UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Deterministická úloha optimálneho rozpredaja aktíva dominantným vlastníkom

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2017

Bc. Mário Mitas

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Deterministická úloha optimálneho rozpredaja aktíva dominantným vlastníkom

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.

Bratislava 2017 **Bc. Mário Mitas**

26215740

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Bc. Mário Mitas
Študijný program:	ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor:	aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce:	diplomová
Jazyk záverečnej práce:	slovenský
Sekundárny jazyk:	anglický

Názov: Deterministická úloha optimálneho rozpredaja aktíva dominantným vlastníkom.
Deterministic problem of the optimal liquidation of an asset by its dominant owner.

Cieľ: Rieši sa deterministická verzia úlohy, ktorej stochastická vverzia je predmetom článkov A. Černý: Currency crises: Introduction of spot speculators, Int. Journal of Finance and Economics 4(1999), 79-89 PB, A. Černý, J. Komadel: Optimal execution under endogenous pressure to liquidate: theory and numerical solution (pred dokončením) Riešenie úlohy vyžaduje tvorivo sa vyhrať s metódami teórie optimálneho riadenia.

Vedúci:	prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.
Katedra:	FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry:	prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Dátum zadania:	21.01.2016

Dátum schválenia: 25.01.2016 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

....
študent vedúci práce

Poďakovanie

Týmto by som sa chcel poďakovať svojmu vedúcemu diplomovej práce prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc. za ochotu a trpezlivosť pri zodpovedaní mojich otázok, tiež za poskytnutie mnohých odborných rád a pripomienok, ktoré mi pomohli pri písaní tejto diplomovej práce.

Abstrakt

MITAS, Mário: Deterministická úloha optimálneho rozpredaja aktíva dominantným vlastníkom [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc., Bratislava, 2017, 48s.

V práci sme sa venovali riešeniu úlohy, ktorej základom je deterministická verzia modelu z prác [1], [2] a [3]. Naším cieľom bolo analyzovať úlohu z pohľadu koncového času, v ktorom dominantný vlastník dosiahne nulový stav zásoby aktíva. Úlohu sme neriešili iba pomocou štandardných metód optimálneho riadenia, avšak na hľadanie optimálneho riešenia sme použili aj analýzu fázových portrétov a taktiež sme úlohu podrobili analýze pomocou dosažiteľných množín. Vymenovanými metódami sme získali vzťahy pre účelovú fukciu a stavovú premennú, ktoré sme optimalizovali ako nelineárnu funkciu s jedným ohraničením.

Kľúčové slová: Liquidačný problém, optimálne riadenie, Pontrjaginov princíp maxima, fázové portréty, dosažiteľné množiny

Abstract

MITAS, Mário: Deterministic problem of optimal liqiudation of an asset by its dominant owner [Master's thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc., Bratislava, 2017, 48p.

The purpose of our thesis was to study the problem, which stem from deterministic version of model from papers [1], [2] and [3]. Our aim was to analyse terminal time of the problem, in which dominant owner reaches depletion of an asset deposits. We weren't apply standard methods of optimal control theory on our problem, but we were use phase portraits and reachable sets for analysis of our problem. With this alternative approach we computed equations for payoff function and state variable, which we optimised as nonlinear function with one constraint.

Keywords: Liquidation problem, optimal control, Pontryagin's maximum principle, phase portraits, reachable sets

Obsah

Úvod

Ak vlastník potrebuje z nejakého dôvodu rozpredať svoje aktíva, musí ich umiestniť na trh a následne odpredať za trhovú cenu. Predpokladáme tiež, že vlastník predáva také množstvá aktíva, pri ktorých trhová cena reaguje v krátkodobom horizonte. Nárast na strane ponuky aktíva sa premietne znížením jeho ceny. To znamená, že ak má vlastník dostatočné množstvo aktíva, môže jeho odpredajom ovplyvniť celý trh s daným aktívom. Dominantnému vlastníkovi aktíva hrozí, že príliš rýchlou likvidáciou bude negatívne ovplyvňovať cenu v krátkodobom horizonte, čo však preňho nemusí byť optimálne. Aby dosiahol čo najlepší výsledok bude teda rýchlosť predaja regulovať tak, aby si príliš neznížil predajnú cenu.

Model, z ktorého budeme vychádzať v našej práci, je bližšie popísaný v článkoch [1], [2] a [3]. Na rozdiel od reality, pre zjednodušenie v našej práci uvažujeme, že predávané aktívum je nekonečne krát deliteľné, aby sme sa vyhli diskretizácii v použitom modeli. Cena aktíva v tomto modeli je daná geometrickým brownovým pohybom, avšak my kvôli tomu, že chceme skúmať ako sa správa koncový čas, zanedbáme náhodnú zložku. Teda cena aktíva v deterministickej verzii úlohy bude závisieť iba od driftu geometrického brownovho pohybu. Avšak takto modelovaná cena ešte nie je konečná cena, za ktorú sa aktíva predajú na trhu, musí sa ešte zohľadniť rýchlosť rozpredávania aktíva, čo cenu zákonite o niečo zníži. Aj keď nákup aktíva model explicitne nevylučuje, pre vlastníka nie je takáto stratégia nikdy optimálna. Teda v tomto prípade v optime vlastník iba aktívum postupne predáva a nič nenakupuje. Jediným obmedzením v tomto smere je zásoba aktíva, ktoré mu ešte zostáva, nemôže predať viac aktív ako má k dispozícii a dostať sa tak na zápornú hodnotu množstva aktíva. Takže keď vlastník dosiahne nulový stav aktíva úloha končí. V účelovej funkcii, ktorú maximalizujeme vystupuje rýchlosť predaja aktíva vynásobená aktuálnou trhovou cenou. Model zohľadňuje tiež časové zhodnotenie príjmu z predaja, preto celú účelovú funkciu ešte diskontujeme. Našou úlohou tiež bude zistiť, či a za akých podmienok sa dá dosiahnuť toto optimum, a či v optime vlastník odpredá svoje aktíva na konečnom časovom horizonte alebo či ich bude predávať nekonečne dlho. Určíme s akými predpokladmi na parametre úlohy nastane jedna alebo druhá situácia.

Takto sformulovanú úlohu vieme riešiť ako úlohu optimálneho riadenia s diskontným faktorom, pomocou využitia podmienok Pontrjaginovho princípu maxima, ktoré sú odvodené v [4]. Vyriešením podmienok PPM sa dostaneme k systému diferenciálnych rovníc prvého rádu od stavu aktíva $x(t)$ a adjungovanej premennej $\psi(t)$ (alebo riadenia $u(t)$), ktoré nám poskytnú kandidátov na optimum našej úlohy. Aj keď by sme našu úlohu mohli preformulovať na štandardnú úlohu optimálneho riadenia s pevným koncom a voľným časom a potom ju riešiť štandardnými metódami. My sa na úlohu pokúsime pozrieť z iného pohľadu a budeme ju riešiť alternatívnymi spôsobmi, použijeme analýzu fázových portrétov a dosažiteľných množín. A presvedčíme sa či aj týmito spôsobmi dostaneme totožné riešenie ako pri použití klasických metód.

Kapitola 1

Model

Na začiatok potrebujeme sformulovať matematické zákonitosti predaja aktíva na trhu, tak aby odrážali aspoň časť vlastností reálneho trhu. V tejto kapitole si preto popíšeme a odvodíme matematický model, ktorý je podrobne popísaný v článkoch [1], [2] a [3]. Tento model bude slúžiť ako základ pre úlohu, ktorú budeme riešiť v ďalších kapitolách práce. Idea modelu vznikla na základe špekulatívnych menových útokov, príkladom takýchto špekulácií investorov je aj tzv. "Black Wednesday", keď 16 septembra 1992 britská vláda musela odstúpiť z ERM (The European Exchange Rate Mechanism). Krajiny, ktoré boli súčasťou ERM systému sa zaviazali udržiavať kurz svojej meny voči menám ostatných krajín participujúcich na ERM v určitom rozmedzí, aby sa obmedzila variabilita menových kurzov a dosiahla monetárna stabilita, bola to príprava pred zavedením spoločnej európskej meny. Veľká Británia sa do tohto systému pridala až v roku 1990 a v roku 1992 z neho musela vystúpiť, keď britská vláda už ďalej nedokázala garantovať dodržanie najnižšej hodnoty kurzu Libry Šterlingov dohodnutej v ERM. Tejto situácii predchádzalo špekulatívne hromadné nakupovanie cudzej meny za libry súkromnými investormi. Teda ponuka libry sa značne zvýšila, čo by v prípade pohyblivého kurzu spôsobilo jej znehodnocovanie, ale kvôli záväzku ERM vláda určitý čas udržiavala kurz v dohodnutých limitoch. Teda cena libry bola počas tohto času veľmi nadhodnotená a keď vláda odstúpila z dodržiavania ERM cena libry skokovo poklesla. Z toho potom profitovali investori, ktorý počas obdobia nadhodnotenej ceny Libry nakúpili zásoby zahraničných mien. Kvôli Black Wednesday v konečnom dôsledku Veľká Británia utŕžila stratu 3.4 miliardy libier. Pričom investorom, ktorí realizovali útok ostala veľká zásoba aktíva v podobe zahraničnej meny, práve ich optimálnym zhodnotením sa zaoberá tento model.

1.1 Dynamika modelu

Predpokladajme, že dominantný investor má zásobu aktíva v objeme Z a predáva ho na trhu rýchlosťou v, zatiaľ čo aktívum, ktoré vlastní, sa zhodnocuje úrokom r. Potom dynamiku stavu zásob aktíva môžeme vyjadriť ako

$$dZ = (rZ - v)dt \tag{1.1}$$

Predpokladajme, že v cene aktíva sa prejavujú dva hlavné vplyvy. Prirodzený vývoj ceny, keď trh neovplyvňujú príliš veľkí obchodníci. A ovplyvňovanie ceny dominantnými investormi, to je situácia, pri ktorej objemy denných transakcií na trhu s daným aktívom dosahujú väčšie hodnoty ako je obvyklé. Náš model (z [1], [2] a [3]) simuluje zložku ceny bez vplyvov veľkých investorov pomocou tzv. geometrického Brownovho pohybu

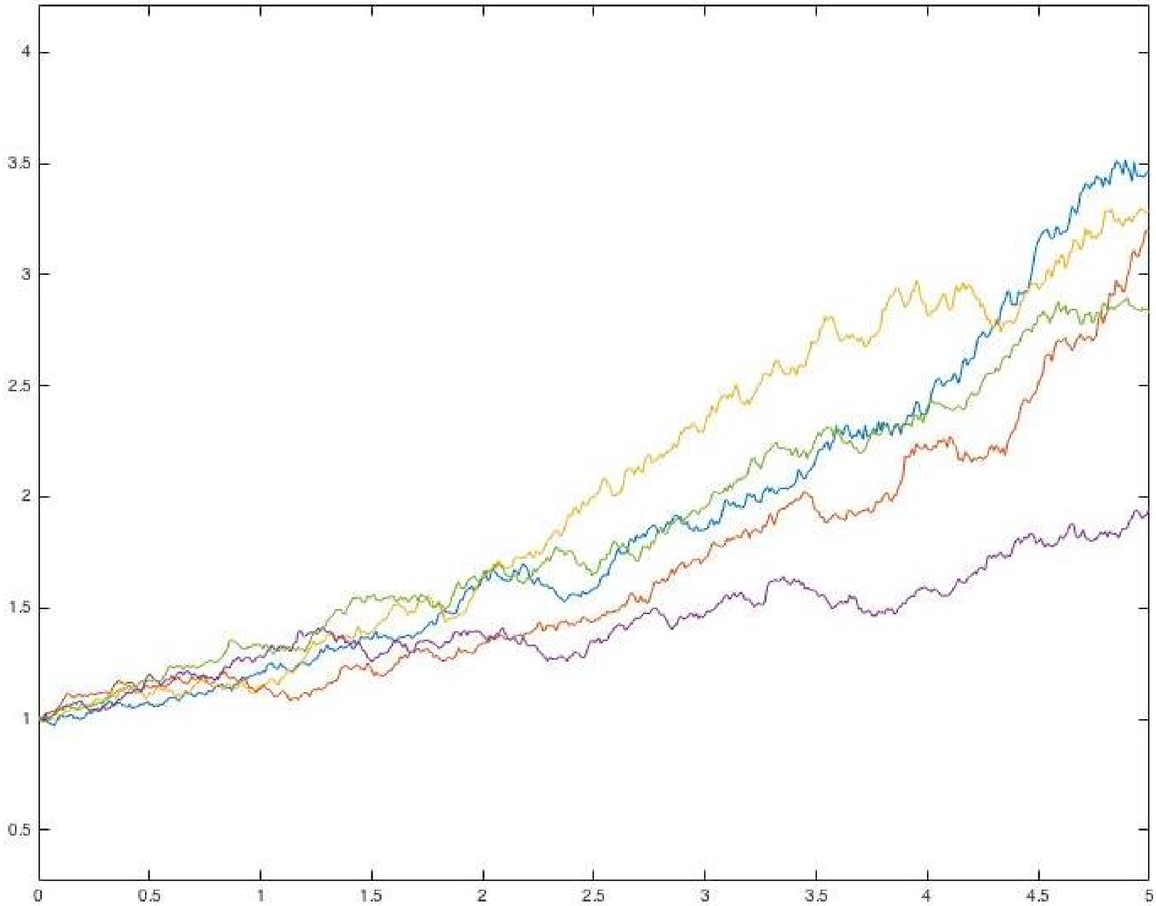
$$dS = \lambda S dt + \sigma S dB_t \tag{1.2}$$

kde S je konkrétne cena jednotky cudzej meny vyjadrená v domácej mene, B_t je Wienerov proces a λ a σ sú konštanty. Tento stochastický proces má exponenciálny drift, teda v dlhodobom časovom horizonte cena, ak je λ kladná rastie (ak je záporná klesá). V deterministickej verzii modelu, tj. keď vynecháme zložku s dB_t, sa cena odvýja iba od driftu. Teda lineárne rastie alebo klesá, podľa veľkosti a znamienka parametra λ. Na obrázku (1.1) je zobrazený príklad niekoľkých rôznych priebehov geometrického Brownovho pohybu s rovnakými parametrami.

1.2 Funkcia užitočnosti vlastníka

Aktívum za cenu S však investor na trhu nedokáže predať, pretože musíme zobrať do úvahy aj dočasný vplyv zvýšeného obchodovania s daným aktívom závislý od zvolenej rýchlosti odpredávania aktíva v. Konečnú cenu, za ktorú investor predá aktívum na trhu označíme $\overline{S}$ a definujeme ako

$$\overline{S} = S - \eta v, \tag{1.3}$$



Obr. 1.1: Geometrický Brownov pohyb s parametrami $\lambda = 0.2$ a $\sigma = 0.1$.

kde konštanta η (zvykne sa nazývať aj Kylova konštanta) predstavuje citlivosť trhu na zásahy investorov. Aby sme opísali optimalizačný problém investora, musíme určiť užitočnosť, ktorú bude investor dosahovať predávaním cudzej meny, ktorú zhodnocuje v domácej mene. Aktívum sa zhodnocuje úrokom r, takisto zisk utŕžený z predaja sa zhodnocuje úrokovou sadzbou, ktorú si označíme ako ρ. Užitočnosť investora z predaja aktíva si označíme R_T. V našom prípade užitočnosť predstavuje zisk z predaja (teda $v\overline{S}$) prenásobený diskontným faktorom

$$R_T = \int_0^T e^{-\rho t} v_t \overline{S}_t dt = \int_0^T e^{-\rho t} v_t (S_t - \eta v_t) dt. \tag{1.4}$$

Pretože sa cena aktíva správa náhodne, investor pri optimalizovaní voľby rýchlosti v musí hľadať maximálnu očakávanú hodnotu úžitku až pokým sa množstvo zásob aktíva úplne nevyčerpá. Teda investor hľadá optimálnu stratégiu riešením nasledujúceho optimalizačného problému

$$\max E\left[\int_0^{T(Z=0)} e^{-\rho t} f(S(t), Z(t))(S(t) - \eta f(S(t), Z(t)))dt\right] \tag{1.5}$$

$$dS(t) = \lambda S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \tag{1.6}$$

$$dZ(t) = (rZ(t) - f(S(t), Z(t)))dt, \tag{1.7}$$

pričom f predstavuje voľbu rýchlosti predaja podľa aktuálneho stavu ceny aktíva a stavu jeho zásob. Keďže cena aktíva sa riadi podľa stochastického procesu nemôžeme brať rýchlosť predaja iba ako funkciu závislú od času. Investor sa rozhoduje na základe aktuálnych hodnôt ceny a množstva aktíva, ktoré sa však nedajú všeobecne určiť pre daný čas t, keďže sú náhodné, preto namiesto označenia $v(t)$ bude rýchlosť predaja funkciou $f(S(t), Z(t)) : (0, \infty) \times \langle 0, \infty) \to \langle 0, \frac{S(t)}{\eta}\rangle$.

