

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



TESTY AUTOKORELÁCIE V REGRESNÝCH MODELOCH

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

TESTY AUTOKORELÁCIE V REGRESNÝCH MODELOCH

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr. Ján Somorčík, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Silvia Štrbová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Testy autokorelácie v regresných modeloch
Autocorrelation tests in regression models

Cieľ: Porovnanie rôznych testov autokorelácie pomocou Monte Carlo simulácií
v rôznych druhoch regresných modelov.

Vedúci: Mgr. Ján Somorčík, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 10.02.2015

Dátum schválenia: 11.02.2015

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Pod'akovanie

Touto cestou sa chcem poďakovať svojmu vedúcemu diplomovej práce Mgr. Jánovi Somorčíkovi, PhD. za ochotu, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za ich trpezlivosť a podporu.

Abstrakt

ŠTRBOVÁ, Silvia: Testy autokorelácie v regresných modeloch [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Ján Somorčík, PhD., Bratislava, 2016, 113 s.

V našej práci sa zaoberáme testami autokorelácie chýb v regresných modeloch. Cieľom práce bolo simulačne porovnať rôzne testy autokorelácie v rôznych druhoch lineárnych regresných modelov. V práci sme uviedli mnoho testov, z ktorých sme sa najviac venovali Durbin-Watsonovmu testu, pri ktorom sme interval nerozhodnosti bežnej verzie tohto testu vyriešili použitím exaktnej verzie, prípadne výpočtovo menej náročných aproximácií. Ďalej sme skúmali Wallisov test na testovanie štvrtťročnej autokorelácie, tri verzie Durbinovho testu, ktoré testujú autokoreláciu v regresnom modeli s posunutými závislými premennými medzi regresormi, dva typy Breusch-Godfreyovho testu, Box-Piercov a upravený Ljung-Boxov test. Tieto testy sme aplikovali na nasimulované dáta bez autokorelácie a s autokoreláciou chýb regresie prvého a štvrtého rádu. Ďalej sme simulačne porovnali správanie sa testov v prípade, že regresné modely mali tvar $AR(1)$ až $AR(4)$ procesu. Skúmali sme pravdepodobnosť chyby prvého druhu a silu testov.

Kľúčové slová: autokorelácia, lineárny regresný model, simulačné porovnanie, Durbin-Watsonov test, exaktná verzia Durbin-Watsonovho testu, Beta aproximácia, Henshawova aproximácia, Wallisov test, Durbinove testy, Breusch-Godfreyove testy, Box-Pierce-Ljungove testy

Abstract

ŠTRBOVÁ, Silvia: Autocorrelation tests in regression models [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Ján Somorčík, PhD., Bratislava, 2016, 113 p.

In our work we investigate tests for autocorrelated errors in regression models. The purpose of our study was to compare different tests for autocorrelation in different types of linear regression models. In the work we described a number of tests, from which we focused the most on the Durbin-Watson test and we solved an inconclusion problem of common type of this test with exact version and less computationally expensive approximations. Further we investigated the Wallis test for testing seasonal autocorrelation, three versions of the Durbin test for a regression containing lagged values of the dependent variable, two types of the Breusch-Godfrey test, the Box-Pierce and the revised Ljung-Box test. We applied these tests on simulated data without autocorrelation and with autocorrelation of errors of the first and the fourth degree. Then we compared performance of tests in case of $AR(1)$ to $AR(4)$ regression models. We analysed the probability of type I error and the power of tests.

Keywords: autocorrelation, linear regression model, simulation comparison, Durbin-Watson test, exact version of Durbin-Watson test, Beta approximation, Henshaw approximation, Wallis test, Durbin tests, Breusch-Godfrey tests, Box-Pierce-Ljung tests

Obsah

Zoznam použitých symbolov	9
Úvod	10
1 Model a popis problému	12
2 Durbin-Watsonov test	14
2.1 Exaktný test	18
2.1.1 Reálnosť integrovanej funkcie	21
2.1.2 Praktické použitie	22
2.1.2.1 Dĺžka integračnej oblasti	23
2.1.2.2 Jemnosť delenia integračnej oblasti	31
2.1.2.3 Začiatok integrovania	35
2.1.3 Výsledky Exaktného testu pozitívnej autokorelácie	36
2.2 Aproximácie	40
2.2.1 Beta aproximácia	42
2.2.1.1 Výsledky testu pozitívnej autokorelácie	44
2.2.2 Henshawova aproximácia	48
2.2.2.1 Výsledky testu pozitívnej autokorelácie	51
2.3 Porovnanie	56
2.3.1 Porovnanie testov pozitívnej autokorelácie	56
2.3.2 Porovnanie obojstranných testov	64
2.3.3 Porovnanie sily testov	68
3 Ďalšie testy autokorelácie	74
3.1 Wallisov test	74
3.2 Durbinov test	74
3.3 Breusch-Godfreyov test	78
3.4 Box-Pierce-Ljungov test	79
4 Porovnanie testov	81
4.1 Regresia bez posunutých závislých premenných	82

4.1.1	Porovnanie pravdepodobnosti chyby prvého druhu	82
4.1.2	Porovnanie sily testov	84
4.1.3	Autokorelácia vyššieho stupňa	88
4.2	Regresia s posunutými závislými premennými	92
4.2.1	Porovnanie pravdepodobnosti chyby prvého druhu	92
4.2.2	Porovnanie sily testov	96
Záver		98
Zoznam použitej literatúry		100
Príloha		102
A.1 Durbin-Watsonov test		102
A.1.1	Klasický test	102
A.1.2	Exaktný test	103
A.1.3	Beta aproximácia	104
A.1.4	Henshawova aproximácia	105
B.2 Wallisov test		106
C.3 Durbinov test		107
C.3.1	Asymptoticky ekvivalentný test	108
C.3.2	Test autokorelácie AR(p)	109
D.4 Breusch-Godfreyov test		110
D.4.1	Test autokorelácie AR(p)	110
D.4.2	Asymptoticky ekvivalentný test	111
E.5 Box-Piercov test		112
E.5.1	Upravený Ljung-Boxov test	113

Zoznam použitých symbolov

$y = X\beta + \varepsilon$	regresný model
$\varepsilon_t = \varphi\varepsilon_{t-1} + w_t$	model pre chyby v tvare $AR(1)$ procesu
y	$n \times 1$ vektor závislých premenných
X	$n \times k$ matica vysvetľujúcich premenných
β	$k \times 1$ vektor koeficientov prislúchajúcich k vysvetľujúcim premenným
$\hat{\beta}$	odhad vektora β metódou najmenších štvorcov
ε	$n \times 1$ vektor skutočných chýb v modeli
$\hat{\varepsilon}$	$n \times 1$ vektor rezíduí
φ	koeficient autokorelácie
w	$n \times 1$ vektor bieleho šumu
n	počet meraní
k'	počet vysvetľujúcich premenných bez absolútneho člena
k	počet vysvetľujúcich premenných

Úvod

V základnej teórii o lineárnych regresných modeloch sa predpokladajú nezávislé chyby, preto je dôležité vedieť otestovať prítomnosť autokorelácie chýb v lineárnej regresii.

Taktiež pri tvorbe regresných modelov je potrebné určiť, či nami zvolené regresory správne modelujú určité dáta. Indikátorom toho, či je model správny, teda či dostatočne vysvetľuje varianciu závislej premennej, je často aj to, či sú chyby ε tohto regresného modelu autokorelované, alebo nie. V prípade prítomnosti autokorelácie je rozumné zmeniť regresný model a pridať ďalšie vysvetľujúce premenné, pretože nami zvolené regresory nevysvetľujú celú varianciu závislej premennej.

Na testovanie prítomnosti autokorelácie chýb v modeli boli vyvinuté viaceré testy. Problémom však bolo, že v čase ich tvorby ešte nebola dostupná výkonná výpočtová technika, a preto autori testov často robili výpočty ručne. Tým pádom neprichádzalo do úvahy simulačné porovnanie testov, ale iba porovnanie na konkrétnych sadách dát.

Naša práca pozostáva zo štyroch kapitol. V prvej kapitole popisujeme regresný model a tvar modelu pre chyby ε , ako aj hypotézy, ktoré budeme testovať.

V druhej kapitole sa venujeme Durbin-Watsonovmu testu autokorelácie chýb, ktorý je veľmi používaný. Jeho problém však spočíva v intervale nerozhodnosti, kedy test nevie rozhodnúť, či zamieta nulovú hypotézu o nulovej autokorelácii chýb modelu. Z tohto dôvodu sme uviedli exaktnú verziu tohto testu, ktorá je rozhodná vo všetkých prípadoch, avšak, na rozdiel od klasického Durbin-Watsonovho testu, výsledok zamietania závisí od matice regresorov a je oveľa výpočtovo náročnejšia. Pri praktickom použití tejto exaktnej metódy sme potrebovali nájsť kompromis medzi presnosťou a trvaním výpočtu pri voľbe jej parametrov. Viaceré možnosti sme porovnali simulačne. Kvôli časovej náročnosti exaktnej verzie Durbin-Watsonovho testu, ktorá sa prejaví hlavne pri veľkom počte dát, sme ďalej skúmali aproximácie presného rozdelenia testovacej štatistiky, konkrétne Beta aproximáciu a Henshawovu aproximáciu. Všetky tieto verzie Durbin-Watsonovho testu sme následne porovnali z pohľadu pravdepodobnosti chyby prvého druhu, časovej náročnosti a sily testov.

V tretej kapitole uvádzame ďalšie testy autokorelácie. Vychádzali sme zo zoznamu testov, ktoré uviedli Johnston a DiNardo v knihe [12]. Popisujeme Wallisov test na testovanie autokorelácie štvrtého rádu, tri verzie Durbinovho testu na testovanie prítomnosti autokorelácie v prípade regresného modelu s posunutými závislými premennými medzi regresormi, Breusch-Godfreyov test a ich test asymptoticky ekvivalentný k Durbinovmu testu, Box-Piercov a upravený Ljung-Boxov test.

V poslednej kapitole simulačne porovnáme všetky testy. Najskôr na dátach bez posunutých závislých premenných medzi regresormi porovnáme testy z pohľadu pravdepodobnosti chyby prvého druhu a sily, pričom simulovaná autokorelácia chýb je prvého alebo štvrtého rádu. Následne pridáme medzi regresory jednu až štyri posunuté hodnoty závislej premennej a skúame silofunkcie jednotlivých testov.

V prílohách sme uviedli funkcie na vykonanie všetkých testov naprogramované v programe R.

1 Model a popis problému

Majme regresný model v tvare

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad (1)$$

kde y je $n \times 1$ vektor závislých premenných, X je $n \times k$ matica regresorov, β je $k \times 1$ vektor regresných koeficientov a ε je $n \times 1$ vektor skutočných chýb v modeli, pričom n je počet dát a k je počet regresorov vrátane absolútneho člena.

Predpokladajme, že chyby ε tohto regresného modelu sú modelované $AR(1)$ procesom, teda

$$\varepsilon_t = \varphi \varepsilon_{t-1} + w_t, \quad (2)$$

kde $|\varphi| < 1$ je pevná neznáma konštanta a w_t je gaussovský biely šum, čiže postupnosť navzájom nezávislých, rovnako rozdelených náhodných premenných, ktoré majú normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a varianciou σ^2 .

Chceme testovať prítomnosť autokorelácie, teda či $\varphi = 0$ alebo $\varphi \neq 0$. V závislosti od povahy dát nás môže zaujímať prítomnosť pozitívnej alebo negatívnej autokorelácie. Test pre pozitívnu autokoreláciu je

$$H_0 : \varphi = 0 \text{ vs. } H_1 : \varphi > 0,$$

teda nulová hypotéza je, že v dátach sa nevyskytuje autokorelácia a alternatívna hypotéza je, že chyby v regresii sú pozitívne autokorelované.

Negatívnu autokoreláciu testujeme

$$H_0 : \varphi = 0 \text{ vs. } H_1 : \varphi < 0.$$

Podľa článku [4] sa v dátach ekonomického charakteru zväčša objavuje pozitívna autokorelácia.

Ak nevieme určiť, akú autokoreláciu v dátach očakávame, použijeme obojstranný test

$$H_0 : \varphi = 0 \text{ vs. } H_1 : \varphi \neq 0.$$

Testujeme teda nulovú hypotézu, že v modeli sa nevyskytuje autokorelácia chýb proti alternatívnej hypotéze, že v modeli je prítomná autokorelácia modelovaná $AR(1)$ procesom.

Môže sa zdať jednoduchšie rovno použiť obojstranný test, pričom nemusíme vopred vedieť charakter autokorelácie. To je síce pravda, ale jednostranné testy na pozitívnu a negatívnu autokoreláciu majú vyššiu silu testu, takže ak vieme vopred odhadnúť povahu autokorelácie, je výhodnejšie testovať jednostranným testom.

Keďže hypotézy sa týkajú skutočných chýb ε , ktoré nevieme sledovať, v testoch budeme využívať ich odhady metódou najmenších štvorcov, teda rezíduá

$$\hat{\varepsilon} = y - X\hat{\beta}, \tag{3}$$

kde $\hat{\beta}$ je odhad vektora regresných koeficientov β metódou najmenších štvorcov.

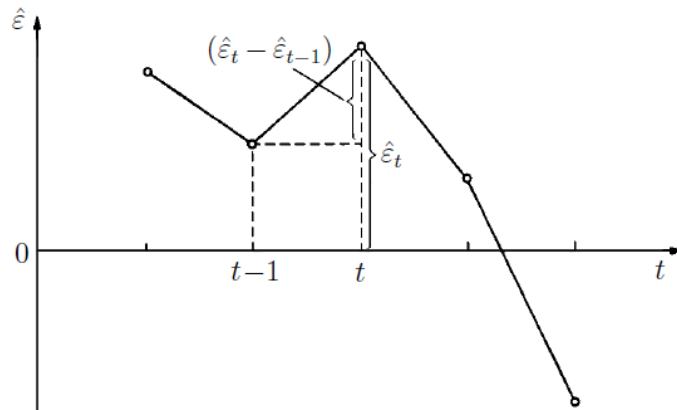
2 Durbin-Watsonov test

Asi najznámejším testom na testovanie autokorelácie chýb v lineárnych regresných modeloch je Durbin-Watsonov test, ktorý v roku 1950 uviedli autori Durbin a Watson v článku [3].

Durbin-Watsonova testovacia štatistika je definovaná nasledovne:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2}. \quad (4)$$

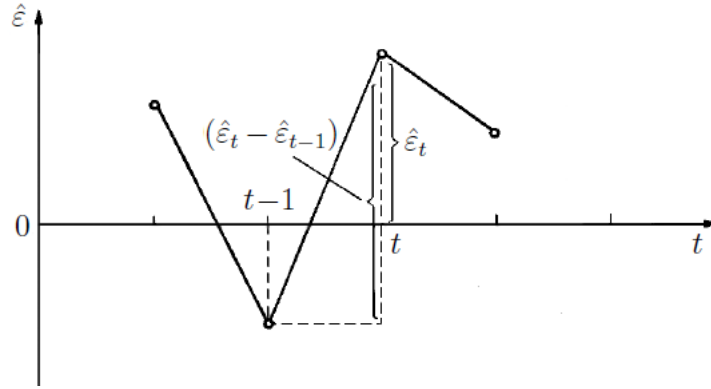
Keďže stredná hodnota rezíduí je 0, očakávame, že rezíduá budú rozložené okolo horizontálnej priamky $\hat{\varepsilon} = 0$. Ak sú rezíduá pozitívne autokorelované (obrázok 1), hodnoty $(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})$ budú malé v porovnaní so samotnými rezíduami, a teda aj testovacia štatistika bude malé číslo. V prípade pozitívnej autokorelácie majú rezíduá tendenciu byť blízko pri sebe, a teda rezíduá sa dlho nachádzajú buď nad horizontálnou osou alebo pod ňou.



Obr. 1: Pozitívna autokorelácia v Durbin-Watsonovom teste. Obrázok je prebratý z [12].

Naopak, v prípade negatívnej autokorelácie (obrázok 2) je hodnota $(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})$ veľké číslo oproti rezíduám, a teda aj testovaciu štatistiku očakávame veľkú. V prípade negatívnej autokorelácie majú rezíduá tendenciu preskakovať horizontálnu os.

Teda testovacia štatistika d bude malé číslo pre pozitívne autokorelované rezíduá a veľké pre negatívne autokorelované rezíduá. Pre náhodné rezíduá, teda také, v ktorých nie je autokorelácia, bude mať testovacia štatistika „strednú“ hodnotu a rezíduá nebudú



Obr. 2: Negatívna autokorelácia v Durbin-Watsonovom teste. Obrázok je prebratý z [12].

mať tendenciu na dlhé zotrvávanie nad alebo pod osou $\hat{\varepsilon} = 0$, ani na preskakovanie tejto osi.

Štatistiku (4) môžeme upraviť do tvaru

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n \hat{\varepsilon}_t^2 + \sum_{t=2}^n \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 - 2 \sum_{t=2}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2}.$$

Pre veľké n potom dostávame testovaciu štatistiku v približnom tvare

$$d \simeq 2(1 - \hat{\varphi}), \quad (5)$$

kde

$$\hat{\varphi} = \frac{\sum_{t=2}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2} \in \langle -1, 1 \rangle. \quad (6)$$

$\hat{\varphi}$ je zhruba výberový korelačný koeficient získaný z dát $\begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_{n-1} \\ \hat{\varepsilon}_n \end{pmatrix}$. Zároveň je to odhad pre parameter autokorelácie φ .

Z (5) vidíme, že testovacia štatistika d nadobúda hodnoty medzi 0 a 4. Pri nulovej autokoreláci ($\varphi = 0$) očakávame aj odhad $\hat{\varphi}$ rovný nule, a teda štatistiku d rovnú 2. Pozitívna autokorelácia ($\varphi > 0$) bude mať kladný odhad $\hat{\varphi}$, a preto d bude nadobúdať hodnoty z intervalu $\langle 0, 2 \rangle$. Negatívna autokorelácia ($\varphi < 0$) bude mať záporný odhad $\hat{\varphi}$ a prejaví sa testovacou štatistikou z intervalu $(2, 4)$.

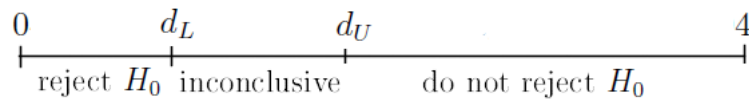
Vzhľadom na to, že rozdelenie pravdepodobnosti testovacej štatistiky d závisí od matice X (článok [3]), univerzálne presné kritické hodnoty, ktoré by pokrývali všetky prípady, nie je možné vyčísliť. Durbin a Watson preto stanovili horné (d_U) a dolné (d_L)

hranice pre presné kritické hodnoty. Tieto hranice závisia iba od počtu meraní (n) a počtu regresorov ($k - 1$) a používajú sa na testovanie hypotézy o nulovej autokorelácii proti alternatívnej hypotéze o pozitívnej autokorelácii prvého stupňa.

$$H_0 : \varphi = 0 \text{ vs. } H_1 : \varphi > 0$$

Testovacia procedúra (obrázok 3) je nasledovná:

1. Ak $d < d_L$, zamietame hypotézu o nulovej autokorelácii a prijímame hypotézu o pozitívnej autokorelácii.
2. Ak $d > d_U$, nezamietame nulovú hypotézu.
3. Ak $d_L < d < d_U$, tak test je nerozhodný (inconclusive).



Obr. 3: Testovacia procedúra pozitívnej autokorelácie.

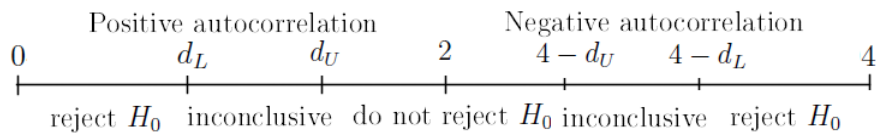
Ak je hodnota testovacej štatistiky väčšia ako 2, mohla by nás zaujímať prítomnosť negatívnej autokorelácie. Budeme testovať nulovú hypotézu o žiadnej autokorelácii proti alternatívnej hypotéze o negatívnej autokorelácii.

$$H_0 : \varphi = 0 \text{ vs. } H_1 : \varphi < 0$$

Test prebieha tak, že vyrátame „symetrickú“ hodnotu testovacej štatistiky, teda $4 - d$ a výsledok porovnáme s kritickými hodnotami d_L a d_U pre testovanie pozitívnej autokorelácie, čo je ekvivalentné porovnaniu štatistiky d so symetrickými kritickými medzami $4 - d_L$ a $4 - d_U$.

Obojstranný test urobíme kombináciou jednostranných testov. H_0 zamietame, ak d je menšie ako d_L alebo väčšie ako $4 - d_L$ a H_0 nezamietame, ak je d medzi d_U a $4 - d_U$. V ostatných prípadoch je test nerozhodný. Testovaciu procedúru vidíme na obrázku 4.

Pozor však na hladinu významnosti tohto obojstranného testu. Ak použijeme päťpercentné kritické hodnoty d_U a d_L , tak obojstranný test nebude zamietaf na hladine významnosti 5%, ako je to pri jednostrannom teste, ale na hladine významnosti 10%.



Obr. 4: Testovacia procedúra obojstranného testu.

Pre dosiahnutie hladiny významnosti 5% musíme použiť 2.5-percentné kritické hodnoty.

Pôvodné tabuľky pre kritické hodnoty d_L a d_U boli vypočítané pre n medzi 15 a 100 a pre maximálny počet regresorov 5. V roku 1977 Savin a White rozšírili tieto tabuľky pre $6 \leq n \leq 200$ a maximálne 10 regresorov (článok [16]). Kritické hodnoty však boli vypočítané iba na hladine významnosti 1% a 5%. Dnes už sú na internete (stránka Standfordskej univerzity [17]) dostupné aj kritické hodnoty na hladine významnosti 2.5% a pre väčšie hodnoty n .

Použitie Durbin-Watsonovho testu má 2 dôležité predpoklady. Regresia musí zahŕňať konštantný člen a matica X musí byť nenáhodná. Teda medzi regresormi sa nesmú nachádzať posunuté hodnoty závislej premennej. Kombinácia posunutých hodnôt y a pozitívnej autokorelácie vychýli Durbin-Watsonovu štatistiku nahor, čo vedie k mylným záverom. V prípade, že regresia neobsahuje konštantný člen, horná hranica d_U Durbin-Watsonovho testu stále platí, ale dolná hranica d_L musí byť nahradená hodnotou d_M . Tieto hodnoty uverejnil v roku 1980 Farebrother v článku [7].

Aj v prípade splnených predpokladov má však Durbin-Watsonov test veľký nedostatok v podobe intervalu nerozhodnosti, ktorý môže byť, hlavne v prípade malého n , dosť veľký.

Konzervatívny praktický prístup je zamietnutie nulovej hypotézy aj v prípade, že test je nerozhodný. Hodnota d_U sa teda stáva klasickou kritickou hodnotou a H_0 zamietame, ak $d < d_U$. Následky prijatia nulovej hypotézy v prípade, že chyby v regresii sú autokorelované, sú vážnejšie, ako následky z nesprávneho určenia prítomnosti autokorelácie, čím prinajhoršom skomplikujeme model. Pri takomto spôsobe testovania však strácame pravdepodobnosť chyby prvého druhu 5%.

Funkciu na výpočet obojstranného Durbin-Watsonovho testu v programe R [15] sme uviedli v prílohe A.1.1. Vstupom funkcie je vektor závislých premenných y a matica regresorov X bez jednotkového stĺpca.

Časť o klasickom Durbin-Watsonovom teste sme vypracovali podľa knihy [12] a článkov [3] a [4]. V ďalších podkapitolách sa budeme venovať možným riešeniam problému intervalu nerozhodnosti.

2.1 Exaktný test

Interval nerozhodnosti v Durbin-Watsonovom teste vzniká preto, že rozdelenie testovacej štatistiky d závisí od matice regresorov X . Teda nie je možné určiť všeobecne platné hranice na posudzovanie „kritickosti“ testovacej štatistiky d .

V roku 1976 prišli autori L’Esperance, Chall a Taylor v článku [13] s riešením v podobe Exaktného testu, ktorý spočíva v určení presnej distribučnej funkcie pre Durbin-Watsonovu testovaciu štatistiku d v závislosti od matice X a následnom vyčíslení p-hodnoty testu. Tento test je výpočtovo oveľa náročnejší ako klasický Durbin-Watsonov test, avšak pri dnešnom pokroku výpočtovej techniky je otázkou niekoľkých sekúnd.

Zápis Durbin-Watsonovej štatistiky (4) je ekvivalentný so zápisom

$$d = \frac{\hat{\varepsilon}' A \hat{\varepsilon}}{\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon}}, \quad (7)$$

kde $\hat{\varepsilon}$ je vektor rezíduí a A je reálna symetrická matica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Podľa článku [5] má Durbin-Watsonova testovacia štatistika d rovnaké rozdelenie pravdepodobnosti ako náhodný zlomok

$$\frac{\tau_1 u_1^2 + \cdots + \tau_m u_m^2}{u_1^2 + \cdots + u_m^2} = \frac{U}{V}, \quad (9)$$

kde $u_1, \dots, u_m$ sú nezávislé, rovnako rozdelené premenné zo štandardného normálneho rozdelenia, pričom $m = n - k$, n je počet dát (počet riadkov matice X), k je počet regresorov (počet stĺpcov matice X vrátane jednotkového stĺpca) a $\tau_1 \leq \dots \leq \tau_m$ sú nenulové vlastné čísla matice MA , kde M je idempotentná matica

$$M = I_n - X(X'X)^{-1}X' \quad (10)$$

a X je matica regresorov s prvým stĺpcom jednotkovým.

Pravdepodobnosť, že testovacia štatistika d bude väčšia ako nejaká jej konkrétna hodnota d_0 , pretransformujeme do tvaru:

$$P(d > d_0) = P\left(\frac{U}{V} > d_0\right) = P(U > Vd_0) = P(U - Vd_0 > 0) = P(Q > 0) = 1 - F(0), \quad (11)$$

kde

$$Q = U - Vd_0 = \sum_{j=1}^m (\tau_j - d_0)u_j^2 \quad (12)$$

a $F(\dots)$ je distribučná funkcia náhodnej premennej Q .

Charakteristickú funkciu pre Q uviedli Durbin a Watson v článku [5]:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\prod_{j=1}^m (1 - 2ia_j t)^{\frac{1}{2}}}, \quad (13)$$

kde $a_j = \tau_j - d_0$.

Podľa Lévyho vety platí:

$$F(Q) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) \frac{1 - e^{-itQ}}{it} dt. \quad (14)$$

Kendall a Stuart ukázali, že $F(Q)$ je možné prepísať do tvaru

$$F(Q) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{itQ}\Phi(-t) - e^{-itQ}\Phi(t)}{it} dt. \quad (15)$$

My však podľa (11) potrebujeme iba hodnotu $F(0)$, takže integrál sa zjednoduší na

$$F(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Phi(-t) - \Phi(t)}{it} dt. \quad (16)$$

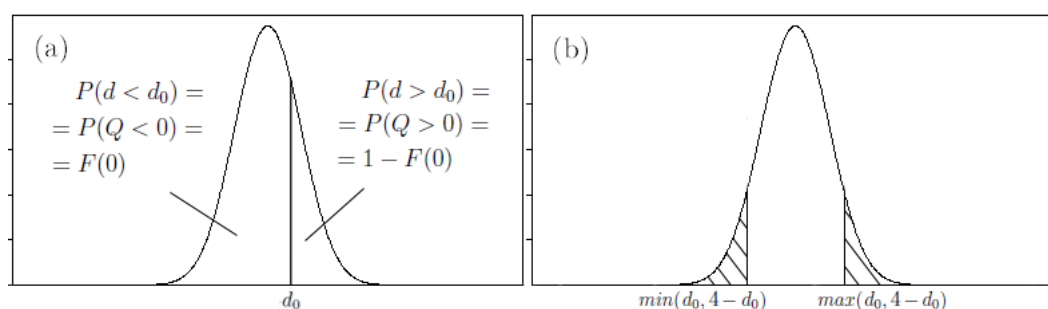
Tento integrál vyčíslime použitím Simpsonovho pravidla. Interval, na ktorom integrujeme, rozdelíme na menšie intervaly $[a, b]$ a na každom malom intervale aproximujeme

hodnotu integrálu pomocou Simpsonovho pravidla:

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (17)$$

Výsledný integrál v (16) je potom súčtom aproximácií na jednotlivých malých intervaloch.

Pri testovaní prítomnosti pozitívnej autokorelácie, p-hodnotu vypočítame ako plochu pod hustotou rozdelenia d naľavo od testovacej štatistiky d_0 , teda podľa (11) ako $F(0)$. Naopak, ak testujeme negatívnu autokoreláciu, tak ráčame plochu napravo od d_0 , čo je $1 - F(0)$. Výpočet p-hodnoty pri jednostrannom teste vidíme na obrázku 5a.



Obr. 5: Výpočet p-hodnoty Exaktným testom: (a) jednostranný test (b) obojstranný test.

V prípade obojstranného testu je p-hodnota súčtom dvoch plôch, ako vidíme na obrázku 5b. Ak je $d_0 > 2$, tak zráčame plochu naľavo od $4 - d_0$ a plochu napravo od d_0 . Ak je $d_0 < 2$, tak zráčame plochu naľavo od d_0 a napravo od $4 - d_0$. V tomto prípade však musíme ráčat hodnotu $F(0)$ dvakrát - raz pre d_0 a raz pre $4 - d_0$, preto sa časová náročnosť výpočtu zdvojnásobí.

Funkcie na výpočet Exaktného testu sme naprogramovali v programe R [15]. Verziu pre test pozitívnej autokorelácie nájdeme v prílohe A.1.2 pod názvom `DWexact`. Funkcia má tri parametre. Parameter `start` je *štartovací bod*, ktorý popisujeme v časti 2.1.2.3, parameter `part` je počet častí, na ktoré rozdelíme interval dĺžky 1, čiže je to prevrátená hodnota *delenia* z časti 2.1.2.2 a parameter `hranica` je spomínaný v časti 2.1.2.1.

2.1.1 Reálnosť integrovanej funkcie

Výsledné číslo $F(0)$ je, samozrejme, reálne číslo, ale ukážeme, že aj funkcia, ktorú integrujeme v (16) pri získavaní $F(0)$, je reálna, takže nie je potrebné v programe R integrovať komplexnú funkciu, stačí jej reálna časť.

Platí:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(-t) - \Phi(t)}{it} &= \frac{\frac{1}{\prod(1+2ia_jt)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\prod(1-2ia_jt)^{\frac{1}{2}}}}{it} = \frac{\frac{\prod(1-2ia_jt)^{\frac{1}{2}} - \prod(1+2ia_jt)^{\frac{1}{2}}}{\prod(1+2ia_jt)^{\frac{1}{2}} \cdot \prod(1-2ia_jt)^{\frac{1}{2}}}}{it} = \\ &= \frac{\prod(1-2ia_jt)^{\frac{1}{2}} - \prod(1+2ia_jt)^{\frac{1}{2}}}{it \cdot \prod(1+2ia_jt)^{\frac{1}{2}}(1-2ia_jt)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\prod(1-2ia_jt)^{\frac{1}{2}} - \prod(1+2ia_jt)^{\frac{1}{2}}}{it \cdot \prod[(1+2ia_jt)(1-2ia_jt)]^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{\prod(1-2ia_jt)^{\frac{1}{2}} - \prod(1+2ia_jt)^{\frac{1}{2}}}{it \cdot \prod[1-4i^2a_j^2t^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\prod(1-2ia_jt)^{\frac{1}{2}} - \prod(1+2ia_jt)^{\frac{1}{2}}}{it \cdot \prod[1+4a_j^2t^2]^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (18)$$

kde $\prod[1+4a_j^2t^2]^{\frac{1}{2}}$ je reálne, takže ďalej sa budeme zaoberať iba zvyškom výrazu.

$$\frac{\prod(1-2ia_jt)^{\frac{1}{2}} - \prod(1+2ia_jt)^{\frac{1}{2}}}{it} = \frac{[\prod(1-2ia_jt)]^{\frac{1}{2}} - [\prod(1+2ia_jt)]^{\frac{1}{2}}}{it} \quad (19)$$

Komplexné výrazy v čitateli teraz prevedieme do polárneho tvaru, v ktorom je operácia násobenia jednoduchšia.

$$1+2ia_jt = \sqrt{1+4a_j^2t^2} \cdot (\cos(\arctan(2a_jt)) + i \sin(\arctan(2a_jt))) = r_j \cdot (\cos(\varphi_j) + i \sin(\varphi_j)), \quad (20)$$

kde $r_j = \sqrt{1+4a_j^2t^2}$ a $\varphi_j = \arctan(2a_jt)$.

Podobne dostávame aj

$$\begin{aligned} 1-2ia_jt &= \sqrt{1+4a_j^2t^2} \cdot (\cos(\arctan(-2a_jt)) + i \sin(\arctan(-2a_jt))) = \\ &= r_j \cdot (\cos(-\varphi_j) + i \sin(-\varphi_j)) = r_j \cdot (\cos(\varphi_j) + i \sin(-\varphi_j)), \end{aligned} \quad (21)$$

pričom sme využili nepárnosť arkustangensu, teda $\arctan(-2a_jt) = -\arctan(2a_jt) = -\varphi_j$ a párnosť kosínusu, čiže $\cos(-\varphi_j) = \cos(\varphi_j)$.

Urobíme súčin m týchto výrazov:

$$\prod(1+2ia_jt) = r_1 \cdots r_m \cdot (\cos(\varphi_1 + \cdots + \varphi_m) + i \sin(\varphi_1 + \cdots + \varphi_m)) \quad (22)$$

$$\prod(1-2ia_jt) = r_1 \cdots r_m \cdot (\cos(\varphi_1 + \cdots + \varphi_m) + i \sin(-\varphi_1 - \cdots - \varphi_m)) \quad (23)$$

a odmocníme:

$$\left[\prod (1 + 2ia_j t) \right]^{\frac{1}{2}} = (r_1 \cdots r_m)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi_1 + \cdots + \varphi_m}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi_1 + \cdots + \varphi_m}{2}\right) \right) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \left[\prod (1 - 2ia_j t) \right]^{\frac{1}{2}} &= (r_1 \cdots r_m)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi_1 + \cdots + \varphi_m}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\varphi_1 + \cdots + \varphi_m}{2}\right) \right) = \\ &= (r_1 \cdots r_m)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi_1 + \cdots + \varphi_m}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\varphi_1 + \cdots + \varphi_m}{2}\right) \right), \end{aligned} \quad (25)$$

pričom program R neuvažuje odmocnenie s fázovým posunom, takže túto komplikáciu nemusíme uvažovať. Z nepárnosti sínusu vyplýva $\sin\left(-\frac{\varphi_1 + \cdots + \varphi_m}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\varphi_1 + \cdots + \varphi_m}{2}\right)$.

