

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ANALÝZA RIEŠENÍ NELINEÁRNYCH ROVNÍC PRE
OCEŇOVANIE FINANČNÝCH DERIVÁTOV
S PREMENLIVÝMI TRANSAKČNÝMI NÁKLADMI

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ANALÝZA RIEŠENÍ NELINEÁRNYCH ROVNÍC PRE
OCEŇOVANIE FINANČNÝCH DERIVÁTOV
S PREMENLIVÝMI TRANSAKČNÝMI NÁKLADMI

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Ivan Magdolen
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Analýza riešení nelineárnych rovníc pre oceňovanie finančných derivátov s premenlivými transakčnými nákladmi.
Analysis of solutions of nonlinear equations for pricing derivative securities with variable transaction costs.

Cieľ: Cieľom práce bude kvalitatívna a numerická analýza riešení nelineárnych rovníc pre oceňovanie finančných derivátov s premenlivými transakčnými nákladmi.

Vedúci: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 25.01.2016

Dátum schválenia: 25.01.2016
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Pod'akovanie

Na tomto mieste by som sa chcel poďakovať môjmu školiteľovi prof. RNDr. Danieľovi Ševčovičovi, CSc. za cenné rady a pripomienky k práci a za čas venovaný vedeniu mojej práce. Tiež by som sa chcel poďakovať pánovi Rafaelovi Companymu z Polytechnickej Univerzity vo Valencii za plodnú diskusiu a cenné rady počas môjho pobytu v Španielsku. Ďakujem aj mojej rodine a priateľom za podporu a porozumenie počas písania práce.

Abstrakt v štátnom jazyku

MAGDOLEN, Ivan: Analýza riešení nelineárnych rovníc pre oceňovanie finančných derivátov s premenlivými transakčnými nákladmi [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava, 2017, 57 s.

Modely na oceňovanie finančných derivátov uvažujúce transakčné náklady sú charakterizované rôznymi nelineárnymi volatilitami v difúznom člene parabolickej Black-Scholesovej rovnice. Tieto rovnice vyžadujú numerické riešenia, keďže presné riešenia nie sú známe. V tejto práci analyzujeme rovnicu s difúznym koeficientom z modelu s variabilnými transakčnými nákladmi, ktorý bol navrhnutý autormi Ševčovič a Žitňanská. Je navrhnutá efektívna numerická schéma na riešenie plne nelineárnej rovnice metódou konečných diferencií s využitím explicitnej a Crank-Nicholsonovej metódy. Rovnicu týmto spôsobom riešime a výsledky podrobujeme analýze. Aplikujeme testy konvergenzie riešenia a presnosti schémy. Overujeme platnosť horných a dolných ohraničení pre toto riešenie a porovnávame numerické výsledky s výsledkami autorov modelu.

Kľúčové slová: Nelineárna Black-Scholesova rovnica, variabilné transakčné náklady, numerické riešenie, metóda konečných diferencií.

Abstract

MAGDOLEN, Ivan: Analysis of solutions of nonlinear equations for pricing derivative securities with variable transaction costs [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava, 2017, 57 p.

Models for pricing financial derivatives that consider transaction costs are characterized by different nonlinear volatilities in the diffusion term of the parabolic Black-Scholes equation. These equations require numerical solutions since exact solutions are not known. In this thesis, we analyze an equation with the diffusion coefficient coming from the model with variable transaction costs, proposed by authors Ševčovič and Žitňanská. We create an effective numerical scheme for solving fully nonlinear equation using finite difference method, namely explicit and Crank-Nicholson methods. We solve the equation this way and analyze the results. We apply convergence tests on the solution and tests of accuracy of the scheme. We also check validity of upper and lower bounds of the solution and compare results with those of the authors of the model.

Keywords: Nonlinear Black-Scholes equation, variable transaction costs, numerical solution, finite difference method.

Obsah

Zoznam obrázkov	9
Zoznam tabuliek	10
Úvod	11
1 Úvod do derivátov	13
1.1 Trh s derivátmi	13
1.1.1 História derivátov	13
1.2 Typy derivátov	15
1.2.1 Futurity a forwardy	15
1.2.2 Opcie	16
1.2.3 Swapy	18
2 Oceňovanie opcii	20
2.1 Stochastické procesy	20
2.2 Itova lema	21
2.3 Black-Scholesova rovnica	23
2.4 Lelandov model	25
2.5 Ďalšie modely s transakčnými nákladmi	27
2.5.1 Model likvidity	27
2.5.2 Model s preferenciami investora	27
2.5.3 Risk Adjusted Pricing Methodology	28
2.5.4 Model s lineárne klesajúcimi transakčnými nákladmi	28
2.5.5 Model s variabilnými transakčnými nákladmi	29
3 Návrh numerickej schémy	31
3.1 Transformácia pôvodnej rovnice	31
3.2 Návrh numerickej schémy pre explicitnú metódu	32
3.3 Návrh numerickej schémy pre Crank-Nicholsonovu metódu	34
4 Analýza riešení	37
4.1 Riešenie metódou konečných diferencií	37

4.2	Testovanie konvergenzie	42
4.3	Diskusia k výsledkom	46
	Záver	49
	Zoznam použitej literatúry	51
	Príloha	54

Zoznam obrázkov

1	Vývoj objemu obchodovaných derivátov	15
2	Payoff call a put opcie	16
3	Tok platieb	18
4	Hodnoty call opcie pre rôzne časy t	38
5	Porovnanie metód	39
6	Porovnanie riešenia s lineárnym modelom pre $t = 0$	40
7	Porovnanie riešenia s lineárnym modelom pre $S = 25$	40
8	Porovnanie schémy pri pôvodnom a novom časovom kroku	42
9	Schéma znázorňujúca ideu testovania konverencie	43
10	Chyba numerického riešenia rovnice s rezíduom	46

Zoznam tabuliek

1	Rozdiely medzi futuritami a forwardmi	16
2	Aktíva a pasíva banky a inej finančnej inštitúcie	19
3	Vstupy do numerickej schémy	38
4	Porovnanie výsledkov	38
5	Hodnoty explicitnej schémy s hladšou aproximáciou druhej derivácie v nelineárnom člene	41
6	Vypočítané hodnoty α a výpočtová náročnosť	44
7	Hodnoty α pre fixné a variabilné m	45

Úvod

Teória oceňovania finančných derivátov je záležitosťou niekoľkých posledných desaťročí. Od publikovania článku Blacka a Scholesa v roku 1973, v ktorom uviedli všeobecný návod na oceňovanie vanilla opcií, boli rozšírenia ich modelu záujmom či už akademickej obce ako aj finančných expertov.

Jednou z nevýhod Black-Scholesovho modelu sú limitujúce predpoklady pre jeho platnosť. Takýmto predpokladom sú aj nulové transakčné náklady pri obchodovaní, ktoré prirodzene v reálnom svete nulové nie sú. Teória oceňovania opcií na trhoch s nenulovými transakčnými nákladmi sa začala rozvíjať po roku 1985, keď Leland publikoval článok [17], v ktorom uvažoval konštantné transakčné náklady C . Ďalšie modely boli odvodené v nasledujúcich rokoch, pričom rôzni autori volili rôzne prístupy priblíženia sa podmienkam reálneho sveta. Spoločným znakom týchto modelov je upravená volatilita, ktorá vystupuje ako difúzny koeficient v nelineárnej parabolickej parciálnej diferenciálnej rovnici (upravená Black-Scholesova rovnica) a je funkciou gammy opcie, t.j. má tvar $\hat{\sigma}^2(V_{SS})$.

Bakstein a Howison v práci [5] brali do úvahy efekty likvidity pri obchodovaní aktív. Napríklad znížená likvidita na trhu môže spôsobiť, že investor nekúpi všetky akcie za rovnakú cenu, čo vytvára transakčné náklady. Barles a Soner v [7] uvažovali preferencie investora využívajúc jeho faktor averzie k riziku. RAPM model navrhnutý Kratkom a rozšírený autormi Jandačka a Ševčovič minimalizuje riziká vyplývajúce z vysokých transakčných nákladov a nechráneného portfólia [15]. Amster et al. v [1] predpokladali na rozdiel od Lelandovho modelu nekonštantnú, lineárne klesajúcu funkciu transakčných nákladov a Ševčovič a Žitňanská v [21] vytvorili model so všeobecnou funkciou transakčných nákladov. V nedávnom článku [2] Amster a Mogni použili ideu variabilných transakčných nákladov na ocenenie opcií s viacerými podkladovými aktívami.

V tejto práci budeme analyzovať riešenie nelineárnej rovnice vyplývajúcej z modelu Ševčoviča a Žitňanskej [21]. Autori v tomto modeli výslednú rovnicu riešili transformáciou na kvázilineárnu Gamma rovnicu. Tento prístup však znamená problém s počiatočnou podmienkou, ktorá je Diracova δ funkcia, ktorá sa ťažko aproximuje. V našom prístupe budeme riešiť priamo plne nelineárnu rovnicu. Využijeme metódu konečných diferencií a explicitnú a Crank-Nicholsonovu metódu. Tieto schémy potom

naprogramujeme a získané výsledky následne porovnáme s výsledkami z práce [21]. Ďalej podrobíme uvedené numerické schémy rôznym testom presnosti, nakoľko presné riešenie pri nelineárnej rovnici nie je známe.

V prvej kapitole stručne zhrnieme históriu derivátov, spôsoby ich obchodovania a opíšeme základné tri typy derivátov. V druhej kapitole uvedieme základnú teóriu oceňovania derivátov a predstavíme niektoré rozšírenia Black-Scholesovho modelu spomínané vyššie. V tretej kapitole navrhujeme numerickú schému metódou konečných diferencií na riešenie problému vychádzajúceho z článku [21] a vo štvrtej kapitole prezentujeme numerické výsledky.

1 Úvod do derivátov

Vo svete financií rozlišujeme tri základné typy finančných nástrojov. Sú to dlhopisy, akcie a *finančné deriváty*. Zatiaľ čo idey oceňovania prvých dvoch typov sú relatívne priamočiare, teória oceňovania derivátov je veľmi rozsiahla a neustále je predmetom štúdiá či už akademickou obcou ako aj profesionálmi z investičných bánk. V úvodnej kapitole krátko zhrnieme históriu obchodovania s derivátmi a predstavíme tri základné typy derivátov. Bližšie ich charakterizujeme a popíšeme spôsoby ich využitia pri obchodovaní.

1.1 Trh s derivátmi

Podľa definície, deriváty sú finančné nástroje, ktorých hodnota je určitým spôsobom odvodená (angl. *derived*) od iného tzv. podkladového aktíva. Medzi základné typy derivátov patria:

- futurity a forwardy,
- opcie,
- swapy.

Existuje však aj veľké množstvo rôznych variácií týchto derivátov.

1.1.1 História derivátov

Napriek tomu, že za prvé deriváty môžeme považovať už niektoré staroveké obchody, najväčší rozmach dosiahli až v niekoľkých posledných desaťročiach. Ako píše Chance v knihe [11], v Biblii v knihe Genezis (predpokladá sa, že bola písaná okolo roku 1700 pnl.) sa spomína príbeh Jákoba. Ten prišiel slúžiť k Labánovi, ktorý mu za 7 rokov slúženia prisľúbil svoju dcéru Ráchel. "*Jákob si zamiloval Ráchel a povedal: Za tvoju mladšiu dcéru ti budem slúžiť sedem rokov.*" *Gen 29:18*. Labán tento prisľub nesplnil, prinútil ho zobrať si za ženu dcéru Leu, čo môže byť považované za vôbec prvý *default* (tzn. nesplnenie kontraktu). Kontrakt medzi týmito dvomi môžeme považovať či už za opciu alebo forward v závislosti od toho či mal Jákob len právo alebo povinnosť vziať

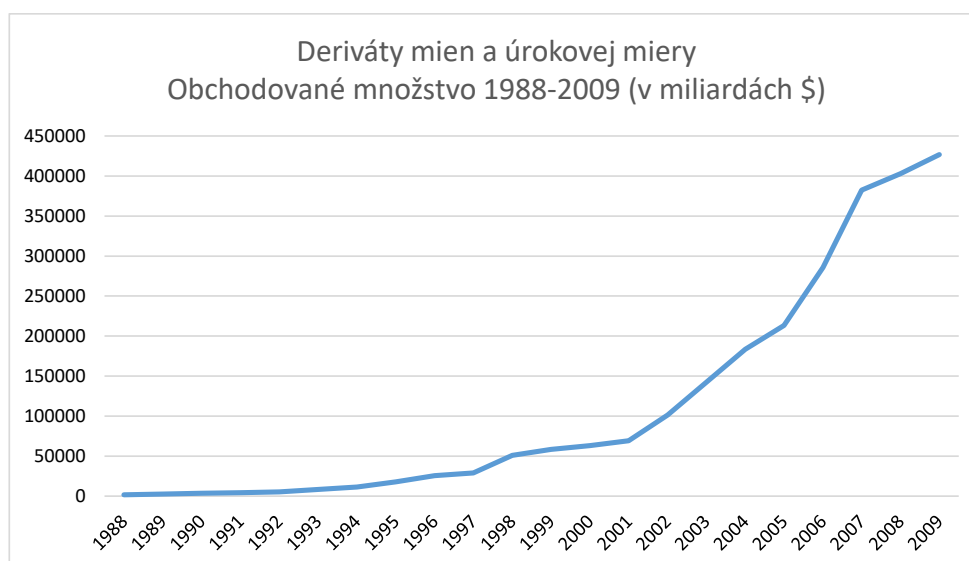
si Ráchel. Tak či tak, ide o kontrakt pri ktorom Jákob za cenu 7 rokov práce mal dostať v čase splatnosti (*maturity*) za ženu Ráchel.

Novodobý rozvoj derivátov nastal v Chicagu, kde v roku 1848 vznikla Chicago Board of Trade (CBT). Na tejto burze obchodníci s poľnohospodárskymi produktmi, najmä obilím, kupovali forwardové kontrakty aby sa poistili proti kolísavým cenám obilia. Burza však bola zároveň plná špekulantov snažiacich sa zarobiť na cenových výkyvoch. Zároveň existovalo vysoké riziko, že emitent nevyplatil dohodnutú čiastku, čo sa označuje ako riziko protistrany (angl. *counter-party risk*). V roku 1865, CBT vytvorila prvé štandardizované kontrakty s ohľadom na kvalitu, kvantitu, miesto a čas dodania, ktoré môžeme označiť ako prvé futures kontrakty. Takisto vytvorila tzv. clearing house, ktorý bol zodpovedný za sprostredkovávanie transakcií a znižoval riziko protistrany [18]. V roku 1919 z pôvodnej Chicago Butter and Egg Board, ktorá obchodovala len s kontraktmi na maslo a vajcia, vznikla Chicago Mercantile Exchange. Táto sa v roku 2007 spojila s CBT a vytvorili CME Group, ktorá je najväčšou burzou derivátov na svete, s viac ako 3,5 miliardou kontraktov v roku 2015 [22].

