

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



PREDIKCIA FINANČNÝCH ČASOVÝCH RADOV  
POMOCOU MOVING AVERAGE FILTROV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**PREDIKCIA FINANČNÝCH ČASOVÝCH RADOV  
POMOCOU MOVING AVERAGE FILTROV**

**DIPLOMOVÁ PRÁCA**

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie  
Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Vedúci práce: Mgr. Soňa Kilianová, PhD.



## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Katarína Kocsisová  
**Študijný program:** ekonomicko-finančná matematika a modelovanie  
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský  
**Sekundárny jazyk:** anglický

**Názov:** Predikcia finančných časových radov pomocou moving average filtrov  
*Financial time series prediction using moving average filters*

**Cieľ:** Cieľom práce je spracovať rôzne moving average filtre z pohľadu teórie digitálnych signálov a preskúmať možnosti ich využitia na predikciu časových radov. Filtre numericky implementujeme a porovnáme na reálnych dátach.

**Vedúci:** Mgr. Soňa Kilianová, PhD.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
**Dátum zadania:** 21.01.2016

**Dátum schválenia:** 25.01.2016  
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

**Podakovanie** Úprimná vďaka patrí vedúcej diplomovej práce Mgr. Soni Kilianovej, PhD. za odborné rady, ochotu a pomoc, ktoré mi pri písaní pomohli. Takisto ďakujem aj svojej rodine, kamarátom a známym za podporu a ústretovosť počas písania práce.

# Abstrakt

KOCSISOVÁ, Katarína: Predikcia finančných časových radov pomocou moving average filtrov [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Soňa Kilianová, PhD., Bratislava, 2017, 62s.

Cieľom našej práce je predstaviť moving average filtre z pohľadu teórie digitálnych signálov. V prvej kapitole uvedieme základné pojmy z oblasti digitálnych signálov a následne sa budeme bližšie venovať LTI filtrom, pod ktoré moving average filtre patria. Ku každému zo spracovaných filtrov vypočítame ich charakteristiky, teda impulznú odozvu, frekvenčnú odozvu a prenosovú funkciu, ktoré filter úplne popisujú v časovej, frekvenčnej a  $z$ -doméne. Filtre aplikujeme na finančné signály s rôznymi priebehmi a výstupy filtrov porovnáme na základe odchýlok od skutočných časových radov. V poslednej kapitole predstavíme viaceré možnosti predikcie pomocou moving average filtrov a porovnáme ich na základe odchýlok.

**Kľúčové slová:** digitálny signál, moving average filter, impulzná odozva, frekvenčná odozva, prenosová funkcia, predikcia

## Abstract

KOCSISOVÁ, Katarína: Financial time series prediction using moving average filters [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Soňa Kilianová, PhD., Bratislava, 2017, 62p.

The aim of this thesis is to introduce moving average filters using Digital Signal Processing. In chapter one, we mention some basics concerning digital signals and LTI filters, where moving average filters belong. With every moving average filter we display also their characteristics: impulse response, frequency response and transfer function fully describing the filter in time, frequency and  $z$ -domain. In the next part, the filters are applied to financial time series with different behaviour over time and the outputs are compared with respect to calculated errors. The last chapter includes predictions using moving average filters and comparison of their deviations.

**Keywords:** digital signal, moving average filter, impulse response, frequency response, transfer function, prediction

# Obsah

Úvod	8
<b>1 Digitálne signály</b>	<b>10</b>
<b>2 LTI filtre a ich charakteristiky</b>	<b>12</b>
2.1 Prehľad definícií a transformácií . . . . .	12
2.2 Delenie filtrov . . . . .	14
<b>3 Moving average filtre</b>	<b>16</b>
3.1 Simple moving average filter . . . . .	17
3.2 Exponentially weighted moving average filter . . . . .	21
3.3 Double exponentially weighted moving average filter . . . . .	26
3.4 Triple exponentially weighted moving average filter . . . . .	30
3.5 Double exponential moving average filter . . . . .	32
3.6 Porovnanie filtrov . . . . .	36
<b>4 Predikcie pomocou moving average filtrov</b>	<b>41</b>
4.1 Predikcia pomocou Exponentially weighted moving average filtra 1 . . .	41
4.2 Predikcia pomocou Exponentially weighted moving average filtra 2 . . .	42
4.3 Predikcia pomocou Double exponentially weighted moving average filtra 1	43
4.4 Predikcia pomocou Double exponentially weighted moving average filtra 2	46
4.5 Porovnanie predikcií . . . . .	47
<b>Záver</b>	<b>51</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>53</b>
<b>Príloha A</b>	<b>55</b>

# Úvod

Signál je funkcia opisujúca správanie javu v čase alebo priestore. Môže byť spojitý (analogový) alebo diskretný (digitálny). S oboma typmi signálov sa pracuje podobne dobre. V teórii nie je problém pracovať so spojitými signálmi, avšak pomocou techniky vieme zaznamenávať iba diskretné signály, čím strácame kvalitu signálu. Termíny signál a časový rad budeme v tejto práci používať ako synonymá.

V prvej časti tejto práce predstavíme základné pojmy z teórie digitálnych signálov, ako diskretná Fourierova transformácia či  $z$ -transformácia z [13], [14] a [16], ktoré budeme ďalej používať. Najčastejšie sa spracovanie digitálnych signálov (Digital Signal Processing) vo finančníctve používa na odhad zmeny, prípadne určovanie komponentov najviac vplyvujúcich na zmeny finančných signálov, napríklad ceny opcí a akcií, výnosy [3]. Taktiež sú metódy používané v tejto oblasti vhodné na očistenie dát od šumu a odhalenie cyklov v dátach.

Následne sa budeme venovať teórii digitálnych filtrov, ktoré sú dôležitými nástrojmi používanými na analýzu signálov. Filter je nástroj, matematický vzorec vhodný na očistenie podstatných častí signálu od šumu alebo iných nechcených komponentov alebo aj na akékoľvek iné spracovanie signálu. Každý filter je možné úplne opísať na základe jeho charakteristík, teda impulznej odozvy v časovej doméne, frekvenčnej odozvy vo frekvenčnej doméne a prenosovej funkcie v  $z$ -doméne. V teórii digitálnych signálov existuje veľké množstvo filtrov. Na finančnú analýzu sa často používajú moving average filtre.

V tretej kapitole práce sa budeme venovať rôznym moving average filtrom podľa vzoru článku [3]. Najjednoduchší a zrejme aj najznámejší moving average filter je Simple moving average filter, ktorý ako jediný z filtrov spomenutých v tejto práci patrí medzi FIR filtre. V praxi často využívaným filtrom je Exponentially weighted moving average filter, ktorý je IIR filtrom. Určitým rozšírením alebo vylepšením tohto filtra sú Double exponentially weighted moving average filter a Triple exponentially weighted moving average filter, ktorým sa budeme tiež venovať. Narozdiel od článku [3] vypočítame charakteristiky aj pre Double exponential moving average filter z [1] patriaci tiež medzi IIR filtre. V článku [3] a [4] sledovali moving average filtre pri obchodovacích stratégiách a na základe zisku pri používaní niektorých filtrov urobili porovnanie. V tejto práci



budeme porovnávať výstupy filtrov na základe odchýlok od skutočných cien akcií. Od výstupov filtrov očakávame vývoj podobný skutočnému časovému radu s odstránením krátkodobých vzrastov alebo poklesov.

Moving average filtre sú vhodné na jednokrokovú predikciu, teda predikciu jednej budúcej hodnoty. V poslednej kapitole urobíme prehľad viackrokových predikcií (predikcie viacerých hodnôt) pomocou niektorých z týchto filtrov. Predstavíme predikcie pomocou Exponentially weighted moving average filtra z [11] a [5] a predikcie pomocou Double exponentially weighted moving average filtra z článkov [10] a [8]. Následne spomenuté predikcie porovnáme na základe odchýlok od skutočného vývoja cien akcií.

# 1 Digitálne signály

Pre analýzu finančných dát je potrebné najskôr definovať určité teoretické pojmy, ako sú digitálny signál, diskrétna Fourierova transformácia či  $z$ -transformácia. Budeme vychádzať z [13], [14], [16] a [3]. Spomínané transformácie sú dôležité najmä preto, aby sme mohli signály analyzovať nielen v časovej doméne, ale aj vo frekvenčnej a takzvanej  $z$ -doméne.

Signály poznáme analógové a digitálne. Väčšinu signálov v súčasnosti zaznamenávame digitálnym spôsobom, preto sa aj signály, ktoré sú v prírode spojité, stávajú digitálnymi.

**Definícia 1.1.** *Diskrétny (digitálny) signál je postupnosť čísel*

$$x = \{\dots, x[-1], x[0], x[1], x[2], \dots\}.$$

Dôležitú informáciu o signále získame z jeho energie.

**Definícia 1.2.** *Energia digitálneho signálu  $x = \{\dots, x[-1], x[0], x[1], x[2], \dots\}$  je daná vzťahom:*

$$E_x = \|x\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2.$$

Signál s konečnou dĺžkou má vždy konečnú energiu. Energiu používame pri porovnaní filtrov či určovaní stability filtrov.

Ďalším dôležitým pojmom je diskrétna Fourierova transformácia, ktorá je vlastne ekvivalentom Fourierovej transformácie pre konečný počet prvkov. Definíciu diskkrétnej Fourierovej transformácie uvedieme z [14]:

**Definícia 1.3.** *Diskrétna Fourierova transformácia (DFT) signálu*

$x = \{x[0], x[1], x[2], \dots, x[N-1]\}$  *je daná vzťahom:*

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w_k[n], \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (1)$$

kde  $w_k$  je bázový vektor DFT s prvkami

$$w_k[n] = e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (2)$$

Diskrétna Fourierova transformácia je teda iba zmenou bázy, z ktorej sa na signál pozeráme. Z predpisu DFT vidíme, že koeficienty  $X[k]$  sú vo všeobecnosti komplexné čísla. Koeficienty DFT sa používajú na analýzu vo frekvenčnej doméne.

Podľa [14] vieme vďaka tejto transformácii rozložiť signály na súčet  $N$  sinusoid daných koeficientmi  $X[k]$  s magnitudami  $|X[k]|$  a fázami  $\angle X[k]$ . Koeficienty  $X[k]$  nazývame spektrum signálu.

Uvedieme definíciu  $z$ -transformácie z [14]:

**Definícia 1.4.**  $z$ -transformácia signálu  $x = \{\dots, x[-1], x[0], x[1], x[2], \dots\}$  je funkcia komplexnej premennej  $z$ :

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}. \quad (3)$$

Nech  $x[n], x_1[n], x_2[n]$  sú diskrétné signály a ich  $z$ -transformácie označíme  $X(z), X_1(z), X_2(z)$  a  $a, b \in \mathbb{C}$ . Potom pre  $z$ -transformáciu platia nasledovné vlastnosti [13]:

- linearita

$$Z \{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aX_1(z) + bX_2(z),$$

- škálovanie

$$Z \{a^n x[n]\} = X\left(\frac{z}{a}\right),$$

- časové otočenie

$$Z \{x[-n]\} = X(z^{-1}),$$

- časový posun

$$Z \{x[n-d]\} = z^{-d}X(z),$$

- konvolúcia

$$Z \{x_1[n] * x_2[n]\} = X_1(z)X_2(z).$$

Zo spomínaných vlastností využijeme predovšetkým škálovanie, časový posun a konvolúciu, ktoré výrazne uľahčia výpočty. Poslúžia pri výpočte charakteristík filtrov či výpočte energií filtrov neskôr v tejto práci.

## 2 LTI filtre a ich charakteristiky

System (filter) je matematický vzorec, ktorý robí na signáloch zmeny, spracováva ich. Diskrétné systémy delíme do viacerých tried. V tejto časti sa budeme zaoberať LTI (linear time-invariant) systémami, ktoré sa často vyskytujú v praxi. V tejto časti budeme vychádzať predovšetkým z [13].

### 2.1 Prehľad definícií a transformácií

Ak  $H$  bude označovať LTI filter a  $x, y$  sú ľubovoľné vstupy, tak vlastnosti tohto systému sú:

- linearita: pre každé  $a \in \mathbb{C}$  platí:

$$H(ax) = aH(x),$$

$$H(x + y) = H(x) + H(y),$$

- časová invariantnosť: pre ľubovoľný časový posun  $k \in \mathbb{Z}$  platí:

$$y[n - k] = H(x[n - k]).$$

System možno plne charakterizovať v časovej doméne pomocou impulznej odozvy  $h[n]$ . Impulzná odozva je odozva systému na impulz  $\delta[n]$ ,

$$h[n] = H(\delta[n]),$$

kde  $\delta[n]$  je jednotkový impulz definovaný ako

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases} \quad (4)$$

Jednotkový impulz nazývame aj Kroneckerova delta (funkcia). Ak poznáme impulznú odozvu filtra  $h[n]$ , tak pre ľubovoľný konečný signál  $x$  je odozva LTI filtra daná vzťahom

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n - k], \quad n = 0, \dots, N - 1. \quad (5)$$

Tento vzťah je možné ekvivalentne zapísať ako  $y[n] = x[n] * h[n]$ . Túto matematickú operáciu nazývame konvolúcia.

Fourierovou transformáciou impulznej odozvy dostávame ďalšiu dôležitú charakteristiku filtra, takzvanú frekvenčnú odozvu:

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-i\omega k}. \quad (6)$$

Frekvenčná odozva úplne charakterizuje systém vo frekvenčnej doméne. To znamená, že bez toho, aby sme čokoľvek vedeli o vstupe, vieme povedať, ako bude vyzerat výstup. Zobrazením frekvenčnej odozvy tiež zistíme zhladzovaciu kvalitu filtra. Čím budú hodnoty prislúchajúce vyšším frekvenciám bližšie k hodnote 0, tým bude signál viac zhladený. Ako sa píše v [2], z frekvencií vo finančných signáloch vieme vyčítať ich správanie. Nízke frekvencie zodpovedajú dlhším cyklom, vysoké frekvencie zodpovedajú šumu.

$z$ -transformáciou impulznej odozvy dostaneme prenosovú funkciu. Pripomeňme si predpis odozvy LTI filtra (5):

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k], \quad (7)$$

ako sme spomenuli, túto rovnicu môžeme ekvivalentne zapísať ako

$$y[n] = x[n] * h[n], \quad (8)$$

čo je konvolúcia, teda vďaka poslednej vlastnosti  $z$ -transformácie z prvej kapitoly dostávame

$$Y(z) = X(z)H(z). \quad (9)$$

Vyjadrením  $H(z)$  zo vzťahu (9) dostávame predpis prenosovej funkcie:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}, \quad (10)$$

kde  $X(z)$  je  $z$ -transformácia vstupného signálu  $x[n]$ ,  $Y(z)$  je  $z$ -transformácia výstupného signálu  $y[n]$  a  $H(z)$  je prenosová funkcia. Vďaka prenosovej funkcii  $H(z)$  získame odpoveď filtra na ľubovoľný vstup v  $z$ -doméne. Z hľadiska interpretácie nás budú zaujímať nuly a póly prenosovej funkcie filtra. Nuly sú hodnoty premennej  $z$ , pre ktoré je čitateľ prenosovej funkcie  $H(z)$  rovný 0 a póly sú hodnoty premennej  $z$ , pre ktoré je menovateľ rovný 0. Nuly a póly prenosovej funkcie sa zvyknú zobrazovať do diagramu pólov a núl (zero-pole diagram), ktorý zobrazuje jednotkovú kružnicu v komplexnej  $z$ -rovine, pričom nuly sa označujú pomocou „o“ a póly bývajú značené ako „x“.

Ak všetky póly ležia vo vnútri jednotkového kruhu, systém je BIBO stabilný. Ak je energia filtra konečná, tak je systém BIBO (Bounded Input Bounded Output) stabilný. BIBO stabilita systému je dobrá vlastnosť, ktorá zabezpečuje, že výstup filtra nebude divergovať do nekonečna, ak sme ako vstup zadali konečný signál.

