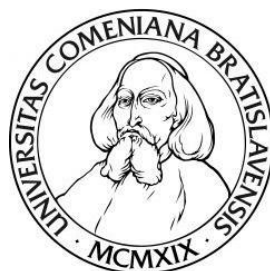


UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Konvergenčné modely úrokových mier
založené na Brownovom moste

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**Konvergenčné modely úrokových mier
založené na Brownovom moste**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika (1114)
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Jakub Porubčanský
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Konvergenčné modely úrokových mier založené na Brownovom moste.
Convergence models of interest rates based on Brownian bridge.

Cieľ: V okamihu prijatia eura musia byť úrokové miery v prístupujúcom štáte a eurozóne rovnaké. Spomedzi modelov, ktoré popisujú úrokové miery stochastickými diferenciálnymi rovnicami, majú túto vlastnosť modely založené na Brownovom moste. V diplomovej práci sa budú študovať modely tohto typu, pričom sa kalibrujú na reálne dáta.

Vedúci: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 21.01.2016

Dátum schválenia: 25.01.2016
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Podakovanie Touto cestou by som sa chcel podakovať svojej vedúcej doc. RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za trpezlivosť a ochotu pomôcť pri písaní tejto práce, za rady, pripomienky a poskytnuté materiály. Ďakujem aj za ochotu komunikovať jeden semester iba na diaľku, kvôli môjmu odcestovaniu.

Abstrakt v štátnom jazyku

PORUBČANSKÝ, Jakub: *Konvergenčné modely úrokových mier založené na Brownovom moste* [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2017, 50 s.

Táto práca sa zaoberá modelovaním úrokových mier v eurozóne a krajine, ktorá do eurozóny vstupuje. Short rate v eurozóne modelujeme Vašíčkovým modelom. Teoreticky by sa s časom blížiacim sa k vstupu do európskej únie mali úrokové miery približovať. Takúto situáciu popisuje model Brownového mostu, ktorým modelujeme rozdiel short rateu v domácej krajine a eurozóne. Jeho vlastnosťou je, že v čase vstupu do eurozóny je rozdiel úrokových mier nulový. Oba modely kalibrujeme metódou minimalizácie vzdialeností modelovaných a reálnych výnosových kriviek. Odvodíme podmienené pravdepodobnostné rozdelenia short rateov a ich rozdielu, na základe ktorých potom predikujeme budúce úrokové miery. Kalibračnú metódu a predikcie testujeme na simulovaných aj reálnych dátach.

Kľúčové slová: Brownov most, podmienené pravdepodobnostné rozdelenie, short rate model, úroková miera, Vašíčkov model

Abstract

PORUBČANSKÝ, JAKUB: Convergence models of interest rates based on Brownian bridge [Master's Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2017, 50 p.

This paper deals with modelling of interest rates in eurozone and a country joining the eurozone. We model the eurozone short rate with Vasicek model. Theoretically, as the moment of entering the eurozone is approaching, the interest rates should converge. We model this convergence with Brownian bridge model. It ensures that the spread of short rates is zero after the country has joined the eurozone. Both models are calibrated by minimizing the difference between real and modelled yield curves. Then we derive conditional probability distributions of short rates and their spread. Based on that we are able to predict future interest rates. Both the calibration procedure and predictions are tested on simulated as well as real data.

Keywords: Brownian bridge, conditional probability distribution, short rate model, interest rate, Vasicek model

Obsah

| | |
|---|-----------|
| Zoznam obrázkov | 8 |
| Zoznam tabuliek | 9 |
| Úvod | 10 |
| 1 Teória | 11 |
| 1.1 Základné pojmy | 11 |
| 1.2 Stochastické procesy | 11 |
| 1.3 Modely okamžitej úrokovej miery | 13 |
| 1.3.1 Odvodenie rovnice pre cenu dlhopisu v jednofaktorovom modeli | 13 |
| 1.3.2 Rovnica pre hustotu rozdelenia stochastického procesu | 15 |
| 2 Model | 16 |
| 2.1 Voľba short rate modelu | 17 |
| 2.2 Odvodenie cien dlhopisov | 17 |
| 2.3 Vlastnosti | 22 |
| 3 Kalibrácia | 25 |
| 3.1 Metóda minimalizácie vzdialeností modelovaných a reálnych výnosových kriviek | 25 |
| 3.2 Aplikácia na simulované dáta | 28 |
| 3.3 Aplikácia na reálne dáta | 30 |
| 4 Predikcie | 34 |
| 4.1 Podmienené rozdelenie short rate vo Vašíčkovom modeli | 34 |
| 4.2 Podmienené rozdelenie spreadu v modeli Brownovho mostu | 35 |
| 4.3 Podmienené rozdelenie short rate domácej krajiny | 37 |
| 4.4 Aplikácia na simulované dáta | 37 |
| 4.5 Aplikácia na reálne dáta | 39 |
| 5 Ďalšie výsledky | 41 |

| | |
|----------------------------|----|
| Záver | 47 |
| Zoznam použitej literatúry | 48 |

Zoznam obrázkov

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Štyri a štyridsať náhodne vygenerovaných Wienerových procesov | 12 |
| 2 | Štyri a štyridsať náhodne vygenerovaných Brownových mostov | 13 |
| 3 | Jednoročné medzibankové úrokové miery pobaltských krajín a eurozóny | 16 |
| 4 | Simulácia okamžitých úrokových mier | 22 |
| 5 | Simulované výnosové krivky | 23 |
| 6 | Simulované výnosy dlhopisov pre $T^* = 12$ | 24 |
| 7 | Fitované výnosové krivky (simulované dáta, eurozóna) | 29 |
| 8 | Fitované výnosové krivky (simulované dáta, domáca krajina) | 30 |
| 9 | Chybovosť nakalibrovaných výnosových kriviek EURIBORu, vľavo $w_{ij}^e = \tau_j^2$, vpravo $w_{ij}^e = 1$ | 31 |
| 10 | Chybovosť nakalibrovaných výnosových kriviek RIGIBORu, vľavo $w_{ij} = \tau_j^2$, vpravo $w_{ij} = 1$ | 31 |
| 11 | Vývoj modelovaných a reálnych úrokových mier EURIBORu a RIGIBORu pre danú splatnosť | 32 |
| 12 | Fitované výnosy EURIBORu (modrá) a RIGIBORu (červená) | 33 |
| 13 | Predikcie a 95%-né konfidenčné intervaly simulovaných short rateov a spreadu | 38 |
| 14 | Predikcie a 95%-né konfidenčné intervaly 6 mesačných simulovaných úrokových mier | 38 |
| 15 | Chybovosť nakalibrovaných výnosových kriviek, hore - EURIBOR, dole - TALIBOR | 41 |
| 16 | Vývoj modelovaných a reálnych úrokových mier EURIBORu a TALIBORu pre danú splatnosť | 42 |
| 17 | Fitované výnosy EURIBORu (modrá) a TALIBORu (červená) | 42 |
| 18 | Chybovosť nakalibrovaných výnosových kriviek, hore - EURIBOR, dole - VILIBOR | 43 |
| 19 | Vývoj modelovaných a reálnych úrokových mier EURIBORu a VILIBORu pre danú splatnosť | 44 |
| 20 | Fitované výnosy EURIBORu (modrá) a VILIBORu (červená) | 44 |

