text{null}} = -2 \ln \frac{L_{\text{null}}}{L_{\text{satúr}}}. \quad (3.10)$$

Dá sa ukázať, že výraz $-2 \ln \frac{L_{\text{null}}}{L_{\text{model}}}$ má χ^2 rozdelenie s $m - 1$ stupňov voľnosti, teda $-2 \ln \frac{L_{\text{null}}}{L_{\text{model}}} \sim \chi_{m-1}^2$. Jednoduchou úpravou potom dostávame

$$\begin{aligned} -2 \ln \frac{L_{\text{null}}}{L_{\text{model}}} &= -2 \ln \frac{\frac{L_{\text{null}}}{L_{\text{satúr}}}}{\frac{L_{\text{model}}}{L_{\text{satúr}}}} = \\ &= \left(-2 \ln \frac{L_{\text{null}}}{L_{\text{satúr}}} \right) - \left(-2 \ln \frac{L_{\text{model}}}{L_{\text{satúr}}} \right) = \\ &= DEV_{\text{null}} - DEV_{\text{model}}. \end{aligned}$$

Funkcia $\text{glm}()$ v programe R vo svojom výstupe obsahuje práve deviancie DEV_{null} a DEV_{model} , ktoré stačí od seba odpočítať.

Obdobným spôsobom by sme testovali aj hypotézu o submodeli, teda hypotézu, že iba niektorých $s \leq m - 1$ koeficientov β_i je nulových. Rovnakým postupom by sme dostali rozdelenie $DEV_{\text{submodel}} - DEV_{\text{model}} \sim \chi_s^2$. Hypotéza H_0 hovorí, že submodel stačí a s vynechaných parametrov nemá pridanú hodnotu.

Test štatistickej významnosti parametrov modelu

Ďalej by sme chceli poznať štatistické rozdelenie jednotlivých koeficientov β_i , ktoré môžu poslúžiť na testovanie hypotézy o konkrétnych hodnotách parametrov β_i alebo výpočet ich intervalu spoľahlivosti. Využijeme nasledovnú vetu uvedenú v [7].

Veta 3.1. *Nech $\hat{\theta}$ je odhad parametra $\theta \in \mathbb{R}^m$ metódou maximálnej vierohodnosti, potom $\hat{\theta}$ má rozdelenie $\hat{\theta} \sim N_m(\theta, I(\theta)^{-1})$, kde $I(\theta)$ je Fischerova informačná matica.*

	Úver zlyhal ($y_i = 1$)	Úver nezlyhal ($y_i = 0$)
Predpoveď = 1 ($\hat{y}_i = 1$)	A	B
Predpoveď = 0 ($\hat{y}_i = 0$)	C	D

Tabuľka 1: Misklasifikačná tabuľka

S využitím Vety (3.1) dostávame rozdelenie pre bodový odhad parametrov β_i , $\hat{\beta}_i$

$$\hat{\beta}_i \sim N_1(\beta_i, [I^{-1}(\beta)]_{i,i}),$$

po úprave získame testovaciu štatistiku s rozdelením $N(0, 1)$

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{[I^{-1}(\hat{\beta})]_{i,i}}}.$$

Testovanie schopnosti modelu rozlišovať úvery

Iný pohľad na kvalitu modelu je jeho schopnosť rozlišovať medzi skupinami úverov s veľkým počtom zlyhaní a skupinami úverov, kde je prítomný malý počet zlyhaní, inak povedané schopnosť modelu rozlišovať dobré - nezlyhané a zlé - zlyhané úvery. Jednoduchým nástrojom je misklasifikačná tabuľka skutočných a odhadnutých parametrov Y , kde A, B, C, D sú počty pozorovaní v jednotlivých kategóriách. Príklad misklasifikačnej tabuľky uvádza Tabuľka 1.

Ak spočítame, v koľkých pozorovaniach zo všetkých model správne odhadol odhadovanú premennú Y , dostávame *presnosť* (ang. accuracy) modelu

$$\text{Presnosť} = \frac{A + D}{A + B + C + D}.$$

V prípade, že nás zaujíma iba úspešnosť odhalenia zlyhania, chceme poznať *senzitivitu* modelu

$$\text{Senzitivita} = \frac{A}{A + C}.$$

Ak by sme naopak chceli poznať, ako dobre model rozpoznáva dobrých klientov, potrebujeme vypočítať *specificitu* modelu

$$\text{Specificita} = \frac{D}{B + D}.$$

ROC krivka a Giniho koeficient

Najdôležitejšou vlastnosťou PD_1 modelu je jeho schopnosť rozlišovať medzi skupinami dobrých a zlých úverov. Skupinou dobrých klientov sa rozumie skupina s malým počtom zlyhaných úverov a naopak, skupina zlých klientov je skupina s vysokým počtom zlyhaní.

Dobrym grafickým nástrojom, ktorý opisuje schopnosť modelu rozlišovať dobrých a zlých úverov, je ROC krivka (z angličtiny Receiver Operating Characteristic) je opísaná parametrom $z \in \langle 0, 1 \rangle$ a jej body $[\psi(z), \varphi(z)]$, kde

$$[\psi(z), \varphi(z)] = \left[P(\hat{Y} = 1 | Y = 0 \wedge P(Y = 1) < z), P(\hat{Y} = 1 | Y = 1 \wedge P(Y = 1) < z) \right].$$

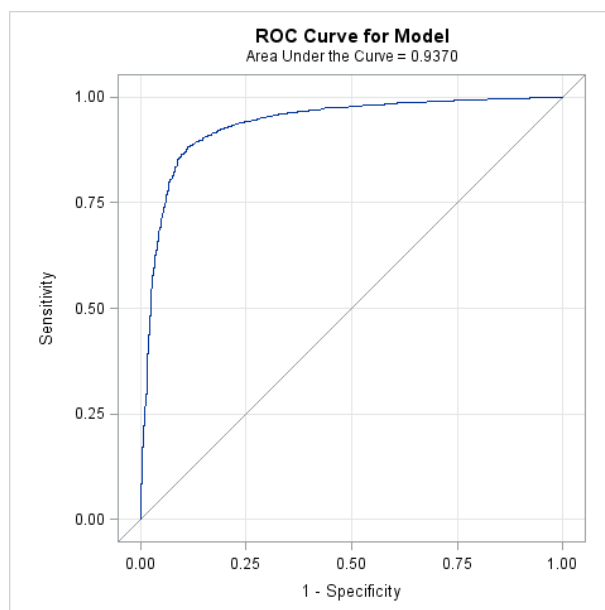
Body krivky aproximujeme pre vzorku n úverov pomocou náhodných premenných Y_1, \dots, Y_n a predpovedí logistického modelu $\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_n$

$$[\psi(z), \varphi(z)] = \left[\frac{\sum_{P(Y_i=1) < z} (1 - Y_i) \times \hat{Y}_i}{\sum_{P(Y_i=1) < z} (1 - Y_i)}, \frac{\sum_{P(Y_i=1) < z} \hat{Y}_i \times Y_i}{\sum_{P(Y_i=1) < z} Y_i} \right]. \quad (3.11)$$

Body zo vzťahu (3.11) môžeme pre podmnožiny úverov, pre ktoré platí $P(Y_i = 1) < z$ prepísať pomocou *Sensitivity* a *Specificity*

$$[\psi(z), \varphi(z)] = [1 - \textit{Specificita}, \textit{Senzitivita}]. \quad (3.12)$$

Takéto body spolu tvoria krivku v priestore $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. Krivka pre model, ktorý nevie rozlíšiť dobrý a zlý úver, je spojnicou bodov $(0, 0)$ a $(1, 1)$, pretože model priraďuje pravdepodobnosť zlyhania každému úveru na základe celkového počtu zlyhaných úverov a teda krivku budú tvoriť body $[z, z]$. Model, ktorý dokonale rozlišuje medzi dobrým a zlým klientom, bude mať ROC krivku ako spojnicu bodov $(0, 0)$, $(0, 1)$ a $(1, 1)$. Príklad ROC krivky pre PD_1 model je na Obr. 3. Kvalitu, s akou model rozlišuje dobré a zlé úvery, numericky opíšeme pomocou obsahu plochy pod ROC krivkou. Túto mieru nazývame *c*-štatistika. *C*-štatistika má hodnotu $c = 0,5$ pre model, ktorý nevie klientov rozlíšiť a $c = 1$ pre model dokonale rozlišujúci dobrých a zlých klientov. Pre lepšiu interpretovateľnosť sa zvykne *c*-štatistika lineárne transformovať na Giniho koeficient $Gini = 2c - 1$. Giniho koeficient bude mať hodnoty z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. V tejto práci budeme modely vyhodnocovať z dvoch pohľadov - na základe ROC krivky a Giniho koeficientu a presnosti, s ktorou model odhaduje pravdepodobnosť zlyhania.



Obr. 3: Ilustračný príklad ROC krivky pre PD_1 model

3.1.5 Finálna podoba modelu

V poslednej vývojovej etape sa model prispôbi potrebám jeho užívateľov. PD_1 model sa najviac využíva pri posudzovaní nových žiadostí o úver. Musí sa preto dostať do formátu, ktorý je jednoduchý pre pochopenie aj pre menej matematicky zdatný personál banky. Jedným z prístupov často využívaných pre aplikačnú časť modelu je, že sa ako prvé zdiskretizujú spojité premenné tak, že spravidla majú 3 až 5 rôznych hodnôt. Následne sa znova odhadnú parametre modelu už pre zdiskretizované premenné. Ďalším krokom je lineárna transformácia, ktorou dostávame skóre úveru

$$SCORE = a + b \left(-\hat{\beta}^T x \right), \quad (3.13)$$

pričom parametre a a b sa zvolia tak, aby sa so $SCORE$ ľahko narábalo špecialistom na schvaľovanie úverov. Spravidla sa volia tak, aby $SCORE$ bolo vždy kladné z nejakej rozumnej škály, napr. 0 až 1000 a s rastúcim $SCORE$ sa znižovala pravdepodobnosť zlyhania úveru. Keďže pôvodný výraz mal aditívnu vlastnosť pre efekt jednotlivých premenných, prenesie sa táto vlastnosť aj na $SCORE$ a vďaka tomu môžeme rozdeliť $SCORE$ na príspevky jednotlivých premenných. Najlepšie to ilustruje tzv. skórkarta - tabuľka príspevkov jednotlivých premenných k celkovému skóre.

Príklad skórkarty pre model s dvoma premennými - vek a príjem klienta uvádza Tabuľka 2. Napr. pre klienta, ktorý by mal 40 rokov a príjem 900 eur, je skóre

Príjem klienta	SCORE
$\langle 0 \text{ eur}, 400 \text{ eur} \rangle$	0
$(400 \text{ eur}, 1200 \text{ eur})$	240
$(1200 \text{ eur}, \infty)$	400
Vek klienta	SCORE
$\langle 0 \text{ rokov}, 23 \text{ rokov} \rangle$	112
$(23 \text{ rokov}, 35 \text{ rokov})$	260
$(35 \text{ rokov}, 50 \text{ rokov})$	600
$(50 \text{ rokov}, \infty)$	310

Tabuľka 2: Príklad skórkarty s dvoma premennými

$SCORE = 600 + 240 = 840$. Ďalšou výhodou, prečo používať tento formát, je jeho jednoduchosť pre implementáciu do informačných systémov, ktoré vyhodnocujú schvaľovanie žiadostí a zvyčajne majú na pravdepodobnosť zlyhania naviazané ďalšie funkcie, ako sú zamietacie kritériá alebo výpočet schválenej úrokovej sadzby.

Kalibrácia modelu

Poslednou úpravou je kalibrácia modelu. Model sa častokrát vyvíja na vzorke, kde je úmyselne vyšší počet zlyhaných úverov ako je v reálnej populácii, pretože pre banku je dôležitejšie vedieť odhaliť zlyhané úvery, ako nezlyhané. To má za následok, že výsledný odhad pravdepodobnosti zlyhania neodpovedá skutočnosti. Jednou z možností, ako model nakalibrovať, je nastaviť parameter a tak, aby sa priemerná odhadovaná pravdepodobnosť zlyhania rovnala priemernej miere zlyhania na vybranej kalibračnej vzorke úverov - napr. na súčasnom portfóliu banky.

3.2 Závislosť miery zlyhania od časových premenných

V tejto podkapitole budeme hľadať odpoveď na otázku, ako sa mení pravdepodobnosť zlyhania PD_1 v čase. Preto sa budeme snažiť opísať a vysvetliť vplyv času, ktorý uplynul od doby poskytnutia úveru, na mieru zlyhávania hypotekárnych úverov. Tento vplyv následne využijeme na to, aby sme opísali zmenu pravdepodobnosti zlyhania s plynúcim časom od doby poskytnutia úveru. Budeme hľadať závislosť pravdepodob-

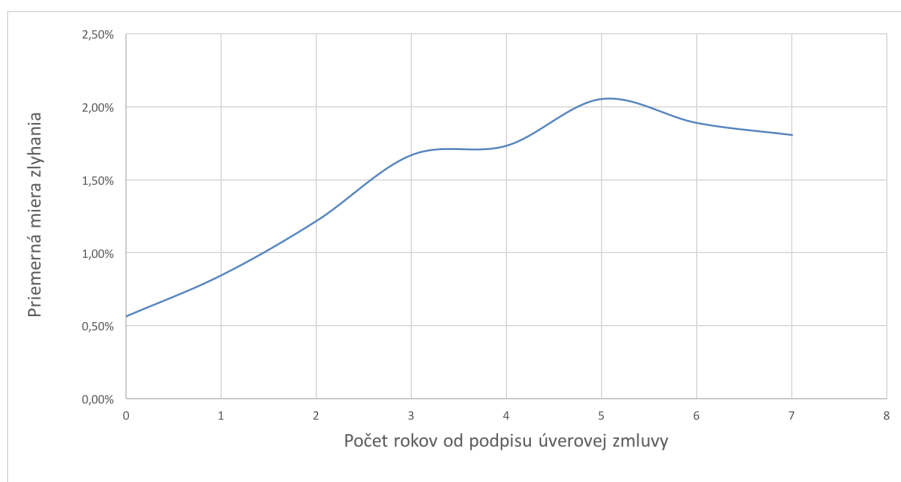
nosti zlyhania PD_1 od rôznych premenných aproximujúcich čas, ktorý uplynul od poskytnutia úveru, a túto aproximáciu následne využijeme ako vstup do PD_L modelov (3.2).