Získané výsledky dosadíme do výrazu (19):

$$\begin{aligned} & \frac{(r_1 \cdots r_m)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\left(\cos\left(\frac{\varphi_1 + \cdots + \varphi_m}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\varphi_1 + \cdots + \varphi_m}{2}\right) \right) - \left(\cos\left(\frac{\varphi_1 + \cdots + \varphi_m}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi_1 + \cdots + \varphi_m}{2}\right) \right) \right]}{it} = \\ &= \frac{(r_1 \cdots r_m)^{\frac{1}{2}} \cdot [-2i \sin\left(\frac{\varphi_1 + \cdots + \varphi_m}{2}\right)]}{it} = \frac{(r_1 \cdots r_m)^{\frac{1}{2}} \cdot [-2 \sin\left(\frac{\varphi_1 + \cdots + \varphi_m}{2}\right)]}{t}, \end{aligned} \quad (26)$$

čo je reálny výraz.

2.1.2 Praktické použitie

Keď chceme túto exaktnú metódu testovania reálne použiť, musíme vyriešiť 3 zásadné otázky:

1. Počítame numerický odhad integrálu v (16) na nekonečnom intervale, takže výpočet musíme niekde ukončiť tak, aby bola strata zanedbateľná.
2. Simpsonovo pravidlo používame na intervale $[a, b]$, teda potrebujeme zvoliť dostatočne jemné delenie, ale zase nie príliš jemné, aby výpočet netrval príliš dlho.
3. Potrebujeme určiť začiatočný bod výpočtu integrálu, čo najbližšie k nule, ale nie nulový, pretože v menovateli integrovanej funkcie by bola nula.

V celej práci budeme porovnávať rôzne testy, prípadne rôzne nastavenia parametrov testov, simulačne. Postup simulácie bude nasledovný:

1. Zvolíme veľkosť matice X , teda počet riadkov n a počet stĺpcov k a vygenerujeme jej hodnoty, pričom prvý stĺpec bude jednotkový. Zvolíme vektor regresných koeficientov β , ktorý má dĺžku k . Zvolíme varianciu σ^2 bieleho šumu a hodnotu φ . Ak simulujeme prípad, že H_0 platí, tak φ bude nulové.

2. Vygenerujeme vektor bieleho šumu w z normálneho rozdelenia s parametrami 0 a $\sigma^2 I$.
3. Dopočítame y podľa (2) a (1).
4. „Zabudneme“ všetko okrem X a y a necháme príslušný test overiť prítomnosť autokorelácie.

Body 2-4 potom opakujeme, kým nemáme dost' simulácií na vyhodnotenie pravdepodobnosti chyby prvého druhu, teda pravdepodobnosti, že test H_0 zamietne napriek tomu, že H_0 platí. Zamietame na hladine významnosti 5%, teda ideálne by testy mali v 5% prípadov zamietnuť H_0 , aj keď H_0 platí.

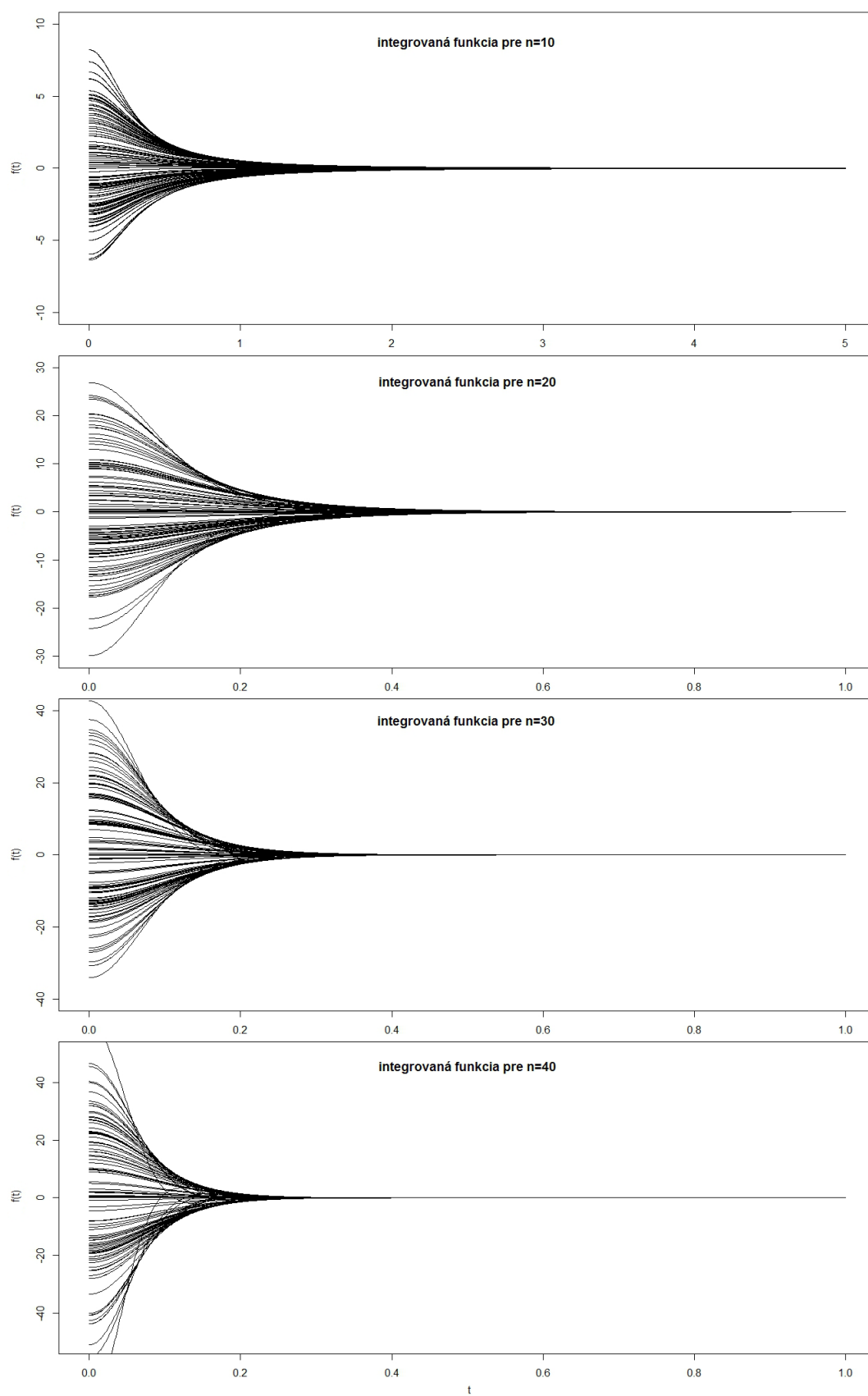
V našich simuláciách sme vektor regresných koeficientov β generovali z rozdelenia $N(0, 1)$, maticu regresorov X z rozdelenia $N(5, 10)$ a variancia σ^2 bieleho šumu bola 4. Počet regresorov bez konštantného člena bol 5 a počet dát n sme menili.

Všetky výpočty uvedené v tejto práci sme robili na počítači značky Asus s procesorom Intel Core i3, pamäťou RAM 4GB a operačným systémom Windows 7. Tomu zodpovedajú údaje o trvaní jednotlivých výpočtov.

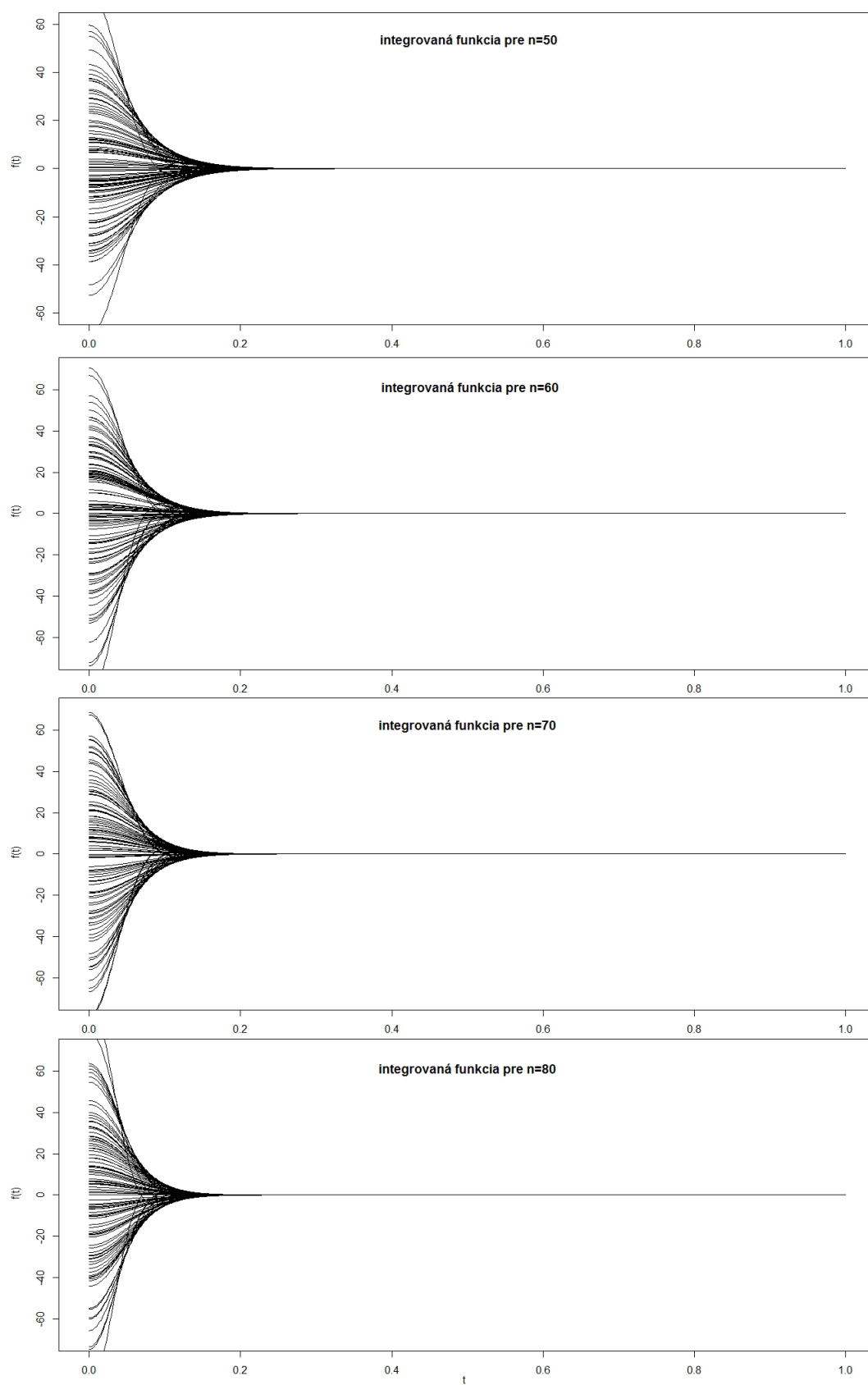
2.1.2.1 Dĺžka integračnej oblasti

Aby sme zodpovedali prvú otázku o „dĺžke“ integračnej oblasti, vykreslíme grafy funkcií, z ktorých rátame integrál. Tvar týchto funkcií závisí od n , preto ho vykreslíme pre rôzne hodnoty a sledujeme zmeny. Pre každú hodnotu n sme urobili 100 simulácií a vykreslili grafy integrovanej funkcie. Výsledky vidíme na obrázkoch 6 a 7. Vykreslenie grafov sme zopakovali aj pre iné matice X , pričom charakter grafov zostal zachovaný, ale tieto grafy už v práci neuvádzame.

Všimnime si, že pre malé n nadobúda funkcia nízke hodnoty pre t blízke nule, ale k nulovej hladine sa približuje pozvoľne a je približne nulová až pre relatívne veľké t . Keď zvyšujeme n , tak funkcia síce nadobúda čím ďalej, tým vyššie hodnoty pre t blízke nule, ale k nule sa približuje oveľa prudšie. (Pozor aj na zmenu mierky grafov, pre $n = 10$ je graf vykreslený až po $t = 5$, zvyšné grafy sú vykreslené iba po $t = 1$.)



Obr. 6: Integrovaná funkcia pre $n = 10 - 40$.

Obr. 7: Integrovaná funkcia pre $n = 50 - 80$.

Vidíme teda, že interval, na ktorom budeme rátať integrál nebude rovnaký pre všetky prípady, a teda nemôžeme použiť všeobecnú dĺžku intervalu, na ktorom budeme integrovať funkciu. Ak by sme ju nastavili príliš malú, tak v prípadoch $n = 10$ by sme prichádzali o presnosť. Naopak, ak by sme ju nastavili príliš veľkú, tak v prípadoch, kedy funkcia rýchlo klesne, by sme integrál rátali na zbytočne veľkom intervale, čo, hlavne pri drobnom delení, môže spôsobovať veľké navýšenie časovej náročnosti.

Tento problém sme vyriešili tak, že sme určili *hranicu* a integrál sme rátali dovtedy, kým hodnota integrovanej funkcie nebola nižšia ako hodnota danej *hranice*. Tento test sme vykonávali od hodnoty $t = 2$ a kým bola hodnota funkcie vyššia ako *hranica*, tak sme t zvýšili o 1. Aká by však mala byť hodnota *hranice*? Simulačne sme porovnali viaceré možnosti. Porovnávali sme ich z pohľadu presnosti výpočtu p-hodnoty, pravdepodobnosti chyby prvého druhu, časovej náročnosti a rozloženia nasimulovaných p-hodnôt na intervale $[0, 1]$, totiž ak platí H_0 , tak p-hodnoty by mali mať rovnomerné rozdelenie na intervale $[0, 1]$. Výsledky sú vypočítané jednostranným testom pozitívnej autokorelácie.

Keďže najväčšie intervaly, na ktorých budeme integrovať, sú pre malé hodnoty n , najskôr simulačne porovnáme vplyv hodnoty parametra *hranica* pre $n = 10$. Kvôli veľkej časovej náročnosti sme zvolili *delenie* pri tejto simulácii iba 1/10 (2. otázka na strane 22) a *štartovací bod* bol 10^{-14} (3. otázka na strane 22). Dáta s nulovou autokoreláciou ($\varphi = 0$) sme generovali 10 000 krát pre hodnoty *hranice* 10^{-5} , 10^{-8} a 10^{-10} . Pravdepodobnosť chyby prvého druhu a časová náročnosť jedného výpočtu sú uvedené v tabuľke 1.

<i>hranica</i>	P(chyba 1. druhu)	čas
10^{-5}	4.92%	0.024905s
10^{-8}	4.92%	0.184233s
10^{-10}	4.92%	0.955336s

Tabuľka 1: Porovnanie vplyvu rôznych hodnôt *hranice* pre $n = 10$.

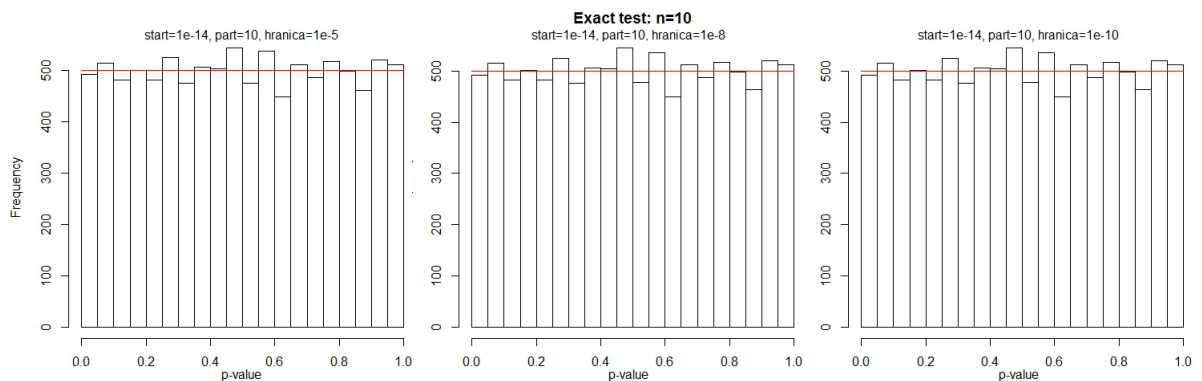
Vidíme, že vo všetkých prípadoch je pravdepodobnosť chyby prvého druhu rovnaká. Tento výsledok nám však pre porovnanie nestačí, pretože vo výsledných p-hodnotách môže aj napriek tomu dochádzať k rozdielom.

Ďalej sa bližšie pozrime na dĺžky intervalov, na ktorých sme reálne počítali integrál v jednotlivých 10 000 simuláciách. Minimálna, maximálna a priemerná dĺžka intervalu sú uvedené v tabuľke 2.

<i>hranica</i>	min. dĺžka intervalu	max. dĺžka intervalu	priemerná dĺžka intervalu
10^{-5}	2	106	49.7
10^{-8}	21	1666	455.4
10^{-10}	44	10376	2023.8

Tabuľka 2: Porovnanie dĺžky intervalu pre rôzne hodnoty *hranice*, $n = 10$.

Rozloženie p-hodnôt na intervale $[0, 1]$ je takmer rovnaké, minimálny rozdiel je medzi histogramami pre 10^{-5} a 10^{-8} . Rozloženie p-hodnôt môžeme vidieť na obrázku 8.



Obr. 8: Rozloženie p-hodnôt pre rôzne *hranice*, $n = 10$.

V tabuľke 3 sme uviedli rozdiely vo vypočítaných p-hodnotách oproti p-hodnotám vypočítaným najpresnejšou simulovanou variantou parametra *hranica*, v tomto prípade 10^{-10} .

<i>hranica</i>	min. odchýlka	max. odchýlka	priemerná odchýlka
10^{-5}	$1 \cdot 10^{-7}$	0.0017535	$3.666599 \cdot 10^{-5}$
10^{-8}	0	$1.7 \cdot 10^{-6}$	$3.295863 \cdot 10^{-7}$

Tabuľka 3: Porovnanie odchýlky p-hodnôt od najpresnejšej simulovanej varianty 10^{-10} .

Vidíme, že pri $n = 10$ má zmysel nastaviť hodnotu *hranice* aspoň na 10^{-8} . Je to časovo priateľná možnosť a p-hodnoty sú presné na približne 5 desatinných miest. Ak by sme potrebovali naozaj rýchly výpočet a presnosť p-hodnoty by nám stačila na 2 desatinné miesta, parameter *hranica* stačí nastaviť na 10^{-5} .

Rovnaké porovnanie hodnoty *hranice* sme urobili aj pre $n = 20$, pričom sme pridali hodnotu *hranice* 10^{-15} . V tomto prípade sme zvolili menšie *delenie*, a to 1/100. *Štartovací bod* bol 10^{-14} . Opäť sme dáta bez autokorelácie simulovali 10 000 krát. Percento zamietnutia nulovej hypotézy a trvanie jedného výpočtu vidíme v tabuľke 4.

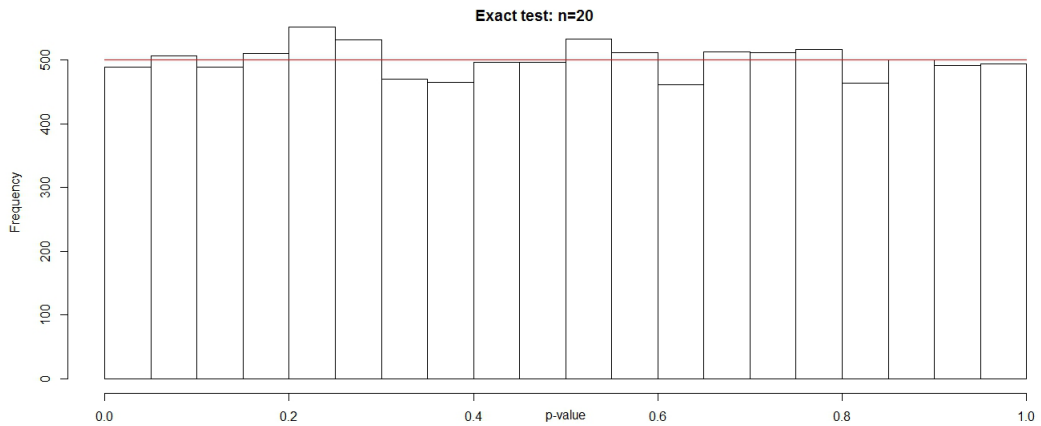
<i>hranica</i>	P(chyba 1. druhu)	čas
10^{-5}	4.89%	0.015259s
10^{-8}	4.89%	0.031110s
10^{-10}	4.89%	0.050174s
10^{-15}	4.89%	0.174300s

Tabuľka 4: Porovnanie rôznych hodnôt *hranice* pre $n = 20$.

Opäť môžeme vidieť, že pravdepodobnosť chyby prvého druhu je vo všetkých prípadoch rovnaká a trvanie výpočtu je podstatne kratšie ako pri $n = 10$ aj napriek tomu, že sme použili jemnejšie *delenie*. Je to zapríčinené tým, že dĺžky intervalov, na ktorých sme počítali integrál, sú oveľa kratšie ako pri $n = 10$ (tabuľka 5).

Rozloženie vypočítaných p-hodnôt je totožné pre všetky simulované hodnoty parametra *hranica* a je znázornené na obrázku 9.

<i>hranica</i>	min. dĺžka intervalu	max. dĺžka intervalu	priemerná dĺžka intervalu
10^{-5}	2	3	2.9
10^{-8}	2	8	6.6
10^{-10}	4	14	11.5
10^{-15}	14	61	45.2

Tabuľka 5: Porovnanie dĺžky intervalu pre rôzne hodnoty *hranice*, $n = 20$.**Obr. 9:** Rozloženie p-hodnôt pre $n = 20$.

Odchýlky jednotlivých p-hodnôt vypočítaných s parametrom *hranica* rovným 10^{-5} , 10^{-8} a 10^{-10} od p-hodnôt, ktoré sú výsledkom najpresnejšej simulovanej varianty s *hranicou* 10^{-15} , sú uvedené v tabuľke 6.

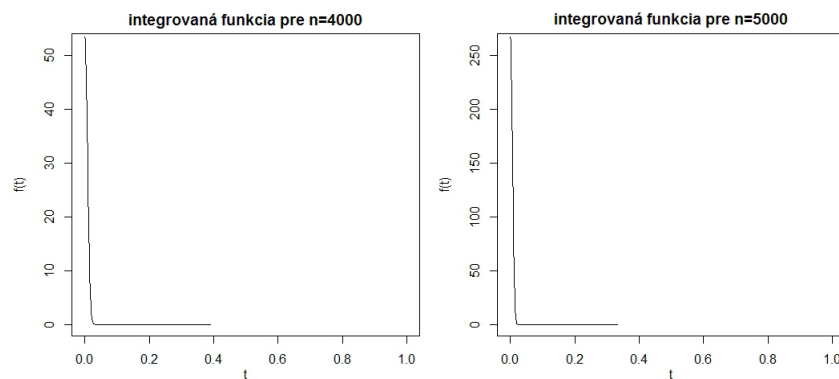
<i>hranica</i>	min. odchýlka	max. odchýlka	priemerná odchýlka
10^{-5}	0	$6.4116 \cdot 10^{-7}$	$2.464146 \cdot 10^{-7}$
10^{-8}	0	$1 \cdot 10^{-7}$	$8.91309 \cdot 10^{-10}$
10^{-10}	0	$1 \cdot 10^{-7}$	$1.3303 \cdot 10^{-11}$

Tabuľka 6: Porovnanie odchýlky p-hodnôt od najpresnejšej simulovanej varianty 10^{-15} .

Všimnime si, že pre $n = 20$ už hodnota *hranice* nie je až taká významná. Vidíme, že p-hodnoty dosahujú dostatočnú presnosť aj pri vyšších hodnotách *hranice*. Deje sa to kvôli tomu, že integrovaná funkcia je strmšia ako pri $n = 10$, a teda aj strata, spôsobená skorším useknutím integrálu, je menšia. Zvyšovaním n bude parameter *hranica* stále

menej ovplyvňovať p-hodnoty. Napríklad pre $n = 50$ sa veľkosť intervalu, na ktorom rátame integrál, nezmení zo základného, tj. 2, ani pri najmenšej hodnote parametra *hranica*, teda 10^{-15} .

Problém nastane pre n väčšie ako 950. Vtedy dá z numerických dôvodov funkcia $\Phi(t)$ vyčíslená v programe R pre $t \geq 2$ hodnotu NaN. Keďže minimálnu dĺžku intervalu sme doteraz uvažovali 2, tak program skolabuje. Je teda potrebné zmenšovať dĺžku intervalu v prípade, že pre $t = 2$ má integrovaná funkcia hodnotu NaN. Okrem testu, či je hodnota integrovanej funkcie v mieste useknutia integrálu dostatočne malá, budeme robiť aj test, či hodnota nie je NaN a v prípade, že je, dĺžku intervalu skrátime o 0.1. Na obrázku 10 vidíme grafy integrovanej funkcie pre $n = 4000$ a $n = 5000$.



Obr. 10: Integrovaná funkcia pre $n = 4000$ (vľavo) a $n = 5000$ (vpravo).

Funkcia veľmi rýchlo klesne na nulovú hladinu, chvíľu tam zotrvá a potom prestane byť vyčísliteľná. Vidíme, že aj pre takto vysoké n je skracovanie intervalu o 0.1 priateľné, pretože nulový úsek je dostatočne veľký. Ak by sme potrebovali výpočet pre výrazne väčšie n , stálo by za zváženie zmenšiť interval skracovania. Takýto výpočet by však bol veľmi časovo náročný, ako vidíme v tabuľke 16, kde sú zhrnuté výpočty jednej simulácie pre n rovné 1000, 2000, 3000, 4000 a 5000. Časovú náročnosť spôsobuje rátanie vlastných čísiel obrovskej matice, ktorá vznikne.

2.1.2.2 Jemnosť delenia integračnej oblasti

Keď už máme vyriešenú prvú otázku zo strany 22, na akom veľkom intervale budeme rátať integrál funkcie, môžeme riešiť druhú otázku, a to aké jemné má byť *delenie* intervalu. Opäť simulačne porovnáme viaceré možnosti a zistíme najlepší pomer presnosti výpočtu a rýchlosti.

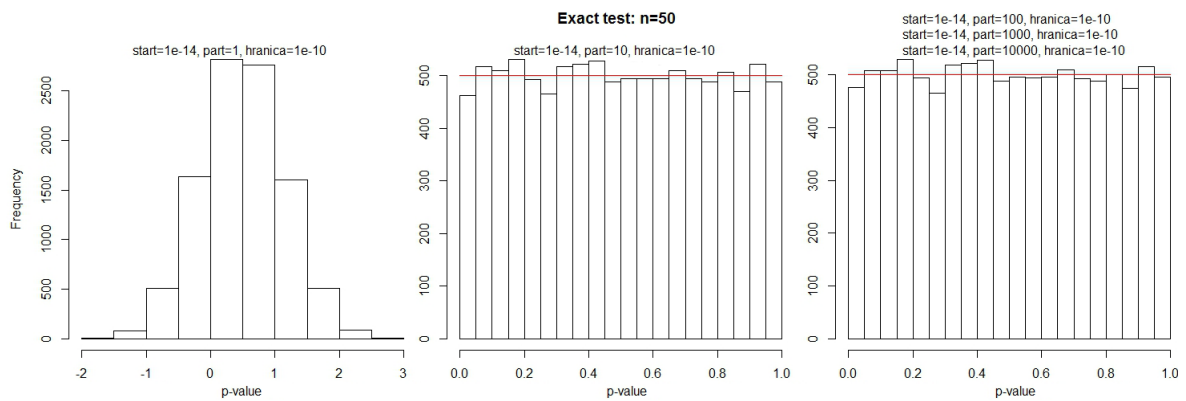
Pre túto simuláciu sme najskôr zvolili $n = 50$, pretože pri tomto n už simulácie prebiehajú dostatočne rýchlo na to, aby sme mohli simulovať aj veľmi jemné *delenie*, ako je $1/10000$. Aj v tomto prípade sme simulovali dáta bez autokorelácie 10 000 krát a vypočítali p-hodnoty pre *delenia* 1, $1/10$, $1/100$, $1/1000$ a $1/10000$. Parameter *hranica* sme zvolili 10^{-10} a *štartovací bod* 10^{-14} . Výsledné zamietanie H_0 a trvanie jedného výpočtu p-hodnoty je uvedené v tabuľke 7. Už z pohľadu na výsledky zamietania vidíme, že *delenie* 1 zrejme nebude správne.

<i>delenie</i>	P(chyba 1. druhu)	čas
1	24.71%	0.008637s
1/10	4.63%	0.009348s
1/100	4.76%	0.022705s
1/1000	4.76%	0.163534s
1/10000	4.76%	2.048641s

Tabuľka 7: Porovnanie rôznych *delení* pre $n = 50$.

Zmenou *delenia* sa viditeľne mení rozloženie p-hodnôt. Pre *delenie* 1 je výrazne mimo intervalu $[0, 1]$, preto toto *delenie* nie je vhodné používať. Pre *delenie* $1/10$ je už rozdelenie rovnomernejšie, avšak prechodom na jemnejšie (a teda aj presnejšie) *delenie* $1/100$ vidíme zmenu vo vypočítaných p-hodnotách. Pre jemnejšie *delenia* $1/100$, $1/1000$ a $1/10000$ sa už rozloženie p-hodnôt nemení. Histogramy p-hodnôt pre rôzne hodnoty parametra *delenie* vidíme na obrázku 11.

V tabuľke 8 vidíme rozdiely v p-hodnotách vypočítaných s použitím *delení* 1, $1/10$, $1/100$ a $1/1000$ oproti p-hodnotám vypočítaným s použitím najjemnejšieho simulova-



Obr. 11: Rozloženie p-hodnôt pre rôzne *delenia*, $n = 50$.

ného *delenia*, teda $1/10000$.

<i>delenie</i>	min. odchýlka	max. odchýlka	priemerná odchýlka
1	$3.78 \cdot 10^{-5}$	1.754681	0.2641792
1/10	0	0.03312841	0.0004502269
1/100	0	0	0
1/1000	0	0	0

Tabuľka 8: Porovnanie odchýlky p-hodnôt od najpresnejšej simulovanej varianty $1/10000$.

Aj z týchto výsledkov je zrejmé, že *delenie* 1 je nevhodné. Málo presné sa javí byť aj *delenie* $1/10$, keďže presnosť jeho p-hodnôt sa môže líšiť už na druhom desatinnom mieste. Ďalšie dve *delenia* $1/100$ a $1/1000$ však vyzerajú byť úplne postačujúce, keďže ich odchýlka od p-hodnoty, vypočítanej s najjemnejším *delením* $1/10000$, je nulová.

Platnosť týchto záverov vyskúšame aj pri nižšom n , a to $n = 20$. *Delenie* $1/10000$ tentokrát simulovať nebudeme, pretože sa zdá, že tak jemné *delenie* nie je potrebné a pri tejto hodnote n by bolo aj časovo náročné. Výsledné pravdepodobnosti chyby prvého druhu pre rôzne *delenia* a trvanie výpočtu jednej p-hodnoty sú v tabuľke 9.

Pri tejto hodnote n sa zmenou parametra *delenie*, okrem prípadu *delenia* 1, rozloženie p-hodnôt nemení a je rovnaké ako na obrázku 9. Ak má *delenie* hodnotu 1, tak p-hodnoty opäť vychádzajú z intervalu $[0, 1]$.

<i>delenie</i>	P(chyba 1. druhu)	čas
1	9.35%	0.009556s
1/10	4.89%	0.013274s
1/100	4.89%	0.050174s
1/1000	4.89%	0.477878s

Tabuľka 9: Porovnanie rôznych *delení* pre $n = 20$.

V tabuľke 10 sú rozdiely v p-hodnotách vypočítaných s *delením* 1, 1/10 a 1/100 oproti p-hodnotám vypočítaným s najjemnejším simulovaným *delením* 1/1000.

<i>delenie</i>	min. odchýlka	max. odchýlka	priemerná odchýlka
1	$6 \cdot 10^{-7}$	0.6892822	0.02902064
1/10	0	0.0011336	$5.236907 \cdot 10^{-6}$
1/100	0	0	0

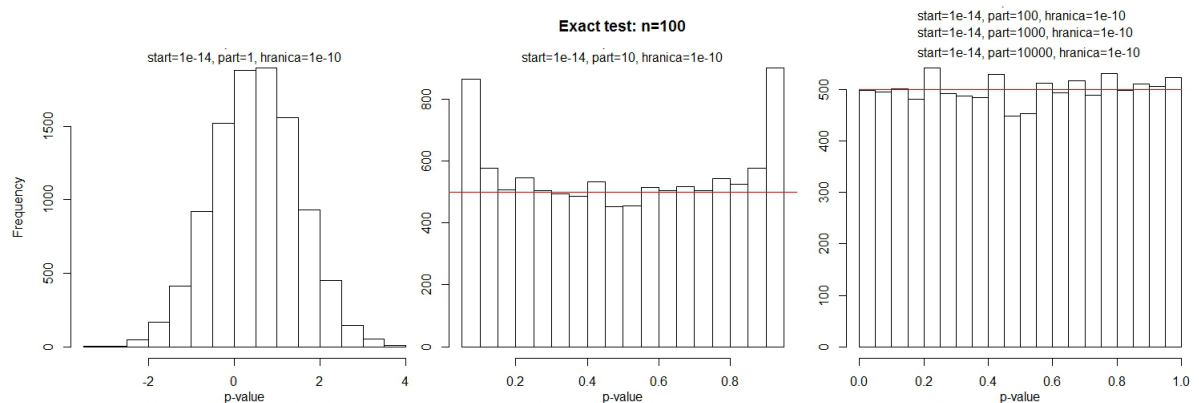
Tabuľka 10: Porovnanie odchýlky p-hodnôt od najpresnejšej simulovanej varianty 1/1000.

Predpoklad, že *delenie* 1/100 je postačujúce, sa nám potvrdil aj v tomto prípade. Avšak z výsledkov (tabuľky 8 a 10) vidíme, že pri nižšom počte dát n sú odchýlky menšie ako pri vyššom n . Je to zapríčinené tým, že integrovaná funkcia je menej strmá, a teda hrubšie *delenie* nevytvára až takú stratu presnosti. Vyskúšame teda toto porovnanie pre ešte strmšiu funkciu ako pri $n = 50$, teda vyššiu hodnotu n , povedzme 100.

Pre $n = 100$ sme opäť urobili 10 000 simulácií dát bez autokorelácie a vypočítali p-hodnoty pre *delenia* 1, 1/10, 1/100, 1/1000 a 1/10000. Pravdepodobnosť chyby prvého druhu a trvanie jedného výpočtu sú uvedené v tabuľke 11. Z výsledkov je zrejmé, že *delenia* 1 a 1/10 nebudú vhodné. Ostatné *delenia* majú rovnakú pravdepodobnosť chyby prvého druhu.

V prípadoch *delenia* 1 a 1/10 sú histogramy vypočítaných p-hodnôt veľmi neuspokojivé, ako vidíme na obrázku 12. Pre zvyšné *delenia* sa rozloženie p-hodnôt nemení.

<i>delenie</i>	P(chyba 1. druhu)	čas
1	32.63%	0.024464s
1/10	0.00%	0.025877s
1/100	4.98%	0.044259s
1/1000	4.98%	0.467189s
1/10000	4.98%	2.612610s

Tabuľka 11: Porovnanie rôznych *delení* pre $n = 100$.Obr. 12: Rozloženie p-hodnôt pre rôzne *delenia*, $n = 100$.

Rozdiely vo vypočítaných p-hodnotách oproti p-hodnotám vypočítaným s najjemnejším *delením* 1/10000 vidíme v tabuľke 12.