Najväčší rozmach derivátov nastal v 70-tych rokoch jednak kvôli pokrokom vo výpočtovej technike (novšie počítače zvládali komplikované výpočty na počítanie pravdepodobností a odhadovanie budúcej hodnoty) a zároveň vďaka práci Fishera Blacka a Myrona Scholesa. Títo americkí ekonómovia publikovali v roku 1973 článok s názvom *The pricing of options and corporate liabilities* [8], v ktorom odvodili vzorec na oceňovanie opcií, ktorý je výsledkom parciálnej diferenciálnej rovnice známej ako Black-Scholesova. Tento článok vytvoril základ oceňovania opcií a otvoril cestu obchodovaniu s derivátmi najrôznejších typov.

Na Obrázku 1 môžeme vidieť enormný nárast objemu obchodovaných derivátov mien a úrokových mier na tzv. OTC (Over The Counter) trhoch¹. Zároveň si môžeme uvedomiť aká obrovská je táto suma, niekoľko-násobne väčšia ako celosvetové HDP. Niektorí ekonómovia však tieto odhady spochybňujú a považujú ich za nadhodnotené.

¹Za OTC obchodovanie sa označuje priame obchodovanie medzi dvoma stranami bez žiadneho sprostredkovateľa.



Obr. 1: Vývoj objemu obchodovaných derivátov

Zdroj: <http://www.isda.org/statistics/otc.html>

1.2 Typy derivátov

Cieľom tejto práce je analyzovať oceňovanie derivátov na trhoch s transakčnými nákladmi. Ako sme spomínali, existujú tri základné typy derivátov a v tejto časti ich stručne popíšeme. Transakčné náklady môžu mať pri obchodovaní rôzne formy, pričom najväčší vplyv majú na oceňovanie opcí.

1.2.1 Futurity a forwardy

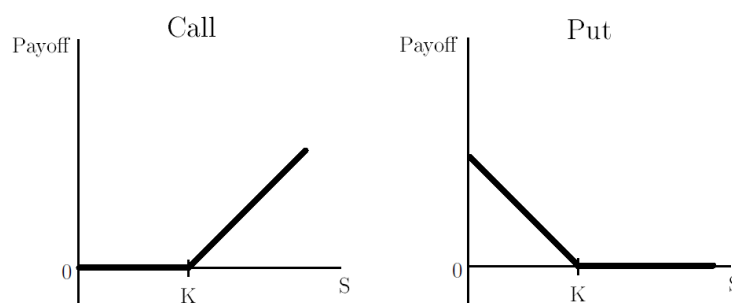
V Kapitole 1.1.1 sme spomínali biblický príbeh prvých derivátov a spomenuli sme pojem forward. Tieto deriváty sú podobné futuritám, nakoľko oba nástroje predstavujú povinnosť kupujúceho kúpiť resp. predať podkladové aktívum za vopred dohodnutú cenu v čase splatnosti v budúcnosti. Sú však medzi nimi určité rozdiely, ako môžeme vidieť v Tabuľke 1. Ceny forwardov sa dajú relatívne ľahko odvodiť a nebudeme ich tu uvádzať. Pokiaľ predpokladáme úrokové miery konštantné, sú ceny futurit rovnaké ako ceny forwardov. V skutočnosti sa však môžu líšiť berúc do úvahy dane, transakčné náklady alebo riziko protistrany. Vo všeobecnosti však môžeme považovať ceny za rovnaké [14].

Tabuľka 1: Rozdiely medzi futuritami a forwardmi

Futurity	Forwardy
obchodované na burze	obchodované na OTC trhoch
štandardizované	neštandardizované
denné vyplácanie	vyplatenie na konci kontraktu

1.2.2 Opcie

Ako sme spomínali vyššie, futurity resp. forwardy predstavujú povinnosť dohodnutý kontrakt uskutočniť. Naopak opcia dáva kupujúcemu právo rozhodnúť sa, či kontrakt vykoná alebo nie. Teda kupujúci má právo predať resp. kúpiť podkladové aktívum za vopred dohodnutú cenu (angl. *strike price*). Opcie sa delia na klasické tzv. *vanilla* opcie a exotické opcie. Vanilla opcie rozdeľujeme na európske a americké v závislosti od toho či sa opcia môže vykonať len v čase expirácie alebo počas celej doby platnosti. Vanilla opcie tiež rozdeľujeme podľa toho či má kupujúci právo kúpiť - vtedy hovoríme o *call* opcii - alebo predať, vtedy ide o *put* opciu. Ak označíme cenu podkladového aktíva S a strike price K , payoff call opcie je $\max(S - K, 0)$ a payoff put opcie $\max(K - S, 0)$. Tieto sú znázornené na Obrázku 2.



Obr. 2: Payoff call a put opcie

Exotických opcií existuje veľa typov. Uvedieme si niektoré z nich.

Ázijské opcie

Sú to opcie, ktorých payoff závisí od priemeru ceny podkladového aktíva počas platnosti kontraktu. Rozdeľujeme ich podľa použitia aritmetického alebo geometrického priemeru. Taktiež tieto opcie delíme na *average rate*, resp. *average strike*

podľa toho akú premennú zastupuje priemer v payoff funkcii. Tieto funkcie vyzerajú nasledovne (A označuje priemer):

$\max(A - K, 0)$ pre average rate call,

$\max(K - A, 0)$ pre average rate put,

$\max(S - A, 0)$ pre average strike call,

$\max(A - S, 0)$ pre average strike put.

Binárne opcie

Tieto opcie vyplácajú v čase splatnosti buď fixnú čiastku alebo nič v závislosti od toho či opcia skončí in-the-money² resp. out-of-the-money. Iný typ binárnej opcie vypláca namiesto fixnej čiastky hodnotu podkladového aktíva.

Bariérové opcie

Opcia je splatná v momente ak cena podkladového aktíva dosiahne hodnotu určitej bariérovej funkcie. Rozlišujeme či opcia dosiahne bariéru zhora alebo zdola.

Lookback opcie

Tento typ je podobný average rate opcii s tým rozdielom, že namiesto funkcie priemeru sa používa funkcia maxima alebo minima. T.j. v payoff nahrádzame funkciou $A(S, t)$ funkciou $M_{max}(S, t) = \max(S, t \in (T_0, T))$. Pri minime nahradíme funkciou minimom.

Košíkové opcie

Sú to opcie na väčší počet podkladových aktív, ktoré sú vážené určitými váhami.

Bermudské opcie Tento typ je podobný vanilla opciám s tým rozdielom, že opcia môže byť vykonaná iba v určitých časových intervaloch počas doby splatnosti. Takýto spôsob vykonávania ich stavia medzi európske a americké opcie (názov plynie z polohy Bermudských ostrovov, ktoré patria Veľkej Británii ale ležia v blízkosti USA).

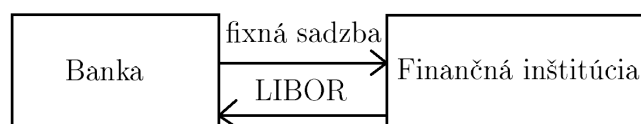
²Hovoríme že opcia je in-the-money ak platí, že cena podkladového aktíva je väčšia ako strike price $S > K$. Podobne out-of-the-money ak $S < K$

Poznamenajme, že tento zoznam je iba zlomkom existujúcich exotických opcí. Mohol by byť rozšírený ďalšími viac-či-menej používanými typmi, ktoré môže čitateľ nájsť napr. v článku [19]. Základným teóriam oceňovania opcí sa budeme venovať v Kapitole 2.

1.2.3 Swapy

Tretím základným typom derivátov sú swapy (z angl. *swap* = vymeniť). Je to dohoda medzi dvoma stranami o výmene cash-flows v budúcnosti. Táto dohoda určuje za akých podmienok majú tieto výmeny prebehnúť, s ohľadom na čas a výpočet cash-flow. Zvyčajne sa počítajú z budúcich úrokových mier, výmenných kurzov alebo iných trhových premenných [14]. Zďaleka najviac používaným³ typom swapu je *interest rate swap* (IRS). Pri tomto kontrakte si dve strany vzájomne vymieňajú cash-flows, pričom jedna strana platí fixnú čiastku a druhá plávajúcu v závislosti od aktuálnej hodnoty úrokovej miery. Najčastejšie používanou referenčnou hodnotou úrokovej miery je LIBOR⁴. Strany sa na začiatku dohodnú na hodnote istiny, z ktorej sa platby počítajú a následne vyplácajú iba percentuálne časti tejto istiny.

Ako príklad môžeme uviesť banku, ktorá uzatvorí IRS kontrakt s inou finančnou inštitúciou. Keďže sa úrokové miery menia a banka musí platiť svojim klientom rôzne úroky z krátkodobých vkladov, je pre ňu výhodné poistiť sa proti vysokým úrokovým mieram práve pomocou IRS s tým, že banka bude platiť fixnú sadzbu a dostávať plávajúcu. Naopak finančná inštitúcia, ktorá musí splácať dlh s fixnou úrokovou sadzbou vstúpi do kontraktu aby mohla dostávať fixnú sadzbu s tým, že bude vyplácať plávajúcu sadzbu, ktorú môže financovať z krátkodobých pôžičiek svojich klientov. Situáciu ilustrujú Tabuľka 2 a Obrázok 3: Týmto spôsobom si obe strany zabezpečia financo-



Obr. 3: Tok platieb

³OTC derivatives statistics at end-December 2014 [6]

⁴London Interbank Offered Rate

Tabuľka 2: Aktíva a pasíva banky a inej finančnej inštitúcie

Banka		Finanačná inštitúcia	
Aktíva	Pasíva	Aktíva	Pasíva
Dlhopisy fixný úrok	Vklady klientov plávajúci úrok	Pôžičky klientom plávajúci úrok	Dlhodobý dlh fixný úrok

vanie svojich pasív svojimi aktívami, keďže IRS prevedie fixné sadzby na plávajúce a naopak. V praxi sa IRS nedohadujú priamo medzi dvoma stranami, ale rolu sprostredkovateľa preberá tretia strana, ktorá zároveň zabezpečuje riadne plnenie dohodnutého kontraktu. Okrem IRS existujú ďalšie typy swapov ako napríklad *commodity swaps*, *volatility swaps* alebo *credit default swaps*.

Uvedli sme teda tri základné typy finančných derivátov a stručne sme opísali princípy fungovania futurít a swapov. V ďalších častiach tejto práce sa budeme zaoberať oceňovaním opcí.

2 Oceňovanie opcií

V tejto časti uvedieme niektoré známe poznatky z teórie oceňovania finančných derivátov. Uvedieme základné definície stochastických procesov, Itovu lemu a odvodíme Black-Scholesovu rovnicu na oceňovanie opcií. Následne odvodíme Lelandovu rovnicu, ktorá taktiež slúži na oceňovanie opcií ale berie do úvahy aj transakčné náklady a zhrnieme niektoré modely na oceňovanie opcií s nekonštantnou volatilitou. V Kapitolách 2.1 - 2.4 pritom vychádzame z knihy [20].

2.1 Stochastické procesy

Ceny akcií sa nedajú popísať nejakou jednoduchou matematickou závislosťou, pretože ich vývoj je viac-menej náhodný. Pokiaľ chceme modelovať ceny akcií, potrebujeme uvažovať aj náhodnú zložku. Takýto vývoj, ktorý zahŕňa náhodnosť, nazývame stochastický proces a definujeme ho nasledovne:

Definícia 2.1. *Stochastickým procesom nazývame súbor náhodných premenných $\{X(t), t \in I\}$ s množinou indexov I , ktorá môže byť diskrétna alebo spojitá.*

Dôležitou vlastnosťou, ktorú budeme vyžadovať je tzv. *Markovovská vlastnosť*. Ak je táto vlastnosť splnená, potom hodnoty stochastického procesu $X(t)$ v čase s nezávisia od predošlých hodnôt v časoch $u < s$. Stochastickým procesom je aj Brownov pohyb.

Definícia 2.2. *Brownov pohyb $\{X(t), t \geq 0\}$ je súbor náhodných premenných, ktoré spĺňajú nasledovné tri vlastnosti:*

1. *všetky prírastky $X(t + \Delta) - X(t)$ kde $\Delta > 0$ sú normálne rozdelené náhodné premenné so strednou hodnotou $\mu\Delta$ a disperziou $\sigma^2\Delta$,*
2. *pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$ intervalu $(0, t_n)$, všetky prírastky, $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ sú nezávislé náhodné premenné s parametrami z bodu 1,*
3. *$X(0) = 0$ a funkcia $t \rightarrow X(t)$ je s pravdepodobnosťou 1 spojitá pre každé t .*

Brownov pohyb s $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ nazývame Wienerov proces.

V predošlej definícii nazývame μ *drift* a σ *volatilita*. Zmenu Brownovho pohybu môžeme chápať ako súčet zmeny deterministického komponentu μdt a stochastického komponentu $\sigma dw(t)$. Dostávame teda rovnicu, ktorú nazývame *stochastická diferenciálna rovnica (SDR)*:

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dw(t). \quad (1)$$

Z tejto rovnice môžeme odvodiť rovnicu opisujúcu pohyb cien akcií. Avšak musíme zobrať do úvahy, že pri zmene ceny akcie nemôžeme uvažovať konštantný drift. Majitelia akcií totiž neočakávajú rast ceny akcie v absolútnych číslach ale v relatívnej percentuálnej miere. Ak investor očakáva zisk akcie 10%, ktorá stojí 10\$, bude očakávať 10% aj keď bude táto akcia stáť 50\$. Preto namiesto konštantného driftu musíme použiť konštantný výnos vyjadrený v tvare μS , kde μ vyjadruje výnos akcie. Potom za čas dt vzrastie cena akcie o $\mu S dt$. Rovnako aj náhodná časť musí byť proporcionálna hodnote akcie a teda pre modelovanie ceny akcie používame nasledovnú SDR:

$$dS(t) = \mu S dt + \sigma S dw(t). \quad (2)$$

Teda výnosy akcie $dS(t)/S$ sa správajú podľa Brownovho pohybu. Neskôr pomocou Itovej lemy ukážeme odvodenie rovnice pre vývoj ceny akcie.