3.2.1 Časový efekt

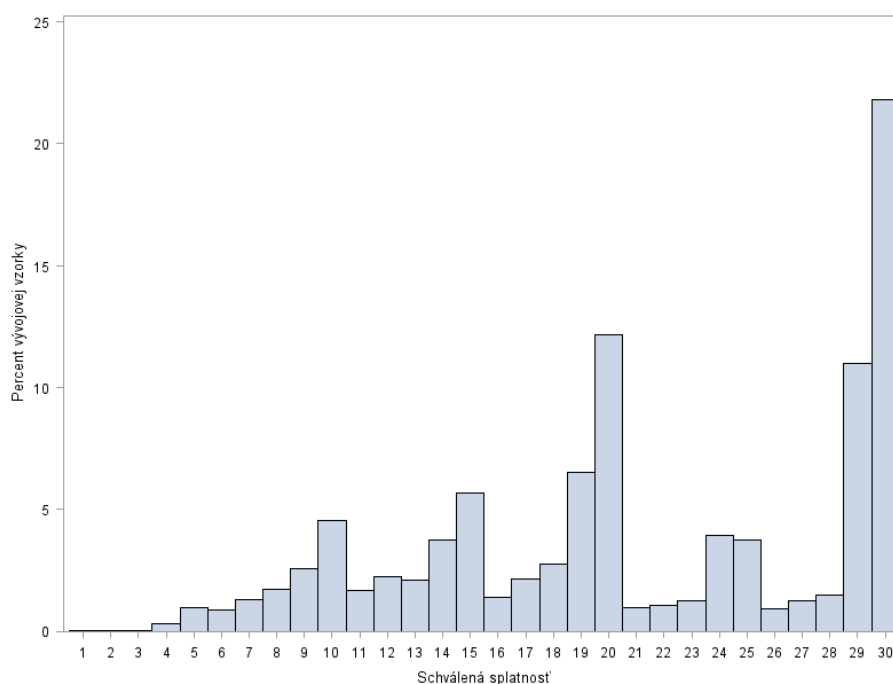
Vychádzame z predpokladu, že klient, ktorý má hypotéku od včera, nevie odhadnúť svoje finančné schopnosti tak dobre, ako klient, ktorý spláca už 10 rokov, a obaja sa budú správať inak, ako klient, ktorému ostáva do splatenia 30-ročného záväzku posledný rok. Klient má veľmi silnú motiváciu neprísť o svoju nehnuteľnosť. Jeho možnosti sa ale s časom menia. S časom sa znižuje aj pomer zostatku úveru k zvyšku majetku klienta (úspory, investičné produkty alebo iný hnutelný a nehnuteľný majetok), čo mu môže pomôcť získať dodatočné finančné prostriedky, keď sa dostane do problémov, napr. odpredajom svojho majetku.

Budeme hľadať spôsoby, ako aspoň čiastočne vysvetliť zmenu rizika zlyhania úveru spôsobenú ubiehajúcim časom od poskytnutia úveru. Pre tento účel budeme vysvetľovať mieru zlyhania (počet zlyhaných úverov ku počtu všetkých úverov) rôznym typom časových premenných.

Prvou z možností je vysvetľovať mieru zlyhania počtom rokov od podpisu úverovej zmluvy. Predpokladáme, že návyk klienta pri pravidelnom splácaní finančného záväzku má vplyv na mieru zlyhania a intuitívne očakávame, že miera zlyhania bude s časom klesať. Problémom je príliš krátky časový rad dostupných údajov. Vo vzorke, na ktorej mieru zlyhania pozorujeme, majú najstaršie pozorovania sedem rokov. To nie je dostatočne dlhý časový interval na predpovedanie správania úverov počas tridsiatich rokov. Na Obr. 4 je priemerná miera zlyhania v závislosti od počtu rokov od poskytnutia hypotekárneho úveru. Miera zlyhania prvých päť rokov rastie a následne dva roky pozvoľna klesá, ale nevieme ako by sa správala ďalej. Aby sme lepšie pochopili toto správanie, pozrieme sa na zastúpenie schválených splatností hypoték vo vývojovej vzorke. Na Obr. 5 je histogram pôvodných schválených splatností vo vývojovej vzorke. Z histogramu môžeme vidieť, že najväčšie zastúpenie majú úvery s pôvodnou schválenou splatnosťou v rozpätí 20 až 30 rokov. To znamená, že 7 rokov nie je vo veľkej časti úverov dostatočne dlhý úsek vzhľadom na celkovú životnosť úveru. Zaujímavé je aj



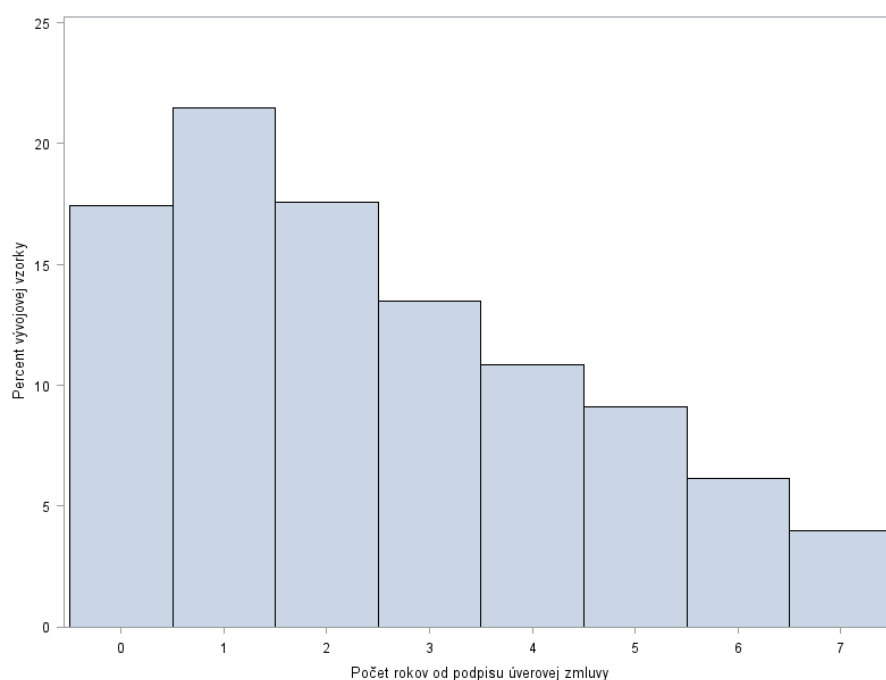
Obr. 4: Priemerná miera zlyhania v závislosti od počtu rokov, ktoré ubehli od poskytnutia úveru



Obr. 5: Histogram zastúpenia schválených splatností vo vývojovej vzorke

rozloženie počtu rokov od podpisu úverovej zmluvy vo vývojovej vzorke zobrazené na Obr. 6. Vzorka obsahuje najviac úverov, ktoré majú vek 0 až 2 roky a počty starších úverov postupne klesajú. Z hľadiska očakávaného zloženia portfólia v budúcnosti je vhodné preskúmať, aké úvery do portfólia pribúdajú a aké splatnosti majú najstaršie úvery v portfóliu.

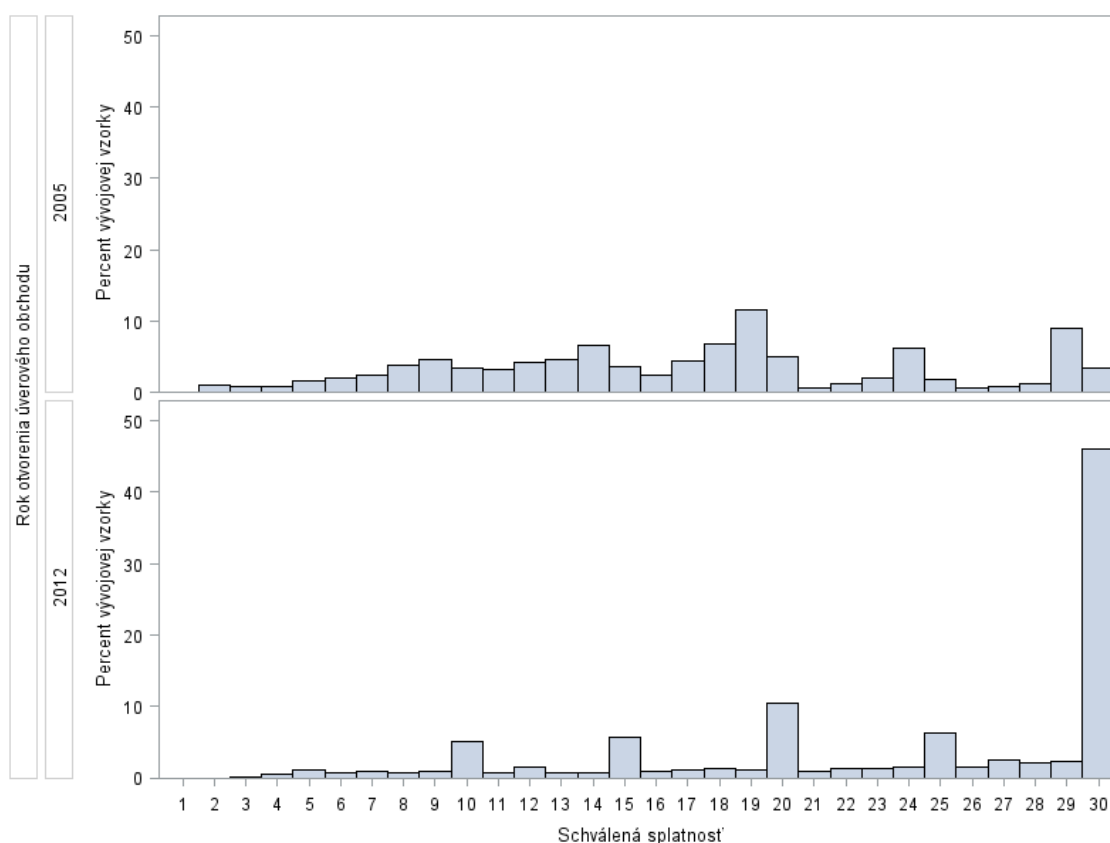
Na histograme zobrazenom na Obr. 7 je zastúpenie rôznych splatností u úverov po-



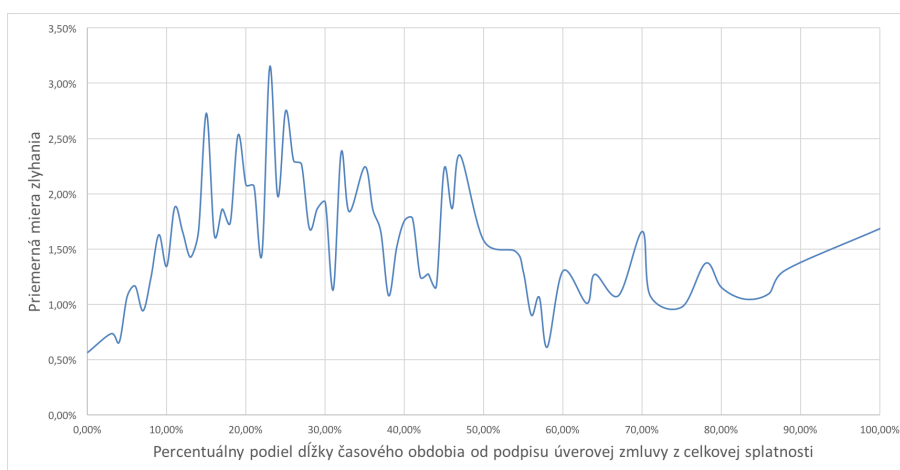
Obr. 6: Histogram zastúpenia počtov rokov od schválenia úveru vo vývojovej vzorke

skytutých v roku 2005 a v roku 2012. Rozloženie schválených splatností sa výrazne líši, v dôsledku čoho môžeme v budúcnosti očakávať v portfóliu ešte väčšie zastúpenie dlhších splatností. Preto počet rokov od schválenia úveru nie je pre naše hypotekárne portfólio, vzhľadom na vývojovú vzorku, dobrým ukazovateľom. Ďalším dôvodom, prečo by sme mali hľadať iný ukazovateľ, ktorým budeme vysvetľovať zmenu miery zlyhania počas životnosti hypotekárneho úveru, je požiadavka na vyššiu univerzálnosť. Dvomi hypotekárnymi úvermi čerpanými pred siedmimi rokmi by sme priradili rovnakú hodnotu parametra aj v prípade, že by prvý z nich mal schválenú splatnosť 8 rokov a druhý 30 rokov. Z hľadiska rizikovosti je však rozdiel, či má úver pred sebou jeden rok životnosti alebo 23.

Druhým typom časového parametra je percentuálny podiel dĺžky doby od podpisu úverovej zmluvy z celej schválenej splatnosti. Tento parameter je univerzálnejší ako počet rokov od podpisu úverovej zmluvy, pretože každému úveru priradí hodnotu od 0% do 100% bez ohľadu na dohodnutú splatnosť úveru. Tento ukazovateľ oveľa lepšie vyjadruje, akú časť finančného záväzku už má klient za sebou. Na Obr. 8 je miera zlyhania úverov vo vývojovej vzorke podľa percentuálneho podielu dĺžky časového obdobia od podpisu úverovej zmluvy z celkovej splatnosti. Vidíme, že priebeh miery zlyhania v



Obr. 7: Porovnanie histogramov schválených splatností úverov schválených v rokoch 2005 a 2012



Obr. 8: Miera zlyhania úverov v závislosti od percentuálneho podielu uplynutého obdobia od podpisu zmluvy a celkovej splatnosti úveru

čase je už možné lepšie ekonomicky interpretovať. Miera zlyhania najskôr mierne rastie a potom klesá s rastúcim percentom ubehnutej doby do splatnosti.