Zoznam tabuliek

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Vstupné parametre simulácie | 28 |
| 2 | Dáta použité pri kalibrácii | 30 |
| 3 | Nakalibrované parametre (EURIBOR-RIGIBOR) | 32 |
| 4 | Výsledky predikcií (EURIBOR-RIGIBOR) | 39 |
| 5 | Počet dní, v ktorých bol model v predikciách úspešnejší (z celkového počtu 99 dní, EURIBOR-RIGIBOR) | 40 |
| 6 | Nakalibrované parametre (EURIBOR-TALIBOR) | 41 |
| 7 | Nakalibrované parametre (EURIBOR-VILIBOR) | 43 |
| 8 | Výsledky predikcií (EURIBOR-TALIBOR) | 45 |
| 9 | Počet dní, v ktorých bol model v predikciách úspešnejší (z celkového počtu 102 dní, EURIBOR-TALIBOR) | 45 |
| 10 | Výsledky predikcií (EURIBOR-VILIBOR) | 46 |
| 11 | Počet dní, v ktorých bol model v predikciách úspešnejší (z celkového počtu 102 dní, EURIBOR-VILIBOR) | 46 |

Úvod

Pri vstupe krajiny do Európskej menovej únie je výmenný kurz pôvodnej meny v danej krajine a meny euro zafixovaný. Teoreticky by malo platiť, že bezrizikové úrokové miery vo vstupujúcej krajine a eurozóne k sebe konvergujú a po vstupe do eurozóny sa rovnajú, inak vzniká možnosť arbitráže. V skutočnosti však pozorujeme mierne rozdiely v bezrizikových úrokových mierach aj napriek tomu, že krajina je súčasťou eurozóny, a to z dôvodu odlišnej rizikovosti krajín. Každopádne tieto rozdiely nie sú veľké a konvergencia úrokových mier býva viditeľná.

Má teda zmysel takúto situáciu podchytiť špeciálnym matematickým modelom, ktorý by zachytával konvergenčný charakter úrokových mier. Napríklad v článku [7] autori používajú dvojfaktorový konvergenčný short rate model. Jednou stochastickou rovnicou sa tu modeluje samostatne úroková miera v eurozóne, konkrétne Vašíčkovým modelom. Druhá rovnica potom modeluje úrokovú mieru vo vstupujúcej krajine, pričom je navrhnutá tak, aby bola zabezpečená konvergencia. V našej práci použijeme model navrhnutý v článku [1]. Model je tiež dvojfaktorový, no od predošlého modelu sa líši tým, že druhá stochastická rovnica nemodeluje úrokovú mieru vo vstupujúcej krajine, ale rozdiel úrokových mier, pričom na zachytenie konvergenzie využíva princíp Brownového mostu.

Práca je rozdelená na päť kapitol. V prvej kapitole zadefinujeme základné pojmy, ktoré budú čitateľa sprevádzať počas celej práce. V druhej kapitole sa už venujeme samotnému modelu. Špecifikujeme stochastické rovnice modelu a odvodíme modelom implikované ceny dlhopisov. Ďalej analyticky odvodíme a numericky potvrdíme niektoré jeho dôležité vlastnosti. V tretej kapitole odvodíme kalibráciu modelu, ktorú následne otestujeme najprv na simulovaných dátach a potom na reálnych dátach Lotyšska. Štvrtá kapitola je zameraná na predikcie. Odvodíme podmienené rozdelenia okamžitých úrokových mier modelu, na základe ktorých potom vieme predpovedať budúce úrokové miery aj s intervalmi spoľahlivosti. Aj predikcie otestujeme na simulovaných dátach a reálnych dátach Lotyšska. V piatej kapitole sú zahrnuté výsledky kalibrácie a predikcií pre ďalšie dve krajiny - Estónsko a Litvu.

1 Teória

V nasledujúcej kapitole zadefinujeme základné pojmy, ktoré budeme často používať v práci, a ktoré sú nevyhnutné v teórii modelovania úrokových mier. Ďalej popíšeme vybrané nástroje, ktoré neskôr využijeme pri budovaní modelu.

1.1 Základné pojmy

Pojmy uvedené v tejto podkapitole preberáme z knihy [4]. Označme $R(t, T)$ úrokovú mieru platnú v období od t do T . Potom cena bezkupónového dlhopisu vydaného v čase t so splatnosťou v čase T sa pri spojitom úročení dá vypočítať ako

$$P = F e^{R(t, T)(T-t)},$$

kde F je jeho nominálna hodnota, teda hodnota, ktorú dlhopis vypláca v čase T . Ak $F = 1$, dlhopis nazývame diskontný a jeho cena je

$$P(t, T) = e^{R(t, T)(T-t)}.$$

Naopak, z ceny diskontného dlhopisu vieme vypočítať úrokovú mieru

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t}. \quad (1.1)$$

Ak teda v danom čase poznáme ceny dlhopisov s rôznymi splatnosťami, poznáme aj úrokové miery na tieto obdobia. Tieto úrokové miery potom tvoria takzvanú časovú štruktúru úrokových mier nazývanú aj výnosová krivka, ktorá vyjadruje závislosť úrokovej miery od maturity dlhopisu.

My sa budeme v tejto práci zaoberať modelovaním okamžitej úrokovej miery (short rate), označíme r_t . Môžeme si ju predstaviť ako úrokovú mieru na nekonečne krátky čas, teda

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T).$$

Od nej sa potom odvíja celá časová štruktúra úrokových mier, a teda aj ceny dlhopisov.