2.2 Itova lema

Rovnica (1) sa dá prepísať ak drift a volatilitu nepovažujeme za konštantné, ale považujeme ich za funkcie času t a stochastickej premennej X . Takúto SDR potom nazývame *Itov proces* a zapisujeme v nasledovnom diferenciálnom tvare:

$$dX(t) = \mu(t, X)dt + \sigma(t, X)dw(t). \quad (3)$$

Ako sme už spomínali SDR opisujú ceny akcií. Nakoľko ceny derivátov závisia jednak od vývoja ceny akcie a taktiež od časovej premennej, funkcie typu $f(x, t)$, kde x je stochastická premenná spĺňajúca SDR a t je čas, sú pri oceňovaní derivátov kľúčové. Veľmi významnú vlastnosť takýchto funkcií - diferencovateľnosť - opisuje tzv. Itova lema, ktorú spolu s náčrtom dôkazu uvádzame podľa knihy [20].

Veta 2.1. *Nech $f(x, t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice (3). Potom prvý diferenciál funkcie f je*

daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt, \quad (4)$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dw. \quad (5)$$

Dôkaz. Uvádzame ho podľa knihy [20]. Po rozvnutí funkcie f do Taylorovho radu máme

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} dx dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 + \dots \quad (6)$$

Po umocnení SDR (3) dostávame

$$(dx)^2 = \mu^2(dt)^2 + 2 \mu dt \sigma dw + \sigma^2(dw)^2. \quad (7)$$

Keďže podľa Definície 2.2 platí $E(dw(t)) = 0$ a $Var(dw(t)) = dt$, môžeme napísať

$$dw = \Phi \sqrt{dt} \Leftrightarrow (dw)^2 \approx dt.$$

Po dosadení do (7) dostávame

$$(dx)^2 = \sigma^2 dt + \text{členy vyššieho rádu v } dt,$$

teda členy pri $(dx)^2$ v rovnici (6) nemôžeme zanedbať. Ďalej v rovnici (6) máme $(dt)^2$ a $dwdt \approx (dt)^{3/2}$, ktoré sú vyššieho rádu v dt a môžeme ich zanedbať. Z rovnice (6) dostávame

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt$$

teda rovnicu (4) a po dosadení (3) aj rovnicu (5). □

Tento výsledok je podobný klasickému pravidlu derivovania funkcie dvoch premenných. Rozdielom je dodatočný tretí člen, ktorý vyplýva z povahy stochastickej premennej x . Itova lema je kľúčovým prvkom pri odvodení Black-Scholesovej rovnice.

Ako sme už uviedli, výnosy akcií sa správajú podľa SDR (2). Podľa Itovej lemy platí, že diferenciál funkcie $g(S, t) = \ln(S)$ je rovný

$$dg = \frac{1}{S} dS + 0 + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left(-\frac{1}{S^2} \right) dt.$$

Po dosadení rovnice (2) za dS a integrovaní dostávame

$$\begin{aligned} dg &= \mu dt - \frac{1}{2}\sigma^2 dt + \sigma dw \\ g &= g(S_0, 0) + \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma w(t). \end{aligned}$$

Spätným dosadením $g = \ln(S)$

$$\begin{aligned} \ln S &= \ln S_0 + \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma w(t) \\ S &= S_0 \exp((\mu - 1/2\sigma^2)t + \sigma w(t)). \end{aligned} \tag{8}$$

Rovnica (8) vyjadruje vývoj ceny akcie v čase t . Funkciu $S(t, w(t))$ nazývame geometrický Brownov pohyb a definujeme ho nasledovne:

Definícia 2.3. Ak $\{X(t), t \geq 0\}$ je Brownov pohyb s parametrami μ, σ a $y_0 > 0 \in \mathbb{R}^+$, tak systém náhodných premenných $\{Y(t), t \geq 0\}$,

$$Y(t) = y_0 e^{X(t)}, t \geq 0, \tag{9}$$

nazývame geometrický Brownov pohyb.

2.3 Black-Scholesova rovnica

Ako sme uviedli v kapitole 1.1.1, významným míľnikom v histórii derivátov bolo odvodenie Black-Scholesovej rovnice v roku 1973. Black so Scholesom použili na odvodenie tejto rovnice myšlienku CAPM⁵. Robert C. Merton⁶ využil iný prístup a odvodenie založil na idey vytvorenia samofinancujúceho portfólia. Tento prístup je všeobecnejší, nakoľko nie je limitovaný predpokladmi CAPM modelu. V tejto kapitole odvodíme Black-Scholesovu rovnicu Mertonovým prístupom podľa knihy [20].

Pri tomto modeli predpokladáme, že sú splnené nasledovné požiadavky (Black-Scholesov svet):

1. existuje bezriziková úrokové miera r ,
2. akcie nevyplácajú dividendy,

⁵Capital Asset Pricing Model

⁶Merton je americký ekonóm, ktorý ako prvý publikoval článok objasňujúci matematickú podstatu Black-Scholesoveho modelu.

3. ceny akcií vyhovujú SDR (2),
4. na trhu neexistuje arbitráž,
5. je možné kúpiť alebo predáť ľubovoľné množstvo akcií a dlhopisov,
6. na trhu neexistujú transakčné náklady alebo dane.

Ďalej označme funkciu stochastickej premennej S (ceny aktíva) a času, ktorá prezentuje hodnotu finančného derivátu ako $V(S, t)$. Ak aplikujeme Itovu lemu na túto funkciu, s využitím podmienky 3. môžeme jej diferenciál napísať ako

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dw. \quad (10)$$

Teraz vytvoríme samofinancujúce portfólio z akcií, opcií na tieto akcie a dlhopisov. Podmienka samofinancovateľnosti znamená, že na udržanie hodnoty portfólia nie je potrebné pridávať ďalšie prostriedky a že kúpa/predaj jednej časti portfólia je vyvážený kúpou/predajom inej časti. Ďalej od portfólia vyžadujeme aby splňalo predpoklad nulových investícií, t.j. jeho celková hodnota je nulová. Takéto portfólio môžeme zapísať ako

$$SQ_S + VQ_V + B = 0, \quad (11)$$

kde premenné znamenajú v poradí: cena akcie, množstvo akcií v portfóliu, cena opcie, množstvo opcií v portfóliu, hodnota dlhopisov v portfóliu. Keďže zmena hodnoty portfólia má byť nulová (samofinancovateľnosť), platí

$$SdQ_S + VdQ_V + \delta B = 0. \quad (12)$$

Od dlhopisov očakávame, že sú úročené spojitou bezrizikovou úrokovou mierou r a nevyplácajú kupóny. Zmena hodnoty dlhopisov v portfóliu sa dá vyjadriť ako súčet úrokov a množstva kúpených/predaných dlhopisov na financovanie portfólia

$$dB = rBdt + \delta B. \quad (13)$$

Diferencovaním rovnice (11) a využitím (12) a (13) dostávame

$$\begin{aligned} Q_S dS + Q_V dV - r(SQ_S + VQ_V)dt &= 0 / \div Q_V \\ \frac{Q_S}{Q_V} dS + dV - \frac{Q_S}{Q_V} rSdt - rVdt &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Keď označíme pomer $-\frac{Q_S}{Q_V} = \Delta$ a dosadíme predpoklady (10) a (2) do (14) dostávame

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV - \Delta \mu S + \Delta rS \right) dt + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dw = 0. \quad (15)$$

Na ľavej strane rovnice je deterministická a stochastická časť. Rizikovo averzný investor chce prirodzene eliminovať rizikovosť zo svojho portfólia, ktorá je predstavovaná členmi pri dw . Volí teda $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$. Po dosadení tejto voľby Δ do (15) dostávame

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (16)$$

Táto parciálna diferenciálna rovnica sa nazýva Black-Scholesova rovnica a ide o parabolickú rovnicu druhého rádu. Opisuje vývoj ceny derivátu, ktorého podkladovým aktívom je akcia.

Pre výpočet ceny špecifického druhu derivátu ako napríklad európskej call opcie, je potrebné pridať k rovnici (16) koncovú podmienku. Táto podmienka bude v tvare payoff-u derivátu, pre európsku call opciu teda $V(S, T) = \max(S - K, 0)$.

2.4 Lelandov model

Ako sme uviedli v Kapitole 2.3, Black-Scholesov model vychádza z určitých predpokladov, ktoré nie sú v reálnom svete splnené. Pre lepšie priblíženie sa realite existujú rôzne rozšírenia tohto modelu. Predpoklad nulových transakčných nákladov je príkladom nereálneho predpokladu, nakoľko pri obchodovaní sú obchodníci vystavení takýmto nákladom či už z dôvodu nedostatočnej likvidity a z toho vyplývajúcim rôznym bid a ask⁷ cenám alebo poplatkom za transakcie. V roku 1985 publikoval americký profesor H. Leland článok [17], v ktorom odvodil upravenú Black-Scholesovu rovnicu berúc do úvahy transakčné náklady v tvare

$$C = \frac{S_{ask} - S_{bid}}{S} = 2 \frac{S_{ask} - S_{bid}}{S_{ask} + S_{bid}},$$

teda C označuje náklady investora na nákup a následný predaj jednej akcie. Výsledná rovnica je v podstate klasická Black-Scholesova rovnica s upravenou volatilitou, ktorá je

⁷Bid cena sa používa na označenie najvyššej ceny, za ktorú je kupujúci ochotný kúpiť aktívum na burze. Ask cena je najnižšia cena, za ktorú je predávajúci ochotný aktívum na burze predať. Kvôli princípu arbitráže musí platiť $P_{bid} \leq P_{ask}$.

funkciou gammy⁸ opcie $\hat{\sigma}^2(V_{SS})$. V nasledujúcej časti ukážeme odvodenie Lelandovho modelu.

Toto odvodenie je podobné Black-Scholesovemu modelu. Opäť máme portfólio P z opcie a akcií, ktorých počet je daný podľa $\delta = -V_S$. V tomto prípade však pri zmene portfólia uvažujeme transakčné náklady, teda platí

$$\Delta P = \Delta V + \delta \Delta S - S \frac{C}{2} |\Delta \delta|. \quad (17)$$

Predpokladáme, že ceny opcie a akcie vyhovujú rovniciam (10) resp. (2). Keďže udržujeme počet akcií rovný delte opcie, platí $\Delta \delta = \delta_S \Delta S = -V_{SS} \Delta S = -V_{SS}(\mu S \Delta t + \sigma S \Delta w)$. Leland ukázal, že členy pri Δt môžeme zanedbať a Δw môžeme aproximovať strednou hodnotou. Taktiež platí $\mathbf{E}(|\Delta w|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Delta t$, pretože $\Delta w \approx \Phi \sqrt{\Delta t}$ a $|\Phi|$ má strednú hodnotu $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Teda

$$|\Delta \delta| = \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sigma S \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Delta t. \quad (18)$$

Dosadením (18), (10) a (2) do (17), využijúc fakt, že od portfólia očakávame, že bude mať výnos rovný bezrizikovej miere, teda $\Delta P = rP \Delta t = r(V - V_S S) \Delta t$ a úpravou dostávame

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \operatorname{sign} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right) + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

V tejto rovnici sa často označuje $\text{Le} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C}{\sigma \sqrt{\Delta t}}$ ako Lelandovo číslo. Ako sme spomínali, je to Black-Scholesova rovnica s upravenou volatilitou v tvare

$$\hat{\sigma}^2(V_{SS}) = \sigma^2 \left(1 - \text{Le} \operatorname{sign} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right).$$

Pre európske opcie platí $V_{SS} > 0$ a teda upravená volatilita má tvar $\hat{\sigma}^2(V_{SS}) = (1 - \text{Le})$. Poznamenajme, že v prípade $V_{SS} > 0$ platí kvôli kladnosti volatILITY obmedzenie $\text{Le} < 1$, čo dáva ohraničenie na najmenší možný časový interval úpravy portfólia Δt . Musí teda platiť $\Delta t > \frac{2}{\pi} \frac{C^2}{\sigma^2}$. Naopak, ak $V_{SS} < 0$, v prípade že $\Delta t \rightarrow 0$, $\hat{\sigma}^2 \rightarrow \infty$. Lelandova rovnica už nie je lineárna kvôli členu $\operatorname{sign}(V_{SS})$.

⁸Parciálne derivácie funkcie $V(S, t)$ sa označujú gréckymi písmenami. Napr. $\frac{\partial V}{\partial S}$ označujeme ako delta a $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ označujeme ako gamma.

2.5 Ďalšie modely s transakčnými nákladmi

V predchádzajúcej časti sme odvodili Lelandov model, ktorý je rozšírením Black-Scholesovho modelu a berie do úvahy aj transakčné náklady. Rozdielom je nekonštantná volatilita v Lelandovom modeli, ktorá je závislá od gammy opcie. Tento model bol ďalej rozšírený v článku [13] pre portfólia opcií. Ďalšie modely berúce do úvahy transakčné náklady boli odvodené v článkoch [1], [5], [7], [15], [21]. Spoločným znakom týchto modelov je nelinearita výsledných rovníc v dôsledku nekonštantnej volatility, ktorá je v tvare $\hat{\sigma}^2(SV_{SS})$. V ďalšej časti budeme tieto modely analyzovať.

2.5.1 Model likvidity

Bakstein a Howison v [5] vytvorili parametrizovaný model, ktorý berie do úvahy efekty likvidity pri obchodovaní aktív. Likvidita je definovaná ako kombinácia transakčných nákladov investora a vplyvu cenových zmien. Znížená likvidita na trhu môže spôsobiť, že investor kupujúci väčšie množstvo aktív nekúpi všetky tieto aktíva za rovnakú cenu pretože počet aktív ponúkaných na burze za najnižšiu ask cenu je menší ako počet požadovaných aktív. Investor potom dokúpi ďalšie aktíva za druhú (tretiu, atď.) najnižšiu ask cenu. Podobne to platí pre predávajúceho a bid ceny. Teda platí, že čím väčší objem transakcií, tým väčšia odchýlka od priemernej ceny $(S_{ask} - S_{bid})/2$. Taktiež, veľké obchody môžu z knihy objednávok (order book) vymazať viaceré ponuky napr. kúpením všetkých ponúkaných aktív za niekoľko najnižších ask cien čo spôsobí zmenu ceny. Táto obmedzená likvidita tak vedie k transakčným nákladom.