Pokúsime sa túto mieru vylepšiť. Percentuálny podiel dĺžky časového obdobia od podpisu úverovej zmluvy z celkovej splatnosti nahradíme percentuálnym, pomerom splatenej istiny k celkovej pôvodnej výške istiny. Nová veličina bude lepšie reprezentovať časť finančného záväzku, ktorú už má klient splatenú, a mohla by tak lepšie vysvetľovať mieru zlyhania. Tento parameter umožňuje, aby bol odhad pravdepodobnosti zlyhania, ktoré môže nastať kedykoľvek počas zvyšnej životnosti úveru, viac prispôbený každému klientovi, resp. úveru. Výška splatenej istiny v sebe zahŕňa viacero informácií. Závisí nie len od schválenej splatnosti úveru, ale aj úrokovej sadzby, mimoriadnych splátok a vie reagovať aj na neštandardný splátkový kalendár, v ktorom sa môžu splátky postupne zvyšovať alebo znižovať. Ak poznáme zostatok istiny O , úrokovú sadzbu r a zostávajúci počet rokov do splatnosti úveru M , splátku úveru s vypočítame pomocou vzťahu

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{O}{\sum_{i=1}^{12M} \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-i}} \\
 &= \frac{O}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-1} \frac{\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-12M} - 1}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-1} - 1}} = \\
 &= \frac{r \times O}{12 \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-12M} - 12}. \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

Pomocou vzťahu (3.14) pre výpočet splátky budeme vypočítavať, koľko istiny klient splatí počas najbližšieho ročného obdobia. Označme O_1 zostatok istiny v momente, kedy ostáva do splatenia úveru M rokov a O_2 zostatok istiny o jeden rok neskôr, teda po období, v ktorom klient zaplatil 12 mesačných splátok s . Množstvo istiny, ktorú klient v tomto období splatil je funkciou počtu rokov do splatnosti M a budeme ho označovať $\Delta O(M)$. Platí

$$\begin{aligned}
 \Delta O &= O_1 - O_2 = \\
 &= \sum_{i=1}^{12M} \frac{s}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)^i} - \sum_{i=1}^{12(M-1)} \frac{s}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)^i} = \\
 &= \sum_{i=12(M-1)+1}^{12M} \frac{s}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)^i} = \\
 &= s \times \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-12(M-1)-1} \frac{\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-12} - 1}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-1} - 1}. \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

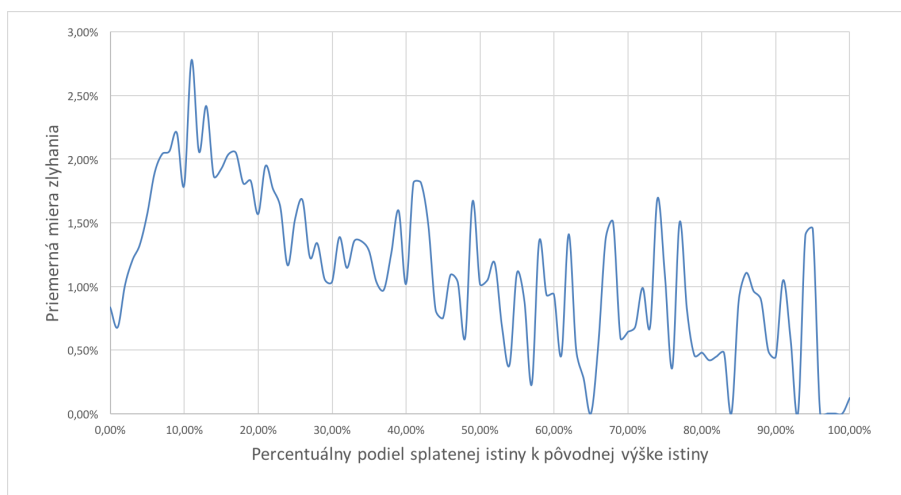
Zostatok istiny v i -tom roku od dátumu pozorovania vypočítame zo vzťahu

$$O_i = O_0 - \sum_{k=0}^i \Delta O(M - k) \quad (3.16)$$

kde O_0 je zostatok istiny k dátumu pozorovania. Výšku splatenej istiny vypočítame ako rozdiel poskytnutej výšky istiny P a zostatku istiny O_i . Percentuálny podiel splatenej istiny k celkovej výške istiny pre i -ty rok od dátumu pozorovania ozančíme γ_i a vypočítame ho podľa vzťahu

$$\gamma_i = 1 - \frac{O_i}{P}. \quad (3.17)$$

Na Obr. 9 je zobrazená miera zlyhania v závislosti od splateného percenta istiny k



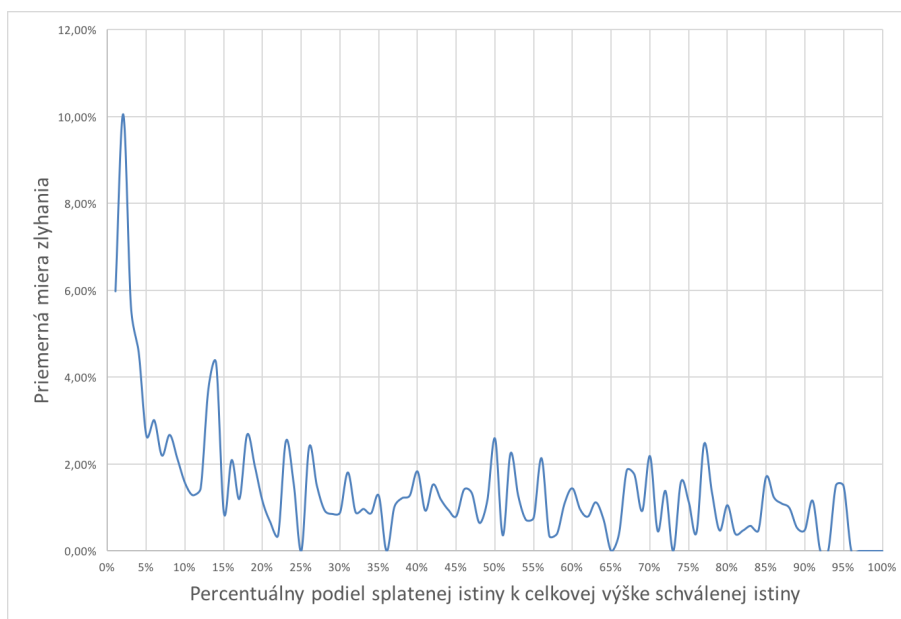
Obr. 9: Miera zlyhania v závislosti od percentuálneho podielu splatenej istiny k celkovej schválenej výške istiny γ_i

dátumu pozorovania γ_0 . Priebeh miery zlyhania je pre nižšie percentá splatenej istiny, resp. času menej volatilný ako pri percente ubehnutej splatnosti. Na základe toho predpokladáme, že na tomto intervale má percento splatenej istiny lepšiu výpovednú hodnotu. Predpoklad sme overili vložení oboch parametrov aproximovaných spojitou, po častiach hladkou krivkou ako vysvetľovacích premenných do logistického modelu a porovnaním hodnôt Giniho koeficientu. Pre vyššie percentá splatenej istiny sa miera volatility zvyšuje, avšak tento fakt je spôsobený nízkym počtom pozorovaní úverov, ktoré sú blízko splatenia celej istiny. Ako časový parameter budeme ďalej používať percentuálny podiel splatenej istiny a celkovej schválenej istiny.

Ako sa ukázalo z histogramu zastúpených splatností úverov vo vývojovej vzorke zobrazenom na Obr. 5, vo vzorke sú zastúpené úvery s dlhšou aj kratšou splatnosťou, u

ktorých býva spravidla odlišný aj účel, na ktorý boli poskytnuté. Hypotéky so splatnosťou kratšou ako 10 rokov častejšie bývajú tzv. americké hypotéky - hypotéky bez dokladovania účelu. Hypotéky s dlhšou splatnosťou sú častejšie spôsobom, ako si klient financuje svoje bývanie.

Rozdelíme vývojovú vzorku na dve časti podľa schválenej splatnosti. V prvej časti budú úvery so splatnosťou do 10 rokov a v druhej úvery so splatnosťou 10 a viac rokov. Pre každú časť osobitne vypočítame priemernú mieru zlyhania pre jednotlivé splatené percentá z istiny. Následne priebeh miery zlyhania odhadneme pomocou hladkej krivky alebo spojitého napojenia dvoch hladkých kriviek. Pretože pozorovania nie sú rovnako zastúpené a chceme aby aproximácia lepšie popisovala oblasti, kde máme viac pozorovaní rozdelíme vývojovú vzorku na 100 častí podľa kvantilov percenta zo splatenej istiny. Pre každú časť vypočítame priemerné percento zo splatenej istiny a priemernú mieru zlyhania. Krivku budeme odhadovať metódou najmenších štvorcov pre tieto časti vývojovej vzorky. Ako prvé sme aproximovali hypotéky so splatnosťou do 10 rokov. Z



Obr. 10: Miera zlyhania v závislosti od percentuálneho podielu splatenej istiny k celkovej schválenej výške istiny pre úvery so splatnosťou do 10 rokov

Obr. 10 je vidieť, že miera zlyhania má nelineárny priebeh. Ako vhodná aproximačná funkcia sa ukázala byť funkcia v tvare

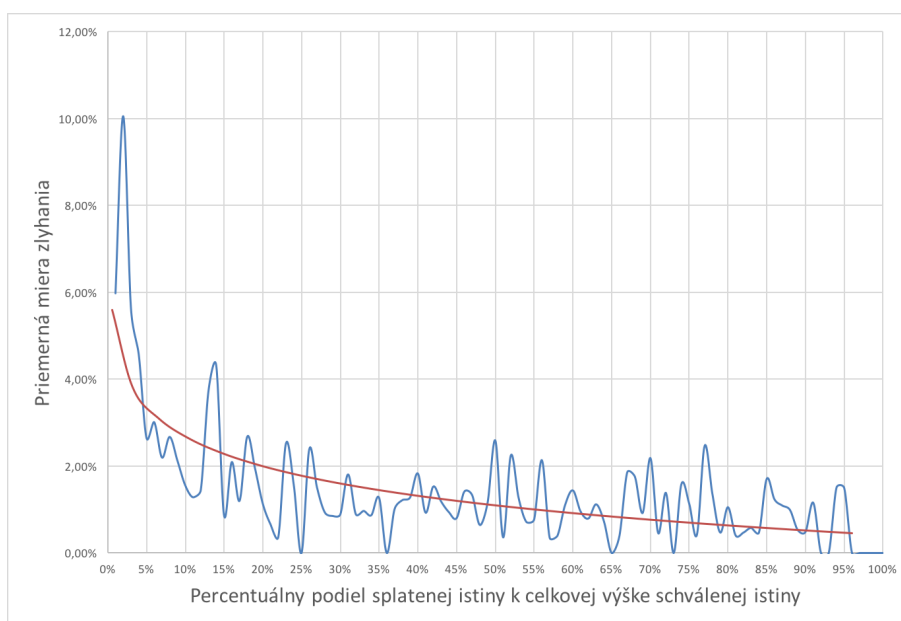
$$T(\gamma) = c_1 + c_2 \ln(\gamma). \quad (3.18)$$

Parametre c_1, c_2 odhadneme metódou najmenších štvorcov pomocou procedúry PROC NLIN v programe SAS Enterprise Guide a dostávame

$$c_1 = 0,0098, \quad (3.19)$$

$$c_2 = 0,0041. \quad (3.20)$$

Dosadením parametrov (3.19) a (3.20) do funkcie (3.18) získame predpis pre hladkú ap-

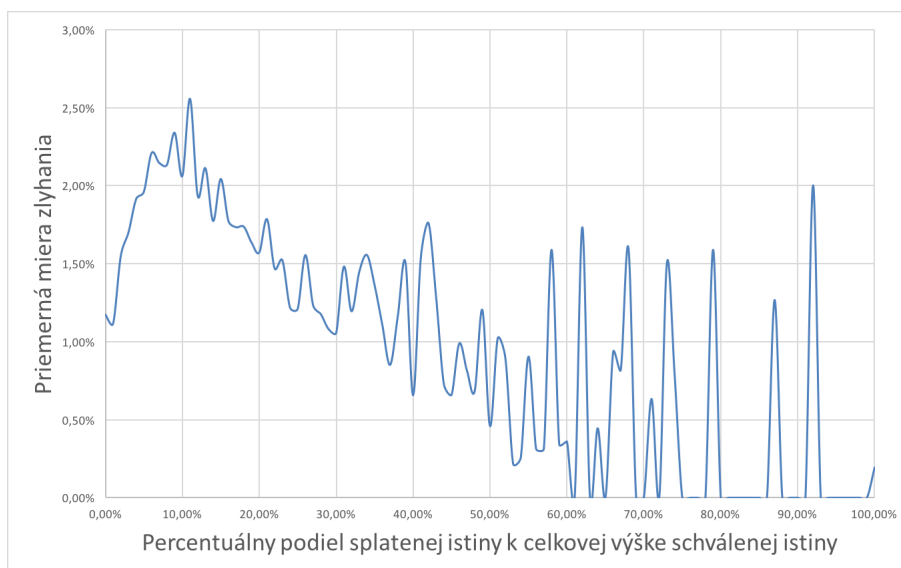


Obr. 11: Miera zlyhania v závislosti od percentuálneho podielu splatenej istiny k celkovej schválenej výške istiny pre úvery so splatnosťou do 10 rokov aproximovaná funkciou (3.18)

roximáciu závislosti miery zlyhania od percenta splatenej istiny hypotekárnych úverov so splatnosťou do 10 rokov. Aproximácia je zobrazená na Obr. 11. Na Obr. 12 je miera zlyhania v závislosti od percentuálneho podielu splatenej istiny k celkovej schválenej výške istiny pre úvery so splatnosťou nad 10 rokov. Miera zlyhania má pre hypotéky so splatnosťou nad 10 rokov úplne iný priebeh ako pre hypotéky so splatnosťou do 10 rokov. Pre prvú skupinu hypoték nemáme dostatočnú informáciu o miere zlyhania pre vyššie percentá splatenej istiny, čo spôsobuje vysokú volatilitu. Na základe priebehu miery zlyhania zvolíme funkčný tvar, ktorým budeme priebeh aproximovať

$$T(\gamma) = d_1 \gamma e^{-d_2 \gamma} + d_3. \quad (3.21)$$

Parametre d_1, d_2, d_3 odhadneme analogickým spôsobom ako pre hypotéky so splatno-