1.2 Stochastické procesy

Short rate má vo všeobecnosti stochastický charakter, preto sa na jej modelovanie používajú najmä stochastické diferenciálne rovnice (SDR). Na porozumenie takýchto

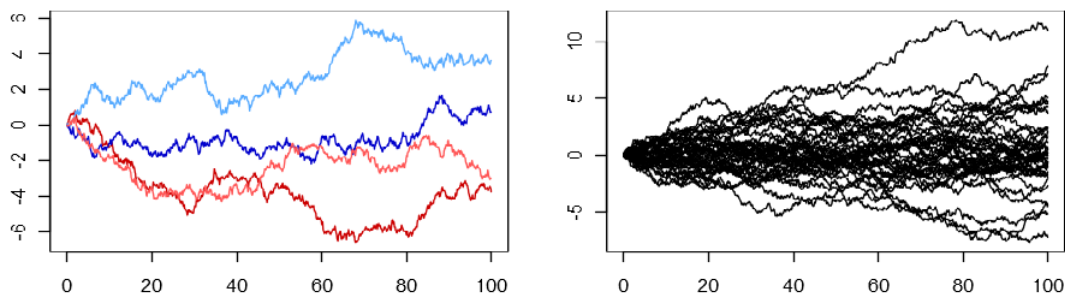
rovníc najprv zdefinujeme pojem stochastický proces aj s konkrétnymi príkladmi. Uvedené definície uvádzame tak, ako ich je možné nájsť v knihe [9].

Definícia 1. *Stochastický proces je t -parametrický systém náhodných premenných $\{X(t), t \in I\}$, kde I je interval alebo diskrétna množina indexov.*

Definícia 2. *Brownov pohyb $\{X(t), t \geq 0\}$ je t -parametrický systém náhodných veličín, pričom*

- i) všetky prírastky $X(t + \Delta) - X(t)$ majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu\Delta$ a disperziou (alebo aj varianciou) $\sigma^2\Delta$,*
- ii) pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$ sú prírastky $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa bodu i),*
- iii) $X(0) = 0$.*

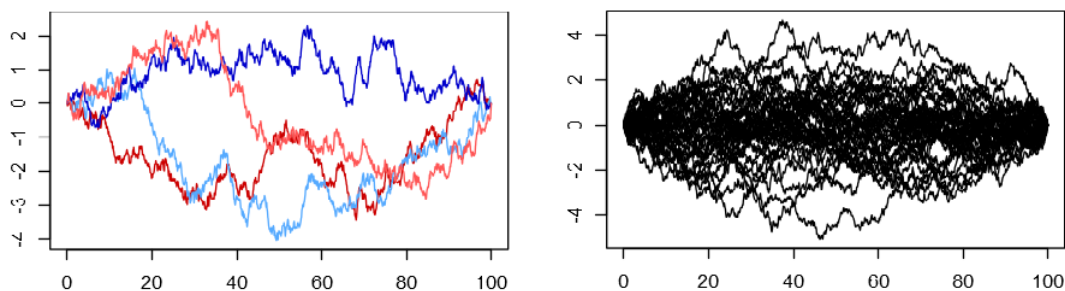
Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ nazývame Wienerov proces.



Obr. 1: Štyri a štyridsať náhodne vygenerovaných Wienerových procesov

Definícia 3. *Brownov most $\{B(t), t \in [0, T]\}$ je t -parametrický systém náhodných veličín, pričom*

- i) pre každé delenie $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n \leq T$, má náhodný vektor $(B(t_1), B(t_2), \dots, B(t_n))$ viacrozmerné normálne rozdelenie s nulovým vektorom stredných hodnôt,*
- ii) $Cov(B(s), B(t)) = \min\{s, t\} - st$,*
- iii) $B(0) = B(T) = 0$*



Obr. 2: Štyri a štyridsať náhodne vygenerovaných Brownových mostov

1.3 Modely okamžitej úrokovej miery

Stochastické diferenciálne rovnice, ktorými modelujeme okamžitú úrokovú mieru, majú vo všeobecnosti tvar

$$dr(t) = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw(t). \quad (1.2)$$

Stochastickosť rovnice je daná Wienerovým procesom $w(t)$, volatilitu alebo intenzitu vplyvu tejto náhodnosti určuje $\sigma(r, t)$ a $\mu(r, t)$ voláme trend (drift) procesu. V prípade, že na modelovanie úrokových mier používame len jednu rovnicu (jeden zdroj náhodnosti), hovoríme o jednofaktorovom modeli. Takéto modely sú často používané kvôli jednoduchšej manipulácii napríklad pri odvodzovaní cien derivátov úrokových mier. Ich jednoduchosť má ale za následok, že nedokážu zachytiť komplexnejšie situácie na trhu. Pridávaním ďalších rovníc je model čoraz komplexnejší, ale aj zložitejší. Modelom úrokových mier s n stochastickými diferenciálnymi rovnicami (n zdrojmi náhodnosti) hovoríme n -faktorové.

1.3.1 Odvodenie rovnice pre cenu dlhopisu v jednofaktorovom modeli

Zostavme portfólio Π pozostávajúce z jedného dlhopisu so splatnosťou v čase T_1 a Δ kusov dlhopisov so splatnosťou T_2 . Hodnota takéhoto portfólia je

$$\Pi = P(r, t, T_1) + \Delta P(r, t, T_2)$$

a zmena hodnoty sa dá vyjadriť ako

$$d\Pi = dP(r, t, T_1) + \Delta dP(r, t, T_2), \quad (1.3)$$

kde dP je zmena ceny dlhopisu. Na vyjadrenie tejto zmeny potrebujeme špeciálny nástroj, keďže cena dlhopisu je funkciou času t a náhodnej premennej r spĺňajúcej

stochastickú diferenciálnu rovnicu. Uvádžeme preto definíciu Itôvej lemy podľa knihy [9].

Lema 4 (Itôva lema). *Nech $f(x,t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice*

$$dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dw,$$

kde w je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt.$$

Aplikovaním Itôvej lemy na cenu dlhopisu a dosadením rovnice z (1.2) dostávame

$$\begin{aligned} dP &= \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{\partial P}{\partial r}dr + \frac{1}{2}\sigma^2(r,t)\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}dt \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu(r,t)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2(r,t)\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \sigma(r,t)\frac{\partial P}{\partial r}dw \\ &= \mu_B(r,t)dt + \sigma_B(r,t)dw. \end{aligned}$$

Potom zmenu hodnoty portfólia z (1.3) vieme zapísať v tvare

$$\begin{aligned} d\Pi &= (\mu_B(r,t,T_1)dt + \sigma_B(r,t,T_1)dw) + \Delta(\mu_B(r,t,T_2)dt + \sigma_B(r,t,T_2)dw) \\ &= (\mu_B(r,t,T_1) + \Delta\mu_B(r,t,T_2))dt + (\sigma_B(r,t,T_1) + \Delta\sigma_B(r,t,T_2))dw. \end{aligned}$$

Na zostrojenie bezrizikového portfólia potrebujeme eliminovať stochastickú časť, teda

$$\sigma_B(r,t,T_1) + \Delta\sigma_B(r,t,T_2) = 0 \quad \implies \quad \Delta = -\frac{\sigma_B(r,t,T_1)}{\sigma_B(r,t,T_2)}.$$