## 2.2 Delenie filtrov

Pre správny výber filtra na zhladenie dát je vhodné si vybrať filter s určitými špecifickými vlastnosťami. V tejto podkapitole uvedieme dve delenia, jedno na základe tvaru magnitudovej odozvy a druhé podľa dĺžky impulznej odozvy.

Podľa tvaru magnitudovej odozvy  $|H(e^{i\omega})|$ <sup>1</sup> delíme LTI filtre na [14]:

- low-pass filtre, ktoré ponechávajú nízke frekvencie nezmenené a vysoké frekvencie zoslabia,
- high-pass filtre, ktoré ponechávajú vysoké frekvencie nezmenené a nízke frekvencie zoslabia,
- band pass filtre, ktoré prepúšťajú určitý pás frekvencií a frekvencie mimo tohto pásu sú zoslabené,
- stop pass filtre, ktoré zoslabujú určitý pás frekvencií a ostatné frekvencie zostávajú nezmenené.

V ďalšej časti nás budú zaujímať hlavne low-pass filtre, teda filtre, ktoré ponechávajú nízke frekvencie nezmenené a vysoké frekvencie zoslabia. Low-pass filtre sú dôležité z toho dôvodu, že zhladzujú signál, odstraňujú krátkodobé kolísanie a zachovávajú dlhodobý trend, vďaka čomu sú vhodné na analýzu či predikciu signálu.

Podľa [13] delíme LTI filtre na základe dĺžky impulznej odozvy na:

- FIR (finite impulse response) filtre, ktorých impulzná odozva je konečnej dĺžky,
- IIR (infinite impulse response) filtre, ktorých impulzná odozva je nekonečnej dĺžky.

---

<sup>1</sup>V literatúre sú zápisy  $H(e^{i\omega})$  a  $H(\omega)$  ekvivalentné.

Diskrétné LTI filtre môžu byť tvorené autoregresnými členmi a moving average členmi. Podľa článku [2] je možné každý diskrétny LTI systém zapísať v tvare:

$$y[n] = - \sum_{k=1}^{N-1} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M-1} b_k x[n-k], \quad (11)$$

kde členy prvej sumy nazývame autoregresné členy a členy druhej sumy sú moving average členy. Autoregresné členy sú výstupy filtra z predošlých períód a moving average členy sú hodnoty diskrétneho signálu v rôznych časoch.

FIR filter je nerekurzívny, čo znamená, že neobsahuje žiadne autoregresné členy, a teda je tvorený iba moving average členmi, členmi vstupného signálu, čiže všetky koeficienty  $a_k$  sú rovné 0. Príkladom v praxi bežne používaného FIR filtra je Simple moving average filter.

Narozdiel od FIR filtra je IIR filter rekurzívny, teda obsahuje aj autoregresné členy, predošlé výstupy tohto filtra, aspoň jeden koeficient  $a_k$  je nenulový. Podľa článku [3] je možné predpisy všetkých IIR filtrov prepísať iba pomocou moving average členov, avšak je potrebných nekonečne veľa takýchto členov. Medzi IIR filtre zas patria iné moving average, napríklad Exponentially weighted moving average filter, Double a Triple exponentially weighted moving average filtre, Double exponential moving average filter a ďalšie.

Moving average (nazývaný aj rolling average, running average, moving mean alebo rolling mean) filtre sú vo všeobecnosti vhodné na odhaľovanie trendov v dátach, zhladenie dát, jednokrokovú predikciu či pri obchodovacích stratégiách [3].

### 3 Moving average filtre

Ako sme spomenuli v predošlej kapitole, moving average filtre sa často používajú na odhaľovanie trendov v dátach, zhladenie dát či predikciu, čo sa deje pomocou priemerovania starších hodnôt signálu. Podľa [3] možno najznámejšie moving average filtre, Simple moving average filter a Exponentially weighted moving average filter zapísať v tvare diferenčnej rovnice:

$$y[n] = w_0x[n] + w_1x[n-1] + \dots + w_{N-1}x[n-N+1] = \sum_{k=0}^{N-1} w_kx[n-k], \quad (12)$$

kde  $w_k$  je váha prislúchajúca vstupu  $x[n-k]$ , teda prirodzene musí platiť  $\sum_{k=0}^{N-1} w_k = 1$ ,  $w_k \geq 0$  pre  $k = 0, \dots, N-1$  a  $N \in \mathbb{N}$ . Pri Simple moving average filtri sú všetky váhy rovnaké, pri Exponentially weighted moving average filtri váhy exponenciálne klesajú, na základe čoho získali svoje pomenovania.

Vidíme, že predpis moving average filtrov (12) a impulznej odozvy (5) majú podobný tvar. Ako sa píše v [6], pre FIR filter platí:

$$h[n] = \begin{cases} w_n, & n = 0, \dots, M-1, \\ 0, & \text{inak,} \end{cases} \quad (13)$$

kde  $h[n]$  je impulzná odozva filtra,  $w_n$  je váha  $n$ -tej zložky vstupného signálu a  $M$  je počet priemerovaných dní. Jediným FIR filtrom, ktorému sa budeme venovať, je Simple moving average filter. Podľa [3] by však mal tento vzťah platiť aj pre ostatné moving average filtre zo skupiny IIR filtrov.

Pri predikcii pomocou moving average filtrov sa zvykne zavádzať pojem priemerný vek dát, [9]. Priemerný vek dát je obdobie, o ktoré je výstup filtra približne oneskorený oproti skutočnému signálu.

V tejto kapitole sa budeme venovať Simple moving average filtru, Exponentially weighted moving average filtru, Double a Triple exponentially weighted moving average filtrom podľa vzoru [3]. Rovnakým spôsobom predstavíme aj Double exponential moving average z [1].

Pre potreby získania výstupu moving average filtrov je potrebné spraviť inicializáciu prvého výstupu  $y[0]$ . Podľa [17] sa  $y[0]$  zvykne položiť rovná rôznym hodnotám, napríklad:



- $x[0]$ ,
- priemeru všetkých zložiek signálu,
- priemeru prvých  $j$  pozorovaní, kde  $j = 0, \dots, N - 1$ ,
- priemeru polovice všetkých zložiek vstupného signálu.

V prostredí *Matlab* je zabudovaná funkcia *tsmovavg.m*, vďaka ktorej je možné jednoducho vytvoriť výstup najznámejších moving average filtrov, napríklad výstup Simple moving average filtra alebo Exponentially weighted moving average filtra. Niekoľkonásobným použitím tejto funkcie je možné získať výstupy Double a Triple exponentially weighted moving average filtrov. Jednoduchými úpravami vieme určiť aj výstup Double exponential moving average filtra. Prvý výstup tejto funkcie sa tvorí, až keď poznáme prvých  $M$  hodnôt signálu, a to takým spôsobom, že za predošlý výstup zvolí priemer prvých  $M$  hodnôt vstupného signálu.

### 3.1 Simple moving average filter

Simple moving average (nazývaný aj Single moving average) filter je jednoduchý FIR filter, ktorého výstupom je priemer  $M$  po sebe idúcich hodnôt signálu. Z [3] vieme, že jeho predpis je

$$y[n] = \frac{1}{M}(x[n] + x[n-1] + \dots + x[n-M+1]) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k], \quad (14)$$

kde  $x[n]$  je  $n$ -tá zložka vstupného signálu,  $y[n]$  je  $n$ -tá zložka výstupu filtra a  $M$  je počet priemerovaných hodnôt vstupu. Výstup filtra závisí od kombinácie  $M$  najnovších po sebe idúcich hodnôt signálu a staršie hodnoty signálu neberie do úvahy. Ako sa píše v [16], alternatívne môžu byť body vstupného signálu vyberané symetricky okolo indexu výstupu, teda

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} x[n-k],$$

ktorý však platí iba pre nepárne  $M$ .

Ako vidíme z predpisu filtra, Simple moving average filter neberie do úvahy, či bola hodnota signálu zaznamenaná v blízkej alebo dávnejšej minulosti, ale všetkým priemerovaným hodnotám priradí rovnakú váhu  $\frac{1}{M}$ . Podľa autorov knihy [16] je to

logické, pretože každá zložka vstupu je zašumená rovnako ako zložka pred ním alebo po ňom nasledujúca. Ďalej dodávajú, že napriek jeho jednoduchému predpisu ide o optimálny filter na redukovanie šumu pri zachovaní ostrej krokovej odozvy<sup>1</sup>.

Teraz vypočítame hodnoty charakteristík Simple moving average filtra: impulznú odozvu, frekvenčnú odozvu a prenosovú funkciu. Potom dosadíme hodnotu  $M = 10$ , počet priemerovaných zložiek vstupu, aby bolo možné zobrazíť spomínané charakteristiky graficky.

Impulznú odozvu Simple moving average filtra vypočítame pre vstupný signál v tvare jednotkového impulzu

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \delta[n-k] = \begin{cases} \frac{1}{M}, & n = 0, \dots, M-1, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Ako sme už spomenuli na začiatku tejto kapitoly, členy impulznej odozvy sú zároveň váhami prislúchajúcimi k jednotlivým zložkám vstupu. Na obrázku 1 je zobrazená impulzná odozva pre  $M = 10$ . Ako vidíme aj z výpočtu impulznej odozvy Simple moving average filtra, všetky jej členy majú rovnakú hodnotu. Keďže má impulzná odozva konečný počet nenulových členov,  $M = 10$ , tento filter patrí do skupiny FIR filtrov.

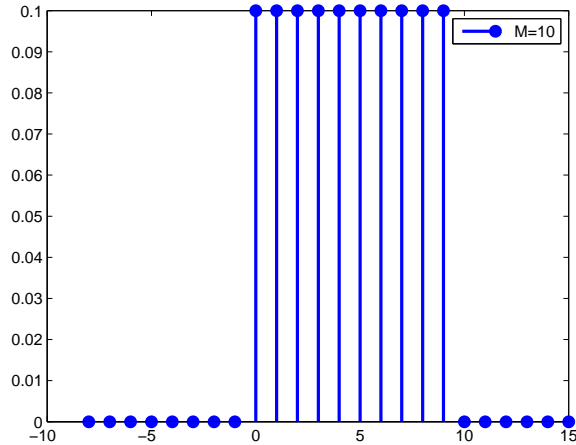
Následne vypočítame frekvenčnú odozvu

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-i\omega k} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-i\omega k} = \frac{1}{M} \frac{1 - e^{-i\omega M}}{1 - e^{-i\omega}} = \\ &= \frac{1}{M} \frac{\sin(\omega \frac{M}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} e^{-i\omega \frac{M-1}{2}}. \end{aligned}$$

Obrázok 2 zobrazuje frekvenčnú odozvu Simple moving average filtra pre rôzne hodnoty  $M$ . Vidíme, že čím je  $M$  vyššie, tým má krivka viac kopčekov. Kopčeky sa zároveň s ich počtom zmenšujú. Na obrázku je možné si všimnúť, že so zvyšujúcou sa frekvenciou klesá výška kopčekov. Nízke frekvencie ostávajú nezmenené, vysoké frekvencie sú utlmené alebo vynechané úplne, preto hovoríme, že ide o low-pass filter. Frekvenčná

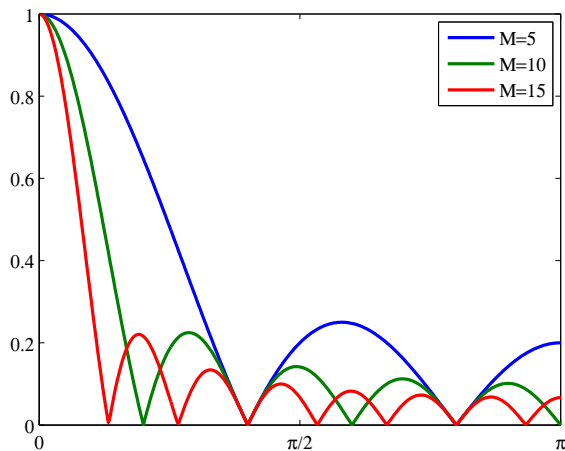
<sup>1</sup>Podľa [7] je kroková odozva (step response) odozvou filtra na jednotkový skok definovaný ako

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$



Obr. 1: Impulzná odozva Simple moving average filtra pre  $M = 10$ .

odozva pre  $M = 10$  (zelená) je nulová pre frekvencie  $\frac{j\pi}{5}$ ,  $j = 1, \dots, 5$ , preto budú tieto frekvencie po aplikácii filtra na signál vynechané. Frekvenčnú odozvu stačí zobrazit na intervale  $[0, \pi]$ , pretože je symetrická.



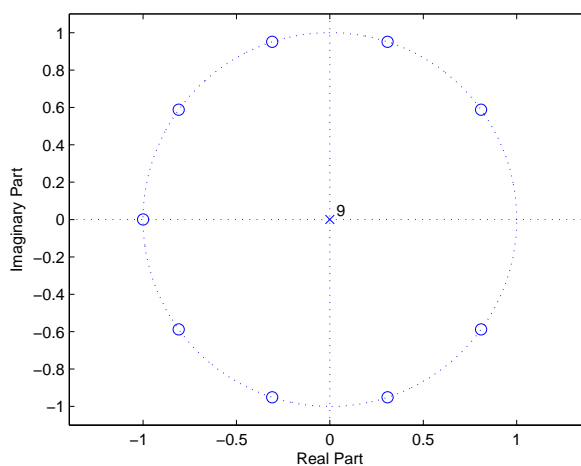
Obr. 2: Frekvenčná odozva Simple moving average filtra pre  $M = 5, 10, 15$ .

Následne sa pozrieme aj na poslednú spomínanú charakteristiku, prenosovú funkciu filtra, ktorej výpočet je

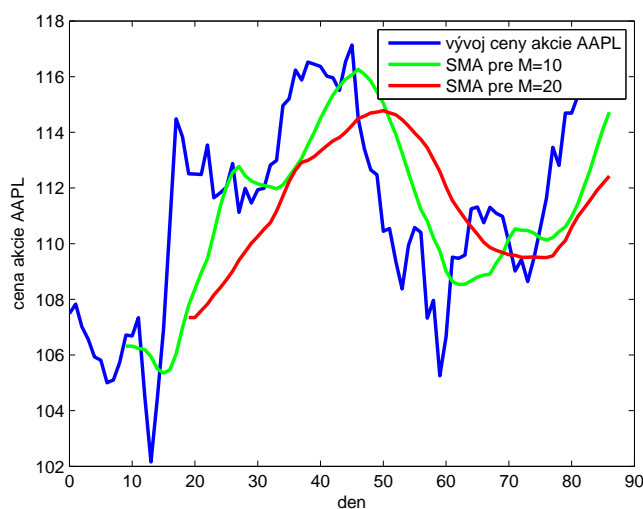
$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} = \frac{1}{M} \frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}}.$$

Obrázok núl a pólov prenosovej funkcie v  $z$ -rovine vykreslíme v prostredí *Matlab* pomocou funkcie *zplane*. Prenosová funkcia z obrázku 3 má  $M - 1$ , teda 9 núl rovno-

merne rozdelených na jednotkovom kruhu (okrem  $z = 1$ ) a pól v počiatku súradnicovej sústavy. Nuly nám hovoria, ktoré frekvencie budú potlačené. Čím bližšie sú nuly k jednotkovému kruhu, tým sú frekvencie viac zoslabené. Nuly priamo na jednotkovom kruhu označujú, ktoré frekvencie budú vynechané úplne, čo sú presne frekvencie už spomínané pri frekvenčnej odozve. Každý FIR filter má podľa článku [3] iba triviálne póly v počiatku súradnicovej sústavy. Tieto póly však nemajú vplyv na výstup filtra.



Obr. 3: Nuly a póly prenosovej funkcie Simple moving average filtra pre  $M = 10$ .



Obr. 4: Priebek ceny akcie firmy Apple v období od 22.8.2016 do 22.12.2016 (modrou) a výstup Simple moving average (SMA) filtra pre hodnotu parametra  $M = 10$  (zelenou) a pre  $M = 20$  (červenou). Zdroj dát: [finance.yahoo.com](http://finance.yahoo.com).