1.3 Deterministická verzia modelu

V našej práci budeme skúmať hlavne správanie zjednodušeného modelu (1.5-1.7), kde zanedbáme stochastickú zložku vývoja ceny aktíva. V ďalších kapitolách už budeme predpokladať iba $\sigma = 0$, takže cena aktíva bez vplyvu veľkých investorov v deterministickom modeli bude

$$dS(t) = \lambda S(t)dt, \tag{1.8}$$

použitím počiatočnej podmienky pre začiatočný stav ceny aktíva $S(0)$ dostaneme exaktné riešenie

$$S(t) = S(0)e^{\lambda t}. \tag{1.9}$$

Podobne ako v [3] použijeme substitúcie $x = \eta\frac{Z(t)}{S(t)}$ a $u = \eta\frac{v(t)}{S(t)}$, potom deterministickú verziu úlohy vieme vyjadriť v tvare

$$\max \int_0^{T(x=0)} e^{(2\lambda-\rho)t} u(1-u)dt \tag{1.10}$$

$$dx = ((r - \lambda)x - u)dt, \qquad u \in [0, 1] \tag{1.11}$$

navyše predpokladajme, že platí $\lambda + r < \rho$ a $x(0) = x_0 > 0$. V pôvodnom modeli bola ešte podmienka $\rho > 0$, ale v našej úlohe nie je veľmi podstatná, preto ju zanedbáme.

Môžeme si všimnúť, že koncový čas nie je určený ako v prípade klasických typov úloh optimálneho riadenia, kde je koncový čas buď voľný, alebo pevne určený konštantou. V našom prípade máme iba podmienku nulového stavu zásob v čase T, potom koncový čas endogénne vyplýva z úlohy.

Tvrdenie 1.3.1. *Predpokladajme, že náhodná zložka rovnice 1.6 je rovná nule, potom z úlohy 1.5-1.7 po substitúciach* $x = \eta\frac{Z(t)}{S(t)}$ *a* $u = \eta\frac{v(t)}{S(t)}$ *dostaneme úlohu (1.10-1.11).*

Dôkaz 1.3.2. *Využijeme substitúciu* $x = \eta\frac{Z(t)}{S(t)}$ *, potom pre deriváciu* $\dot{x}$ *platí*

$$\frac{dx}{dt} = \eta\frac{\frac{dZ(t)}{dt}S(t) - Z(t)\frac{dS(t)}{dt}}{S(t)^2}, \tag{1.12}$$

za $dZ(t)$ *dosadíme rovnicu (1.7), ale pretože už nemáme cenu a množstvo stochastické môžeme namiesto* $f(S(t), Z(t))$ *používať ako rýchlosť predaja pôvodné* $v(t)$*. A za výraz* $dS(t)$ *dosadíme rovnicu (1.6), potom dostaneme*

$$\frac{dx}{dt} = \eta\frac{\frac{(rZ(t)-v(t))dt}{dt}S(t) - Z(t)\frac{\lambda S(t)dt}{dt}}{S(t)^2}, \tag{1.13}$$

po vykrátení dt *a* $S(t)$ *dostaneme*

$$\frac{dx}{dt} = \eta\frac{rZ(t) - v(t) - \lambda Z(t)}{S(t)}. \tag{1.14}$$

Do (1.14) dosadíme x *a* u *podľa substitúcie*

$$\frac{dx}{dt} = rx - u - \lambda x, \tag{1.15}$$

rovnica (1.15), ktorú sme odvodili je ekvivalentná s (1.11). Potrebujeme ešte upraviť účelovú funkciu (1.5) na tvar, v ktorom vystupujú premenné $x(t)$ *a* $u(t)$ *namiesto* $Z(t)$ *a* $S(t)$*. Všetky členy* $v(t)$ *v (1.5) prenásobíme jednotkou v podobe zlomku* $\frac{S(t)}{S(t)}$*, potom dostaneme*

$$\max \int_0^{T(Z=0)} e^{-\rho t}\frac{S(t)v(t)}{S(t)}\Big(S(t) - \eta\frac{S(t)v(t)}{S(t)}\Big)dt, \tag{1.16}$$

pretože premenná $S(t)$ *teraz neobsahuje stochastický člen, už nemaximalizujeme strednú hodnotu. Po ďalšej elementárnej úprave (1.16) dostaneme*

$$\max \int_0^{T(Z=0)} e^{-\rho t}S(t)^2\frac{v(t)}{S(t)}\Big(1 - \eta\frac{v(t)}{S(t)}\Big)dt, \tag{1.17}$$

do funkcie (1.17) si podľa substitúcie dosadíme $u = \frac{v(t)}{S(t)}$ *a za* $S(t)$ *si dosadíme (1.9), potom dostaneme*

$$\max \int_0^{T(Z=0)} e^{-\rho t}(S(0)e^{\lambda t})^2 \frac{u(t)}{\eta}(1 - u(t))dt, \tag{1.18}$$

ak $Z(t) = 0$ *potom aj* $x(t) = 0$*, preto môžeme nahradiť* $Z(t)$ *premennou* $x(t)$ *v podmienke na koncový čas* T*. Keďže zlomok* $\frac{S^2(0)}{\eta}$ *je známa konštanta, tak nám neovplyvňuje maximalizáciu účelovej funkcie, preto ju môžeme v zápise vynechať, teda po úprave (1.18) dostaneme*

$$\max \int_0^{T(x=0)} e^{(2\lambda-\rho)t} u(t)(1 - u(t))dt. \tag{1.19}$$

Kapitola 2

Riešenie úlohy metódami teórie optimálneho riadenia

Deterministickú verziu nášho modelu (1.10)-(1.11) môžeme riešiť pomocou teórie optimálneho riadenia, v našom prípade máme v úlohe stavovú premennú $x(t)$, ktorá predstavuje množstvo zásob aktíva v čase, a riadiacu premennú $u(t)$. Pomocou riadiacej premennej zase naopak určujeme rýchlosť predaja aktíva až pokým ho celkom nevyčerpáme. V našej úlohe však nevystupuje klasická podmienka na koncový čas a koncový stav, ale iba podmienka na ukončenie úlohy v čase, keď úplne vyčerpáme rezervy aktíva, čo však ani nemusí nastať pri niektorých nastaveniach parametrov úlohy. Úlohu sa k všapokúsime vyriešiť aj inými ako klasickými metódami optimálneho riadenia. Pri hľadaní optimálneho riadenia budeme analyzovať fázové portréty systému diferenciálnych rovníc, ktoré odvodíme z podmienok Pontrjaginovho princípu maxima. Optimálne riešenie problému potom budeme hľadať aj pomocou množiny dosažiteľnosti, a tiež odvodíme za akých podmienok sa vyčerpá zásoba aktíva v konečnom čase.

2.1 Pontrjaginov princíp maxima pre úlohu s diskontným faktorom

Pretože v našej úlohe máme v účelovej funkcii premennú závisiacu od času, túto úlohu klasifikujeme ako úlohu optimálneho riadenia neautonómneho typu. V tomto prípade sa však jedná o špeciálny typ neautonómnej úlohy, kde je neautonómnosť zapríčinená iba diskontným faktorom. Preto po menšej úprave klasických podmienok Pontrjaginovho princípu maxima (teória z tejto podkapitoly je prevzatá z [4]) môžeme našu úlohu riešiť ako autonómnu úlohu. Diskontovanú úlohu optimálneho riadenia si definujeme ako:

$$\max \int_0^T e^{-rt} F(x(t), u(t)) dt, \tag{2.1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \qquad t \in [0, T], \tag{2.2}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2.3}$$

$$g(x(T)) = 0, \tag{2.4}$$

$$u(t) \in U, \qquad t \in [0, T] \tag{2.5}$$

Pre úlohu s voľným časom je koncový čas T voľný a pre úlohu s pevne daným časom je T rovné konštante. Funkcie $F : R^n \times R^n \to R$, $f : R^n \times R^m \to R^n$, $g : R^n \to R^l$ sú dané, $U \in R^m$ je daná množina a x_0 je daný počiatočný stav. Predpokladáme tiež, že $l \leq n$ a že vektory $\frac{\partial g^i(x)}{\partial x}$ sú lineárne nezávislé pre všetky $x \in C$. Aby sme túto úlohu previedli na autonómnu, zavedieme si substitúciu

$$\tilde{\psi}(t) = e^{rt} \psi(t), \qquad \tilde{\psi}^0 = \psi^0, \tag{2.6}$$

$$\mathcal{H} = e^{rt} H. \tag{2.7}$$

Hamiltonovu funkciu $\mathcal{H}$ si definujeme ako

$$\mathcal{H}(x, u, \tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}) = \tilde{\psi}^0 F(x, u) + \tilde{\psi}^T f(x, u), \tag{2.8}$$

diferenciálna rovnica pre adjungovanú premennú nadobudne tvar

$$\dot{\tilde{\psi}}(t) = -\tilde{\psi}^0 \frac{\partial F^T}{\partial x} + (r\mathcal{I} - \frac{\partial f^T}{\partial x})\tilde{\psi}(t), \tag{2.9}$$

kde $\mathcal{I}$ predstavuje jednotkovú maticu. Princíp maxima ostane rovnaký ako pri štandartnej úlohe, pretože diskontný faktor nezávisí od u:

$$\mathcal{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t)\tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(\hat{x}(t), u(t), \tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}(t)), \qquad \forall t \in [0, \hat{T}]. \tag{2.10}$$

Podmienka tranzverzality bude v tvare

$$\tilde{\psi}(\hat{T}) = \Big(\frac{\partial g(x(\hat{T}))}{\partial x}\Big)^T \tilde{\chi}, \tag{2.11}$$

kde $\tilde{\chi} = e^{r\hat{T}}\chi$, pre úlohu s voľným časom máme navyše podmienku stacionarity

$$\mathcal{H}(\hat{x}(\hat{T}), \hat{u}(\hat{T}), \tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}(\hat{T})) = 0. \tag{2.12}$$

Veta 2.1.1. *Nech $\hat{u}(t)$, $\forall t \in \langle 0, \hat{T}\rangle$ je optimálne riadenie a $\hat{x}(t)$ je jeho odozva pre úlohu (2.1-2.5). Potom existujú také konštantné $(\tilde{\psi}^0, \tilde{\chi})) \neq 0$, $\tilde{\psi}^0 \geq 0$ a $\tilde{\chi} \in R^l$, že $\tilde{\psi}(t)$ riešenie adjungovanej rovnice (2.9) a podmienky tranzverzality (2.11) spĺňa spolu s $\hat{u}(t)$ a $\hat{x}(t)$ podmienku maxima (2.10) a pre úlohu s voľným časom platí aj podmienka stacionarity (2.12).*

2.2 Podmienky PPM pre našu úlohu

Kvôli zjednodušeniu zápisu použijeme pri riešeni úlohy substitúcie $a = \rho - 2\lambda$ a $b = -r + \lambda$. Pre $\eta = 1$ potom riešime úlohu optimálneho riadenia v tvare

$$\max \int_0^{T(x=0)} e^{-at} u(t)(1 - u(t))dt, \tag{2.13}$$

$$\dot{x}(t) = -bx(t) - u, \tag{2.14}$$

$$x(0) = x_0 > 0, \tag{2.15}$$

$$u \in [0, 1], \tag{2.16}$$

pričom platí predpoklad $\rho - r - \lambda = a + b > 0$. Podmienka, že úloha končí ak sa stavová premenná dostane prvý krát na 0, nie je úplne klasického typu, ale v zásade by sa dala preformulovať na klasickú úlohu s voľným koncovým časom. Táto úloha je špecifcká práve tým, že koncový čas nie je celkom voľný, pretože endogénne vyplýva z úlohy. Ak dostaneme riešenie, kde úplne nevyčerpáme zásobu aktíva, nemôže byť optimálne, čiže koncový čas je určený práve tým ako dlho potrvá vyčerpať zásobu stavovej premennej. V tejto kapitole odvodíme systém diferenciálnych rovníc, ktorým sa riadi adjungovaná a stavová premenná, z adjungovanej rovnice a podmienky maxima. Ako uvidíme ďalej, okrem hľadania optimálneho koncového času, potrebujeme nájsť aj počiatočnú hodnotu adjungovanej premennej.

Najprv si určíme podobu Hamiltonovej funkcie, podľa rovnice (2.8) v našom prípade dostávame

$$\mathcal{H}(\hat{x}, \hat{u}, \tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}(t)) = \tilde{\psi}^0 u(t)(1 - u(t)) + \tilde{\psi}(-bx(t) - u(t)). \tag{2.17}$$

Ďalej si odvodíme diferenciálnu rovnicu pre adjungovanú premennú, pomocou rovnice (2.9) dostaneme

$$\dot{\tilde{\psi}}(t) = -\tilde{\psi}^0 \frac{\partial(u(1-u))}{\partial x} + \Big(a - \frac{\partial(-bx - u))}{\partial x}\Big)\tilde{\psi}(t) = (a + b)\tilde{\psi}(t). \tag{2.18}$$

Z podmienky maxima (2.10) dostaneme výsledok pre optimálne $\hat{u}(t)$

$$\mathcal{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t)\tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}(t)) = \max_{u\in\langle 0,1\rangle} \tilde{\psi}^0 u(t)(1-u(t)) + \tilde{\psi}(t)(-b\hat{x}(t) - u(t)), \qquad \forall t \in [0, \hat{T}].$$

Aby sme mohli vyriešiť podmienku maxima musíme ešte určit hodnotu $\tilde{\psi}^0$. Ak by sme zvolili $\tilde{\psi}^0 = 0$, dostali by sme pre optimálnu hodnotu riadiacej premennej konštantne hraničné hodnoty podľa znamienka $\tilde{\psi}(t)$, teda $\hat{u} = 0$ (prípadne rovné 1). Čo by znamenalo, že naša účelová funkcia by dosiahla maximálnu hodnotu 0. Avšak zvolením ľubovoľného $u(t)$ z intervalu $(0,1)$ dostaneme kladnú hodnotu účelovej funkcie, teda táto možno nebude optimálna. Predpokladajme teda, že $\tilde{\psi}^0 = 1$, potom hľadáme maximum

$$\mathcal{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}(t)) = \max_{u\in\langle 0,1\rangle} u(t)(1-u(t)) + \tilde{\psi}(t)(-b\hat{x}(t) - u(t)), \tag{2.19}$$

funkcia, ktorú maximalizujeme je konvexná v zložke u preto jej derivácia podľa u je nulová v bode maxima, teda dostaneme rovnosť

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}, \tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}(t)) = -2\hat{u}(t) + 1 - \tilde{\psi}(t) = 0, \tag{2.20}$$

potom pre optimálne riadenie platí

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2}(1 - \tilde{\psi}(t)). \tag{2.21}$$

Ak zoberieme do úvahy aj obmedzenia pre riadenie k rovnici (2.21) pribudnú nám ďalšie podmienky, ak riadenie z (2.21) presiahne interval [0,1], to je ekvivalentné s tým, že adjungovaná premenná dosiahne hodnotu 1 alebo -1. Riadenie bude potom rovné už iba okrajovej hodnote tohto intervalu. Preto $\hat{u}(t) = w(\tilde{\psi}(t))$ bude predstavovať funkciu

$$\hat{u}(t) = w(\tilde{\psi}(t)) = \begin{cases} 0 & , \text{ak } \tilde{\psi}(t) < -1 \\ \frac{1}{2}(1 - \tilde{\psi}(t)) & , \text{ak } \tilde{\psi}(t) \in [-1, 1] \\ 1 & , \text{ak } \tilde{\psi}(t) > 1 \end{cases} \tag{2.22}$$

Dosaďme si $w(\tilde{\psi}(t))$ podintegrálnej funkcie v účelovej funkcii

$$e^{-at} w(\tilde{\psi}(t))(1 - w(\tilde{\psi}(t))) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-at}(1 - \tilde{\psi}^2(t)) & , \text{ak } \tilde{\psi}(t) \in [-1, 1] \\ 0 & , \text{inak} \end{cases} \tag{2.23}$$

Na podintegrálnej funkcii v tomto tvare vidíme, že ak namiesto zápornej adjungovanej premennej použijeme jej absolútnu hodnotu, podľa rovnice (2.23) dosiahneme rovnaký úžitok, avšak spotrebujeme pritom menšie množstvo stavovej premennej. Platí tiež, že ak adjungovaná premenná $\tilde{\psi}(t)$ dosiahne v čase $t \in (0, T)$ okrajovú hodnotu 1, znamenalo by to, že prestaneme čerpať stavovú premennú skôr ako by sme ju úplne vyčerpali. Dôsledky týchto tvrdení si zhrnieme v nasledujúcich lemach.