Aby nenastala arbitráž, výnos bezrizikového portfólia musí byť rovný okamžitej úrokovej miere, čiže

$$d\Pi = r\Pi dt,$$

z čoho vyplýva

$$\left(\mu_B(r,t,T_1) - \frac{\sigma_B(r,t,T_1)}{\sigma_B(r,t,T_2)}\mu_B(r,t,T_2) \right) = r \left(P(r,t,T_1) - \frac{\sigma_B(r,t,T_1)}{\sigma_B(r,t,T_2)}P(r,t,T_2) \right)$$

a následne

$$\frac{\mu_B(r,t,T_1) - rP(r,t,T_1)}{\sigma_B(r,t,T_1)} = \frac{\mu_B(r,t,T_2) - rP(r,t,T_2)}{\sigma_B(r,t,T_2)}.$$

Časy T_1 a T_2 sme na začiatku nijako nešpecifikovali, čiže tento vzťah musí platiť pre ľubovoľné dva časy T_1 a T_2 . Z toho vyplýva, že existuje funkcia $\lambda = \lambda(r, t)$, pre ktorú platí

$$\lambda(r, t) = \frac{\mu_B(r, t, T) - rP(r, t, T)}{\sigma_B(r, t, T)}, \quad (1.4)$$

pre všetky T . Túto funkciu nazývame trhovú cenu rizika. Spätnou substitúciou za μ_B a σ_B a upravením rovnice (1.4) dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu(r, t) - \lambda(r, t)\sigma(r, t)) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2(r, t) \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad (1.5)$$

pre $t \in (0, T)$, $r > 0$, s koncovou podmienkou $P(r, T, T) = 1$.

1.3.2 Rovnica pre hustotu rozdelenia stochastického procesu

Pýtame sa, aké je pravdepodobnostné rozdelenie stochastickej premennej $r(t)$, $t \geq 0$ riadacej sa procesom (1.2), pri danej hodnote r_0 v čase $t = 0$. Zaujímá nás teda podmienená hustota procesu $r(t)$ za podmienky $r(0) = r_0$, označíme ju $g(r, t)$. Podľa [9, str. 116] platí, že táto hustota je riešením tzv. Fokker-Planckovej rovnice:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\sigma^2 g) - \frac{\partial}{\partial r} (\mu g), \quad g(r, 0) = \delta(r - r_0), \quad (1.6)$$

kde $\delta(r - r_0)$ je Diracova delta funkcia. Nie je to funkcia v klasickom zmysle, no môžeme ju chápať ako funkciu splňajúcu

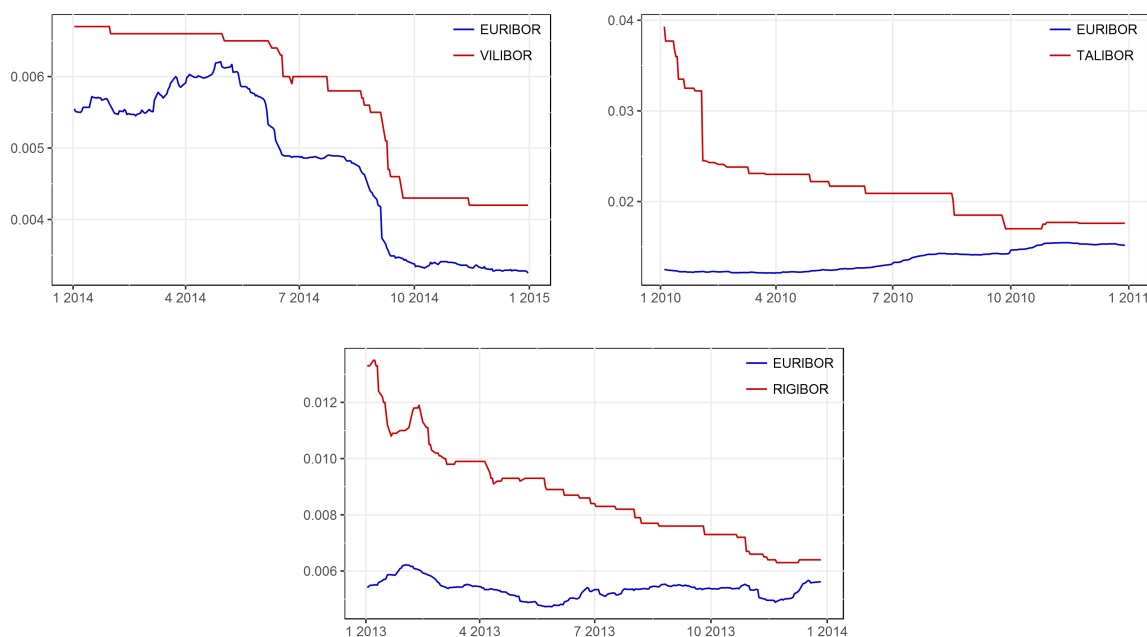
$$\delta(r - r_0) = \begin{cases} 0 & \text{ak } r \neq r_0, \\ \infty & \text{ak } r = r_0 \end{cases} \quad \text{a} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(r - r_0) dr = 1.$$

V spomenutej literatúre je uvedený aj intuitívny dôkaz tohto tvrdenia.

2 Model

Ako sme už spomínali v úvode, naším cieľom je modelovať úrokové miery v eurozóne a v krajine, ktorá do eurozóny vstupuje. Teoreticky by sa mali úrokové miery približovať s časom blížiacim sa k vstupu do eurozóny a po vstupe by mali splynúť.

Na obrázku 3 uvádzame medzibankové úrokové miery Estónska, Litvy a Lotyšska (TALIBOR [10], VILIBOR [14], RIGIBOR [12]) v porovnaní s európskou medzibankovou úrokovou mierou (EURIBOR [11]), všetky so splatnosťou jeden rok. Časové rady zachytávajú jednoročné obdobie pred vstupom do eurozóny (vstup do eurozóny: Estónsko - 1.1.2011, Lotyšsko - 1.1.2014, Litva - 1.1.2015). Úrokové miery síce po vstupe do eurozóny nesplynú, no viditeľne sa približujú a ich rozdiel v deň vstupu do eurozóny nie je ani v jednom prípade väčší ako pol percentuálneho bodu.



Obr. 3: Jednoročné medzibankové úrokové miery pobaltských krajín a eurozóny

V nasledujúcich podkapitolách najprv uvedieme model na modelovanie okamžitých úrokových mier vo vstupujúcej krajine a eurozóne, pričom predpokladáme, že tieto okamžité úrokové miery sú na trhu nepozorovateľné. Ďalej odvodíme modelom implikované ceny dlhopisov a popíšeme niektoré vlastnosti modelu. Vychádzať pritom budeme najmä z práce [1].