Autori odvodili rovnicu, ktorá môže byť chápaná ako Black-Scholesova rovnica s volatilitou

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2(SV_{SS}) = \sigma^2 & \left(1 + \bar{\gamma}^2(1 - \alpha)^2 + 2\lambda SV_{SS} + \lambda^2(1 - \alpha)^2(SV_{SS})^2 \right. \\ & \left. + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\bar{\gamma} \operatorname{sign}(SV_{SS}) + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda(1 - \alpha)^2\bar{\gamma} |SV_{SS}| \right). \end{aligned}$$

Parameter λ označuje hĺbku trhu a parameter $\gamma = \bar{\gamma}\sigma\sqrt{\delta t}$ modeluje bid-ask spready.

2.5.2 Model s preferenciami investora

Autormi tohto modelu sú Barles a Soner [7], pričom tento model berie do úvahy preferencie investora využívajúc jeho funkciu užitočnosti. Autori sa zaoberajú funkciou

užitočnosti v tvare $U^\epsilon(\xi) = 1 - \exp(-\xi/\epsilon)$, $\xi \in \mathbf{R}$ s kladným parametrom ϵ . Tento parameter spĺňa vzťah $\frac{1}{\epsilon} = \gamma N$, pričom γ je faktor averzie k riziku a N je počet predávaných opcií. Ďalej skúmajú správanie sa hodnoty opcie V pre parameter $\epsilon \rightarrow 0$ a taktiež $\mu \rightarrow 0$, kde v tomto prípade μ označuje proporčné transakčné náklady.

Vzťah investora k riziku je určený parametrom a , pričom $a = \mu\sqrt{\gamma N}$. Teda hodnota tohto parametra v rovnici závisí od toho aké riziko je investor ochotný podstúpiť. Pre vyššie uvedené parametre idúce do nuly potom cena opcie V spĺňa nelineárnu Black-Scholesovú rovnicu s nasledovnou volatilitou:

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2(1 + \psi[\exp(r(T-t)a^2S^2V_{SS})]),$$

kde funkcia ψ je riešením obyčajnej diferenciálnej rovnice

$$\psi'(A) = \frac{\psi(A) + 1}{2\sqrt{A\psi(A)} - A}, \quad \psi(0) = 0.$$

2.5.3 Risk Adjusted Pricing Methodology

V roku 1998 navrhol Kratka [16] RAPM (Risk Adjusted Pricing Methodology) model. Jandačka a Ševčovič v článku [15] ho ďalej rozoberali a vylepšili ho. Odstránili nedostatky Kratkovho modelu, ktorý nebol dobre navrhnutý a invariantný na škále [23]. Podstatou tohto modelu je minimalizovanie rizika plynúceho jednak z transakčných nákladov a takisto z nechráneného portfólia. Investor prirodzene preferuje nižšie transakčné náklady. Tie môže dosiahnuť volením väčšieho intervalu úpravy portfólia, čím sa však vystavuje väčšiemu riziku, nakoľko takéto portfólio už nezodpovedá pohybom ceny akcie. Transakčné náklady sú tu konštantné podobne ako v Lelandovom modeli. Volatilita tohto modelu má tvar

$$\hat{\sigma}^2(SV_{SS}) = \sigma^2\left(1 - \mu(SV_{SS})^{\frac{1}{3}}\right), \quad \mu = 3\left(\frac{C^2R}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Konštanty C a R predstavujú transakčné náklady a koeficient rizikovej prémie.

2.5.4 Model s lineárne klesajúcimi transakčnými nákladmi

Amster, Averbuj, Mariani a Rial v tomto modeli [1], na rozdiel od Lelandovho modelu, uvažovali transakčné náklady, ktoré nie sú konštantné, ale ich výška závisí od

množstva vykonaných transakcií. Nerastúcosť transakčných nákladov môže byť chápaná ako určitá množstevná zľava pre investora, t.j. čím väčší objem transakcií vykoná, tým budú jeho jednotkové náklady na transakciu nižšie. Možno ich popísať lineárnou nerastúcou funkciou transakčných nákladov v tvare $h(x) = a - bx$, $a, b > 0$. Autori ďalej v článku [1] aplikujú metódu horných a dolných riešení na získanie riešenia stacionárneho problému. Ďalej uviedli podmienky existencie a jednoznačnosti riešenia rovnice. Volatilita tohto modelu je

$$\hat{\sigma}^2(SV_{SS}) = \sigma^2 \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \text{sign}(SV_{SS}) + bSV_{SS} \right).$$

Jedným problémom tohto modelu je fakt, že umožňuje nereálny prípad zápornosti transakčných nákladov.

2.5.5 Model s variabilnými transakčnými nákladmi

Ďalší model bol odvodený autormi Ševčovič a Žitňanská v článku [21] a umožňuje funkciu variabilných transakčných nákladov. Tento model vychádza z Lelandovho modelu, kde sú uvažované konštantné transakčné náklady a taktiež z vyššie spomínaného modelu s lineárne klesajúcimi transakčnými nákladmi. Má volatilitu v tvare

$$\hat{\sigma}^2(SV_{SS}) = \sigma^2 \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{C}(\sigma S |V_{SS}| \sqrt{\Delta t}) \frac{\text{sign}(SV_{SS})}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \right), \quad (19)$$

kde $\tilde{C}(\sigma S |V_{SS}| \sqrt{\Delta t})$ predstavuje mean-value modifikáciu funkcie transakčných nákladov

$$\tilde{C}(\xi) = \int_0^\infty C(\xi x) x e^{-x^2/2} dx.$$

Autori v článku transformovali nelineárnu parabolickú rovnicu s vyššie uvedenou volatilitou na kvázilineárnu parabolickú rovnicu a dokázali existenciu klasických hladkých riešení. Taktiež uviedli ohraničenia, ktoré riešenie tejto rovnice spĺňa. Jedným typom transakčnej funkcie navrhnutým v článku, je po častiach lineárna neklesajúca funkcia

$$C(\xi) = \begin{cases} C_0, & \text{pre } 0 \leq \xi \leq \xi_-, \\ C_0 - \kappa(\xi - \xi_-), & \text{pre } \xi_- \leq \xi \leq \xi_+, \\ \underline{C}_0, & \text{pre } \xi \geq \xi_+. \end{cases} \quad (20)$$

Na rozdiel od lineárnej neklesajúcej transakčnej funkcie z predchádzajúceho modelu má táto funkcia výhodu, že nenadobúda záporné hodnoty. Môžeme ju chápať v tom

zmysle, že pri menších objemoch transakcií sú poplatky za transakciu konštantné C_0 . Keď ich množstvo prekročí určitú hranicu ξ_- , dostane investor zľavu. Pri prekročení hodnoty ξ_+ už náklady za transakciu ďalej neklesajú ale zostanú konštantné s hodnotou C_0 . Pre mean-value modifikáciu tejto funkcie potom podľa rovnice (24) z článku [21] platí

$$\tilde{C}(\xi) = C_0 - \kappa\xi \int_{\frac{\xi_-}{\xi}}^{\frac{\xi_+}{\xi}} e^{-x^2/2} dx, \quad \text{pre } \xi \geq 0. \quad (21)$$

Druhá funkcia uvažovaná v článku je exponenciálne klesajúca transakčná funkcia. Má tvar

$$C(\xi) = C_0 \exp(-\kappa\xi), \quad \text{pre } \xi \geq 0,$$

kde $C_0 > 0$ a $\kappa > 0$ sú dané konštanty. Autori v článku odvodili aj jej mean-value modifikáciu.

Numerická schéma, ktorú autori v článku využili, riešila transformovanú Gamma rovnicu a nie priamo nelineárnu Black-Scholesovu rovnicu s volatilitou (19). V ďalšej časti práce budeme riešiť túto rovnicu priamo, bez transformácie, s využitím numerickej metódy konečných diferencií a riešenia porovnáme s riešeniami uvedenými v článku.

3 Návrh numerickej schémy

Ako sme uviedli v predchádzajúcej časti v Kapitole 2.5.5, model navrhnutý v článku [21] má volatilitu v tvare (19). V tejto časti navrhne numerickú schému na výpočet nelineárnej Black-Scholesovej rovnice s touto volatilitou. Zvolená metóda riešenia tejto rovnice je metóda konečných diferencií za použitia explicitnej ako aj Crank-Nicholsonovej metódy. Výhodou použitia druhej schémy je jej vyšší rád lokálnej diskretizačnej chyby, ktorý je $O(k^2) + O(h^2)$ (2 v časovej a 2 v priestorovej premennej) oproti explicitnej schéme, ktorá ma chybu rádu $O(k) + O(h^2)$.

Rovnicu budeme riešiť pre európsku call opciu a okrem koncovej podmienky v tvare payoff-u budeme potrebovať aj okrajové podmienky, ktoré určujú hodnoty opcie v krajných bodoch intervalu $S \in [0, +\infty)$. Keď je cena akcie rovná nule, znamená to, že táto akcia je bezcenná, čiže aj hodnota call opcie na takúto akciu je rovná nule. Platí teda $V(0, t) = 0$. V prípade, že cena akcie rastie do $+\infty$, call opcia bude určite uplatnená a držiteľov payoff bude cena akcie mínus diskontovaná strike price a teda $\lim_{S \rightarrow \infty} V(S, t) = S - Ke^{-r(T-t)}$. Budeme teda riešiť nasledovnú úlohu:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2(SV_{SS}) S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (22)$$

kde funkcia $\hat{\sigma}^2(SV_{SS})$ je modifikovaná volatilita definovaná podľa rovnice (19) a pri koncovej a okrajových podmienkach

$$\forall S \in [0, \infty), t \in (0, T) : V(S, T) = \max(S - K, 0),$$

$$V(0, t) = 0,$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{V(S, t)}{S - Ke^{-r(T-t)}} = 1.$$

3.1 Transformácia pôvodnej rovnice

V prvom kroku urobíme tieto dve transformácie pôvodnej rovnice:

1. $\tau = T - t$, pomocou ktorej bude čas plynúť opačným smerom, t.j. od koncovej podmienky až po čas $t = 0$ a

2. $x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$.

Máme teda novú funkciu $W(x, \tau) = V(Ke^x, T - \tau)$. Pre derivácie platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &= -\frac{\partial W}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{\partial W}{\partial x} \frac{1}{S} \Leftrightarrow S \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{1}{S^2} - \frac{\partial W}{\partial x} \frac{1}{S^2} \Leftrightarrow S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial x}.\end{aligned}$$

Po prvej transformácii dostávame

$$-\frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 (SV_{SS}) S^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} + rS \frac{\partial W}{\partial S} - rW = 0$$

a po druhej

$$\begin{aligned}-\frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + r \frac{\partial W}{\partial x} - rW &= 0 \\ \frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{2} - r \right) \frac{\partial W}{\partial x} + rW &= 0,\end{aligned}$$

pričom $\tau \in [0, T]$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Funkcia volatility je potom v tvare

$$\hat{\sigma}^2(K^{-1}e^{-x}(W_{xx} - W_x)) = \sigma^2 \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{C}(\sigma K e^x |(K e^{-x})^2 (W_{xx} - W_x)| \sqrt{\Delta t^*}) \frac{\text{sign}(K^{-1}e^{-x}(W_{xx} - W_x))}{\sigma \sqrt{\Delta t^*}} \right). \quad (23)$$

Koncová podmienka sa zmení na začiatočnú $W(x, 0) = \max(Ke^x - K, 0)$ a okrajové podmienky sú v tvare $W(-\infty, \tau) = 0$ a $W(+\infty, \tau) = Ke^x - Ke^{-r\tau}$. Teda nová transformovaná úloha, ktorú budeme numericky riešiť je v tvare

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{2} - r \right) \frac{\partial W}{\partial x} + rW = 0, \quad (24)$$

kde volatility $\hat{\sigma}^2$ je definovaná rovnicou (23) a pre $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall \tau \in (0, T)$ platí počiatočná a okrajové podmienky

$$\begin{aligned}W(x, 0) &= \max(K(e^x - 1), 0), \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} W(x, \tau) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} W(x, \tau) &= K(e^x - e^{-r\tau}).\end{aligned} \quad (25)$$

3.2 Návrh numerickej schémy pre explicitnú metódu

Pre vytvorenie numerickej schémy začneme s definovaním mriežky, na ktorej sa budú jednotlivé hodnoty počítať. Pre ohraničenie premennej x definujeme priestorový interval

$x \in (-L, L)$, $L > 0$. Pretože $S = Ke^x$, na dostatočné pokrytie významných hodnôt ceny akcie S postačuje zobrať $L \approx 2$. Rozdeľme časový interval $\tau \in [0, T]$ na m deliacich bodov s krajnými bodmi τ_0 a $\tau_{m+1} = T$. Dostaneme tak $m + 1$ deliacich intervalov. Dĺžku každého intervalu označme k . Priestorový interval rozdeľme na n uzlových bodov, pričom krajné body intervalu sú x_0 a x_{n+1} . Máme teda $n+1$ ekvidištančných intervalov, každý s dĺžkou h , teda $(n + 1)h = 2L$. Označme $x_i = -L + ih$, $i = 0, \dots, n + 1$, ďalej $\tau_j = jk$, $j = 0, \dots, m + 1$ a W_i^j ako aproximáciu funkcie W v bode $x = x_i$ a $\tau = \tau_j$, teda $W_i^j \approx W(x_i, \tau_j)$.