Na obrázku 4 môžeme pozorovať priebeh ceny akcie firmy Apple v období od 22.8.2016 do 22.12.2016. Zelenou farbou je znázornený Simple moving average filter pre  $M = 10$  a červenou farbou Simple moving average filter pre  $M = 20$ . Ako vidíme, výstupy filtrov začínajú až v 10. a 20. dni, keďže taký počet dní potrebujú na vytvorenie prvej zložky výstupu. Tento fakt taktiež spôsobuje oneskorenie Simple moving average filtra. Teda čím vyššie  $M$ , tým väčšie oneskorenie. Tento jav je opísaný takzvaným priemerným vekom dát, ktorý pre Simple moving average filter vypočítame ako [9]:

$$\frac{1}{M} + \frac{2}{M} + \dots + \frac{M}{M} = \frac{1}{M} \frac{M+1}{2} M = \frac{M+1}{2}, \quad (15)$$

čo je vlastne súčet jednotlivých váh prenásobených konštantou predstavujúcou vek daného vstupu (počet dní, pred kolkými vznikol). V našom prípade je teda oneskorenie približne  $\frac{10+1}{2} = 5,5$  a  $\frac{20+1}{2} = 10,5$  dní. Vidíme, že tento filter nereaguje až tak dobre na zmeny, pomerne dlho mu trvá, kým ich zaznamená. Navyše priemerovaním vyššieho počtu dát sa výstup výraznejšie odlišuje od pôvodného časového radu a zároveň je aj daný výstup viac zhladený.

### 3.2 Exponentially weighted moving average filter

Najjednoduchším IIR filtrom je Exponentially weighted moving average (nazývaný aj Exponential moving average, Simple exponential smoothing) filter. Exponentially weighted moving average filter sa používa predovšetkým na odhalenie trendov či predikciu variancie vo funkcii výnosov. Tento filter má predpis [3]

$$\begin{aligned} y[n] &= (1 - \lambda)x[n] + \lambda y[n - 1] \\ &= (1 - \lambda)(x[n] + \lambda x[n - 1] + \lambda^2 x[n - 2] + \dots) \\ &= (1 - \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x[n - k], \end{aligned} \quad (16)$$

kde  $x$  je vstupný signál,  $y$  je výstup filtra a  $\lambda$  je zhladzovací parameter z intervalu  $(0, 1)$ . Z predpisu je zrejmé, že váhy prislúchajúce zložkám vstupného signálu exponenciálne klesajú. Platí  $w_k \geq w_{k+1}$ , kde  $w_k = (1 - \lambda)\lambda^k$ , teda čím sú zložky signálu staršie, tým prispievajú nižšou váhou do výstupu. Vďaka tejto vlastnosti filter rýchlejšie reaguje na zmeny, teda ak reálny signál klesá, tak výstup tohto filtra bude klesať skôr než výstup Simple moving average filtra a naopak. Ďalším rozdielom medzi spomínanými dvoma

filtrami je, že do každého výstupu Exponentially weighted moving average filtra sa pričítavajú určitou váhou všetky zložky vstupného signálu, pričom do výstupu Simple moving average filtra bolo zahrnutých iba  $M$  pozorovaní. Taktiež môžeme pozorovať, že oproti Simple moving average filtru, Exponentially weighted moving average filter berie do úvahy aj autoregresný člen, teda predošlý výstup z filtra (viď prvý riadok predpisu), čo značí, že Exponentially weighted moving average filter patrí medzi IIR filtre.

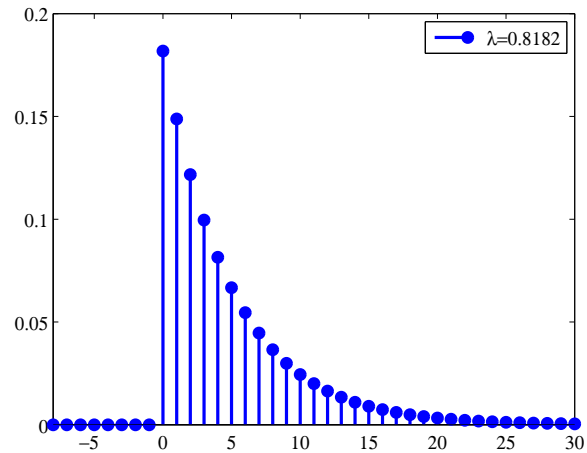
Hodnotu parametra  $\lambda$  volíme z intervalu  $\lambda \in (0, 1)$ , pretože v prípade  $\lambda \geq 1$  filter nie je BIBO stabilný a pre  $\lambda < 0$  vznikne high-pass filter, ktorý by zo signálu ponechal len šum a odstránil by trend [3]. Čím zvolíme  $\lambda$  bližšie 0, tým bude výstup filtra viac pripomínať vstup, avšak bude aj obsahovať veľa šumu. Hodnota parametra  $\lambda$  blízka 1 zas zaručuje výrazné zhladenie za cenu veľkej náhodnosti, keďže skutočný signál vstupuje s veľmi nízkou váhou.

Analogicky ako v prípade Simple moving average filtra vypočítame hodnoty impulznej a frekvenčnej odozvy a prenosovej funkcie pre Exponentially weighted moving average filter. Pri ich zobrazovaní pre Exponentially weighted moving average filter budeme používať hodnotu parametra  $\lambda = 0,8182$ , ktorá zodpovedá hodnote  $M = 10$  pre Simple moving average filter, čo si vysvetlíme v závere tejto podkapitoly.

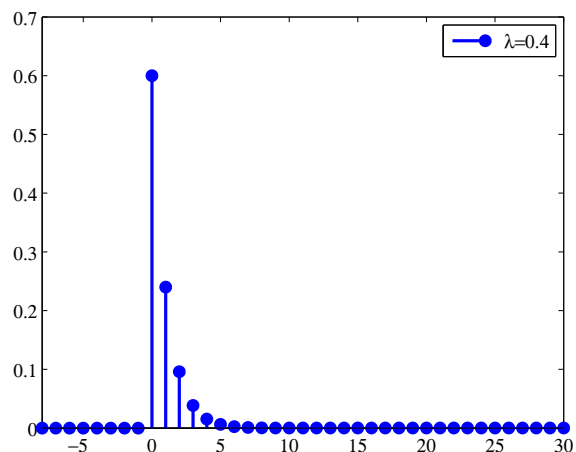
Vypočítame si teda impulznú odozvu pre Exponentially weighted moving average filter:

$$h[n] = (1 - \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \delta[n - k] = \begin{cases} (1 - \lambda)\lambda^n, & n \geq 0, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases} \quad (17)$$

Z impulznej odozvy na obrázku 5 vidíme, že váhy veľmi rýchlo (exponenciálne) klesajú, a teda staršie zložky signálu sa stávajú rýchlo nesignifikantnými. Navyše, impulzná odozva má nekonečne veľa nenulových členov, čo potvrdzuje tvrdenie zo začiatku tejto podkapitoly, že ide o IIR filter. V porovnaní s obrázkom 6, na ktorom je zobrazená impulzná odozva Exponentially weighted moving average filtra pre  $\lambda = 0,4$  vidíme, že čím bližšie je parameter  $\lambda$  k 1, tým sú rozdiely medzi jednotlivými členmi impulznej odozvy menšie, teda veľkosť členov klesá pomalšie.



Obr. 5: Impulzná odozva Exponentially weighted moving average filtra pre  $\lambda = 0,8182$ .



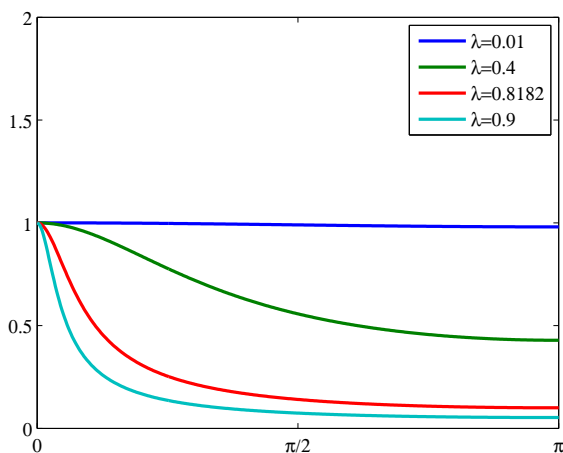
Obr. 6: Impulzná odozva Exponentially weighted moving average filtra pre  $\lambda = 0,4$ .

Pozrieme sa aj na frekvenčnú odozvu, ktorá je rovná

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \sum_{k=0}^{\infty} (1-\lambda)\lambda^k e^{-i\omega k} = (1-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k e^{-i\omega k} \\
 &= (1-\lambda)(1 + \lambda e^{-i\omega} + \lambda^2 e^{-2i\omega} + \dots) = \frac{1-\lambda}{1-\lambda e^{-i\omega}}.
 \end{aligned}$$

Pri porovnaní obrázkov 2 a 7 vidíme, že frekvenčná odozva Exponentially weighted moving average filtra je výrazne hladšia než frekvenčná odozva Simple moving average filtra, čo je spôsobené najmä zahrnutím autoregresnej časti do filtra. Hodnota v žiadnej frekvencii nie je nulová, preto vo výstupe sú prítomné všetky frekvencie z Fourierovho rozkladu vstupného signálu, avšak vyššie frekvencie sú zoslabené, čiže ide o low-pass

filter. Na obrázku 7 možno pozorovať, že čím je vyššia hodnota parametra  $\lambda$ , tým sú všetky frekvencie viac zoslabené.



Obr. 7: Frekvenčná odozva Exponentially weighted moving average filtra pre hodnoty parametra  $\lambda = 0,01, 0,4, 0,8182$  a  $0,9$ . Hodnota parametra  $\lambda = 0,8182$  je ekvivalentá  $M = 10$  pri Simple moving average filtri.

Pre prenosovú funkciu Exponentially weighted moving average filtra dostávame:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = (1 - \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k z^{-k} = \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda z^{-1}}.$$

Z obrázku 8 vidíme, že parameter  $\lambda$  určuje pozíciu jediného pólu filtra, ktorým je  $\lambda = 0,8182$ . Podľa [15], čím bližšie je pól k jednotkovému kruhu, tým je strmší vrchol frekvenčnej odozvy v prislúchajúcej frekvencii. V našom prípade sa to týka frekvencie 0. Nula v počiatku nemá žiaden vplyv na frekvenčnú odozvu, a teda ani na výstup filtra.

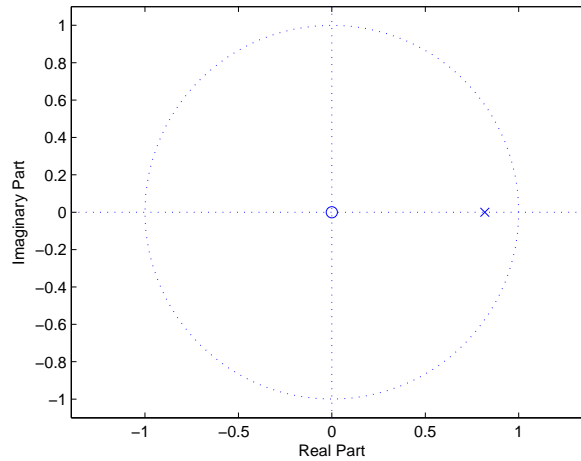
Aby bolo možné Simple moving average filter a Exponentially weighted moving average filter porovnať, treba zvoliť vhodnú hodnotu parametra  $\lambda$ . Ako bolo spomenuté v prvej kapitole, energia filtra je vhodná na porovnávanie filtrov. Podľa [3] je energia filtra definovaná ako súčet štvorcov koeficientov impulznej odozvy:

$$E = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]^2.$$

Označme energiu Simple moving average filtra ako  $E_{SMA}$  a vypočítajme jej hodnotu:

$$E_{SMA} = \sum_{k=0}^{M-1} \left(\frac{1}{M}\right)^2 = \frac{1}{M}.$$





Obr. 8: Nuly a póly prenosovej funkcie Exponentially weighted moving average filtra pre  $\lambda = 0,8182$ .

Nech  $E_{EWMA}$  je energia Exponentially weighted moving average filtra, ktorej hodnota je

$$E_{EWMA} = \sum_{k=0}^{\infty} ((1 - \lambda)\lambda^k)^2 = (1 - \lambda)^2(1 + \lambda^2 + \dots) = (1 - \lambda)^2 \frac{1}{1 - \lambda^2} = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}.$$

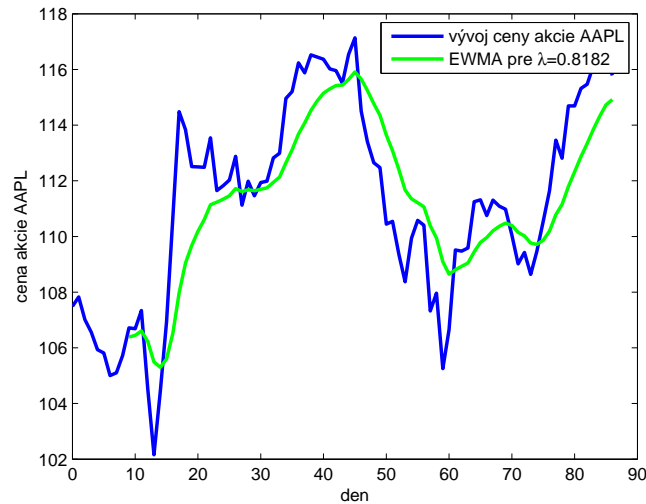
Aby sme mohli spomínané filtre porovnať, položíme  $E_{SMA} = E_{EWMA}$  a úpravami dostaneme vzťah

$$M = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}.$$

Keď sme teda pri Simple moving average filtre zhladzovali signál pomocou priemeru  $M = 10$  zložiek signálu, pri Exponentially weighted moving average filtri používame

$$\lambda = \frac{9}{11} \doteq 0,8182.$$

Obrázok 9 zobrazuje priebeh ceny akcie firmy Apple (modrou) počas štyroch mesiacov, ako aj výstup z Exponentially weighted moving average filtra (zelenou). Podobne ako v prípade Simple moving average filtra na obrázku 4 je dobre vidieť, ako filter potrebuje prvých 10 hodnôt vstupu, aby vyprodukoval prvý výstup. Môžeme však pozorovať o niečo rýchlejšie reakcie na zmeny cien akcie, než tomu bolo v prípade Simple moving average filtra. Priemerný vek dát, oneskorenie, vypočítame ako súčet váh pre násobený každý časovým rozdielom predikovanej periódy a periódy, v ktorej bol vstup



Obr. 9: Priebeh ceny akcie firmy Apple v období od 22.8.2016 do 22.12.2016 (modrou) a výstup Exponentially weighted moving average (EWMA) filtra (zelenou) pre hodnotu parametra  $\lambda = 0,8182$ . Zdroj dát: [finance.yahoo.com](http://finance.yahoo.com).

zaznamenaný, teda:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda) + 2\lambda(1 - \lambda) + 3\lambda^2(1 - \lambda) + \dots &= (1 - \lambda)(1 + 2\lambda + 3\lambda^2 + \dots) \\ &= \frac{1 - \lambda}{(1 - \lambda)^2} = \frac{1}{1 - \lambda}. \end{aligned}$$

V našom prípade pre  $\lambda = 0,8182$  to je  $\frac{1}{1-0,8182} \doteq 5,5$ , teda výstup filtra je oneskorený o približne 5,5 dňa.

### 3.3 Double exponentially weighted moving average filter

Ako názov indikuje, Double exponentially weighted moving average filter je rozšírením Exponentially weighted moving average filtra. Prvý krok je identický, avšak v druhom kroku sa z výstupu  $y[n]$  stáva vstup, aby vznikol konečný výstup  $b[n]$ . Predpis Double exponentially weighted moving average filtra z [3] je

$$\begin{aligned} y[n] &= (1 - \lambda)x[n] + \lambda y[n - 1], \\ b[n] &= (1 - \lambda)y[n] + \lambda b[n - 1]. \end{aligned}$$

V tomto prípade budeme pri zobrazovaní obrázkov pre charakteristiky Double exponentially weighted moving average filtra používať rovnakú hodnotu  $\lambda$  ako pri Exponen-

tially weighted moving average filtra, teda  $\lambda = 0,8182$ , nakoľko ide o vylepšenie tohto filtra.