2.1 Voľba short rate modelu

Uvažujeme dve úrokové miery - európsku a domácu (pre krajinu vstupujúcu do eurozóny). Okamžitú európsku úrokovú mieru v čase t označíme $R(t)$, domácu $r(t)$. Potom platí vzťah

$$r(t) = R(t) + \delta(t), \quad (2.1)$$

kde $\delta(t)$ je rozdiel (spread) medzi týmito okamžitými úrokovými mierami v čase t . Predpokladáme, že $R(t)$ a rozdiel $\delta(t)$ sa riadia nezávislými stochastickými procesmi

$$dR(t) = \kappa(\theta - R(t))dt + \sigma_e dw_1(t), \quad (2.2)$$

$$d\delta(t) = -\frac{\delta(t)}{T^* - t}dt + \sigma_d dw_2(t). \quad (2.3)$$

kde $w_1(t)$ a $w_2(t)$ sú nekorelované Wienerove procesy z definície 2. Model (2.2) sa nazýva Vašíčkov model a je jedným z najčastejšie používaných jednofaktorových modelov na modelovanie short rate. Model predpokladá konštantnú trhovú cenu rizika, čiže $\lambda(R, t) = \lambda_e$ a konštantnú volatilitu σ_e . Jednou z vlastností tohto modelu je, že v dlhej dobe short rate konverguje k rovnovážnej hodnote. Takýmto modelom sa hovorí mean reversion. Hodnotu, ku ktorej short rate konverguje, vyjadruje v našom prípade parameter θ a rýchlosť konvergenzie vyjadruje parameter κ . Model (2.3) na modelovanie rozdielu short rateov je založený na Brownovom moste z definície 3. To znamená, že v čase vstupu do eurozóny (označíme T^*) je δ rovná nule, čiže modelované úrokové miery splynú po vstupe do eurozóny. Aj tento model predpokladá konštantnú trhovú cenu rizika $\lambda(\delta, t) = \lambda_d$ a konštantnú volatilitu σ_d . Poznamenajme, že model okamžitej úrokovej miery pre vstupujúcu krajinu je dvojfaktorový, keďže doňho vstupujú dva stochastické faktory - jeden z vývoja európskeho short rateu a druhý zo spreadu.

2.2 Odvodenie cien dlhopisov

Európska okamžitá úroková miera sa riadi procesom (2.2) a nezávisí od procesu (2.3) pre rozdiel úrokových mier. Ceny dlhopisov v eurozóne teda vyjadríme jednoducho aplikovaním PDE (1.5) na Vašíčkov model. Dostaneme

$$P_e(t, T) = e^{A_e(T-t) - R(t)B_e(T-t)},$$

kde

$$B_e(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa},$$

$$A_e(\tau) = (B_e(\tau) - \tau) \left(\theta - \frac{\lambda_e \sigma_e}{\kappa} - \frac{\sigma_e^2}{2\kappa^2} \right) - \frac{\sigma_e^2}{4\kappa} B_e(\tau)^2.$$

Podrobný postup odvodenia ceny dlhopisu pre Vašíčkov model môžeme nájsť napríklad v práci [2].

Podobne chceme vyjadriť aj cenu domáceho dlhopisu. Domáca short rate ale závisí od oboch procesov (2.2) a (2.3), čiže postup odvodenia je zložitejší. V nasledujúcich riadkoch postupujeme podľa článku [1]. Na zachovanie bezarbitrážnosti musí všeobecne pre cenu bezkupónového dlhopisu splatného v čase T v peňažnej mene i platiť

$$P(t, T) = E_t^{Q_i} \left[e^{-\int_t^T r_i(s) ds} \right],$$

kde $E_t^{Q_i}$ vyjadruje očakávanú hodnotu v čase t vzhľadom na rizikovo neutrálnu mieru Q_i a r_i je okamžitá úroková miera pre krajinu s menou i . Na základe tohto vzťahu máme pre európsku úrokovú mieru

$$P_e(t, T) = E_t^{Q_e} \left[e^{-\int_t^T R(s) ds} \right]. \quad (2.4)$$

Ak $T > T^*$, pre cenu domáceho dlhopisu platí

$$\begin{aligned} P(t, T^*, T) &= E_t^Q \left[e^{-\left(\int_t^{T^*} R(s) + \delta(s) ds + \int_{T^*}^T R(s) ds \right)} \right] \\ &= E_t^Q \left[e^{-\int_t^T R(s) ds} e^{-\int_t^{T^*} \delta(s) ds} \right] \\ &= E_t^Q \left[e^{-\int_t^T R(s) ds} \right] E_t^Q \left[e^{-\int_t^{T^*} \delta(s) ds} \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Prvý činiteľ v (2.5) sa podobá na cenu európskeho dlhopisu v (2.4), s rozdielom v pravdepodobnostnej miere, vzhľadom na ktorú robíme očakávania. Rovnako ako v článku [1] ukážeme použitím Radon-Nikodymovej derivácie, že tento výraz je skutočne cena európskeho dlhopisu:

$$\begin{aligned} P_e(t, T) &= E_t^{Q_e} \left[e^{-\int_t^T R(s) ds} \right] = \frac{E_t^Q \left[\frac{dQ_e}{dQ} e^{-\int_t^T R(s) ds} \right]}{E_t^Q \left[\frac{dQ_e}{dQ} \right]} \\ &= \frac{E_t^Q \left[\frac{dQ_e}{dQ} \right] E_t^Q \left[e^{-\int_t^T R(s) ds} \right]}{E_t^Q \left[\frac{dQ_e}{dQ} \right]} = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T R(s) ds} \right]. \end{aligned}$$

Viac o Radon-Nikodymovej derivácii môžeme nájsť napríklad v práci [3]. Dostali sme teda, že cenu európskeho dlhopisu môžeme vypočítať pri očakávanej hodnote vzhľadom na európsku rizikovo neutrálnu mieru Q_e aj na domácu Q . Využitím tohto poznatku vyjadríme cenu dlhopisu z (2.5) ako

$$P(t, T^*, T) = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T R(s)ds} \right] E_t^Q \left[e^{-\int_t^{T^*} \delta(s)ds} \right] = P_e(t, T)D(t, T^*). \quad (2.6)$$

Rovnakým odvodením by sme dostali aj cenu pre čas $T \leq T^*$:

$$P(t, T^*, T) = P(t, T) = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T R(s)ds} \right] E_t^Q \left[e^{-\int_t^T \delta(s)ds} \right] = P_e(t, T)D(t, T). \quad (2.7)$$

Na odvodenie členu $D(t, T)$ nám pomôže Feynman-Kac tvrdenie z [6].