Na aproximáciu prvej priestorovej derivácie použijeme centrálnu diferenciu

$$\frac{\partial W}{\partial x}(x_i, \tau_j) \approx \frac{W_{i+1}^j - W_{i-1}^j}{2h},$$

na aproximáciu druhej priestorovej derivácie diferenciu

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x_i, \tau_j) \approx \frac{W_{i-1}^j - 2W_i^j + W_{i+1}^j}{h^2},$$

a na aproximáciu časovej derivácie doprednú diferenciu

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}(x_i, \tau_j) \approx \frac{W_i^{j+1} - W_i^j}{k}.$$

Prepíšeme rovnicu (24) v bode (x_i, τ_j) a volatilitu označíme $(\hat{\sigma}_i^j)^2$

$$\frac{W_i^{j+1} - W_i^j}{k} - \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_i^j)^2 \frac{W_{i-1}^j - 2W_i^j + W_{i+1}^j}{h^2} + \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{2} - r\right) \frac{W_{i+1}^j - W_{i-1}^j}{2h} + rW_i^j = 0.$$

Po vynásobení výrazom h^2k a usporiadaní máme

$$\begin{aligned} & h^2 \left(W_i^{j+1} - W_i^j \right) - \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_i^j)^2 k \left(W_{i-1}^j - 2W_i^j + W_{i+1}^j \right) \\ & + \frac{1}{2}hk \left(\frac{(\hat{\sigma}_i^j)^2}{2} - r \right) \left(W_{i+1}^j - W_{i-1}^j \right) + rh^2k W_i^j = 0 \\ & h^2 W_i^{j+1} + (-h^2 + (\hat{\sigma}_i^j)^2 k + rh^2k) W_i^j + \left(-\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_i^j)^2 k - \frac{1}{2}hk \left(\frac{(\hat{\sigma}_i^j)^2}{2} - r \right) \right) W_{i-1}^j \\ & + \left(-\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_i^j)^2 k + \frac{1}{2}hk \left(\frac{(\hat{\sigma}_i^j)^2}{2} - r \right) \right) W_{i+1}^j = 0 \\ & W_i^{j+1} = \left[\left(\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_i^j)^2 \frac{k}{h^2} + \frac{1}{2h} \left(\frac{(\hat{\sigma}_i^j)^2}{2} - r \right) \right) W_{i-1}^j + \left(1 - (\hat{\sigma}_i^j)^2 \frac{k}{h^2} - rk \right) W_i^j \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_i^j)^2 \frac{k}{h^2} - \frac{1}{2h} \left(\frac{(\hat{\sigma}_i^j)^2}{2} - r \right) \right) W_{i+1}^j \right]. \end{aligned}$$

Volatilitu $(\widehat{\sigma}_i^j)^2$ budeme na každej časovej vrstve j a v každom bode x_i počítat a jej tvar je

$$(\widehat{\sigma}_i^j)^2(K^{-1}e^{-x}(W_{xx} - W_x)) = \sigma^2 \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \widetilde{C}(\dots) \frac{\text{sign}(\dots)}{\sigma \sqrt{\Delta t^*}} \right), \quad (26)$$

kde

$$\text{sign}(\dots) = \text{sign} \left(\frac{W_{i-1}^j - 2W_i^j + W_{i+1}^j}{h^2} - \frac{W_{i+1}^j - W_{i-1}^j}{2h} \right),$$

$$\widetilde{C}(\dots) = \widetilde{C} \left(\sigma K e^{x_i} \left| K^{-2} e^{-2x_i} \left(\frac{W_{i-1}^j - 2W_i^j + W_{i+1}^j}{h^2} - \frac{W_{i+1}^j - W_{i-1}^j}{2h} \right) \right| \sqrt{\Delta t^*} \right).$$

Podmienky (25) nadobudnú tvar

$$\begin{aligned} W_i^0 &= \max(K(e^{x_i} - 1), 0), \\ W_0^j &= 0, \\ W_{n+1}^j &= K(e^{x_{n+1}} - e^{-r\tau_j}). \end{aligned} \quad (27)$$

Pre zjednodušenie označme koeficienty pri W_{i-1}^j , W_i^j , W_{i+1}^j ako α_i^j , β_i^j , γ_i^j . Explicitnú schému metódou konečných diferencií môžeme potom zapísať v tvare

$$W_i^{j+1} = \alpha_i^j W_{i-1}^j + \beta_i^j W_i^j + \gamma_i^j W_{i+1}^j, \quad (28)$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha_i^j &= \frac{1}{2}(\widehat{\sigma}_i^j)^2 \frac{k}{h^2} + \frac{1}{2} \frac{k}{h} \left(\frac{(\widehat{\sigma}_i^j)^2}{2} - r \right), \\ \beta_i^j &= 1 - (\widehat{\sigma}_i^j)^2 \frac{k}{h^2} - rk, \\ \gamma_i^j &= \frac{1}{2}(\widehat{\sigma}_i^j)^2 \frac{k}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{k}{h} \left(\frac{(\widehat{\sigma}_i^j)^2}{2} - r \right), \end{aligned}$$

kde $(\widehat{\sigma}_i^j)^2$ je daná rovnicou (26) a podmienky sú v tvare (27).

3.3 Návrh numerickej schémy pre Crank-Nicholsonovu metódu

Táto metóda je kombináciou explicitnej a implicitnej metódy a ako sme spomínali, má vyšší rád lokálnej diskretizačnej chyby ako explicitná metóda. Uvažujme mriežku v rovine $x\tau$ rovnakú ako pri explicitnej metóde. Na odvodenie Crank-Nicholsonovej metódy prepíšeme rovnicu (24) v bode $(x, \tau_{j+\frac{1}{2}}) = (x, \tau_j + \frac{k}{2})$. Derivácie majú potom tvar

$$W_\tau(x, \tau_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{W(x, \tau_{j+1}) - W(x, \tau_j)}{k} + O(k^2),$$

$$W_{xx}(x, \tau_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{W_{xx}(x, \tau_j) + W_{xx}(x, \tau_{j+1})}{2} + O(k^2),$$

$$W_x(x, \tau_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{W_x(x, \tau_j) + W_x(x, \tau_{j+1})}{2} + O(k^2)$$

a po dosadení dostávame

$$\begin{aligned} & \frac{W_i^{j+1} - W_i^j}{k} - \frac{1}{4}(\hat{\sigma}_i^j)^2 \left(\frac{W_{i-1}^j - 2W_i^j + W_{i+1}^j}{h^2} + \frac{W_{i-1}^{j+1} - 2W_i^{j+1} + W_{i+1}^{j+1}}{h^2} \right) \\ & + \frac{1}{4} \left(\frac{(\hat{\sigma}_i^j)^2}{2} - r \right) \left(\frac{W_{i+1}^j - W_{i-1}^j}{h} + \frac{W_{i+1}^{j+1} - W_{i-1}^{j+1}}{h} \right) + rW_i^j = 0, \\ & h^2 \left(W_i^{j+1} - W_i^j \right) - \frac{1}{4}(\hat{\sigma}_i^j)^2 k \left(W_{i-1}^j - 2W_i^j + W_{i+1}^j + W_{i-1}^{j+1} - 2W_i^{j+1} + W_{i+1}^{j+1} \right) \\ & + \frac{1}{4} \left(\frac{(\hat{\sigma}_i^j)^2}{2} - r \right) kh \left(W_{i+1}^j - W_{i-1}^j + W_{i+1}^{j+1} - W_{i-1}^{j+1} \right) + rkh^2 W_i^j = 0, \\ & W_i^{j+1} - \frac{k}{4h^2}(\hat{\sigma}_i^j)^2 \left(W_{i-1}^{j+1} - 2W_i^{j+1} + W_{i+1}^{j+1} \right) + \frac{k}{4h} \left(\frac{(\hat{\sigma}_i^j)^2}{2} - r \right) \left(W_{i+1}^{j+1} - W_{i-1}^{j+1} \right) \\ & = W_i^j + \frac{k}{4h^2}(\hat{\sigma}_i^j)^2 \left(W_{i-1}^j - 2W_i^j + W_{i+1}^j \right) - \frac{k}{4h} \left(\frac{(\hat{\sigma}_i^j)^2}{2} - r \right) \left(W_{i+1}^j - W_{i-1}^j \right) - rkW_i^j. \end{aligned}$$

Ak označíme

$$\alpha = \frac{k}{4h} \left(\frac{(\hat{\sigma}_i^j)^2}{2} - r \right),$$

môžeme Crank-Nicholsonovu metódu zapísať ako

$$A_i^j W_{i-1}^{j+1} + B_i^j W_i^{j+1} + C_i^j W_{i+1}^{j+1} = D_i^j W_{i-1}^j + E_i^j W_i^j + F_i^j W_{i+1}^j,$$

kde

$$\begin{aligned} A_i^j &= -\frac{k}{4h^2}(\hat{\sigma}_i^j)^2 - \alpha, & B_i^j &= 1 + \frac{k}{2h^2}(\hat{\sigma}_i^j)^2, & C_i^j &= -\frac{k}{4h^2}(\hat{\sigma}_i^j)^2 + \alpha, \\ D_i^j &= \frac{k}{4h^2}(\hat{\sigma}_i^j)^2 + \alpha, & E_i^j &= 1 - \frac{k}{2h^2}(\hat{\sigma}_i^j)^2 - rk, & F_i^j &= \frac{k}{4h^2}(\hat{\sigma}_i^j)^2 - \alpha \end{aligned}$$

a počiatkové a okrajové podmienky sú (27). Volatilita $(\hat{\sigma}_i^j)^2$ je daná rovnicou (26), rovnako ako pri explicitnej metóde. Časovú vrstvu $j+1$ už nemôžeme vypočítať priamo z diferenciálnej rovnice nakoľko nepoznáme hodnoty W_{i-1}^{j+1} a W_{i+1}^{j+1} . Z okrajových podmienok však poznáme hodnoty W_0^j , a $W_{n+1}^j \forall j$. Vieme teda riešiť systém n rovníc (29). Označme tento systém $\mathbf{XW}^{j+1} = \mathbf{YW}^j + \mathbf{y}$. Na každej časovej vrstve j najprv vypočítame hodnoty volatility $(\hat{\sigma}_i^j)^2 \forall i$, ktoré vstupujú do koeficientov A_i^j až E_i^j . Tým vyplníme matice \mathbf{X} , \mathbf{Y} a vektor \mathbf{y} . Následne vypočítame tento systém s n rovnicami a

n neznámymi, čím dostaneme hodnoty W_i v novej časovej vrstve $j + 1$.

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} B_1^j & C_1^j & 0 & 0 & \cdots & \\ A_2^j & B_2^j & C_2^j & 0 & \cdots & \\ 0 & A_3^j & B_3^j & C_3^j & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & A_{n-1}^j & B_{n-1}^j & C_{n-1}^j \\ & & & 0 & A_n^j & B_n^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1^{j+1} \\ W_2^{j+1} \\ \vdots \\ W_n^{j+1} \end{pmatrix} \\
 = & \begin{pmatrix} E_1^j & F_1^j & \cdots & & & \\ D_2^j & E_2^j & \cdots & & & \\ 0 & D_3^j & \cdots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ & & E_{n-1}^j & F_{n-1}^j & & \\ & & D_n^j & F_n^j & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1^j \\ W_2^j \\ \vdots \\ W_n^j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1^j W_0^j - A_1^j W_0^{j+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F_n^j W_{n+1}^j - C_n^j W_{n+1}^{j+1} \end{pmatrix}. \tag{29}
 \end{aligned}$$

Poznamenajme, že pre každú časovú vrstvu j platí

$$B_i^j = h^2 + \frac{1}{2}(\widehat{\sigma}_i^j)^2 k > \left| -\frac{1}{4}(\widehat{\sigma}_i^j)^2 k - \alpha - \frac{1}{4}(\widehat{\sigma}_i^j)^2 k + \alpha \right| = \left| -\frac{1}{2}(\widehat{\sigma}_i^j)^2 k \right| = \frac{1}{2}(\widehat{\sigma}_i^j)^2 k = \left| C_i^j + A_i^j \right|$$

pre $\forall i$, teda matica \mathbf{X} je diagonálne dominantná a teda regulárna, predošlý systém má teda vždy riešenie.

4 Analýza riešení

V predchádzajúcej kapitole sme odvodili numerické schémy na riešenie nelineárnej Black-Scholesovej rovnice s difúznym koeficientom (19). Táto rovnica vystupuje v modeli na oceňovanie derivátov uvažujúc variabilné transakčné náklady podľa článku [21]. V tejto kapitole prezentujeme výsledky numerických schém, analyzujeme ich presnosť a porovnáme ich s výsledkami autorov modelu.

4.1 Riešenie metódou konečných diferencií

Na riešenie numerických systémov sme použili program MATLAB. Ako funkciu transakčných nákladov \tilde{C} sme použili mean-value modifikáciu po častiach lineárnej nerastúcej funkcie (21). Na jej numerické vyčíslenie sme využili fakt, že

$$\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \right), \quad (30)$$

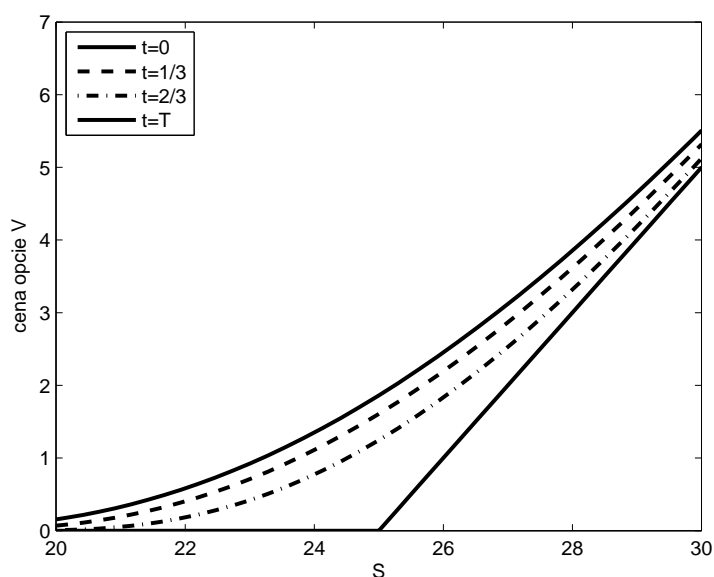
kde $\operatorname{erf}(x)$ je chybová funkcia, ktorá je v MATLAB-e vstavaná.

V prvej časti programu sme definovali konštanty numerickej schémy: rozsah priestorového intervalu L , počet priestorových deliacich bodov n , počet časových deliacich bodov m a konečný čas T . Ďalej konštanty týkajúce sa opcie: strike price K , historickú volatilitu σ , bezrizikovú úrokovú mieru r a interval úpravy portfólia Δt^* . Tretími konštantami boli konštanty k funkcii transakčných nákladov z Kapitoly 2.5.5: C_0 , κ , ξ_+ , ξ_- . Spôsob výpočtu jednotlivých časových vrstiev sa v daných metódach líšil.