<i>delenie</i>	min. odchýlka	max. odchýlka	priemerná odchýlka
1	$7.6 \cdot 10^{-6}$	3.260749	0.5447523
1/10	$1 \cdot 10^{-7}$	0.1985531	0.006830463
1/100	0	0	0
1/1000	0	0	0

Tabuľka 12: Porovnanie odchýlky p-hodnôt od najpresnejšej simulovanej varianty 1/10000.

Potvrdil sa nám predpoklad, že pre väčšie n je jemnosť *delenia* podstatnejšia, pretože integrovaná funkcia je strmšia. Pre $n = 100$ sú už *delenia* 1 a 1/10 absolútne nevhodné. *Delenie* 1/100 je však stále vhodným *delením* a jeho časová náročnosť je priateľná. Z

pohľadu časovej náročnosti je dobré aj *delenie* 1/1000. Odporúčame teda používať *delenie* aspoň 1/100. *Delenie* 1/10000 je už príliš jemné a výrazné zvýšenie časovej náročnosti výpočtu neprináša zvýšenie presnosti.

2.1.2.3 Začiatok integrovania

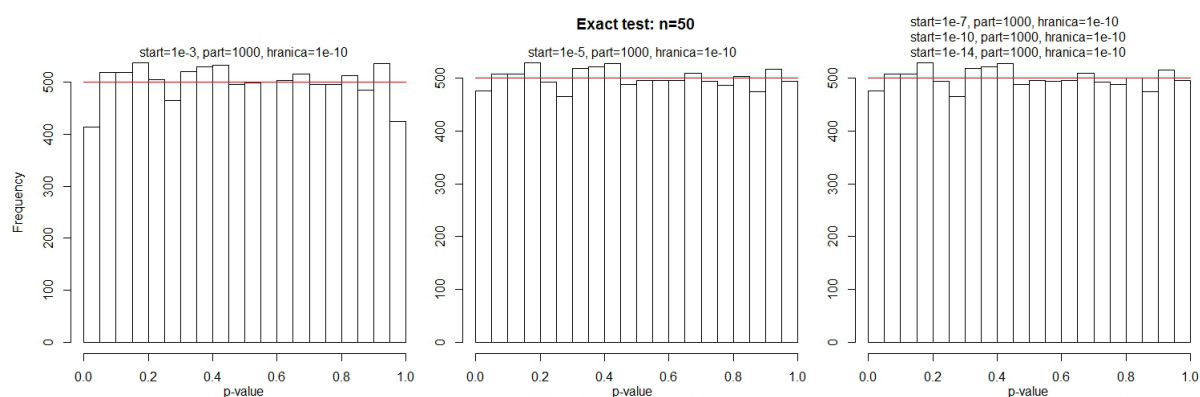
Zostáva nám vyriešiť poslednú, tretiu, otázku zo strany 22, a to, v akom *štartovacom* bode začať rátať integrál, keďže bod 0 nemôžeme použiť. Z obrázkov 6 a 7 vidíme, že *štartovací bod* bude veľmi dôležitý, keďže okolo nuly je sústredená podstatná časť integrálu. *Štartovací bod* by nemal ovplyvňovať rýchlosť výpočtu, pretože počet a náročnosť operácií zostáva rovnaká. Teda najlepšie bude začať rátať integrál od bodu čo najbližšieho k nule, povedzme 10^{-14} . Aj napriek zrejmému výsledku sme však urobili simulácie pre *štartovacie body* 10^{-3} , 10^{-5} , 10^{-7} , 10^{-10} a 10^{-14} , aby sme zistili vplyv tohto parametra. Parameter *delenie* bol 1/1000 a *hranica* bola 10^{-10} . Simulácie sme urobili pre $n = 50$. Nasimulovanú pravdepodobnosť chyby prvého druhu pre jednotlivé hodnoty parametra *štartovací bod* vidíme v tabuľke 13.

<i>štartovací bod</i>	P(chyba 1. druhu)
10^{-3}	4.14%
10^{-5}	4.76%
10^{-7}	4.76%
10^{-10}	4.76%
10^{-14}	4.76%

Tabuľka 13: Porovnanie rôznych hodnôt *štartovacieho bodu* pre $n = 50$.

Pre všetky *štartovacie body* okrem 10^{-3} sú pravdepodobnosti chyby prvého druhu rovnaké. Pozrime sa teda na histogramy vypočítaných p-hodnôt (obrázok 13). Rozloženie p-hodnôt sa pre *štartovacie body* 10^{-7} až 10^{-14} nemení. Pre väčšie hodnoty *štartovacieho bodu* môžeme vidieť zmeny.

Rozdiely p-hodnôt oproti p-hodnotám vypočítaným so *štartovacím bodom* 10^{-14} vidíme v tabuľke 14.



Obr. 13: Rozloženie p-hodnôt pre rôzne štartovacie body, $n = 50$.

štartovací bod	min. odchýlka	max. odchýlka	priemerná odchýlka
10^{-3}	$9 \cdot 10^{-7}$	0.01352545	0.00308236
10^{-5}	0	0.0001352738	$3.082458 \cdot 10^{-5}$
10^{-7}	0	$1.3527 \cdot 10^{-6}$	$3.085779 \cdot 10^{-7}$
10^{-10}	0	$1 \cdot 10^{-7}$	$2.4098 \cdot 10^{-10}$

Tabuľka 14: Porovnanie odchýlky p-hodnôt od najpresnejšej simulovanej varianty 10^{-14} .

Z výsledkov vyplýva, že vypočítané p-hodnoty veľmi závisia od parametra *štartovací bod*. Je vhodné začať výpočet integrálu aspoň v bode 10^{-7} , aby sme dosiahli presnosť aspoň na 5 desatinných miest. Aj napriek tomu však stále odporúčame číslo ešte bližšie k nule, keďže zmena tohto parametra nezvyšuje výpočtovú náročnosť.

Porovnanie *štartovacieho bodu* sme urobili aj pre $n = 20$, pričom sme prišli k podobným výsledkom. Pri tejto hodnote n je parameter *štartovací bod* menej významný, keďže pri nižších n má integrovaná funkcia v okolí nuly menšie hodnoty.

2.1.3 Výsledky Exaktného testu pozitívnej autokorelácie

V tabuľke 15 vidíme nasimulovanú pravdepodobnosť chyby prvého druhu a časovú náročnosť jedného výpočtu jednostranného Exaktného testu pozitívnej autokorelácie pre rôzne hodnoty n . Všetky hodnoty sú výsledkom 10 000 simulácií dát bez autokorelácie s piatimi regresormi. Parameter *štartovací bod* mal hodnotu 10^{-14} , *delenie* bolo 1/100 a *hranica* 10^{-10} , okrem prípadu $n = 10$, kedy sme použili hrubšie *delenie* 1/10.

počet dát	P(chyba 1. druhu)	čas
$n = 10$	4.92%	0.955336s
$n = 20$	4.89%	0.050174s
$n = 30$	5.14%	0.022993s
$n = 40$	4.83%	0.018424s
$n = 50$	4.76%	0.022705s
$n = 60$	5.13%	0.025759s
$n = 70$	5.27%	0.032545s
$n = 80$	4.71%	0.036270s
$n = 90$	5.27%	0.042930s
$n = 100$	4.98%	0.050115s
$n = 200$	4.89%	0.191615s
$n = 300$	5.15%	0.558469s
$n = 400$	4.88%	1.127375s
$n = 500$	4.76%	2.062971s

Tabuľka 15: Pravdepodobnosť chyby 1. druhu a časová náročnosť Exaktného testu.

Všimnime si, že časová náročnosť Exaktného testu je pri nízkom n vysoká, potom klesá a okolo $n = 40$ dosiahne svoje minimum. Následne úmerne zvyšovaniu n rastie aj časová náročnosť kvôli výpočtu vlastných hodnôt väčšej matice. Dlhé trvanie výpočtu pri malých hodnotách n , aj napriek hrubšiemu *deleniu*, je spôsobené práve veľkým intervalom, na ktorom sa ráta integrál.

Histogramy rozloženia p-hodnôt pre jednotlivé hodnoty n vidíme na obrázku 14.

Ďalej vypočítame p-hodnoty pre veľmi vysoké hodnoty n , a to 1000, 2000, 3000, 4000 a 5000. Kvôli veľkej časovej náročnosti výpočtu urobíme iba jednu simuláciu dát. Tieto hodnoty neskôr použijeme pri porovnaní Exaktného testu s aproximáciami. V tabuľke 16 vidíme veľkosť intervalu, na ktorom rátame integrál, výslednú p-hodnotu a trvanie výpočtu.



Obr. 14: Rozloženie p-hodnôt vypočítaných jednostranným Exaktným testom.

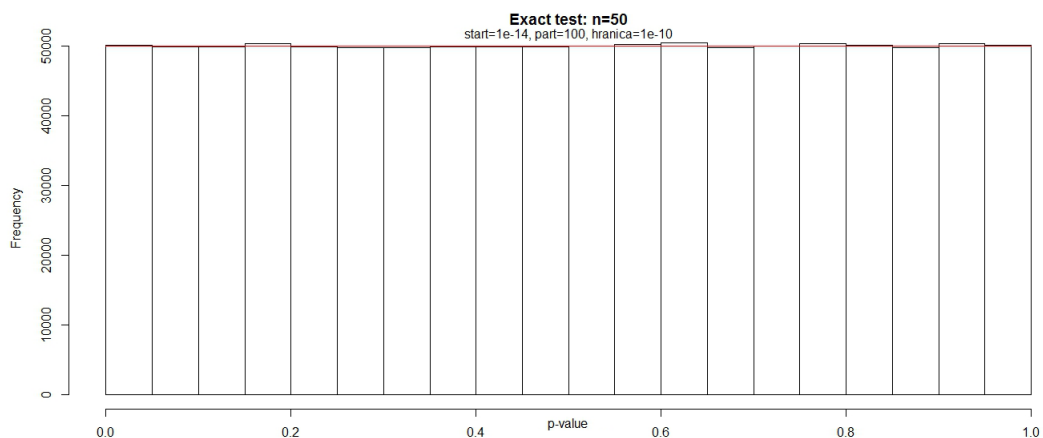
počet dát	veľkosť intervalu	p-hodnota	čas
$n = 1000$	1.8	0.1545348	15.85s
$n = 2000$	0.7	0.4561747	107.89s $\sim$ 1.8min
$n = 3000$	0.4	0.9128433	379.10s $\sim$ 6.3min
$n = 4000$	0.3	0.5838928	864.98s $\sim$ 14.4min
$n = 5000$	0.3	0.8280748	1665.89s $\sim$ 27.8min

Tabuľka 16: Výpočty p-hodnôt Exaktným testom pre veľké n .

Všimnime si, že pri takto veľkých hodnotách n trvá jeden výpočet pomocou Exaktného testu veľmi dlho. Bežný používateľ síce potrebuje výpočet vykonať iba raz, no trvanie 30 minút pre neho môže byť aj tak neuspokojivé. Preto máme motiváciu nájsť výpočtovo menej náročné riešenie aj za cenu straty „exaktnosti“.

Aby sme sa presvedčili, že tento test je naozaj presný, urobili sme milión simulácií dát bez autokorelácie s veľkosťou $n = 50$ a aplikovali sme na ne Exaktný test.

Celý výpočet trval 19 404 sekúnd, čo je približne 5.4 hodiny a výsledná pravdepodobnosť chyby prvého druhu bola 5.0084%. Táto hodnota je už veľmi blízka ideálnej hodnote 5%. Vykreslili sme aj histogram vypočítaných p-hodnôt - obrázok 15.



Obr. 15: Histogram p-hodnôt milióna simulácií.

Vidíme, že rozdelenie p-hodnôt je pri tomto množstve simulácií takmer rovnomerné. To nás utvrdzuje v predpoklade, že Exaktný test je naozaj presný.

2.2 Aproximácie

Problémom Exaktného testu je jeho výpočtová náročnosť, čo spôsobuje dlhé trvanie výpočtu. Pre malé hodnoty n je čas výpočtu zanedbateľný, avšak pre n rovné 5000 už jeden výpočet trvá 27.8 minút, čo môže byť veľmi nepraktické. To nás motivuje na nájdenie alternatívneho testu, aj za cenu straty úplnej presnosti.

Durbin a Watson v článku [5] porovnali 6 aproximácií presného rozdelenia testovacej štatistiky d :

1. *Beta aproximácia* (článok [4]) - rozdelenie štatistiky $\frac{1}{4}d$ aproximuje beta rozdelením s rovnakou strednou hodnotou a variancou, akú má presné rozdelenie štatistiky $\frac{1}{4}d$.
2. *Jacobi aproximácia* (článok [4]) - využíva Jacobiho polynómy a beta rozdelenie na modelovanie hustoty štatistiky $\frac{1}{4}d$ na základe zhodných prvých 4 momentov.
3. d_U *aproximácia* (článok [10]) - využíva predpoklad, že rozdelenie hornej hranice d_U je dobrou aproximáciou skutočného rozdelenia d .
4. *Theil-Nagarova aproximácia* - rozdelenie testovacej štatistiky aproximuje lineárnou funkciou s premennou s beta rozdelením, ktorého parametre určuje na základe koeficientov šikmosti a špicatosti. Zvyšné parametre sa určia pomocou prvých 2 momentov.
5. *Henshawova aproximácia* (článok [11]) - parametre beta rozdelenia určuje na základe zhodnosti so skutočným rozdelením v prvých 4 momentoch.
6. $a + bd_U$ *aproximácia* (článok [5]) - rozdelenie testovacej štatistiky aproximuje lineárnou funkciou $a + bd_U$ a koeficienty a, b dourčí na základe zhodnosti prvých 2 momentov.

Durbin a Watson porovnávali tieto aproximácie na 4 sadách reálnych dát: *Spirits data* ($n = 69$ a $k = 3$), *Textiles data* ($n = 17$ a $k = 3$), *Pears data* ($n = 16$ a $k = 5$) a *Consumption data* ($n = 21$ a $k = 3$).

V tej dobe bolo problematické robiť porovnanie simulačne, pretože metódy vyžadovali zložité výpočty, na ktoré niekedy počítače nestačili a často ich robili ručne.

Problematické bolo najmä určenie kvantilu beta rozdelenia, na čo využívali tabuľky a parametre beta funkcie museli zaokrúhľovať. Ďalším problémom bol výpočet vlastných čísiel matice veľkých rozmerov, ktorému sa snažili vyhnúť iným výpočtom. Tieto problémy sa potom odrazili aj na presnosti riešenia.

Na základe výsledkov porovnania, Durbin a Watson v článku [5] rozdelili metódy do troch skupín podľa ich presnosti a výpočtovej náročnosti. So stúpajúcou presnosťou stúpa aj výpočtová náročnosť týchto metód.

Prvú skupinu tvoria d_U aproximácia a Theil-Nagarova aproximácia, ktoré sú, okrem prípadu dát *Spirits data*, veľmi nepresné a Durbin s Watsonom ich neodporúčajú na praktické použitie.

Druhá skupina pozostáva z Beta aproximácie a $a + bd_U$ aproximácie. Ukázali sa byť dosť presné, s výnimkou prípadu dát *Pears data*. Tým sa vyvrátili pôvodné obavy Durbina a Watsona, že na praktické použitie Beta aproximácie bude potrebné mať dostatočný počet stupňov voľnosti (hodnota $n - k$), aspoň 40.

Poslednú skupinu tvoria Henshawova aproximácia a aproximácia využívajúca Jacobiho polynómy, ktoré sa zakladajú na prvých 4 momentoch. Podľa Durbina a Watsona sú veľmi presné opäť s výnimkou prípadu, kedy bolo n malé a k veľké (*Pears data*). Henshawova aproximácia sa ukázala byť mierne lepšia ako Jacobiho.

Záverečné odporúčenie Durbina a Watsona bolo v prvom rade použiť klasický test. V prípade, že klasický test skončí nerozhodne, použiť Beta aproximáciu alebo $a + bd_U$ aproximáciu, alebo, ak vyžadujeme špeciálnu presnosť, tak Henshawovu alebo Jacobiho aproximáciu, prípadne presné metódy Imhofa a Pan Jie-jiana, ktoré sme v práci nepopisovali, pretože v roku 1976 prišli L'Esperance, Chall a Taylor s jednoduchším výpočtom presnej p-hodnoty.

Zo spomínaných metód sme zvolili Beta aproximáciu a Henshawovu aproximáciu, ktorých správanie overíme simulačne. Tieto dve metódy sme vybrali preto, že podľa Durbina a Watsona patria do iných skupín presnosti. Prvú skupinu, teda Theil-Nagarovu a d_U aproximáciu sme netestovali, keďže aj na vybraných dátach v [5] vykazovali veľkú chybovosť.

2.2.1 Beta aproximácia

V článkoch [4], [5] navrhli autori Durbin a Watson aproximáciu presného rozdelenia Durbin-Watsonovej štatistiky beta rozdelením, ktoré má rovnakú strednú hodnotu a varianciu ako presné rozdelenie. Odporúčali použitie tohto testu v prípade, že klasický Durbin-Watsonov test skončil nerozhodne. Keďže v tej dobe robili výpočty často ručne, nebolo pre nich možné simulačne testovať presnosť Beta aproximácie oproti presnému rozdeleniu. Dnes to už možné je a budeme sa tomu v tejto práci venovať.

Táto metóda predpokladá, že rozdelenie $\frac{1}{4}d$ je beta rozdelenie, teda má hustotu

$$\frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}, \quad (27)$$

kde premenná $x \in [0, 1]$.

Stredná hodnota štvornásobku beta rozdelenia je

$$E(d) = \frac{4p}{p+q} \quad (28)$$

a variancia

$$var(d) = \frac{16pq}{(p+q)^2(p+q+1)}. \quad (29)$$

Tieto hodnoty sa musia zhodovať so skutočnými hodnotami pre rozdelenie d štatistiky, ktoré uviedli v [4] Durbin a Watson.

$$E(d) = \frac{P}{n - k' - 1}, \quad (30)$$

$$var(d) = 2 \frac{Q - PE(d)}{(n - k' - 1)(n - k' + 1)}, \quad (31)$$

kde k' je počet regresorov bez absolútneho člena,

$$P = \text{tr}(A) - \text{tr}(X'AX(X'X)^{-1}) \quad (32)$$

a

$$Q = \text{tr}(A^2) - 2\text{tr}(X'A^2X(X'X)^{-1}) + \text{tr}((X'AX(X'X)^{-1})^2), \quad (33)$$

kde X je matica regresorov a A je matica definovaná v (8).

Hodnoty $E(d)$ a $var(d)$ vypočítame podľa (30) a (31) z konkrétnych dát a riešime sústavu dvoch rovníc (28) a (29) o dvoch neznámych p a q .

Z rovnice (28) vyjadríme q

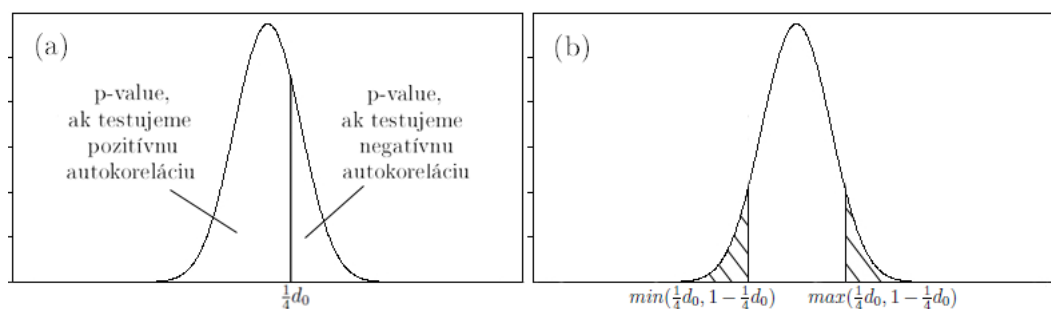
$$q = \frac{4p - E(d)p}{E(d)} = p \frac{4 - E(d)}{E(d)} = Kp, \quad (34)$$

kde $K = \frac{4 - E(d)}{E(d)}$ je konštanta pre dané dáta, q dosadíme do (29) a vyjadríme p :

$$\begin{aligned} var(d) &= \frac{16Kp^2}{[(1+K)p]^2[(1+K)p+1]} = \frac{16K}{(1+K)^3p + (1+K)^2} \\ p(1+K)^3 var(d) &= 16K - (1+K)^2 var(d) \\ p &= \frac{16K - (1+K)^2 var(d)}{(1+K)^3 var(d)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Vypočítame hodnoty parametrov p a q , ktoré dosadíme do beta funkcie.

P-hodnotu vypočítame ako plochu pod krivkou hustoty beta funkcie. V prípade testu pozitívnej autokorelácie rátaťme plochu naľavo od hodnoty $\frac{1}{4}d_0$ a v prípade testu negatívnej autokorelácie napravo. Hodnota d_0 je hodnota Durbin-Watsonovej testovacej štatistiky pre dané dáta. Výpočet p-hodnoty pri jednostrannom teste ilustruje obrázok 16a. Ak testujeme obojstranným testom, musíme zrátať dve plochy: plochu naľavo od $\min(\frac{1}{4}d_0, 1 - \frac{1}{4}d_0)$ a plochu napravo od $\max(\frac{1}{4}d_0, 1 - \frac{1}{4}d_0)$. Obojstranný test je znázornený na obrázku 16b.



Obr. 16: Výpočet p-hodnoty Beta aproximáciou: (a) jednostranný test (b) obojstranný test.

Funkciu naprogramovanú v programe R [15] na výpočet jednostranného testu pozitívnej autokorelácie pomocou Beta aproximácie sme uviedli v prílohe A.1.3.

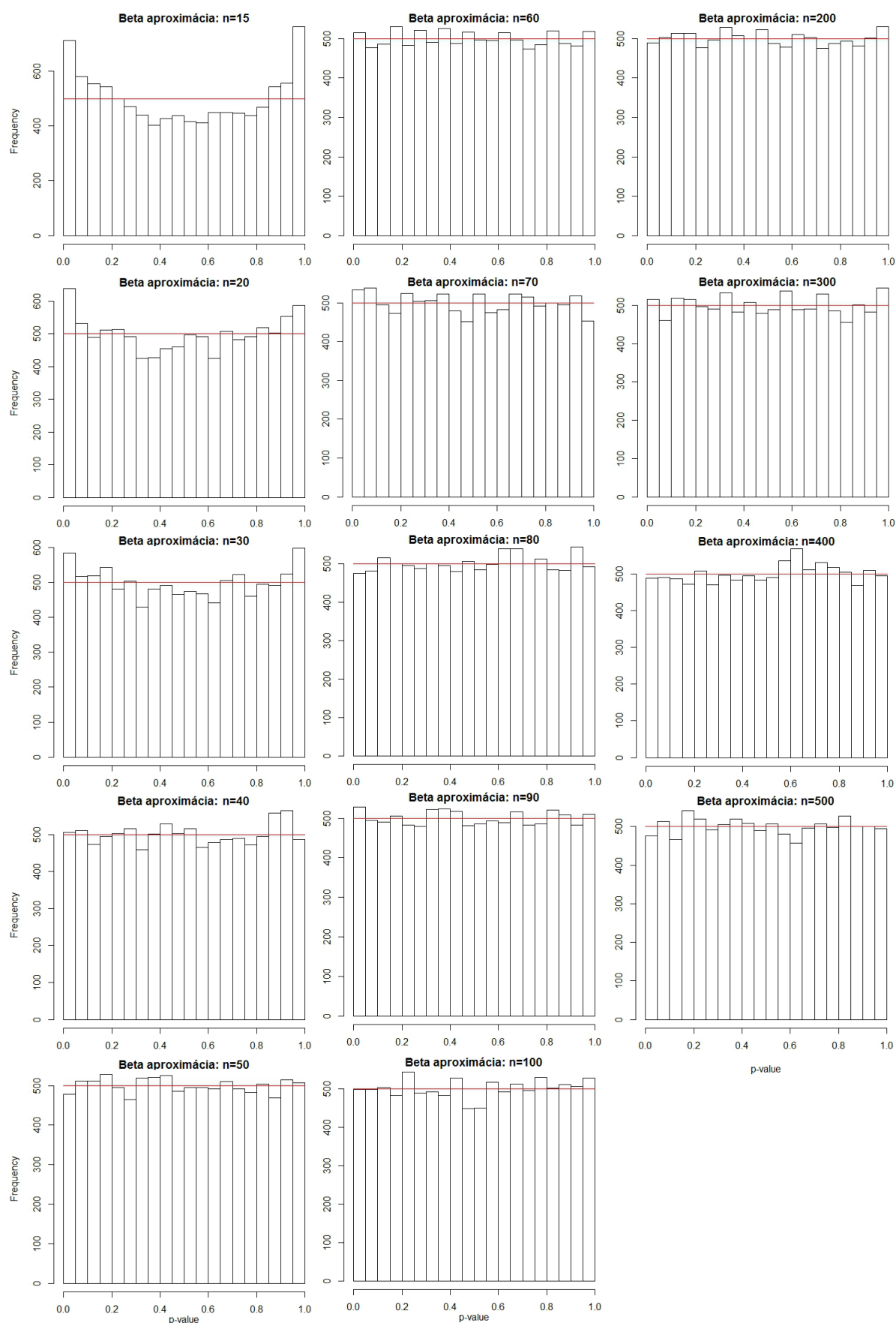
2.2.1.1 Výsledky testu pozitívnej autokorelácie Beta aproximáciou

Výsledky výpočtov testu pozitívnej autokorelácie pomocou Beta aproximácie vidíme v tabuľke 17. Sú tam zhrnuté pravdepodobnosti chyby prvého druhu a časové náročnosti jedného výpočtu pre rôzne hodnoty n . Pre každú hodnotu n sme nasimulovali 10 000 sád dát bez autokorelácie. Prípad $n = 10$ sa medzi výsledkami nenachádza, pretože ho nie je možné pomocou Beta aproximácie zrealizovať kvôli veľmi malému množstvu dát v porovnaní s počtom regresorov $k' = 5$.

počet dát	P(chyba 1. druhu)	čas
$n = 15$	7.12%	0.005299s
$n = 20$	6.38%	0.005524s
$n = 30$	5.85%	0.005814s
$n = 40$	5.05%	0.006228s
$n = 50$	4.78%	0.006480s
$n = 60$	5.15%	0.007231s
$n = 70$	5.34%	0.007165s
$n = 80$	4.75%	0.008031s
$n = 90$	5.28%	0.008694s
$n = 100$	4.98%	0.009018s
$n = 200$	4.89%	0.020620s
$n = 300$	5.16%	0.046922s
$n = 400$	4.88%	0.085665s
$n = 500$	4.76%	0.154024s

Tabuľka 17: Pravdepodobnosť chyby 1. druhu a časová náročnosť Beta aproximácie.

Rýchlosť výpočtu Beta aproximácie je vynikajúca, dokonca aj pri vysokých n . Pravdepodobnosť chyby prvého druhu kolísava okolo hodnoty 5%, okrem prípadov, kde je n veľmi malé číslo. Beta aproximácia sa teda javí byť dobrou náhradou Exaktného testu. Pozrime sa ešte na histogramy rozloženia p-hodnôt na intervale $[0, 1]$ pre jednotlivé hodnoty n na obrázku 17. Vidíme, že histogramy pre n väčšie ako 40 sú veľmi podobné rovnomernému rozdeleniu.



Obr. 17: Rozloženie p-hodnôt jednostranného testu - Beta aproximácia.

Na rovnakých nasimulovaných dátach ako pri Exaktnom teste vypočítame p-hodnoty jednej simulácie pre n rovné 1000, 2000, 3000, 4000 a 5000. V tabuľke 18 vidíme výslednú p-hodnotu a trvanie výpočtu. Porovnanie týchto hodnôt s výsledkami z ostatných testov uvedieme v kapitole 2.3.1, ale už teraz vidíme, že z pohľadu časovej náročnosti je použitie Beta aproximácie veľmi výhodné.

počet dát	p-hodnota	čas
$n = 1000$	0.1545337	1.94s
$n = 2000$	0.4561746	12.20s
$n = 3000$	0.9128436	42.51s
$n = 4000$	0.5838928	101.62s $\sim$ 1.7min
$n = 5000$	0.8280748	200.12s $\sim$ 3.3min

Tabuľka 18: Výpočty p-hodnôt Beta aproximáciou pre veľké n .

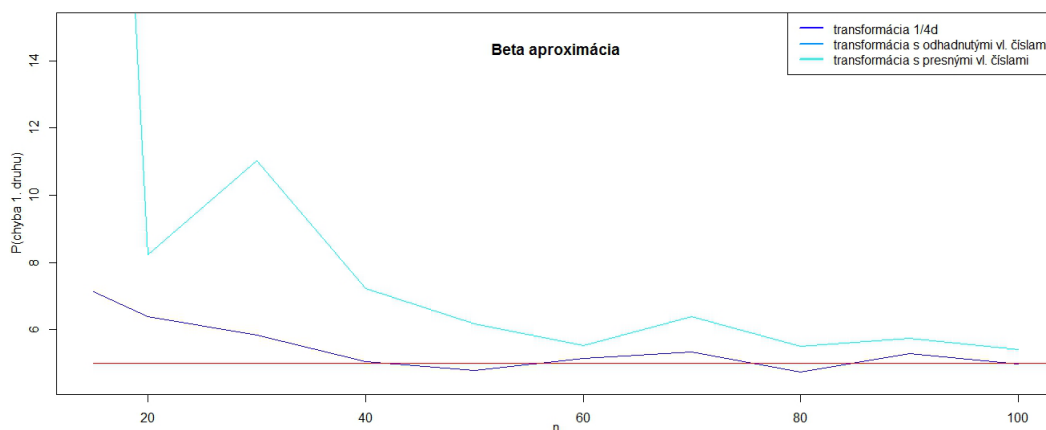
Podľa Henshawa, ktorého aproximáciu uvedieme v kapitole 2.2.2, Durbin-Watsonova testovacia štatistika d nie je z intervalu $[0, 4]$, ale z intervalu $[\tau_s, \tau_g]$, kde τ_s je najmenšia nenulová a τ_g najväčšia vlastná hodnota matice $A - AX(X'X)^{-1}X'$, kde X je matica regresorov a A je matica definovaná v (8). τ_s , resp. τ_g sa však ukazujú byť pomerne blízko k 0, resp. 4. Testovaciu štatistiku d potom neprevedieme na interval $[0, 1]$ násobením $\frac{1}{4}$, ale vzorcom $\frac{d-\tau_s}{\tau_g-\tau_s}$. Vlastné čísla τ_s a τ_g môžeme odhadnúť podľa Henshawových vzorcov (60) a (61), alebo vypočítať presne v programe R, čo je časovo náročnejšie. Obe varianty sme aplikovali vo výpočte Beta aproximácie.

Pri použití odhadnutých vlastných čísel vyšli pravdepodobnosti chyby prvého druhu aj jednotlivé vypočítané p-hodnoty rovnaké ako pri transformácii $\frac{1}{4}d$ a časová náročnosť výpočtu sa mierne zvýšila. Henshawova aproximácia sa zakladá na porovnaní koeficientov šikmosti a špicatosti a Henshawov odhad vlastných čísel dá potom do rovnosti strednú hodnotu a varianciu rozdelenia d a beta rozdelenia. Pre Beta aproximáciu, ktorá sa zakladá na zhodnosti strednej hodnoty a variancie rozdelenia d a štvornásobku beta rozdelenia, však budú tieto odhady vlastných čísel vždy 0 a 4. Preto bude táto transformácia ekvivalentná a výsledné p-hodnoty budú rovnaké. Nie je teda dôvod

na použitie Henshawovej transformácie $\frac{d-\tau_s}{\tau_g-\tau_s}$ a transformácia $\frac{1}{4}d$ je postačujúca.

V druhej verzii najskôr vypočítame presné vlastné čísla a prvé dva momenty rozdelenia d neporovnávame s beta rozdelením vynásobeným štyrmi, ale dĺžkou intervalu $[\tau_s, \tau_g]$. Týmto postupom sme prišli k horším výsledkom. Pravdepodobnosti chyby prvého druhu boli výrazne nad 5%.

Pravdepodobnosti chyby prvého druhu získané použitím rôznych transformácií vidíme na obrázku 18. Transformácia s presnými vlastnými číslami má výrazne horšie výsledky ako transformácia $\frac{1}{4}d$. Grafy transformácie s odhadnutými vlastnými číslami a transformácie $\frac{1}{4}d$ splývajú.



Obr. 18: Pravdepodobnosť chyby prvého druhu pre Beta aproximáciu.

Durbin a Watson odporúčajú v článku [5] použiť pri testovaní najskôr klasický test a až keď skončí nerozhodne, použiť Beta aproximáciu. Porovnali sme teda Exaktný test, Beta aproximáciu a kombináciu klasického testu a Beta aproximácie. Pravdepodobnosť chyby prvého druhu v prípade kombinácie testov bola pre všetky $n = 20 - 100$ rovnaká ako v prípade Beta aproximácie (tabuľka 17). Keď sme jednotlivé výsledky porovnali s Exaktným testom, prišli sme k záveru, že v prípadoch, keď klasický test rozhodne o výsledku (teda nie je nerozhodný), sú rozhodnutia o zamietaní Exaktného testu, Beta aproximácie a klasického testu totožné. Rozdiely vo výsledkoch Exaktného testu a Beta aproximácie vznikajú iba vtedy, keď klasický test skončil nerozhodne.

2.2.2 Henshawova aproximácia

Henshaw v roku 1966 uviedol v článku [11] aproximáciu presného rozdelenia testovacej štatistiky d tiež pomocou beta rozdelenia, ale parametre tohto rozdelenia určil na základe prvých štyroch momentov.