Tvrdenie 5 (Feynman-Kac). *Predpokladajme, že x_t spĺňa stochastickú diferenciálnu rovnicu*

$$dx_t = \mu(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)dW_t^Q, \quad (2.8)$$

kde W_t^Q je Brownov pohyb pri rizikovo neutrálnnej miere Q . Predpokladajme, že $V = V(X_t, t)$ je diferencovateľná funkcia v x_t a t , a že $V(x_t, t)$ spĺňa PDE

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mu(x_t, t) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma(x_t, t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - r(x_t, t)V(x_t, t) = 0 \quad (2.9)$$

s okrajovou podmienkou $V(X_T, T)$, kde $r(x_t, t)$ je integrovateľná funkcia x_t . Potom riešením $V(x_t, t)$ je

$$V(x_t, t) = E^Q \left[e^{-\int_t^T r(x_u, u)du} V(X_T, T) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.10)$$

Toto tvrdenie platí aj obrátene. Ak vieme, že riešenie $V(x_t, t)$ je dané rovnicou (2.10) a x_t spĺňa rovnicu (2.8), potom $V(x_t, t)$ spĺňa PDE (2.9).

V našom prípade použijeme obrátenú verziu tvrdenia. Najprv však potrebujeme formulovať model (2.3) v rizikovo neutrálnnej miere. Vo všeobecnosti platí, že volatility sú rovnaké v reálnej aj rizikovo neutrálnnej pravdepodobnostnej miere a drifty procesov sa menia následovne ([8] s. 3):

$$(rizikovo \text{ neutralny drift}) = (\text{realny drift}) - (\text{trhova cena rizika}) \times (\text{volatilita}).$$

Takže rizikovo neutrálna verzia procesu (2.3) je

$$d\delta(t) = \left(\frac{-\delta(t)}{T^* - t} - \lambda_d \sigma_d \right) dt + \sigma_d d\tilde{w}_1(t) \quad (2.11)$$

a funkcia $D(t, T)$ je daná rovnicou

$$D(t, T) = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T \delta(s) ds} \right]. \quad (2.12)$$

Potom z (2.11) a (2.12) podľa tvrdenia 5 vyplýva, že pre $\delta = \delta(t)$ funkcia $D(\delta, t, T)$ spĺňa PDE

$$\frac{\partial D}{\partial t} - \left(\frac{\delta}{T^* - t} + \lambda_d \sigma_d \right) \frac{\partial D}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \sigma_d^2 \frac{\partial^2 D}{\partial \delta^2} - \delta D = 0. \quad (2.13)$$

Všimnime si ešte, že rovnica (2.9) je pre $r(X_t, t) = X_t$ rovnaká ako rovnica (1.5), len formulovaná pre stochastický proces v rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere. Rovnakú PDE by sme teda dostali, ak by sme použili (1.5) pre proces (2.3), ktorý je formulovaný v reálnej pravdepodobnostnej miere.

Riešenie PDE 2.13 hľadáme v tvare

$$D(\delta, \tau) = \exp[A(\tau) - \delta B(\tau)],$$

kde $\tau = T - t$. Parciálne derivácie funkcie $D(\delta, \tau)$ sú

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} &= e^{A(\tau) - \delta B(\tau)} (-A'(\tau) + \delta B'(\tau)) = D(\tau) (-A'(\tau) + \delta B'(\tau)), \\ \frac{\partial D}{\partial \delta} &= -e^{A(\tau) - \delta B(\tau)} B(\tau) = -D(\tau) B(\tau), \\ \frac{\partial^2 D}{\partial \delta^2} &= e^{A(\tau) - \delta B(\tau)} B^2(\tau) = D(\tau) B^2(\tau). \end{aligned}$$

Dosadením do PDE a postupným upravením dostávame

$$\begin{aligned} D(\tau) (-A'(\tau) + \delta B'(\tau)) + \left(\frac{\delta}{T^* - T + \tau} + \lambda_d \sigma_d \right) D(\tau) B(\tau) + \frac{1}{2} \sigma_d^2 D(\tau) B^2(\tau) - \delta D &= 0, \\ (-A'(\tau) + \delta B'(\tau)) + \left(\frac{\delta}{T^* - T + \tau} + \lambda_d \sigma_d \right) B(\tau) + \frac{1}{2} \sigma_d^2 B^2(\tau) - \delta &= 0, \\ \left(-A'(\tau) + \lambda_d \sigma_d B(\tau) + \frac{1}{2} \sigma_d^2 B^2(\tau) \right) + \left(B'(\tau) + \frac{B(\tau)}{T^* - T + \tau} - 1 \right) \delta &= 0. \end{aligned}$$

Na to, aby bol posledný výraz rovný nule pre všetky δ a τ musia byť oba výrazy v zátvorkách nulové, čiže riešime systém dvoch diferenciálnych rovníc:

$$-A'(\tau) + \lambda_d \sigma_d B(\tau) + \frac{1}{2} \sigma_d^2 B^2(\tau) = 0, \quad (2.14)$$

$$B'(\tau) + \frac{B(\tau)}{T^* - T + \tau} - 1 = 0, \quad (2.15)$$

so začiatočnými podmienkami $A(0) = 0$, $B(0) = 0$. V článku [1] je uvedené priamo riešenie týchto rovníc bez postupu. V nasledujúcich riadkoch uvedieme vlastný výpočet, ktorým sa k tomuto riešeniu dopracujeme. Homogénne riešenie rovnice (2.15) je:

$$B(\tau) = \frac{K}{T^* - T + \tau}.$$

Na nájdenie celkového riešenia použijeme metódu variácie konštánt, teda $K = K(\tau)$.

Dosadením do pôvodnej rovnice a úpravami dostávame

$$K(\tau) = T^*\tau - T\tau + \frac{\tau^2}{2} + c.$$

Dosadením do riešenia a s využitím počiatocnej podmienky máme

$$B(\tau) = \frac{T^*\tau - T\tau + \frac{\tau^2}{2}}{T^* - T + \tau}.$$

Člen $A(\tau)$ získame dosadením predošlého výsledku do (2.14):

$$A(\tau) = \frac{\sigma_d^2}{2} \int \left(\frac{T^*\tau - T\tau + \frac{\tau^2}{2}}{T^* - T + \tau} \right)^2 d\tau + \sigma_d \lambda_d \int \frac{T^*\tau - T\tau + \frac{\tau^2}{2}}{T^* - T + \tau} d\tau. \quad (2.16)$$

Vypočítaním prvého integrálu z (2.16) dostávame

$$\int \left(\frac{T^*\tau - T\tau + \frac{\tau^2}{2}}{T^* - T + \tau} \right)^2 d\tau = \frac{1}{4} \left(-\frac{(T^* - T)^4}{T^* - t} - 2(T^* - T)^2(T^* - t) + \frac{1}{3}(T^* - t)^3 + c_1 \right)$$

a druhého integrálu

$$\int \frac{T^*\tau - T\tau + \frac{\tau^2}{2}}{T^* - T + \tau} d\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{(T^* - t)^2}{2} - \frac{(T^* - T)^2}{2} - (T^* - T)^2 \ln(T^* - t) + c_2 \right).$$