Obr. 12: Miera zlyhaní v závislosti od percentuálneho podielu splatenej istiny k celkovej schválenej výške istiny pre úvery so splatnosťou nad 10 rokov

sťou do 10 rokov a dostávame

$$d_1 = -0,0098, \quad (3.22)$$

$$d_2 = -11,76, \quad (3.23)$$

$$d_3 = 0,0085. \quad (3.24)$$

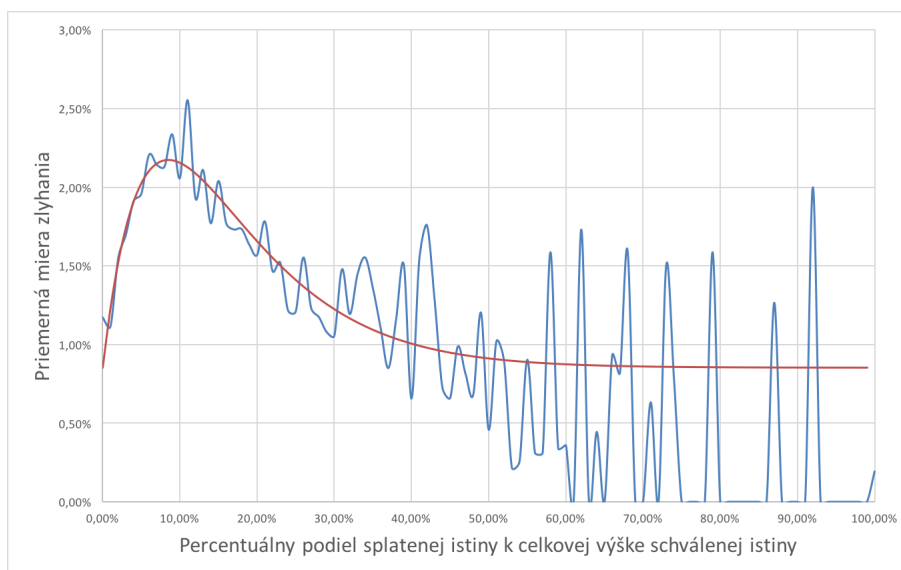
Po dosadení parametrov (3.22) - (3.24) do funkcie (3.21) získavame hladkú aproximáciu miery zlyhaní. Na Obr. 13 vidíme, že zatiaľ čo aproximačná funkcia v tvare (3.21) výborne opisuje prvú polovicu percentuálnych podielov z celkovej istiny, pre druhú polovicu vybraná funkcia v dôsledku nedostatku pozorovaní mieru zlyhaní nadhodnocuje. Rozhodli sme sa preto aproximačnú funkciu zložiť z funkcie v tvare (3.21) a funkcie v tvare (3.18) ako

$$T(\gamma) = d_1 \gamma e^{-d_2 \gamma} + d_3 \text{ pre } \gamma \leq \gamma_s$$

a

$$T(\gamma) = c_1 + c_2 \ln(\gamma) \text{ pre } \gamma > \gamma_s. \quad (3.25)$$

Všetkých 6 parametrov splajnu týchto dvoch funkcií (3.25) odhadneme opäť procedúrou



Obr. 13: Miera zlyhania v závislosti od percentuálneho podielu splatenej istiny k celkovej schválenej výške istiny pre splatnosti nad 10 rokov aproximovaná funkciou (3.18)

PROC NLIN. Dostávame odhady parametrov

$$d_1 = -0,0098,$$

$$d_2 = -11,76,$$

$$d_3 = 0,0085,$$

$$c_1 = 0,0085,$$

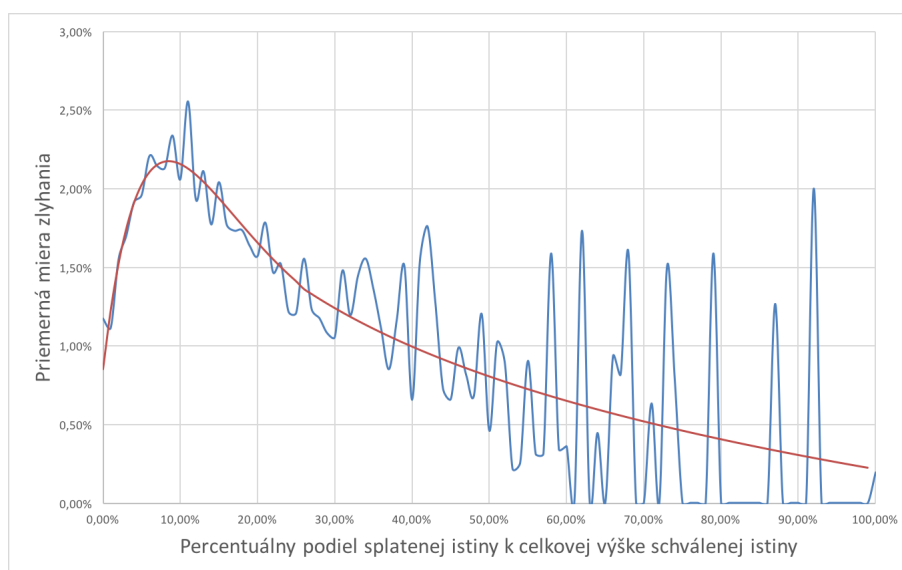
$$c_2 = 0,0022,$$

$$\gamma_s = 0,26.$$

Na Obr. 14 vidíme, že nová aproximačná funkcia oveľa lepšie zachytáva pokles miery zlyhaní pre vyššie percentá splatenej istiny. Vzhľadom na nedostatok pozorovaní s vysokým percentom splatenej istiny je dôležité aproximačnú funkciu pravidelne rekalibrovať. Aproximáciu miery zlyhania budeme využívať v ďalšej podkapitole ako vstup do modelov PD_1 .

3.3 Modely pravdepodobnosti zlyhania počas zostávajúcej životnosti úverov

Modely PD_L budeme vyvíjať na údajoch z vývojovej vzorky obsahujúcej 161 642 pozorovaní hypotekárnych úverov ku koncu novembra v rokoch 2009 až 2012. Vo vzorke



Obr. 14: Miera zlyhania v závislosti od percentuálneho podielu splatenej istiny k celkovej schválenej výške istiny pre úvery so splatnosťou nad 10 rokov aproximovaná spojitou po častiach hladkou funkciou (3.25)

sú zastúpené úvery rôznych splatností, v rôznom štádiu splatenia úveru, ktoré majú vek najviac 7 rokov od poskytnutia. Pre tieto úvery vytvoríme viacero modelov na odhad pravdepodobnosti zlyhania za celé obdobie do splatnosti úveru. Modely budú založené na správaní klienta a časovom efekte odvodenom v predchádzajúcej podkapitole - očakávanej miere zlyhania na základe percentuálnej výšky zostatku istiny v pomere k pôvodnej poskytnutej výške istiny. Správanie klienta bude vyjadrovať jeho *SCORE* z už existujúceho PD_1 modelu v banke.

3.3.1 Jednoduchý model

Najjednoduchšou verziou PD_L modelu, ktorý môžeme vytvoriť, je model zanedbávajúci akékoľvek možné zmeny rizikovosti úveru počas zostávajúcej životnosti úveru. Model nerozlišuje vplyv plynutia času, skúsenosti klienta so splácaním úverového záväzku, ani znižovanie veľkosti záväzku, ktorý mu ostáva. Model predpokladá, že klient nerozlišuje, či by o nehnuteľnosť v hodnote 100 000 eur prišiel pri zostatku úveru 100 000 eur alebo neskôr pri zostatku úveru 20 000 eur. Model rovnako nezohľadňuje ani možné zmeny v správaní klienta v čase.

Pre tento model odhadneme jednoročnú pravdepodobnosť zlyhania PD_1 len na zá-

klade $SCORE$ klienta, čím dostaneme identický model ako využíva banka. Použijeme model logistickej regresie v tvare

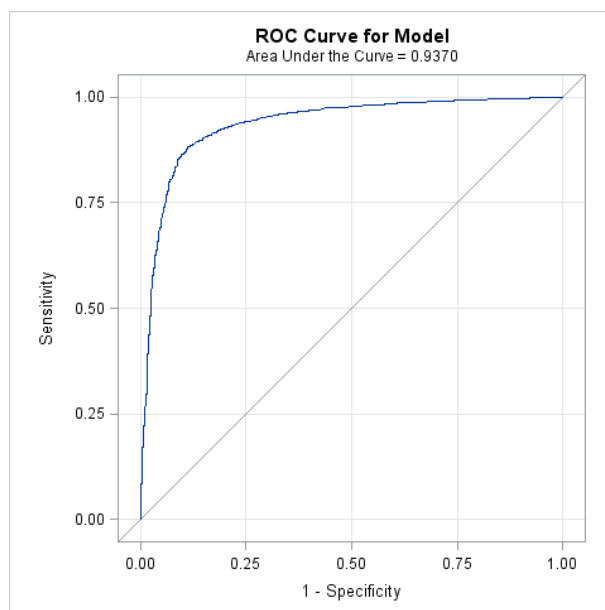
$$PD_1(SCORE) = \frac{1}{1 + e^{-\beta_0 - \beta_1 \times SCORE}} \quad (3.26)$$

a odhad parametrov β_0, β_1 zo vzťahu (3.26) urobíme pomocou procedúry PROC LOGISTIC v programe SAS Enterprise Guide. Dostávame odhady parametrov

$$\hat{\beta}_0 = 0,40808, \quad (3.27)$$

$$\hat{\beta}_1 = -0,000997. \quad (3.28)$$

Model výborne predpovedá pravdepodobnosť zlyhania na najbližší rok po dátume pozorovania, čo môžeme vidieť na grafe ROC krivky. Obsah oblasti pod ROC krivkou



Obr. 15: ROC krivka pre odhad pravdepodobnosti zlyhania počas prvého roku po dátume pozorovania pomocou jednoduchého modelu (3.26)

je $c = 0,937$, čo dáva Giniho koeficient $Gini = 2c - 1 = 2 \times 0,937 - 1 = 0,874$. Pre náhodne vybraný úver z vývojovej vzorky s hodnotou $SCORE$ blízkou priemeru vypočítame jeho PD_L . Klient si požičal 172 000 eur v roku 2007, k dátumu pozorovania v roku 2010 splatil 10 878 eur. Požičal si na 26 rokov, spláca už 3 roky a ostáva mu 23 rokov do splatenia úveru. K dátumu pozorovania má $SCORE = 4900$. Jeho pravdepodobnosť zlyhania v priebehu najbližšieho roka daná jednoduchým modelom (3.26)

je

$$PD_1(4900) = \frac{1}{1 + e^{-0,40808+0,000997 \times 4900}} = 0,01126.$$

Jednoduchý model nepredpokladá žiadnu zmenu v čase, preto aj pre všetky ďalšie jednoročné obdobia do splatnosti úveru odhaduje rovnakú pravdepodobnosť zlyhania.

Pre PD_L počítanú podľa vzťahu (3.2) to znamená

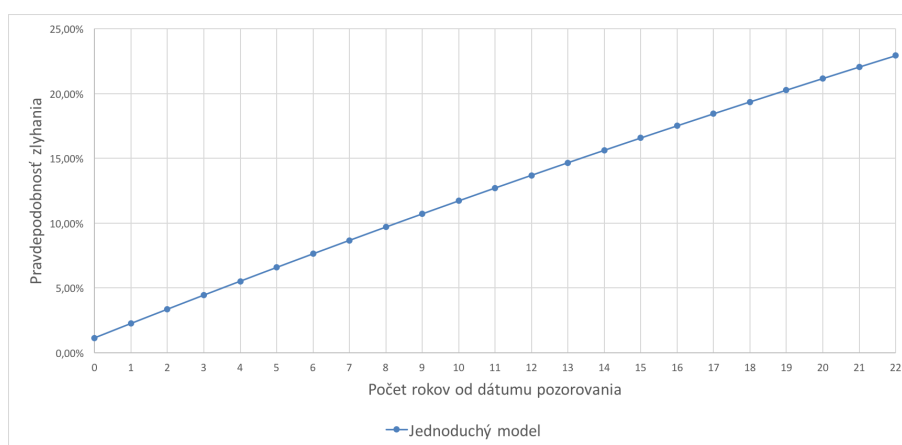
$$PD_L = 1 - \prod_{i=0}^{M-1} (1 - PD_{t_i, t_{i+1}}) = 1 - (1 - PD_1)^M. \quad (3.29)$$

Opäť použijeme príklad s klientom s časom do splatnosti $M = 23$ a $PD_1 = 0,01126$.

Dosadením do vzťahu (3.29) dostávame

$$PD_L = 0,22929.$$

Na príklade toho istého klienta ilustrujeme, ako rastie kumulatívna pravdepodobnosť zlyhania s plynúcim časom od dátumu pozorovania. Pravdepodobnosť zlyhania rastie



Obr. 16: Kumulatívny nárast pravdepodobnosti zlyhania pre jednoduchý model (3.29)

s časom takmer lineárne. Lineárny rast PD_L s časom nie je vlastnosť, ktorú by sme pri modeli očakávali, pretože aj pri predpoklade nemenného správania klienta počas celej životnosti úveru je ťažko interpretovateľný fakt, že je prírastok PD v prvom roku a v poslednom roku rovnaký.