Na rozdiel od Durbina a Watsona, ktorých predpokladom bolo, že hodnoty testovacej štatistiky d sú z intervalu $[0, 4]$, Henshaw využil fakt, že skutočný rozsah testovacej štatistiky závisí od vlastných čísiel matice

$$K = A - AX(X'X)^{-1}X', \quad (36)$$

kde A je matica definovaná v (8) a X je matica regresorov. Výsledná matica K je pozitívna semidefinitná matica s k nulovými vlastnými hodnotami. Rozsah testovacej štatistiky bude potom interval, ktorého dolná hranica bude najmenšie vlastné číslo a horná najväčšie vlastné číslo z nenulových vlastných čísiel tejto matice. Označme tieto vlastné hodnoty $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-k}$. Potom, za platnosti nulovej hypotézy, sú prvé štyri momenty štatistiky d nasledovné:

$$E(d) = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} \tau_i}{(n-k)}, \quad (37)$$

$$\text{var}(d) = \mu_2 = \frac{2 \sum_{i=1}^{n-k} (\tau_i - E(d))^2}{(n-k)(n-k+2)}, \quad (38)$$

$$\mu_3 = \frac{8 \sum_{i=1}^{n-k} (\tau_i - E(d))^3}{(n-k)(n-k+2)(n-k+4)}, \quad (39)$$

$$\mu_4 = \frac{48 \sum_{i=1}^{n-k} (\tau_i - E(d))^4 + 12 [\sum_{i=1}^{n-k} (\tau_i - E(d))^2]^2}{(n-k)(n-k+2)(n-k+4)(n-k+6)}. \quad (40)$$

Pre rýchlejšie numerické výpočty, ktoré boli potrebné hlavne v dobe, keď bol problém vyrátať vlastné čísla matice veľkých rozmerov, využijeme fakt, že

$$\sum_i \tau_i^m = \text{tr}(K^m) \quad (41)$$

a prepíšeme vzťahy pre prvé štyri momenty do tvaru:

$$E(d) = \frac{\text{tr}(K)}{(n-k)}, \quad (42)$$

$$\mu_2 = 2 \frac{(n-k)\text{tr}(K^2) - (\text{tr}(K))^2}{(n-k)^2(n-k+2)}, \quad (43)$$

$$\mu_3 = 8 \frac{(n-k)^2\text{tr}(K^3) - 3(n-k)\text{tr}(K)\text{tr}(K^2) + 2(\text{tr}(K))^3}{(n-k)^3(n-k+2)(n-k+4)}, \quad (44)$$

$$\mu_4 = 12 \frac{(n-k)^3 [4\text{tr}(K^4) + (\text{tr}(K^2))^2] - 2(n-k)^2 [8\text{tr}(K)\text{tr}(K^3) + \text{tr}(K^2)(\text{tr}(K))^2] + (n-k)^4(n-k+2)(n-k+4)(n-k+6) + (n-k)[24\text{tr}(K^2)(\text{tr}(K))^2 + (\text{tr}(K))^4] - 12(\text{tr}(K))^4}{(n-k)^4(n-k+2)(n-k+4)(n-k+6)}.$$
(45)

Potom koeficienty šikmosti a špicatosti budú

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}},$$
(46)

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}.$$
(47)

Opäť uvažujeme beta rozdelenie náhodnej premennej z intervalu $[0, 1]$ a s hustotou

$$\frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}.$$
(48)

Stredná hodnota beta rozdelenia je

$$E(x) = \frac{p}{p+q},$$
(49)

variancia

$$\text{var}(x) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$$
(50)

a koeficienty šikmosti a špicatosti sú

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{2(q-p)(p+q+1)^{\frac{1}{2}}}{(p+q+2)(pq)^{\frac{1}{2}}},$$
(51)

$$\beta_2 = \frac{6[(p+q+1)(q-p)^2 - pq(p+q+2)]}{pq(p+q+2)(p+q+3)} + 3.$$
(52)

Z rovníc (51) a (52) vyjadríme p a q :

$$p = \frac{1}{2}(W - Z - 1),$$
(53)

$$q = \frac{1}{2}(W + Z - 1),$$
(54)

kde

$$W = \frac{4\beta_2 - 3\beta_1}{3\beta_1 - 2\beta_2 + 6},$$
(55)

$$Z = \frac{\sqrt{\beta_1}(W^2 - 1)}{[16W + \beta_1(W+1)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$
(56)

Koeficienty šikmosti a špicatosti nezávisia od škálovania, takže ich môžeme použiť bez ohľadu na transformáciu testovacej štatistiky d na interval $[0, 1]$.

Najskôr teda vypočítame koeficienty šikmosti a špicatosti $\sqrt{\beta_1}$ a β_2 z našich dát pomocou rovníc (46), (47) a (42) - (45) a dosadíme do rovníc pre p a q .

Rozsah testovacej štatistiky d je $[\tau_s, \tau_g]$, kde τ_s je najmenšia nenulová a τ_g najväčšia vlastná hodnota matice K z (36). Testovaciu štatistiku d potom transformujeme na beta premennú z intervalu $[0, 1]$:

$$x = \frac{d - \tau_s}{\tau_g - \tau_s}. \quad (57)$$

Stredná hodnota premennej x je

$$E(x) = \frac{E(d) - \tau_s}{\tau_g - \tau_s} \quad (58)$$

a variancia

$$var(x) = \frac{var(d)}{(\tau_g - \tau_s)^2}. \quad (59)$$

Vzorce na výpočet τ_s a τ_g potom budú

$$\tau_s = E(d) - E(x) \left[\frac{var(d)}{var(x)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (60)$$

$$\tau_g = \left[\frac{var(d)}{var(x)} \right]^{\frac{1}{2}} + \tau_s, \quad (61)$$

kde za $E(d)$, $var(d)$ a $E(x)$, $var(x)$ dosadíme výsledné hodnoty z (42), (43) a (49), (50).

Odhadnuté vlastné čísla získané týmto výpočtom sa líšia od skutočných vlastných čísiel a dokonca niektoré najmenšie vlastné hodnoty vychádzajú záporné a najväčšie vychádzajú väčšie ako 4. Preto by sa mohlo zdať lepšie používať presné vlastné čísla, ktoré bolo v roku 1966 ťažké vypočítať a ich výpočet je časovo náročný. Tieto dve alternatívy sme porovnali v podkapitole 2.2.2.1. Prekvapivo, odhadom vlastných čísiel pomocou vzorcov (60) a (61) sme dostali presnejšie výsledky.

P-hodnotu potom vypočítame podobne ako v prípade Beta aproximácie (obrázok 16), pričom namiesto transformácie $\frac{1}{4}d$, použijeme transformáciu (57).

Naprogramovanú funkciu pre výpočet testu pozitívnej autokorelácie Henshawovou aproximáciou nájdeme v prílohe A.1.4.

2.2.2.1 Výsledky testu pozitívnej autokorelácie Henshawovou aproximáciou

V tejto časti uvedieme výsledky dvoch verzií Henshawovej aproximácie. Prvá bude presne kopírovať Henshawov postup z roku 1966, kedy najmenšiu a najväčšiu vlastnú hodnotu odhadneme pomocou vzorcov (60) a (61). V druhej verzii budeme počítat presné vlastné hodnoty τ_s a τ_g .

Pravdepodobnosť chyby prvého druhu a časovú náročnosť jedného výpočtu oboch alternatív pre rôzne hodnoty n sme zhrnuli v tabuľke 19. Tabuľka je opäť výsledkom 10 000 simulácií dát bez autokorelácie, rovnakých ako v častiach 2.1.3 a 2.2.1.1.

	Henshaw aproximácia pomocou odhadnutých vlastných čísiel		Henshaw aproximácia pomocou presných vlastných čísiel	
n	P(ch. 1. druhu)	čas	P(ch. 1. druhu)	čas
10	5.67%	0.005699s	14.74%	0.005466s
20	4.90%	0.005985s	9.60%	0.005716s
30	5.13%	0.006457s	5.36%	0.006942s
40	4.83%	0.007218s	6.54%	0.009078s
50	4.76%	0.008803s	3.84%	0.010808s
60	5.13%	0.010963s	5.17%	0.013400s
70	5.27%	0.013306s	6.47%	0.017445s
80	4.71%	0.015654s	4.38%	0.023218s
90	5.27%	0.018889s	5.39%	0.029506s
100	4.98%	0.024358s	5.10%	0.036602s
200	4.89%	0.137039s	4.77%	0.251636s
300	5.15%	0.398954s	5.18%	0.797256s
400	4.88%	0.803427s	4.94%	1.702250s
500	4.76%	1.564157s	4.85%	3.333996s

Tabuľka 19: Pravdepodobnosť chyby 1. druhu a trvanie Henshawovej aproximácie.

Výpočet s použitím presných vlastných čísiel trvá dlhšie ako výpočet s odhadnutými vlastnými číslami a rozdiel sa prehľbuje so zvyšujúcim sa n . Je to spôsobené výpočtom vlastných čísiel stále väčšej matice K .

Pozrime sa na pravdepodobnosť chyby prvého druhu. V prípade odhadnutých vlastných čísiel kolísajú okolo hodnoty 5% (okrem prípadu $n = 10$), čo je znakom dobrej aproximácie. Na rozdiel od toho, pri použití presných vlastných čísiel dochádza k veľkým výkyvom, ktoré sa ustália až okolo $n = 90$. To signalizuje, že táto verzia zrejme nebude veľmi vhodná.

Získané výsledky môžeme porovnať aj s Exaktným testom, ktorého výsledky sme uviedli v tabuľke 15. Verzia s odhadnutými vlastnými číslami má veľmi podobné pravdepodobnosti chyby prvého druhu ako Exaktný test, čo sa však nedá povedať o verzii s presnými vlastnými hodnotami.

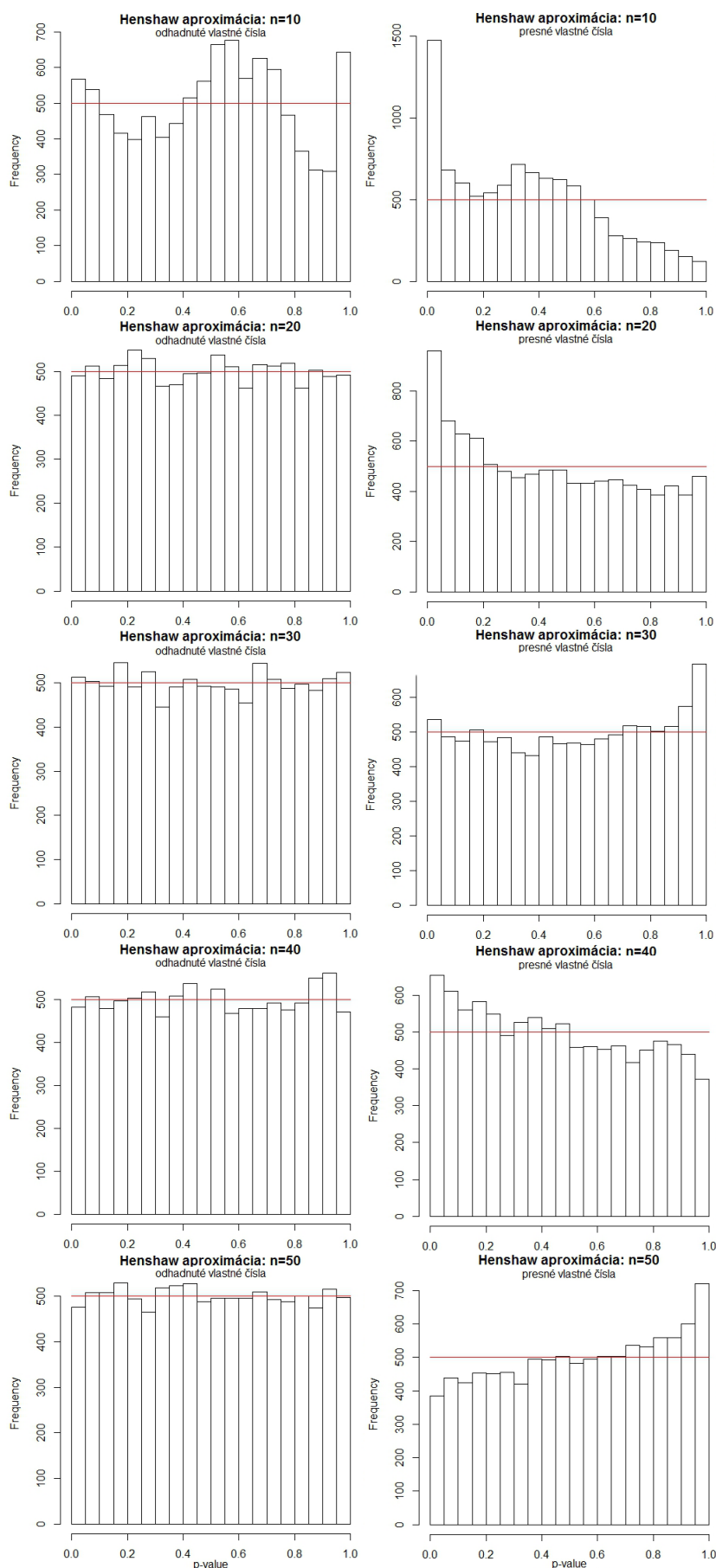
Pre obe verzie vykreslíme histogramy rozloženia p-hodnôt na intervale $[0, 1]$ pre jednotlivé hodnoty n . Porovnanie histogramov vidíme na obrázkoch 19, 20 a 21.

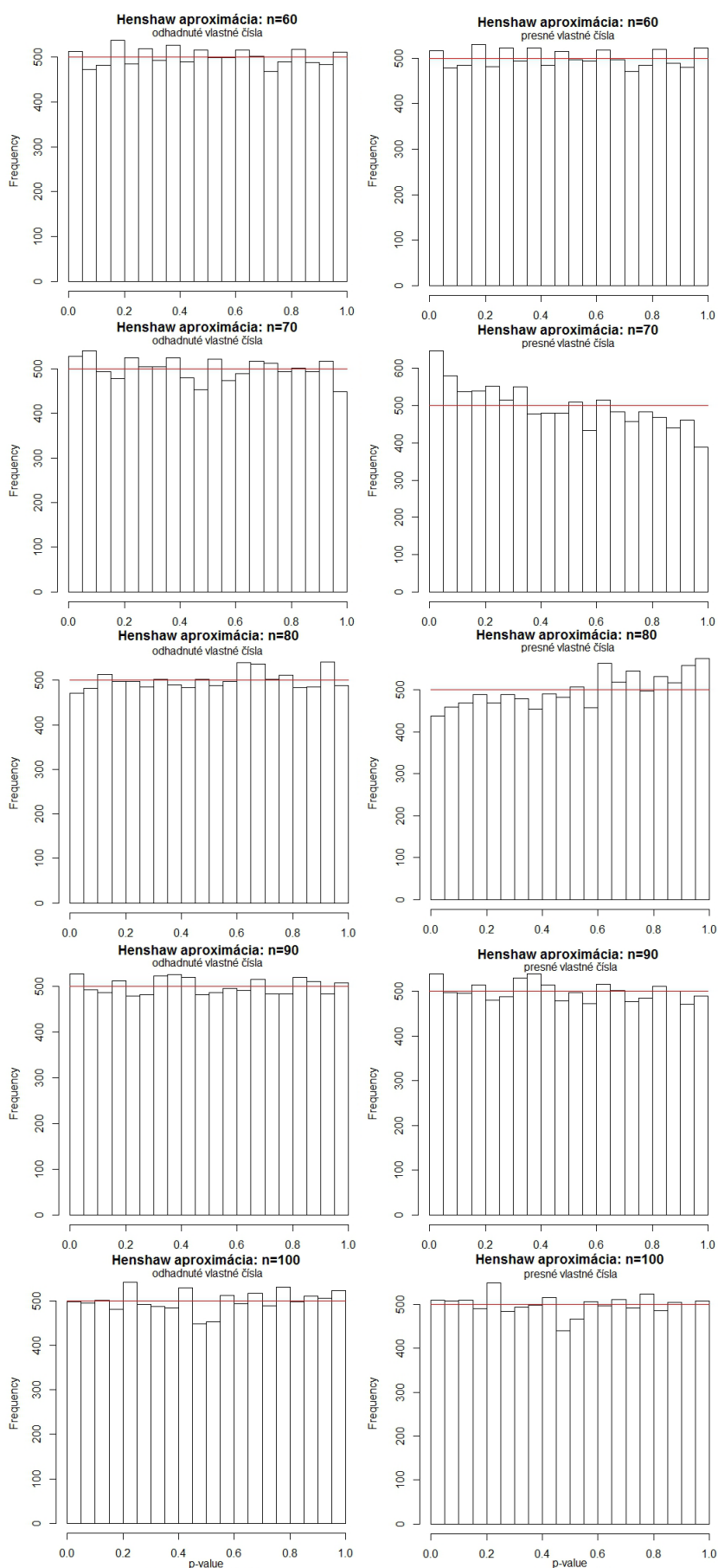
Podľa očakávania, histogramy pre verziu s odhadnutými vlastnými hodnotami majú, okrem prípadu $n = 10$, rozdelenie podobné rovnomernému. Naopak, histogramy pre verziu s presnými vlastnými číslami sú pre n menšie ako 90 „rozkolísané“, a preto sú ich výsledky veľmi nedôveryhodné. Až pre n väčšie ako 90 sa grafy ustália na rovnomernej hladine.

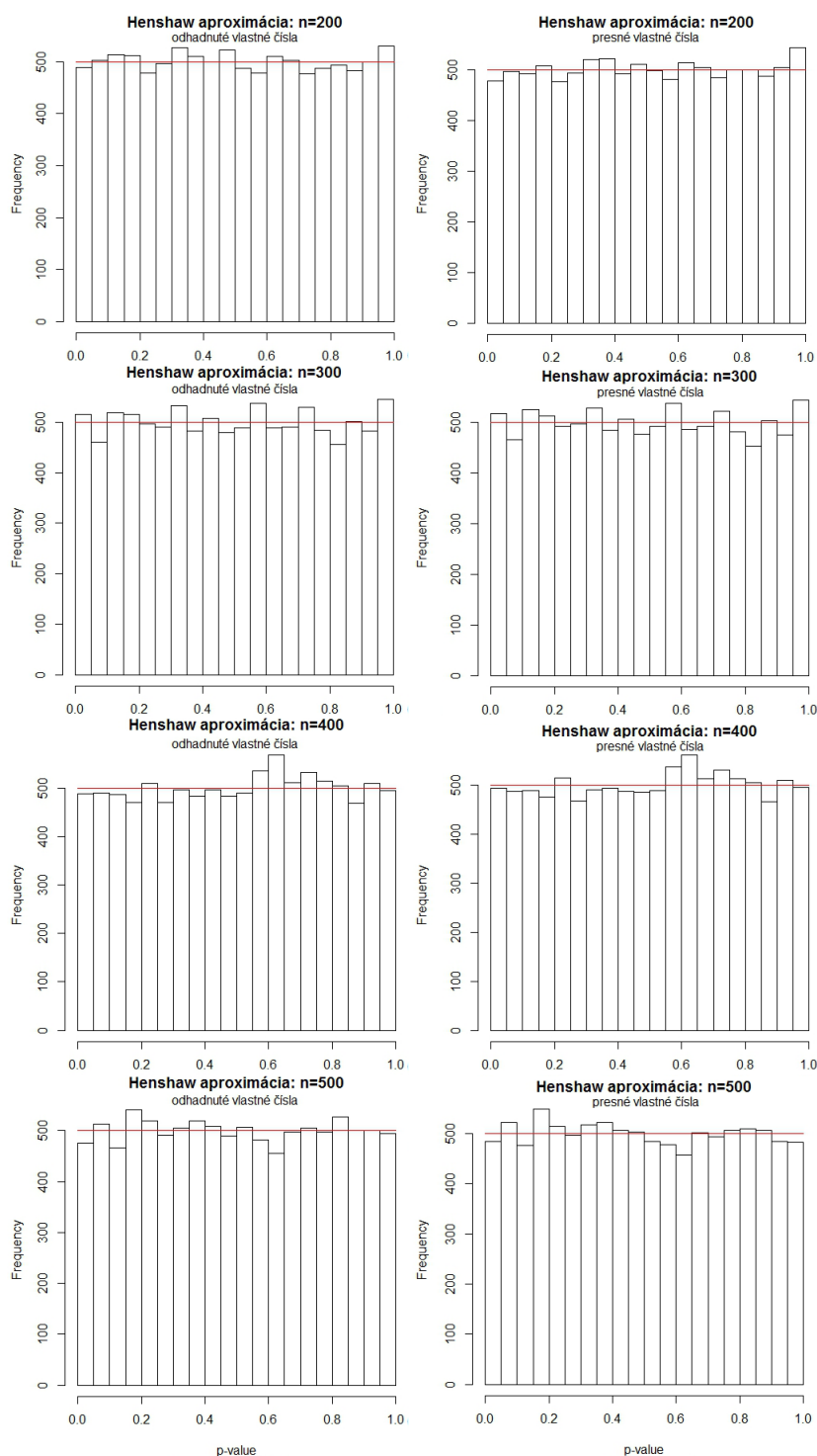
V tabuľke 20 vidíme p-hodnoty a trvanie jednej simulácie oboch verzií pre n rovné 1000, 2000, 3000, 4000 a 5000 s rovnakými nasimulovanými dátami ako pri Exaktnom teste a Beta aproximácii.

	Henshaw aproximácia pomocou odhadnutých vlastných čísiel		Henshaw aproximácia pomocou presných vlastných čísiel	
počet dát	p-hodnota	čas	p-hodnota	čas
$n = 1000$	0.1545348	18.38s	0.1539470	30.67s
$n = 2000$	0.4561747	137.05s ~ 2.3min	0.4560749	228.68s ~ 3.8min
$n = 3000$	0.9128433	473.96s ~ 7.9min	0.9127620	802.30s ~ 13.4min
$n = 4000$	0.5838928	1486.63s ~ 24.8min	0.5840672	1945.32s ~ 32.4min
$n = 5000$	0.8280748	2326.91s ~ 38.8min	0.8281123	4036.85s ~ 67.3min

Tabuľka 20: Výpočty p-hodnôt Henshawovou aproximáciou pre veľké n .

Obr. 19: Rozloženie p-hodnôt vypočítaných 2 verziami Henshawovej aproximácie, $n = 10 - 50$.

Obr. 20: Rozloženie p-hodnôt vypočítaných 2 verziami Henshawovej aproximácie, $n = 60 - 100$.



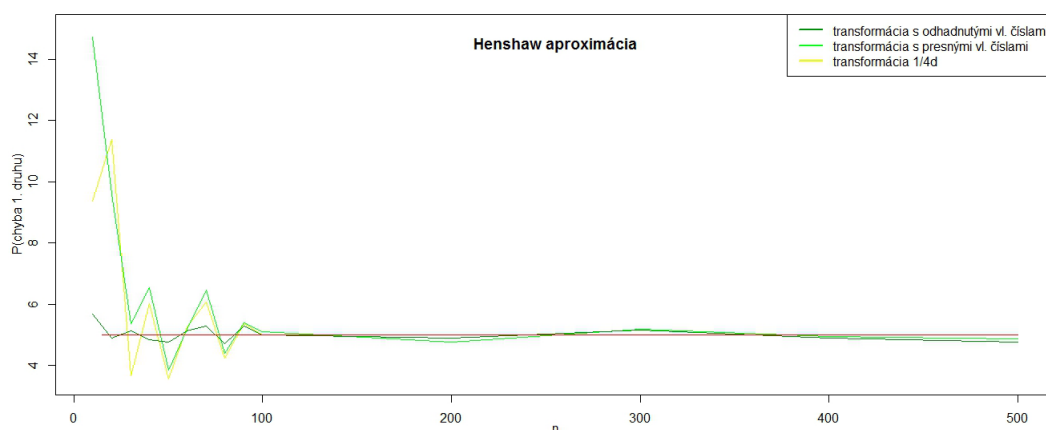
Obr. 21: Rozloženie p-hodnôt vypočítaných 2 verziami Henshawovej aproximácie, $n = 200 - 500$.

Výsledky v tejto tabuľke môžeme porovnať s presnými výsledkami Exaktného testu v tabuľke 16. Vidíme, že p-hodnoty vypočítané verziou Henshawovho testu s odhadnutými vlastnými číslami sa úplne zhodujú s výsledkami Exaktného testu. Vo verzii s presnými vlastnými číslami sú zreteľné odchýlky.

Odporúčame teda na výpočet najväčšieho a najmenšieho vlastného čísla použiť vzorce (60) a (61) aj napriek tomu, že v dnešnej dobe nie je problém vypočítať presné vlastné čísla. Tento krok vedie k menšej časovej náročnosti a väčšej presnosti celého testu.

Mohlo by nám napadnúť použiť v Henshawovej aproximácii rovnaký prechod na interval $[0, 1]$ ako v Beta aproximácii, teda $\frac{1}{4}d$, keďže v Beta aproximácii sa prechodom z $\frac{1}{4}d$ na $\frac{d-\tau_s}{\tau_g-\tau_s}$ nemenila vypočítaná p-hodnota. Tu to však neplatí. Transformáciou $\frac{1}{4}d$ v Henshawovej aproximácii vznikajú „rozkolísané“ histogramy, a teda túto transformáciu nie je vhodné použiť.

Pravdepodobnosť chyby prvého druhu použitím rôznych transformácií vidíme na obrázku 22.



Obr. 22: Pravdepodobnosť chyby prvého druhu pre Henshawovu aproximáciu.

2.3 Porovnanie

V tejto časti porovnáme Exaktný test, Beta aproximáciu a Henshawovu aproximáciu.

2.3.1 Porovnanie testov pozitívnej autokorelácie

Najskôr porovnáme tieto testy z pohľadu pravdepodobnosti chyby prvého druhu a časovej náročnosti jedného výpočtu pre rôzne n . V tabuľke 21 vidíme porovnanie, ktoré je výsledkom 10 000 simulácií dát bez autokorelácie s piatimi regresormi a konštantným členom.

	Exaktný test		Beta aproximácia		Henshaw aproximácia	
n	P(ch. 1. druhu)	čas	P(ch. 1. druhu)	čas	P(ch. 1. druhu)	čas
10	4.92%	0.955336s	-	-	5.67%	0.005699s
20	4.89%	0.050174s	6.38%	0.005524s	4.90%	0.005985s
30	5.14%	0.022993s	5.85%	0.005814s	5.13%	0.006457s
40	4.83%	0.018424s	5.05%	0.006228s	4.83%	0.007218s
50	4.76%	0.022705s	4.78%	0.006480s	4.76%	0.008803s
60	5.13%	0.025759s	5.15%	0.007231s	5.13%	0.010963s
70	5.27%	0.032545s	5.34%	0.007165s	5.27%	0.013306s
80	4.71%	0.036270s	4.75%	0.008031s	4.71%	0.015654s
90	5.27%	0.042930s	5.28%	0.008694s	5.27%	0.018889s
100	4.98%	0.050115s	4.98%	0.009018s	4.98%	0.024358s
200	4.89%	0.191615s	4.89%	0.020620s	4.89%	0.137039s
300	5.15%	0.558469s	5.16%	0.046922s	5.15%	0.398954s
400	4.88%	1.127375s	4.88%	0.085665s	4.88%	0.803427s
500	4.76%	2.062971s	4.76%	0.154024s	4.76%	1.564157s

Tabuľka 21: Porovnanie výsledkov testov pozitívnej autokorelácie.

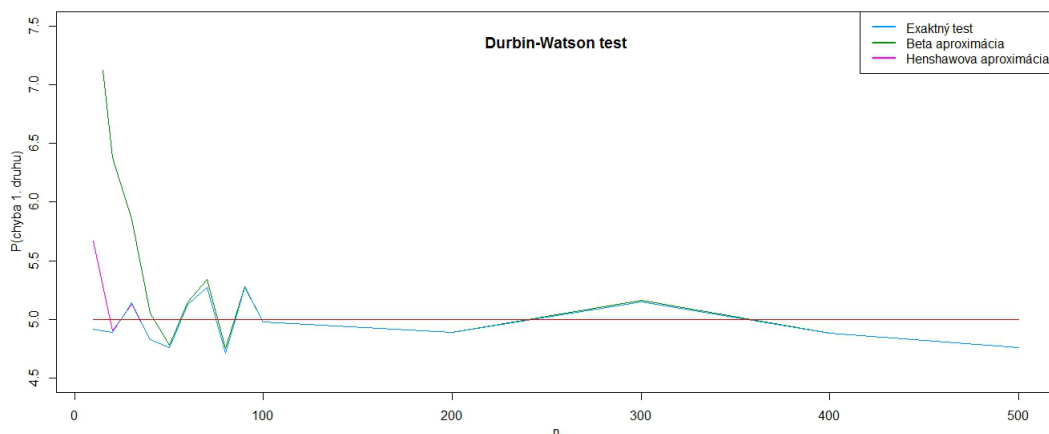
Prvým rozdielom v týchto testoch je, že Exaktný test a Henshawovu aproximáciu je možné použiť aj v prípade $n = 10$ s počtom regresorov $k' = 5$, ktorý Beta aproximáciou riešiť nemožno. Pri $n = 15$ už síce Beta aproximácia funguje, ale výsledky sú neuspokojivé. To potvrdzuje obavy Durbina a Watsona o správaní sa metódy pre nízky počet stupňov voľnosti, teda pre nízke $n - k$.

So stúpajúcim n však narastá aj presnosť Beta aproximácie. Pre n väčšie ako 40 už rozdiel v pravdepodobnosti chyby prvého druhu pre Beta aproximáciu a Exaktný test nie je viac ako 0.07% a pre n väčšie ako 100 je dokonca pravdepodobnosť chyby prvého druhu pre Beta aproximáciu takmer rovnaká ako pre Exaktný test.

Henshawova aproximácia dosiahne pravdepodobnosť chyby prvého druhu totožnú s Exaktným testom oveľa rýchlejšie. Okrem prípadu $n = 10$ sa od Exaktného testu nelíši o viac ako stotinu percenta.

Časová náročnosť Beta aproximácie je najlepšia spomedzi porovnávaných testov. Pri malom n je trvanie aproximácií porovnateľné, výpočet Exaktného testu trvá oveľa dlhšie. So zvyšujúcim sa n sa zväčšujú aj rozdiely v časovej náročnosti. Pre $n = 100$ je trvanie výpočtu Beta aproximácie 5.6-krát kratšie ako trvanie Exaktného testu a 2.7-krát kratšie ako pri Henshawovej aproximácii. Pre $n = 500$ už trvá Beta aproximácia iba trinástinu trvania Exaktného testu a desatinu trvania Henshawovej aproximácie. Ako rastie n , tak sa časová náročnosť Henshawovej aproximácie približuje k trvaniu Exaktného testu.

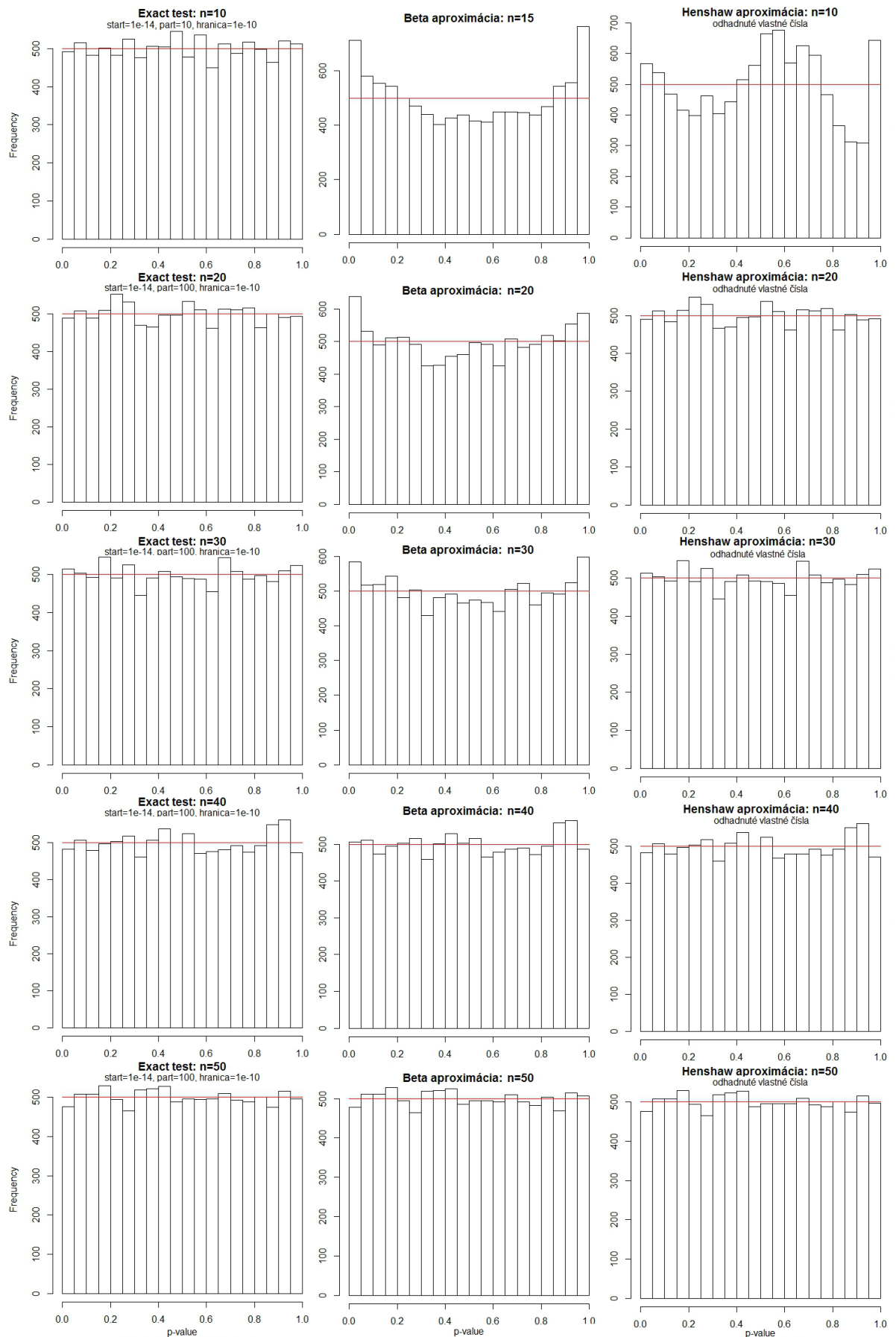
Grafické znázornenie vývoja pravdepodobnosti chyby prvého druhu v závislosti od počtu dát n jednotlivých testov vidíme na obrázku 23.

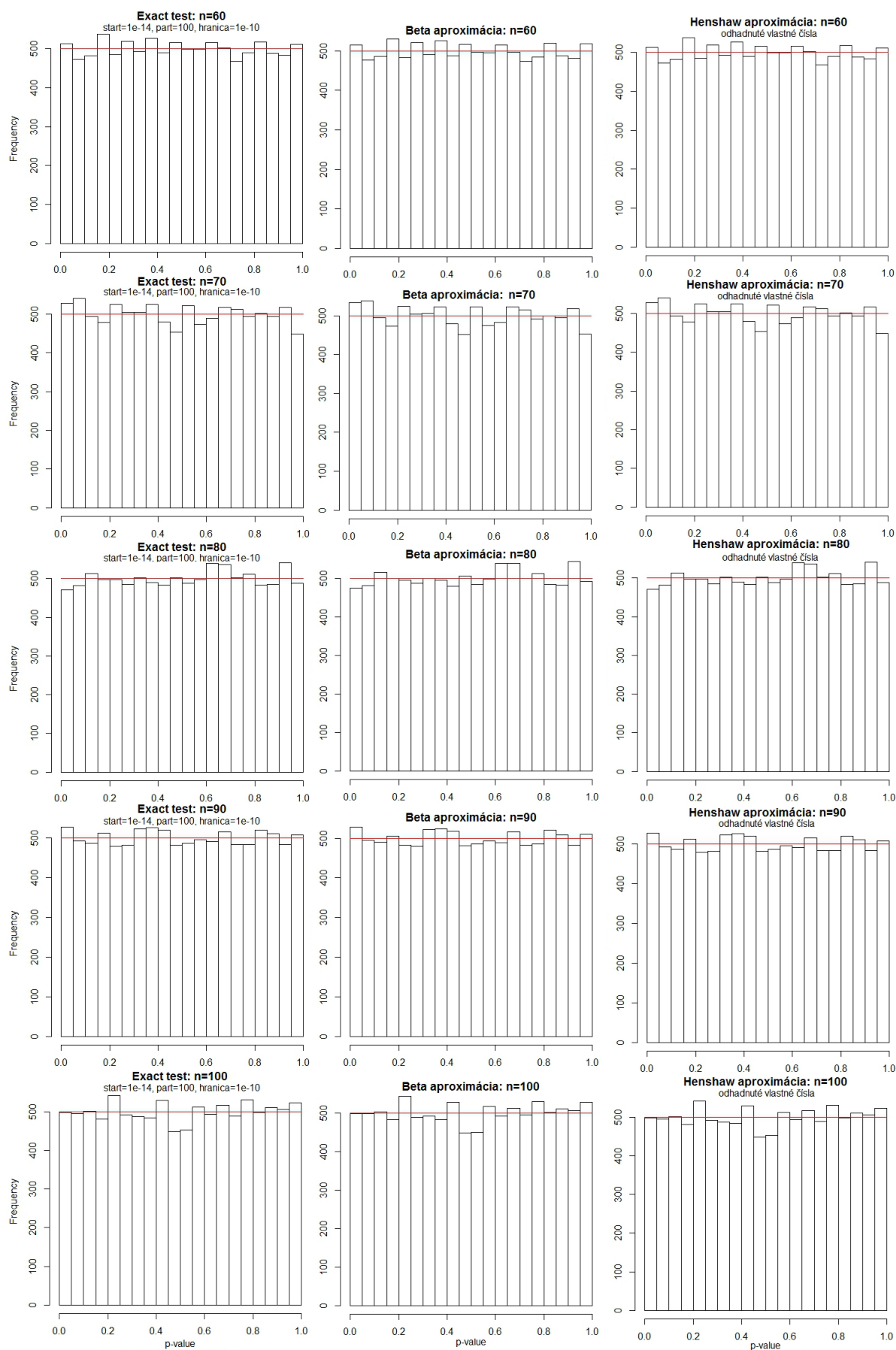


Obr. 23: Pravdepodobnosť chyby prvého druhu testov pozitívnej autokorelácie.