Podľa článku [3] je možné impulznú odozvu Double exponentially weighted moving average filtra, označme  $h_{DEWMA}$ , vypočítať ako konvolúciu dvoch impulzných odoziev Exponentially weighted moving average filtra,  $h_{EWMA}$ , teda

$$h_{DEWMA}[n] = h_{EWMA}[n] * h_{EWMA}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{EWMA}[k]h_{EWMA}[n-k].$$

Dosadením hodnoty impulznej odozvy Exponentially weighted moving average filtra z (17) dostávame:

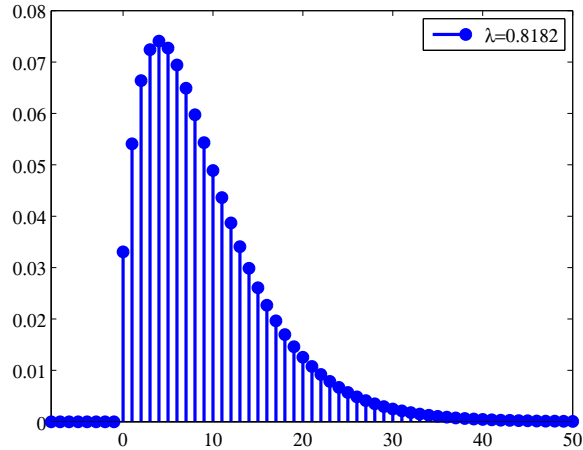
$$\begin{aligned} h_{DEWMA}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1-\lambda)\lambda^k(1-\lambda)\lambda^{n-k} = (1-\lambda)^2(1+2\lambda+3\lambda^2+\dots) \\ &= \begin{cases} (n+1)(1-\lambda)^2\lambda^n, & n \geq 0, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases} \end{aligned}$$

Na obrázku 10 vidíme, že členy impulznej odozvy Double exponentially weighted moving average filtra najprv rastú, následne klesajú. Nenulových členov je nekonečne veľa, preto ide o IIR filter. V porovnaní s impulznou odozvou Exponentially weighted moving average filtra z obrázku 5 je najväčší člen impulznej odozvy Double exponentially weighted moving average filtra piaty v poradí, pričom najväčší člen impulznej odozvy Exponentially weighted moving average filtra je prvý. Ďalej môžeme pozorovať, že zložky vstupu Double exponentially weighted moving average filtra sa oveľa pomalšie stávajú nesignifikantnými, teda ich väčší počet vplýva na jeden výstup filtra.

Vidíme, že predpis impulznej odozvy Double exponentially weighted moving average filtra nie je úplne jednoduchý, a preto by mohlo byť náročné počítat v tomto tvare hodnoty prenosovej funkcie a frekvenčnej odozvy tohto filtra. V tomto prípade je oveľa jednoduchšie použiť  $z$ -transformáciu na predpis filtra:

$$\begin{aligned} Y(z) &= (1-\lambda)X(z) + \lambda z^{-1}Y(z), \\ B(z) &= (1-\lambda)Y(z) + \lambda z^{-1}B(z) \end{aligned}$$

a za pomoci základných úprav následne vyjadriť  $H(z)$ , teda prenosovú funkciu Double



Obr. 10: Impulzná odozva Double exponentially weighted moving average filtra pre  $\lambda = 0,8182$ .

exponentially weighted moving average filtra:

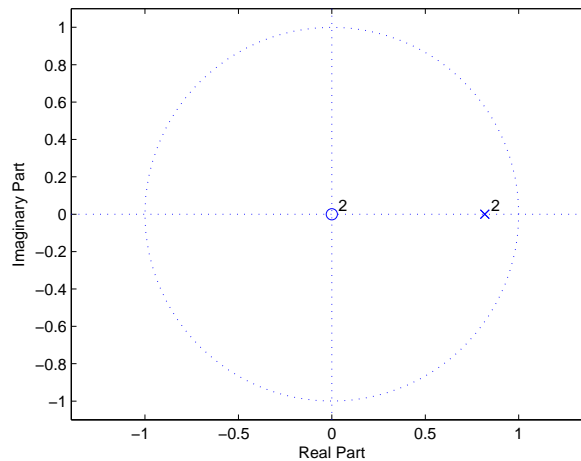
$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda z^{-1}} X(z), \\
 B(z) &= \left( \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda z^{-1}} \right)^2 X(z), \\
 H(z) &= \frac{B(z)}{X(z)} = \left( \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda z^{-1}} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Ako môžeme vidieť z predpisu aj obrázku 11, filter má dva póly na pozícii  $\lambda = 0,8182$ , teda ako sme spomenuli v prípade Exponentially weighted moving average filtra, frekvenčná odozva má strmý vrchol vo frekvencii 0 a nuly v počiatku nemajú vplyv na výstup filtra. Pozície pólov a núl vo vnútri jednotkového kruhu hovoria o stabilite filtra.

Na záver sa pozrieme na frekvenčnú odozvu Double exponentially weighted moving average filtra, ktorú získame z prenosovej funkcie dosadením  $z = e^{i\omega}$ :

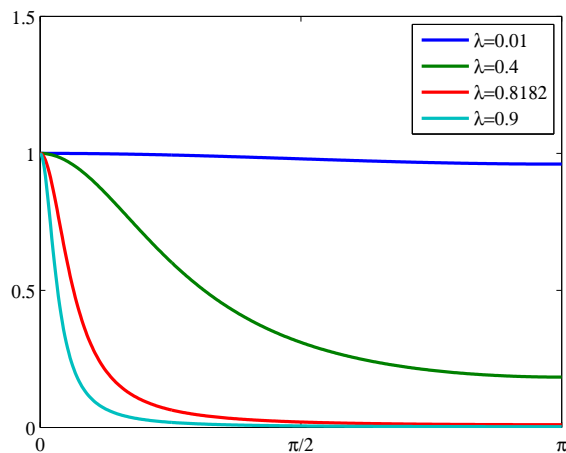
$$H(\omega) = \left( \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda e^{-i\omega}} \right)^2.$$

Na obrázku 12 vidíme, rovnako ako v prípade Exponentially weighted moving average filtra (obrázok 7), že žiadna frekvencia nie je zo vstupu vynechaná úplne. Taktiež môžeme pozorovať, že čím je vyššia hodnota parametra  $\lambda$ , tým lepšie frekvenčná odozva kopíruje súradnicové osi. Všetky frekvencie sú teda po aplikovaní filtra výrazne zoslabené okrem najmenších, preto hovoríme, že ide o low-pass filter. Vidíme, že pre hodnoty



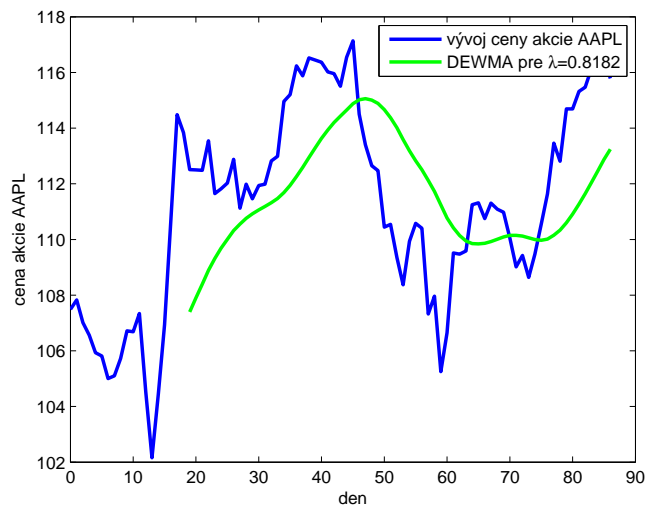
Obr. 11: Nuly a póly prenosovej funkcie Double exponentially weighted moving average filtra pre  $\lambda = 0,8182$ .

$\lambda$  blízke 1 frekvenčné odozvy takmer splývajú.



Obr. 12: Frekvenčná odozva Double exponentially weighted moving average filtra pre hodnoty parametra  $\lambda = 0,01, 0,4, 0,8182$  a  $0,9$ .

Priebeh ceny akcie firmy Apple (modrou) a výstup Double exponentially weighted moving average filtra (zelenou) počas štyroch mesiacov (od 22.8.2016 do 22.12.2016) je zobrazený na obrázku 13. Vidíme, že zatiaľ čo Simple a Exponentially weighted moving average filtre pre  $M = 10$  a  $\lambda = 0,8182$  produkovali prvý výstup v 10. dni, v prípade Double exponentially weighted moving average filtra prichádza prvý výstup až v 20. dni. Je to spôsobené tým, že výstup sa tvorí v dvoch fázach, teda z prvého výstupu,



Obr. 13: Priebeh ceny akcie firmy Apple v období od 22.8.2016 do 22.12.2016 (modrou) a výstup Double exponentially weighted moving average (DEWMA) filtra (zelenou) pre hodnotu parametra  $\lambda = 0,8182$ . Zdroj dát: [finance.yahoo.com](http://finance.yahoo.com).

ktorý je tvorený z prvých 10 dní, sa stáva vstup, aby vznikol konečný výstup tvorený 10 takýmito výstupmi z prvej fázy. Navyše tento filter pomerne pomaly reaguje na zmeny a výrazne sa aj líši od vstupného signálu.

### 3.4 Triple exponentially weighted moving average filter

Rozšírením Double exponentially weighted moving average filter je Triple exponentially weighted moving average filter, pri ktorom sa výstup z Double exponentially weighted moving average filtra  $b[n]$  mení na vstup, aby vznikol konečný výstup  $c[n]$ . Matematicky zapísané [3]:

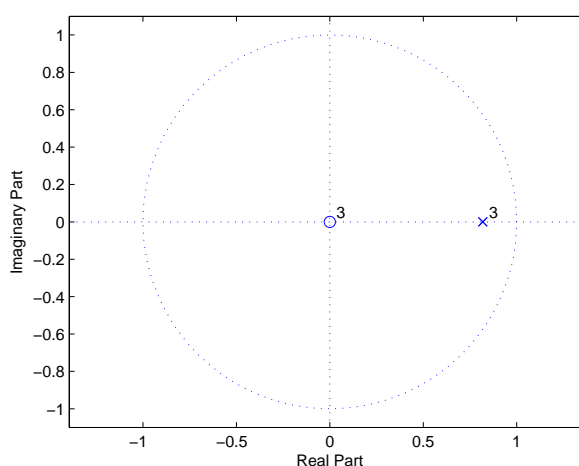
$$\begin{aligned} y[n] &= (1 - \lambda)x[n] + \lambda y[n - 1], \\ b[n] &= (1 - \lambda)y[n] + \lambda b[n - 1], \\ c[n] &= (1 - \lambda)b[n] + \lambda c[n - 1]. \end{aligned}$$

Z rovnakého dôvodu ako v prípade Double exponentially weighted moving average filtra, budeme pri zobrazovaní charakteristík filtra používať hodnotu parametra  $\lambda = 0,8182$ .

Analogicky ako v prípade Double exponentially weighted moving average filtra, pre-

nosovú funkciu Triple exponentially weighted moving average filtra jednoducho vyjadríme vďaka  $z$ -transformácii jeho predpisu:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda z^{-1}} X(z), \\ B(z) &= \left( \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda z^{-1}} \right)^2 X(z), \\ C(z) &= \left( \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda z^{-1}} \right)^3 X(z), \\ H(z) &= \frac{C(z)}{X(z)} = \left( \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda z^{-1}} \right)^3. \end{aligned}$$

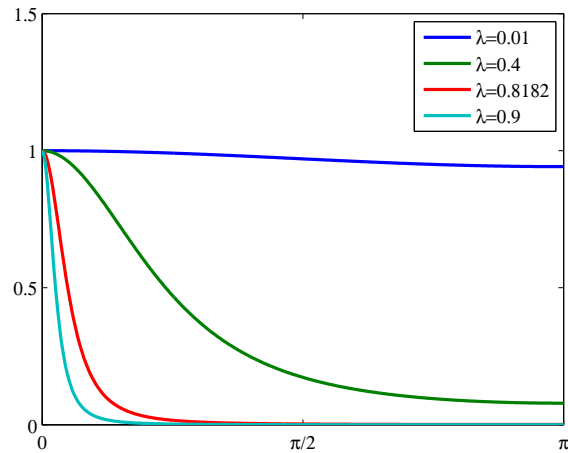


Obr. 14: Nuly a póly prenosovej funkcie Triple exponentially weighted moving average filtra pre  $\lambda = 0,8182$ .

Na obrázku 14 vidíme 3 póly na pozícii rovnakej ako pri Double exponentially weighted moving average filtri,  $\lambda = 0,8182$ , teda vieme, že frekvenčná odozva bude mať výrazný vrchol vo frekvencii rovnej 0. Ako sme uviedli už pri Double exponentially weighted moving average filtri, nula v počiatku nemá žiaden vplyv na výstup filtra. Z obrázku vidíme, že je filter stabilný, nakoľko sa všetky nuly a póly nachádzajú vnútri jednotkového kruhu.

Predpis frekvenčnej odozvy Triple exponentially weighted moving average filtra zistíme rovnako ako v predošlom prípade pre Double exponentially weighted moving average filter, dosadením  $z = e^{i\omega}$  do prenosovej funkcie:

$$H(\omega) = \left( \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda e^{-i\omega}} \right)^3.$$



Obr. 15: Frekvenčná odozva Triple exponentially weighted moving average filtra pre hodnoty parametra  $\lambda = 0,01, 0,4, 0,8182$  a  $0,9$ .

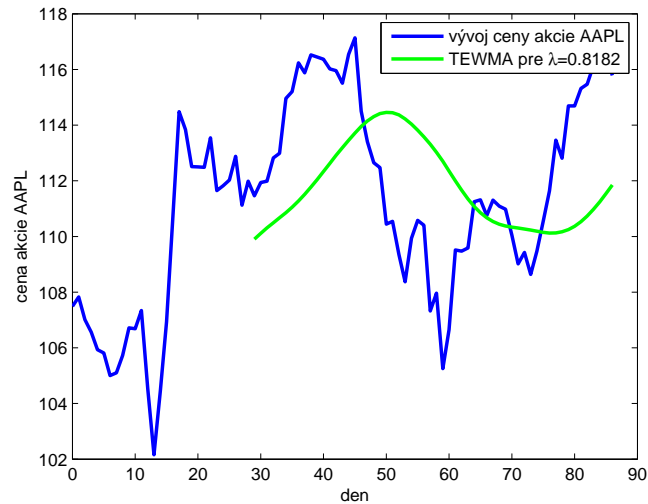
Medzi obrázkami 12 a 15 nevidieť výraznejšie rozdiely v zhladzovaní frekvencií, vyššie frekvencie sú výraznejšie utlmené než nižšie, teda aj Triple exponentially weighted moving average je low-pass filtrom. Opäť pozorujeme veľké zoslabenia frekvencií predovšetkým pre hodnoty  $\lambda$  blízke 1. Triple exponentially weighted moving average filter sa preto nejaví byť lepší než Double exponentially weighted moving average filter, ktorý je navyše výpočtovo jednoduchší.

Na obrázku 16 je zobrazený priebeh ceny akcie firmy Apple v období od 22.8.2016 do 22.12.2016 a výstup Triple exponentially weighted moving average filtra pre hodnotu parametra  $\lambda = 0,8182$ . Vidíme, že v tomto prípade sa výstup filtra začína tvoriť až v 30. dni, nakoľko vytvára výstup v troch fázach. Zároveň pozorujeme neskorú odozvu na zmeny. Výstup filtra takmer vôbec nekopíruje zobrazený vývoj cien akcie.