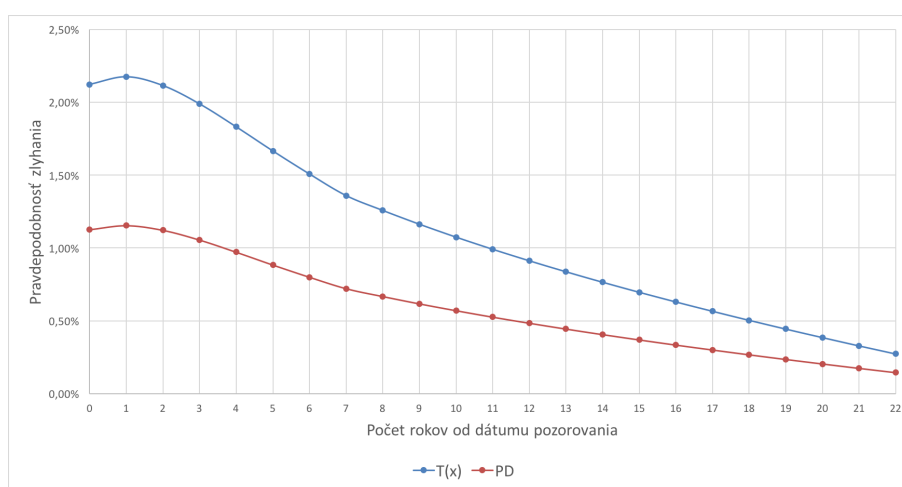
3.3.2 Škálovaný model

Zmenu pravdepodobnosti zlyhania úveru s ubiehajúcim časom k splateniu úveru sme vysvetľovali v predchádzajúcej podkapitole 3.2.1. Krivku závislosti priemernej odhadovanej miery zlyhaní od percenta splatenej istiny γ , ktorú označujeme $T(\gamma)$, využijeme

na to, aby sme odhadli pre každého klienta jeho PD_L s ohľadom na jeho aktuálny podiel zostatku istiny k celkovej výške istiny a predpokladané splácanie v budúcnosti. Predpokladajme, že si klient zachováva rovnaké správanie počas celej životnosti úveru. Ďalej predpokladajme, že si ročná pravdepodobnosť zlyhania úveru zachováva pomer voči priemernej pravdepodobnosti zlyhania v populácii, ktorú reprezentuje $T(\gamma)$. Pre ročné obdobie, na ktoré odhadujeme $PD_{t_i, t_{i+1}}$ budeme označovať časový efekt $T(\gamma_i)$. Potom $PD_{t_i, t_{i+1}}$ pre jednotlivé roky dostaneme pomocou rekurentného vzťahu

$$PD_{t_{i+1}, t_{i+2}} = PD_{t_i, t_{i+1}} \frac{T(\gamma_{i+1})}{T(\gamma_i)}, \quad (3.30)$$

kde počiatočný bod je hodnota funkcie $T(\gamma)$ danej vzťahom (3.25) v percente splatenej istiny v deň pozorovania $T(\gamma_0)$. Tento model bude mať pre odhad jednoročnej pravdepodobnosti zlyhania rovnakú ROC krivku a Giniho koeficient ako jednoduchý model. Zaujímavejšie je porovnanie odhadnutej pravdepodobnosti zlyhania pre jednotlivé jednoróčné obdobia s priemernou mierou zlyhania v čase $T(\gamma)$. Na Obr. 17 môžeme vidieť,



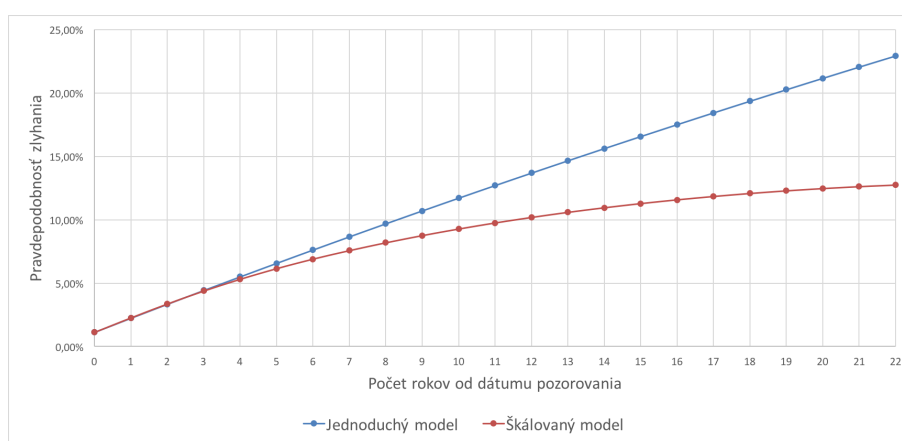
Obr. 17: Porovnanie priemernej miery zlyhania v čase a pravdepodobnosti zlyhania odhadnutej škálovaným modelom (3.30)

že pravdepodobnosti zlyhania PD_1 kopírujú profil priemernej miery zlyhania a s časom sa približujú k priemerným hodnotám. Dosadením vzťahu (3.30) do všeobecného výpočtu PD_L daného vzťahom (3.2) dostávame

$$PD_L = 1 - \prod_{i=0}^{M-1} (1 - PD_{t_i, t_{i+1}}) = 1 - (1 - PD_1) \prod_{i=1}^{M-1} \left(1 - PD_{t_{i-1}, t_i} \frac{T(\gamma_{i+1})}{T(\gamma_i)} \right). \quad (3.31)$$

Vráťme sa k príkladu klienta so $SCORE = 4900$. Klient si požičal 172 000 eur v roku 2007, k dátumu pozorovania v roku 2010 splatil 10 878 eur. Požičal si na 26 rokov, spláca už 3 roky a ostáva mu 23 rokov do splatenia úveru. Jeho aktuálna úroková sadzba pre daný hypotekárny úver je $r = 4,14\%$. Pravdepodobnosť zlyhania počas prvého roku od dátumu pozorovania je rovnaká, ako pri jednoduchom modeli $PD_1 = 0,01126$. Na základe údajov o splatenej sume, úrokovej sadzbe a čase do splatnosti vypočítame, koľko percent z istiny bude mať klient splatené na začiatku jednoročných období, pre ktoré odhadujeme ďalšie ročné PD , a dopočítame časové parametre $T(\gamma)$. Dosadením do vzťahu (3.31) dostávame $PD_L = 0,12741$.

Porovnajme kumulatívny nárast pravdepodobnosti zlyhania s časom podľa škálovaného modelu a jednoduchého modelu. Na grafe zobrazenom na Obr. 18 sú kumulatívne



Obr. 18: Kumulatívny nárast pravdepodobnosti zlyhania pre jednoduchý model (3.29) a škálovaný model (3.31)

pravdepodobnosti zlyhania pre klienta z príkladu uvedeného vyššie. Prírastok PD sa postupne znižuje, čo je z hľadiska ekonomickej interpretácie logické.

3.3.3 Logistický model so statickým správaním

Tretím vytvoreným modelom je model, ktorý podobne ako škálovaný model zohľadňuje posun úveru v čase prostredníctvom časového efektu $T(\gamma)$. Budeme predpokladať nemenné správanie klienta v čase. Pomocou logistickej regresie vytvoríme model, ktorý bude mať dva vysvetľujúce parametre: $SCORE$ a časový efekt $T(\gamma)$. Jednoročnú prav-

depodobnosť zlyhania PD_1 model odhadne ako

$$PD_1(SCORE, T(\gamma) \quad (3.32)$$

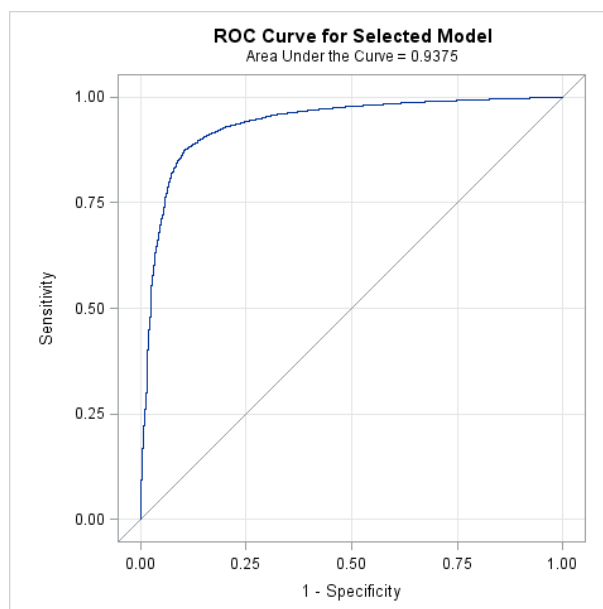
Parametre $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ odhadneme metódou maximálnej vierohodnosti pomocou procedúry PROC LOGISTIC v programe SAS Enterprise Guide. Program odhadol parametre

$$\hat{\beta}_0 = 0,02901, \quad (3.33)$$

$$\hat{\beta}_1 = -0,00099, \quad (3.34)$$

$$\hat{\beta}_2 = 20,7721. \quad (3.35)$$

Je dôležité otestovať, či má podiel splatenej istiny naozaj pridanú výpovednú hodnotu, preto vypočítame dolnú a hornú hranicu 95%-ného intervalu spoľahlivosti. Dolná hranica je 10,145 a horná hranica 31,399. Pretože interval spoľahlivosti neobsahuje nulu test s hladinou významnosti 95% potvrdil významnosť podielu splatenej istiny v modeli. Pre PD_1 model odhadujúci pravdepodobnosť zlyhania v prvom roku po dátume pozorovania vykreslíme ROC krivku. Z grafu ROC krivky na Obr. 19 vidíme, že model



Obr. 19: ROC krivka pre odhad pravdepodobnosti zlyhania počas prvého roku po dátume pozorovania pomocou logistického modelu so statickým správaním klienta (3.32)

vďaka novému parametru vie nepatrne lepšie rozlíšiť dobré a zlé úvery vo vývojovej

vzorke počas prvého roka od dátumu pozorovania. Oblasť pod krivkou (AUC) narástla oproti jednoduchému a škálovanému modelu na $c = 0,9375$, čo dáva Giniho koeficient $Gini = 2c - 1 = 2 \times 0,9375 - 1 = 0,875$. Rozdiel nie je významný a ani samostatný odhad pravdepodobnosti zlyhania pre prvý rok po dátume pozorovania nie je podstatný. Dôležitejší je priebeh kumulatívnej pravdepodobnosti zlyhania.

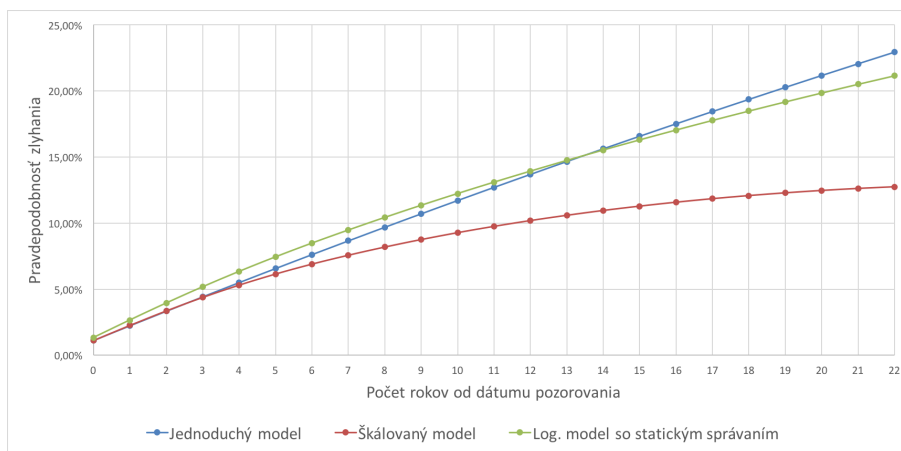
Pre tento model počítame pravdepodobnosť zlyhania, ktoré môže nastať počas celej životnosti úveru podľa vzťahu (3.2), kde $PD_{t_i, t_{i+1}}$ sú jednorôčné pravdepodobnosti zlyhania, ktoré dostaneme zo vzťahu (3.32) tak, že postupne dopočítavame hodnoty $T(\gamma_i)$ pomocou vzťahu (3.17).

Pre klienta z príkladov z predchádzajúcich podkapitol odhadne logistický model so statickým správaním

$$PD_1 = 0,01327,$$

$$PD_L = 0,21153.$$

Kumulatívne nárasty pravdepodobnosti zlyhania sú zobrazené na Obr. 20. Krivka



Obr. 20: Kumulatívny nárast pravdepodobnosti zlyhania pre jednoduchý model (3.29), škálovaný model (3.29) a logistický model so statickým správaním (3.32)

kumulatívnej pravdepodobnosti zlyhania PD_C má veľmi podobný priebeh ako kumulatívna pravdepodobnosť zlyhania PD_C pre jednoduchý model a je mierne zakrivená. Jej priebeh sa dá vysvetliť veľmi silným vplyvom aktuálneho $SCORE$ na pravdepodobnosť zlyhania v priebehu najbližšieho roku PD_1 . Parameter $T(\gamma)$ má v porovnaní so $SCORE$ veľmi slabý vplyv na PD_1 a spôsobuje len mierne zakrivenie kumulatívnej PD . Príčinou tejto skutočnosti je spôsob, akým sa model vyvíjal. Vo vzorke sú

Rating	SCORE od	SCORE do	Priemerné SCORE
R1	10082	12620	10538
R2	9116	10080	9599
R3	8457	9115	8744
R4	7787	8456	8122
R5	7147	7786	7392
R6	6564	7146	6902
R7	5816	6563	6115
R8	5149	5815	5458
R9	3973	5148	4649
R10	-697	3972	2765

Tabuľka 3: Rozdelenie úverov do ratingových kategórií podľa skóre

informácie o aktuálnom skóre úverov a aktuálnom zostatku. Aktuálne skóre má však neporovnateľne silnejší vplyv na vysvetľovanú premennú, než časový parameter $T(\gamma)$. Hoci sa parameter $T(\gamma)$ dopočítava pre ďalšie jednorôčné obdobia, skóre úveru sa nemení a model prisudzuje parametru $SCORE$ stále rovnakú váhu. Tento nedostatok odstraňuje nasledovný model.

3.3.4 Logistický model s dynamickým správaním

Predpokladom modelu s dynamickým správaním klienta, je zmena jeho správania v čase. Správanie klienta bude reprezentovať ratingová kategória $R1, R2, R3, \dots, R10$, pričom reprezentácia správania klienta v modeli bude priemerné $SCORE$ v danej ratingovej triede. Ako prvé vypočítame kvantily pre rozdelenie $SCORE$ vo vývojovej vzorke tak, aby v každej z desiatich kategórií bol zastúpený rovnaký počet pozorovaní.

Základný model

Ratingovú triedu klienta v čase t_i označíme RC_i a bude pre nás náhodnou veličinou. Rating klienta v deň pozorovania (v čase t_0) je známy a označíme ho $RC_0 = rc_0$. Budeme predpokladať, že reťazec náhodných veličín $\{RC_i\}_{i \in 0,1,\dots,M-1}$ má Markovovu vlastnosť v zmysle nasledovnej definície z [8].