Ďalším ukazovateľom správnosti použitého testu je rozloženie vypočítaných p-hodnôt na intervale $[0, 1]$, ktoré by v ideálnom prípade malo byť rovnomerné. Porovnanie histogramov pre jednotlivé testy vidíme na obrázkoch 24, 25 a 26.

Všimnime si, že pre počet dát n rovný 20 a viac sú histogramy Henshawovej aproximácie veľmi podobné histogramom Exaktného testu. Histogramy Beta aproximácie sa od histogramov Exaktného testu pre malé n výrazne líšia a približujú sa k nim až pre $n = 40$. Rovnosť histogramov pre Beta aproximáciu a Exaktný test nastane až pre n väčšie ako 300.

Obr. 24: Porovnanie rozloženia p-hodnôt, $n = 10 - 50$.

Obr. 25: Porovnanie rozloženia p-hodnôt, $n = 60 - 100$.



Obr. 26: Porovnanie rozloženia p-hodnôt, $n = 200 - 500$.

Aby sme mohli lepšie určiť presnosť aproximácií, porovnáme priamo jednotlivé p-hodnoty vypočítané pomocou aproximácií s p-hodnotami vypočítanými Exaktným testom pri rovnakých nasimulovaných dátach. V tabuľke 22 vidíme minimálnu, maximálnu a priemernú odchýlku p-hodnoty vypočítanej aproximáciou od p-hodnoty vypočítanej Exaktným testom.

	Beta aproximácia			Henshaw aproximácia		
n	min	max	mean	min	max	mean
15/10	$3.5 \cdot 10^{-6}$	0.0355412	0.0226709	$2 \cdot 10^{-6}$	0.0407761	0.0172850
20	$3.3 \cdot 10^{-6}$	0.0179547	0.0118206	$1 \cdot 10^{-7}$	0.0005088	0.0002571
30	$2 \cdot 10^{-7}$	0.0097974	0.0064649	0	$7.47 \cdot 10^{-5}$	$3.58 \cdot 10^{-5}$
40	$3 \cdot 10^{-7}$	0.0022935	0.0014846	0	$7.17 \cdot 10^{-5}$	$3.85 \cdot 10^{-5}$
50	0	0.0010765	0.0006808	0	$4.65 \cdot 10^{-5}$	$2.48 \cdot 10^{-5}$
60	$1 \cdot 10^{-7}$	0.0006877	0.0004458	0	$1.51 \cdot 10^{-5}$	$7.88 \cdot 10^{-6}$
70	$1 \cdot 10^{-7}$	0.0005510	0.0003596	0	$1.58 \cdot 10^{-5}$	$8.18 \cdot 10^{-6}$
80	$3 \cdot 10^{-7}$	0.0004228	0.0002760	0	$5.60 \cdot 10^{-6}$	$2.92 \cdot 10^{-6}$
90	$4.6 \cdot 10^{-8}$	0.0003362	0.0002185	0	$1.70 \cdot 10^{-6}$	$8.43 \cdot 10^{-7}$
100	0	0.0003301	0.0002184	0	$2.80 \cdot 10^{-6}$	$1.44 \cdot 10^{-6}$
200	0	$6.75 \cdot 10^{-5}$	$4.39 \cdot 10^{-5}$	0	$1 \cdot 10^{-6}$	$4.88 \cdot 10^{-7}$
300	0	$1.94 \cdot 10^{-5}$	$1.26 \cdot 10^{-5}$	0	$2 \cdot 10^{-7}$	$5.70 \cdot 10^{-8}$
400	0	$1.62 \cdot 10^{-5}$	$1.06 \cdot 10^{-5}$	0	$1 \cdot 10^{-7}$	$1.99 \cdot 10^{-8}$
500	0	$7.40 \cdot 10^{-6}$	$4.07 \cdot 10^{-6}$	0	$1 \cdot 10^{-7}$	$3.26 \cdot 10^{-8}$

Tabuľka 22: Rozdiely p-hodnôt vypočítaných aproximáciami a Exaktným testom.

Všimnime si, že pre všetky n majú p-hodnoty vypočítané Henshawovou aproximáciou menšie odchýlky od p-hodnôt vypočítaných Exaktným testom ako p-hodnoty vypočítané Beta aproximáciou. Tým sme potvrdili predpoklad, že Henshawova aproximácia je presnejšia ako Beta aproximácia.

Výsledky porovnania pre malé n nie sú veľmi uspokojivé, pretože p-hodnota vypočítaná Beta aproximáciou sa líši od p-hodnoty vypočítanej Exaktným testom už na druhom desatinnom mieste, čo môže ľahko zmeniť rozhodnutie, či zamietnuť nulovú hypotézu alebo nie. Rovnako pre Henshawovu aproximáciu, v prípade $n = 10$ dochádza k podstatným odchýlkam. Pozitívom je, že so zvyšujúcim sa n sa odchýlky znižujú. Pre n väčšie ako 40 je odchýlka Beta aproximácie menšia ako 10^{-3} . Odchýlka Henshawovej aproximácie je už pri $n = 20$ menšia ako 10^{-3} .

Pre $n = 500$ stále môžeme použiť Exaktný test, ktorý je presný a jeho jeden výpočet trvá pár sekúnd. Uplatnenie aproximácií je až pre také n , pre ktoré trvá Exaktný výpočet minúty. Pozrime sa teda na porovnanie výsledných p-hodnôt pri jedinej simulácii a časovú náročnosť tohto výpočtu pre n rovné 1000, 2000, 3000, 4000, 5000 - tabuľka 23.

n	Exaktný test		Beta aproximácia		Henshaw aproximácia	
	p-hodnota	čas	p-hodnota	čas	p-hodnota	čas
1000	0.1545348	15.85s	0.1545337	1.94s	0.1545348	18.38s
2000	0.4561747	107.89s	0.4561746	12.20s	0.4561747	137.05s
3000	0.9128433	379.10s	0.9128436	42.51s	0.9128433	473.96s
4000	0.5838928	864.98s	0.5838928	101.62s	0.5838928	1486.63s
5000	0.8280748	1665.89s	0.8280748	200.12s	0.8280748	2326.91s

Tabuľka 23: Porovnanie p-hodnôt pre veľké n .

Časová náročnosť Beta aproximácie pre veľké n je až osemkrát menšia ako časová náročnosť Exaktného testu a desaťkrát menšia oproti Henshawovej aproximácii. Trvanie Henshawovej aproximácie je dokonca väčšie ako trvanie Exaktného testu.

P-hodnoty vypočítané Henshawovou aproximáciou sú totožné s p-hodnotami vypočítanými Exaktným testom. Výsledky Beta aproximácie sa líšia nanajvýš na šiestom desatinnom mieste.

Beta aproximácia funguje aj pre $n = 10000$, avšak časová náročnosť je v tomto prípade oveľa väčšia. Výpočet jednej simulácie trval až 1527,70 sekúnd, čo je 25 minút. Pri takejto hodnote n by jeden výpočet Exaktným testom trval hodiny.

Pre n menšie ako 1000 odporúčame použitie Exaktného testu. Pre väčšie n rozhodnutie závisí od toho, aký presný výsledok potrebujeme. Pre n väčšie ako 5000 je už Exaktný test časovo veľmi náročný, preto je lepšie použiť Beta aproximáciu. Trvanie výpočtu sa síce javí byť veľmi dlhé, avšak pre bežného používateľa, ktorý potrebuje test spustiť iba jedenkrát, to nemusí byť až taká prekážka.

2.3.2 Porovnanie obojstranných testov

Rovnaké porovnanie urobíme aj pre obojstranné testy. Na dáta nasimulované pre porovnanie jednostranných testov aplikujeme obojstranné testy a porovnáme výsledky. Pravdepodobnosť chyby prvého druhu a časovú náročnosť jedného výpočtu obojstranného testu pre rôzne n vidíme v tabuľke 24.

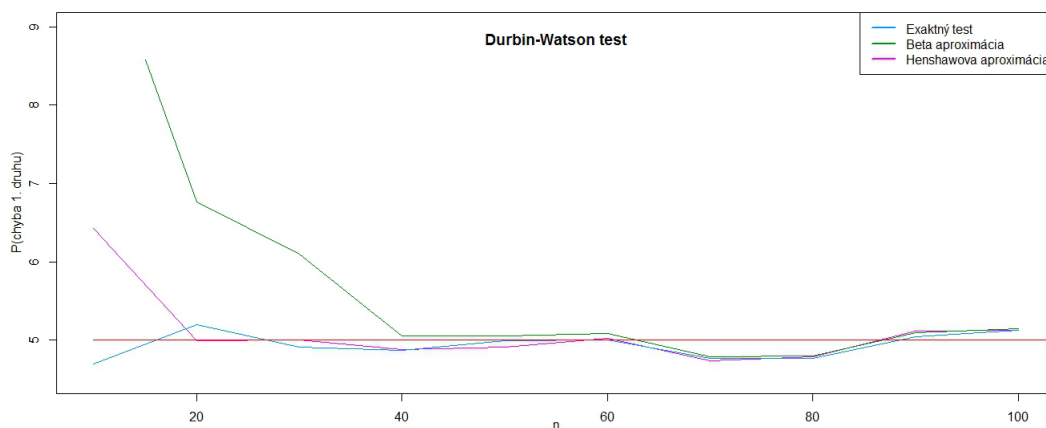
n	Exaktný test		Beta aproximácia		Henshaw aproximácia	
	P(ch. 1. druhu)	čas	P(ch. 1. druhu)	čas	P(ch. 1. druhu)	čas
10	4.69%	1.825959s	-	-	6.43%	0.005889s
20	5.20%	0.078874s	6.76%	0.005663s	4.99%	0.008224s
30	4.91%	0.057577s	6.10%	0.006045s	5.00%	0.008316s
40	4.87%	0.039134s	5.05%	0.006226s	4.88%	0.008712s
50	4.99%	0.041924s	5.05%	0.007177s	4.91%	0.009906s
60	5.00%	0.049202s	5.08%	0.007755s	5.02%	0.010660s
70	4.77%	0.059564s	4.79%	0.006792s	4.74%	0.012731s
80	4.77%	0.077539s	4.80%	0.007634s	4.79%	0.015672s
90	5.04%	0.102569s	5.09%	0.008511s	5.11%	0.019220s
100	5.13%	0.116242s	5.15%	0.009136s	5.13%	0.031586s

Tabuľka 24: Porovnanie výsledkov obojstranných testov.

Rozdiely v pravdepodobnosti chyby prvého druhu aproximácií oproti Exaktnému testu pri obojstrannom teste sú väčšie ako pri jednostrannom. Pri Beta aproximácii sa pravdepodobnosť chyby prvého druhu ustáli na 5-percentnej hladine pri $n = 40$. Pri Henshawovej aproximácii sa aj pri obojstrannom teste pohybuje okolo 5%, okrem prípadu $n = 10$.

Exaktný test trvá výrazne viac ako aproximácie, pretože zmenou z jednostranného testu na obojstranný sa časová náročnosť Exaktného testu zdvojnásobila kvôli nutnosti počítania dvoch integrálov namiesto jedného. V prípade obojstranného testu počítaného aproximáciami nedochádza k navýšeniu výpočtovej náročnosti a rozdiely v časoch oproti jednostrannému testu sú dané iba výkyvmi v práci procesora.

Grafické znázornenie pravdepodobnosti chyby prvého druhu jednotlivých obojstranných testov vidíme na obrázku 27.



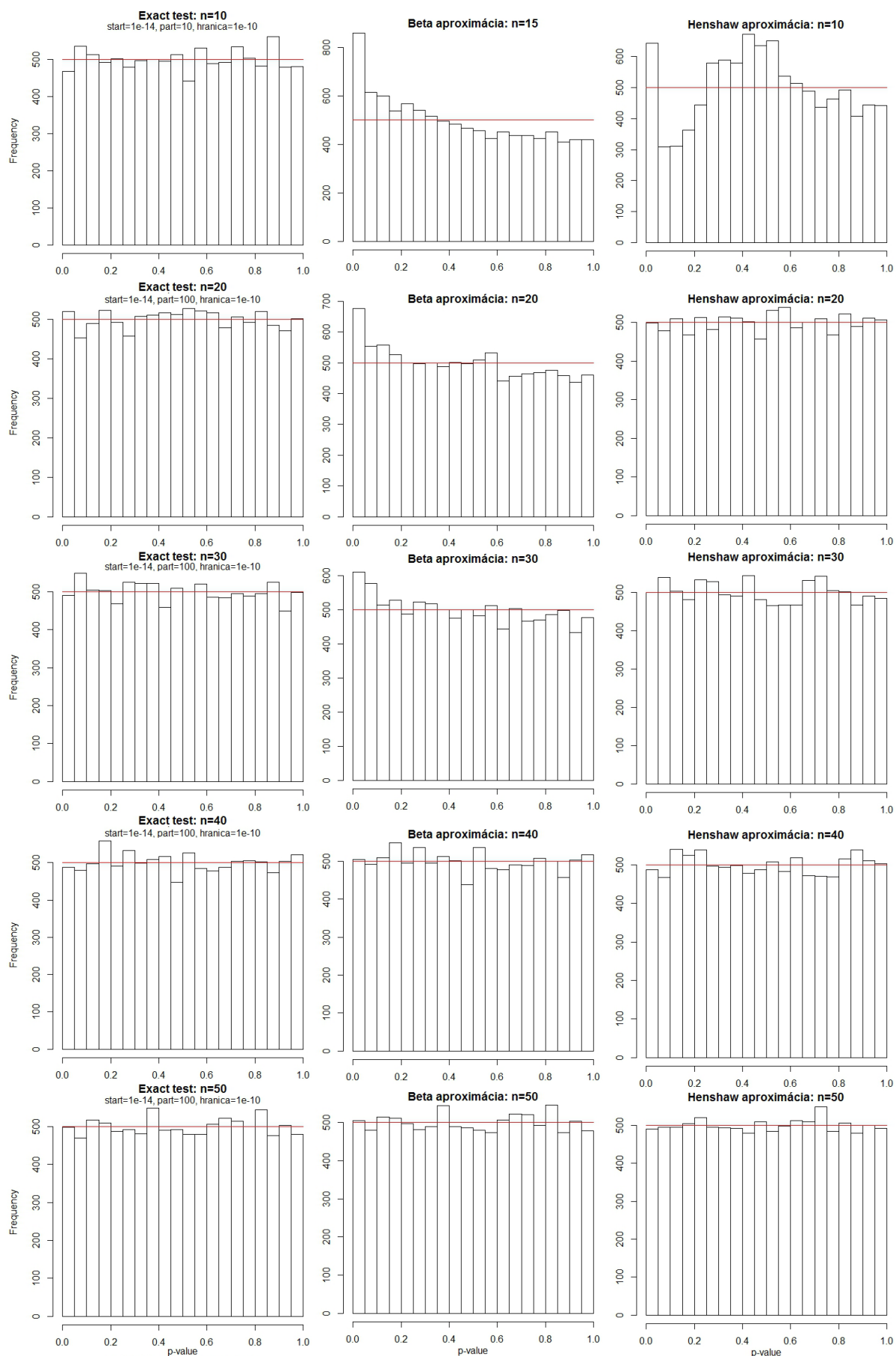
Obr. 27: Pravdepodobnosť chyby prvého druhu obojstranných testov.

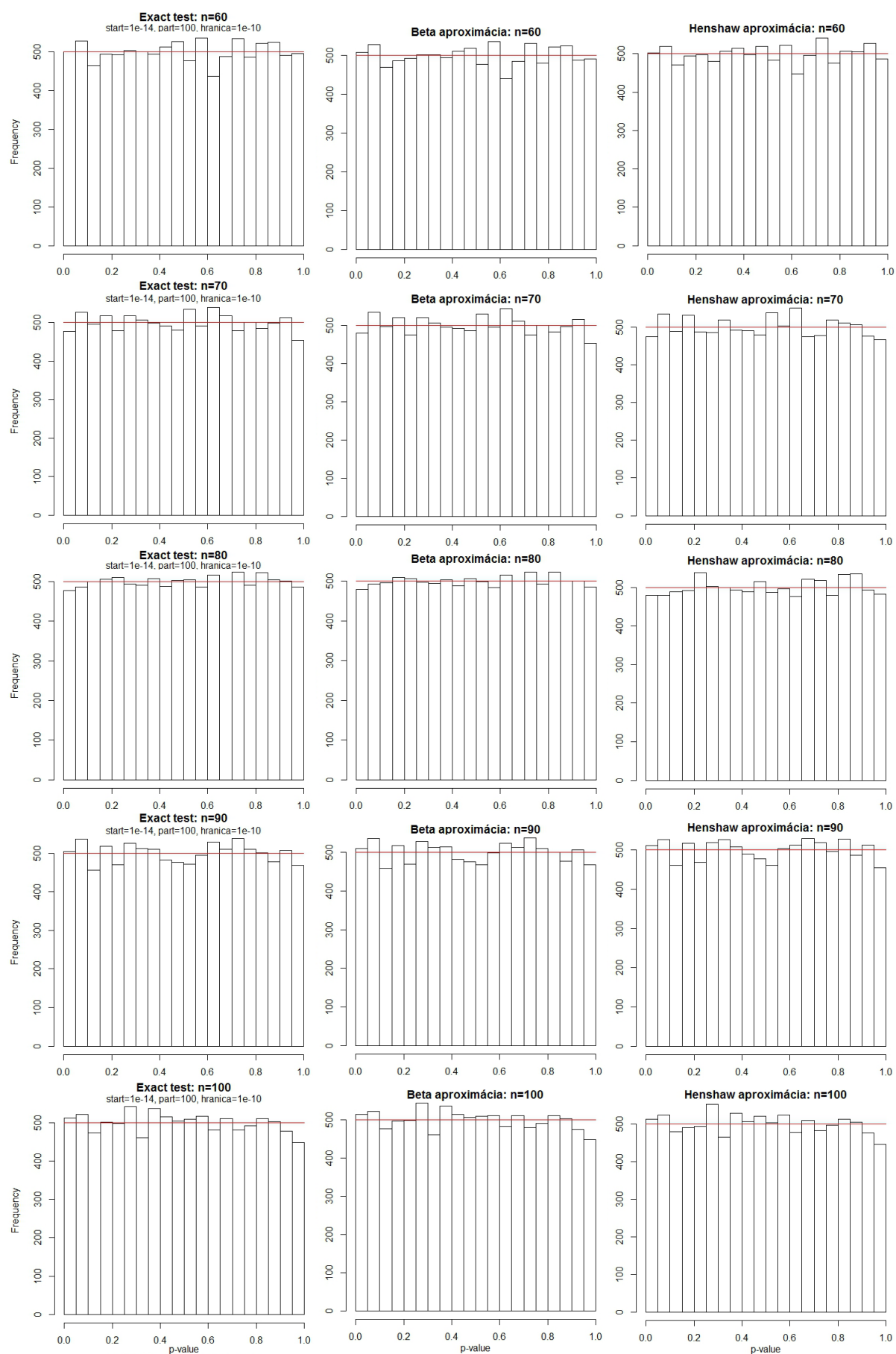
Porovnanie histogramov p-hodnôt vypočítaných jednotlivými testami je na obrázkoch 28 a 29.

Rozloženie p-hodnôt vypočítaných Beta aproximáciou sa ustáli na približne rovnomernej úrovni pri $n = 40$ a rozloženie p-hodnôt vypočítaných Henshawovou aproximáciou pri $n = 20$. Avšak histogramy aproximácií nekopírujú tvar histogramu pre Exaktný test úplne, ako tomu bolo pri jednostranných testoch. Pri Beta aproximácii začnú nadobúdať podobný tvar pri $n = 40$, ale pri Henshawovej aproximácii sú viditeľné odchýlky aj pre oveľa väčšie n .

V tabuľke 25 je uvedená minimálna, maximálna a priemerná odchýlka p-hodnôt vypočítaných aproximáciami od p-hodnôt vypočítaných Exaktným testom.

Na týchto výsledkoch je prekvapivé to, že aj napriek tomu, že Henshawova aproximácia dosahovala podobnú pravdepodobnosť chyby prvého druhu ako Exaktný test, jej odchýlky p-hodnôt sú veľmi veľké, dokonca väčšie ako odchýlky Beta aproximácie. Odchýlky p-hodnôt vypočítaných Beta aproximáciou sa pre n väčšie ako 40 nelíšia od p-hodnôt vypočítaných Exaktným testom o viac ako 10^{-2} a s rastúcim n odchýlky klesajú. Pre Henshawovu aproximáciu však odchýlky klesnú pod 10^{-2} až pre n väčšie ako 90. Pri testovaní obojstranným testom teda použitie Henshawovej aproximácie neodporúčame.

Obr. 28: Porovnanie rozloženia p-hodnôt, obojstranné testy, $n = 10 - 50$.

Obr. 29: Porovnanie rozloženia p-hodnôt, obojstranné testy, $n = 60 - 100$.

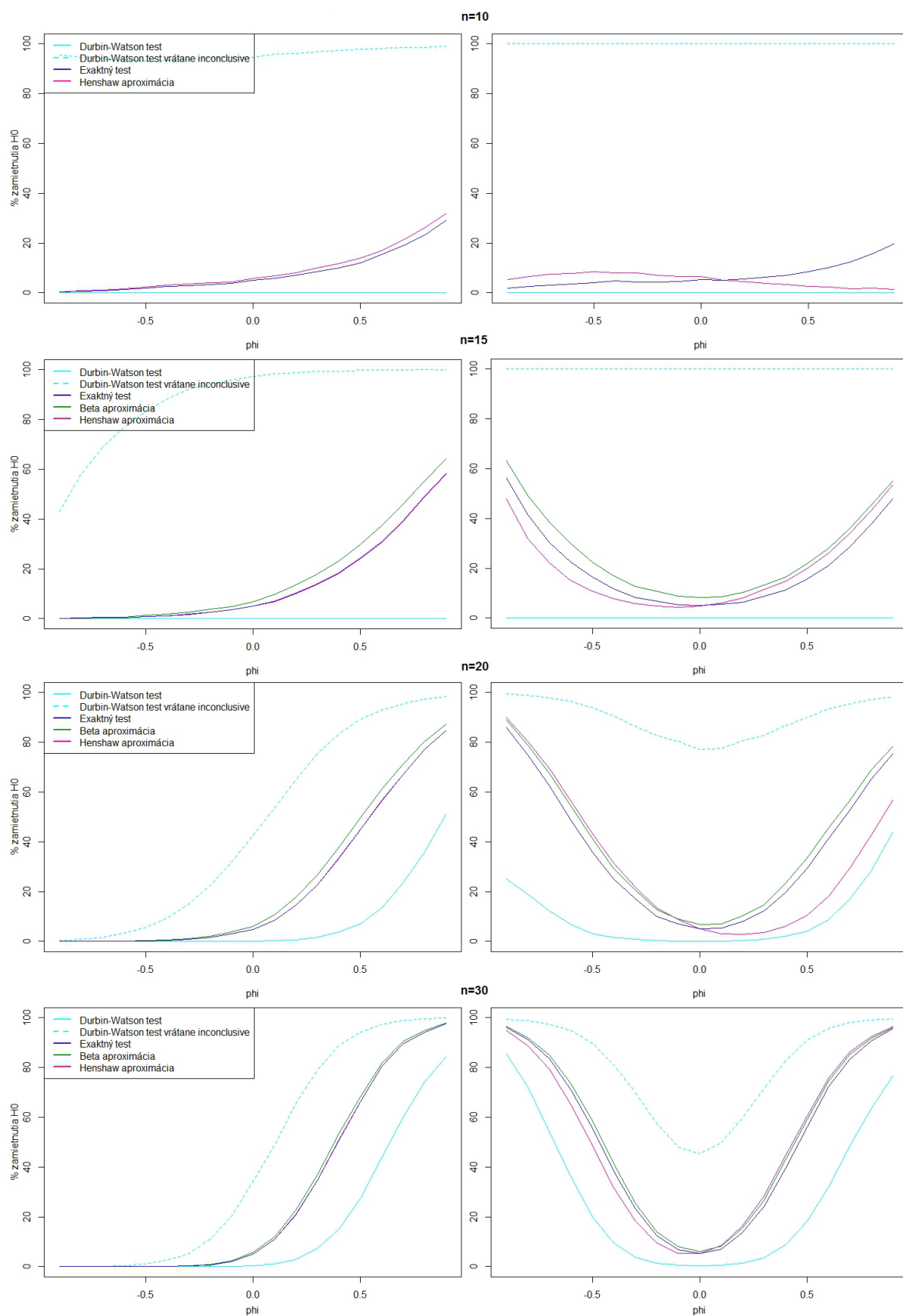
n	Beta aproximácia			Henshaw aproximácia		
	min	max	mean	min	max	mean
15/10	$2.8 \cdot 10^{-6}$	0.0682724	0.0449846	0.0002139	0.5695794	0.2065029
20	$8 \cdot 10^{-7}$	0.0356895	0.0235567	$8.42 \cdot 10^{-5}$	0.3138514	0.1811358
30	$4.5 \cdot 10^{-6}$	0.0195260	0.0129063	$1.83 \cdot 10^{-5}$	0.1126808	0.0763718
40	$7 \cdot 10^{-7}$	0.0040979	0.0027004	$8.02 \cdot 10^{-6}$	0.1030913	0.0710660
50	$1.4 \cdot 10^{-6}$	0.0016496	0.0010882	0.0001351	0.1094825	0.0747522
60	0	0.0013412	0.0008799	$8.47 \cdot 10^{-6}$	0.0155989	0.0110077
70	$1 \cdot 10^{-7}$	0.0010494	0.0006942	$1.78 \cdot 10^{-6}$	0.0419736	0.0292441
80	$2 \cdot 10^{-7}$	0.0008129	0.0005349	$1.31 \cdot 10^{-5}$	0.0386078	0.0270197
90	0	0.0006575	0.0004323	$5.45 \cdot 10^{-6}$	0.0152232	0.0107468
100	$1 \cdot 10^{-7}$	0.0006581	0.0004367	$3.35 \cdot 10^{-6}$	0.0045456	0.0031967

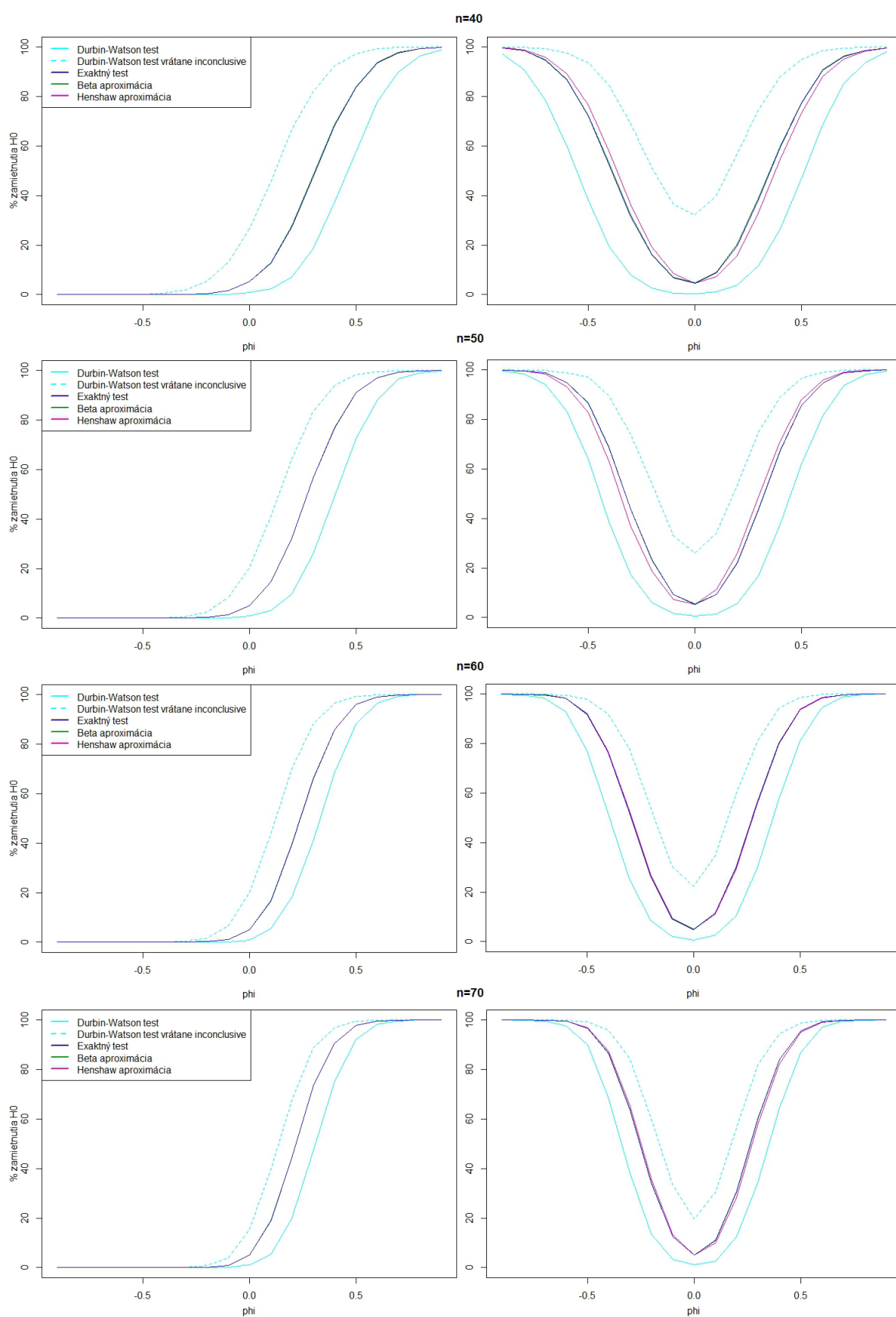
Tabuľka 25: Rozdiely p-hodnôt vypočítaných aproximáciami a Exaktným testom.

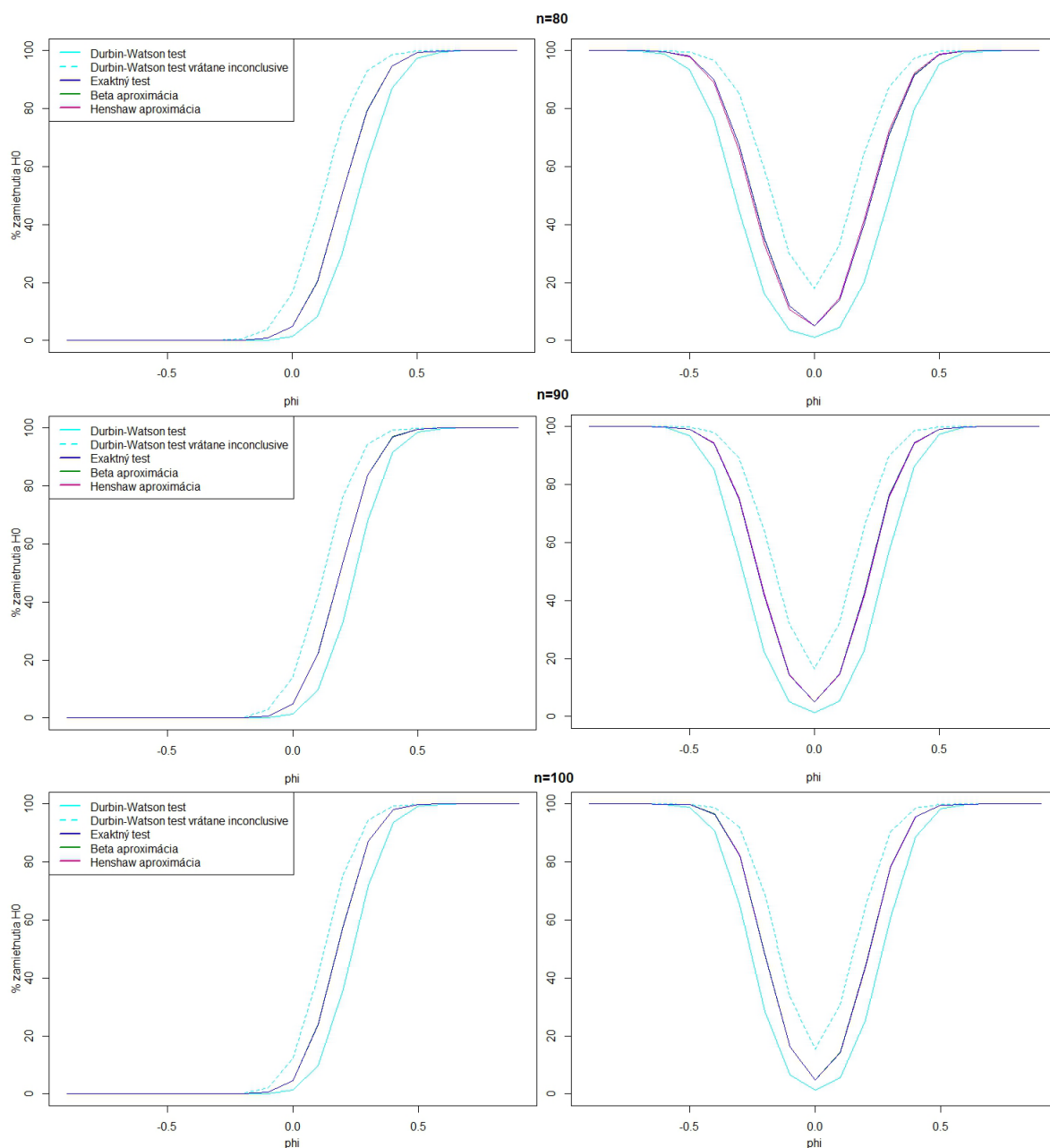
2.3.3 Porovnanie sily testov

V tejto časti porovnáme silu jednotlivých testov. Teda nasimulujeme dáta s autokorelovanými chybami ε a budeme sledovať, v koľkých percentách prípadov testy zamietnu nulovú hypotézu. Koeficient φ príslušného $AR(1)$ modelu (2) postupne nadobúdal hodnoty -0.9, -0.8, -0.7, -0.6, -0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 a 0.9. Simuláciu autokorelácie sme najskôr „zahriali“, teda ε_0 sme zvolili nulový a nasimulovali sme niekoľko hodnôt ε , ktoré sme potom usekli a zostal nám iba vektor chýb dĺžky n so správnym rozdelením. Každý bod výstupu je opäť výsledkom 10 000 simulácií. Výsledné grafy vidíme na obrázkoch 30, 31 a 32.