Lema 2.2.1. *Ak máme $\tilde{\psi}(t) \in (-1, 0)$, potom príslušne riadenie k hodnote tejto adjungovanej premennej nie je optimálne.*

Lema 2.2.2. *Ak pri danom riadení adjungovaná premenná $\tilde{\psi}(0)$ dosiahne okrajovú hodnotu skôr ako stavová premenná dosiahne hodnotu 0, toto riadenie nie je optimálne.*

2.3 Fázový portrét

Pre zjednodušenie zostrojenia fázového portrétu zatiaľ zanedbáme okrajové podmienky, na tieto prípady sa potom pozrieme samostatne. Teda po dosadení rovnosti (2.21) do diferenciálnej rovnice pre stavovú premennú dostávame rovnicu

$$\dot{x}(t) = -bx(t) - \frac{1}{2}(1 - \tilde{\psi}(t)). \tag{2.24}$$

Z rovníc (2.18) a (2.24) dostávame lineárny systém diferenciálnych rovníc pre adjungovanú a stavovú premennú. Pretože máme iba dvojrozmerný systém, vieme si ho ľahko vizualizovať pomocou fázového portrétu, ktorý nám môže pomôcť pri hľadaní prípustných hodnôt počiatočnej podmienky $\tilde{\psi}(0)$ pre adjungovanú premennú. V predchádzajúcej podkapitole sme odvodili systém diferenciálnych rovníc

$$\dot{x}(t) = -bx(t) - \frac{1}{2}(1 - \tilde{\psi}(t)), \tag{2.25}$$

$$\dot{\tilde{\psi}}(t) = (a + b)\tilde{\psi}(t). \tag{2.26}$$

V našom prípade si vytvoríme maticu systému (2.25-2.26), ktorá bude mať tvar

$$A = \begin{pmatrix} -b & \frac{1}{2} \\ 0 & a + b \end{pmatrix}$$

To aký typ pevného (stacionárneho) bodu má náš systém závisí od vlastných hodnôt matice A, v našom prípade závisia od konštánt $-b$ a $a + b$. V predpokladoch úlohy máme podmienku $\rho > r + \lambda$, z ktorej po prechode na nové parametre a, b dostaneme podmienku

$$a + b > 0, \tag{2.27}$$

preto prvé vlastné číslo $(a + b)$ matice A je vždy kladné. Pre druhé vlastné číslo $-b = r - \lambda$ však nemáme žiadnu podmienku, preto sa naša úloha delí na prípady:

1. Ak $b < 0$ (teda $r > \lambda$)- pevný bod je typu sedlo
2. Ak $b > 0$ ($r < \lambda$)- pevný bod je typu nestabilný uzol
3. Ak $b = 0$ ($r = \lambda$)- v tomto prípade úloha nemá pevný bod.

V tejto kapitole sa však budeme venovať iba prvým dvom prípadom, prípad $b = 0$ si rozoberieme neskôr v Kapitole 3.

K obom vlastným hodnotám nájdeme vlastné vektory, ktoré predstavujú priamkové trajektórie, ostatné trajektórie však už budú mať iba nelineárny charakter. V prípade, že sú hodnoty vlastných čísiel v absolutnej hodnote rôzne, začiatky trajektórií blízko kritického bodu sa dotýkajú vlastného vektora prislúchajúceho k menšej vlastnej hodnote. Naopak so vzrastajúcou vzdialenosťou od stacionárneho bodu sa asymptoticky blížia k smeru vlastného vektora prislúchajúceho k väčšiemu vlastnému číslu.

V prípade prvého vlastného čísla $-b$ je prvá zložka vlastného vektora voľná a druhá zložka je rovná nule, teda prvý vlastný vektor je

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

pre vlastný vektor druhého vlastného čísla $a + b$ platí

$$(-a - 2b)v_1 + \frac{1}{2}v_2 = 0, \tag{2.29}$$

po úprave tejto rovnice dostaneme

$$v_2 = 2(a + 2b)v_1, \tag{2.30}$$

teda druhý vlastný vektor je

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(a + 2b) \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Ďalej potrebujeme násť krivku (tzv. izoklína), na ktorej ostávajú hodnoty stavovej premennej konštantné v čase. Teda derivácia stavovej premennej podľa času je v tomto bode nulová, preto si zoberieme diferenciálnu rovnicu pre $x(t)$ a jej pravú stranu položíme rovnú 0

$$0 = -bx - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tilde{\psi}, \tag{2.32}$$

po úprave dostaneme predpis izoklíny

$$\tilde{\psi} = 2bx + 1. \tag{2.33}$$

Rovnakým postupom odvodíme aj izoklínu, na ktorej ostáva v čase konštantná adjungovaná premenná

$$0 = (a + b)\tilde{\psi}, \tag{2.34}$$

$$\tilde{\psi} = 0. \tag{2.35}$$

Bod, v ktorom sa priamky (2.33) a (2.35) stretávajú sa nazýva pevný bod, v tomto bode už zostávajú konštantné v čase aj stavová, aj adjungovaná premenná. Adjungovaná premenná má v pevnom bode hodnotu 0, ak dosadíme (2.35) do rovnice (2.33) dostaneme hodnotu stavovej premennej v pevnom bode

$$0 = 2bx + 1, \tag{2.36}$$

$$x = -\frac{1}{2b}. \tag{2.37}$$

Teda pevný bod v našom prípade bude $PB = [x, \tilde{\psi}] = [-\frac{1}{2b}, 0]$.

Aby sme dokázali načrtnúť kompletný fázový potrét, však ešte musíme zohľadniť ohraničenia na riadiacu premennú, v týchto prípadoch, keď $\tilde{\psi}(t)$ dosiahne v nejakom čase $\tilde{t}$ hodnotu 1 alebo -1, zostáva konštantne na tejto hodnote. Avšak stavová premenná sa naďalej mení s časom.

V prípade $\tilde{\psi}(0) > 0$ bude diferenciálna rovnica pre $\tilde{\psi}(t)$ v každom čase $t > \tilde{t}$

$$\dot{\tilde{\psi}}(t) = 0, \tag{2.38}$$

zatiaľ čo

$$\tilde{\psi}(t) \equiv 1, \tag{2.39}$$

potom diferenciálna rovnica pre stavovú premennú bude

$$\dot{x}(t) = -bx(t), \tag{2.40}$$

k rovnici pripočítajme výraz $bx(t)$ a obe strany prenásobíme e^{bt}

$$\dot{x}(t)e^{bt} + bx(t)e^{bt} = 0, \tag{2.41}$$

obe strany rovnice integrujeme v hraniciach t a $\tilde{t}$, kde $\tilde{t}$ znamená čas, v ktorom sa $\tilde{\psi}(t)$ dostane na hodnotu 1:

$$\int_{\tilde{t}}^{t} \dot{x}(\tau)e^{b\tau} + bx(\tau)e^{b\tau} d\tau = 0, \tag{2.42}$$

$$\Big[x(\tau)e^{b\tau}\Big]_{\tilde{t}}^{t} = 0, \tag{2.43}$$

$$x(t)e^{bt} - x(\tilde{t})e^{b\tilde{t}} = 0, \tag{2.44}$$

po niekoľkých elementárnych úpravách dostaneme výsledok

$$x(t) = x(\tilde{t})e^{b(\tilde{t}-t)} \qquad t > \tilde{t}, \tag{2.45}$$

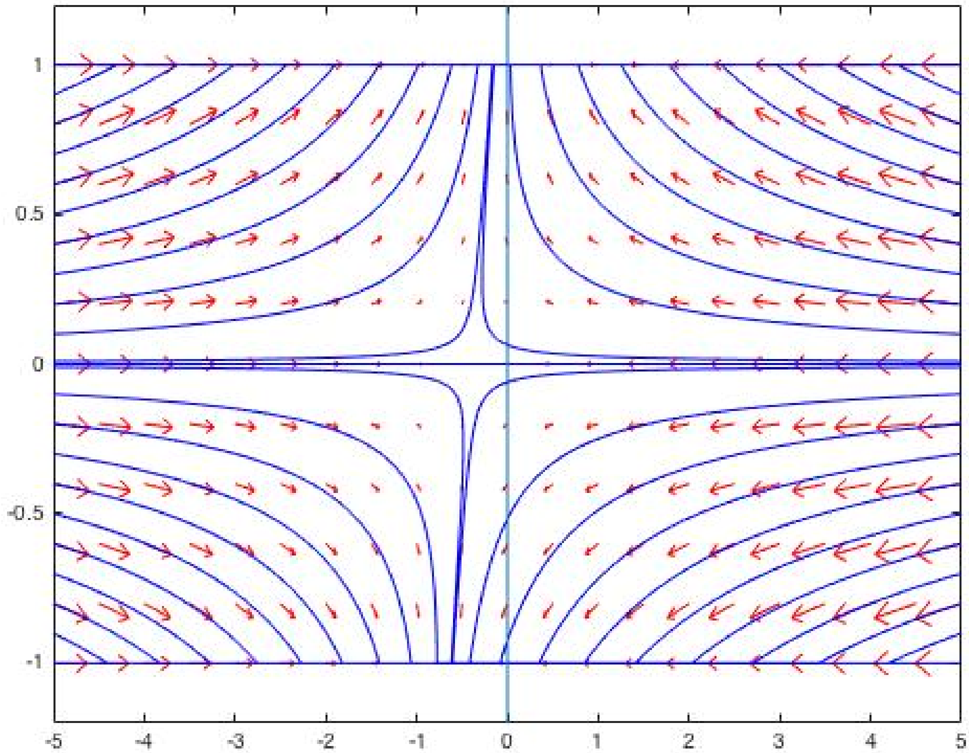
kde $x(\tilde{t})$ je hodnota stavovej premennej v čase, keď adjungovaná premenná dosiahla hodnotu 1. Pred časom $\tilde{t}$ sa stavová premenná riadi pôvodnou diferenciálnou rovnicou (2.25), teda hodnotu $x(\tilde{t})$ si vieme vyjadriť pomocou tejto rovnice. Môžeme si všimnúť, že ak adjungovaná premenná dosiahne hodnotu 1 ešte pred tým, ako sa stavová premenná dostane na 0, už nulovú hodnotu nikdy nedosiahne. Pretože keď je b kladné a čas t pôjde do nekonečna, tak celý výraz sa bude limitne blížiť k 0. Ak je b záporné celý výraz bude divergovať do nekonečna. Podľa vlastností vlastností modelu, ak je $u(t) = 0$ účelová funkcia je rovná 0, a teda od času $\tilde{t}$ sa už neakumuluje žiaden ďalší úžitok. Táto skutočnosť platí aj v ďalšom prípade, kde je $\tilde{\psi}(0) < 0$, po tom čo $\tilde{\psi}(t)$ dosiahne hodnotu -1 bude $u = 1$, čo tiež v tomto modeli znamená nulovú akumuláciu ďalšieho úžitku. To v súlade s lemami (2.2.1) a (2.2.2) poukazuje na to, že optimálne riešenie treba hľadať v oblasti $0 \leq \tilde{\psi}(0) \leq 1$, tak aby $\tilde{\psi}(T) \leq 1$.

Aj keď je záporné počiatočné $\psi\tilde{(0)}$ neoptimálne, pre potreby fázového portrétu si ukážeme ako sa premenné správajú po dosiahnutí $\tilde{\psi}(\tilde{t}) = -1$, v tomto prípade dostaneme diferenciálnu rovnicu pre x v tvare

$$\dot{x}(t) = -bx(t) - 1 \qquad t > \tilde{t}, \tag{2.46}$$

podobne ako v predošlom prípade, po niekoľkých úpravách dostaneme výslednú rovnicu pre stavovú premennú

$$x(t) = x(\tilde{t})e^{b(\tilde{t}-t)} + \frac{e^{b(\tilde{t}-t)} - 1}{b} \qquad t > \tilde{t}. \tag{2.47}$$

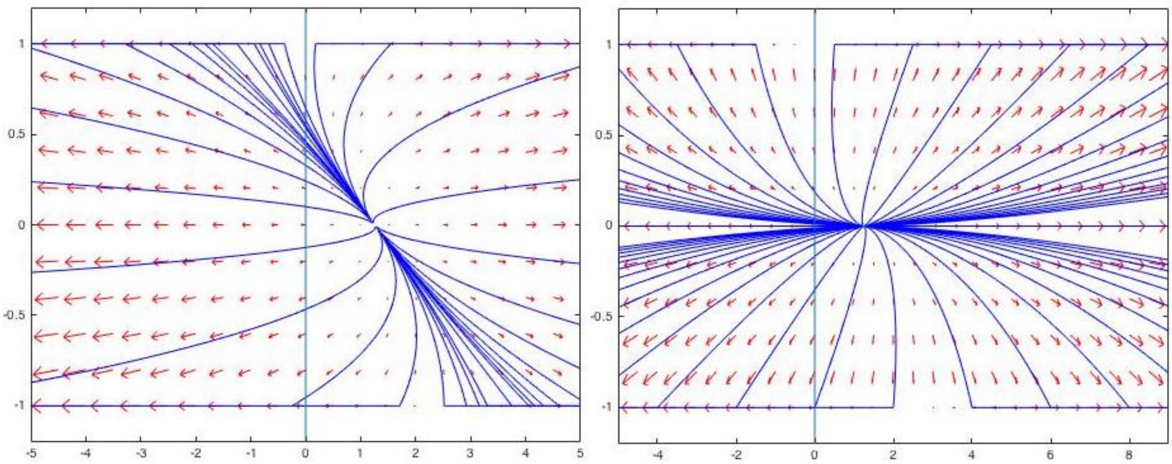


Obr. 2.1: Fázový portrét s pevným bodom typu sedlo, pri parametroch b=1.3, a=-0.4. Trajektórie predstavujú dvojice $(x(t), \tilde{\psi}(t))$.