### 3.5 Double exponential moving average filter

Ďalším zo skupiny známych moving average filtrov je Double exponential moving average filter, ktorý bol prvýkrát predstavený Patrickom G. Mulloyom v roku 1994. Double exponential moving average filter vzniká spojením Exponentially weighted moving average filtra a Double exponentially weighted moving average filtra. Predpis spomínaného





Obr. 16: Priebeh ceny akcie firmy Apple v období od 22.8.2016 do 22.12.2016 (modrou) a výstup Triple exponentially weighted moving average (TEWMA) filtra (zelenou) pre hodnotu parametra  $\lambda = 0,8182$ . Zdroj dát: [finance.yahoo.com](http://finance.yahoo.com).

filtra má preto tvar [1]:

$$\begin{aligned} y[n] &= (1 - \lambda)x[n] + \lambda y[n - 1], \\ b[n] &= (1 - \lambda)y[n] + \lambda b[n - 1], \\ d[n] &= 2y[n] - b[n], \end{aligned}$$

kde  $\lambda$  je zhladzovací parameter,  $x[n]$  je vstupný signál,  $y[n]$  je výstup Exponentially weighted moving average filtra,  $b[n]$  je výstup Double exponentially weighted moving average filtra a  $d[n]$  je výstup Double exponential moving average filtra.

Rovnako ako pri každom z predchádzajúcich filtrov sa pozrieme najprv na ich charakteristiky, teda na frekvenčnú odozvu a prenosovú funkciu. Pre výpočty charakteristik filtra je opäť výrazným zjednodušením použitie  $z$ -transformácie na všetky rovnice

predpisu filtra a následné dosadenie do poslednej rovnice:

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \frac{1-\lambda}{1-\lambda z^{-1}}X(z), \\
 B(z) &= \left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda z^{-1}}\right)^2 X(z), \\
 D(z) &= 2Y(z) - B(z) = 2\frac{1-\lambda}{1-\lambda z^{-1}}X(z) - \left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda z^{-1}}\right)^2 X(z) \\
 &= \frac{2(1-\lambda)(1-\lambda z^{-1}) - (1-\lambda)^2}{(1-\lambda z^{-1})^2} X(z) \\
 &= \frac{1-\lambda^2 + (2\lambda^2 - 2\lambda)z^{-1}}{(1-\lambda z^{-1})^2} X(z). \tag{18}
 \end{aligned}$$

Z rovnice (18) jednoducho vyjadríme prenosovú funkciu Double exponential moving average filtra:

$$H(z) = \frac{D(z)}{X(z)} = \frac{1-\lambda^2 + (2\lambda^2 - 2\lambda)z^{-1}}{(1-\lambda z^{-1})^2}.$$

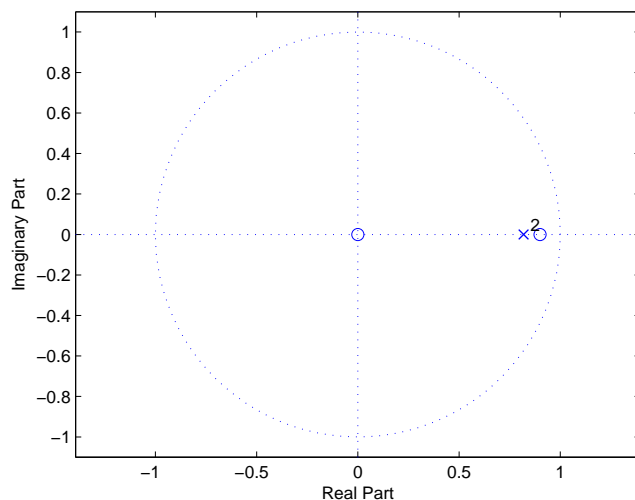
Z predpisu prenosovej funkcie filtra ako aj z obrázku 17 vidíme, že tento filter má dve nuly a dva póly. Póly sa nachádzajú na pozícii  $\lambda = 0,8182$ , rovnako ako v prípade Exponentially weighted moving average filtra a Double a Triple exponentially weighted moving average filtrov. Nakoľko je táto pozícia pomerne blízko jednotkového kruhu, očakávame vrchol frekvenčnej odozvy vo frekvencii 0. Z obrázku taktiež vidíme, že jedna nula tohto filtra sa nachádza vpravo od pólov, bližšie k jednotkovému kruhu, čo znamená, že by frekvencia 0 mala byť vyššou váhou stlmená. Ako už bolo spomínané, nuly v počiatku nemajú vplyv na výstup filtra.

Dosadením  $e^{i\omega}$  do predpisu prenosovej funkcie, získavame frekvenčnú odozvu Double exponential moving average filtra, ktorej tvar je:

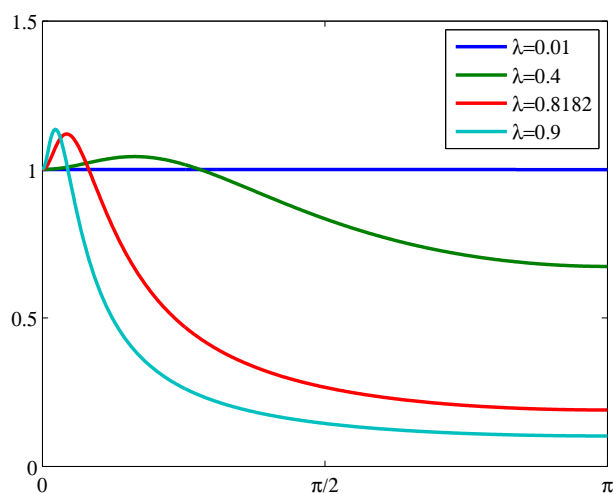
$$H(\omega) = \frac{1-\lambda^2 + (2\lambda^2 - 2\lambda)e^{-i\omega}}{(1-\lambda e^{-i\omega})^2}.$$

Frekvenčná odozva Double exponential moving average filtra je zobrazená na obrázku 18. Ako môžeme vidieť, nultá frekvencia ostáva nezmenená, najpomalšie frekvencie sú vo výstupe zosilnené. Taktiež môžeme pozorovať, že Double exponential moving average filter v porovnaní s Exponentially weighted moving average filtrom a Double a Triple exponentially weighted moving average filtrami výrazne pomalšie utlmuje rýchle frekvencie.

Na obrázku 19 je zobrazený vývoj ceny akcie firmy Apple v období od 22.8.2016 do 22.12.2016 a výstup z Double exponential moving average filtra. Rovnako ako v

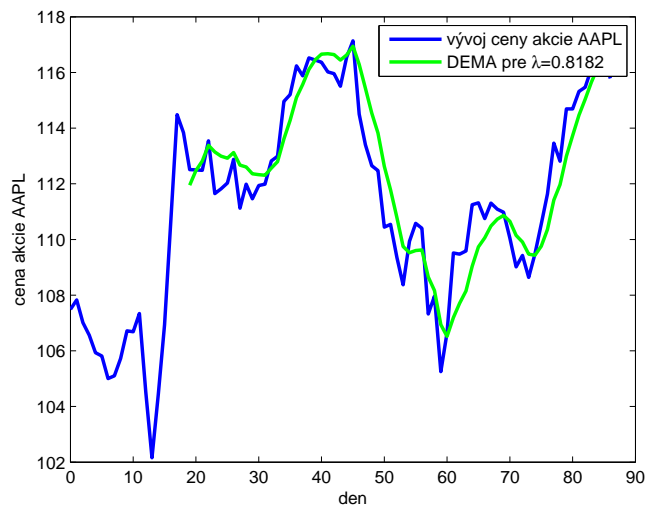


Obr. 17: Nuly a póly prenosovej funkcie Double exponential moving average filtra pre  $\lambda = 0,8182$ .



Obr. 18: Frekvenčná odozva Double exponential moving average filtra pre hodnoty parametra  $\lambda = 0,01, 0,4, 0,8182$  a  $0,9$ .

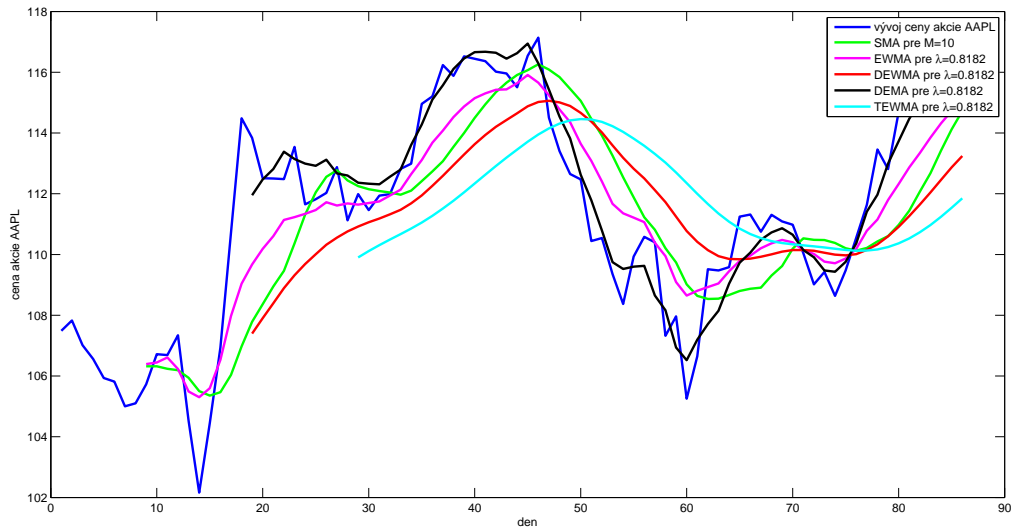
prípade Double exponentially weighted moving average filtra vidíme, že prvý výstup sa tvorí z dát z 20 dní. Toto oneskorenie je však na rozdiel od Double exponentially weighted moving average filtra kompenzované pomerne rýchlou odozvou na zmeny.



Obr. 19: Priebeh ceny akcie firmy Apple v období od 22.8.2016 do 22.12.2016 (modrou) a výstup Double exponential moving average (DEMA) filtra (zelenou) pre hodnotu parametra  $\lambda = 0,8182$ . Zdroj dát: [finance.yahoo.com](http://finance.yahoo.com).

### 3.6 Porovnanie filtrov

V predchádzajúcich podkapitolách sme uviedli päť moving average filtrov, a to Simple moving average filter, Exponentially weighted moving average filter, Double a Triple exponentially weighted moving average filter a Double exponential moving average filter. Na obrázku 20 vidíme výstupy všetkých spomínaných filtrov zobrazené spolu s vývojom ceny akcie firmy Apple v období od 22.8.2016 do 22.12.2016. Ako už bolo spomenuté, filtre potrebujú na vytvorenie prvého relevantného výstupu dáta z určitého zvoleného obdobia. V predošlých častiach sme používali na zhladenie obdobie 10 dní, teda  $M = 10$  a  $\lambda = 0,8182$ , preto sa pri Simple moving average filtri a Exponentially weighted moving average filtri výstup tvorí v 10. dni, pri Double exponentially weighted moving average filtri a Double exponential moving average filtri v 20. dni a pri Triple exponentially weighted moving average filtri v 30. dni. Pri pohľade na obrázok 20 sa zdá, že výstup Triple exponentially weighted moving average filtera sa najviac odlišuje od skutočného signálu, Double exponential moving average filter zas najlepšie zaznamenáva poklesy a rasty v reálnom signáli a medzi ostatnými troma nevidieť výraznejšie rozdiely. Pre relevantnejšie porovnanie sa pozrieme na odchýlky výstupov týchto filtrov od skutočných signálov.



Obr. 20: Priebeh ceny akcie firmy Apple v období od 22.8.2016 do 22.12.2016 (modrou), výstup Simple moving average (SMA) filtra (zelenou), výstup Exponentially weighted moving average (EWMA) filtra (ružovou), výstup Double exponentially weighted moving average (DEWMA) filtra (červenou), výstup Double exponential moving average (DEMA) filtra (čiernou) a výstup Triple exponentially weighted moving average (TEWMA) filtra (bledomodrou) pre hodnoty parametrov  $M = 10$  a  $\lambda = 0,8182$ . Zdroj dát: finance.yahoo.com.

Pre účely porovnania výstupov filtrov sme si vybrali akcie spoločností z rôznych odvetí a s rôznymi priebehmi, a to: Apple (AAPL), Microsoft (MSFT), Tesco (TESO), Google (GOOG), Coca Cola (KO), Facebook (FB) a Erste Group Bank (EBKDY). Odchýlky výstupov filtrov od reálnych cien týchto siedmich akcií budeme počítat *dvoma spôsobmi*, ktoré vypočítame pomocou vzťahu:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=f}^{N-1} (x_i - y_i)^2}}{N - f},$$

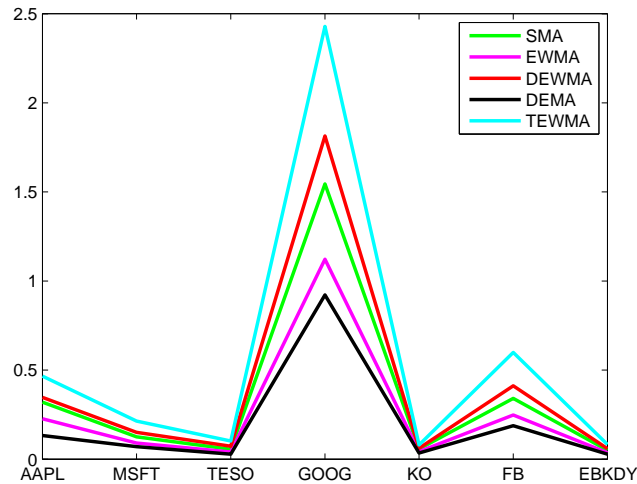
kde  $x_i$  je zložka pôvodného signálu,  $y_i$  je zložka výstupu filtra a  $N$  je dĺžka signálu. V *prvom prípade* je parameter  $f$  deň, kedy filter vyprodukoval prvý výstup ( $f$  sa s filtrom mení), napríklad pre Simple moving average filter je  $f = 10$ , pre Triple exponentially weighted moving average je však  $f = 30$ . V *druhom prípade* je  $f$  deň prvého výstupu najviac oneskoreného filtra ( $f$  je stále rovnaké), teda Triple exponentially weighted moving average filtra s  $f = 30$ .

Odchýlky vypočítané pomocou *prvého spôsobu* sú zobrazené v tabuľke 1 a kvôli väčšej prehľadnosti vykreslené aj na obrázku 21. Z obrázku je možné dobre pozorovať, že výstup Triple exponentially weighted moving average filtra má viditeľne najväčšie odchýlky od skutočného vývoja cien akcií. Výstup Double exponentially weighted moving average filtra dosahuje v porovnaní s výstupom Simple moving average filtra podobné odchýlky, avšak odchýlky skôr spomínaného filtra sú o niečo väčšie. V porovnaní s výstupom z Triple exponentially weighted moving average filtrom má výstup Exponentially weighted moving average filtra viac než dvojnásobne menšie odchýlky od reálneho signálu. Ako sa ukazuje v tabuľke, výstup Double exponential moving average filtra sa najmenej odlišuje od skutočného časového radu.

Tabuľka 1: Odchýlky výstupov Simple moving average (SMA) filtra, Exponentially weighted moving average (EWMA) filtra, Double exponentially weighted moving average (DEWMA) filtra, Double exponential moving average (DEMA) filtra a Triple exponentially weighted moving average (TEWMA) filtra od reálnych cien akcií AAPL, MSFT, TESO, GOOG, KO, FB, EBKDY počítané na dátach v období od 22.8.2016 do 22.12.2016 vypočítané *prvým spôsobom*.