V grafoch pre jednotlivé n sme pre porovnanie zobrazili výsledky všetkých štyroch testov - klasického Durbin-Watsonovho testu, Exaktného testu, Beta aproximácie a Henshawovej aproximácie. Pri klasickom teste sme vykreslili dve krivky. Plnou čiarou je znázornené percento zamietnutia H_0 a prerušovanou čiarou je znázornené zamietanie použitím konzervatívneho prístupu, teda H_0 zamietame aj v prípade, že test skončil nerozhodne. Výsledné obrázky sú zoradené v dvoch stĺpcoch. V ľavom stĺpci sú grafy pre testovanie pozitívnej autokorelácie a v pravom stĺpci je obojstranný test.

Obr. 30: Sila testov pre $n = 10 - 30$.

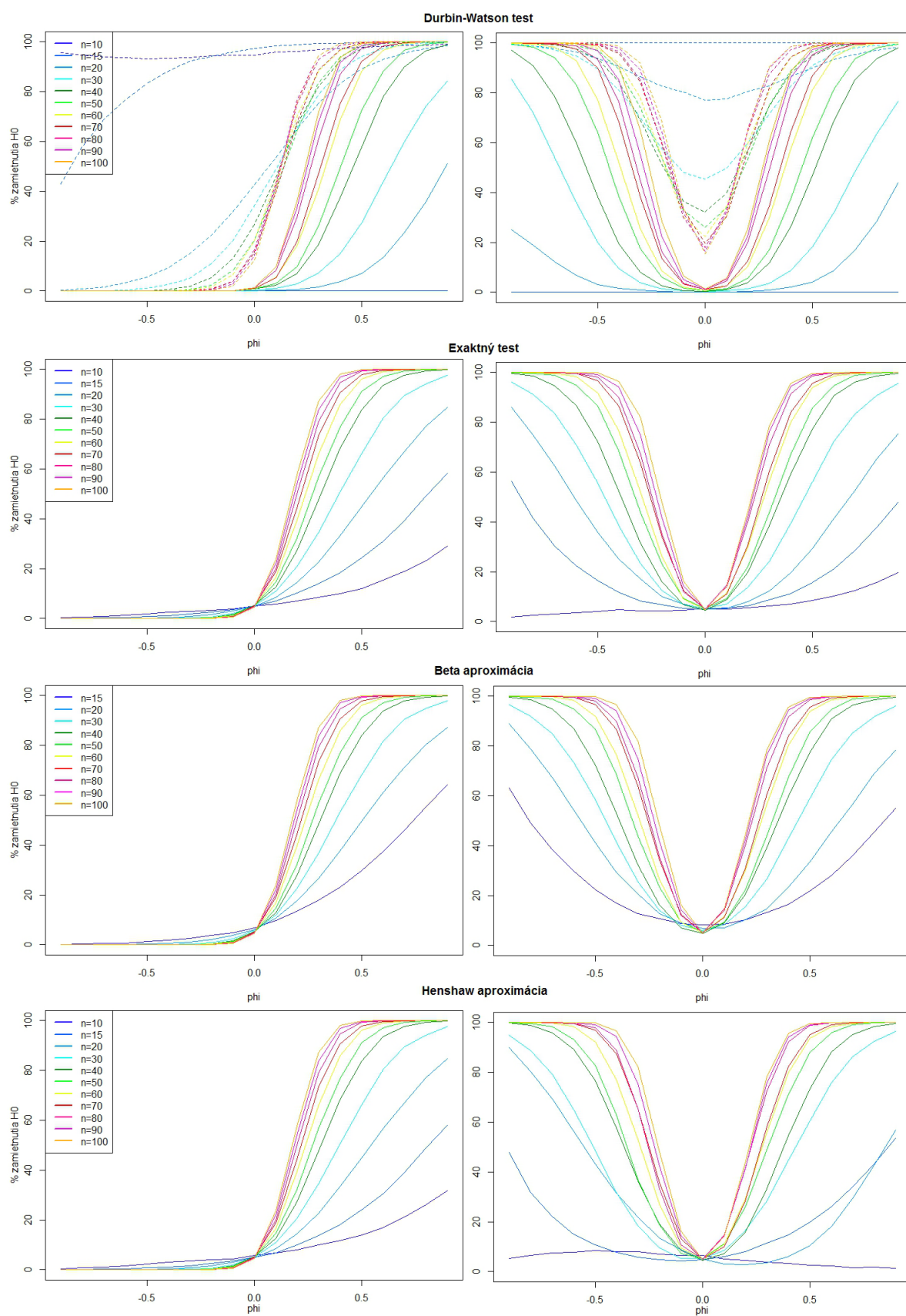
Obr. 31: Sila testov pre $n = 40 - 70$.



Obr. 32: Sila testov pre $n = 80 - 100$.

Pri malom n majú všetky testy veľmi malú silu, ale so stúpajúcim n sa aj sila testov zvyšuje a krivky jednotlivých testov sa k sebe približujú, až úplne splynú, okrem klasického testu, ktorého krivky lemujú krivky ostatných testov po oboch stranách. Pri jednostrannom teste sily jednotlivých testov splynú pri menšom n než pri obojstrannom teste. Vidíme, že s rastúcim n sa znižuje interval nerozhodnosti klasického testu.

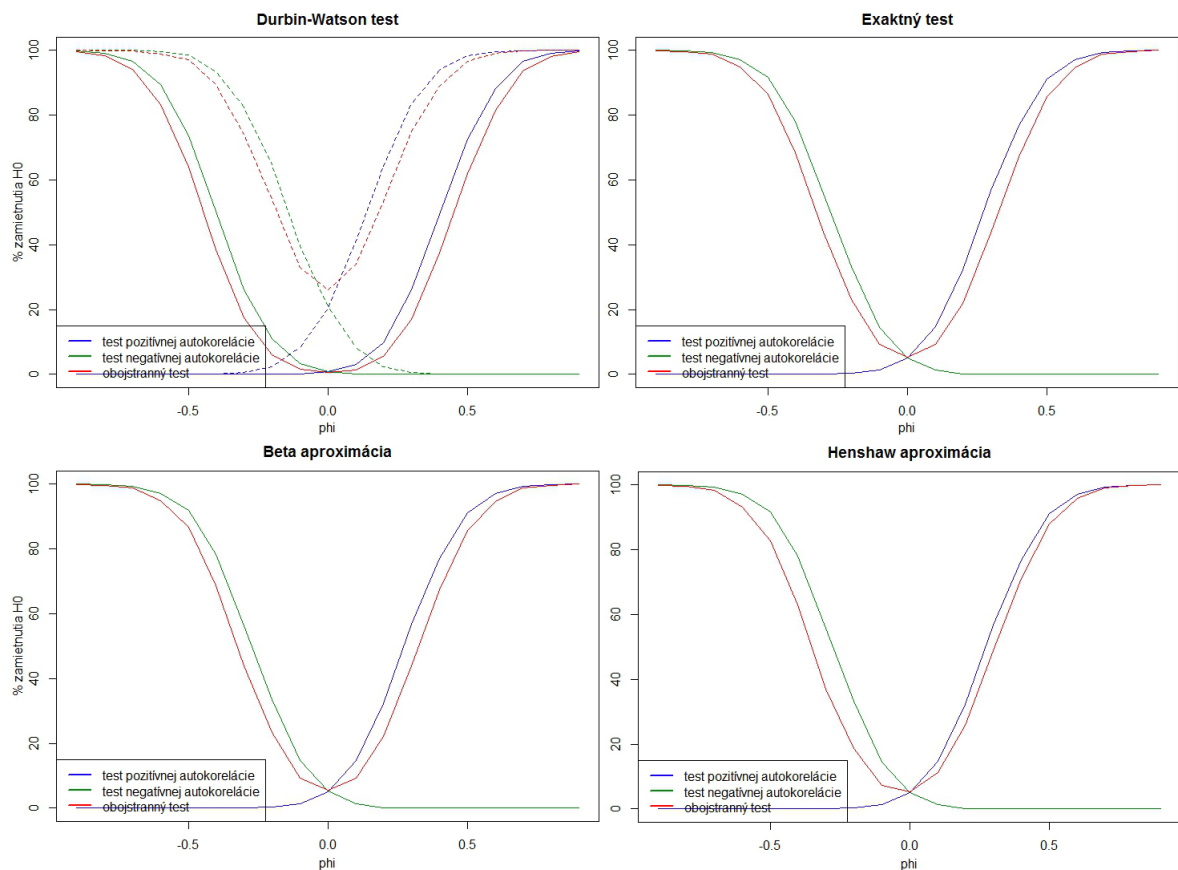
Na obrázku 33 sme zachytili vývoj sily jednotlivých testov so stúpajúcim n . Výsledky testu pozitívnej autokorelácie sú v ľavom stĺpci a obojstranné testy sú napravo.



Obr. 33: Síla jednotlivých testov.

Na obrázkoch je zreteľne vidieť nárast sily testov so zvyšujúcim sa n pre testy pozitívnej autokorelácie, aj pre obojstranné testy.

V kapitole 1 sme spomenuli, že jednostranné testy majú za platnosti alternatívy, ktorú testujú, väčšiu silu testu ako obojstranné testy, a preto má zmysel najskôr určiť charakter autokorelácie a testovať radšej jednostranným testom. Toto tvrdenie sme potvrdili obrázkami 34, kde na rovnakých dátach vidíme odhadnuté sily jednostranných testov na pozitívnu a negatívnu autokoreláciu a obojstranného testu. Pre $\varphi > 0$ má najväčšiu silu jednostranný test pozitívnej autokorelácie a pre $\varphi < 0$ má najväčšiu silu jednostranný test negatívnej autokorelácie. Obojstranný test má v oboch prípadoch menšiu silu. Nasimulované dáta mali veľkosť $n = 50$.



Obr. 34: Sila jednostranných a obojstranných testov.

3 Ďalšie testy autokorelácie

V tejto kapitole uvidíme ďalšie testy autokorelácie.

3.1 Wallisov test

Dáta, na ktorých chceme urobiť regresiu, bývajú často štvrťročné. Preto Wallis v článku [18] rozšíril Durbin-Watsonov test na skúmanie autokorelácie chýb štvrtého stupňa. Chyby v regresii vtedy spĺňajú model

$$\varepsilon_t = \varphi_4 \varepsilon_{t-4} + w_t, \quad (62)$$

kde $|\varphi_4| < 1$ a w_t je biely šum.

Na testovanie nulovej hypotézy $H_0 : \varphi_4 = 0$ navrhol Wallis upravenú Durbin-Watsonovu štatistiku

$$d_4 = \frac{\sum_{t=5}^n (\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-4})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2}, \quad (63)$$

kde $\hat{\varepsilon}$ sú rezíduá.

Wallis v článku [18] uviedol horné a dolné kritické hranice pre d_4 na hladine významnosti 5% a za predpokladu nenáhodnej matice X . Testovanie potom prebieha rovnako ako v Durbin-Watsonovom teste.

Avšak ak chceme testovať obojstranným testom na hladine významnosti 5%, tak potrebujeme 2.5% kritické hodnoty. Tieto uviedli v článku [8] Giles a King, spoločne s 1% a 0.5% kritickými hodnotami.

Funkciu `WallisTest` naprogramovanú v programe R [15] na výpočet Wallisovho testu sme uviedli v prílohe B.2.

3.2 Durbinov test

Niekedy potrebujeme testovať prítomnosť autokorelácie chýb v prípade, že sa medzi regresormi nachádzajú aj posunuté hodnoty závislej premennej. Vtedy nie je splnený predpoklad Durbin-Watsonovho testu o nenáhodnosti matice X , a teda ho nemôžeme použiť. Durbin v článku [6] odvodil asymptotický test (n veľké) pre tento prípad. Stále

testujeme prítomnosť autokorelácie prvého stupňa.

Predpokladajme stacionárny regresný model

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \cdots + \beta_r y_{t-r} + \beta_{r+1} x_{1t} + \cdots + \beta_{r+k} x_{kt} + \varepsilon_t, \quad (64)$$

kde r je počet posunutých y v regresii a k je počet regresorov z matice X . Chyby v regresii opäť modelujeme $AR(1)$ procesom

$$\varepsilon_t = \varphi \varepsilon_{t-1} + w_t, \quad (65)$$

kde $|\varphi| < 1$ a w je z rozdelenia $N(0, \sigma^2 I)$.

Za platnosti nulovej hypotézy $H_0 : \varphi = 0$ sa testovacia štatistika

$$h = \hat{\varphi} \sqrt{\frac{n}{1 - n \cdot \widehat{var}(\hat{\beta}_1)}} \quad (66)$$

riadi asymptoticky rozdelením $N(0, 1)$, kde n je počet meraní, $\widehat{var}(\hat{\beta}_1)$ je odhadnutá variancia odhadnutého koeficientu pri y_{t-1} v regresii a

$$\hat{\varphi} = \frac{\sum_{t=2}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2} \quad (67)$$

je odhad φ , kde $\hat{\varepsilon}$ sú rezíduá.

Pre odhadnutú varianciu odhadnutého koeficientu pri y_{t-1} v regresii platí

$$\widehat{var}(\hat{\beta}_1) = S^2 \cdot a'(Z'Z)^{-1}a, \quad (68)$$

kde Z je $n \times (r + k)$ matica všetkých regresorov v (64), a je vektor núl, ktorý má na mieste prislúchajúcom regresoru y_{t-1} jednotku a

$$S^2 = \frac{\text{RSS}}{n - (r + k)} \quad (69)$$

je odhad variancie chýb v modeli, pričom

$$\text{RSS} = \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 \quad (70)$$

je reziduálna suma štvorcov.

Postup testovania je nasledovný:

1. Odhadneme koeficienty v regresii a zistíme $\widehat{var}(\hat{\beta}_1)$.
2. Z rezíduí vypočítame $\hat{\varphi}$. V prípade, že máme vypočítanú Durbin-Watsonovu štatistiku, môžeme použiť aproximáciu $\hat{\varphi} \doteq 1 - d/2$.
3. Vypočítame testovaciu štatistiku h .

Ak testujeme jednostranným testom s alternatívou H_1 o pozitívnej autokorelácii, tak nulovú hypotézu zamietame na 5-percentnej hladine významnosti v prípade, že testovacia štatistika je väčšia ako 95-percentný kvantil rozdelenia $N(0, 1)$, teda 1.645 a prijímame hypotézu o pozitívnej autokorelácii prvého stupňa.

Ak testujeme jednostranným testom negatívnej autokorelácie a h je menšie ako 5-percentný kvantil rozdelenia $N(0, 1)$, teda -1.645, tak H_0 zamietame a prijímame hypotézu o negatívnej autokorelácii.

Ak chceme testovať obojstranným testom a zamietat' na hladine významnosti 5%, tak H_0 zamietame, ak testovacia štatistika vyšla väčšia ako 97.5% kvantil rozdelenia $N(0, 1)$ alebo menšia ako 2.5% kvantil rozdelenia $N(0, 1)$.

Tento test skolabuje, ak $n \cdot \widehat{var}(\hat{\beta}_1) \geq 1$. Durbin v článku [6] popísal asymptoticky ekvivalentnú procedúru:

1. Urobíme regresiu a získame rezíduá $\hat{\varepsilon}$.
2. Urobíme regresiu $\hat{\varepsilon}_t$ na regresoroch $\hat{\varepsilon}_{t-1}, y_{t-1}, \dots, y_{t-r}, x_{1t}, \dots, x_{kt}$.
3. Ak je koeficient pri $\hat{\varepsilon}_{t-1}$ v tejto regresii signifikantne odlišný od nuly, tak zamietame nulovú hypotézu $H_0 : \varphi = 0$ a prijímame hypotézu o autokorelácii prvého stupňa.

Durbin ukázal, že táto procedúra môže byť rozšírená na testovanie autokorelácie vyššieho rádu (chyby modelované $AR(p)$ procesom) tak, že v druhom bode pridáme do regresie p posunutých $\hat{\varepsilon}$ a testujeme združenú signifikanciu koeficientov pri posunutých rezíduách.

$AR(p)$ proces, ktorým budeme modelovať chyby v regresii bude

$$\varepsilon_t = \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \varphi_p \varepsilon_{t-p} + w_t \quad (71)$$

a nulová hypotéza

$$H_0 : \varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_p = 0. \quad (72)$$

Výslednú testovaciu štatistiku jednoduchšie vyjadríme maticovým zápisom.

Urobíme regresiu a získame $n \times 1$ vektor rezíduí $\hat{\varepsilon} = y - Z(Z'Z)^{-1}Z'y$, kde Z je $n \times (r + k)$ matica všetkých regresorov v (64).

Definujeme

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{\varepsilon}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{\varepsilon}_2 & \hat{\varepsilon}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{\varepsilon}_3 & \hat{\varepsilon}_2 & \hat{\varepsilon}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\varepsilon}_p & \hat{\varepsilon}_{p-1} & \hat{\varepsilon}_{p-2} & \dots & \hat{\varepsilon}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\varepsilon}_{n-1} & \hat{\varepsilon}_{n-2} & \hat{\varepsilon}_{n-3} & \dots & \hat{\varepsilon}_{n-p} \end{bmatrix} \quad (73)$$

a urobíme druhú regresiu

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} E & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} + \nu, \quad (74)$$

kde α je vektor koeficientov pri posunutých rezíduách, γ je vektor koeficientov pri posunutých y a pri x , ν je vektor chýb a získame rezíduá $\hat{\nu}$ tejto regresie.

Durbinovou myšlienkou bolo testovať združenú signifikanciu koeficientov pri posunutých rezíduách. Použijeme na to F štatistiku

$$F = \frac{\frac{\hat{\varepsilon}' E [E' E - E' Z (Z' Z)^{-1} Z' E]^{-1} E' \hat{\varepsilon}}{p}}{\frac{\hat{\nu}' \hat{\nu}}{n - (p + r + k)}}. \quad (75)$$

Avšak táto testovacia štatistika nemá presné F -rozdelenie pre nie veľký počet dát (pravdepodobnosť chyby prvého druhu môže byť väčšia), pretože matica regresorov v (74) je náhodná. Pre $n \rightarrow \infty$ má však hodnota $p \cdot F$ približne $\chi^2(p)$ rozdelenie. Teda

asymptotický test nulovej autokorelácie proti autokorelácii stupňa p urobíme tak, že zráťame testovaciu štatistiku F a hodnotu $p \cdot F$ porovnáme s príslušným kvantilom $\chi^2(p)$ rozdelenia.

V prílohe C.3 nájdeme naprogramované všetky tri Durbinove testy. Funkcia na výpočet testu s testovacou štatistikou h má názov `DurbinTest`, asymptoticky ekvivalentná procedúra je uvedená pod názvom funkcie `DurbinTestA` a funkcia na testovanie $AR(p)$ autokorelácie je označená `DurbinTestARp`.

3.3 Breusch-Godfreyov test

Breusch v článku [2] a Godfrey v článku [9] nezávisle od seba stavali na Durbinovej práci a vytvorili LM testy na testovanie autokorelácie chýb v tvare ARMA procesov. Teda alternatívna hypotéza bude, že chyby v regresnom modeli sa riadia $ARMA(p, q)$ procesom

$$\varepsilon_t + \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \rho_p \varepsilon_{t-p} = w_t + \mu_1 w_{t-1} + \dots + \mu_q w_{t-q}. \quad (76)$$

V našej práci však budeme uvažovať iba autokoreláciu rezíduí v tvare AR procesu.

Najskôr popíšeme test alternatívnej hypotézy chýb v tvare $AR(1)$ procesu. Testovacia procedúra má dva kroky. Najskôr urobíme regresiu na pôvodnom modeli a získame rezíduá $\hat{\varepsilon}$. V druhom kroku urobíme regresiu $\hat{\varepsilon}_t$ na regresoroch $\begin{bmatrix} 1 & X_t & \hat{\varepsilon}_{t-1} \end{bmatrix}$ a zistíme koeficient determinácie R^2 tohto modelu. Za platnosti H_0 bude mať $n \cdot R^2$ asymptoticky rozdelenie $\chi^2(1)$. Všimnime si, že druhá regresia je rovnaká ako v Durbinovom teste. Rozdiel je iba v testovaní. Durbin navrhol pozrieť sa na signifikantnosť koeficientu pri $\hat{\varepsilon}_{t-1}$, naopak v Breusch-Godfreyovom teste pozeráme na koeficient determinácie a zisťujeme, či takto zostavený model vysvetľuje nejakú varianciu rezíduí.

Tento test sa dá jednoducho rozšíriť na testovanie vyšších stupňov autokorelácie. Stačí pridať v druhej regresii ďalšie posunuté $\hat{\varepsilon}$, rovnako ako v Durbinovom teste (74). V tomto prípade za platnosti H_0 o nulovej autokorelácii bude mať $n \cdot R^2$ asymptoticky rozdelenie $\chi^2(p)$.

Všimnime si, že Durbinov a Breusch-Godfreyov test sú asymptoticky ekvivalentné. Breusch-Godfreyova LM štatistika je

$$LM = \frac{\frac{\hat{\varepsilon}' E[E' E - E' Z(Z' Z)^{-1} Z' E]^{-1} E' \hat{\varepsilon}}{p}}{\frac{\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon}}{n}}, \quad (77)$$

kde sú použité rovnaké označenia ako v Durbinovej F štatistike (75). Za platnosti H_0 bude mať $p \cdot LM$ asymptoticky rozdelenie $\chi^2(p)$.

Jediný rozdiel medzi Durbinovou F štatistikou (75) a Breusch-Godfreyovou štatistikou (77) je vo výrazoch v menovateli. Breusch ukázal, že tieto výrazy k sebe konvergujú podľa pravdepodobnosti, a teda tieto procedúry sú asymptoticky ekvivalentné.

Funkcie na výpočet troch verzií Breusch-Godfreyových testov sú uvedené v prílohe D.4. Funkcia `BreuschGodfreyTest` slúži na testovanie $AR(1)$ autokorelácie, funkcia `BreuschGodfreyTestARp` je určená na testovanie $AR(p)$ autokorelácie a vo funkcii `BreuschGodfreyTestEq` je naprogramovaný test ekvivalentný Durbinovmu testu.

3.4 Box-Pierce-Ljungov test

Box a Pierce uviedli v článku [1] testovaciu štatistiku Q , ktorá je založená na druhých mocninách prvých m autokorelačných koeficientov rezíduí. Táto štatistika je definovaná

$$Q = n \sum_{j=1}^m r_j^2, \quad (78)$$

kde

$$r_j = \frac{\sum_{t=j+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-j}}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2} \quad (79)$$

a m je malé v porovnaní s n .

Ak sa v regresnom modeli nenachádzajú posunuté hodnoty závislej premennej, tak sa, za platnosti nulovej hypotézy, testovacia štatistika Q bude asymptoticky riadiť χ^2 rozdelením s m stupňami voľnosti. Z pohľadu sily testu sa ukazuje vhodné zvoliť za m rád autokorelácie, ktorú testujeme, teda p .

Test je možné rozšíriť na regresný model v tvare ARMA procesu. Za platnosti H_0 bude mať v tomto prípade štatistika Q asymptoticky χ^2 rozdelenie s počtom stupňov voľnosti m mínus počet parametrov ARMA modelu, teda ak máme regresný model v

tvare procesu ARMA(r, q), tak rozdelenie štatistiky Q bude χ_{m-r-q}^2 . V tomto prípade však musí byť m dostatočne veľké.

Ljung a Box v článku [14] poukázali na to, že rozdelenie testovacej štatistiky Q sa môže líšiť od rozdelenia χ_{m-r-q}^2 , hlavne pri malých počtoch dát n . V tomto prípade navrhujú použitie upravenej Ljung-Boxovej štatistiky

$$Q' = n(n+2) \sum_{j=1}^m \frac{r_j^2}{n-j}. \quad (80)$$

Túto štatistiku aproximovali Box a Pierce štatistikou Q pre veľké n . Štatistika Q' sa za platnosti nulovej hypotézy tiež riadi rozdelením χ_{m-r-q}^2 .

Naprogramovaný Box-Piercov a upravený Ljung-Boxov test uvádzame v prílohe E.5.

Kapitolu 3 sme spracovali podľa knihy [12] a článkov citovaných v tejto kapitole.

4 Porovnanie všetkých testov

V tejto kapitole porovnáme všetky testy autokorelácie chýb v regresii, ktoré sme spomenuli v tejto práci. Aproximácie Durbin-Watsonovho testu v tejto časti porovnávať nebudeme, keďže sme ich porovnali s Exaktným testom v časti 2.3 a v porovnaní budeme uvádzať iba výsledky Exaktného testu.

Porovnanie sme urobili simulačne, postup simulácie bol rovnaký ako popisujeme v časti 2.1.2, teda

1. Vygenerujeme $n \times k$ maticu regresorov X . Zvolíme vektor regresných koeficientov β dĺžky k . Zvolíme varianciu σ^2 bieleho šumu a koeficient autokorelácie φ .
2. Vygenerujeme vektor bieleho šumu w z rozdelenia $N(0, \sigma^2 I)$.
3. Dopočítame y podľa (2) a (1).
4. „Zabudneme“ všetko okrem X a y a necháme príslušný test overiť prítomnosť autokorelácie.

Body 2-4 potom opakujeme, kým nemáme dostatočný počet simulácií.

Nasimulovali sme dáta a chyby modelované rôznymi procesmi. Niektoré simulácie sme robili za platnosti H_0 , teda $\varphi = 0$, iné s nenulovou autokoreláciou. V prípade nenulovej autokorelácie sme simuláciu najskôr „zahriali“, teda ε_0 sme zvolili nulový a nasimulovali sme niekoľko hodnôt ε , ktoré sme potom usekli a zostal nám iba vektor chýb dĺžky n so správnym rozdelením. Porovnávali sme pravdepodobnosť chyby prvého druhu a silu jednotlivých testov pre rôzne počty dát n .

Vstupné parametre simulácií boli nasledovné: počet simulácií bol v každom prípade 10 000 a počet regresorov bez konštantného člena bol 5. Počet dát n sme pre porovnanie menili s desiatkovými rozdielmi od 10 po 100. Vektor β sme generovali z normálneho rozdelenia $N(0, 1)$, maticu regresorov X z $N(5, 10)$ a variancia σ^2 bieleho šumu bola 4.

4.1 Regresný model bez posunutých závislých premenných

Najskôr uvažujme regresný model, v ktorom ako regresory nevystupujú posunuté závislé premenné y a chyby v regresii budeme modelovať $AR(1)$ procesom, teda

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad (81)$$

kde

$$\varepsilon_t = \varphi\varepsilon_{t-1} + w_t, \quad (82)$$

$|\varphi| < 1$ je pevná neznáma konštanta a w_t je biely šum.

4.1.1 Porovnanie pravdepodobnosti chyby prvého druhu

Keďže v tejto časti je naším cieľom porovnať pravdepodobnosť chyby prvého druhu, budeme simulovať dáta, v ktorých nie je autokorelácia, teda $\varphi = 0$ a H_0 platí.

V tabuľkách 26 a 27 vidíme výsledné pravdepodobnosti chyby prvého druhu pre rôzne testy a rôzne hodnoty n .

	pravdepodobnosť chyby 1. druhu				
test	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
Durbin-Watson test	0.00%	0.25%	0.70%	1.06%	1.34%
vrátane inconclusive	100.00%	98.45%	65.12%	49.5%	41.30%
Durbin-Watson - Exaktný test	4.69%	5.20%	4.91%	4.87%	4.99%
Durbin test	0.00%	4.45%	3.95%	4.03%	4.34%
Durbin test (asympt. equivalent)	0.18%	4.13%	4.00%	4.14%	4.43%
Durbin test $AR(p)$	19.03%	6.41%	5.23%	4.95%	5.16%
Breusch-Godfrey test	38.71%	8.83%	6.74%	5.78%	5.78%
Breusch-Godfrey test (equivalent)	25.98%	8.06%	6.26%	5.63%	5.63%
Box-Pierce test	0.00%	4.45%	3.95%	4.03%	4.34%
revised Ljung-Box test	3.21%	6.26%	5.14%	4.68%	5.06%

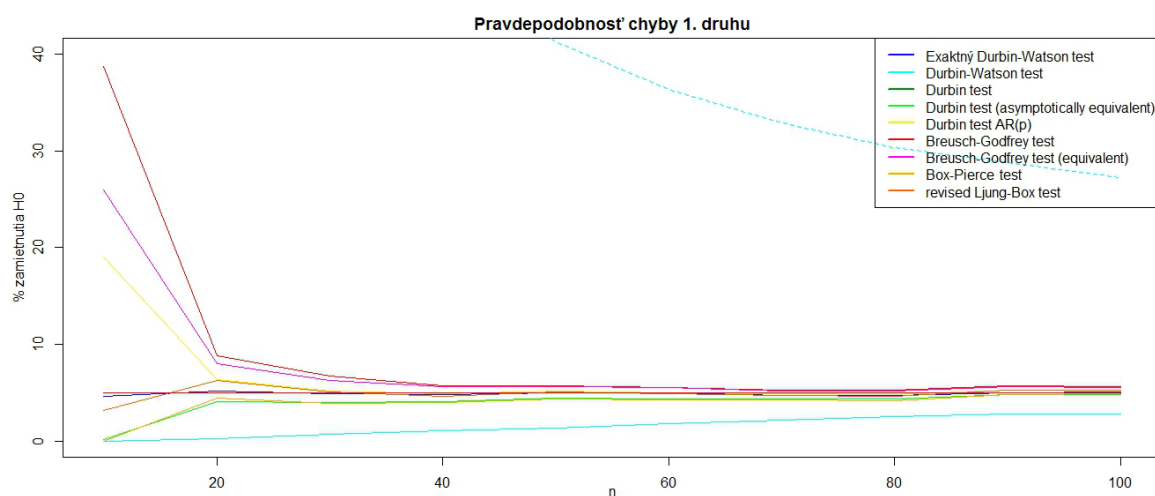
Tabuľka 26: Porovnanie pravdepodobnosti chyby 1. druhu, $n = 10 - 50$.

Výsledky klasického Durbin-Watsonovho testu sú uvedené v dvoch riadkoch - v prvom riadku je percento zamietnutia nulovej hypotézy a v druhom riadku je zamietanie pomocou konzervatívneho prístupu, teda H_0 zamietame aj v prípade, že test skončil nerozhodne (inconclusive).

	pravdepodobnosť chyby 1. druhu				
test	$n = 60$	$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
Durbin-Watson test	1.83%	2.21%	2.55%	2.78%	2.84%
vrátane inconclusive	36.30%	32.85%	30.34%	28.81%	27.25%
Durbin-Watson - Exaktný test	5.00%	4.77%	4.77%	5.04%	5.13%
Durbin test	4.30%	4.27%	4.23%	4.84%	4.89%
Durbin test (asympt. equivalent)	4.39%	4.36%	4.34%	4.87%	4.87%
Durbin test $AR(p)$	5.05%	4.89%	4.81%	5.24%	5.26%
Breusch-Godfrey test	5.60%	5.31%	5.24%	5.71%	5.66%
Breusch-Godfrey test (equivalent)	5.53%	5.19%	5.17%	5.61%	5.56%
Box-Pierce test	4.30%	4.27%	4.23%	4.84%	4.89%
revised Ljung-Box test	4.93%	4.77%	4.62%	5.27%	5.28%

Tabuľka 27: Porovnanie pravdepodobnosti chyby 1. druhu, $n = 60 - 100$.

Pre lepšie znázornenie výsledkov sme vykreslili graf vývoja pravdepodobnosti chyby prvého druhu jednotlivých testov v závislosti od n . Vidíme ho na obrázku 35.



Obr. 35: Pravdepodobnosť chyby 1. druhu jednotlivých testov v závislosti od n .

Pre malé hodnoty n , hlavne $n = 10$, sú pravdepodobnosti chyby prvého druhu jednotlivých testov výrazne odlišné od 5%. Najbližšie k tejto hodnote je Exaktný test a blíži sa k nej aj upravený Ljung-Boxov test, ktorý bol špeciálne vytvorený pre malý počet dát. Vidíme, že v tomto ohľade je naozaj lepší ako Box-Piercov test, ktorý má pravdepodobnosť chyby prvého druhu 0%.

So stúpajúcim n stúpa aj presnosť testov a ich pravdepodobnosti chyby prvého druhu sa približujú k hladine 5%. Najpomalšie sa k hladine významnosti približovali Breusch-Godfreyove testy.

Od zvyšných testov sa výrazne líši klasický Durbin-Watsonov test, ktorý má kvôli intervalu nerozhodnosti oveľa menšie percento zamietania nulovej hypotézy než je nominálnych 5%. Konzervatívny prístup je znázornený prerušovanou čiarou. Pravdepodobnosť chyby prvého druhu tohto prístupu je veľmi veľká, aj keď sa so zvyšujúcim počtom dát znižuje. Pre $n = 100$ má hodnotu 27.25%.