Pri explicitnej metóde sa pre každú časovú vrstvu a každý bod x_i vypočítala príslušná volatilita $(\hat{\sigma}_i^j)^2$, vďaka ktorej sa vypočítali koeficienty α_i^j , β_i^j , γ_i^j a potom hodnota W_i^{j+1} v novej časovej vrstve $j + 1$. Pri Crank-Nicholsonovej metóde sa takisto najprv vypočítali volatility, pomocou ktorých sa získali koeficienty A_i^j až E_i^j pre časovú vrstvu j , ktorými sa vyplnili riedke trojdiagonálne matice \mathbf{X} , \mathbf{Y} a vektor \mathbf{y} . Následne sa vyriešil systém rovníc $\mathbf{X}\mathbf{W}^{j+1} = \mathbf{Y}\mathbf{W}^j + \mathbf{y}$ a získal sa neznámy vektor \mathbf{W}^{j+1} . V Tabuľke 3 sú uvedené vstupy do numerickej schémy v závislosti od ich typu použité pri výpočte. Na Obrázku 4 sú znázornené riešenia $V(S, t)$ pre call opciu s hodnotami $t = 0$, $t = 1/3$ a $t = 2/3$ Crank-Nicholsonovou metódou. Tiež je znázornený payoff call opcie, teda $V(S, T)$.

Tabuľka 3: Vstupy do numerickej schémy

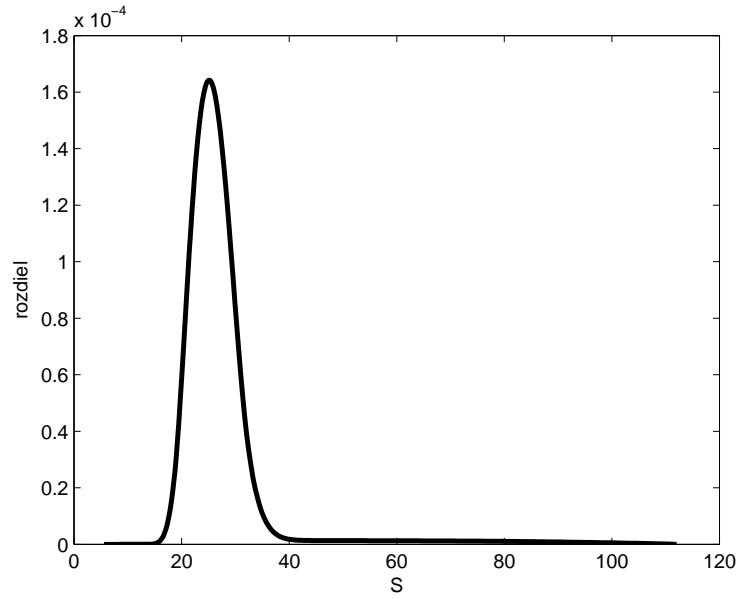
Numerickej schéma	Parametre opcie	Funkcia transakčných nákladov
$L=1,5$	$\sigma = 0,3$	$\kappa = 0,3$
$n=251$	$r=0,011$	$C_0 = 0,02$
$m=1000$	$\Delta t = 1/261$	$\xi_- = 0,05$
$T=1$	$K=25$	$\xi_+ = 0,1$

Obr. 4: Hodnoty call opcie pre rôzne časy t

V Tabuľke 4 sú hodnoty opcie v čase 0 pre niektoré hodnoty akcie S získané oboma metódami pomocou kubického splajnu a na Obrázku 5 sú tieto metódy porovnané. Rozdiel je vypočítaný ako $V_{Crank-Nicholsonova} - V_{explicitna}$. Pri explicitnej metóde sme

Tabuľka 4: Porovnanie výsledkov

S	Explicitná metóda	C-N metóda	Výsledky v článku [21]
20	0,1547	0,1547	0,127
23	0,9232	0,9234	0,844
25	1,8610	1,8612	1,748
28	3,8525	3,8527	3,474
30	5,5045	5,5046	5,327



Obr. 5: Porovnanie metód

použili $m = 7056$, takže $k \approx h^2$.

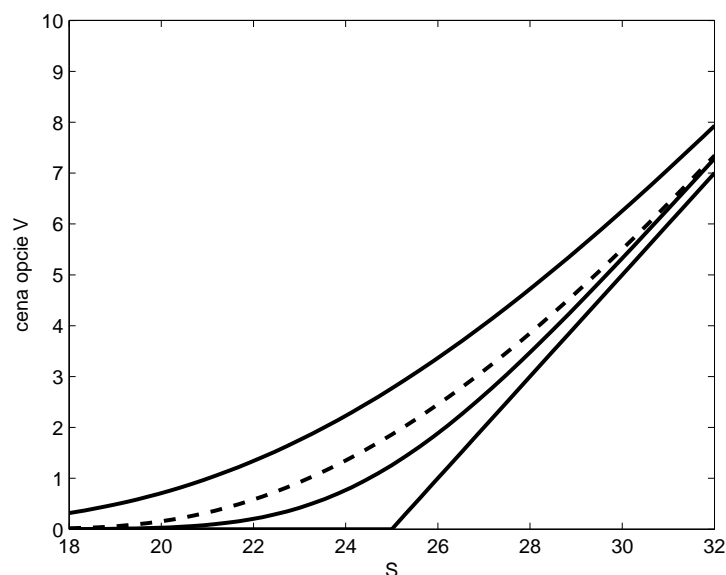
Tieto výsledky sa líšia od výsledkov v práci [21], tiež uvedené v Tabuľke 4. Pripomeňme, že v spomínanej práci neriešili autori priamo rovnicu (22). Túto rovnicu najskôr transformovali a riešili kvázilineárnu tzv. Gamma rovnicu, kde počiatočná podmienka je Diracova δ funkcia. Túto autori aproximovali funkciou $f(d)/(\hat{\sigma}\sqrt{\tau^*})$, kde $f(d)$ je hustota normálneho rozdelenia. Zjednodušenie nelineárnej parabolickej PDR na kvázilineárnu znamenalo zmenu počiatočnej (resp. koncovej) podmienky, ktorá je v rovnici (22) jednoducho payoff derivátu v čase maturity. Problém nelinearity rovnice sa teda určitým spôsobom presunul do počiatočnej podmienky, ktorú je potrebné aproximovať. Riešenie teda nezačína v čase $\tau = 0$ ale v nejakom malom čase $\tau^* > 0$. Pre porovnanie sme ako počiatočnú podmienku použili spojité riešenie v čase $\tau^* = 0.005$ s volatilitou $\hat{\sigma}(0)$. Tento prístup však rozdiely nevysvetlil nakoľko výsledky boli podobné ako v predošlých prípadoch.

Jednou vlastnosťou modelu s variabilnými transakčnými nákladmi je platnosť vzťahu

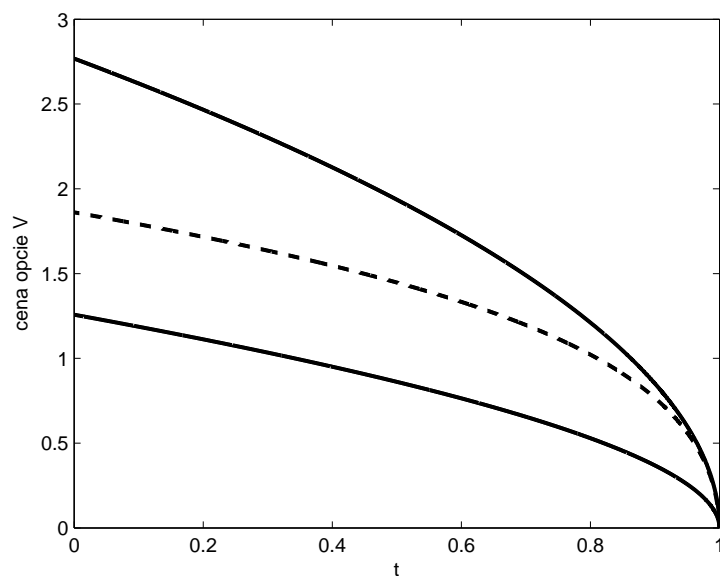
$$V_{\sigma_{min}}(S, t) \leq V_{TC}(S, t) \leq V_{\sigma_{max}}(S, t) \quad \forall S > 0, t \in [0, T], \quad (31)$$

kde $V_{\sigma_{min}}$ a $V_{\sigma_{max}}$ sú ceny opcií z Black-Scholesovoho modelu s danými volatilitami σ_{min} a σ_{max} , ktoré sú definované ako $\sigma_{max}^2 = \sigma^2 \left(1 - \frac{C_0}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma \sqrt{\Delta t}}\right)$, $\sigma_{min}^2 = \sigma^2 \left(1 -$

$C_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma \sqrt{\Delta t}}$), kde $\underline{C}_0 = C_0 - \kappa(\xi_+ - \xi_-) > 0$. Na Obrázku 6 vidíme, že numerická schéma túto vlastnosť spĺňa pre $t = 0$ a na Obrázku 7, že ju spĺňa pre všetky časy $t \in [0, T]$, pre hodnotu $S = 25$. Presnejšie, spĺňa ju takmer vo všetkých uzlových



Obr. 6: Porovnanie riešenia s lineárnym modelom pre $t = 0$



Obr. 7: Porovnanie riešenia s lineárnym modelom pre $S = 25$

bodoch x_i až na niekoľko posledných, kde $V_{\sigma_{min}}(S, t) > V_{TC}(S, t)$ a rozdiel je rádovo 10^{-5} . Toto môže byť spôsobené faktom, že pre veľké S je $V(S, t)$ takmer lineárne a

$V_{SS} \approx 0$. Pre call opciu teoreticky $V(S, t)$ nie je lineárne ale konvexné $\forall S$ avšak veľmi malá odchýlka v numerickej schéme môže zmeniť znamienko druhej derivácie, čo sa prejaví zmenou volatility a porušením nerovnosti.

V uvedených schémach sú derivácie vo volatilitate aproximované rovnako ako v rovnici. Düring v práci [12] navrhuje hladšiu aproximáciu derivácie v nelineárnom člene. Podľa neho sa pri jednoduchej aproximácii stáva schéma nestabilnou pre malé priestorové kroky h . Podobný prístup zvolili aj autori v článku [3], kde druhú deriváciu aproximovali ako

$$u_{xx} \approx \frac{U_{i+2}^j - 2U_i^j + U_{i-2}^j}{4h^2}. \quad (32)$$

Zároveň predpokladali, že vplyv volatility v okrajových bodoch intervalu môžeme zanedbať. Toto je spôsobené tým, že nelineárna volatilita je funkciou Gammy opcie a pre dostatočne malé alebo veľké S je V_{SS} zanedbateľne malé. Keďže na výpočet druhej derivácie v bodoch x_1 a x_n potrebujeme hodnoty v x_{-1} a x_{n+2} , môžeme ich dedefinovať ako $W_{-1}^j = 0$ a $W_{n+2}^j = K(e^{x_{n+2}} - e^{-r\tau_j})$. Druhá derivácia v bodoch x_1 a x_n je teda $W_{xx}(x_1) = (W_3^j - 2W_1^j + W_{-1}^j)/4h^2$ a $W_{xx}(x_n) = (W_{n+2}^j - 2W_n^j + W_{n-2}^j)/4h^2$.

Explicitnú schému sme upravili a vo volatilitate sme druhú deriváciu aproximovali hladším výrazom (32). Výsledky s parametrami z Tabuľky 3, pričom $m = 7056$, sú v nasledovnej tabuľke.

Tabuľka 5: Hodnoty explicitnej schémy s hladšou aproximáciou druhej derivácie v nelineárnom člene

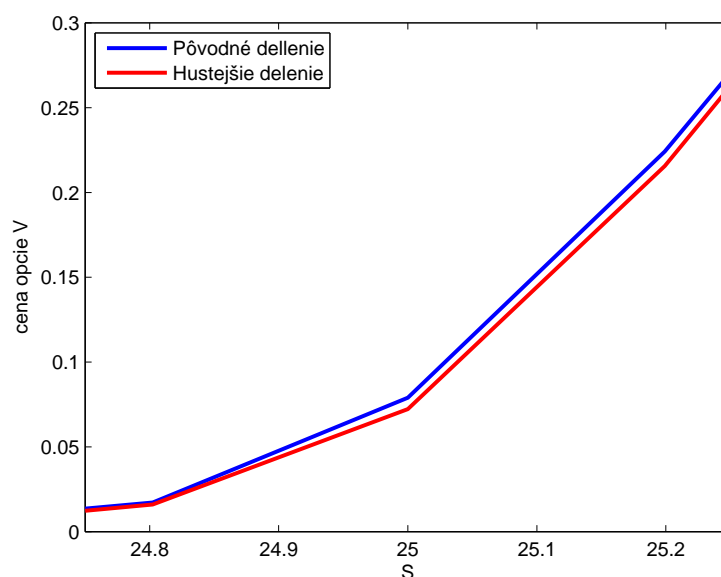
S	20	23	25	28	30
Vypočítaná hodnota	0,1544	0,9227	1,8603	3,8519	5,5040

Pre čas blízky maturite $t \approx T$ a pre hodnoty ceny akcie blízke strike price $S \approx K$ je hodnota difúzneho člena v rovnici vysoká. To je spôsobené faktom, že druhá derivácia v bode $S = K$ teoreticky neexistuje (funkcia V nemá v bode (K, T) ani prvú deriváciu) ale numericky sa vypočíta ako

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x_i, \tau_{m+1}) = \frac{W_{i-1}^{m+1} - 2W_i^{m+1} + W_{i+1}^{m+1}}{h^2} = \frac{0 - 2 * 0 + (W_i^{m+1} + h)}{h^2} = \frac{h}{h^2} = \frac{1}{h},$$

pre také i kde $x_i = K$.

Podobne ako Barles a Soner v práci [7], kde použili v čase blízkom maturite menší časový krok kvôli vplyvu nelineárnej volatility sme aj my upravili hodnotu k pre čas blízky T . V čase $t \in [0, 99; 1]$ sme nastavili krok $k = 1/10000$ a vo zvyšných časoch na $k = 0,99/900$, pričom $m = 999$. V tomto intervale bol teda krok desaťnásobne menší. Porovnanie hodnôt okolo hodnoty K v rovnakom čase $t = 0.999$ pri hustejšom delení s pôvodným prístupom môžeme vidieť na Obrázku 8. Pre hodnoty $S \approx K$ v čase $t = 0$



Obr. 8: Porovnanie schémy pri pôvodnom a novom časovom kroku

bol rozdiel rádovo 10^{-4} .