Definícia 3.2. *Nech $\{X_t\}_{t \in T}$ je reťazec náhodných veličín, T je množina diskrétnych časových bodov a S je množina stavov, ktoré môže reťazec nadobudnúť. Hovoríme, že reťazec $\{X_t\}_{t \in T}$ má Markovovu vlastnosť alebo je Markovov, ak pre každé $n = 0, 1, 2, \dots$ a pre všetky časy $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_{n+1}$, $t_0, \dots, t_{n+1} \in T$ a všetky stavy $i_0, \dots, i_{n+1} \in S$ platí*

$$P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_0} = i_0) = P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_n} = i_n)$$

Inak povedané, rating klienta v čase t_{i+1} závisí výlučne od ratingu klienta v čase t_i . Pravdepodobnostné rozdelenie ratingov pre neskoršie jednoročné obdobia dostaneme pomocou počiatocného rozdelenia, ktoré je v tomto prípade známa ratingová trieda v čase t_0 a ročnej matice prechodu $\mathbb{P}(1)$ rozmeru 10×10 , ktorej prvkami p_{ij} sú pravdepodobnosti prechodu z i -tej ratingovej kategórie do j -tej. Chapmanova - Kolmogorova rovnosť hovorí, že pravdepodobnostné rozdelenie ratingov o dva roky $\mathbb{P}(2)$ získame pomocou druhej mocniny matice prechodu, maticovo zapísané $\mathbb{P}(2) = \mathbb{P}^2$. Zovšeobecnene pre n -ročnú maticu prechodu platí $\mathbb{P}(n) = \mathbb{P}^n$. Nech α je vektor počiatocného pravdepodobnostného rozdelenia, ktorý má jednotku na pozícii prislúchajúcej aktuálnej ratingovej triede a nuly všade inde. Potom pravdepodobnostné rozdelenie ratingu úveru po n rokoch vypočítame ako $p = \mathbb{P}^n \alpha$. Pravdepodobnostné rozdelenie využijeme pri výpočte očakávanej pravdepodobnosti zlyhania.

Prvú jednoročnú pravdepodobnosť zlyhania odhadneme na základe skutočnej hodnoty *SCORE* k dátumu pozorovania. Hodnoty *SCORE* pre ďalšie ročné časové obdobia sú závislé od náhodnej premennej RC_i a jednoročné pravdepodobnosti zlyhania budeme pre $i \geq 2$ počítať ako očakávanú hodnotu

$$\begin{aligned} PD_{t_i, t_{i+1}}(SCORE, T(\gamma), rc_0) &= \\ &= E [PD_{t_i, t_{i+1}}(SCORE(RC_i \mid RC_0 = rc_0), T(\gamma))] = \\ &= E \left[\frac{1}{1 + e^{-\beta_0 - \beta_1 \times SCORE(RC_i) - \beta_2 \times T(\gamma)}} \mid RC_0 = rc_0 \right] = \\ &= \sum_{rc \in R1, \dots, R10} P[RC_i = rc \mid RC_0 = rc_0] \frac{1}{1 + e^{-\beta_0 - \beta_1 \times SCORE(rc) - \beta_2 \times T(\gamma)}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Parametre $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ sú rovnaké ako pri predchádzajúcom modeli. Z pozorovaných ročných zmien ratingových kategórií v rokoch 2014 až 2016 odhadneme ročnú maticu

	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10
R1	0,6962	0,2856	0,1100	0,0824	0,0126	0,0129	0,0166	0,0146	0,0023	0,0012
R2	0,2520	0,5413	0,4418	0,2628	0,1175	0,0642	0,0237	0,0263	0,0146	0,0048
R3	0,0261	0,1079	0,3290	0,3510	0,2644	0,2166	0,1083	0,0169	0,0342	0,0055
R4	0,0215	0,0434	0,0794	0,2033	0,3665	0,3240	0,2778	0,1113	0,0599	0,0162
R5	0,0020	0,0150	0,0170	0,0526	0,1311	0,2362	0,1598	0,1733	0,1115	0,0155
R6	0,0008	0,0026	0,0077	0,0236	0,0597	0,1034	0,2184	0,1110	0,1475	0,0166
R7	0,0008	0,0023	0,0092	0,0129	0,0226	0,0217	0,1216	0,3469	0,1937	0,0478
R8	0,0002	0,0012	0,0023	0,0084	0,0185	0,0076	0,0308	0,1463	0,1884	0,0474
R9	0,0002	0,0004	0,0020	0,0024	0,0043	0,0107	0,0218	0,0307	0,1406	0,1147
R10	0,0000	0,0003	0,0016	0,0006	0,0027	0,0028	0,0210	0,0226	0,1073	0,7303

Tabuľka 4: Matica prechodu $\mathbb{P}(1)$

prechodu. Parametre odhadnutej matice $\mathbb{P}(1)$ sú zobrazené v Tabuľke 4. Využitím matice prechodu a odhadnutých parametrov $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ vypočítame pravdepodobnosť zlyhania pre klienta z príkladov vyššie

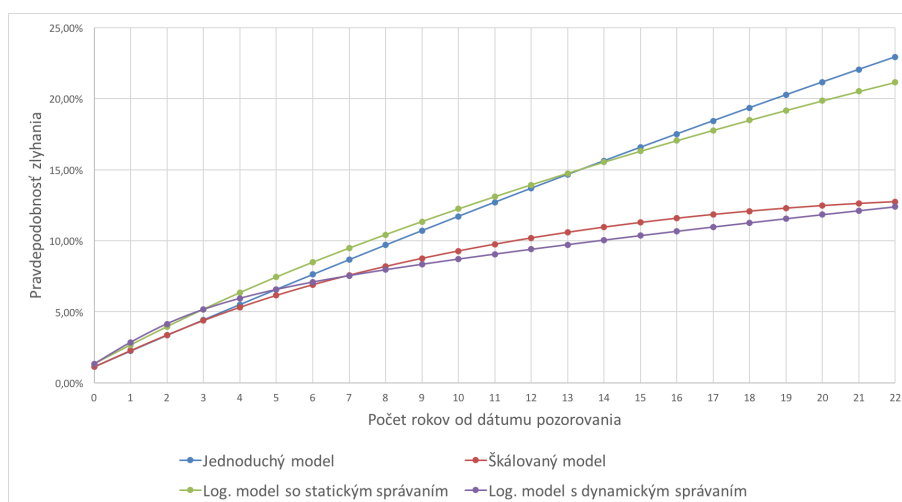
$$PD_1 = 0,01327,$$

$$PD_L = 0,12384.$$

Pozrime sa aj na kumulatívny priebeh pravdepodobnosti zlyhania. Kumulatívny nárast pravdepodobnosti zlyhania zobrazený na Obr. 21 má podobný priebeh ako škálovaný model, čo je spôsobené výberom úveru s priemerným skóre. Pre úver so zlým ratingom by kumulatívna pravdepodobnosť rástla ešte miernejšie a naopak pre klienta s dobrým ratingom by rástla rýchlejšie.

Vylepšený model

Možným rozšírením modelu, ktorý modeluje prechod klienta medzi ratingovými triedami markovovým modelom prvého rádu, je model, ktorý bude zohľadňovať o rok dlhšiu históriu. Vylepšený model bude predpokladať, že rating klienta v čase t_{i+1} závisí od jeho aktuálneho ratingu v čase t_i a jeho ratingu v čase t_{i-1} . Táto vlastnosť sa



Obr. 21: Kumulatívny nárast pravdepodobnosti zlyhania pre jednoduchý model (3.29), škálovaný model (3.31), logistický model so statickým správaním (3.32) a základný logistický model s dynamickým správaním (3.36)

dá zapísať v tvare

$$P(RC_{n+1} = rc_{n+1} \mid RC_n = rc_n, \dots, RC_0 = rc_0) =$$

$$P(RC_{n+1} = rc_{n+1} \mid RC_n = rc_n, RC_{n-1} = rc_{n-1}).$$

Prvú jednoročnú pravdepodobnosť zlyhania znovu odhadneme na základe skutočnej hodnoty $SCORE$ k dátumu analýzy a hodnotu skóre pre predchádzajúce ročné obdobie získame z historických údajov. Ratingovú kategóriu určenú na základe hodnoty $SCORE$ platnej rok pred dátumom pozorovania označíme $RC_{-1} = rc_{-1}$. Hodnoty $SCORE$ pre ďalšie časové obdobia sú závislé od náhodnej premennej RC_i a jednorôčné pravdepodobnosti zlyhania budeme pre $i \geq 2$ opäť počítať ako očakávanú hodnotu

$$PD_{t_i, t_{i+1}}(SCORE, T(\gamma), rc_{-1}, rc_0) =$$

$$= E \left[PD_{t_i, t_{i+1}}(SCORE(RC_i \mid RC_{-1} = rc_{-1} \wedge RC_0 = rc_0), T(\gamma)) \right] =$$

$$= E \left[\frac{1}{1 + e^{-\beta_0 - \beta_1 \times SCORE(RC_i \mid RC_{-1} = rc_{-1} \wedge RC_0 = rc_0) - \beta_2 \times T(\gamma)}} \right] =$$

$$= \sum_{rc \in R1, \dots, R10} P[RC_i = rc \mid RC_0 = rc_0 \wedge RC_{-1} = rc_{-1}] \times \frac{1}{1 + e^{-\beta_0 - \beta_1 \times SCORE(rc) - \beta_2 \times T(\gamma)}}.$$
(3.37)

Matica prechodu \mathbb{P} je v tomto prípade zobrazenie z množiny $\{R1, R2, \dots, R10\} \times \{R1, R2, \dots, R10\}$ do množiny $\{R1, R2, \dots, R10\}$. Pre účely výpočtu pravdepodob-

nostných rozdelení o 2 a viac rokov, musíme toto zobrazenie upraviť tak, aby zobrazovalo do množiny $\{R1, R2, \dots, R10\} \times \{R1, R2, \dots, R10\}$. Dostaneme tak maticu zobrazenia rozmeru $10^2 \times 10^2$, v ktorej budú navzájom niektoré stavy nedosiahnuteľné. V stĺpcoch bude mať rating v čase t_{i-1} a v čase t_i , v riadkoch bude mať rating v čase t_i a v čase t_{i+1} . Matica bude mať na miestach, kde sa rating v čase t_i nezhoduje v riadku a stĺpci nuly.

Maticu odhadneme z pozorovaní ročných zmien *SCORE* za dlhšie časové obdobie, jej násobenie naprogramujeme v procedúre PROC IML v programe SAS Enterprise Guide a následne pomocou procedúry PROC SQL využijeme vypočítané pravdepodobnostné rozdelenie vo vzťahu (3.37).

3.4 Testovanie modelov

Pri testovaní modelov nás budú zaujímať dve vlastnosti každého modelu. Prvou je presnosť, s ktorou model predpovedá pravdepodobnosť zlyhania na obdobie celej životnosti úveru. Druhou vlastnosťou je rozlišovanie skupín dobrých a zlých úverov na období celej životnosti úveru. Keďže nemáme k dispozícii dostatočne dlhý časový rad pozorovaní, budeme modely sledovať iba na obmedzenej časti zo životnosti úveru. V tejto podkapitole budeme pod životnosťou úveru chápať časové obdobie medzi dátumom, ku ktorému úver pozorujeme, a 30.11.2015.

Ku všetkým úverom doplníme informáciu o ich zlyhaniach až do 30.11.2015. Následne vytvoríme dve testovacie vzorky. V prvej vzorke budeme odhadovať pravdepodobnosť zlyhania od pôvodného dátumu pozorovania. V druhej vzorke všetky úvery vrátíme čo najviac späť k času ich poskytnutia a budeme pravdepodobnosť zlyhania odhadovať na základe informácií dostupných v posunutom dátume pozorovania. Sme limitovaný dostupnosťou *SCORE*. Pre vylepšenú verziu logistického modelu s dynamickým správaním potrebujeme najmenej ročnú históriu skóre úveru. Zároveň prvé záznamy *SCORE* konzistentného s aktuálnym modelom banky máme k dispozícii od roku 2009. Posunutý dátum pozorovania preto bude najskôr v roku 2010 a zároveň bude minimálne jeden rok po otvorení úverového obchodu.

3.4.1 Presnosť odhadu pravdepodobnosti zlyhania

Máme k dispozícii validačnú dátovú vzorku o veľkosti 70 000 pozorovaní. Rozhodli sme sa ju však zlúčiť s vývojovou vzorkou, čím dostávame viac ako 230 000 pozorovaní. Na tejto vzorke rozdelíme všetky úvery na homogénne (alebo takmer homogénne) podskupiny tak, aby modely odhadovali pre úvery v skupine rovnakú (takmer rovnakú) pravdepodobnosť zlyhania. Vzorku úverov posunutých späť v čase delíme na základe splatnosti, úrokovej sadzby, aktuálneho ratingu, ratingu platného rok pred novým dátumom pozorovania a času do splatnosti. V druhej vzorke pribudne medzi deliace parametre informácia, či klient splácal mimoriadne splátky istiny. Mimoriadna splátka je ekvivalentná s dobrovoľným posunom klienta v čase. Úvery v rámci homogénnych podskupín odhadnú všetky úvery rovnaké pravdepodobnosť zlyhania $PD_{t_i, t_{i+1}}$ pre jednoročné časové etapy. Odhadnutú pravdepodobnosť zlyhania pre každé jednoročné obdobie porovnáme so skutočnou mierou zlyhania. Porovnávacím kritériom bude suma štvorcov odchýlok RSS odhadnutej pravdepodobnosti zlyhania od skutočnej miery zlyhania pre jednotlivé homogénne skupiny úverov.