V našej úlohe teda môžeme dosiahnuť dva typy pevných bodov- sedlo a nestabilný uzol. Príklad pevného bodu typu sedlo z našej úlohy môžeme vidieť na obrázku (2.1). V prípade nestabilného uzla nám podoba fázového portrétu závisí od toho, ktorá z vlastných honôt $a+b$ alebo $-b$ je väčšia v absolutnej hodnote. Rozdiely môžeme vidieť na obrázku (2.2). Zatiaľ sa nebudeme venovať prípadu $a + 2b = 0$, vrátime sa k nemu v Kapitole 3.

2.4 Analýza fázových portrétov

V predošlej časti sme určili dva základné typy pevných bodov, ktoré môžu nastať zvolením vhodných prarametrov modelu. Oba prípady dôkladnejšie prekúmame a pokúsime sa nájsť vhodných kandidátov na riešenie, teda budeme sledovať, ktoré trajektórie sa



(a) Nestabilný uzol b=-0.4, a=0.6

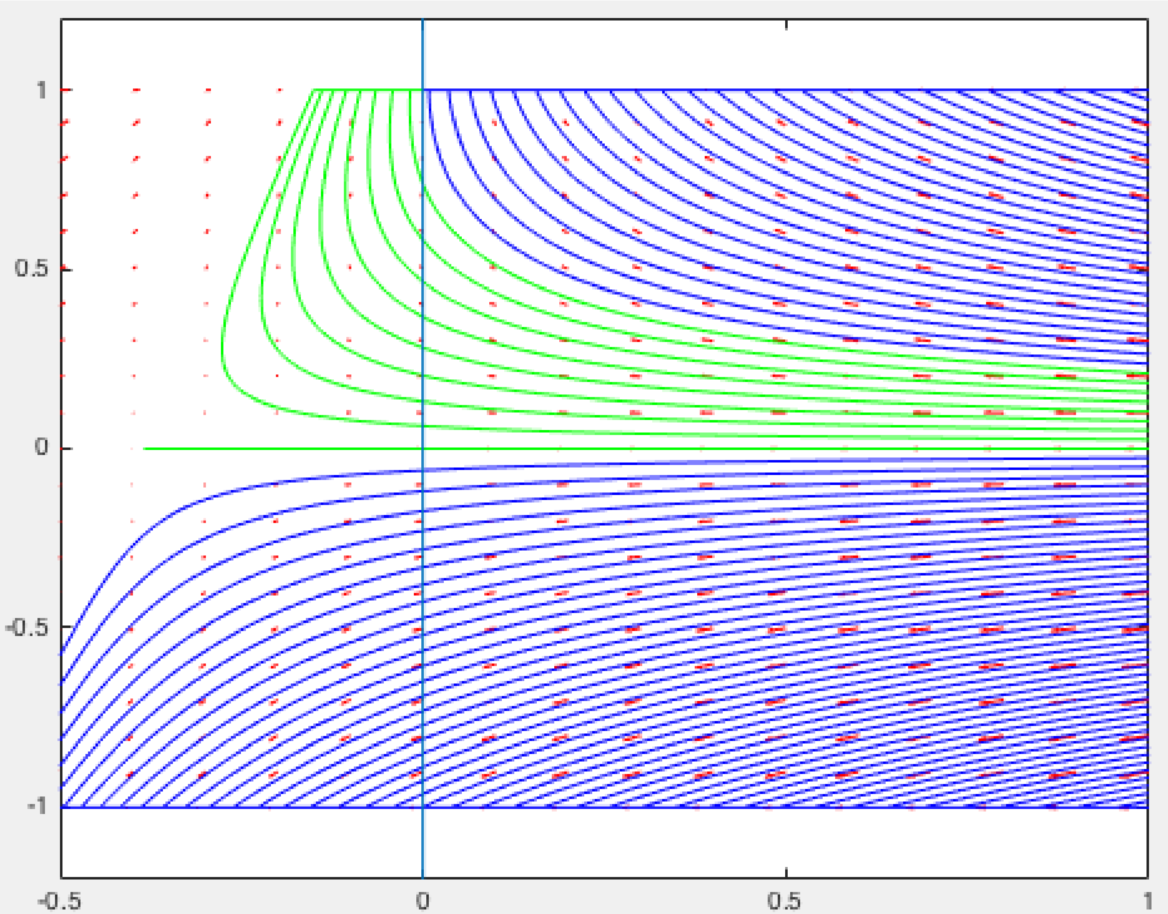
(b) Nestabilný uzol b=-0.4, a=1

Obr. 2.2: Dva prípady pevného bodu typu nestabilný uzol.

môžu dostať až na nulu v premennej x. Pozornosť budeme venovať tiež počiatočnej podmienke pre stavovú premennú. Pretože, ako ukážeme v tejto časti kapitoly, aj od tohto parametra závisí či úloha bude mať riešenie ktoré sa môže dostať až na nulovú hodnotu stavovej premennej.

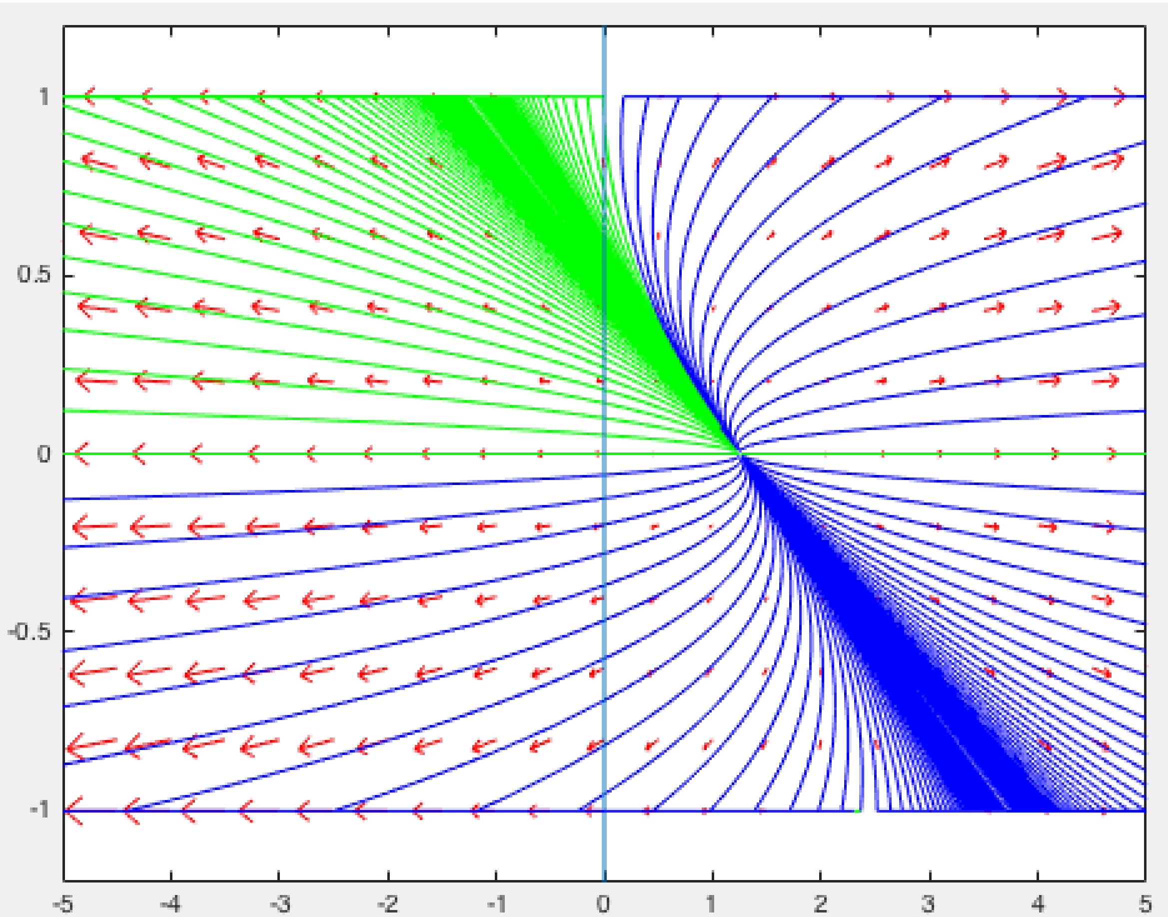
V prípade, keď máme $b > 0$ stacionárny bod je sedlom. Na obrázku nižšie môžeme vidieť, že pre kladné x_0 všetky trajektórie $(x(t), \tilde{\psi}(0))$ také, že $\tilde{\psi}(0) < 0$ prechádzajú nulou v zložke $x(t)$, ale podľa lemy (2.2.1) nie sú optimálne. Taktiež pre $\tilde{\psi}(0) > 0$ existujú trajektórie, ktoré prechádzajú nulou v zložke $x(t)$. Ale v tomto prípade platí, že ak sa $\tilde{\psi}(t)$ dosiahne hodnotu 1 skôr ako sa dostane na 0 v súradnici $x(t)$, už sa na nulovú hodnotu nedokáže dostať. V súlade s lemou (2.2.2) preto musíme hľadať kandidáta na riešenie medzi trajektóriami, ktoré nedosiahnu $\tilde{\psi}(t) = 1$ skôr ako x dosiahne nulovú hodnotu. Tiež platí, že pre všetky $x_0 > 0$ existujú trajektórie s kladným počiatočným $\tilde{\psi}(0)$, ktoré v x môžu dosiahnuť, ale čím je x_0 väčšie, tým bližšie k nule musí byť počiatočné $\tilde{\psi}(0)$ aby trajektória v súradnici x dokázala dosiahnuť nulovú hodnotu pred tým, ako $\tilde{\psi}(t)$ dosiahne hodnotu 1. Na nasledujúcom obrázku (2.3) sú zelenou farbou vyznačené trajektórie, ktoré predstavujú kandidátov na optimálne riešenie. Zatiaľ čo ostatné trajektórie sú vyznačené modrou farbou.

Ak je $b < 0$ podoba fázového portrétu sa výrazne zmení oproti predošlému prípadu, typ pevného bodu sa zo sedla zmení na nestabilný uzol. Výsledný tvar a smer trajektórií fázového portrétu síce ešte závisí na vlastných hodnotách diferenciálneho systému,

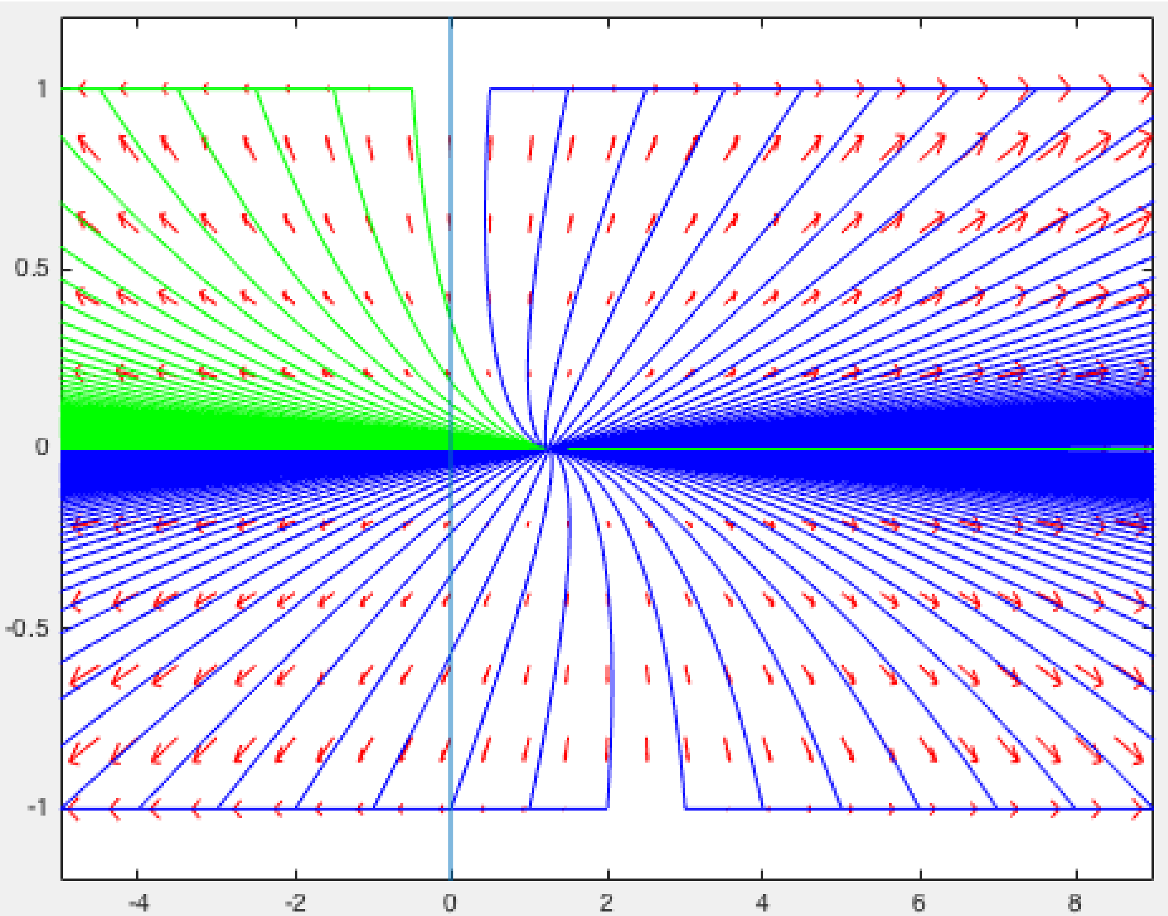


Obr. 2.3: Fázový portrét s pevným bodom typu sedlo, pri parametroch b=1.3, a=-0.4 s vyznačenými kandidátmi na optimálne riešenie (zelená farba)

ale trajektórie, ktoré sa dostanú v premennej x na hodnotu 0 sa riadia rovnakými pravidlami. V prípade, že máme kladné počiatočné $\tilde{\psi}(0)$ existujú trajektórie, ktoré sa môžu dostať do 0 iba v prípade, ak $x_0 < \frac{1}{-2b}$. Pre záporné počiatočné $\tilde{\psi}(0)$ dokážeme nájsť trajektórie, ktoré dosiahnu 0 aj ak je $x_0 \geq \frac{1}{-2b}$. Ale to platí iba do určitej hodnoty počiatoného x_0, nad ktorou už všetky trajektórie smerujú do nekonečna v premennej x a teda nikdy sa na hodnotu 0 nedostanú. Ale v tomto prípade bude optimálnešie zvoliť $\tilde{\psi}(0) = 0$, pretože sa v tomto prípade najrýchlejšie akumuluje úžitok a aktívum sa nám nikdy takouto rýchlosťou predaja nevyčerpá. Čo nám opäť súhlasí s lemami (2.2.1) a (2.2.2), hľadáme nezáporne $\tilde{\psi}(0)$ také, aby $\tilde{\psi}(T) \leq 1$. Na ďalších dvoch obrázkoch (2.4) a (2.5) sa nachádzajú obe podoby fázového potrétu v prípade, že $b < 0$, aj s vyznačenými kandidátmi na optimálne riadenie.



Obr. 2.4: Fázový portrét s pevným bodom typu nestabilný uzol, pri parametroch b=0.4, a=0.6 s vyznačenými kandidátmi na optimálne riešenie



Obr. 2.5: Fázový portrét s pevným bodom typu nestabilný uzol, pri parametroch b=0.4, a=1 s vyznačenými kandidátmi na optimálne riešenie

Kapitola 3

Dosažiteľná množina

Aj keď dosažiteľné množiny nakoniec neboli kľúčové pri konečnom vyriešení nášho problému, v práci túto kapitolu uvádzame, pretože nám pomohla lepšie pochopiť procesy, ktoré sa odohrávajú v našej úlohe. Veríme, že aj napriek tomu bude pre čitateľa dostatočne zaujímavá a dopomôže mu k lepšiemu pochopeniu problematiky. Tak ako pri fázových portrétoch budeme skúmať v akých prípadoch sa riešenie úlohy môže dostať k nulovému stavu zásob. Porovnáme ich s výsledkami z minulej kapitoly, ktoré sme získali z analýzy fázových potrétov, a tiež určíme v akých prípadoch stav zásoby aktíva nikdy nedosiahne nulu.