4.2 Testovanie konvergencie

Pri riešení nelineárnej rovnice, ktorej presné riešenie nevieme analyticky vyjadriť nastáva problém s kontrolou riešenia. Pri zjemňovaní mriežky sa chyba uvedených metód blíži k nule, t.j. riešenie konverguje k presnému riešeniu. Na potvrdenie správnosti výsledkov sme využili dva prístupy. Jednak sme skúmali rád konvergencie chyby a taktiež sme analyzovali presnosť riešenia rovnice (22) s nejakou pravou stranou.

Na základe osobnej komunikácie [9] sme analyzovali rád konvergencie numerických schém. Idea tejto analýzy spočíva vo fakte, že pri zjemňovaní delenia priestorového intervalu by mal rád chyby v priestorovej premennej pri explicitnej schéme byť rovný

2. Pre lokálnu diskretizačnú chybu explicitnej metódy totiž platí $err = O(k) + O(h^2)$ ⁹. Ak predpokladáme, že chyba ϵ je konštantným násobkom dĺžky deliaceho intervalu h , môžeme napísať $\epsilon = c h^\alpha$. Pre dve rôzne h_1, h_2 potom

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= c h_1^\alpha, & \epsilon_2 &= c h_2^\alpha \\ \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} &= \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^\alpha \\ \alpha &= \frac{\log(\epsilon_2/\epsilon_1)}{\log(h_2/h_1)}.\end{aligned}$$

Pre získanie hodnoty chýb ϵ_1, ϵ_2 vytvoríme referenčné riešenie W_{ref} s dostatočne malými deliacimi intervalmi, ktoré budeme považovať za “presné” riešenie. Potom teda $\epsilon_1 = |W_1 - W_{ref}|$ a $\epsilon_2 = |W_2 - W_{ref}|$ a môžeme vypočítať α . Podobne vypočítame α pre iné dvojice delení intervalu. Táto myšlienka je ilustrovaná na Obrázku 9. Za

	τ_{fix}	
h_1	W_1	↕ α
h_2	W_2	
h_3	W_3	↕ α
\vdots	\vdots	
h_{ref}	W_{ref}	

Obr. 9: Schéma znázorňujúca ideu testovania konvergenencie

“presné riešenie” sme uvažovali výsledok schémy s hodnotami $m = 27777$ a $n = 499$, kde $k \approx h^2$. Veľkosť delenia priestorového intervalu sme potom menili rôznymi voľbami n , pričom hodnota m zostávala fixovaná. Pri výpočtoch sme merali tiež výpočtovú náročnosť dĺžkou behu programu. Najzložitejšou časťou, čo sa týka dĺžky behu programu, bola nelineárna časť rovnice. Program musel zakaždým počítat volatilitu a rátať integrál (30). Pri Crank-Nicholsonovej metóde bolo tiež časovo náročné počítanie systému n rovníc. Nakoľko sú ale matice v systéme trojdiagonálne, využili sme v MATLAB-e riedku reprezentáciu týchto matíc. Tabuľka 6 ilustruje vypočítané hodnoty rádu diskretizačnej chyby α spolu s dĺžkami behu programov s danými štruktúrami mriežky.

⁹pozri [4]

Výpočty boli robené na počítači s dvojjadrovým procesorom 2,0 GHz.

Tabuľka 6: Vypočítané hodnoty α a výpočtová náročnosť

n_1, n_2	α	n	m	CPU čas (s)
51, 101	2,0476	103	27 777	190,892
101, 103	2,0833	199	27 777	254,6094
103, 199	2,1940	299	27 777	358,4688
51, 53	2,0913	499	27 777	630,9219

Nevýhodou predchádzajúceho postupu je fakt, že potrebujeme poznať presné riešenie. Toto kvôli nelinearite rovnice presne nepoznáme a iba ho aproximujeme riešením s určitou dostatočne hustou mriežkou, ktorú si sami zvolíme. Tento nedostatok sa dá odstrániť ak v predchádzajúcom postupe nebudeme brať do úvahy referenčné riešenie ale budeme porovnávať riešenia medzi sebou. Opäť predpokladáme, že chyba riešenia závisí od veľkosti deliaceho intervalu v priestorovej premennej $\epsilon = c h^\alpha = W_h - \bar{W}$, pričom \bar{W} je teoretické presné riešenie. Potom platí

$$|W_{h_1} - W_{h_2}| = |(W_{h_1} - \bar{W}) - (W_{h_2} - \bar{W})| \approx c(h_1^\alpha + h_2^\alpha)$$

A teda

$$\frac{W_{h_1} - W_{h_2}}{W_{h_2} - W_{h_3}} \approx \frac{c(h_1^\alpha + h_2^\alpha)}{c(h_2^\alpha + h_3^\alpha)}.$$

Ak zvolíme $h_1 = h$, $h_2 = h/2$, $h_3 = h/4$, dostávame

$$\frac{W_{h_1} - W_{h_2}}{W_{h_2} - W_{h_3}} \approx \frac{h^\alpha + \frac{h^\alpha}{2^\alpha}}{\frac{h^\alpha}{2^\alpha} + \frac{h^\alpha}{4^\alpha}} = 2^\alpha.$$

Na zistenie hodnoty α teda nepotrebujeme poznať hodnotu presného riešenia ako tomu bolo v predchádzajúcom prípade. Pri explicitnej schéme je rád chyby v premennej x $\alpha = 2$ a teda budeme približne takúto hodnotu aj očakávať. Zvolili sme teda tri rôzne veľkosti deliacich intervalov, ktorým zodpovedali hodnoty $n_1 = 101$, $n_2 = 205$, $n_3 = 411$ a k nim príslušné rôzne hodnoty m aby bolo zachované $k \leq h^2$. Ďalej sme hodnotu α vypočítali pre Crank-Nicholsonovu schému. Výsledky pre explicitnú schému sú uvedené v Tabuľke 7. Pri Crank-Nicholsonovej metóde s rovnakými hodnotami n a hodnotou $m = 750$ vyšlo $\alpha = 2.004$. Vypočítané hodnoty α sú teda blízko predpokladanej hodnoty. Reálny rád konvergencie uvedených metód v priestorovej premennej je preto v súlade s teoretickým výsledkom.

Tabuľka 7: Hodnoty α pre fixné a variabilné m

n	m	α	n	m	α
101	19000		101	25000	
205	19000	2,0313	205	25000	2,0317
411	19000		411	25000	

Druhým spôsobom, ktorým sme testovali presnosť numerickej schémy bolo použitie upravenej rovnice s rezíduom. Tento postup môžeme vyjadriť v piatich krokoch:

1. zvolenie ľubovoľnej funkcie,
2. dosadenie tejto funkcie do nelineárnej B-S rovnice,
3. získanie pravej strany, t.j. rezídua,
4. pridanie rezídua do schémy a upravenie podmienok,
5. porovnanie numerického riešenia s presným riešením.

Ako testovaciu funkciu (t.j. ľubovoľnú funkciu z bodu 1.) na kontrolu presnosti schémy sme použili funkciu $V(S, t) = S^{1,1}$. Jej derivácie majú tvar

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial S} = 1,1S^{0,1}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{0,11}{S^{0,9}}.$$

Po dosadení do rovnice (22) máme

$$0 + \frac{1}{2}S^2\hat{\sigma}^2\frac{0,11}{S^{0,9}} + 1,1rS^{1,1} - rS^{1,1} + res = 0,$$

a teda

$$res = -S^{0,11}(0,055\hat{\sigma}^2 + 0,1r).$$

Keďže $V_{SS} > 0$, volatilita (19) má tvar

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{C} \left(0,11\sigma S^{0,1}\sqrt{\Delta t} \right) \frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \right).$$

Po transformáciách dostávame

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{2} - r \right) \frac{\partial W}{\partial x} + rW + (Ke^x)^{1,1}(0,055\hat{\sigma}^2 + 0,1r) = 0.$$

V numerickej schéme explicitnou metódou sú počiatočná a okrajové podmienky v tvare

$$W_i^0 = (Ee^{x_i})^{1,1}, \quad W_0^j = (Ee^{x_0})^{1,1}, \quad W_{n+1}^j = (Ee^{x_{n+1}})^{1,1}$$

a pridanie rezídua sa prejaví dodatočným členom

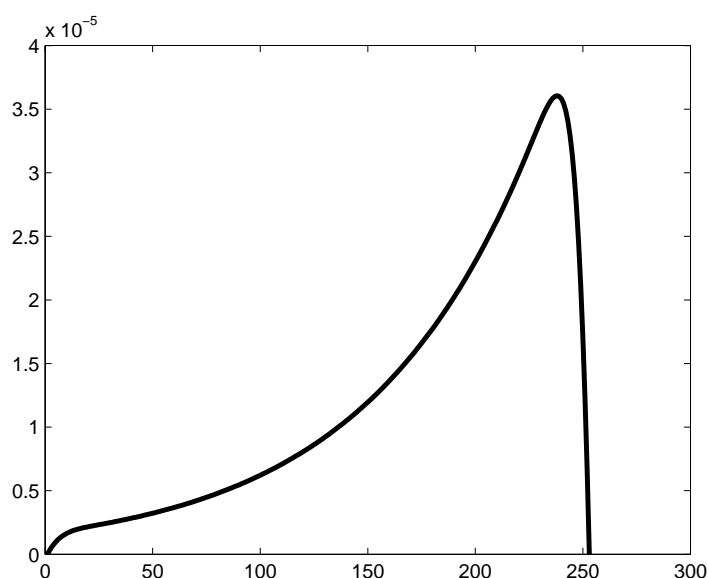
$$W_i^{j+1} = \alpha_i^j W_{i-1}^j + \beta_i^j W_i^j + \gamma_i^j W_{i+1}^j - res,$$

kde

$$res = k(Ke^{x_i})^{1,1}(0,055\hat{\sigma}^2 + 0,1r)$$

a koeficienty α_i^j , β_i^j , γ_i^j sú rovnaké ako v (28).

Na Obrázku 10 je znázornené odchýlka numerického riešenia od presného riešenia $V(S,t) = S^{1,1}$ v čase $t = 0$, ktoré je v tomto prípade známe. Na osi x sú indexy



Obr. 10: Chyba numerického riešenia rovnice s rezíduom

deliacich bodov $i = 0, \dots, n + 1$. Vidíme, že riešenie pre $S = K = 25$, ktoré je v bode $x_i = 0$, $i = 127$, má chybu menšiu ako 10^{-5} . Uvedená explicitná metóda teda s pomerne dobrou presnosťou počíta riešenie.

4.3 Diskusia k výsledkom

V predchádzajúcich častiach sme navrhli numerickú schému na riešenie rovnice (22) s volatilitou (19), ktorá modeluje ceny derivátov s variabilnými transakčnými nákladmi.

Navrhnuté numerické schémy využívajú metódu konečných diferencií, konkrétne explicitnú a Crank-Nicholsonovu metódu. Existujú aj iné metódy ako napr. metóda konečných objemov alebo metóda konečných prvkov, avšak konečné diferencie dávajú dobré výsledky aj v iných prácach ([3], [10]) a táto metóda je navyše relatívne jednoduchá na porozumenie aj na implementáciu. Túto schému sme naprogramovali a v počítači vyriešili. Ďalej sme výsledky prezentovali a skúmali ich presnosť, pričom sme analyzovali viaceré možné vylepšenia schémy ako napríklad hladšiu aproximáciu derivácie v nelineárnom člene či menší časový krok blízko času maturity.

Výsledky získané týmito schémami sú uspokojivé. Testy konvergenzie či už formou porovnania s “presným” riešením alebo vzájomným porovnávaním riešení medzi sebou potvrdili predpokladaný rád konvergenzie. Taktiež testovanie schémy pomocou pridaného rezídua prinieslo uspokojivé výsledky s maximálnou odchýlkou od presného riešenia rádovo 10^{-5} . Ďalej riešenie rovnice z modelu s variabilnými transakčnými nákladmi spĺňalo nerovnosť (31), ktorá dáva horné aj dolné ohraničenie pre výslednú funkciu $V(S, t)$. V článku [21] boli uvedené výsledky numerickej schémy, ktorá bola vytvorená z Gamma rovnice. Táto rovnica vznikla po transformácii pôvodnej nelineárnej rovnice na kvázilineárnu, s počiatočnou podmienkou Diracovou δ funkciou. V Tabuľke 1 v spomínanom článku bolo uvedené, že daná schéma vyššie spomínanú nerovnosť nespĺňala pre $S = 30$, pričom $K = 25$ a $t = 0$. Výsledky v tejto práci sú vo všeobecnosti mierne odlišné od výsledkov v článku a z pozorovania je možné usudzovať, že $V_{praca}(S, t) > V_{clanok}(S, t)$. V porovnaní s Tabuľkou 1 článku sa výsledky v tejto práci mierne líšia v závislosti od S , pričom percentuálny rozdiel je menší pre väčšie S .

Rozdiely vo výsledkoch môžu byť vysvetlené viacerými spôsobmi. Ako sme spomínali, počiatočná podmienka v Gamma rovnici je Diracova δ funkcia, ktorú je zložité aproximovať. Táto funkcia nadobúda hodnotu $+\infty$ v bode 0 a hodnotu 0 všade inde. Akákoľvek aproximácia teda spôsobuje nepresnosť, ktorá sa môže prejaviť vo výsledkoch. Na druhej strane riešenie spôsobom daným v tejto práci naráža takisto na problémy. Počiatočná podmienka nie je hladká pre $S = K$ avšak v numerickej schéme sa počíta prvá aj druhá derivácia v tomto bode. Rovnica je tiež nelineárna, čo znamená vyššiu zložitosť pri výpočtoch a môže spôsobiť nepresnosti.

Numerické výsledky prezentované v tejto práci a ich analýza môžu byť použité pri

vyhodnocování cien európskych call opcií podľa modelu s variabilnými transakčnými nákladmi. Samozrejme, po menších úpravách sa dajú schémy použiť aj na put opcie alebo môžu byť využité iné funkcie transakčných nákladov. Tieto schémy môžu byť podrobené dôkladnejšiemu porovnaniu s výsledkami článku [21] a skúmaniu.

Záver

Cieľom tejto práce bola kvalitatívna a numerická analýza riešení nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc, ktoré vznikajú pri rôznych prístupoch k transakčným nákladom pri oceňovaní finančných derivátov na trhoch takýmito nákladmi. Hlavným modelom, ktorým sme sa zaoberali, bol model s variabilnými transakčnými nákladmi z článku [21], ktorý má volatilitu v tvare (19).