	AAPL	MSFT	TESO	GOOG	KO	FB	EBKDY
SMA	0,3197	0,1250	0,0552	1,5446	0,0570	0,3407	0,0500
EWMA	0,2269	0,0905	0,0401	1,1221	0,0429	0,2478	0,0357
DEWMA	0,3464	0,1501	0,0727	1,8139	0,0613	0,4119	0,0590
DEMA	0,1324	0,0699	0,0280	0,9220	0,0341	0,1879	0,0278
TEWMA	0,4659	0,2141	0,1019	2,4291	0,0803	0,5989	0,0825

V *druhom prípade* boli teda odchýlky všetkých filtrov od pôvodných signálov počítané od 30.dňa, kedy vytvára prvý výstup najoneskorenejší zo spomínaných filtrov, Triple exponentially weighted moving average filter. Odchýlky sú zobrazené v tabuľke 2 a aj na obrázku 22. Aj v tomto porovnaní má výstup Triple exponentially weighted moving average filter najvyššie odchýlky od reálneho signálu. Na tomto intervale sú dokonca odchýlky medzi výstupmi Simple moving average filtra a Double exponentially weighted moving average filtra ešte menej výrazné, avšak stále lepšie výsledky dosahuje Simple moving average filter. Opäť pomerne malé odchýlky porozujeme pre výstup



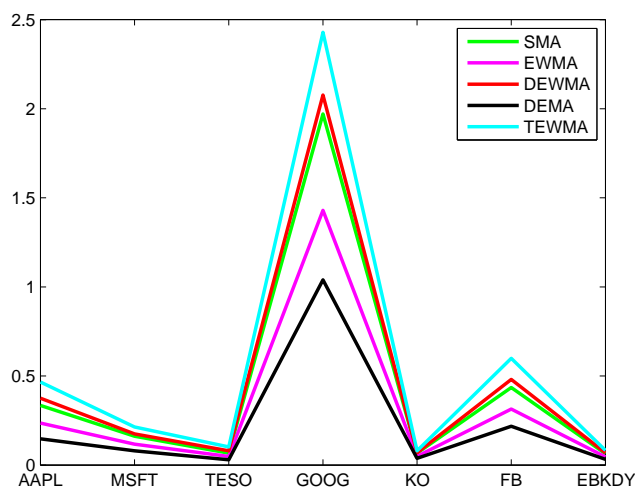
Obr. 21: Odchýlky výstupov Simple moving average (SMA) filtra (zelenou), Exponentially weighted moving average (EWMA) filtra (ružovou), Double exponentially weighted moving average (DEWMA) filtra (červenou), Double exponential moving average (DEMA) filtra (čiernou) a Triple exponentially weighted moving average (TEWMA) filtra (bledomodrou) od reálnych cien akcií AAPL, MSFT, TESO, GOOG, KO, FB, EBKDY počítané na dátach v období od 22.8.2016 do 22.12.2016 vypočítané prvým spôsobom.

Exponentially weighted moving average filtra. Najmenšie odchýlky boli vypočítané pre výstup Double exponential moving average filtra.

Ako sme ukázali, výstupy Double exponential moving average filtra a Exponentially weighted moving average filtra sa najmenej odlišujú od skutočných dát, teda reagujú celkom dobre na zmeny cien. To však zrejme znamená, že obsahujú pomerne veľa šumu. Tieto filtre sú preto vhodné na predikciu. Double a Triple exponentially weighted moving average filtre a Simple moving average filter zas dobre zhladzujú signál a zbavujú ho šumu. Posledné tri spomínané filtre sú pomalé pri odhaľovaní nového trendu.

Tabulka 2: Odchýlky výstupov Simple moving average (SMA) filtra, Exponentially weighted moving average (EWMA) filtra, Double exponentially weighted moving average (DEWMA) filtra, Double exponential moving average (DEMA) filtra a Triple exponentially weighted moving average (TEWMA) filtra od reálnych cien akcií AAPL, MSFT, TESO, GOOG, KO, FB, EBKDY počítané na dátach v období od 22.8.2016 do 22.12.2016 vypočítané *druhým spôsobom*.

	AAPL	MSFT	TESO	GOOG	KO	FB	EBKDY
SMA	0,3345	0,1615	0,0667	1,9710	0,0666	0,4351	0,0636
EWMA	0,2354	0,1169	0,0480	1,4297	0,0493	0,3140	0,0456
DEWMA	0,3749	0,1747	0,0795	2,0772	0,0692	0,4807	0,0688
DEMA	0,1473	0,0798	0,0295	1,0395	0,0376	0,2177	0,0321
TEWMA	0,4659	0,2141	0,1019	2,4291	0,0803	0,5989	0,0825



Obr. 22: Odchýlky výstupov Simple moving average (SMA) filtra (zelenou), Exponentially weighted moving average (EWMA) filtra (ružovou), Double exponentially weighted moving average (DEWMA) filtra (červenou), Double exponential moving average (DEMA) filtra (čiernou) a Triple exponentially weighted moving average (TEWMA) filtra (bledomodrou) od reálnych cien akcií AAPL, MSFT, TESO, GOOG, KO, FB, EBKDY počítané na dátach v období od 22.8.2016 do 22.12.2016 vypočítané *druhým spôsobom*.



## 4 Predikcie pomocou moving average filtrov

Moving average filtre patria medzi najjednoduchšie a najznámejšie spôsoby predpovedania vývoja signálu. Pomocou priemerovania niekoľkých hodnôt signálu sa snažíme predikovať jednu budúcu hodnotu. Ide preto o jednokrokovú predikciu. V nasledujúcej časti si ukážeme, akými úpravami je možné pomocou týchto filtrov predpovedať vývoj signálu na viac než jednu časovú jednotku.

### 4.1 Predikcia pomocou Exponentially weighted moving average filtra 1

Ako sme videli pri porovnaní filtrov, výstup Exponentially weighted moving average filtra mal pomerne nízke odchýlky od reálneho signálu, preto sa pozrieme na predikcie pomocou tohto filtra. Najprv si pripomeňme predpis tohto filtra:

$$\begin{aligned}y[n] &= \alpha x[n] + (1 - \alpha)y[n - 1] \\ &= \alpha(x[n] + (1 - \alpha)x[n - 1] + (1 - \alpha)^2x[n - 2] + \dots) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha)^k x[n - k].\end{aligned}\tag{19}$$

*Poznámka:* Oproti predpisu z podkapitoly 3.2 sme spravili substitúciu  $\alpha = 1 - \lambda$ , nakoľko táto formulácia bola použitá v [5] aj ďalších článkoch, z ktorých vychádzame v tejto kapitole.

Nasledujúca predikcia sa vychádza z [5]. Označme:

$$\hat{x}[n + 1] = y[n],\tag{20}$$

kde  $y[n]$  je odhadom (predikciou) ďalšej hodnoty signálu  $x[n + 1]$ . Po dosadení tejto hodnoty do diferenčnej rovnice Exponentially weighted moving average filtra dostávame:

$$\hat{x}[n + 1] = \alpha x[n] + (1 - \alpha)\hat{x}[n],\tag{21}$$

čo môžeme ekvivalentne zapísať ako

$$\hat{x}[n + 1] = \hat{x}[n] + \alpha(x[n] - \hat{x}[n]),\tag{22}$$

z ktorého je vidieť, že budúca predikcia závisí od predošlej predikcie a jej odchýlky od skutočnej hodnoty vstupu.

V čase  $N - 1$  poznáme poslednú skutočnú hodnotu signálu  $x[N - 1]$ , vďaka ktorej môžeme vypočítať predikciu  $\hat{x}[N]$  :

$$\hat{x}[N] = \alpha x[N - 1] + (1 - \alpha)\hat{x}[N - 1]. \quad (23)$$

Predikcia pre čas  $N + 1$  má tvar:

$$\hat{x}[N + 1] = \alpha x[N] + (1 - \alpha)\hat{x}[N]. \quad (24)$$

Hodnota signálu  $x[N]$  už známa nie je, preto dosadíme odhad vypočítaný vďaka poslednej hodnote vstupného signálu:

$$\hat{x}[N + 1] = \alpha \hat{x}[N] + (1 - \alpha)\hat{x}[N] = \hat{x}[N]. \quad (25)$$

Analogicky vypočítame predikciu  $\hat{x}[N + 1]$  :

$$\hat{x}[N + 2] = \alpha \hat{x}[N + 1] + (1 - \alpha)\hat{x}[N + 1] = \hat{x}[N + 1] = \hat{x}[N], \quad (26)$$

z čoho získavame predikciu na ďalších budúcich  $k$  období:

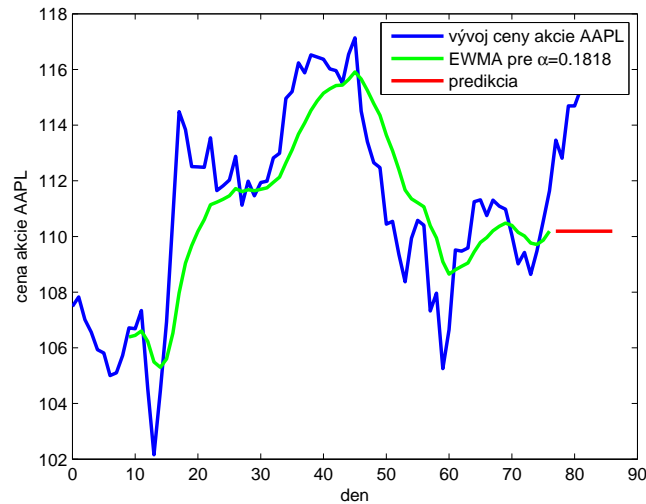
$$\hat{x}[N + k] = \hat{x}[N], \quad (27)$$

kde  $k \in \mathbb{N}$ .

Na obrázku 23 vidíme vývoj ceny akcie firmy Apple (modrou) v období štyroch mesiacov, výstup Exponentially weighted moving average filtra (zelenou) a predikciu (červenou) na ďalších 10 dní. Ako bolo zrejme už z predpisu predikcie, krivka predikovaných hodnôt je konštantná, kým reálne ceny akcie stúpajú. Z tohto dôvodu sa nejaví tento druh predikcie vhodný pre takéto dáta.

## 4.2 Predikcia pomocou Exponentially weighted moving average filtra 2

Ďalšia predikcia bude opäť pomocou Exponentially weighted moving average filtra, ktorého predpis sme si pripomenuli v predošlej časti (19). Narozdiel od predošlej predikcie, kde sme predikovali konštantnú hodnotu pre nasledujúcich  $k$  dní, v tomto prípade



Obr. 23: Priebeh ceny akcie firmy Apple v období od 22.8.2016 do 22.12.2016 (modrou), výstup Exponentially weighted moving average (EWMA) filtra (zelenou) a predikcia EWMA1 (červenou) pre hodnotu parametra  $\alpha = 0,1818$ . Zdroj dát: finance.yahoo.com.

budeme predikovať pomocou poslednej známej hodnoty signálu a stále nových jednorokových predikcií s označením z rovnice (20) z predošlej podkapitoly. Podľa [11] na predpovedanie viac než jednej budúcej hodnoty je možné použiť vzťah:

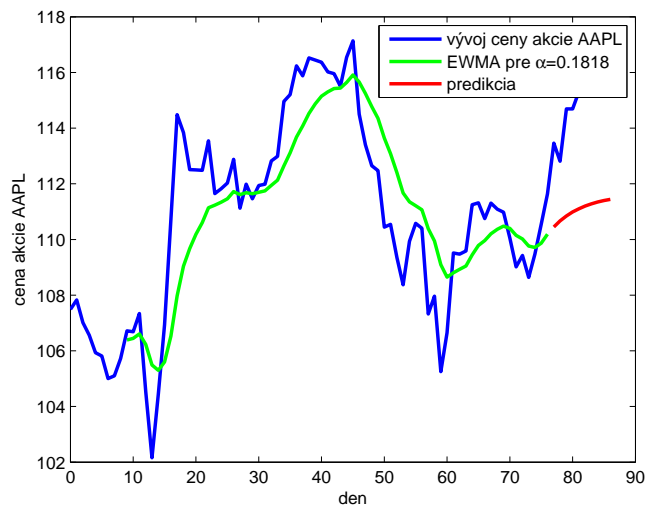
$$\hat{x}[n] = \alpha x[N-1] + (1-\alpha)\hat{x}[n-1], \quad (28)$$

kde  $n \geq N$  a hodnota  $x[N-1]$ , posledná známa hodnota vstupného signálu  $x$ , zostáva pri ďalších výpočtoch rovnaká.

Na obrázku 24 vidíme zobrazený priebeh ceny akcie firmy Apple (modrou), výstup Exponentially weighted moving average filtra (zelenou) a krivku s predikciami (červenou) pre 10 periód. Z obrázku je možné si všimnúť, že krivka predikovaných hodnôt rastie rovnako ako aj skutočný signál na danom intervale. Predikcie sa však výrazne líšia od reálnych cien akcií.

### 4.3 Predikcia pomocou Double exponentially weighted moving average filtra 1

Brownov lineárny exponenciálne zhladzujúci model (Brown's linear exponential smoothing model) je akýmsi rozšírením Double exponentially weighted moving average



Obr. 24: Priebeh ceny akcie firmy Apple v období od 22.8.2016 do 22.12.2016 (modrou), výstup Exponentially weighted moving average (EWMA) filtra (zelenou) a predikcia EWMA2 (červenou) pre hodnotu parametra  $\alpha = 0,1818$ . Zdroj dát: finance.yahoo.com.

filtra. Pripomeňme si preto predpis Double exponentially weighted moving average filtra z podkapitoly 3.3 so substitúciou  $\alpha = 1 - \lambda$  rovnako ako pri predikciách pomocou Exponentially weighted moving average filtra:

$$y[n] = \alpha x[n] + (1 - \alpha)y[n - 1],$$

$$b[n] = \alpha y[n] + (1 - \alpha)b[n - 1].$$

Ako sa píše v [8], ak chceme predikovať viac než jednu budúcu hodnotu, môže byť výhodné odhadnúť lokálny trend a očakávanú hodnotu signálu. Podľa [17] a [12] je táto metóda vhodná pre časové rady s lineárnym trendom, teda v tvare:

$$x[n] = b_0 + b_1 n, \tag{29}$$

kde  $b_0$  je konštanta určujúca aktuálnu očakávanú hodnotu a  $b_1$  určuje sklon časového radu. Parametre  $b_0$  a  $b_1$  sa môžu mierne meniť s časom.

Podľa [12] na odvodenie vzťahu predikcie vypočítame očakávanú hodnotu prvej zhla-

dzovacej rovnice:

$$\begin{aligned}
E(y[n]) &= (1 - \alpha)E(y[n - 1]) + \alpha E(x[n]) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha)^k E(x[n - k]) \\
&= \alpha(b_0 + b_1 n + (1 - \alpha)(b_0 + b_1(n - 1)) + (1 - \alpha)^2(b_0 + b_1(n - 2)) + \dots) \\
&= \alpha(b_0(1 + (1 - \alpha) + (1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^3 + \dots) \\
&\quad + b_1(n + (1 - \alpha)(n - 1) + (1 - \alpha)^2(n - 2) + (1 - \alpha)^3(n - 3) + \dots)) \\
&= \alpha(b_0(1 + (1 - \alpha) + (1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^3 + \dots) \\
&\quad + b_1(n(1 + (1 - \alpha) + (1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^3 + \dots)) \\
&\quad - b_1(1 - \alpha)(1 + 2(1 - \alpha) + 3(1 - \alpha)^2 + 4(1 - \alpha)^3 + \dots)) \\
&= \alpha \left( b_0 \frac{1}{\alpha} + b_1 n \frac{1}{\alpha} - b_1 (1 - \alpha) \frac{1}{\alpha^2} \right) \\
&= b_0 + b_1 n - b_1 \frac{1 - \alpha}{\alpha} = E(x[n]) - b_1 \frac{1 - \alpha}{\alpha}. \tag{30}
\end{aligned}$$

Z výsledku vidíme, že výstup z rovnice (30) je oneskorený oproti očakávanej hodnote skutočného signálu o  $b_1 \frac{1 - \alpha}{\alpha}$  hodnoty.