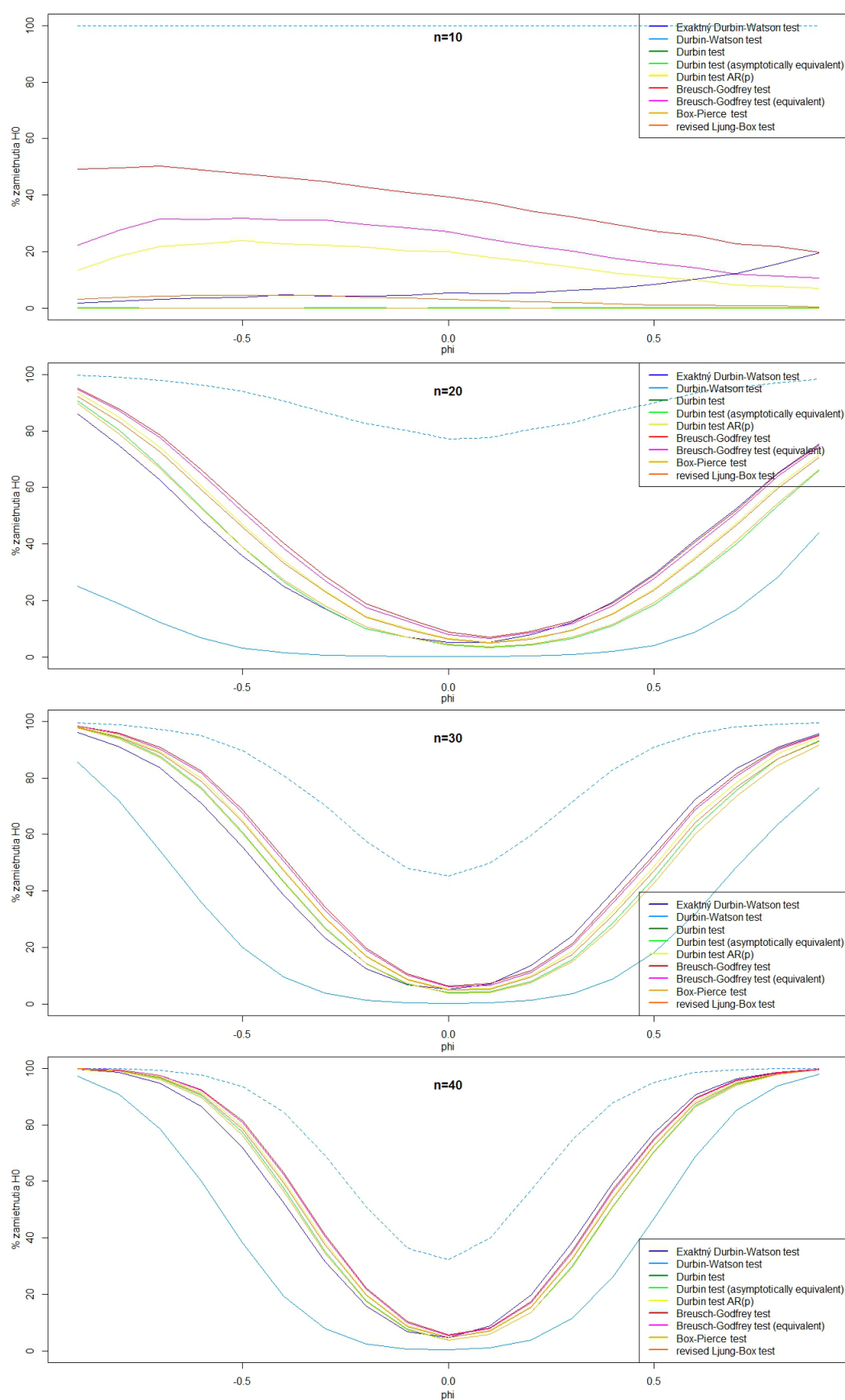
4.1.2 Porovnanie sily testov

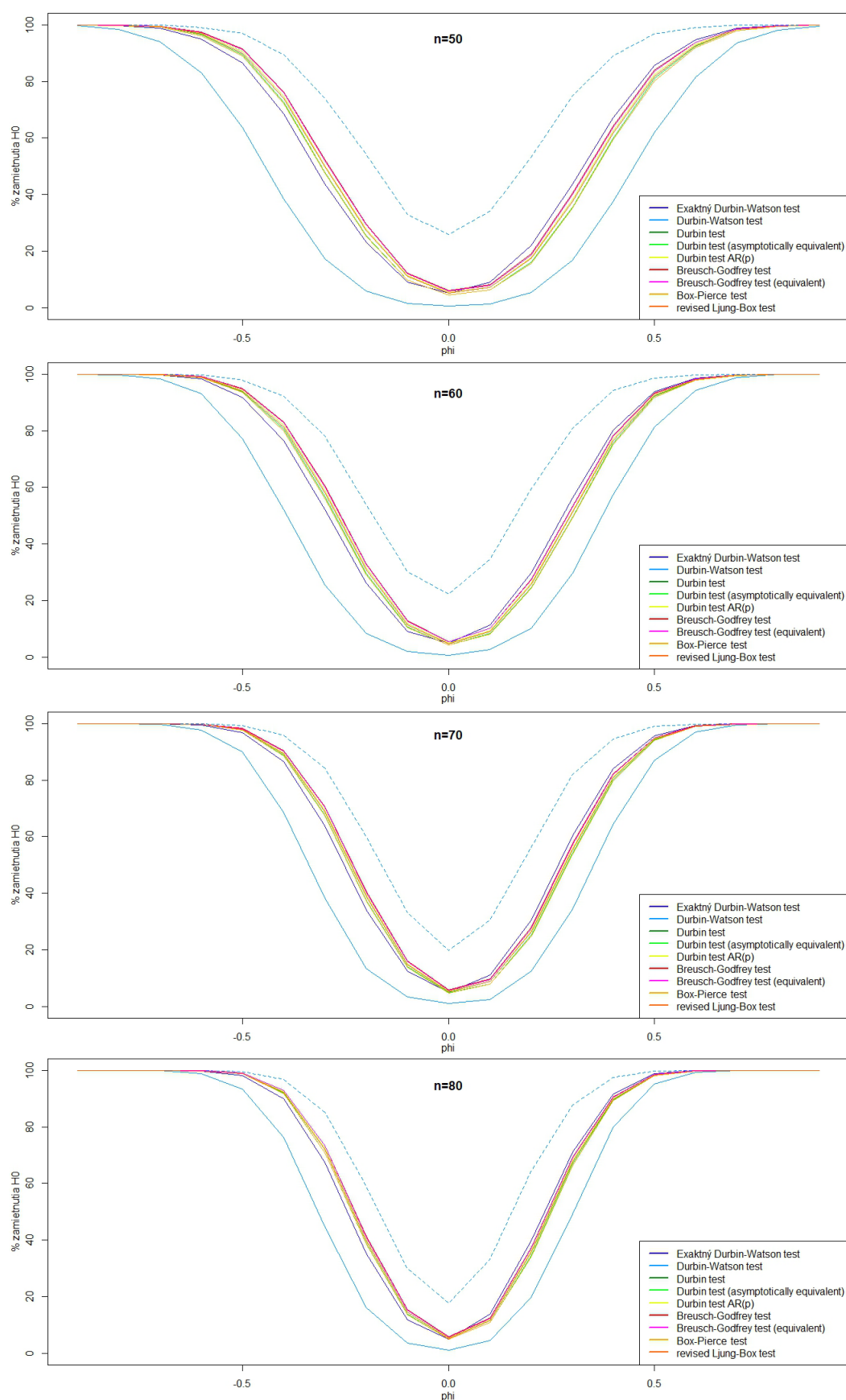
V tejto časti do modelovania chýb zahrnieme nenulové φ , teda nulová hypotéza už nebude platiť a porovnáme silu jednotlivých testov. Hodnotu φ sme nezvolili náhodne, ale urobili sme výpočty pre celé spektrum, pretože sila testov závisí od veľkosti tohto koeficientu. Parameter φ nadobúdval hodnoty -0.9, -0.8, -0.7, -0.6, -0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 a 0.9.

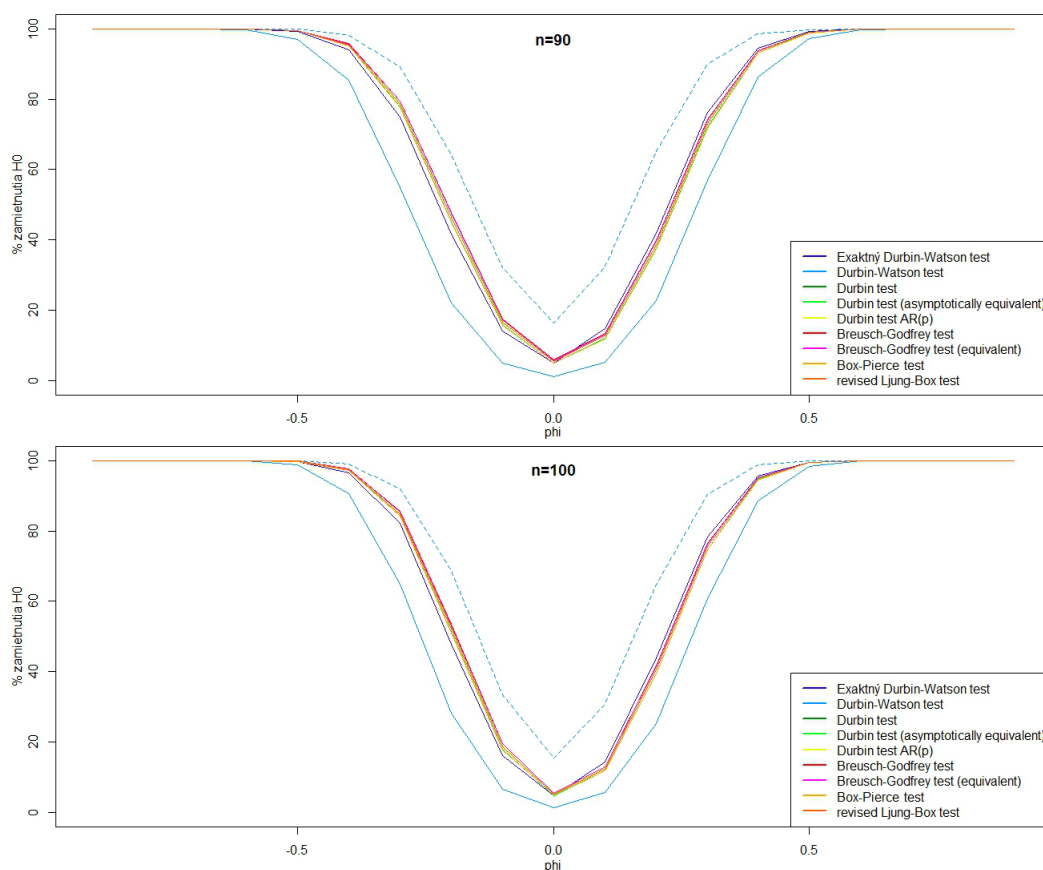
Výsledné percento zamietania nulovej hypotézy jednotlivých testov pre rôzne hodnoty n sme neuvádzali v tabuľkách kvôli veľkému množstvu údajov, ale priamo sme ich zobrazili v grafoch. Na obrázkoch 36, 37 a 38 vidíme zamietanie H_0 . Pre každé n je zobrazený samostatný obrázok, v ktorom sú silofunkcie všetkých testov. Konzervatívny prístup v Durbin-Watsonovom teste je opäť znázornený prerušovanou čiarou.

Pre malý počet dát ($n = 10$) majú testy veľmi zlé výsledky a väčšinou zamietajú podobné percento prípadov aj v prípade nulovej autokorelácie, aj v prípade nenulovej. Niektoré dokonca za platnosti H_0 zamietajú viac, ako keď H_0 neplatí.

S rastúcim n rastie aj sila testov. Už pri $n = 20$ môžeme pozorovať, že testy odhaľujú

Obr. 36: Sila testov, $n = 10 - 40$.

Obr. 37: Sila testov, $n = 50 - 80$.

Obr. 38: Sila testov, $n = 90 - 100$.

autokoreláciu, pričom čím je absolútna hodnota φ väčšia, tým častejšie testy zamietajú nulovú hypotézu o neprítomnosti autokorelácie.

Čím je väčšia veľkosť dát, tým sa výsledné silofunkcie jednotlivých testov blížia k sebe a hladina správneho zamietnutia nulovej hypotézy sa zvyšuje. Aj percento prípadov, kedy je Durbin-Watsonov test nerozhodný, sa postupne znižuje.

Na grafoch môžeme vidieť, že silofunkcie testov nie sú symetrické okolo nulovej autokorelácie, ako by mohol niekto predpokladať. Vidíme, že v prípade negatívnej autokorelácie majú testy vyššiu silu, ako v prípade „rovnakej“ pozitívnej autokorelácie (teda pre φ s opačným znamienkom). Je to spôsobené rôznou povahou pozitívnej a negatívnej autokorelácie, ako sme videli na obrázkoch 1 a 2 v kapitole 2. Pri negatívnej autokorelácii dochádza k preskakovaní horizontálnej osi rezíduami a v prípade pozitívnej autokorelácie k dlhému zotrvávaniu rezíduí nad osou alebo pod osou. Preto sú tieto situácie kvalitatívne odlišné a ukazuje sa, že testy vedľa lepšie odhaliť negatívnu

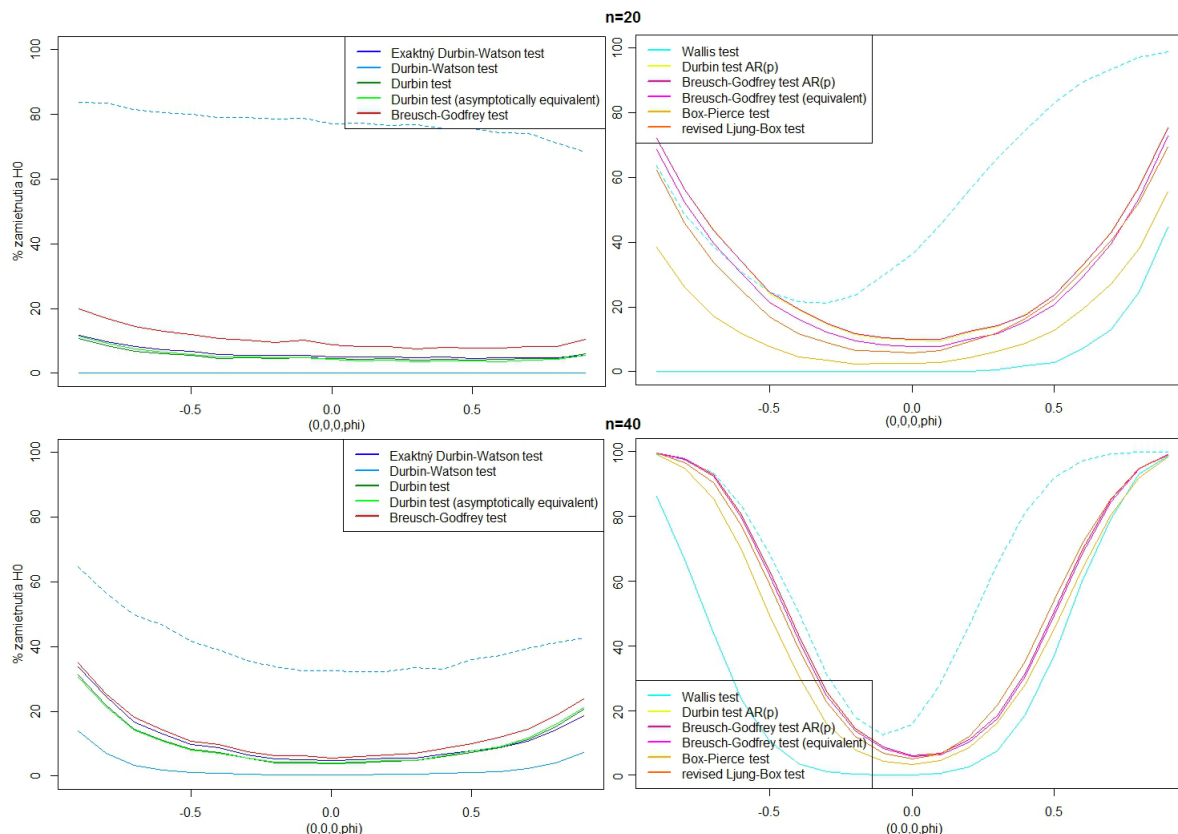
autokoreláciu. Najväčšiu symetrickosť silofunkcie dosiahol Exaktný Durbin-Watsonov test, pri ktorom nie je pravidlom, že lepšie odhaľuje negatívnu autokoreláciu. Tento fakt môžeme lepšie vidieť na obrázkoch 30, 31 a 32, kde sme porovnávali len rôzne verzie Durbin-Watsonovho testu.

4.1.3 Autokorelácia vyššieho stupňa

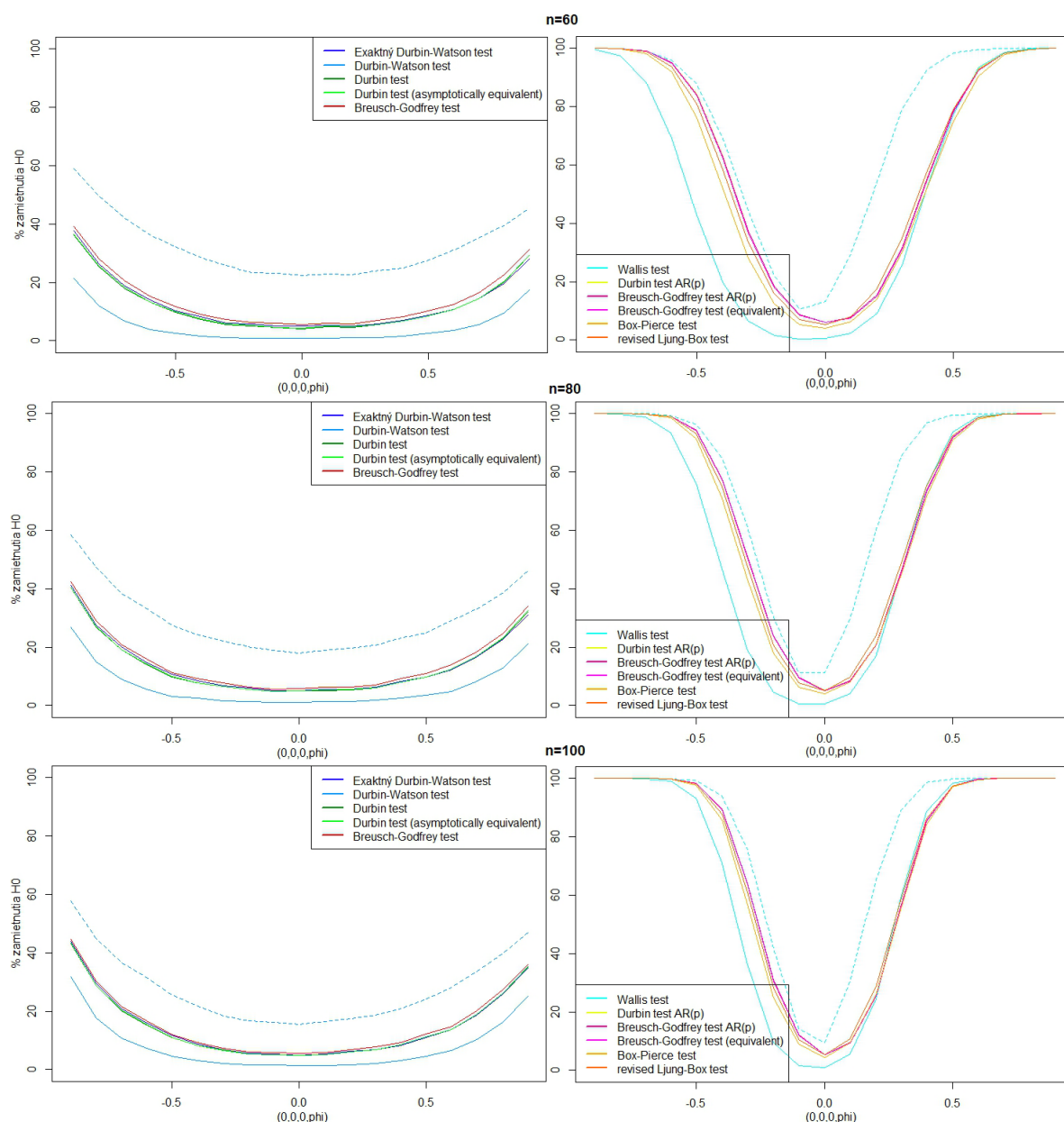
V tejto časti už nebudeme chyby v regresii modelovať $AR(1)$ procesom, ale procesom vyššieho rádu - $AR(p)$ procesom

$$\varepsilon_t = \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \varphi_p \varepsilon_{t-p} + w_t. \quad (83)$$

Budeme simulovať autokoreláciu po 1 roku v dátach získavaných štvrťročne (teda $AR(p)$), aby sme mohli porovnať výsledky Wallisovho testu s ostatnými testami. Teda φ_1, φ_2 a φ_3 budú nulové a za φ_4 dosadíme opäť postupne celé spektrum hodnôt, rovnako ako v časti 4.1.2. Výpočty sme robili pre n rovné 20, 40, 60, 80 a 100. Výsledné grafy sily testov vidíme na obrázkoch 39 a 40.



Obr. 39: Sila testov, $AR(p)$ autokorelácia, $n = 20, 40$.



Obr. 40: Sila testov, $AR(p)$ autokorelácia, $n = 60, 80, 100$.

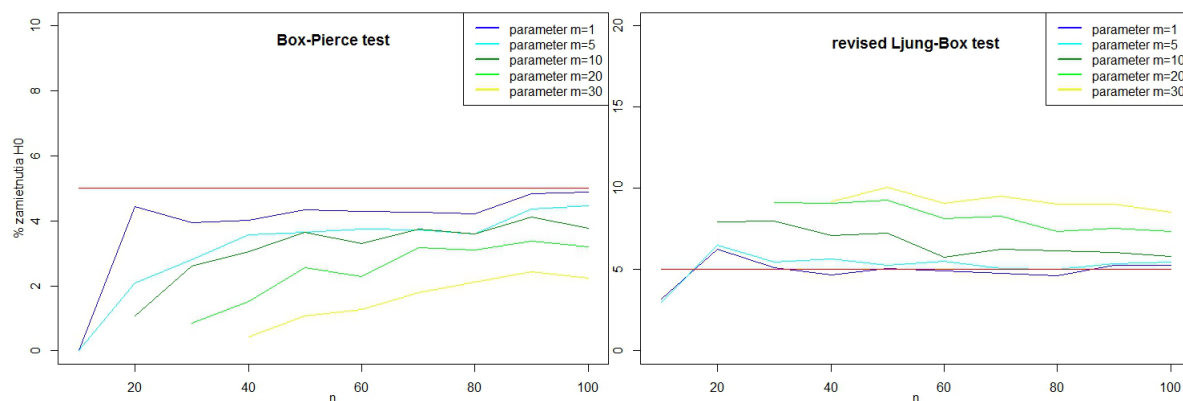
Testy sa podľa výsledkov rozdelili do dvoch skupín. Kvôli lepšej prehľadnosti sme tieto skupiny testov vykreslili do dvoch obrázkov.

V ľavom stĺpci vidíme silofunkcie pre Durbin-Watsonove testy, dve verzie Durbinovho testu a jednu verziu Breusch-Godfreyovho testu. Tieto testy nie sú určené na odhaľovanie autokorelácie vyššieho rádu. Vidíme, že aj veľká autokorelácia sa u nich prejaví iba nízkym percentom zamietania, aj keď s rastúcim n sa aj ich schopnosť zamietat' nulovú hypotézu jemne zvyšuje.

Do grafov napravo sme vykreslili výsledky testov, ktoré vedia zisťovať prítomnosť autokorelácie vyššieho rádu. Durbinov, Breusch-Godfreyov, Box-Piercov a upravený Ljung-Boxov test majú vynikajúce výsledky. Porovnaním Box-Piercovho a upraveného Ljung-Boxovho testu pre malé n vidíme, že Ljung-Boxov test má naozaj lepšie výsledky ako Box-Piercov. Zvyšovaním n sa aj ich výsledky takmer vyrovnávajú. Pri vykreslení silofunkcie Wallisovho testu sme uviedli 2 čiary, rovnako ako v prípade Durbin-Watsonovho testu. Prerušovaná čiara znázorňuje zamietanie nulovej hypotézy aj v prípade, že test skončil nerozhodne. Wallisov test je pre malý počet dát veľmi nepresný a jeho grafy sú vychýlené doľava, teda viac zamieta nulovú hypotézu v prípade, že v modeli je prítomná pozitívna autokorelácia chýb. Pri väčšom n sa jeho výsledky zlepšia.

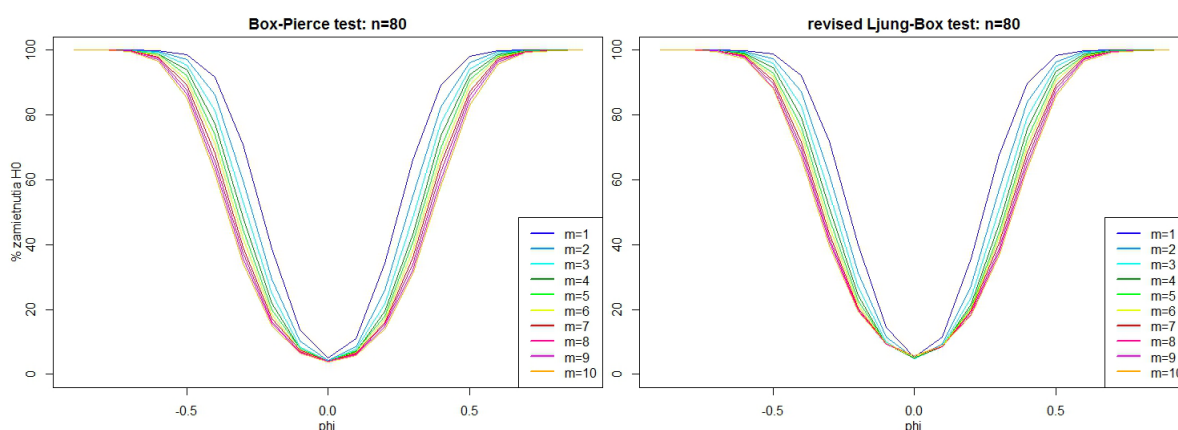
Poznámka: O parametri m v Box-Piercovom a upravenom Ljung-Boxovom teste.

Za platnosti H_0 sa rozdelenie testovacích štatistík Q a Q' riadi asymptoticky χ^2 rozdelením s m stupňami voľnosti, kde m je malé číslo oproti veľkosti dát n . Otázne je, aké by malo byť m . Pravdepodobnosť chyby prvého druhu s použitím rôznych parametrov m sme vykreslili na obrázku 41.



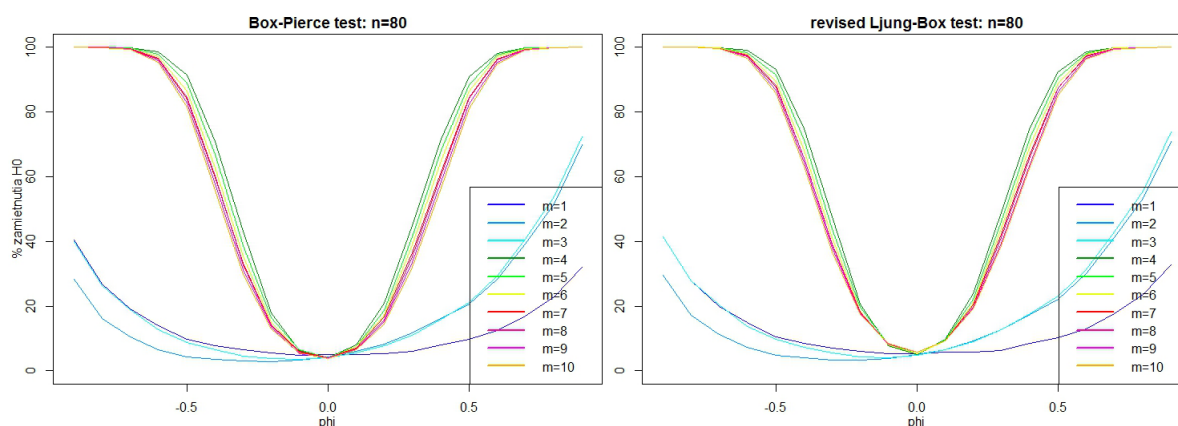
Obr. 41: Pravdepodobnosť chyby 1. druhu v Box-Pierce-Ljungových testoch.

V prípade oboch testov sa k 5% hladine významnosti najviac blíži krivka s parameterom m rovným jednej a pri väčších hodnotách tohto parametra sa pravdepodobnosť chyby prvého druhu vzdáva od tejto hladiny. Pri nulovej autokorelácii sa však neprejaví rád autokorelácie. Preto sme na obrázku 42 vykreslili silofunkcie testov pre parameter $m = 1 - 10$. Všetky silofunkcie boli vyrátané pre veľkosť dát $n = 80$.



Obr. 42: Sila Box-Pierce-Ljungových testov pre $AR(1)$ autokoreláciu.

Vidíme, že testy majú najväčšiu silu, keď je parameter $m = 1$. S rastúcim m sa znižuje sila oboch testov. Rovnaké obrázky sme vykreslili aj pre prípad autokorelácie chýb vyššieho rádu, konkrétne pre $AR(4)$ autokoreláciu. Výsledné silofunkcie pre hodnoty parametra 1 až 10 vidíme na obrázku 43.



Obr. 43: Sila Box-Pierce-Ljungových testov pre $AR(4)$ autokoreláciu.

Pre m rovné 1, 2 a 3 je sila oboch testov veľmi malá. Testy dosahujú najväčšiu silu pre $m = 4$, čo je aj rád prítomnej autokorelácie a pre väčšie m sila testov opäť klesá. V prípade, keď regresný model neobsahuje posunuté hodnoty závislej premennej, odporúčame v Box-Piercovom a Ljung-Boxovom teste používať parameter m rovný p , teda rádu autokorelácie, ktorý (v alternatívnej hypotéze H_1) podozrievame, že by mohol pre chyby regresie platiť.

4.2 Regresný model s posunutými závislými premennými

V tejto podkapitole pridáme do regresného modelu posunuté hodnoty závislej premennej y , takže dáta budeme modelovať $AR(r)$ procesom. Regresia teda bude

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \dots + \beta_r y_{t-r} + \beta_{r+1} x_{1t} + \dots + \beta_{r+k} x_{kt} + \varepsilon_t \quad (84)$$

a chyby v regresii budú opäť modelované $AR(1)$ procesom (82).

Pri simulácii dát závislých od predchádzajúcich hodnôt y sme opäť využili „zahriatie“ simulácie, pretože pre $y_1, y_2, \dots, y_r$ sme nemali všetky posunuté hodnoty y . Teda nasimulovali sme viac meraní ako n , aby sme získali predchádzajúce hodnoty y a následne sme staršie dáta usekli a dostali sme n meraní.

V testoch však tieto predchádzajúce hodnoty y nepoznáme, pretože v tom čase sme ešte „nemerali“. Preto pri použití testov musíme prvých r meraní useknúť a testovať iba pre zvyšných $n - r$ dát.

4.2.1 Porovnanie pravdepodobnosti chyby prvého druhu

Pre porovnanie pravdepodobnosti chyby prvého druhu sme opäť simulovali skutočné chyby regresie bez autokorelácie, no dáta y boli modelované $AR(1)$ procesom, teda medzi regresormi sa nachádza jedna posunutá hodnota y .

Pri generovaní koeficientov β treba dávať pozor, aby regresný koeficient prislúchajúci posunutej závislej premennej bol v absolútnej hodnote menší ako 1 (pri dátach modelovaných $AR(1)$ procesom). Ak by tomu tak nebolo, proces by nebol stacionárny. Aby sme mohli výsledky lepšie porovnať, pri všetkých simuláciách sme tento koeficient zvolili 0.5.

Pravdepodobnosti chyby prvého druhu pre jednotlivé testy a rôzne n sme zhrnuli v tabuľkách 28 a 29. Pri klasickom Durbin-Watsonovom teste opäť uvádzame aj výsledky získané konzervatívnym prístupom a pre prípad $n = 10$ neuvádzame výsledok, pretože počet regresorov je v tomto prípade príliš veľký v porovnaní s počtom dát.

	pravdepodobnosť chyby 1. druhu				
test	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
Durbin-Watson test	-	0.04%	0.04%	0.11%	0.22%
vrátane inconclusive	-	100.00%	62.17%	45.01%	35.12%
Durbin-Watson - Exaktný test	5.01%	4.47%	3.03%	3.87%	4.08%
Durbin test	2.17%	8.43%	6.81%	5.19%	5.40%
Durbin test (asympt. equivalent)	0.60%	7.61%	3.69%	4.59%	4.86%
Durbin test $AR(p)$	19.80%	11.10%	4.36%	5.25%	5.67%
Breusch-Godfrey test	48.18%	16.40%	7.00%	7.10%	6.92%
Breusch-Godfrey test (equivalent)	25.12%	14.52%	5.67%	6.31%	6.68%
Box-Pierce test	0.00%	5.66%	3.79%	5.09%	5.90%
revised Ljung-Box test	0.52%	12.64%	8.71%	8.60%	9.01%

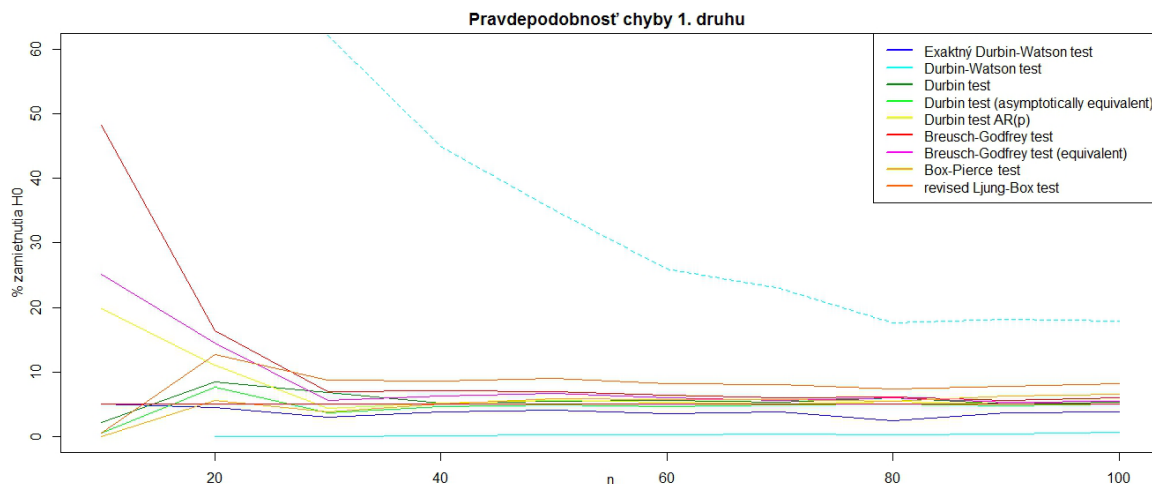
Tabuľka 28: Porovnanie pravdepodobnosti chyby 1. druhu, $AR(r)$ proces, $n = 10 - 50$.

	pravdepodobnosť chyby 1. druhu				
test	$n = 60$	$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
Durbin-Watson test	0.26%	0.42%	0.21%	0.47%	0.68%
vrátane inconclusive	25.97%	22.96%	17.59%	18.14%	17.89%
Durbin-Watson - Exaktný test	3.55%	3.85%	2.44%	3.69%	3.89%
Durbin test	5.61%	5.32%	5.99%	5.05%	5.39%
Durbin test (asympt. equivalent)	4.70%	4.92%	5.00%	4.74%	5.09%
Durbin test $AR(p)$	5.29%	5.11%	5.49%	5.01%	5.03%
Breusch-Godfrey test	6.45%	6.05%	6.11%	5.55%	6.00%
Breusch-Godfrey test (equivalent)	6.01%	5.64%	5.96%	5.36%	5.44%
Box-Pierce test	5.75%	5.80%	5.45%	6.33%	6.53%
revised Ljung-Box test	8.13%	8.12%	7.43%	7.81%	8.20%

Tabuľka 29: Porovnanie pravdepodobnosti chyby 1. druhu, $AR(r)$ proces, $n = 60 - 100$.

V tabuľkách sme uviedli aj výsledky testov, ktoré by sa v prípade posunutých y v regresii nemali používať, pretože už nie je splnený predpoklad o nenáhodnosti matice regresorov. Hovoríme o Durbin-Watsonových testoch.

Výsledky opäť zakreslíme do grafu vývoja pravdepodobnosti chyby prvého druhu jednotlivých testov v závislosti od n - obrázok 44.