V prvej a druhej kapitole sme stručne popísali deriváty a zhrnuli známe poznatky z teórie oceňovania opcií. Taktiež sme opísali existujúce nelineárne modely na oceňovanie opcií, ktoré sa vyznačujú rôznymi nelineárnymi volatilitami závislými od Gammy opcie $\hat{\sigma}^2(V_{SS})$. V tretej a štvrtej kapitole sme navrhli numerickú schému, ktorú sme vyriešili a analyzovali naše výsledky.

Model s variabilnými transakčnými nákladmi je charakterizovaný nelineárnou rovnicou (22) s volatilitou v tvare (19). Autori modelu v článku [21] túto rovnicu riešili transformáciou na kvázilineárnu Gamma rovnicu. Touto transformáciou síce odstránili nelinearitu rovnice ale problematickou sa stala počiatočná podmienka, ktorú je zložité aproximovať. V našej práci sme vytvorili efektívnu numerickú schému metódou konečných diferencií na riešenie priamo nelineárnej rovnice modelu. V Kapitole 3.1 sme využili dve transformácie $\tau = T - t$ a $x = \ln(\frac{S}{K})$, čím sme získali rovnicu (24) s volatilitou (23) a podmienkami (25). V Kapitole 3.2 sme potom odvodili numerickú schému explicitnou metódou (28) a v Kapitole 3.3 Crank-Nicholsonovou metódou, ktorá je charakterizovaná systémom rovníc (29). Následne sme tieto schémy naprogramovali využijúc program MATLAB, pričom zdrojové kódy riešenia oboch metód sa nachádzajú v Prílohe.

V Kapitole 4.1 sú výsledky prezentované použitím grafov a tabuliek. Obe metódy priniesli porovnateľné výsledky, keď sa riešenia v čase $t = 0$ líšili iba rádovo o 10^{-4} . Riešenia v tejto práci sa však líšia od riešení autorov modelu. Rozdiel bol niekoľko percent a z pozorovania sa dalo usúdiť, že chyba je menšia pre väčšie S . Porovnanie výsledkov sa nachádza v Tabuľke 4. Numerické riešenie takisto spĺňa teoretické horné a dolné ohraničenia (31) a porovnania riešení s ich ohraničeniami sú znázornené na Obrázkoch 6 a 7. Taktiež sme analyzovali úpravy numerickej schémy využitím hladšej aproximácie v nelineárnom člene a hustejším delením časového intervalu pre čas blízky

maturite. V Kapitole 4.2 sme aplikovali testy konvergenzie na numerickú schému a testovali presnosť riešenia využívajúc rovnicu s rezíduom.

Ako sme spomínali, v tejto práci sme navrhli riešenie rovnice z modelu s variabilnými transakčnými nákladmi novým spôsobom. Výhodou takéhoto prístupu je jednoduchosť aplikácie, keďže nie sú nutné zložité transformácie. Proces odvodenia schém sme podrobne popísali a uviedli sme konkrétne počítačové kódy na riešenie týchto schém. Výsledky tejto práce môžu byť použité na ocenenie opcií využívajúc predpoklad variabilnosti transakčných nákladov, čo je lepšie priblíženie sa realite ako klasický obmedzujúci Black-Scholesov model. Táto práca dopĺňa numerické výsledky článku [21], kde im je venovaný menší priestor a plne analyzuje, skúma a vyhodnocuje numerický a výpočtový aspekt modelu s variabilnými transakčnými nákladmi. Práca tiež môže slúžiť študentom či už finančnej matematiky alebo numerického modelovania na lepšie pochopenie praktických aplikácií numerických metód vo financiách.

Práca zároveň vyvoláva viacero otázok, ktoré môžu byť ďalej skúmané. Ako sme spomínali, výsledky v tejto práci sa mierne líšia od výsledkov autorov modelu. Napriek tomu, že sme sa tieto rozdiely snažili vysvetliť, hlbšie porovnanie oboch prístupov môže priniesť nové zistenia do problematiky. Ďalším zaujímavým pokračovaním práce môže byť porovnanie cien opcií tohto modelu s inými nelineárnymi modelmi. V neposlednom rade ďalšie skúmanie efektivity a rýchlosti navrhnutých algoritmov môže byť praktickým prínosom pre obchodníkov žiadajúcich v prvom rade rýchle výpočty cien opcií pri obchodovaní.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Amster, P. et al.: *A Black-Scholes option pricing model with transaction costs*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 303 (2005), 688-695
- [2] Amster, P., Mogni, A. P.: *On a pricing problem for a multi-asset option with general transaction costs*. dostupné na internete (5.3.2017): <https://arxiv.org/pdf/1704.02036.pdf>
- [3] Ankudinova, J., Erhardt, M.: *On the numerical solution of nonlinear Black-Scholes equations*. Computers and Mathematics with Applications, 56 (2008), 799-812
- [4] Babušíková, J.: *Numerické modelovanie*. Slajdy k prednáške - 2.časť, dostupné na internete (5.3.2017): http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/~babusikova/numerika4mef_cast2.pdf
- [5] Bakstein, D., Howison, S.: *A non-arbitrage liquidity model with observable parameters for derivatives*. Working paper, 1998, dostupné na internete (14.1.2017): <http://eprints.maths.ox.ac.uk/53/1/liqpaper.pdf>
- [6] Bank for International Settlements: *Statistical release OTC derivatives statistics at end-December 2014*. 2015, dostupné na internete (31.10.2016): https://www.bis.org/publ/otc_hy1504.pdf
- [7] Barles, G., Soner, H. M.: *Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation*. Finance and Stochastics 40 (1998), 369-397,
- [8] Black, F., Scholes, M.: *The pricing of options and corporate liabilities*. The Journal of Political Economy 81 (1973), 637-654
- [9] Company, R.: Osobná komunikácia, 20.1.2017
- [10] Company, R., Navarro, E., Pintos, J. R., Ponsoda, E.: *Numerical solution of linear and nonlinear Black-Scholes option pricing equations*. Computers and Mathematics with Applications 56 (2008), 813-821

- [11] Chance, D. M.: *Essays in derivatives*. John Wiley & Sons, Inc, Hoboken, 2008
- [12] Düring, B.: *Black-Scholes type equations: Mathematical analysis, parameter identification & numerical solution*. Dissertation, University Mainz, 2005
- [13] Hoggard, T., Whalley, A. E., Wilmott, P.: *Hedging option portfolios in the presence of transaction costs*. Advances in Futures and Options Research 7 (1994), 21-35
- [14] Hull, J. C.: *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson Education Limited, 2012
- [15] Jandačka, M., Ševčovič, D.: *On the risk adjusted pricing methodology based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile*. Journal of Applied Mathematics 3 (2005), 235-258
- [16] Kratka, M.: *No mystery behind the smile*. Risk 9 (1998), 67-71
- [17] Leland, H. E.: *Option Pricing and Replication with Transaction Costs*. The Journal of Finance 40 (1985), 1283-1301
- [18] Pauletto, Ch., Kummer, S.: *The History of Derivatives: A Few Milestones*. EFTA Seminar on Regulation of Derivatives Markets, Zurich, 2012
- [19] Rubinstein, M.: *Exotic options*. Finance Working Paper No. 220, Research Program In Finance, University of California at Berkeley, 1992, dostupné na internete (21.10.2016): <http://www.haas.berkeley.edu/groups/finance/WP/rpf220.pdf>
- [20] Ševčovič D., Stehlíková, B., Mikula, K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*. STU, Bratislava, 2009
- [21] Ševčovič, D., Žitňanská, M.: *Analysis of the nonlinear option pricing model under variable transaction costs*. Asia-Pacific Financial Markets 23 (2016), 153-174
- [22] Statista: Largest derivatives exchanges worldwide in 2015, by number of contracts traded (in millions), dostupné na internete (17.10.2016): <https://www.statista.com/statistics/272832/largest-international-futures-exchanges-by-number-of-contracts-traded/>

- [23] Žitňanská, M.: *Qualitative and quantitative analysis of Black-Scholes type models of pricing derivatives on assets with general function of volatility*. Dizertačná práca, FMFI UK, Bratislava, 2014, dostupné na internete (6.4.2017): <http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/phd/zitnanska/dizertacia.pdf>

Príloha

MATLAB zdrojový kód explicitnej schémy

```

%constants for numerics
Lfrom=-1.5; %length of interval
Lto=1.5;
n=251; %number of spatial nodal points
h=(Lto-Lfrom)/(n+1); %length of spatial interval
x=linspace(Lfrom,Lto,n+2); %spatial nodal points
m=7056; %number of nodal points in time
T=1; %maturity
k=T/(m+1); %time step
t=linspace(0,T,m+2); %nodal points in time

%constants for the model
sigma=0.3; %historical volatility
r=0.011; %risk-free rate
deltat=1/261; %rehedging interval
K=25; %strike price
initial=@(x) max(K*(exp(x)-1),0); %initial condition

%constants for the transaction function (piecewise linear)
kappa=0.3; %as described in article by Sevcovic, Zitnanska
c0=0.02;
chiminus=0.05;
chiplus=0.1;
Chat_integral=@(chi,chipl,chimin) sqrt(pi/2)*...
    (erf((chipl/chi)/sqrt(2))-erf((chimin/chi)/sqrt(2)));

%definition of the matrix
W=zeros(m+2,n+2);

%initial and boundary conditions
W(1,:)=initial(x);
W(:,1)=0;
W(:,n+2)=K*(exp(x(n+2))-exp(-r*t));

for j = 1:(m+1)

```

```

for i = 2:(n+1)
    chi=sigma*K*exp(x(i))*abs...
        ((K*exp(x(i)))^(-2))*((1+h/2)*W(j,i-1)+(-2)*W(j,i)+...
        (1-h/2)*W(j,i+1))/h^2)*sqrt(deltat);

    Chat=c0-kappa*chi*Chat_integral(chi,chiplus,chiminus);

    sigmahat2=sigma^2*(1-sqrt(2/pi)*Chat*...
        (sign(((1+h/2)*W(j,i-1)+(-2)*W(j,i)+(1-h/2)*W(j,i+1))/h^2)))/...
        (sigma*sqrt(deltat)));% nonlinear volatility

    a=1/2*(sigmahat2*k/h^2+k/h*(sigmahat2/2-r));
    b=1-sigmahat2*k/h^2-r*k;
    c=1/2*(sigmahat2*k/h^2-k/h*(sigmahat2/2-r));

    W(j+1,i)=a*W(j,i-1)+b*W(j,i)+c*W(j,i+1);
end
if mod(j,1000)==0
    disp(j) %display current iteration every 1000 iterations
end
end

x=K*exp(x);
t=T-t;

```

MATLAB zdrojový kód Crank-Nicholsonovej schémy

```

%constants for numerics
Lfrom=-1.5; %length of interval
Lto=1.5;
n=251; %number of spatial nodal points
h=(Lto-Lfrom)/(n+1); %length of spatial interval
x=linspace(Lfrom,Lto,n+2); %spatial nodal points
m=1000; %number of nodal points in time
T=1; %maturity
k=T/(m+1); %time step
t=linspace(0,T,m+2); %nodal points in time

%constants for the model

```

```

sigma=0.3;
r=0.011;
deltat=1/261;
K=25;
initial=@(x) max(K*(exp(x)-1),0);

%constants for the transaction function (piecewise linear)
kappa=0.3; %as described in article by Sevcovic, Zitnanska
c0=0.02;
chiminus=0.05;
chiplus=0.1;
Chat_integral=@(chi,chipl,chimin) sqrt(pi/2)*...
    (erf((chipl/chi)/sqrt(2))-erf((chimin/chi)/sqrt(2)));

%definition of the matrix
W=zeros(m+2,n+2);

%initial and boundary conditions
W(1,:)=initial(x);
W(:,1)=0;
W(:,n+2)=K*(exp(x(n+2))-exp(-r*t));

diagsA = [zeros(n,1);inf]; %pre-definition of diagonals of matrix
diagsB = zeros(n,1);
diagsC = [inf; zeros(n,1)];
diagsD = [zeros(n,1);inf];
diagsE = zeros(n,1);
diagsF = [inf; zeros(n,1)];

for j = 1:(m+1)
    for i = 2:(n+1)

        chi=sigma*K*exp(x(i))*abs...
            ((K*exp(x(i)))^(-2))*((1+h/2)*W(j,i-1)+(-2)*W(j,i)+...
            (1-h/2)*W(j,i+1))/h^2)*sqrt(deltat);

        Chat=c0-kappa*chi*Chat_integral(chi,chiplus,chiminus);
        %nonlinear volatility sigmahat2

```



```

    sigmahat2=sigma^2*(1-sqrt(2/pi)*Chat*...
        (sign(((1+h/2)*W(j,i-1)+(-2)*W(j,i)+(1-h/2)*W(j,i+1))/h^2))/...
        (sigma*sqrt(deltat)));

    alpha=k/(4*h)*(sigmahat2/2-r);
    coeffA=-k/(4*h^2)*sigmahat2-alpha; %diagonal entries in matrix
    coeffB=1+k/(2*h^2)*sigmahat2;
    coeffC=-k/(4*h^2)*sigmahat2+alpha;
    coeffD=k/(4*h^2)*sigmahat2+alpha;
    coeffE=1-k/(2*h^2)*sigmahat2-r*k;
    coeffF=k/(4*h^2)*sigmahat2-alpha;

    diagsA(i-1) = coeffA;
    diagsB(i-1) = coeffB;
    diagsC(i) = coeffC;
    diagsD(i-1) = coeffD;
    diagsE(i-1) = coeffE;
    diagsF(i) = coeffF;

end

        %definition of vector and matrices
Yvec=[diagsD(1)*W(j,1)-diagsA(1)*W(j+1,1); zeros(n-2,1); ...
        diagsF(n+1)*W(j,n+2)-diagsC(n+1)*W(j+1,n+2)];
X = spdiags([diagsA(2:n+1) diagsB diagsC(1:n)], -1:1, n, n);
Y = spdiags([diagsD(2:n+1) diagsE diagsF(1:n)], -1:1, n, n);

PS=Y*W(j,2:n+1)'+Yvec; %right-hand side
W(j+1,2:n+1)=(X\PS)'; %solution for time j+1

if mod(j,500)==0
    disp(j) %display current iteration every 500 iterations
end
end

x=K*exp(x);
t=T-t;

```