Využitím výsledku zo vzťahu (30) vypočítame očakávanú hodnotu druhej zhladzovacej rovnice, čiže konečného výstupu filtra:

$$\begin{aligned}
E(b[n]) &= (1 - \alpha)E(b[n - 1]) + \alpha E(y[n]) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha)^k E(y[n - k]) \\
&= \alpha \left( b_0 + b_1 n - b_1 \frac{1 - \alpha}{\alpha} + (1 - \alpha) \left( b_0 + b_1(n - 1) - b_1 \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) \right. \\
&\quad \left. + (1 - \alpha)^2 \left( b_0 + b_1(n - 2) - b_1 \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) + \dots \right) \\
&= \alpha(b_0(1 + (1 - \alpha) + (1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^3 + \dots) \\
&\quad + b_1 n(1 + (1 - \alpha) + (1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^3 + \dots) \\
&\quad - b_1(1 - \alpha)(1 + 2(1 - \alpha) + 3(1 - \alpha)^2 + \dots) \\
&\quad - b_1 \frac{1 - \alpha}{\alpha}(1 + (1 - \alpha) + (1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^3 + \dots)) \\
&= \alpha \left( b_0 \frac{1}{\alpha} + b_1 n \frac{1}{\alpha} - b_1 \frac{1 - \alpha}{\alpha^2} - b_1 \frac{1 - \alpha}{\alpha^2} \right) \\
&= b_0 + b_1 n - 2b_1 \frac{1 - \alpha}{\alpha} = E(x[n]) - 2b_1 \frac{1 - \alpha}{\alpha} = E(y[n]) - b_1 \frac{1 - \alpha}{\alpha}. \tag{31}
\end{aligned}$$

Celkový výstup je oneskorený oproti očakávanej hodnote výstupu z prvej zhladzovacej rovnice o  $b_1 \frac{1 - \alpha}{\alpha}$  hodnoty, čo znamená, že oproti očakávanej hodnote vstupného signálu je oneskorený o  $2b_1 \frac{1 - \alpha}{\alpha}$  hodnoty.

Vyjadríme odhad pre  $b_1$  v čase  $n$  z rovnice (31):

$$\hat{b}_1[n] = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left( E(y[n]) - E(b[n]) \right) \quad (32)$$

a dosadíme do vzťahu pre  $E(x[n])$  vyjadreného zo vzťahu (30):

$$\begin{aligned} E(x[n]) &= E(y[n]) + \frac{1-\alpha}{\alpha} b_1 = E(y[n]) + \frac{1-\alpha}{\alpha} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \left( E(y[n]) - E(b[n]) \right) \right) \\ &= 2E(y[n]) - E(b[n]), \end{aligned}$$

čo je vlastne odhad pre  $b_0$  v čase  $n$ :

$$\hat{b}_0[n] = 2E(y[n]) - E(b[n]) = 2y[n] - b[n]. \quad (33)$$

Strednú hodnotu je možné z rovníc (33) a (32) vynechať, nakoľko neobsahujú žiadne náhodné členy. Predikciu na viac než jeden krok získame z rovnice (29), z ktorej sme vychádzali, dosadením odhadov pre  $b_0$  a  $b_1$  z rovníc (33) a (32):

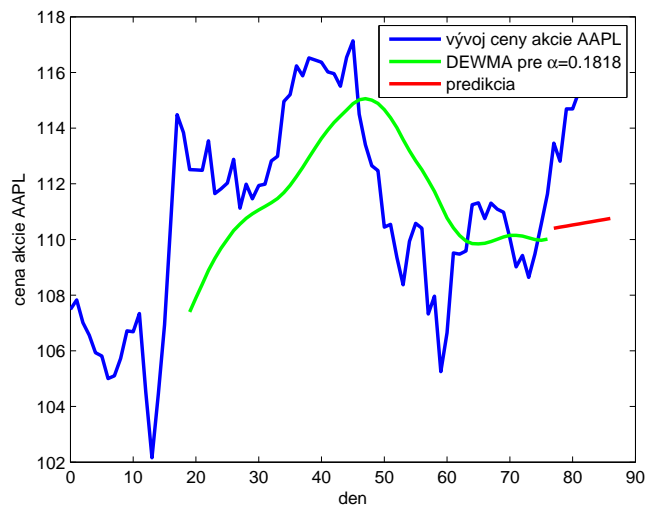
$$\begin{aligned} \hat{x}[n+k] &= \hat{b}_0[n] + k\hat{b}_1[n] \\ &= 2y[n] - b[n] + k \frac{\alpha}{1-\alpha} (y[n] - b[n]) \\ &= \left( 2 + k \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) y[n] - \left( 1 + k \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) b[n]. \end{aligned} \quad (34)$$

Obrázok 25 zobrazuje priebeh cien akcie firmy Apple (modrou), výstup Double exponentially weighted moving average filtra (zelenou) a krivku s predikciami (červenou) na 10 periód. Opäť pozorujeme, že táto metóda dobre predikuje rast ceny akcie, avšak vidíme výrazné rozdiely predikcie od skutočnej ceny.

#### 4.4 Predikcia pomocou Double exponentially weighted moving average filtra 2

Z rovnakého filtra ako v predchádzajúcom prípade, z Double exponentially weighted moving average filtra, vychádza aj nasledujúca predikcia. Základnou myšlienkou tejto predikcie podľa článku [10] opäť je, že časový rad (signál) môže byť vhodne modelovaný pomocou jednoduchej lineárnej trendovej rovnice. Lokálny trend a očakávanú hodnotu predikcie je možné vypočítať:

$$\begin{aligned} l[n] &= 2y[n] - b[n-1], \\ t[n] &= \frac{\alpha}{1-\alpha} (y[n] - b[n-1]), \end{aligned}$$



Obr. 25: Priebeh ceny akcie firmy Apple v období od 22.8.2016 do 22.12.2016 (modrou), výstup Double exponentially weighted moving average (DEWMA) filtra (zelenou) a predikcia DEWMA1 (červenou) pre hodnotu parametra  $\alpha = 0,1818$ . Zdroj dát: finance.yahoo.com.

kde  $l[n]$  je lokálny priemer v danej perióde a  $t[n]$  je odhadnutý trend v tej istej perióde. Pri porovnaní týchto rovníc s rovnicami pre  $b_0$  a  $b_1$  vidíme výraznú podobnosť. Rozdiel je ten, že v tomto prípade do výpočtu namiesto konečného výstupu  $b[n]$  vstupuje predošlá hodnota výstupu  $b[n - 1]$ . Na základe získaných odhadov následne vypočítame odhad nových hodnôt signálu  $x$ :

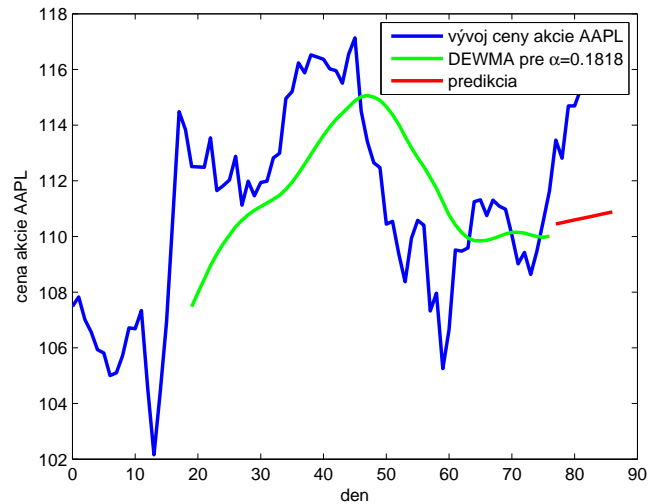
$$\hat{x}[n + k] = l[n] + kt[n].$$

kde  $n + k > N - 1$  a  $k \in \mathbb{N}$ .

Na obrázku 26 vidíme priebeh cien akcie firmy Apple (modrou), výstup Double exponentially weighted moving average filtra (zelenou) a krivku s predikciami (červenou) na 10 periód. Pri porovnaní s obrázkom 25 nevidíme žiadne výraznejšie rozdiely. Rovnako ako v predošlom prípade pozorujeme správnu predikciu rastu ceny akcie Apple, predikované hodnoty sa však výrazne líšia od skutočných cien.

## 4.5 Porovnanie predikcií

V tejto kapitole sme sa venovali predikciám s použitím dvoch moving average filtrov, Exponentially weighted moving average filtra a Double exponentially weighted moving

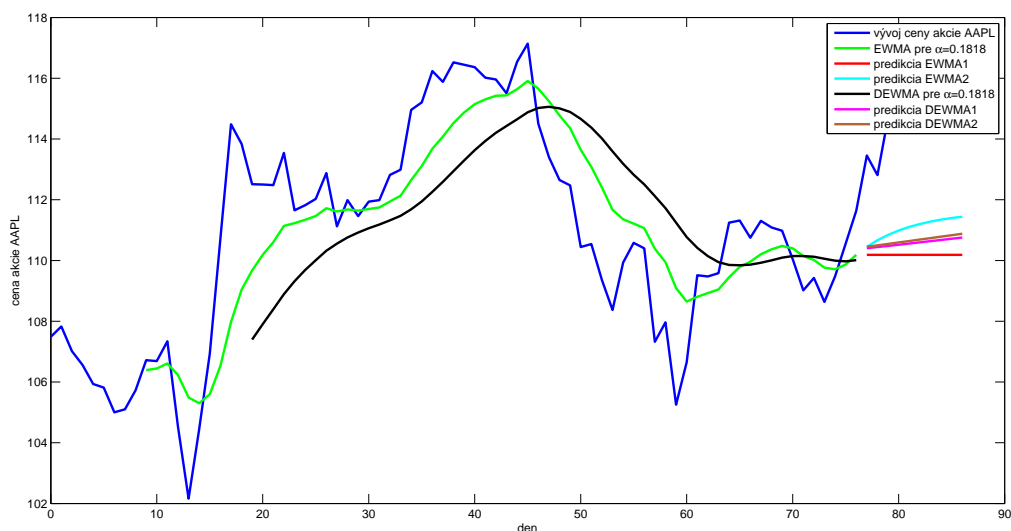


Obr. 26: Priebeh ceny akcie firmy Apple v období od 22.8.2016 do 22.12.2016 (modrou), výstup Double exponentially weighted moving average (DEWMA) filtra (zelenou) a predikcia DEWMA2 (červenou) pre hodnotu parametra  $\alpha = 0,1818$ . Zdroj dát: finance.yahoo.com.

average filtra. Pre každý z týchto filtrov sme uviedli dva spôsoby predikcie. Na obrázku 27 vidíme vývoj ceny akcie Apple v období od 22.8.2016 do 22.12.2016 (modrou), výstupy spomínaných dvoch filtrov, výstup Exponentially weighted moving average filtra (zelenou) a výstup Double exponentially weighted moving average filtra (čiernou), ako aj príslušné predikcie. Predikcie sú označené číslami 1 a 2 podľa toho, v akom poradí sú v práci uvedené. Prvá predikcia pomocou Exponentially weighted moving average filtra je červenou, druhá bledomodrou, prvá predikcia pomocou Double exponentially weighted moving average filtra, Brownov lineárny exponenciálne zhladzujúci model, je ružovou a druhá predikcia je hnedou. Z obrázku môžeme pozorovať, že najlepšie predikuje vývoj ceny akcie Apple druhá predikcia pomocou Exponentially weighted moving average filtra, teda predikcia používajúca poslednú známu hodnotu signálu. Medzi predikciami pomocou Double exponentially weighted moving average filtra nevidíme výraznejšie rozdiely. Ako najhoršia sa javí prvá predikcia založená na Exponentially weighted moving average filtri.

V tabuľke 3 sú vypočítané odchýlky jednotlivých predikcií od skutočných signálov





Obr. 27: Priebeh ceny akcie firmy Apple v období od 22.8.2016 do 22.12.2016 (modrou), výstup Exponentially weighted moving average (DEWMA) filtra (zelenou), výstup Double exponentially weighted moving average (DEWMA) filtra (čiernou), predikcia EWMA1 (červenou), EWMA2 (bledomodrou), DEWMA1 (ružovou) a DEWMA2 (hnedom) pre hodnotu parametra  $\alpha = 0,1818$ . Zdroj dát: finance.yahoo.com.

pomocou vzťahu:

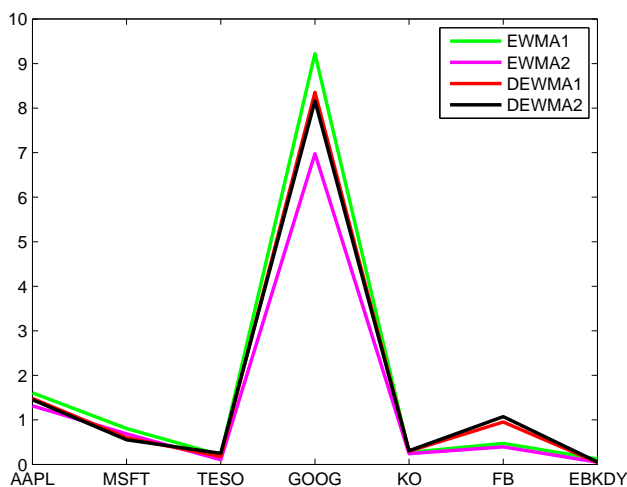
$$\frac{\sqrt{\sum_{i=N-M}^{N-1} (x_i - \hat{x}_i)^2}}{M},$$

kde  $x_i$  je pôvodný časový rad,  $\hat{x}_i$  je predikcia,  $N$  je dĺžka časového radu,  $f$  je deň, v ktorom vznikla prvá predikcia a  $M$  je dĺžka predikovaného obdobia.

Na obrázku 28 sú tieto odchýlky zobrazené graficky. Z tohto obrázku vidíme, že žiadna z predikcií nie je najlepšia pre všetky typy akcií, zároveň žiadna predikcia nie je stále najhoršia. Taktiež môžeme pozorovať, že odchýlky dvoch spomínaných predikcií pomocou Double exponentially weighted moving average filtra (DEWMA1 a DEWMA2) sú podobné.

Tabuľka 3: Odchýlky prvej predikcie pomocou Exponentially weighted moving average (EWMA1) filtra, druhej predikcie pomocou Exponentially weighted moving average (EWMA2) filtra, prvej predikcie Double exponentially weighted moving average (DEWMA1) filtra a druhej predikcie Double exponentially weighted moving average (DEWMA2) od reálnych cien akcií AAPL, MSFT, TESO, GOOG, KO, FB, EBKDY počítané na dátach v období od 12.12.2016 do 22.12.2016.

	AAPL	MSFT	TESO	GOOG	KO	FB	EBKDY
EWMA1	1,6090	0,8070	0,2101	9,2217	0,2677	0,4708	0,1221
EWMA2	1,3163	0,6853	0,1044	6,9771	0,2420	0,3933	0,0499
DEWMA1	1,4815	0,5992	0,1780	8,3526	0,2985	0,9511	0,0425
DEWMA2	1,4532	0,5534	0,2475	8,1606	0,3054	1,0709	0,0520



Obr. 28: Odchýlky prvej predikcie pomocou Exponentially weighted moving average (EWMA1) filtra (zelenou), druhej predikcie pomocou Exponentially weighted moving average (EWMA2) filtra (ružovou), prvej predikcie Double exponentially weighted moving average (DEWMA1) filtra (červenou) a druhej predikcie Double exponentially weighted moving average (DEWMA2) filtra (čiernou) od reálnych cien akcií AAPL, MSFT, TESO, GOOG, KO, FB, EBKDY počítané na dátach v období od 12.12.2016 do 22.12.2016.

## Záver

V práci sme sa venovali piatim moving average filtrom, ktoré sme sa snažili popísať z pohľadu teórie digitálnych signálov.

V prvej kapitole sme predstavili základné pojmy z teórie spracovania digitálnych signálov z [13], [14] a [16] ako signál či energia. Rovnako sme sa venovali aj diskkrétnej Fourierovej transformácii a  $z$ -transformácii, vďaka ktorým sa na signál môžeme pozrieť nielen v časovej, ale aj vo frekvenčnej a  $z$ -doméne.

Druhá kapitola bola zameraná na LTI filtre. Vysvetlili sme, čo filter je, a taktiež sme uviedli charakteristiky filtrov: impulznú odozvu, frekvenčnú odozvu a prenosovú funkciu. Popísali sme základné delenia filtrov podľa dĺžky impulznej odozvy a podľa tvaru magnitúdovej odozvy.