Obr. 44: Pravdepodobnosť chyby 1. druhu jednotlivých testov v závislosti od n , $AR(r)$ proces.

Keď porovnáme tabuľky 28, 29 s tabuľkami 26, 27 pre regresný model bez posunutých závislých premenných, môžeme si všimnúť, že pravdepodobnosť chyby prvého druhu pre klasický Durbin-Watsonov test a Exaktný test sa pri regresii s posunutými y znížila. Je to spôsobené tým, že sme tieto testy použili na dáta, ktoré nespĺňajú ich predpoklady.

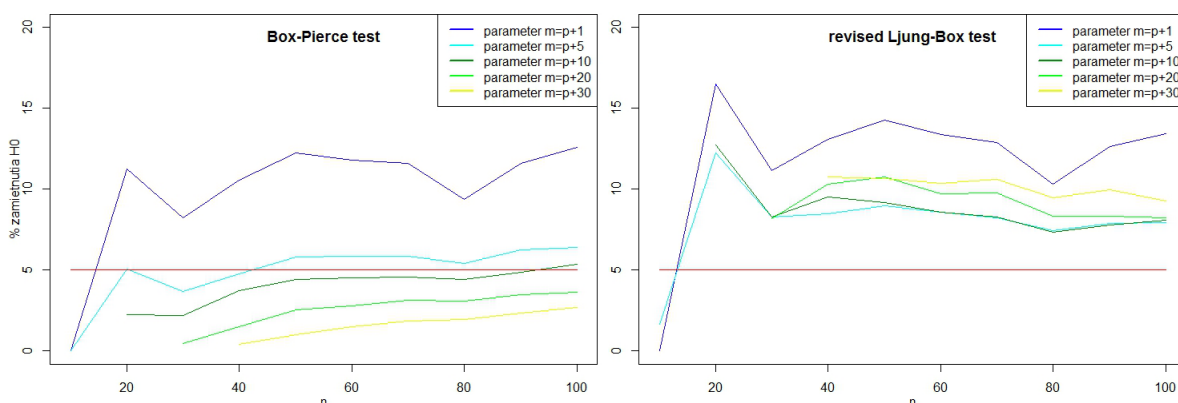
Pravdepodobnosť chyby prvého druhu u testov, ktoré je v tomto prípade adekvátne použiť, má so zvyšujúcim sa n podobný priebeh, ako tomu bolo v modeli bez posunutých y . Spomedzi ostatných testov sa vymyká upravený Ljung-Boxov test, ktorý má vyššie percento zamietnutia nulovej hypotézy ako ostatné testy. Naopak vynikajúce výsledky majú Durbinove testy, ktoré sa pri vyššom n pohybujú presne okolo piatich percent.

Poznámka: O parametri m v Box-Piercovom a upravenom Ljung-Boxovom teste.

Rozdelenie testovacích štatistík Q a Q' sa, za platnosti nulovej hypotézy, riadi asymptoticky χ^2 rozdelením s počtom stupňov voľnosti m mínus počet parametrov odhadnutých v ARMA modeli. Pokiaľ sme v regresnom modeli nemali posunuté hodnoty závislej premennej, tak sme za parameter m zvolili rád autokorelácie chýb, ktorú skúmame a počet parametrov ARMA modelu bol nulový. Keď nám však v regresii pribudne posunutá hodnota y a testujeme $AR(1)$ autokoreláciu, tak dostávame χ^2 s 0 stupňami

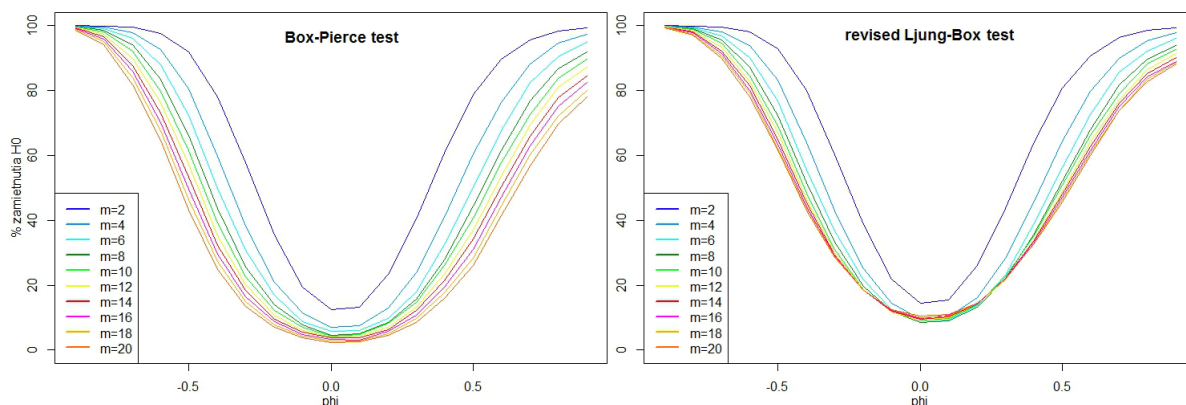
voľnosti. Preto treba parameter m zvýšiť tak, aby sme dostali čo najlepšie výsledky.

Na obrázku 45 vidíme pravdepodobnosť chyby prvého druhu pre dáta aj chyby modelované $AR(1)$ modelom a pre rôzne n . V grafoch sme vykreslili výsledky pri použití rôznych parametrov m - k hodnote p z $AR(p)$ autokorelácie sme pripočítali 1, 5, 10, 20 a 30.



Obr. 45: Pravdepodobnosť chyby 1. druhu v Box-Pierce-Ljungových testoch, $AR(r)$ proces.

Z grafov je zrejmé, že najvhodnejšie bude použiť navýšenie parametra p o 10, prípadne o 5, ak sa jedná o prípad s menším počtom dát. Vykreslíme však ešte sily týchto testov pre $n = 50$ a rôzne hodnoty parametra m - obrázok 46.



Obr. 46: Sila Box-Pierce-Ljungových testov, $AR(r)$ proces.

Vidíme, že zvyšovaním parametra m klesá sila testov, avšak treba prihliadať aj na pravdepodobnosť chyby prvého druhu a nájsť rozumný kompromis.

4.2.2 Porovnanie sily testov

V tejto časti nasimulujeme dáta y modelované $AR(1)$, $AR(2)$, $AR(3)$ a $AR(4)$ procesom s $AR(1)$ autokoreláciou chýb ε v regresii. Hodnoty φ budú tvoriť rovnaké spektrum ako v časti 4.1.2. Teraz už nebudeme uvádzať grafy silofunkcií pre všetky n - zvolili sme $n = 50$, pretože to je dostatočný počet dát, aby testy vykazovali správnu pravdepodobnosť chyby prvého druhu, ale ešte nedochádza k úplnému prekryvaniu grafov silofunkcií jednotlivých testov.

Regresný koeficient β , ktorý bol použitý pri posunutej hodnote y v regresii v tvare $AR(1)$ procesu bol 0.69, v $AR(2)$ procese pribudol regresný koeficient -0.62, tretí regresný koeficient v $AR(3)$ procese bol 0.04 a v $AR(4)$ procese bol štvrtý regresný koeficient 0.50.

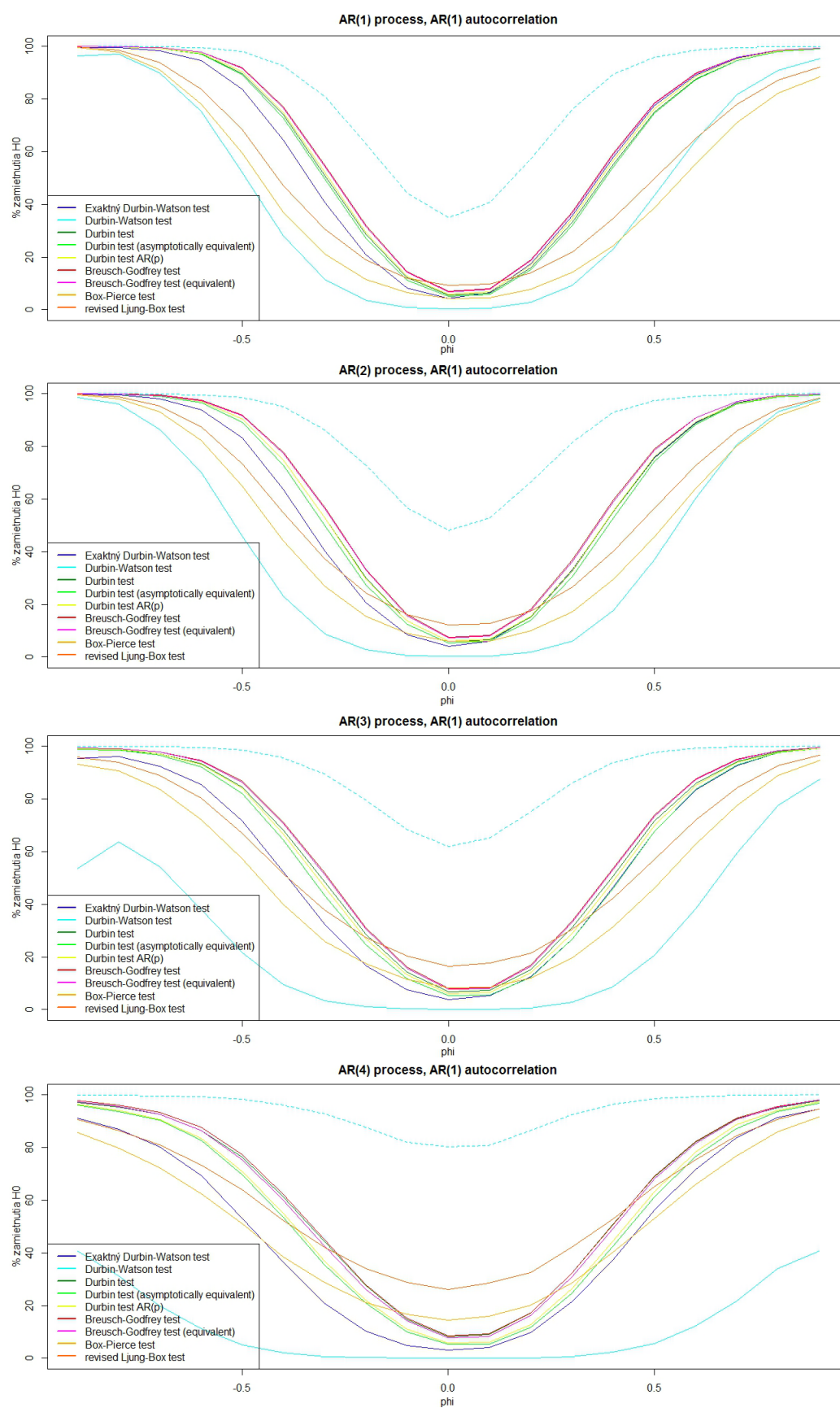
Porovnanie sily všetkých testov pre regresiu modelovaných rôznymi procesmi vidíme na obrázku 47.

V prvom rade si všimnime, ako vplýva prítomnosť posunutých y v regresii na testy, ktorých predpoklady v tomto prípade nie sú splnené, teda na klasický Durbin-Watsonov test a Exaktný test. Vidíme, že tieto testy majú nízku silu a so stúpajúcim rádom AR procesu, ktorým modelujeme dáta, sa tieto rozdiely oproti ostatným testom prehlbujú.

Nie veľmi dobré výsledky majú Box-Piercov a upravený Ljung-Boxov test. Ich pravdepodobnosť chyby prvého druhu je vysoká a sila testov v porovnaní s ostatnými testami nízka. Pri týchto výpočtoch sme používali parameter m rovný 11.

Durbinove testy a Breusch-Godfreyove testy majú najlepšie výsledky. Pri Durbinovom teste s testovacou štatistikou h a Breusch-Godfreyových testoch však dochádza ku zvýšenej pravdepodobnosti chyby prvého druhu. Ostatné dve verzie Durbinovho testu majú aj správnu pravdepodobnosť chyby prvého druhu, teda na úrovni približne 5%.

Všimnime si tiež, že čím je rád procesu, ktorým modelujeme dáta, vyšší, tým majú testy menšiu silu.

Obr. 47: Sila testov, $AR(r)$ proces.

Záver

V tejto diplomovej práci sme sa venovali simulačnému porovnaniu rôznych testov autokorelácie chýb v lineárnej regresii. V druhej kapitole sme popísali Durbin-Watsonov test s testovacou štatistikou d a všeobecnými kritickými hranicami d_L a d_U , ktoré nezávisia od matice regresorov X . Použitím týchto všeobecných hraníc však vzniká interval nerozhodnosti, v ktorom test nevie rozhodnúť, či je v dátach prítomná autokorelácia. Preto sme spracovali aj exaktnú verziu Durbin-Watsonovho testu, pri ktorej sa na výpočet p-hodnoty využíva skutočné rozdelenie testovacej štatistiky d v závislosti od konkrétnej matice regresorov, ktoré získame pomocou spätnej transformácie charakteristickej funkcie. Numerický výpočet tohto komplexného integrálu na nekonečnom intervale $[0, \infty]$ vyžaduje použitie Simpsonovho pravidla (17). Bolo teda potrebné určiť dĺžku integračnej oblasti, jemnosť delenia integračnej oblasti a štartovací bod integrovania, keďže nemôžeme začať integrovanie v bode 0, pretože integrovaná funkcia nie je v bode 0 definovaná. Simulačne sme urobili porovnania vplyvu rôznych hodnôt týchto parametrov a našli sme ich najvhodnejšie hodnoty z pohľadu presnosti výslednej p-hodnoty a časovej náročnosti.

Problémom exaktnej verzie Durbin-Watsonovho testu je jej veľká časová náročnosť, hlavne pri veľkom počte dát. Preto sme sa zaoberali aj dvoma aproximáciami presného rozdelenia, Beta aproximáciou a Henshawovou aproximáciou, ktoré sú časovo menej náročné. Ich výsledky sme porovnali s exaktnou verzou Durbin-Watsonovho testu v časti 2.3, pričom sme porovnávali jednostranné aj obojstranné verzie testov. Pre veľký počet dát n má Beta aproximácia veľmi dobré výsledky, a preto ju odporúčame používať v prípadoch, kedy výpočet exaktnej verzie Durbin-Watsonovho testu trvá príliš dlho. Henshawova aproximácia má pri testovaní pozitívnej autokorelácie výborné výsledky aj pre malé n , avšak pri obojstrannom teste je veľmi nespoľahlivá. Pri vysokom n má dokonca väčšiu časovú náročnosť ako exaktná verzia Durbin-Watsonovho testu.

V štvrtej kapitole sme simulačne porovnali Durbin-Watsonov test, exaktnú verziu Durbin-Watsonovho testu a testy popísané v tretej kapitole, teda Wallisov test, Durbinove testy, Breusch-Godfreyove testy a Box-Pierce-Ljungove testy. Najskôr sme nasimulovali dáta bez posunutých závislých premenných medzi regresormi, no s autokoreláciou

v tvare $AR(1)$ procesu pre chyby regresie a vykreslili silofunkcie (obrázky (36)-(38)). Medzi testami nie je jasný víťaz a s rastúcim počtom dát sa silofunkcie jednotlivých testov k sebe približujú. Wallisov test sme v tomto porovnaní neuvádzali, pretože je určený na zisťovanie prítomnosti autokorelácie štvrtého rádu a v tomto porovnaní mal teda malú silu. Aby sme mohli porovnať aj Wallisov test, nasimulovali sme autokoreláciu v tvare $AR(4)$ procesu. Silofunkcie testov v tomto porovnaní sa rozdelili do dvoch skupín - na tie, ktoré vedú zisťovať autokoreláciu vyššieho rádu a tie, ktoré sú určené iba na zisťovanie autokorelácie prvého rádu (obrázky (39) a (40)). V ďalšej časti sme pridali jednu až štyri posunuté závislé premenné medzi regresory, teda sme vytvorili regresné modely v tvare $AR(1)$ až $AR(4)$ procesu. Najlepšie výsledky v tomto porovnaní dosiahli Durbinove testy.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Box, G. E. P., Pierce, D. A.: *Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 65 (1970), 1509-1526
- [2] Breusch, T. S.: *Testing for Autocorrelation in Dynamic Linear Models*, Australian Economic Papers, Vol. 17 (1978), 334-355
- [3] Durbin, J., Watson, G. S.: *Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression. I*, Biometrika, Vol. 37 (1950), 409-428
- [4] Durbin, J., Watson, G. S.: *Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression. II*, Biometrika, Vol. 38 (1951), 159-177
- [5] Durbin, J., Watson, G. S.: *Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression. III*, Biometrika, Vol. 58 (1971), 1-19
- [6] Durbin, J.: *Testing for Serial Correlation in Least-Squares Regression When Some of the Regressors are Lagged Dependent Variables*, Econometrica, Vol. 38 (1970), 410-421
- [7] Farebrother, R. W.: *The Durbin-Watson Test for Serial Correlation when there is no Intercept in the Regression*, Econometrica, Vol. 48 (1980), 1553-1563
- [8] Giles, D. E. A., King, M. L.: *Fourth-Order Autocorrelation: Further Significance Points for the Wallis Test*, Journal of Econometrics, Vol. 8 (1978), 255-259
- [9] Godfrey, L. G.: *Testing Against General Autoregressive and Moving Average Error Models when the Regressors Include Lagged Dependent Variables*, Econometrica, Vol. 46 (1978), 1293-1301
- [10] Hannan, E. J.: *Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression*, Biometrika, Vol. 44 (1957), 57-66
- [11] Henshaw, R. C.: *Testing Single-Equation Least Squares Regression Models for Autocorrelated Disturbances*, Econometrica, Vol. 34 (1966), 646-660

- [12] Johnston, J., DiNardo, J.: *Econometric Methods*, McGraw-Hill, New York, 1997
- [13] L'Esperance, W. L., Chall, D., Taylor, D.: *An Algorithm for Determining the Distribution Function of the Durbin-Watson Test Statistic*, *Econometrica*, Vol. 44 (1976), 1325-1326
- [14] Ljung, G. M., Box, G. E. P.: *On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models*, *Biometrika*, Vol. 65 (1978), 297-303
- [15] R Core Team: *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2013, <http://www.R-project.org/>
- [16] Savin, N. E., White, K. J.: *The Durbin-Watson Test for Serial Correlation with Extreme Sample Sizes or Many Regressors*, *Econometrica*, Vol. 45 (1977), 1989-1996
- [17] *Stanford University webpage*, <http://web.stanford.edu/~clint/bench/dwcrit.htm>
- [18] Wallis, K. F.: *Testing for Fourth Order Autocorrelation in Quarterly Regression Equations*, *Econometrica*, Vol. 40 (1972), 617-636

Príloha

A.1 Durbin-Watsonov test

A.1.1 Klasický test

```

DurbinWatsonTest <- function(y,X)
{
  X <- as.matrix(X)
  n <- length(y)

  model <- lm(y ~ X)
  e <- model$res
  suma <- 0
  for (i in 2:length(e)) suma <- suma + (e[i]-e[i-1])^2
  DW <- suma/sum(e^2)

  # 2.5% critical values for k'=5 and n=10-100
  critvalDW <- cbind
    (c(0.19143,0.69850,0.97854,1.14450,1.25461,1.33358,1.39341,1.44055,1.47884,1.51068),
     c(2.74901,1.87124,1.72659,1.69160,1.68527,1.68845,1.69507,1.70284,1.71082,1.71862))

  # positive autocorrelation
  if (DW < critvalDW[n/10,1]) result <- "Positive autocorrelation" else
    if (DW > critvalDW[n/10,2]) result <- "NO positive autocorrelation" else
      result <- "inconclusive for positive autocorrelation"
  # negative autocorrelation
  if (DW > 2)
  {
    DW <- 4-DW
    if (DW < critvalDW[n/10,1])
      result <- paste0(result, " and ", "Negative autocorrelation") else
      if (DW > critvalDW[n/10,2])
        result <- paste0(result, " and ", "NO negative autocorrelation") else
        result <- paste0(result, " and ", "inconclusive for negative autocorrelation")
  }
  return <- result
}

```

A.1.2 Exaktný test

```

PHI <- function(t,a)
{ return
  (1/apply(sqrt(1-2*t(t(matrix(a,nrow=length(a),ncol=length(t)))*t*1i)),MARGIN=2,prod)) }

f <- function(t,a)
{ (PHI(-t,a)-PHI(t,a))/(t*1i) }

DWexact <- function(y,X,start,part,hranica)
{
  X <- as.matrix(X); n <- length(y); s <- length(X[1,]); m <- n-(s+1)

  model <- lm(y ~ X)
  e <- model$res
  suma <- 0
  for (i in 2:length(e)) suma <- suma + (e[i]-e[i-1])^2
  DW <- suma/sum(e^2)

  X1 <- cbind(rep(1,times=n),X)
  M <- diag(n) - X1%*%solve(t(X1)%*%X1)%*%t(X1)

  A <- vector(mode="integer",length=n)
  for (i in 1:n) if (i==1 || i==n) A[i] <- 1 else A[i] <- 2
  A <- diag(A)
  for (i in 1:n)
    if (i==1) A[i,i+1] <- -1 else
      if (i==n) A[i,i-1] <- -1 else
        { A[i,i+1] <- -1
          A[i,i-1] <- -1 }

  tau <- eigen(M%*%A)$values
  tau <- tau[1:m]
  a <- tau - DW

  dist <- 2
  if (is.nan(Re(f(dist,a))))
    while (is.nan(Re(f(dist,a)))) dist <- dist-0.1 else

```

```

while (abs(Re(f(dist,a)))>hranica) dist <- dist+1

all <- (0:(part*dist))/part+start
mid <- (all[1:(length(all)-1)]+all[2:length(all)])/2
hodnAB <- f(all,a)
hodnMID <- f(mid,a)
integral <- (all[2]-all[1])/6*
  (sum(hodnAB[1:(length(hodnAB)-1)])+4*sum(hodnMID)+sum(hodnAB[2:length(hodnAB)]))

F <- 1/2+1/(2*pi)*integral
pvalue <- Re(F)
if (pvalue<0.05) result <- "Autocorrelation" else result <- "NO autocorrelation"
return <- result
}

```

A.1.3 Beta aproximácia

```

DWbeta <- function(y,X)
{
  X <- as.matrix(X); n <- length(y); s <- length(X[1,])

  model <- lm(y ~ X)
  e <- model$res
  suma <- 0
  for (i in 2:length(e)) suma <- suma + (e[i]-e[i-1])^2
  DW <- suma/sum(e^2)

  X1 <- cbind(rep(1,times=n),X)
  A <- vector(mode="integer",length=n)
  for (i in 1:n) if (i==1 || i==n) A[i] <- 1 else A[i] <- 2
  A <- diag(A)
  for (i in 1:n)
    if (i==1) A[i,i+1] <- -1 else
      if (i==n) A[i,i-1] <- -1 else
        { A[i,i+1] <- -1
          A[i,i-1] <- -1 }

  P1 <- sum(diag(A)) - sum(diag(t(X1)%*%A%*%X1%*%solve(t(X1)%*%X1)))
}

```

```

Q1 <- sum(diag(A%*%A)) - 2*sum(diag(t(X1)%*%A%*%A%*%X1%*%solve(t(X1)%*%X1))) +
      sum(diag((t(X1)%*%A%*%X1%*%solve(t(X1)%*%X1))^2))
E <- P1/(n-s-1)
var <- 2*(Q1-P1*E)/((n-s-1)*(n-s+1))
K <- (4-E)/E
P <- (16*K-(1+K)^2*var)/((1+K)^3*var)
Q <- K*P

pvalue <- pbeta(1/4*DW, P, Q, ncp = 0, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
if (pvalue<0.05) result <- "Autocorrelation" else result <- "NO autocorrelation"
return <- result
}

```

A.1.4 Henshawova aproximácia

```

DWhenshaw <- function(y,X)
{
  X <- as.matrix(X); n <- length(y); s <- length(X[1,]); k <- s+1; m <- n-k

  model <- lm(y ~ X)
  e <- model$res
  suma <- 0
  for (i in 2:length(e)) suma <- suma + (e[i]-e[i-1])^2
  DW <- suma/sum(e^2)

  X1 <- cbind(rep(1,times=n),X)
  A <- vector(mode="integer",length=n)
  for (i in 1:n) if (i==1 || i==n) A[i] <- 1 else A[i] <- 2
  A <- diag(A)
  for (i in 1:n)
    if (i==1) A[i,i+1] <- -1 else
      if (i==n) A[i,i-1] <- -1 else
        { A[i,i+1] <- -1
          A[i,i-1] <- -1 }

  K <- A - A%*%X1%*%solve(t(X1)%*%X1)%*%t(X1)

  E <- sum(diag(K))/(n-k)
}

```

```

var <- 2*((n-k)*sum(diag(K'%%K))-sum(diag(K))^2)/((n-k)^2*(n-k+2))
b1 <- 8*((n-k)^2*sum(diag(K'%%K'%%K))-3*(n-k)*sum(diag(K))*sum(diag(K'%%K))+
      2*sum(diag(K))^3)/((n-k)^3*(n-k+2)*(n-k+4)*var^(3/2))
b2 <- 12*((n-k)^3*(4*sum(diag(K'%%K'%%K'%%K))+sum(diag(K'%%K))^2)-
      2*(n-k)^2*(8*sum(diag(K))*sum(diag(K'%%K'%%K))+sum(diag(K'%%K))*sum(diag(K))^2)+
      (n-k)*(24*sum(diag(K'%%K))*sum(diag(K))^2+sum(diag(K))^4)-
      12*sum(diag(K))^4)/((n-k)^4*(n-k+2)*(n-k+4)*(n-k+6)*var^2)

W <- (4*b2-3*b1^2)/(3*b1^2-2*b2+6)
Z <- (b1*(W^2-1))/((16*W+b1^2*(W+1)^2)^(1/2))
P <- 1/2*(W-Z-1)
Q <- 1/2*(W+Z-1)

Ex <- P/(P+Q)
varx <- P*Q/((P+Q)^2*(P+Q+1))
bot <- E-Ex*(var/varx)^(1/2)
top <- (var/varx)^(1/2) + bot

x <- Re((DW-bot)/(top-bot))
pvalue <- pbeta(x, P, Q, ncp = 0, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
if (pvalue<0.05) result <- "Autocorrelation" else result <- "NO autocorrelation"
return <- result
}

```

B.2 Wallisov test

```

WallisTest <- function(y,X)
{
  X <- as.matrix(X); n <- length(y)

  model <- lm(y ~ X)
  e <- model$res
  suma <- 0
  for (i in 5:length(e)) suma <- suma + (e[i]-e[i-4])^2
  DW4 <- suma/sum(e^2)

  # 2.5% critical values for k'=5 and n=20,40,60,80,100

```

```
critvalW <- cbind(c(0.469,1.001,1.234,1.365,1.450),
                 c(1.428,1.516,1.578,1.622,1.655))

# positive autocorrelation
if (DW4 < critvalW[n/20,1]) result <- "Positive autocorrelation" else
  if (DW4 > critvalW[n/20,2]) result <- "NO positive autocorrelation" else
    result <- "inconclusive for positive autocorrelation"
# negative autocorrelation
if (DW4 > 2)
{
  DW4 <- 4-DW4
  if (DW4 < critvalW[n/20,1])
    result <- paste0(result, " and ", "Negative autocorrelation") else
    if (DW4 > critvalW[n/20,2])
      result <- paste0(result, " and ", "NO negative autocorrelation") else
      result <- paste0(result, " and ", "inconclusive for negative autocorrelation")
}
return <- result
}
```

C.3 Durbinov test

```
DurbinTest <- function(y,X,r)
{
  n <- length(y); X <- as.matrix(X)

  Y <- matrix(ncol=r,nrow=n)
  if (r>0) { for (i in 1:r)
    { nuly=rep(0,i)
      Y[,i]=t(cbind(t(nuly),t(y[1:(n-i)]))) }
  }
  Z <- cbind(Y,X)
  if (r>0) { Z <- Z[-(1:r),]
    y <- y[-(1:r)]
    n <- n-r }

  model <- lm(y ~ Z)
```

```

e <- model$res

if (r==0) varb1 <- 0 else varb1 <- coef(summary(model))[, "Std. Error"][2]^2

suma <- 0
for (i in 2:n) suma <- suma + e[i]*e[i-1]
phi <- suma/sum(e^2)
h <- phi*sqrt(n/(1-n*varb1))

if (h=="NaN") return <- "NaN" else
{
  if (h > qnorm(0.975, mean = 0, sd = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE) |
      h < qnorm(0.025, mean = 0, sd = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE))
    result <- "Autocorrelation" else result <- "NO autocorrelation"
return <- result
}
}

```

C.3.1 Asymptoticky ekvivalentný test

```

DurbinTestA <- function(y,X,r)
{
  n <- length(y); X <- as.matrix(X)

  Y <- matrix(ncol=r,nrow=n)
  if (r>0) { for (i in 1:r)
    { nuly=rep(0,i)
      Y[,i]=t(cbind(t(nuly),t(y[1:(n-i)]))) }
  }

  Z <- cbind(Y,X)
  if (r>0) { Z <- Z[-(1:r),]
    y <- y[-(1:r)]
    n <- n-r }

  model1 <- lm(y ~ Z1)
  e <- model1$res

  E <- cbind(0,t(e[1:n-1]))

```

```

Z2 <- cbind(t(E),Z1)

model2 <- lm(e ~ Z2)

if (coef(summary(model2))[, "Pr(>|t|)"][2] > 0.05)
  result <- "NO autocorrelation" else result <- "Autocorrelation"
return <- result
}

```

C.3.2 Test autokorelácie AR(p)

```

DurbinTestARp <- function(y,X,r,p)
{
  n <- length(y); s <- length(X[1,]); X <- as.matrix(X)

  Y <- matrix(ncol=r,nrow=n)
  if (r>0) { for (i in 1:r)
    { nuly=rep(0,i)
      Y[,i]=t(cbind(t(nuly),t(y[1:(n-i)]))) }
    }
  Z <- cbind(Y,X)
  if (r>0) { Z <- Z[-(1:r),]
    y <- y[-(1:r)]
    n <- n-r }

  model1 <- lm(y ~ Z)
  e <- model1$res

  E <- matrix(ncol=p,nrow=n)
  for (i in 1:p)
    { nuly=rep(0,i)
      E[,i]=t(cbind(t(nuly),t(e[1:(n-i)]))) }
  EZ <- cbind(E,Z)

  model2 <- lm(e ~ EZ)
  v <- model2$res
  F <- (t(e)%*%E)%*%solve(t(E)%*%E-t(E)%*%Z)%*%solve(t(Z)%*%Z)%*%t(Z)%*%E)%*%t(E)%*%e)*
    (n-p-r-s)/(t(v)%*%v*p)
}

```

```
if (p*F > qchisq(.95,df=p)) result <- "Autocorrelation" else
  result <- "NO autocorrelation"
return <- result
}
```

D.4 Breusch-Godfreyov test

```
BreuschGodfreyTest <- function(y,X)
{
  n <- length(y); X <- as.matrix(X)

  model1 <- lm(y ~ X)
  e <- model1$res

  E <- cbind(0,t(e[1:n-1]))
  X2 <- cbind(X,t(E))

  model2 <- lm(e ~ X2)
  R2 <- summary(model2)$r.squared

  if (n*R2 > qchisq(.95,df=1)) result <- "Autocorrelation" else
    result <- "NO autocorrelation"
  return <- result
}
```

D.4.1 Test autokorelácie AR(p)

```
BreuschGodfreyTestARp <- function(y,X,p)
{
  n <- length(y); X <- as.matrix(X)

  model1 <- lm(y ~ X)
  e <- model1$res

  E <- matrix(ncol=p,nrow=n)
  for (i in 1:p)
    { nuly=rep(0,i)
      E[,i]=t(cbind(t(nuly),t(e[1:(n-i)]))) }
}
```

```

X2 <- cbind(X,E)

model2 <- lm(e ~ X2)
R2 <- summary(model2)$r.squared

if (n*R2 > qchisq(.95,df=p)) result <- "Autocorrelation" else
  result <- "NO autocorrelation"
return <- result
}

```

D.4.2 Asymptoticky ekvivalentný test

```

BreuschGodfreyTestEq <- function(y,X,r,p)
{
  n <- length(y); X <- as.matrix(X)

  Y <- matrix(ncol=r,nrow=n)
  if (r>0) { for (i in 1:r)
    { nuly=rep(0,i)
      Y[,i]=t(cbind(t(nuly),t(y[1:(n-i)]))) }
    }

  Z <- cbind(Y,X)
  if (r>0) { Z <- Z[-(1:r),]
    y <- y[-(1:r)]
    n <- n-r }

  model1 <- lm(y ~ Z)
  e <- model1$res

  E <- matrix(ncol=p,nrow=n)
  for (i in 1:p)
  {
    nuly=rep(0,i)
    E[,i]=t(cbind(t(nuly),t(e[1:(n-i)])))
  }

  LM <- t(e)%*%E%*%solve(t(E)%*%E-t(E)%*%Z%*%solve(t(Z)%*%Z)%*%t(Z)%*%E)%*%t(E)%*%e*n/
    (t(e)%*%e*p)

```

```
if (p*LM > qchisq(.95,df=p)) result <- "Autocorrelation" else
  result <- "NO autocorrelation"
return <- result
}
```

E.5 Box-Piercov test

```
BoxPierce <- function(y,X,r,m)
{
  n <- length(y); X <- as.matrix(X)

  Y <- matrix(ncol=r,nrow=n)
  if (r>0) { for (i in 1:r)
    { nuly=rep(0,i)
      Y[,i]=t(cbind(t(nuly),t(y[1:(n-i)]))) }
  }
  Z <- cbind(Y,X)
  if (r>0) { Z <- Z[-(1:r),]
    y <- y[-(1:r)]
    n <- n-r }

  model <- lm(y ~ Z)
  e <- model$res

  R <- matrix(ncol=m,nrow=1)
  for (j in 1:m)
  {
    suma <- 0
    for (i in (j+1):n) suma <- suma + e[i]*e[i-j]
    R[j] <- suma/sum(e^2)
  }
  Q <- n*sum(R^2)

  if (Q > qchisq(.95,df=(m-r))) result <- "Autocorrelation" else
    result <- "NO autocorrelation"
  return <- result
}
```

E.5.1 Upravený Ljung-Boxov test

```

revisedLjungBox <- function(y,X,r,m)
{
  n <- length(y); X <- as.matrix(X)

  Y <- matrix(ncol=r,nrow=n)
  if (r>0) { for (i in 1:r)
    { nuly=rep(0,i)
      Y[,i]=t(cbind(t(nuly),t(y[1:(n-i)]))) }
    }
  Z <- cbind(Y,X)
  if (r>0) { Z <- Z[-(1:r),]
    y <- y[-(1:r)]
    n <- n-r }

  model <- lm(y ~ Z)
  e <- model$res

  R <- matrix(ncol=m,nrow=1)
  for (j in 1:m)
  {
    suma <- 0
    for (i in (j+1):n) suma <- suma + e[i]*e[i-j]
    R[j] <- suma/sum(e^2)
  }
  suma <- 0
  for (j in 1:m) suma <- suma + R[j]^2/(n-j)
  rQ <- n*(n+2)*suma

  if (rQ > qchisq(.95,df=(m-r))) result <- "Autocorrelation" else
    result <- "NO autocorrelation"
  return <- result
}

```