Po dosadení počiatocných podmienok nadobudnú konštanty tvar:

$$c_1 = \frac{8}{3}(T^* - T)^3,$$

$$c_2 = (T^* - T)^2 \ln(T^* - T).$$

Po niekoľkých úpravách sa celkové riešenie PDE (2.13) dá zapísať v tvare

$$D(t, T) = \exp[A(t, T) - \delta B(t, T)],$$

kde

$$A(t, T) = \frac{\sigma_d^2}{8} \left[\frac{(T^* - t)^3}{3} - 2(T^* - T)^2(T - t) - \frac{(T^* - T)^4}{(T^* - t)} + \frac{2}{3}(T^* - T)^3 \right] \\ + \frac{1}{2} \lambda_d \sigma_d \left[\frac{(T^* - t)^2}{2} - \frac{(T^* - T)^2}{2} - (T^* - T)^2 \ln \left(\frac{T^* - t}{T^* - T} \right) \right], \\ B(t, T) = \frac{1}{2} \left[T^* - t - \frac{(T^* - T)^2}{(T^* - t)} \right].$$

Funkcia $D(t, T)$ nie je definovaná pre $T = T^*$, konkrétne posledný člen vo funkcii $A(t, T)$ nie je definovaný v tomto bode. Dodefinujeme ju limitou pre $T \rightarrow T^*$. Využitím L'Hospitalovho pravidla dostávame

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow T^*} (T^* - T)^2 \ln \left(\frac{T^* - t}{T^* - T} \right) &= \lim_{T \rightarrow T^*} \frac{\ln \left(\frac{T^* - t}{T^* - T} \right)}{(T^* - T)^{-2}} = \\ &= \lim_{T \rightarrow T^*} \frac{(T^* - T)^{-1}}{(T^* - T)^{-3}} = \lim_{T \rightarrow T^*} (T^* - T)^2 = 0. \end{aligned}$$

Funkcia má teda v bode $T = T^*$ tvar

$$D^*(t) = D(t, T^*) = e^{A^*(t) - \delta(t)B^*(t)},$$

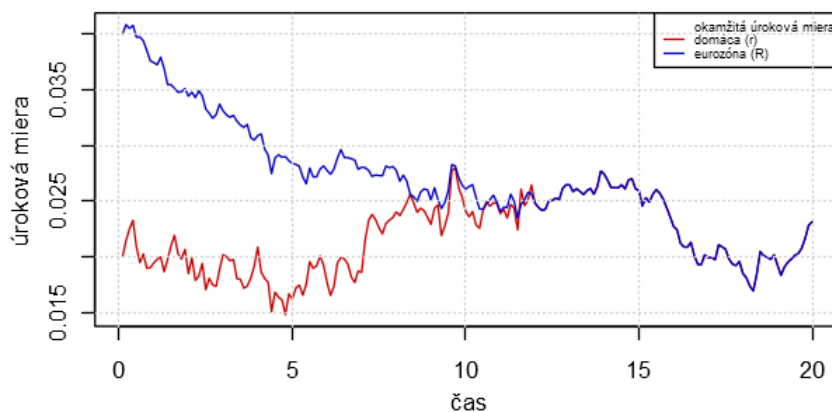
kde

$$\begin{aligned} A^*(t) &= A(t, T^*) = \lim_{T \rightarrow T^*} A(t, T) = \frac{\sigma_d^2}{8} \left[\frac{(T^* - t)^3}{3} \right] + \frac{1}{2} \lambda_d \sigma_d \left[\frac{(T^* - t)^2}{2} \right], \\ B^*(t) &= B(t, T^*) = \lim_{T \rightarrow T^*} B(t, T) = \frac{1}{2} [T^* - t]. \end{aligned}$$

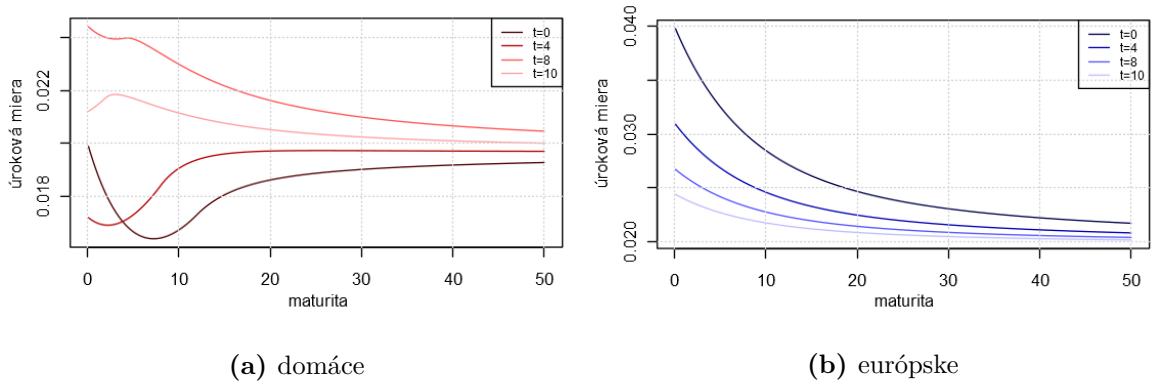
2.3 Vlastnosti

V tejto podkapitole sa pozrieme na zopár nami odvodených vlastností modelu. Na obrázku 4 sú vygenerované okamžité úrokové miery s parametrami $\sigma_d = 0.003$, $\lambda_d = 0.001$, $\sigma_e = 0.002$, $\lambda_e = 0.03$, $\kappa = 0.2$, $\theta = 0.02$, so štartovacími hodnotami $\delta_0 = -0.02$, $R_0 = 0.04$, pre čas vstupu do eurozóny $T^* = 12$. Na obrázkoch 5a a 5b sú výnosové krivky vstupujúcej krajiny a eurozóny pre štyri vybrané časy.

Môžeme si všimnúť, že všetky štyri vybrané európske výnosové krivky sú klesajúce, čo je spôsobené tým, že simulovaná európska short rate je po celý čas prevažne



Obr. 4: Simulácia okamžitých úrokových mier



Obr. 5: Simulované výnosové krivky

klesajúca. Ďalej môžeme vidieť, že domáce krivky majú komplexnejšie tvary oproti európskym. Dôvodom je, že model domácej úrokovej miery je dvojfaktorový, a teda komplexnejší oproti jednofaktorovému Vašíčkovmu modelu. Európske krivky môžu byť rastúce alebo klesajúce, no tvar ľubovoľnej domácej krivky z obrázku 5a nadobudnúť nemôžu.