Vzorka s pôvodným dátumom pozorovania

Pretože miera zlyhania je vo vývojovej vzorke veľmi nízka, je dôležité, aby v každej podskupine bolo aspoň 300 úverov. Týmto spôsobom dostávame 139 skupín, ktoré si môžeme predstaviť ako 139 rôznych typov úverov zastúpených vo vzorke. Budeme ich značiť indexom j . Pre j -tu skupinu s n_j pozorovaniami, z ktorých a_i^j ešte nebolo splatených v čase t_i a d_i^j z nich zlyhalo medzi časom t_i a t_{i+1} , vypočítame mieru zlyhania

$$DR_i^j = \begin{cases} \frac{d_i^j}{a_i^j} & \text{pre } t_i \leq 30.11.2014, \\ 0 & \text{pre } t_i > 30.11.2014 \end{cases} \quad (3.38)$$

Priemerná pravdepodobnosť zlyhania v j -tej skupine, ak pravdepodobnosť zlyhania k -teho úveru na časovom intervale (t_i, t_{i+1}) označíme $PD(k)_{t_i, t_{i+1}}$ ($PD(k)_{t_i, t_{i+1}} = 0$ pre úvery, ktoré sú v čase t_i už splatené), bude

$$PD_{t_i, t_{i+1}}^j = \begin{cases} \frac{1}{a_i^j} \sum_{k=1}^{n_j} PD(k)_{t_i, t_{i+1}} & \text{pre } t_i \leq 30.11.2014, \\ 0 & \text{pre } t_i > 30.11.2014 \end{cases} \quad (3.39)$$

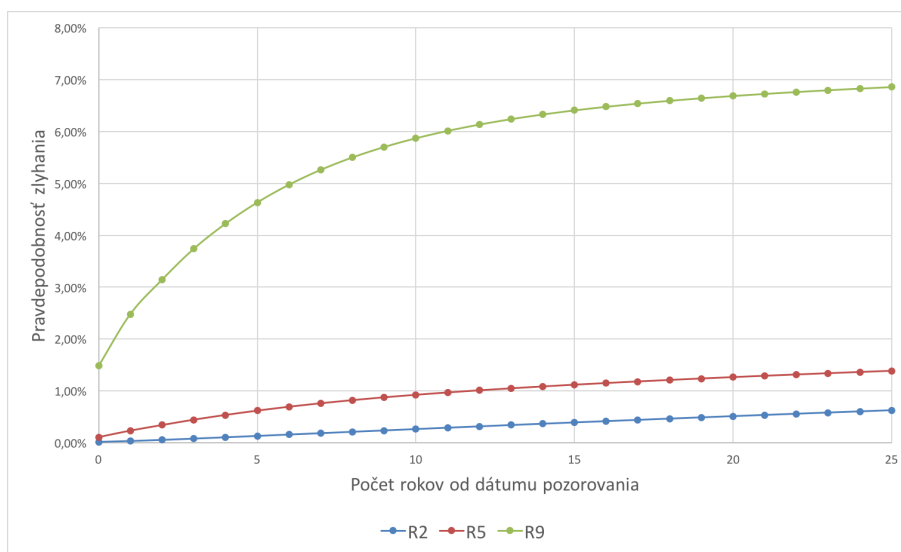
Model	Jednoduchý	Škálovaný	Log. statický
RSS	1,579	1,069	1,526
Model	Log. dyn. základný	Log. dyn. vylepšený	
RSS	0,174	0,196	

Tabuľka 5: Hodnoty RSS pre jednotlivé modely pri pôvodnom dátume pozorovania

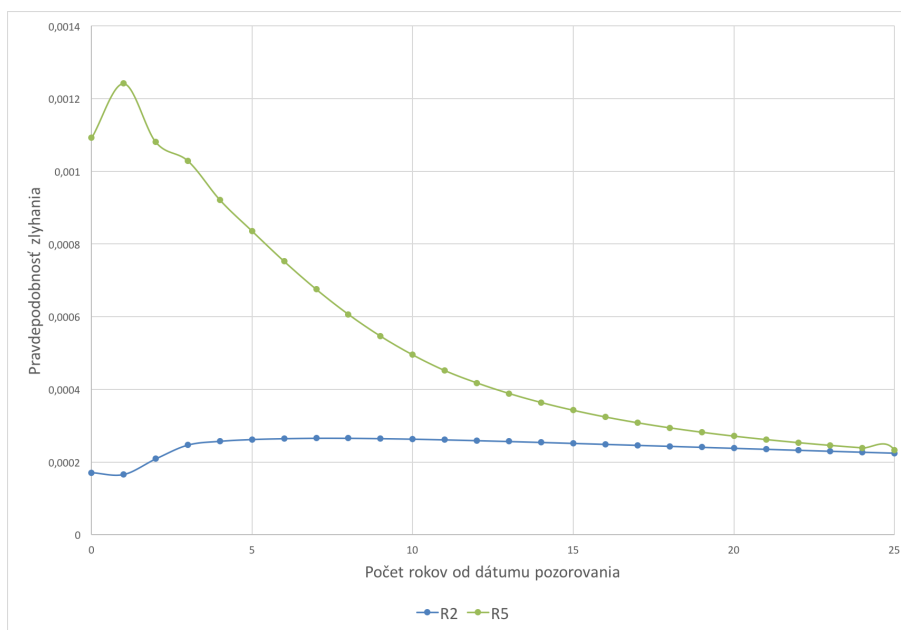
Výslednú mieru nepresnosti modelov RSS vypočítame

$$RSS = \sum_{j=1}^{139} \sum_{i=0}^{M-1} (PD_{t_i, t_{i+1}}^j - DR_i^j)^2. \quad (3.40)$$

Aplikovaním vzťahu (3.40) na odhady pravdepodobností zlyhania všetkých piatich modelov získavame Tabuľku 5 nepresností modelov. Vidíme, že modely uvažujúce zmenu správania klienta v čase modelovanú maticou prechodu dávajú rádovo 10 násobne nižšiu RSS , ako ostatné modely. Zaujímavé je najmä porovnanie logistických modelov s dynamickým správaním a škálovaného modelu, ktorý mal pre klienta s priemerným správaním takmer rovnaký priebeh kumulatívnej pravdepodobnosti zlyhania, ako modely s dynamickým správaním. Podobný priebeh kumulatívnej PD_C je spôsobený výberom klienta s priemerným správaním. Hoci sa priemerná miera zlyhania pre dobrých klientov nedá vo vývojovej vzorke pre nízky počet zlyhaných úverov pozorovať, test ukázal, že miery zlyhania majú pre dobrých a zlých klientov rozličný priebeh ako v uvedenom príklade v predchádzajúcej podkapitole. Táto skutočnosť je logická, pretože keď uvažujeme zmeny správania v závislosti od ratingových tried, klient s najlepším ratingom R1 už nemá ako svoje správanie zlepšiť a s nenulovou pravdepodobnosťou sa môže iba zhoršiť alebo ostať na rovnakej úrovni. Naopak, správanie klienta na úvere s ratingom R10 sa už nemôže zhoršiť a s nenulovou pravdepodobnosťou sa môže iba zlepšiť alebo ostať na rovnakej úrovni. Pre ilustráciu si vykreslíme kumulatívne krivky pravdepodobnosti zlyhania dané vylepšeným logistickým modelom s dynamickým správaním klienta. Na Obr. 22 vidíme, že priebeh kumulatívnej pravdepodobnosti zlyhania má veľmi odlišný charakter pre úver s ratingom R2, úver s ratingom R5 a úver s ratingom R9. Ešte lepšie ilustruje rozdielny zmeny rizikovosti úverov v čase priebeh pravdepodobností zlyhania pre jednotlivé roky od dátumu pozorovania zobrazenom na Obr. 23 a Obr. 24. Pri dobrom ratingu najskôr jednorôčné pravdepodobnosti



Obr. 22: Priebeh kumulatívnej pravdepodobnosti pre úvery s ratingami R2, R5 a R9 daný vylepšeným dynamickým modelom (3.37)

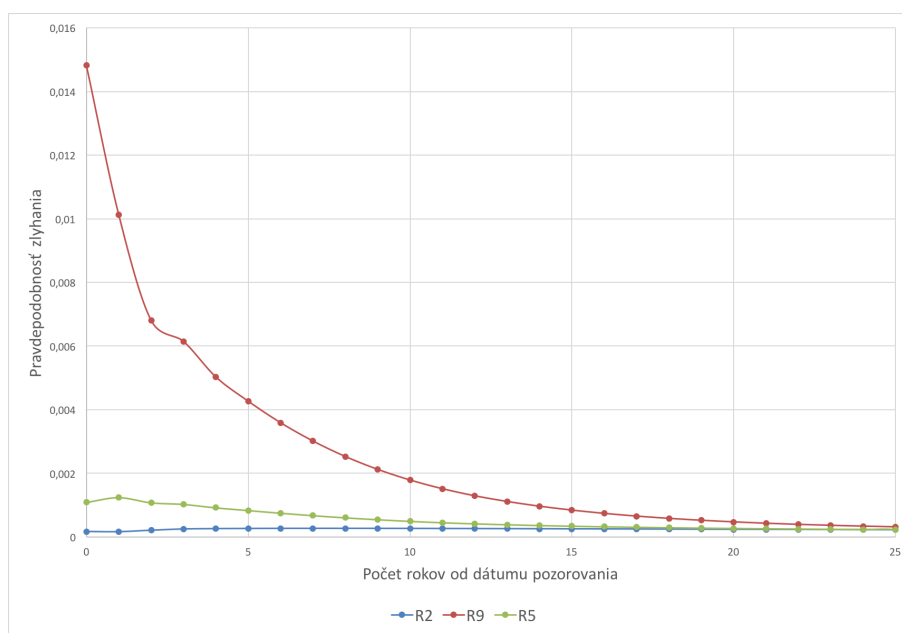


Obr. 23: Jednoročné pravdepodobnosti zlyhania dané vylepšeným logistickým modelom s dynamickým správaním klienta (3.37) v závislosti od počtu rokov od dátumu pozorovania pre úvery s ratingami R2 a R5

zlyhania rastú, zatiaľ čo pri zlom ratingu celý čas klesajú.

Vzorka s posunutým dátumom pozorovania

Vo vzorke s pôvodným dátumom pozorovania sa niektoré úvery nachádzali viackrát,



Obr. 24: Jednoročné pravdepodobnosti zlyhania dané vylepšeným logistickým modelom s dynamickým správaním klienta (3.37) v závislosti od počtu rokov od dátumu pozorovania pre úvery s ratingami R2, R5 a R9

pretože sme ich mohli pozorovať v rôznych etapách ich životnosti, pri rôznych splatených čiastkach a rôznom správaní reprezentovanom skóre. Po posunutí všetkých úverov na prvý možný dátum pozorovania, pre ktorý máme k dispozícii rating úveru aj za predchádzajúci rok by sme mali vo vzorke duplicitné pozorovania (rôzne pozorovania rovnakého úveru pri pôvodnom dátume pozorovania), ktoré však musíme odstrániť. Následne pozorujeme zlyhania pre každé jednoročné obdobie medzi posunutým dátumom pozorovania a koncom roka 2015. Po vytvorení homogénnych skupín pozorovaní s minimálnym počtom 300 úverov zostáva 39 skupín (typov úverov), pre ktoré vypočítame RSS podľa vzťahu

$$RSS = \sum_{j=1}^{39} \sum_{i=0}^{M-1} (PD_{t_i, t_{i+1}}^j - DR_i^j)^2. \quad (3.41)$$

Využitím vzťahu (3.41) pre odhady pravdepodobností zlyhania všetkých piatich modelov dostaneme Tabuľku 6 hodnôt RSS . Tentokrát dáva najpresnejší výsledok vylepšený dynamický model. Vyššia miera nepresnosti v porovnaní s testom pri pôvodnom dátume pozorovania má dva dôvody. Prvým je dlhší časový interval, na ktorom sa prirodzene viackrát odhaduje pravdepodobnosť zlyhania. Druhým je vychýlenosť vzorky. Vo vývojovej vzorke máme len úvery, o ktorých vieme, že neboli v stave zlyhania v

Model	Jednoduchý	Škálovaný	Log. statický
RSS	2,126	4,141	2,747
Model	Log. dyn. základný	Log. dyn. vylepšený	
RSS	0,454	0,417	

Tabuľka 6: Hodnoty RSS pre jednotlivé modely pri posunutom dátume pozorovania

pôvodnom dátume pozorovania. Chýbajú úvery ktoré zlyhali medzi posunutým dátumom pozorovania a pôvodným dátumom pozorovania. Dôsledkom sú nadhodnotené odhady pravdepodobnosti zlyhania. Test napriek tomu aj v tomto prípade vyhodnotil ako najlepšie logistické modely s dynamickým správaním, pričom tentokrát mierne nižšiu hodnotu *RSS* dosiahol vylepšený model.

3.4.2 Rozlišovanie dobrých a zlých úverov

Schopnosť modelov rozlišovať skupiny dobrých a zlých úverov budeme vyhodnocovať pomocou ROC krivky a Giniho koeficientu. Opäť budeme testovať osobitne pre vzorku s pôvodným dátumom pozorovania a pre vzorku úverov, ktoré posunieme späť v čase. Budeme porovnávať pravdepodobnosť zlyhania úveru na celej jeho životnosti voči informácii, či došlo k zlyhaniu počas celej životnosti úveru. Body ROC krivky a Giniho koeficient vypočítame pomocou programu SAS Enterprise Guide a procedúry PROC LOGISTIC tak, že vytvoríme model logistickej regresie s odhadnutou PD_L ako vysvetľujúcou premennou a binárnou premennou indikujúcou zlyhanie úveru kedykoľvek počas celej jeho životnosti, ako vysvetľovanou premennou. Takto vytvorený model má rovnakú ROC krivku a Giniho koeficient ako pôvodný PD_L model.

Na grafoch Obr. 25 až Obr. 29 v prílohe A sú vykreslené ROC krivky pre vzorku s pôvodným dátumom pozorovania. Rozdiel medzi krivkami je minimálny, avšak opäť najlepšie výsledky dosahujú modely s dynamickým správaním úverov. ROC krivky pre druhú vzorku vykresľovať nebudeme a pozrieme sa na Giniho koeficienty.

V Tabuľke 7 a Tabuľke 8 sú Giniho koeficienty pre pôvodný a posunutý dátum pozorovania. Všetky modely dosahujú podobné výsledky, no napriek tomu sa opäť najlepšie ukázali byť logistické modely s dynamickým správaním klienta. Podobné výsledky modelov sú dôsledkom toho, že všetky modely majú rovnakú informáciu o správaní klienta

Model	Jednoduchý	Škálovaný	Log. statický
Gini	0,795	0,7948	0,7934
Model	Log. dyn. základný	Log. dyn. vylepšený	
Gini	0,798	0,8014	

Tabuľka 7: Giniho koeficienty pre pôvodný dátum pozorovania

Model	Jednoduchý	Škálovaný	Log. statický
Gini	0,8416	0,8394	0,8426
Model	Log. dyn. základný	Log. dyn. vylepšený	
Gini	0,8472	0,8498	

Tabuľka 8: Giniho koeficienty pre posunutý dátum pozorovania

reprezentovanú jeho *SCORE*. Vyššie hodnoty Giniho koeficientu pre dynamické modely znamenajú, že model vie lepšie rozlíšiť úvery s rovnakým *SCORE*, ale rozdielnym podielom splatenej istiny na celkovej pôvodnej výške istiny. Napr. to môže znamenať, že vďaka odhadovaniu pravdepodobnostného rozdelenia ratingových tried v budúcnosti vie model lepšie porovnať riziko, ktoré nesie úver s dobrým ratingom a dlhou splatnosťou, s úverom, ktorý má horší rating a kratšiu splatnosť.