3.1 Dosažiteľná množina

Dosažiteľná množina predstavuje množinu všetkých stavov, ktoré môžu byť dosiahnuté v určitom čase pri všetkých možných prípustných riadeniach. V tejto časti práce budeme sledovať všetky možné hodnoty stavovej premennej x a takisto hodnoty účelovej funkcie v rovnakom fixnom čase, využijeme pri tom vzťahy, ktoré sme za pomoci teórie optimálneho riadenia odvodili v predchádzajúcej kapitole. Špeciálne nás bude zaujímať, aké hodnoty môže nadobudnúť účelová funkcia vtedy, ak sa stavová premenná dostane na nulovú hodnotu. Potom optimum úlohy, ktoré hľadáme, nastane ak nájdeme maximálnu hodnotu účelovej funkcie za podmienky nulovej hodnoty stavovej premennej. Preto si systém, ktorý budeme riešiť rozšírime o premennú $x^0(t)$, ktorá predstavuje hodnotu účelovej fukcie v čase t.

Definícia 3.1.1. *Definujme si $\mathcal{R}(t, x_0, \psi(\tilde{0}))$ ako dosažiteľnú množinu pre čas t a množinu počiatočných hodnôt x_0, $\tilde{\psi}(0)$. Ak U je množina všetkých prípustných riadení, potom $\mathcal{R}(t, x_0, \tilde{\psi}(0))$ bude množina:*

$$\mathbf{R}(t, x_0, \tilde{\psi}(0)) = \{(x, x^0) \mid \exists\ u \in U,\ x(t, x_0, u(t)) = x,\ x^0(t, x_0, u(t)) = x^0\}.$$

Ako sme už naznačili v predchádzajúcom odstavci zaujímať nás bude predovšetkým vzťah stavovej premennej a množstva naakumulovaného úžitku z účelovej funkcie v určitom fixnom čase. V predošlej kapitole sme odvodili, že stavová premenná sa riadi podľa rovnice (2.24) s počiatočnou hodnotou $x(0) = x_0$

$$\dot{x}(t) = -bx(t) - w(\tilde{\psi}(t)) \tag{3.1}$$

a hodnotu účelovú funkciu si zadefinujme ako

$$\dot{x}^0(t) = e^{-a\tau} w(\tilde{\psi}(\tau))(1 - w(\tilde{\psi}(\tau))), \tag{3.2}$$

teda ďalej budeme riešiť už rozšírený systém (3.1-3.2). Hodnotu premennej $x^0(t)$ si zadefinujeme, ako

$$x^0(t) = \int_0^t e^{-a\tau} w(\tilde{\psi}(\tau))(1 - w(\tilde{\psi}(\tau)))d\tau \tag{3.3}$$

a počiatočná hodnota bude $x^0(0) = 0$. Ďalej sme odvodili aj diferenciálnu rovnicu pre adjungovanú premennú (2.18), ktorej riešením je

$$\tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}(0)e^{(a+b)t} \tag{3.4}$$

v našom prípade zatiaľ nevieme určiť počiatočnú hodnotu adjungovanej premennej, optimalizovať teda musíme nielen podľa koncového času, ale aj vzhľadom na $\tilde{\psi}(0)$. Naša riadiaca premenná sa potom dá vyjadriť aj ako funkcia dvoch premenných t a $\tilde{\psi}(0)$

$$u(t) = w(\tilde{\psi}(t)) = h(t, \tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{2}\Big(1 - \tilde{\psi}(0)e^{(a+b)t}\Big). \tag{3.5}$$

Nasledujúcu definíciu sme sformulovali na základe kapitoly 3.4. z knihy [6].

Definícia 3.1.2. *Riadenie $\bar{u}(t)$ nazveme extremálnym, ak spĺňa princíp maxima (2.10). Navyše ak je $R(t, x_0, \tilde{\psi}(0))$ konvexná množina, potom riadenie, ktoré je extremálne nás vo fixnom čase t zavedie na $(x(t, x_0, \bar{u}(t)), x^0(t, x_0, \bar{u}(t)) = (x, x^0)$, pre ktoré platí $(x, x^0) \in \partial R(t, x_0, \tilde{\psi}(0))$. A za týchto podmienok tiež platí, že vektor $(1, \tilde{\psi}(t))$ predstavuje normálu k $R(t, x_0, \tilde{\psi}(0))$ v bode (x, x^0).*

Z rovníc (3.1) a (3.5) dostaneme

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, \tilde{\psi}(0)) = -bx(t, \tilde{\psi}(0)) - \frac{1}{2}\Big(1 - \tilde{\psi}(0)e^{(a+b)t}\Big) \tag{3.6}$$

a použitím rovností (3.3) a (3.5) získame vzťah pre $x^0(t, \tilde{\psi(0)})$

$$x^0(t, \tilde{\psi}(0)) = \max \int_0^t e^{-a\tau}\frac{1}{2}\Big(1 - \tilde{\psi}(0)e^{(a+b)\tau}\Big)\Big(1 - \frac{1}{2}\Big(1 - \tilde{\psi}(0)e^{(a+b)\tau}\Big)\Big)d\tau. \tag{3.7}$$

Prípustné riadenia vo vzťahoch (3.6) a (3.7), s ktorými budeme ďalej pracovať, spĺňajú princíp maxima. Vyriešením týchto vzťahov získame množinu dvojíc $x(t, h(t, \tilde{\psi}(0)))$ a $x^0(t, h(t, \tilde{\psi}(0)))$, táto množina podľa definície (3.1.2) predstavuje okraj dosažiteľnej množiny. V tomto prípade nám to však stačí, pretože optimum (ak nejaké existuje), ktoré hľadáme sa musí nachádzať práve na okraji dosažiteľnej množiny.

3.1.1 Stavová premenná

Počítajme najprv diferenciálnu rovnicu pre stavovú premennú, po prirátaní výrazu $bx(t)$ dostaneme

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, \tilde{\psi}(0)) + bx(t, \tilde{\psi}(0)) = -\frac{1}{2}\Big(1 - \tilde{\psi}(0)e^{(a+b)t}\Big). \tag{3.8}$$

Následne celú rovnicu prenásobíme výrazom e^{bt}

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, \tilde{\psi}(0))e^{bt} + bx(t, \tilde{\psi}(0))e^{bt} = -\frac{1}{2}e^{bt} + \frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)e^{(a+2b)t}, \tag{3.9}$$

obe strany rovnosti integrujeme v medziach 0 a t, pre ľavú stranu potom platí

$$\int_0^t \frac{\partial x}{\partial t}(\tau, \tilde{\psi}(0))e^{b\tau} + bx(\tau, \tilde{\psi}(0))e^{b\tau}d\tau = \Big[x(\tau, \tilde{\psi}(0))e^{b\tau}\Big]_0^t = x(t, \tilde{\psi}(0))e^{bt} - x_0, \tag{3.10}$$

kde x_0 je zadaná počiatočná hodnota stavovej premennej. Potom pre pravú stranu tiež platí

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\int_0^t e^{b\tau}d\tau + \frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)\int_0^t e^{(a+2b)\tau}d\tau &= -\frac{1}{2}\Big[\frac{e^{b\tau}}{b}\Big]_0^t + \frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)\Big[\frac{e^{(a+2b)\tau}}{a+2b}\Big]_0^t \\ &= -\frac{1}{2}\Big(\frac{e^{bt}-1}{b}\Big) + \frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)\Big(\frac{e^{(a+2b)t}-1}{a+2b}\Big). \end{aligned}$$

Dokopy teda dostaneme

$$x(t, \tilde{\psi}(0))e^{bt} - x_0 = -\frac{1}{2}\Big(\frac{e^{bt}-1}{b}\Big) + \frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)\Big(\frac{e^{(a+2b)t}-1}{a+2b}\Big), \tag{3.11}$$

túto rovnicu prenásobíme e^{-bt} a pripočítame $e^{-bt}x_0$, dostávame výsledný vzťah pre stavovú premennú

$$x(t,\tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{2}\Big(\frac{e^{-bt}-1}{b}\Big) + \frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)\Big(\frac{e^{(a+b)t}-e^{-bt}}{a+2b}\Big) + x_0e^{-bt}. \tag{3.12}$$

Zatiaľ sme vo výpočtoch nezahrnuli obmedzenie na riadiacu premennú, ktorá má mať v každom čase od 0 po T hodnotu z intevalu $[0,1]$. Pretože sme všetky rovnice previedli zo vzťahu stavovej a riadiacej premennej na vzťahy medzi stavovou a adjungovanou premennou, musíme si previesť aj tieto obmedzenia na riadiacu premennú na obmedzenia pre adjungovanú premennú. Pre riadiacu premennú platí

$$u(t,\tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{2}\Big(1-\tilde{\psi}(0)e^{(a+b)t}\Big) \in [0,1], \tag{3.13}$$

po niekoľkých elementárnych úpravách dostaneme

$$\tilde{\psi}(0)e^{(a+b)t} \in [-1,1]. \tag{3.14}$$

Keďže funkcia $\tilde{\psi}(0)e^{(a+b)t}$ je rýdzo monotónna (ak je $\tilde{\psi}(0)$ kladné rastie, ak je záporné klesá), ak $\tilde{\psi}(0) \neq 0$, v určitom čase $\tilde{t} \in [0,T]$ nadobudne hodnotu jedného z okrajov intervalu a aby boli dodržané obmedzenia na tejto hodnote už ostane až do koncového času T. Stavová premenná sa teda od času 0 po $\tilde{t}$ bude riadiť podľa rovnice (3.12), avšak po prekročení času $\tilde{t}$ až do koncového času T pre $\tilde{\psi}(0) \in (0,1]$ platí

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t,\tilde{\psi}(0)) = -bx(t,\tilde{\psi}(0)), \tag{3.15}$$

pre $\tilde{\psi}(0) \in [-1,0)$ máme diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t,\tilde{\psi}(0)) = -bx(t,\tilde{\psi}(0)) - 1. \tag{3.16}$$

Vyriešime najprv prvý prípad, kde máme $\tilde{\psi}(0)$ kladné, po niekoľkých úpravách rovnice (3.15) dostaneme

$$x(t,\tilde{\psi}(0)) = x(\tilde{t},\tilde{\psi}(0))e^{b\tilde{t}-bt}, \tag{3.17}$$

pretože $x(\tilde{t},\tilde{\psi}(0))$ máme definované už rovnicou (3.12) v bode $\tilde{t}$, po dosadení do (3.17) dostaneme

$$x(t,\tilde{\psi}(0)) = \Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{e^{-b\tilde{t}}-1}{b}\Big) + \frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)\Big(\frac{e^{(a+b)\tilde{t}}-e^{-b\tilde{t}}}{a+2b}\Big) + x_0e^{-b\tilde{t}}\Big)e^{b\tilde{t}-bt} =$$

$$= \Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{1-e^{b\tilde{t}}}{b}\Big) + \frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)\Big(\frac{e^{(a+2b)\tilde{t}}-1}{a+2b}\Big) + x_0\Big)e^{-bt}, \tag{3.18}$$

stavová premenná sa riadi podľa rovnice (3.18) iba v čase $t \in (\tilde{t}, T]$ a pre interval $t \in [0, \tilde{t}]$ platí vzťah (3.12).

V prípade, že $\tilde{\psi}(0)$ je záporné riešime diferenciálnu rovnicu (3.16), podobne ako v predošlom prípade dostaneme

$$x(t, \tilde{\psi}(0)) = \Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{1-e^{b\tilde{t}}}{b}\Big) + \frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)\Big(\frac{e^{(a+2b)\tilde{t}}-1}{a+2b}\Big) + x_0\Big)e^{-bt} + \frac{1-e^{b\tilde{t}-bt}}{-b}. \tag{3.19}$$

Dostali sme teda vzťah, ktorým sa riadi stavová premenná v prípade, že $t \in (\tilde{t}, T]$ a v prípade $t \in [0, \tilde{t}]$ pre $x(t, \tilde{\psi}(0))$ platí rovnica (3.12).

Ak pre počiatočnú hodnotu adjungovanej premennej platí $\tilde{\psi}(0) = 0$, riadiaca premenná bude $u(t, \tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{2}$ pre všetky $t \in [0, T]$. Potom pre stavovú premennú dostaneme vzťah

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, \tilde{\psi}(0)) = -bx(t, \tilde{\psi}(0)) - \frac{1}{2}, \tag{3.20}$$

riešenie je analogické k rovnici (3.16), rozdiel je iba v časovom intervale, počas ktorého sa stavová premenná riadi podľa tejto diferenciálnej rovnice, nakoniec dostaneme výsledok:

$$x(t, \tilde{\psi}(0)) = \frac{1-e^{-bt}}{-2b} + x_0 e^{-bt}. \tag{3.21}$$

3.1.2 Účelová funkcia

Rozanalyzovali sme všetky prípady správania stavovej premennej v ľubovoľnom čase, nás však zaujíma závislosť stavovej premennej od účelovej funkcie, teda podobnú analýzu musíme urobiť aj pre $x^0(t, \tilde{\psi}(0))$. Ak sa nám podarí zmapovať správanie oboch premenných dokážeme vytvoriť dosažiteľnú množinu. Počítajme teda integrál (3.7), platí

$$\frac{1}{2}\Big(1-\tilde{\psi}(0)e^{(a+b)t}\Big)\Big(1-\frac{1}{2}(1-\tilde{\psi}(0)e^{(a+b)t})\Big) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\tilde{\psi}^2(0)e^{2(a+b)t}, \tag{3.22}$$

po dosadení (3.22) do (3.7) dostaneme

$$x^0(t, \tilde{\psi}(0)) = \int_0^t e^{-a\tau}\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\tilde{\psi}^2(0)e^{2(a+b)\tau}\Big)d\tau = \frac{1}{4}\int_0^t e^{-a\tau}d\tau - \frac{1}{4}\tilde{\psi}^2(0)\int_0^t e^{(a+2b)\tau}d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\frac{e^{-a\tau}}{-a}\Big]_0^t - \frac{1}{4}\tilde{\psi}^2(0)\Big[\frac{e^{(a+2b)\tau}}{a+2b}\Big]_0^t = \frac{1}{4}\frac{e^{-at}-1}{-a} - \frac{1}{4}\tilde{\psi}^2(0)\frac{e^{(a+2b)t}-1}{a+2b} \tag{3.23}$$

Avšak v rovnici (3.23) sme zatiaľ nebrali do úvahy obmedzenia na riadiacu premennú, teda ako v prípade stavovej premennej musíme uvažovať, že riadiaca premenná po dosiahnutí hranice intervalu prípustných hodnôt po zvyšok trvania úlohy ostane konštantná. Podobne ako pri stavovej premennej, v prípade, že $\tilde{\psi}(0) \in [-1, 0)$

$$x^0(t, \tilde{\psi}(0)) = \int_0^{\tilde{t}} e^{-a\tau}\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\tilde{\psi}^2(0)e^{2(a+b)\tau}\Big)d\tau + \int_{\tilde{t}}^{t} e^{-a\tau}1(1-1)d\tau =$$

$$= \int_0^{\tilde{t}} \frac{1}{4}e^{-a\tau} - \frac{1}{4}\tilde{\psi}^2(0)e^{(a+2b)\tau}d\tau + \int_{\tilde{t}}^{t} 0d\tau = \frac{1}{4}\frac{e^{-a\tilde{t}}-1}{-a} - \frac{1}{4}\tilde{\psi}^2(0)\frac{e^{(a+2b)\tilde{t}}-1}{a+2b}. \quad (3.24)$$

Analogicky v prípade, že $\tilde{\psi}(0) \in (0, 1]$ dostaneme ten istý výsledok.