V ďalšej kapitole sme ukázali dobre známe digitálne filtre ako Simple moving average filter a Exponentially weighted moving average filter, ale aj menej známe filtre, Double exponentially weighted moving average filter a Triple exponentially weighted moving average filter z článku [3] a Double exponential moving average filter z [1]. Keďže neboli ku každému z filtrov z článku [3] explicitne uvedené výpočty všetkých charakteristík, v práci sme výpočty skompletizovali a vypočítali a vysvetlili sme ich aj pre Double exponential moving average filter. Následne sme spomínané filtre aplikovali na dáta vývoja cien akcie firmy Apple. V závere kapitoly sme sa venovali porovnaniu uvedených filtrov. Filtre sme aplikovali na ceny akcií spoločností Apple, Microsoft, Tesco, Google, Coca Cola, Facebook a Erste Group Bank a vypočítali odchýlky výstupov filtrov od skutočných časových radov. Na základe odchýlok sa ako najlepší, najviac kopírujúci správanie sa reálneho signálu, javil Double exponential moving average filter. O niečo horšie výsledky dosahoval Exponentially weighted moving average filter. Podobné veľkosti chýb sa ukazovali pri Simple moving average moving average filtri a Double exponentially weighted moving average filtri. Najvyššie odchýlky mal Triple exponentially weighted moving average filter. Každý z filtrov sa rovnako dobre správal pri všetkých dátach, teda ak pre ceny akcie firmy Apple boli najmenšie odchýlky pri aplikovaní Double exponential moving average filtra, boli najmenšie odchýlky pri použití tohto filtra aj pre ostatné spoločnosti.

V poslednej kapitole sme spravili prehľad štyroch predikcií, dvoch pomocou Expo-

nentially weighted moving average filtra z [11] a [5] a dvoch pomocou Double exponentially weighted moving average filtra z článkov [10] a [8]. Odvodili a vysvetlili sme ich myšlienky za predpismi uvedených predikcií a následne sme ich aplikovali na ceny akcií spoločností Apple, Microsoft, Tesco, Google, Coca Cola, Facebook a Erste Group Bank. Na základe odchýlok predikcií od cien sme porovnali filtre. Podľa výsledkov sa vo väčšine prípadov javila predikcia pomocou Exponentially weighted moving average filtra 2 (EWMA2) ako najlepšia. Predikcie pomocou Double exponentially weighted moving average filtra dosahovali podobné výsledky (DEWMA1 a DEWMA2). V takmer každom prípade sa ukazovala predikcia pomocou Exponentially weighted moving average filtra 1 (EWMA1) ako najhoršia.

## Zoznam použitej literatúry

- [1] Aasvik, M.: Double Exponential Moving Average Filter – Speeding up the EMA, dostupné na internete (4.4.2017): <https://www.norwegiancreations.com/2016/08/double-exponential-moving-average-filter-speeding-up-the-ema/>
- [2] Baum, C. F.: Time-series filtering techniques in Stata, Boston College, Boston, 2006, dostupné na internete (12.1.2017): [http://www.stata.com/meeting/5nasug/TSFiltering\\_beamer.pdf](http://www.stata.com/meeting/5nasug/TSFiltering_beamer.pdf)
- [3] Boissard, J.: Applications and Uses of Digital Filters in Finance, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 2012, dostupné na internete (16.4.2017): <http://www.swissquant.com/data/docs/de/1421/Applications-and-Uses-of-Digital-Filters-in-Finance.pdf>
- [4] Dash, S.: A Comparative Study of Moving Averages: Simple, Weighted and Exponential, dostupné na internete (6.5.2017): <https://www.tradestation.com/education/labs/analysis-concepts/a-comparative-study-of-moving-averages>
- [5] Di Tommaso, G.: Exponential Smoothing (ES), dostupné na internete (18.4.2017): <http://www.bankpedia.org/index.php/en/98-english/e/23847-exponential-smoothing-es>
- [6] Fessler, J. A.: Design of Digital Filters, učebné texty, University of Michigan, 2004, dostupné na internete (16.4.2017): <https://web.eecs.umich.edu/~fessler/course/451/1/pdf/c8.pdf>
- [7] Cheever, E.: The Unit Step Response, dostupné na internete (12.1.2017): <http://lpsa.swarthmore.edu/Transient/TransInputs/TransStep.html>
- [8] LaViola, J. J. Jr.: Double Exponential Smoothing: An Alternative to Kalman Filter-Based Predictive Tracking, dostupné na internete (16.4.2017): [http://cs.brown.edu/~jjl/pubs/kfvsexp\\_final\\_laviola.pdf](http://cs.brown.edu/~jjl/pubs/kfvsexp_final_laviola.pdf)

- [9] Nau, R. F.: Forecasting with moving averages, dostupné na internete (16.4.2017): [https://people.duke.edu/~rnau/Notes\\_on\\_forecasting\\_with\\_moving\\_averages--Robert\\_Nau.pdf](https://people.duke.edu/~rnau/Notes_on_forecasting_with_moving_averages--Robert_Nau.pdf)
- [10] Nau, R. F.: Moving average and exponential smoothing models, dostupné na internete (16.4.2017): <https://people.duke.edu/~rnau/411avg.htm>
- [11] NIST/SEMATECH: e-Handbook of Statistical Methods, dostupné na internete (16.4.2017): <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section4/pmc432.htm>
- [12] Pisinger, D.: Forecasting using simple models, slajdy z prednášok, University of Copenhagen, Kodaň, 2006, dostupné na internete (25.4.2017): <http://www.diku.dk/hjemmesider/ansatte/pisinger/production/BasicForecastingMethods4.pdf>
- [13] Proakis, J. G., Manolakis, D. K.: Digital Signal Processing, Pearson New International Edition, Fourth Edition, Pearson Education, Harlow, 2014
- [14] Prandoni, P., Vetterli, M.: Signal Processing for Communications, EFPL Press, Lausanne, 2008, dostupné na internete (16.1.2017): <http://www.sp4comm.org/docs/sp4comm.pdf>
- [15] Selesnick, I.: EL 6113: Digital Signal Processing I, učebné texty, New York University, New York, 2013, dostupné na internete (11.3.2017): [http://eeweb.poly.edu/iselesni/EL6113/notes/pz\\_freqz.pdf](http://eeweb.poly.edu/iselesni/EL6113/notes/pz_freqz.pdf)
- [16] Smith, S. W.: The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing, California technical Publishing, San Diego, 1997, dostupné na internete (12.1.2017): <http://www.dspguide.com/pdfbook.htm>
- [17] Yeung, I.: MS4102 Business Forecasting Methods Exponential Smoothing Methods, slajdy z prednášok, City University of Hong Kong, Hong Kong, 2001, dostupné na internete (16.4.2017): <http://personal.cb.cityu.edu.hk/msiris/ms4102/ms4102es.pdf>

## Príloha A

V tejto časti uvedieme skripty pre vytvorenie výstupu zo všetkých filtrov z kapitoly 3 a predikcií z kapitoly 4 spustiteľné v prostredí *Matlab*.

### Filtre

V kapitole 3 sme zhrnuli päť moving average filtrov, Simple moving average filter, Exponentially weighted moving average filter, Double exponentially weighted moving average filter, Double exponential moving average filter a Triple exponentially weighted moving average filter, ktorých kódy sú uvedené nižšie.

#### Simple moving average filter

```
data = xlsread('AAPL.xlsx');
data = flipud(data);
x = data;
N = length(x);
M = 10;
y = nan(N,1);
y(M,1) = sum(x(1:M,1))/M;
for n = (M+1):N
    for k = 1:M
        if (n-k)>0
            if k==1
                y(n) = (1/M)*x(n-k);
            else
                y(n) = y(n)+(1/M)*x(n-k);
            end
        end
    end
end
end
```

```

figure
plot([0:N-1],data,'b','LineWidth',2)
hold on
plot([0:N-1],y,'g','LineWidth',2)

```

## Exponentially weighted moving average filter

```

data = xlsread('AAPL.xlsx');
data = flipud(data);
x = data;
N = length(x);
lambda = (M-1)/(M+1);
y=nan(N,1);
y(M,1)=sum(x(1:M,1))/M;
y(M,1)=(1-lambda)*x(M,1)+y(M,1)*lambda;
for n=(M+1):N
    y(n,1)=(1-lambda)*x(n,1)+lambda*y(n-1,1);
end
plot([0:N-1],y,'m','LineWidth',2)
hold on
plot([0:N-1],data,'b','LineWidth',2)

```

## Double exponentially weighted moving average filter

```

data = xlsread('AAPL.xlsx');
data = flipud(data);
x = data;
N = length(x);
lambda = (M-1)/(M+1);
y=nan(N,1);
y(M,1)=sum(x(1:M,1))/M;

```



```

y(M,1)=(1-lambda)*x(M,1)+y(M,1)*lambda;
for n=(M+1):N
    y(n,1)=(1-lambda)*x(n,1)+lambda*y(n-1,1);
end
b=nan(N,1);
b(2*M,1)=sum(y((M+1):2*M,1))/M;
b(2*M,1)=(1-lambda)*y(2*M,1)+b(2*M,1)*lambda;
for n=(2*M+1):N
    b(n,1)=(1-lambda)*y(n,1)+lambda*b(n-1,1);
end
plot([0:N-1],b,'r','LineWidth',2)
hold on
plot([0:N-1],data,'b','LineWidth',2)

```

## Double exponential moving average filter

```

data = xlsread('AAPL.xlsx');
data = flipud(data);
x = data;
N = length(x);
lambda = (M-1)/(M+1);
y=nan(N,1);
y(M,1)=sum(x(1:M,1))/M;
y(M,1)=(1-lambda)*x(M,1)+y(M,1)*lambda;
for n=(M+1):N
    y(n,1)=(1-lambda)*x(n,1)+lambda*y(n-1,1);
end
b=nan(N,1);
b(2*M,1)=sum(y((M+1):2*M,1))/M;
b(2*M,1)=(1-lambda)*y(2*M,1)+b(2*M,1)*lambda;
for n=(2*M+1):N

```

```

        b(n,1)=(1-lambda)*y(n,1)+lambda*b(n-1,1);
end
d=2*y-b;
plot([0:N-1],d,'k','LineWidth',2)
hold on
plot([0:N-1],data,'b','LineWidth',2)

```

## Triple exponentially weighted moving average filter

```

data = xlsread('AAPL.xlsx');
data = flipud(data);
x = data;
N = length(x);
lambda = (M-1)/(M+1);
y=nan(N,1);
y(M,1)=sum(x(1:M,1))/M;
y(M,1)=(1-lambda)*x(M,1)+y(M,1)*lambda;
for n=(M+1):N
    y(n,1)=(1-lambda)*x(n,1)+lambda*y(n-1,1);
end
b=nan(N,1);
b(2*M,1)=sum(y((M+1):2*M,1))/M;
b(2*M,1)=(1-lambda)*y(2*M,1)+b(2*M,1)*lambda;
for n=(2*M+1):N
    b(n,1)=(1-lambda)*y(n,1)+lambda*b(n-1,1);
end
c=nan(N,1);
c(3*M,1)=sum(b((2*M+1):3*M,1))/M;
c(3*M,1)=(1-lambda)*b(3*M,1)+c(3*M,1)*lambda;
for n=(3*M+1):N
    c(n,1)=(1-lambda)*b(n,1)+lambda*c(n-1,1);

```

```

end
plot([0:N-1],c,'c','LineWidth',2)
hold on
plot([0:N-1],data,'b','LineWidth',2)

```

## Predikcie

Kapitola 4 bol venovaná štyrom predikciám, dvom pomocou Exponentially weighted moving average filtra a dvom pomocou Double exponentially weighted moving average filtra. Skripty sú uvedené nižšie.

### Predikcia pomocou Exponentially weighted moving average filtra 1

```

data=xlsread('AAPL.xlsx');
data=flipud(data);
x=data;
M=10;
N = length(x);
lambda = 1-(M-1)/(M+1);
y=nan(N,1);
y(M,1)=sum(x(1:M,1))/M;
y(M,1)=(lambda)*x(M,1)+y(M,1)*(1-lambda);
for n=(M+1):N
    y(n,1)=(lambda)*x(n,1)+(1-lambda)*y(n-1,1);
end
y((N-M+1):N,1)=y(N-M,1);
plot([0:N-1],x','b','LineWidth',2)
hold on
plot([0:N-M-1],y(1:(N-M)),'g','LineWidth',2)
hold on

```

```
plot([N-M:N-1],y((N-M+1):N),'r','LineWidth',2)
```

## **Predikcia pomocou Exponentially weighted moving average filtra 2**

```
data=xlsread('AAPL.xlsx');  
data=flipud(data);  
x=data;  
M=10;  
N = length(x);  
lambda = 1-(M-1)/(M+1);  
y=nan(N,1);  
y(M,1)=sum(x(1:M,1))/M;  
y(M,1)=(lambda)*x(M,1)+y(M,1)*(1-lambda);  
for n=(M+1):N  
    y(n,1)=(lambda)*x(n,1)+(1-lambda)*y(n-1,1);  
end  
for n=(N-M+1):N  
    y(n,1)=(lambda)*x(N-M,1)+(1-lambda)*y(n-1,1);  
end  
plot([0:N-1],x,'b','LineWidth',2)  
hold on  
plot([0:N-M-1],y(1:(N-M)),'g','LineWidth',2)  
hold on  
plot([N-M:N-1],y((N-M+1):N),'c','LineWidth',2)
```

## **Predikcia pomocou Double exponentially weighted moving average filtra 1**

```
data=xlsread('AAPL.xlsx');  
data=flipud(data);  
x=data;
```

```

M=10;
N = length(x);
lambda = 1-(M-1)/(M+1);
y=nan(N,1);
y(M,1)=sum(x(1:M,1))/M;
y(M,1)=(lambda)*x(M,1)+y(M,1)*(1-lambda);
for n=(M+1):N
    y(n,1)=(lambda)*x(n,1)+(1-lambda)*y(n-1,1);
end
b=nan(N,1);
b(2*M,1)=sum(y((M+1):2*M,1))/M;
b(2*M,1)=(lambda)*y(2*M,1)+b(2*M,1)*(1-lambda);
for n=(2*M+1):(N-M)
    b(n,1)=(lambda)*y(n,1)+(1-lambda)*b(n-1,1);
end
x_hat=nan(N,1);
for k=1:M
    x_hat(N-M+k,1)=(2+(lambda*k)/(1-lambda))*y(N-M,1)-(1+(lambda*k)/(1-lambda))*b
end
plot([0:N-1],x','b','LineWidth',2)
hold on
plot([0:(N-M-1)],b(1:(N-M),1),'k','LineWidth',2)
hold on
plot([(N-M):(N-1)],x_hat((N-M+1):N),'m','LineWidth',2)

```

## **Predikcia pomocou Double exponentially weighted moving average filtra 2**

```

data=xlsread('AAPL.xlsx');
data=flipud(data);
x=data;

```

```

M=10;
N = length(x);
lambda = 1-(M-1)/(M+1);
y=nan(N,1);
y(M,1)=sum(x(1:M,1))/M;
y(M,1)=(lambda)*x(M,1)+y(M,1)*(1-lambda);
for n=(M+1):N
    y(n,1)=(lambda)*x(n,1)+(1-lambda)*y(n-1,1);
end
b=nan(N,1);
b(2*M,1)=sum(y((M+1):2*M,1))/M;
b(2*M,1)=(lambda)*y(2*M,1)+b(2*M,1)*(1-lambda);
for n=(2*M+1):(N-M)
    b(n,1)=(lambda)*y(n,1)+(1-lambda)*b(n-1,1);
end
L=nan(N,1);
T=nan(N,1);
o=nan(N,1);
L(N-M)=2*y(N-M)-b(N-M-1);
T(N-M)=((lambda)/(1-lambda))*(y(N-M)-b(N-M-1));
for k=1:M
    o(N-M+k)=L(N-M)+k*T(N-M);
end
plot([0:N-1],x,'b','LineWidth',2)
hold on
plot([0:(N-M-1)],b(1:(N-M),1),'k','LineWidth',2)
hold on
plot([N-M:N-1],o((N-M+1):N),'y','LineWidth',2)

```