Výsledkom porovnania modelov je, že najväčšia pridaná hodnota modelov s dynamickým správaním je v ich presnosti. Jednoduchý model nadhodnocuje riziko pre úvery s horším ratingom a podhodnocuje riziko pre úvery s najlepším ratingom. Rovnako to platí aj pre škálovaný model. Škálovaný model by pravdepodobne bol využiteľnejší pri typoch úverov s vyšším počtom zlyhaní, pre ktoré by sa časový parameter $T(\gamma)$ odhadoval osobitne pre každý rating alebo malé skupiny ratingových kategórií. Logistický model so statickým správaním má príliš slabý vplyv časového efektu v porovnaní so *SCORE* klienta. Avšak aj pri silnejšom vplyve časového efektu by sa prejavil rovnaký problém ako pri škálovanom modeli. Najlepšie výsledky z hľadiska presnosti aj z hľadiska rozlišovania medzi skupinami dobrých a zlých úverov dosahujú logistické modely s dynamickým správaním klienta, čo znamená, že úvery počas svojej životnosti naozaj menia svoje správanie a rizikovosť. Rozdiel medzi modelom s maticou prechodu prvého a druhého rádu nie je veľký. Model s maticou prechodu druhého rádu vie mierne lepšie

rozlišovať úvery, no jeho nevýhodou je vyššia požiadavka na počet údajov pre účely robustného odhadu matice prechodu a implementačná náročnosť.

Záver

Hlavnou motiváciou tejto diplomovej práce je významná zmena, s ktorou si musia poradiť všetky európske banky do konca roka 2017. Zavedenie nových účtovných štandardov IFRS 9 do platnosti prináša výraznú zmenu vo výpočte opravných položiek a rezerv. Prvá veľká zmena sa týka klasifikácie úverových obchodov z hľadiska kreditného rizika. Druhou je povinnosť za určitých podmienok vypočítavať pravdepodobnosť zlyhania počas celej zvyšnej životnosti úverov. Cieľom práce bolo ukázať, ako môžu banky využiť už existujúce modely na odhad pravdepodobnosti zlyhania v období jedného roka na to, aby modelovali pravdepodobnosť zlyhania, ktoré môže nastať kedykoľvek počas zvyšnej životnosti úveru. Modely sme tvorili pre portfólio hypotekárnych úverov poskytnutých bežným klientom jednej z najväčších slovenských bánk.

Prvým prínosným zistením bola identifikácia časovej premennej, ktorá najlepšie zachytávala priebeh miery zlyhania úverov. Z troch premenných opisujúcich postup úveru v čase - počtu rokov od podpisu úverovej zmluvy, percentuálneho podielu počtu rokov od podpisu úverovej zmluvy a celkovej schválenej splatnosti a percentuálneho podielu výšky splatenej istiny k celkovej výške poskytnutej istiny sa ako parametrom s najlepšou vysvetľovacou schopnosťou pre mieru zlyhania ukázal byť percentuálny podiel istiny k celkovej výške poskytnutej istiny.

Najdôležitejším výsledkom práce je porovnanie piatich prístupov k modelovaniu pravdepodobnosti zlyhania počas celej životnosti úverov. Pomocou jednotlivých modelov sa porovnávajú rozdielne spôsoby odhadu jednoročnej pravdepodobnosti zlyhania v budúcnosti, ktoré následne slúžia na výpočet pravdepodobnosti zlyhania počas celej zostávajúcej životnosti úveru. Prvý z nich bol najjednoduchším možným riešením. Predpokladá, že jednoročná pravdepodobnosť zlyhania úveru sa s postupom času nebude meniť a pre každé jednoročné obdobie je rovnaká. Druhým modelom bol model zohľadňujúci empiricky odhadnutý vplyv zmeny podielu splatenej istiny na mieru zlyhania. Tretí model odhaduje pravdepodobnosť zlyhania v každom jednoročnom období logistickým modelom s dvoma vysvetľujúcimi premennými - skóre úveru a funkciou opisujúcou zmenu miery zlyhania v závislosti od podielu splatenej istiny, pričom predpokladá konštantnú úroveň skóre, ktoré vyjadruje kreditnú kvalitu, resp. rizikovosť úveru. Štvrtý a piaty model sa od ostatných troch líšia tým, že uvažujú s možnými

zmenami skóre úverov v budúcnosti. Štvrtý model modeloval prechody medzi ratingovými t pomocou markovovho reťazca, piaty model pomocou matice prechodu druhého rádu.

Modely sme porovnali z dvoch pohľadov - z hľadiska presnosti, s akou predpovedajú pravdepodobnosť zlyhania na dlhšie časové obdobie a z hľadiska toho, ako dobre vedia rozlišovať medzi dobrým a zlým úverom. Výrazný rozdiel v presnosti odhadu pravdepodobnosti zlyhania sa ukázal byť medzi modelmi s dynamickým správaním a ostatnými troma modelmi. Modely s dynamickým správaním dokážu zohľadniť rozdiel medzi úverom s dobrým a zlým ratingom. Jednoročné pravdepodobnosti zlyhania pre úver s dobrým ratingom budú v budúcnosti skôr rásť, zatiaľ čo úver so zlým ratingom môže svoje správanie iba vylepšiť. Vďaka tomu logistické modely s dynamickým správaním klienta odhadovali pravdepodobnosť zlyhania s rádovo 10-násobne nižšou *RSS*. Modely zohľadňujúce zmeny správania klienta v budúcnosti sa ukázali byť najlepšie aj v rozlišovaní dobrých a zlých klientov, pričom o niečo lepší bol model s maticou prechodu druhého rádu. Znamená to, že modely s maticou prechodu vedia lepšie porovnať riziko zlyhania počas celej zostávajúcej životnosti úverov s dobrým ratingom a dlhou splatnosťou a rizikovosť úveru so zlým ratingom a kratšou splatnosťou. Rozdiel medzi modelom s maticou prechodu prvého a druhého rádu nie je veľký. Model s maticou prechodu druhého rádu vie mierne lepšie rozlišovať úvery, no jeho nevýhodou je vyššia požiadavka na počet údajov pre účely robustného odhadu matice prechodu a implementačná náročnosť.

Logistické modely s dynamickým správaním, modelovaným pomocou matice prechodu, ktoré v práci dopadli ako najlepšie, zachytávajú dve rôzne vlastnosti:

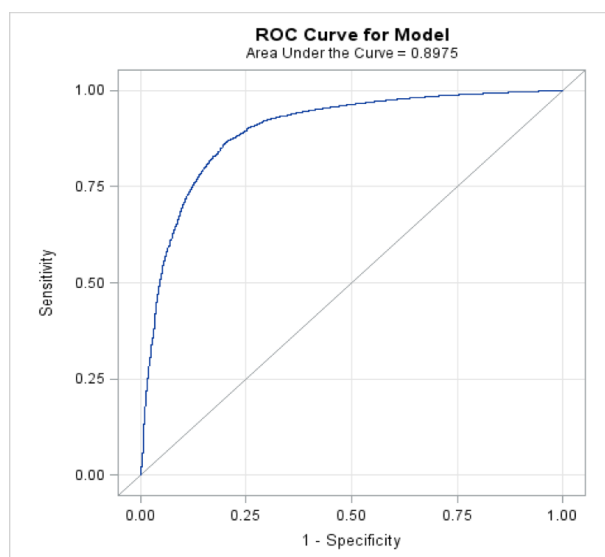
1. Zmenu miery zlyhania v závislosti od podielu splatenej istiny
2. Možné zmeny ratingov v budúcnosti

Kombinácia týchto dvoch vlastností spôsobuje rozdielny priebeh kumulatívnej pravdepodobnosti zlyhania pre lepšie a horšie úvery. V praxi by sme odporúčali zamerať sa na druhú vlastnosť a prípadne preskúmať možnosti využitia nehomogénnej matice prechodu závislej od podielu splatenej istiny, ktorá by zohľadňovala prvú aj druhú vlastnosť.

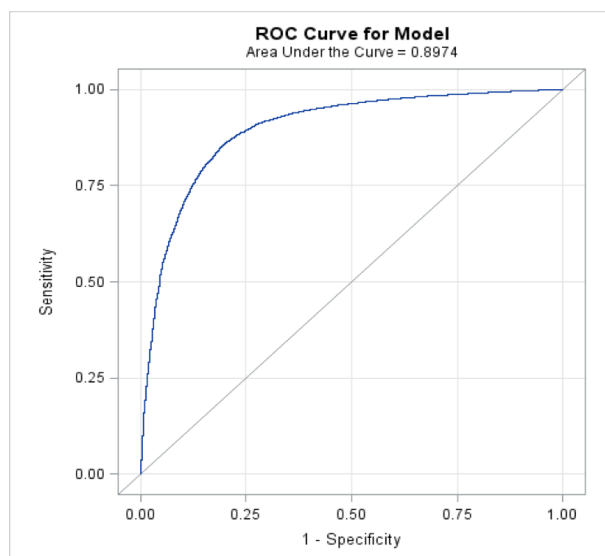
Zoznam použitej literatúry

- [1] Bouteillé, S., Coogan-Pushner, D.: *The handbook of credit risk management: Originating, assessing, and managing credit exposures*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2013
- [2] Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems - revised version, dostupné na internete (1.6.2011): <http://www.bis.org/bcbs/basel3.htm>
- [3] Pročková, M.: *Úloha účtovných opravných položiek a kapitálovej rezervy na krytie strát v prípade významného poklesu ekonomického cyklu*, Biatic, 1/2012, str. 20 - 22
- [4] IFRS 9 Financial Instruments (replacement of IAS 39), dostupné na internete (1.7.2014): <http://www.ifrs.org/>
- [5] Althoff, J.: *IFRS 9 - Expected Credit Losses*, dostupné na internete (13.8.2014): <https://www.pwc.com>
- [6] Siddiqi, N.: *Credit Risk Scorecards: Developing and Implementing Intelligent Credit Scoring*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2006
- [7] Agresti, A.: *Categorical Data Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2002
- [8] Bokes, P., Brunovský, P., Janková, K., Kilianová, S.: *Markovove reťazce a ich aplikácie*, Epos, Bratislava, 2015
- [9] Benzschawel, T.: *Credit Risk Modelling: Facts, Theory and Applications*, Incisive Media., Londýn, 2012

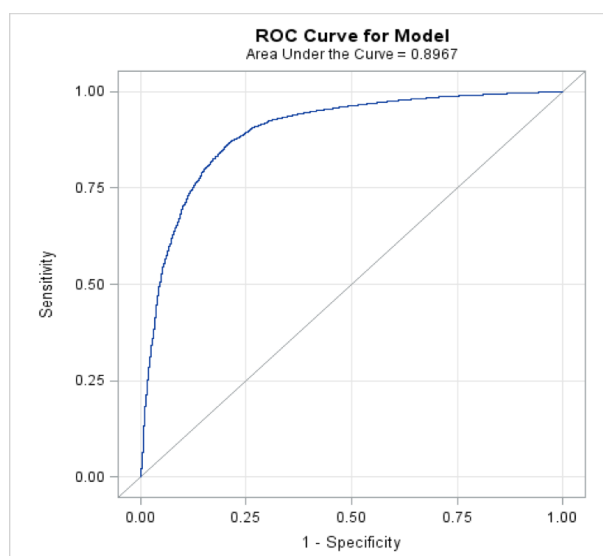
Príloha A



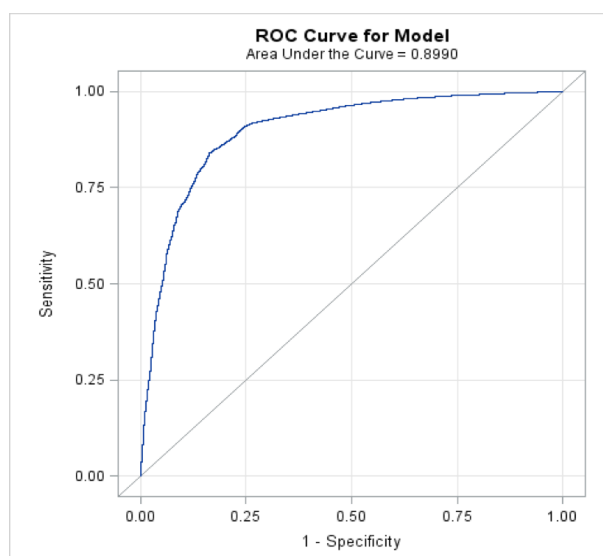
Obr. 25: ROC krivka pre odhad pravdepodobnosti zlyhania počas celej životnosti úverov pomocou jednoduchého modelu (3.29) na vzorke s pôvodným dátumom pozorovania



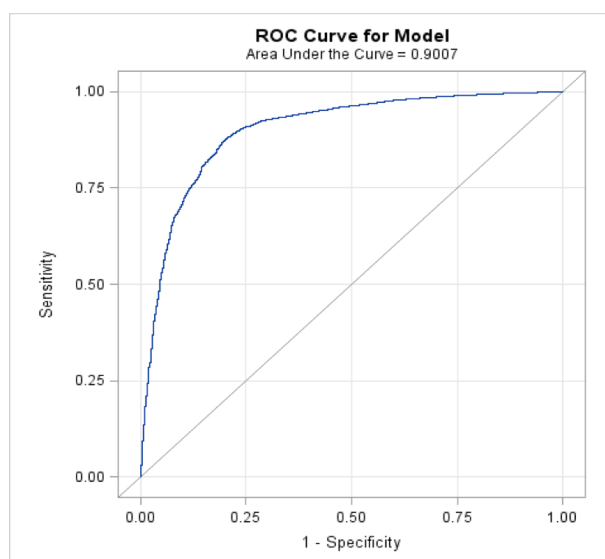
Obr. 26: ROC krivka pre odhad pravdepodobnosti zlyhania počas celej životnosti úverov pomocou škálovaného modelu (3.31) na vzorke s pôvodným dátumom pozorovania



Obr. 27: ROC krivka pre odhad pravdepodobnosti zlyhania počas celej životnosti úverov pomocou logistického modelu so statickým správaním klienta (3.32) na vzorke s pôvodným dátumom pozorovania



Obr. 28: ROC krivka pre odhad pravdepodobnosti zlyhania počas celej životnosti úverov pomocou základného logistického modelu s dynamickým správaním klienta (3.36) na vzorke s pôvodným dátumom pozorovania



Obr. 29: ROC krivka pre odhad pravdepodobnosti zlyhania počas celej životnosti úverov pomocou vylepšeného logistického modelu s dynamickým správaním klienta (3.37) na vzorke s pôvodným dátumom pozorovania