V poslednom prípade, keď $\tilde{\psi}(0) = 0$, je riadiaca premenná rovná jednej polovici pre všetky $t \in [0, T]$, teda v tomto prípade máme

$$x^0(t, \tilde{\psi}(0)) = \int_0^t e^{-a\tau}\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2}\Big)d\tau = \frac{1}{4}\frac{e^{-at}-1}{-a}. \quad (3.25)$$

Aby sme dokázali zostrojiť dosažiteľnú množinu musíme ešte určiť čas $\tilde{t}$, v ktorom riadiaca premenná dosiahne okraj intervalu prípustných hodnôt. Pre riadiacu premennú v čase $\tilde{t}$ a $\tilde{\psi}(0) \in [-1, 0)$ platí

$$u(\tilde{t}, \tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{2}\Big(1 - \tilde{\psi}(0)e^{(a+b)\tilde{t}}\Big) = 1,$$

$$e^{(a+b)\tilde{t}} = \frac{1}{-\tilde{\psi}(0)},$$

$$(a+b)\tilde{t} = ln\Big(\frac{1}{-\tilde{\psi}(0)}\Big),$$

$$\tilde{t} = \frac{-ln(-\tilde{\psi}(0))}{a+b}. \quad (3.26)$$

V prípade, že $\tilde{\psi}(0) \in (0, 1]$ dostaneme analogicky

$$\tilde{t} = \frac{-ln(\tilde{\psi}(0))}{a+b}. \quad (3.27)$$

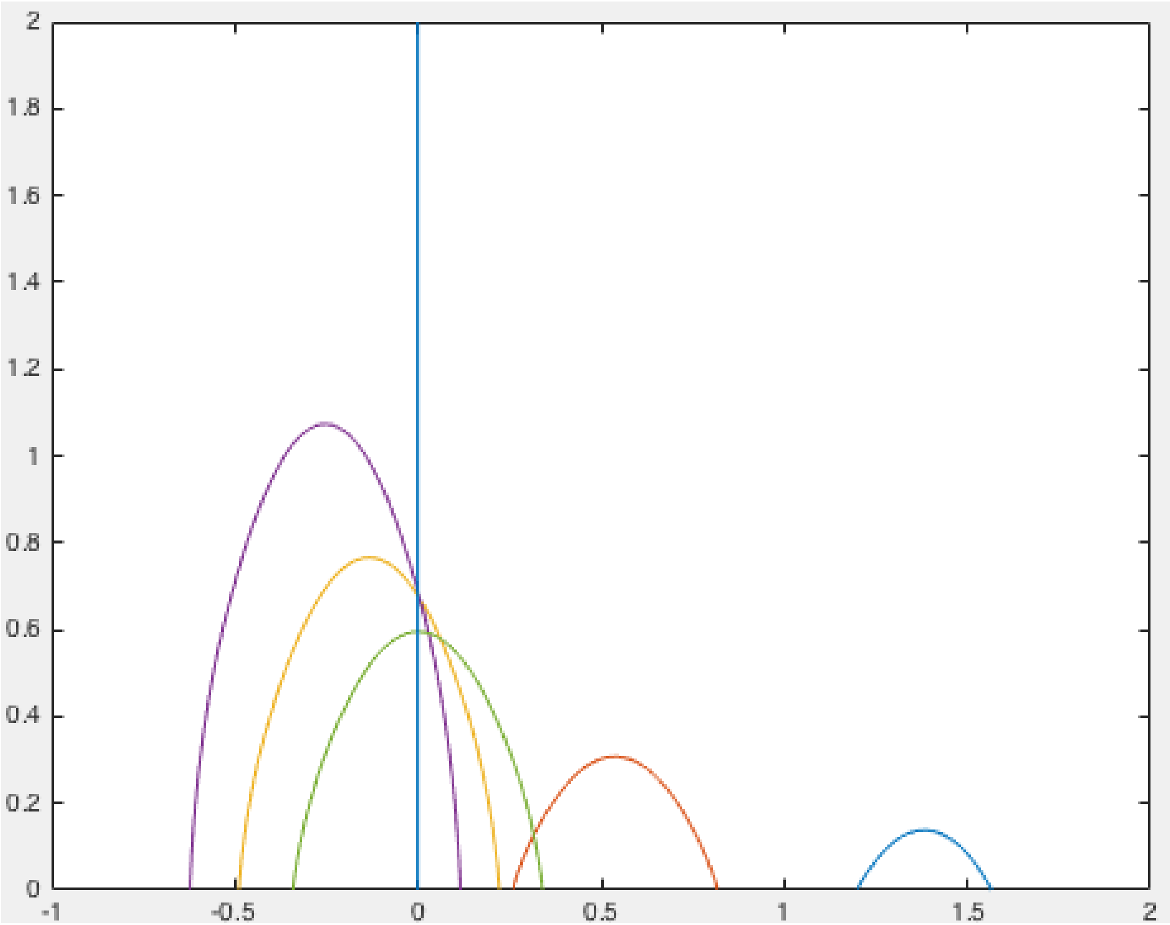
Môžeme si všimnúť, že všeobecne platí pre $\tilde{\psi}(0) \in [-1, 1]$

$$\tilde{t} = \frac{-ln|\tilde{\psi}(0)|}{a+b}. \quad (3.28)$$

Pre $\tilde{\psi}(0) = 0$ bude čas $\tilde{t}$ nekonečný, čo nám súhlasí s tým, že riadiaca premenná je konštantne rovná jednej polovici.

Teraz už máme všetko potrebné, aby sme si vedeli zostrojiť celú dosažiteľnú množinu. Grafické znázornenie dosažiteľných množín by mohlo byť vhodným náhľadom na našu úlohu, práve preto, že sa na úlohu pozerá z iného pohľadu ako fázove portréty. Budeme sledovať či sa výsledky týchto dvoch prístupov zhodujú a či nám náhľad na úlohu prostredníctvom dosažiteľných množín neprinesie nové poznatky o správaní úlohy. Narozdiel od fázových portrétov si budeme množiny dosažiteľnosti zobrazovať v stavovej premennej na osi x a hodnoty účelovej funkcie na osi y. Zobrazme si najprv dosažiteľnú množinu s rovnakými parametrami, pre ktoré sme zhotovili fázový portrét s pevným bodom typu sedlo v predchádzajúcej kapitole (Obr. 2.3). Pripomeňme si, že v tomto prípade nezáleží na počiatočnom množstve aktíva x_0 vždy existujú $\tilde{\psi}(0)$, s ktorými sa stavová premenná dokáže dostať na hodnotu 0. Konkrétne to platí pre všetky záporne a nulové $\tilde{\psi}(0)$, pri kladných $\tilde{\psi}(0)$ záleží na tom či sa adjungovaná premenná dostane na hodnotu 1 neskôr ako stavová premenná na 0. Na obrázku (3.1) môžme vidieť dosažiteľnú množinu pri úlohe so spomínanými parametrami. Dokážeme tu pozorovať rovnaké javy ako pri fázových portrétoch. Celá ľavá strana "kopca", ktorá predstavuje hodnoty premenných pri zápornom počiatočnom $\tilde{\psi}(0)$ sa po určitom čase dostane v premennej x do záporných hodnôt. Takisto časť pravej strany, ktorá predstavuje kladné hodnoty $\tilde{\psi}(0)$ sa dostane v x do záporných hodnôt. Zvyšná časť pravej strany dosažiteľnej množiny sa iba blíži k 0, tak ako nám ukázali fázové portréty, v tomto prípade adjungovaná premenná dosiahla hodnotu 1 a stavová premenná sa iba limitne blíži k nule.

Rozoberme si aj prípad natavenia parametrov modelu, pri ktorom sme dostali fázový portrét s pevným bodom typu nestabilný uzol. V tomto prípade nám fázové portréty ukázali, že záleží na počiatočnom množstve aktíva. Ak presiahne určitú hodnotu už sa stavová premenná nedokáže dostať na hodnotu 0. Všeobecne platí, že ak je $x_(0) > \frac{1}{-2b}$, tak sa vlastníkovi vyplatí predávať aktívum najvýhodnejšou možnou rýchlosťou $u(t,0) = \frac{1}{2}$ a aktívum sa pri tejto rýchlo nikdy nevypredá. V prípade, že $x_0 < \frac{1}{-2b}$, tak optimálne riešenie budeme hľadať pre $\tilde{\psi}(0) \in [0,1)$. Na obrázku (3.2) môžeme vidieť dosažiteľné množiny v prípade, že $x_0 = 3 > \frac{1}{-2b} = 1.25$, podľa očakávania dosažiteľná množina sa v premennej x posúva smerom od 0. Na ďalšom obrázku (3.3) je úloha s rovnakým parametrami, ale s $x_0 = 1 < 1.25$. V tomto prípade pri všekých



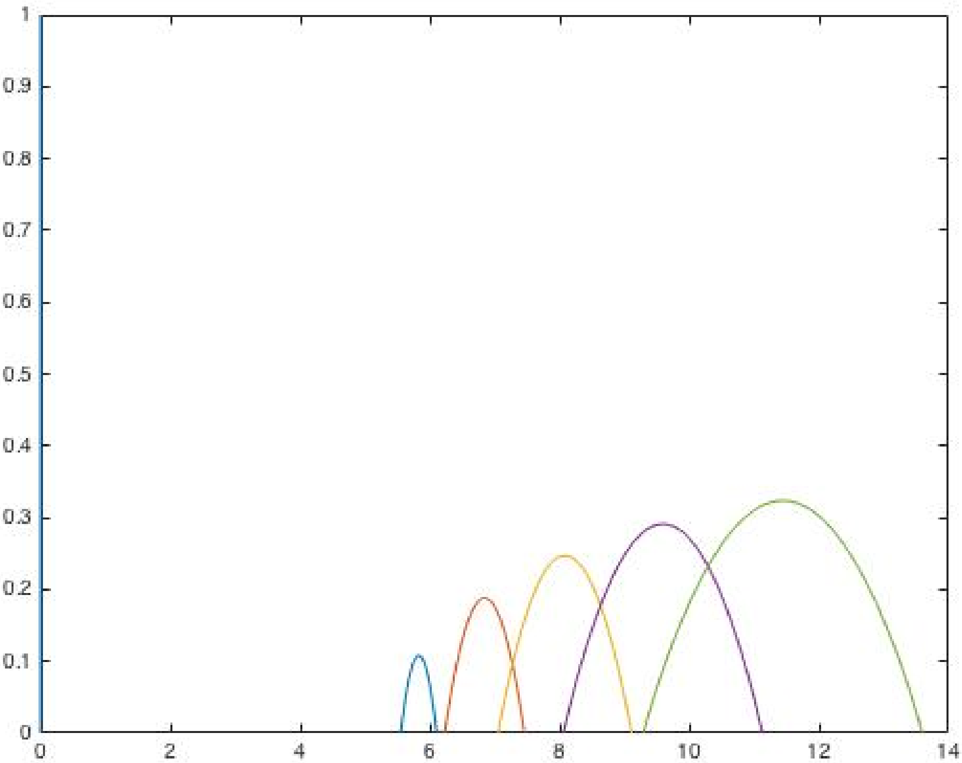
Obr. 3.1: Príklad zobrazenia dosažiteľných množín s časovým posunom $t_{i+1} = t_i + 0.5$, s parametrami $x_0 = 3$, $a = -0.4$ a $b = 1.3$

záporných a pri niektorých kladných (musia byť blízko 0) $\tilde{\psi}(0)$ sa stavová premenná dokáže dostať na nulu.

3.1.3 Hraničné prípady

Odvodili sme vzťahy, ktoré platia pre väčšinu zadaných parametrov modelu, avšak pre určité kombinácie parametrov tieto vzťahy zlyhávajú. Pri integrovaní niektorých vzťahov nastáva možnosť, keď nakoniec výsledný vzťah obsahuje zlomky, ktorých menovateľ môže byť nulový, pretože model nám nezakazuje takéto kombinácie parametrov. Konkrétne takéto singulárne prípady nastanú ak zvolíme $a = 0$, $b = 0$ alebo $a + 2b = 0$. Vzťahy, ktoré platia pre tieto tri prípady, teda musíme odvodiť osobitne.

V prvom prípade, keď $a = 0$ rovnica pre stavovú premennú ostáva nezmenená (3.12), ale pre účelovú funkciu musíme odvodiť nový vzťah. Pôvodná funkcia pred integrovaním



Obr. 3.2: Príklad zobrazenia dosažiteľných množín s časovým posunom $t_{i+1} = t_i + 0.5$, s parametrami $x_0 = 3$, $a = 0.6$ a $b = -0.4$

vyzerá nasledovne

$$x^0(t, \tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{4}\int_0^t e^{-a\tau}(1 - \tilde{\psi}^2(0)e^{2(a+b)\tau})d\tau, \tag{3.29}$$

ak využijeme podmienku $a = 0$ dostaneme

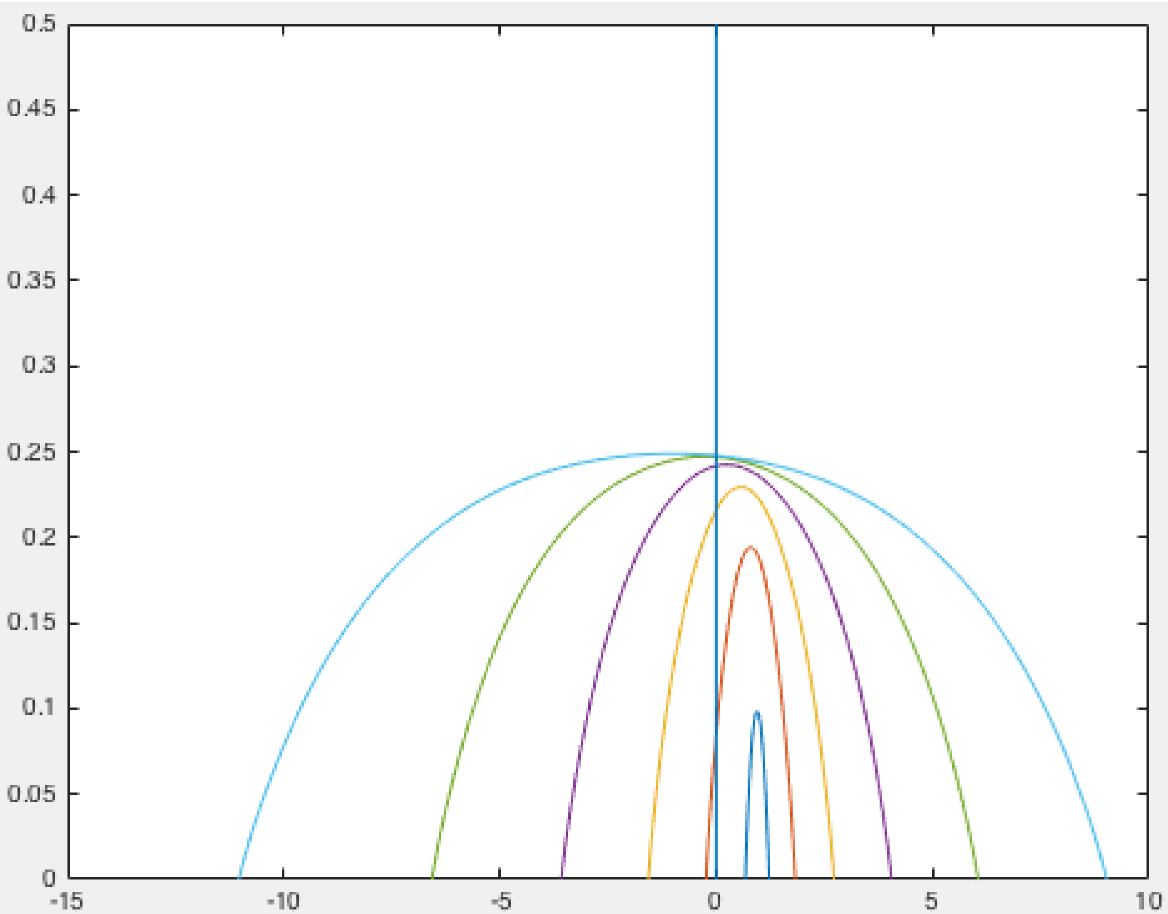
$$x^0(t, \tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{4}\int_0^t 1 - \tilde{\psi}^2(0)e^{2b\tau}d\tau = \frac{1}{4}\Big[\tau - \tilde{\psi}(0)^2\frac{e^{2b\tau}}{2b}\Big]_0^t, \tag{3.30}$$

po niekoľkých úpravách dostaneme výledok v tvare

$$x^0(t, \tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{4}\Big(t + \tilde{\psi}^2(0)\frac{1 - e^{2bt}}{2b}\Big). \tag{3.31}$$

V ďalšom prípade máme $b = 0$, rovnica účelovej funkcie pre tento prípad ostáva v tvare (3.23), avšak rovnicu pre stavovú premennú musíme v tomto prípade odvodiť. Diferenciálna rovnica pre stavovú premennú je

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, \tilde{\psi}(0)) = -bx(t, \tilde{\psi}(0)) - \frac{1}{2}(1 - \tilde{\psi}(0)e^{(a+b)t}), \tag{3.32}$$



Obr. 3.3: Príklad zobrazenia dosažiteľných množín s časovým posunom $t_{i+1} = t_i + 1$, s parametrami $x_0 = 1$, $a = 0.6$ a $b = -0.4$

pri podmienke $b = 0$ teda dostaneme

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, \tilde{\psi}(0)) = -\frac{1}{2}(1 - \tilde{\psi}(0)e^{at}), \tag{3.33}$$

obe strany rovnice integrujme určitým integrálom s hranicami 0 a t

$$\int_0^t \frac{\partial x}{\partial t}(\tau, \tilde{\psi}(0))d\tau = -\frac{1}{2}\int_0^t (1 - \tilde{\psi}(0)e^{a\tau})d\tau, \tag{3.34}$$

$$x(t, \tilde{\psi}(0)) - x(0, \tilde{\psi}(0)) = -\frac{1}{2}\Big(t - \tilde{\psi}(0)\frac{e^{at}}{a} - 0 + \tilde{\psi}(0)\frac{1}{a}\Big), \tag{3.35}$$

výsledný vzťah pre $x(t, \tilde{\psi}(0))$ potom bude

$$x(t, \tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)\frac{e^{(a)t} - 1}{a} - \frac{1}{2}t + x_0. \tag{3.36}$$

Posledný špeciálny prípad je $a + 2b = 0$, pre tento prípad musíme znovu odvodiť oba vzťahy pre stavovú premennú aj účelovú funkciu. Najprv si odvodíme vzťah pre stavovú premennú, prvé úpravy, ktoré sme urobili pri odvodzovaní pôvodného vzťahu sú prípustné aj pre tento prípad. Začnime teda až od bodu, kde sme museli obe strany rovnice integrovať (3.9)

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t)e^{bt} + bx(t,\tilde{\psi}(0))e^{bt} = -\frac{1}{2}e^{bt} + \frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)e^{(a+2b)t}, \tag{3.37}$$

v tomto prípade platí

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t,\tilde{\psi}(0))e^{bt} + bx(t,\tilde{\psi}(0))e^{bt} = -\frac{1}{2}e^{bt} + \frac{1}{2}\tilde{\psi}(0), \tag{3.38}$$

teraz už môžeme obe strany integravať

$$\int_0^t \frac{\partial x}{\partial t}(\tau,\tilde{\psi}(0))e^{b\tau} + bx(\tau,\tilde{\psi}(0))e^{b\tau}d\tau = -\frac{1}{2}\int_0^t e^{b\tau} - \tilde{\psi}(0)d\tau, \tag{3.39}$$

$$\Big[x(\tau,\tilde{\psi}(0))e^{b\tau}\Big]_0^t = -\frac{1}{2}\Big[\frac{e^{b\tau}}{b} - \tilde{\psi}(0)\tau\Big]_0^t, \tag{3.40}$$

$$x(t,\tilde{\psi}(0))e^{bt} - x(0,\tilde{\psi}(0)) = -\frac{1}{2}\Big(\frac{1-e^{bt}}{b} - \tilde{\psi}(0)t\Big), \tag{3.41}$$

k obom stranám rovnice pripočítame x_0 a potom celú rovnicu prenásobíme e^{-bt} a dostaneme nasledovný výsledok

$$x(t,\tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{2}\Big(\frac{e^{-bt}-1}{b}\Big) + \frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)te^{-bt} + x_0e^{-bt}. \tag{3.42}$$

Pre účelovú funkciu platí vzťah

$$x^0(t,\tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{4}\int_0^t e^{-a\tau}(1-\tilde{\psi}^2(0)e^{2(a+b)\tau})d\tau = \frac{1}{4}\int_0^t e^{-a\tau} - \tilde{\psi}^2(0)e^{(a+2b)\tau}d\tau, \tag{3.43}$$

po dosadení podmienky $a + 2b = 0$ dostaneme

$$x^0(t,\tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{4}\int_0^t e^{-a\tau} - \tilde{\psi}^2(0)d\tau, \tag{3.44}$$

$$x^0(t,\tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{4}\Big[\frac{e^{-a\tau}}{-a} - \tilde{\psi}^2(0)\tau\Big]_0^t, \tag{3.45}$$

a nakoniec dostaneme vzťah pre účelovú funkciu

$$x^0(t,\tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{4}\frac{e^{-at}-1}{-a} - \frac{1}{4}\tilde{\psi}^2(0)t. \tag{3.46}$$

Kapitola 4

Završenie optimalizácie

V tejto časti práce završime predošlé výsledky a pomocou vzťahov pre stavovú premennú x a hodnoty účelovej funkcie x^0 nájdeme optimálne riešenie. V predošlej kapitole sme odvodili potrebné vzťahy a našou úlohou je nájsť maximum účelovej funkcie za podmienky nulovej stavovej premennej.

4.1 Úloha na viazaný extrém

Naša úloha sa dá riešiť aj ako optimalizačná úloha, kde maximalizujeme účelovú funkciu za podmienky nulovej hodnoty stavovej premennej v koncovom čase T. A v súlade s lemami (2.2.1) a (2.2.2) hľadáme kladné $\tilde{\psi}(0)$, kde $\tilde{\psi}(T) \leq 1$, potom úlohu môžeme formulovať ako

$$x^0(T, \tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{4}\frac{e^{-aT} - 1}{-a} - \frac{1}{4}\tilde{\psi}^2(0)\frac{e^{(a+2b)T} - 1}{a + 2b} \to max, \tag{4.1}$$

pri podmienke

$$x(T, \tilde{\psi}(0)) = 0, \tag{4.2}$$

táto úloha by sa dala riešiť pomocou parciálnych derivácii Lagrangeovej funkcie, ale my uprednostníme druhý spôsob, pri ktorom si vyjadríme z podmienky (4.2) premennú $\tilde{\psi}(0)$ ako funkciu času do vyčerpania zásob. Čím úlohu zredukujeme na úlohu hľadania extrému funkcie jednej premennej. Z podmienky (4.2) dostaneme

$$x(T, \tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{2}\Big(\frac{e^{-bT} - 1}{b}\Big) + \frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)\Big(\frac{e^{(a+b)T} - e^{-bT}}{a + 2b}\Big) + x_0 e^{-bT} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)\Big(\frac{e^{(a+b)T}-e^{-bT}}{a+2b}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{e^{-bT}-1}{-b}\Big) - x_0 e^{-bT},$$

$$\tilde{\psi}(0) = \varphi(T) = \frac{(a+2b)(e^{-bT}-1)+2(a+2b)bx_0e^{-bT}}{-b(e^{(a+b)T}-e^{-bT})}. \tag{4.3}$$

Teda s použitím (4.3) sa úloha (4.1)-(4.2) zmení na

$$x^0(T,\varphi(T)) \to max. \tag{4.4}$$

Účelovú funkciu teraz derivujeme podľa koncového času

$$\frac{\partial x^0}{\partial T}(T,\varphi(T)) = \frac{\partial x^0}{\partial T}(T,\tilde{\psi}(0)) + \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{\psi}(0)}(T,\tilde{\psi}(0))\frac{\partial \varphi}{\partial T}(T), \tag{4.5}$$

kde pre deriváciu $\frac{\partial \varphi}{\partial T}(T)$ podľa vety o implicitnej funkcii platí

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T}(T) = -\frac{\partial x(T,\tilde{\psi}(0))}{\partial T}\Big/\frac{\partial x(T,\tilde{\psi}(0))}{\partial \tilde{\psi}(0)}, \tag{4.6}$$

potom po dosadení do (4.5) dostaneme

$$\frac{\partial x^0}{\partial T}(T,\varphi(T)) = \frac{\partial x^0}{\partial T} - \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{\psi}(0)}\frac{\partial x}{\partial T}\Big/\frac{\partial x}{\partial \tilde{\psi}(0)}. \tag{4.7}$$

V bode, kde sa nachádza extrém alebo infexný bod funkcie musí byť derivácia rovná 0, položme teda pravú stranu rovnice (4.7) rovnú nule

$$\frac{\partial x^0}{\partial T} - \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{\psi}(0)}\frac{\partial x}{\partial T}\Big/\frac{\partial x}{\partial \tilde{\psi}(0)} = 0, \tag{4.8}$$

Osobitne si vyjadrime aj derivácie zo vzťahu (4.8). Vychádzame zo vzťahov (3.12) a (3.23), potom ich derivovaním dostaneme:

$$\frac{\partial x^0}{\partial T}(T,\tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{4}e^{-aT}\Big(1-\tilde{\psi}^2(T)\Big), \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{\psi}(0)}(T,\tilde{\psi}(0)) = -\frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)\frac{e^{(a+2b)T}-1}{a+2b}, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial x}{\partial T}(T,\tilde{\psi}(0)) = -bx(T,\tilde{\psi}(0)) - \frac{1}{2}(1-\tilde{\psi}(T)),$$

ak využijeme aj podmienku $x(T,\tilde{\psi}(0)) = 0$ dostaneme

$$\frac{\partial x}{\partial T}(T,\tilde{\psi}(0)) = -\frac{1}{2}(1-\tilde{\psi}(T)), \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tilde{\psi}(0)}(T,\tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{2}\frac{e^{(a+b)T}-e^{-bT}}{a+2b}. \tag{4.12}$$

Vyjadrené derivácie teraz dosadíme do rovnice (4.8) a dostaneme:

$$\frac{\partial x^0}{\partial T} - \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{\psi}(0)} \frac{\partial x}{\partial T} \Big/ \frac{\partial x}{\partial \tilde{\psi}(0)} = 0 \tag{4.13}$$

$$\frac{1}{4} e^{-aT}\Big(1-\tilde{\psi}^2(T)\Big) - \Big(-\frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)\frac{e^{(a+2b)T}-1}{a+2b}\Big)\Big(-\frac{1}{2}(1-\tilde{\psi}(T))\Big)\Big/\Big(\frac{1}{2}\frac{e^{(a+b)T}-e^{-bT}}{a+2b}\Big) = 0, \tag{4.14}$$

menovateľ zlomku môžeme vykrátiť s prvou zátvorkou a v menovateli nám ostane iba e^{-bT}, potom dostaneme

$$\frac{1}{4} e^{-aT}\Big(1-\tilde{\psi}^2(T)\Big) - \frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)e^{bT}\Big(1-\tilde{\psi}(T)\Big) = 0, \tag{4.15}$$

$$\frac{1}{4} e^{-aT}\Big(1-\tilde{\psi}^2(T)\Big) - \frac{1}{2}\tilde{\psi}(T)e^{-aT}\Big(1-\tilde{\psi}(T)\Big) = 0, \tag{4.16}$$

$$\frac{1}{4} e^{-aT}\Big(1-\tilde{\psi}^2(T) - 2\tilde{\psi}(T) + \tilde{\psi}^2(T)\Big) = 0, \tag{4.17}$$

$$\frac{1}{4} e^{-aT}\Big(1-\tilde{\psi}(T)\Big)^2 = 0. \tag{4.18}$$

dostávame teda riešenie, kde máme dvojnásobný koreň $\tilde{\psi}(\hat{T}) = 1$. Avšak ešte musíme určiť či sa v našom prípade jedná o maximum, preto budeme analyzovať rovnicu (4.7) v koncových časoch menších ako čas $\hat{T}$ spĺňajúci podmienku $\tilde{\psi}(\hat{T}) = 1$. Poznamenajme, že čas, ktorý spĺňa túto rovnicu je najväčší možný čas, za ktorý sa stavová premenná dokáže dostať na nulovú hodnotu. Ešte raz si napíšme výraz (4.7) v spojení s výsledkom (4.18)

$$\frac{\partial x^0}{\partial T}(T,\varphi(T)) = \frac{\partial x^0}{\partial T} - \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{\psi}(0)} \frac{\partial x}{\partial T} \Big/ \frac{\partial x}{\partial \tilde{\psi}(0)} = \frac{1}{4} e^{-aT}\Big(1-\tilde{\psi}(T)\Big)^2. \tag{4.19}$$

Prvá časť výrazu je vždy kladná a druhá časť je kvadratická, preto je derivácia účelovej funkcie vždy kladná. Teda účelová hodnota účelovej funkcie rastie s rastúcim T, pre koncové časy spĺňajúce podmienku $\tilde{\psi}(T) \leq 1$ a čas splňajúci podmienku z výsledku $\tilde{\psi}(\hat{T}) = 1$, je najväčší prípustný čas. Poznamenajme ešte, že v prípade, ak by sme mali povolené $\tilde{\psi}(t) > 1$ by bod $\tilde{\psi}(T) = 1$ bol iba inflexným bodom a účelová funkcia by bola maximálna pre T idúce do nekonečna.

Použitím podmienky $\tilde{\psi}(\hat{T}) = 1$ a rovnice pre adjungovanú premennú (3.4), dostaneme podmienku pre $\tilde{\psi}(0)$ pri optimálnom koncovom čase

$$\hat{\tilde{\psi}}(0) = e^{-(a+b)\hat{T}}, \tag{4.20}$$

po dosadení (4.20) do vzťahov pre stavovú premennú a účelovú funkciu dostaneme implicitné funkcie pre optimálny koncový čas $\hat{T}$

$$x(\hat{T}, e^{-(a+b)\hat{T}}) = 0 = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-(a+b)\hat{T}}\frac{e^{(a)\hat{T}}-1}{a} - \frac{1}{2}\hat{T} + x_0 & \text{, ak } b = 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-b\hat{T}}-1}{b}\right) + \frac{1}{2}e^{-(a+b)\hat{T}}te^{-b\hat{T}} + x_0e^{-b\hat{T}} & \text{, ak } a + 2b = 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-b\hat{T}}-1}{b}\right) + \frac{1}{2}e^{-(a+b)\hat{T}}\left(\frac{e^{(a+b)\hat{T}}-e^{-b\hat{T}}}{a+2b}\right) + x_0e^{-b\hat{T}} & \text{, inak} \end{cases} \tag{4.21}$$

hodnota účelovej funkcie v optime je

$$\hat{x}^0(\hat{T}, e^{-(a+b)\hat{T}}) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\hat{T} + e^{-2(a+b)\hat{T}}\frac{1-e^{2b\hat{T}}}{2b}\right) & \text{, ak } a = 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{e^{-a\hat{T}}-1}{-a} - e^{-2(a+b)\hat{T}}\hat{T}\right) & \text{, ak } a + 2b = 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{e^{-a\hat{T}}-1}{-a} - e^{-2(a+b)\hat{T}}\frac{e^{(a+2b)\hat{T}}-1}{a+2b}\right) & \text{, inak} \end{cases} \tag{4.22}$$

optimálne riadenie spĺňa rovnicu

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{(a+b)(t-\hat{T})}) \qquad t \in [0, \hat{T}], \tag{4.23}$$

a pre optimálnu spätnú väzbu v čase $t \in [0, \hat{T}]$ platí vzťah

$$x(t, e^{-(a+b)\hat{T}}) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-(a+b)\hat{T}}\frac{e^{(a)t}-1}{a} - \frac{1}{2}t + x_0 & \text{, ak } b = 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-bt}-1}{b}\right) + \frac{1}{2}e^{-(a+b)\hat{T}}te^{-bt} + x_0e^{-bt} & \text{, ak } a + 2b = 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-bt}-1}{b}\right) + \frac{1}{2}e^{-(a+b)\hat{T}}\left(\frac{e^{(a+b)t}-e^{-bt}}{a+2b}\right) + x_0e^{-bt} & \text{, inak} \end{cases} \tag{4.24}$$

V hraničných prípadoch sú vzťahy pre premenné x^0 a x trochu iné ako vo všeobecnom prípade, pre ktorý sme ukázali, že v prípade, ak existuje taký konečný čas T, ktorý spĺňa rovnicu $\tilde{\psi}(T) = 1$, tak je optimálny. Avšak aj v týchto prípadoch sa dá jednoducho ukázať, že podobným spôsobom ako vo všeobecnom prípade vieme odvodiť rovnaký výsledok (4.19).

Poznámka: Na záver práce sme si uvedomili, že sa vďaka výsledkom z Kapitoly 2 sa úloha (2.13)-(2.14) dá tranformovať na štandardnú úlohu optimálneho riadenia s voľným časom a pevným koncom. Vďaka leme (2.2.2) totiž môžeme do podmienok úlohy priamo pridať podmienku $x(T) = 0$ a terminálnu podmienku pre koncový čas T môžeme vynechať, teda koncový čas bude voľný. Táto podmienka spolu s úlohou (2.13)-(2.14) a s predpokladmi modelu $x(0) = x_0 > 0$ a $u(t) \in [0, 1] \forall t \in [0, T]$ predstavujú štadardnú úlohu s voľným časom a pevným koncom.

Táto formulácia zjednoduší odvodenie nutnej podmienky (4.19), ktorá je bezprostredným dôsledkom podmienky stacionarity

$$\mathcal{H}(\hat{x}(\hat{T}), \hat{u}(\hat{T}), \tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}(\hat{T})) = \hat{u}(\hat{T})(1 - \hat{u}(\hat{T})) + \tilde{\psi}(\hat{T})(-\hat{x}(\hat{T}) - \hat{u}(\hat{T})) = 0. \qquad (4.25)$$

Z toho vyplýva, že riešenie adjungovanej rovnice, ktoré dá optimálne riadenie musí spĺňať (4.19). Zostáva však ešte dokázať, že toto riešenie je naozaj optimálne, ako sme to v tejto kapitole urobili.

4.2 Zhrnutie

V predchádzajúcich kapitolách sme odvodili všetky potrebné vzťahy, ktoré sme potom v tejto kapitole použili na vyriešenie našej úlohy. V tejto časti práce si zhrnieme všetky dôležité vzťahy a výsledky, ku ktorým sme nakoniec dospeli. Začnime zadaním deterministickej úlohy, ktorú sme odvodili z pôvodného modelu v Kapitole 1.

$$\max \int_0^{T(x=0)} e^{(2\lambda-\rho)t} u(t)(1-u(t))dt$$

$$\dot{x}(t) = (r-\lambda)x(t) - u(t), \qquad u \in [0,1]$$

v ktorej predpokladáme, že parametre úlohy spĺňajú vzťahy: $\rho > 0$ a $\lambda + r < \rho$. Substitúciami $\rho - 2\lambda = a$ a $\lambda - r = b$ sme zredukovali počet parametrov čím sme dostali úlohu optimálneho riadenia

$$\max \int_0^{T(x=0)} e^{-at} u(t)(1-u(t))dt,$$

$$\dot{x}(t) = -bx(t) - u,$$

$$x(0) = x_0 > 0,$$

$$u \in [0,1],$$

a predpokladáme, že $a + b > 0$. Pomocou metód optimálneho riadenia sme potom odvodili vzťah pre riadiacu premennú, ktorý spĺňa princíp maxima (2.19)

$$\hat{u}(t) = w(\tilde{\psi}(t)) = \begin{cases} 0 & \text{, ak } \tilde{\psi}(t) < -1 \\ \frac{1}{2}(1-\tilde{\psi}(t)) & \text{, ak } \tilde{\psi}(t) \in [-1,1] \\ 1 & \text{, ak } \tilde{\psi}(t) > 1 \end{cases}$$

potom v Kapitole 3, sme odvodili vzťahy pre stavovú premennú a hodnotu účelovej funkcie, ktorú sme si označili ako $x^0(t)$. Stavová premenná sa riadi nasledovnými vzťahmi:

$$x(t,\tilde{\psi}(0)) = \begin{cases} \frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)\frac{e^{(a)t}-1}{a} - \frac{1}{2}t + x_0 & \text{, ak } b = 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-bt}-1}{b}\right) + \frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)te^{-bt} + x_0e^{-bt} & \text{, ak } a + 2b = 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-bt}-1}{b}\right) + \frac{1}{2}\tilde{\psi}(0)\left(\frac{e^{(a+b)t}-e^{-bt}}{a+2b}\right) + x_0e^{-bt} & \text{, inak} \end{cases}$$

a pre účelovú funkciu sme odvodili vzťahy:

$$x^0(t,\tilde{\psi}(0)) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(t + \tilde{\psi}^2(0)\frac{1-e^{2bt}}{2b}\right) & \text{, ak } a = 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{e^{-at}-1}{-a} - \tilde{\psi}^2(0)t\right) & \text{, ak } a + 2b = 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{e^{-at}-1}{-a} - \tilde{\psi}^2(0)\frac{e^{(a+2b)t}-1}{a+2b}\right) & \text{, inak} \end{cases} \tag{4.26}$$

Nakoniec sme pre tieto vzťahy hľadali optimum. Výsledok sme odvodili iba pre vzťahy vo všeobecnom prípade parametrov úlohy, kde sme si sformulovali maximalizačný problém s viazaným extrémom. Ale rovnaký výsledok dostaneme obdobným postupom aj v singulárnych prípadoch ($a = 0$, $b = 0$ a $a + 2b = 0$). Teda máme úlohu:

$$x^0(T,\tilde{\psi}(0)) = \frac{1}{4}\frac{e^{-aT}-1}{-a} - \frac{1}{4}\tilde{\psi}^2(0)\frac{e^{(a+2b)T}-1}{a+2b} \to max, \tag{4.27}$$

pri podmienke

$$x(T,\tilde{\psi}(0)) = 0, \tag{4.28}$$

Táto úloha má iba jedno riešenie a to koncový čas T, ktorý spĺňa podmienku $\tilde{\psi}(T) = 1$. Čiže riešenie, ktoré sme dostali znamená, že ako počiatočné $\tilde{\psi}(0)$ zvolíme najväčšie možné, pri ktorom sa ešte stavová premenná dostane na nulovú hodnotu.

Ešte si pripomeňme výsledky analýzy fázových portrétov z Kapitoly 2. V prípade, že $b > 0$, teda v pôvodných parametroch $\lambda > r$, máme fázový portrét s pevným bodom typu sedlo. V tomto prípade nezáleží na počiatočnej hodnote stavu zásob aktíva (x_0), vždy bude optimálny práve koncový čas splňajúci $\tilde{\psi}(T) = 1$. Toto riešenie však neplatí vždy, ak máme $b < 0$ ($\lambda < r$) nastáva prípad pevného bodu typu nestabilný uzol. Tu už je hodnota x_0 kľučová, ak je počiatočné $x_0 < -\frac{1}{2(\lambda-r)}$ optimálny bude čas ako v predošlom prípade, teda T spĺňajúce $\tilde{\psi}(T) = 1$. Ale ak máme $x_0 > -\frac{1}{2(\lambda-r)}$, žiaden konečný čas nespĺňa podmienku $\tilde{\psi}(T) = 1$. Optimálne je pre tento prípad zvoliť $\tilde{\psi}(0) = 0$, teda $u(t) = \frac{1}{2}$ pre všetky $t \in [0, T]$. To zodpovedá rýchlosti predávania aktíva, pri ktorej sa najrýchlejšie akumuluje úžitok, a v tomto prípade ani pri takto rýchlom predaji nikdy nevyčerpáme zásoby aktíva.

Ak je čas spĺňajúci podmienku $\tilde{\psi}(T) = 1$ konečný, platia nasledovné vzťahy. Čas $\hat{T}$ je určený implicitnými rovnicami pre $x(\hat{T}, e^{-(\rho-r-\lambda)\hat{T}}) = 0$

$$0 = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-(\rho-r-\lambda)\hat{T}}\frac{e^{(\rho-2\lambda)\hat{T}}-1}{\rho-2\lambda} - \frac{1}{2}\hat{T} + x_0 & \text{, ak } \lambda - r = 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(r-\lambda)\hat{T}}-1}{\lambda-r}\right) + \frac{1}{2}e^{-(\rho-r-\lambda)\hat{T}}te^{(r-\lambda)\hat{T}} + x_0e^{(r-\lambda)\hat{T}} & \text{, ak } \rho - 2r = 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(r-\lambda)\hat{T}}-1}{\lambda-r}\right) + \frac{1}{2}e^{-(\rho-r-\lambda)\hat{T}}\left(\frac{e^{(\rho-r-\lambda)\hat{T}}-e^{(r-\lambda)\hat{T}}}{\rho-2r}\right) + x_0e^{(r-\lambda)\hat{T}} & \text{, inak} \end{cases} \tag{4.29}$$

a hodnota účelovej funkcie v optime

$$\hat{x}^0(\hat{T}, e^{-(\rho-r-\lambda)\hat{T}}) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\hat{T} + e^{-2(\rho-r-\lambda)\hat{T}}\frac{1-e^{2(\lambda-r)\hat{T}}}{2(\lambda-r)}\right) & \text{, ak } \rho - 2\lambda = 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{e^{(2\lambda-\rho)\hat{T}}-1}{2\lambda-\rho} - e^{-2(\rho-r-\lambda)\hat{T}}\hat{T}\right) & \text{, ak } \rho - 2r = 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{e^{(2\lambda-\rho)\hat{T}}-1}{2\lambda-\rho} - e^{-2(\rho-r-\lambda)\hat{T}}\frac{e^{(\rho-2r)\hat{T}}-1}{\rho-2r}\right) & \text{, inak} \end{cases} \tag{4.30}$$

optimálne riadenie bude

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{(a+b)(t-\hat{T})}) \qquad t \in [0, \hat{T}]. \tag{4.31}$$

V prípade $b < 0, x_0 \geq -\frac{1}{2b}$, kedy neexistuje konečne T spĺňajúce podmienku $\tilde{\psi}(T) = 1$, bude optimálne zvoliť riadenie $\hat{u}(t) = \frac{1}{2}$ pre všetky $t \in [0, \infty)$. Hodnota stavovej premennej v tomto prípade bude spĺňať vzťah

$$\hat{x}(t) = \frac{1 - e^{(r-\lambda)t}}{2(r-\lambda)} + x_0e^{(r-\lambda)t} \qquad \forall t \in [0, \infty). \tag{4.32}$$

a maximum účelovej funkcie bude $1/a$.

Pretože premenné $x(t)$ a $u(t)$ sú iba substitúcie, poďme si ukázať aké sú premenné, ktoré vystupujú v pôvodnom modeli. Pretože $x(t) = \eta\frac{Z(t)}{S(t)}$ dostaneme

$$\hat{Z}(t) = \frac{S(t)}{\eta}\hat{x}(t) = \frac{S(0)e^{\lambda t}}{\eta}\hat{x}(t), \tag{4.33}$$

premenná $S(t)$ je deterministická cena aktíva, preto ak poznáme počiatočnú cenu aktíva vieme ju určiť pre všetky t a parameter modelu η je známa konštanta. Pre rýchlosť predaja aktíva platí

$$\hat{v}(t) = \frac{S(t)}{\eta}\hat{u}(t) = \frac{S(0)e^{\lambda t}}{\eta}\hat{u}(t), \tag{4.34}$$

teda rýchlosť predaja aktíva $v(t)$ okrem nami vypočítaného optimálneho riadenia závisí aj od ceny aktíva.

Záver

V tejto práci sme sa zaoberali problémom optimálneho rozpredávania aktíva. Túto úlohu sme analyzovali z pohľadu dominantného vlastníka daného aktíva, teda takého, ktorý veľmi veľkou ponukou dokáže krátkodobo ovplyvňovať vývoj ceny na trhu. Model, z ktorého sme vychádzali je odvodený v prácach [1], [2] a [3], kde úlohu analyzujú z hľadiska maximálne možnej dosiahnuteľnej užitočnosti investora. Daný problém v týchto prácach riešia pomocou rovnice dynamického programovania, ktorá vyplýva z modelu. V našej práci sme sa na rozdiel od týchto prác pozerali na problém z hľadiska optimálneho riadenia a skúmali sme úlohu z pohľadu koncového času, za ktorý sa dané aktívum vypredá. Model je síce inšpirovaný problematikou menových útokov, kde sa zaoberá úlohou investora, ktorý vlastní po útoku značne veľkú zásobu zahraničnej meny, ktorú potrebuje zhodnotit v domácej mene. Ale tento model sa dá použiť aj na situácie, pri ktorých dominantný investor zhodnocuje iné druhy aktív.

Túto úlohu by sme mohli riešiť ako štandardnú úlohu optimálneho riadenia s pevným koncom a voľným časom. My sme však namiesto štandardných metód optimálneho riadenia našu úlohu riešili pomocou analýzy fázových portrétov a dosažiteľných množín. Metódy použité v našej práci by mohli byť využiteľné, ak by z nejakého dôvodu nebolo vhodné použiť štandardný postup. V našej práci sme zistili, že aj použitím alternatívnych metód dospejeme k rovnakým výsledkom ako v prípade klasických metód. Koncový čas v optime je vždy konečný v prípade, že $r - \lambda > 0$ a tiež v prípade, keď platí $r - \lambda < 0$ spolu s $x_0 < \frac{1}{-2b}$. V týchto prípadoch spĺňa optimálny čas podmienku $\tilde{\psi}(\hat{T}) = 1$. Ak je $r - \lambda < 0$ a počiatočná hodnota stavovej premennej $x_0 > \frac{1}{-2b}$, potom je optimálne zvoliť riadiacu premennú $\hat{u}(t) = \frac{1}{2}$ pre všetky $t \in [0, \infty)$. V tomto prípade sa ani pri riadení, ktoré nám najrýchlejšie akumuluje účelovú funkciu, zásoba aktíva nikdy nevyčerpá.

Literatúra

[1] Brunovský, P., Černý, A., Winkler, M.: *A Singular Differential Equation Stemming from an Optimal Control Problem in Financial Economics*, Applied Mathematics & Optimization, Vol. 68, 2013, pp. 255-274

[2] Černý, A.: *Currency Crises: Introduction of Spot Speculators*, International Journal of Finance and Economics, Vol. 4, 1999, pp. 75-89

[3] Brunovský, P., Černý, A., Komadel. J.: *Optimal Trade Execution under Endogenous Pressure to Liquidate: Theory and Numerical Solutions*, 2017

[4] Halická, M., Jurča, P.: *Optimálne Riadenie II: Spojité Ůlohy s Aplikáciami do Ekonómie a Financií,učebné texty,*FMFI UK, Bratislava, 2015

[5] Brunovský, P.: *Diferenčné a diferenciálne rovnice*, učebné texty, dostupné na internete (16.4.2017): www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/brunovsky/ddrtext.pdf

[6] Lee, E. B., Markus L.: *Foundations of Optimal Control Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1967

[7] Evans, L. C.: *An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory Version 0.2*, Department of Mathematics University of California, Berkeley, 2013, dostupné na internete (16.4.2017): https://math.berkeley.edu/~evans/control.course.pdf