Obrázky s výnosovými krivkami naznačujú, že limita výnosov dlhopisov je pre čas splatnosti idúci do nekonečna rovnaká pre domáce aj európske krivky (približne 0.02). Označíme $R_e(t, T)$ európsku a $r(t, T^*, T)$ domácu úrokovú mieru (výnos dlhopisu) v čase t s maturitou v T pre čas vstupu do eurozóny T^* . Použitím vzťahu ceny dlhopisu a úrokovej miery 1.1 dostávame

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} r(t, T^*, T) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-\ln(P_e(t, T)D^*(t))}{T-t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-\ln P_e(t, T)}{T-t} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} R_e(t, T) = \theta - \frac{\lambda_e \sigma_e}{\kappa} - \frac{\sigma_e^2}{2\kappa^2}, \end{aligned}$$

pričom sme využili, že $D^*(t)$ nezávisí od T . Teda platí, že výnos dlhopisu má vždy rovnakú limitu pre čas splatnosti idúci do nekonečna ($T \rightarrow \infty$), nezávisle na tom, či je európsky alebo domáci.

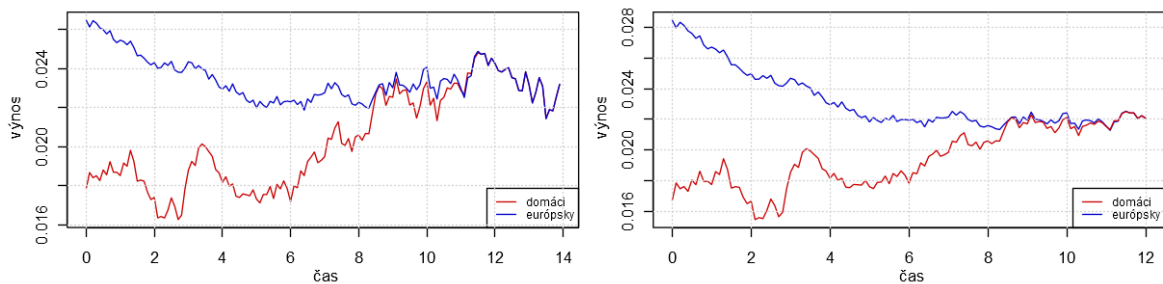
Od modelu by sme očakávali, že pre dva dlhopisy so splatnosťou v čase po plánovanom vstupe do eurozóny a časom blížiacim sa k vstupu do eurozóny pôjde rozdiel ich výnosov k nule. Na obrázku 6a je znázornená táto situácia pre dva vybrané dlhopisy. Analyticky, pre $T > T^*$ platí

$$r(t, T^*, T) - R_e(t, T) = \frac{-\ln D^*(t)}{T-t} = \frac{A^*(t) - \delta(t)B^*(t)}{T-t}.$$

Keďže oba členy v čitateli idú do nuly pre $t \rightarrow T^*$ dostávame

$$\lim_{t \rightarrow T^*} r(t, T^*, T) - R_e(t, T) = 0.$$

Rovnakým výpočtom sa dá ukázať, že aj úrokové miery s fixnou maturitou splývajú pre čas blížiaci sa k času vstupu do eurozóny (obrázok 6b).



(a) so splatnosťou $T = 14$

(b) desaťročné dlhopisy

Obr. 6: Simulované výnosy dlhopisov pre $T^* = 12$

Pozrime sa ešte na rozdiely vo výnosových krivkách v nejakom čase t , kedy $\delta(t) = 0$, čiže okamžitá úroková miera je rovnaká pre eurozónu aj domácu krajinu. Ak $T < T^*$, pre rozdiel výnosových kriviek v takomto čase t platí

$$|r(t, T^*, T) - R_e(t, T)| = \left| \frac{\ln D(t, T)}{T - t} \right| = \left| \frac{A(t, T) - \delta(t)B(t, T)}{T - t} \right| = \left| \frac{A(t, T)}{T - t} \right|.$$

Podobne pre $T \geq T^*$

$$|r(t, T^*, T) - R_e(t, T)| = \left| \frac{A^*(t)}{T - t} \right|.$$

Čiže platí, že aj keď je rozdiel short rateov v nejakom čase nulový, výnosové krivky sa líšia, konkrétne o uvedený člen.

3 Kalibrácia

Na začiatku predošlej kapitoly sme uviedli predpoklad, že short rate je teoretická veličina, ktorú nie je možné pozorovať na trhu. Čo však môžeme pozorovať na trhu sú úrokové miery s rôznymi splatnosťami. Tie budú tvoriť vstup do kalibrácie, na základe ktorej sa odhadne short rate a parametre modelu.

V nasledujúcich podkapitolách najprv uvedieme postup kalibrácie Vašíčkovho modelu a odvodíme kalibráciu modelu Brownovho mostu. Tie potom aplikujeme na simulované dáta s cieľom overiť správnosť týchto metód. Na záver sa pozrieme, ako si kalibrácia modelu poradí s reálnymi dátami.

3.1 Metóda minimalizácie vzdialeností modelovaných a reálnych výnosových kriviek

Pre kalibráciu Vašíčkovho modelu použijeme postup uvedený v práci [5]. Kalibrácia sa tu aplikuje na Vašíčkov model formulovaný v rizikovo neutrálnej miere s tromi parametrami:

$$\alpha = \kappa\theta - \lambda_e\sigma_e, \quad \beta = -\kappa, \quad \sigma_e. \quad (3.1)$$

Tie tvoria spolu s časovým radom okamžitej úrokovej miery výstup kalibrácie.

Postupu kalibrácie z tejto práce sa budeme pridrižovať aj pri kalibrácii modelu Brownovho mostu. Model nakalibrujeme minimalizáciou funkcie vyjadrujúcej váženú priemernú štvorcovú chybu medzi modelovanými a reálnymi výnosovými krivkami, teda

$$F = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} (R(t_i, T_{ij}, \delta_i) - R_{ij})^2, \quad (3.2)$$

kde m je počet hodnôt na reálnej výnosovej krivke v jednom dni, n je počet dní, δ_i je rozdiel v okamžitej úrokovej miere v domácej krajine a eurozóne v i -ty deň, t_i je čas v ktorom vezmeme všetkých m úrokových mier z i -teho dňa a $T_{i,j}$ je čas splatnosti j -tej úrokovej miery v i -ty deň. $R(t_i, T_{ij}, \delta_i)$ a R_{ij} sú postupne j -ta modelovaná úroková miera a j -ta reálna úroková miera v i -tom dni a w_{ij} je váha, ktorú prikladáme chybe medzi j -tou reálnou a modelovanou úrokovou mierou v i -tom dni. Pomocou vzťahu medzi úrokovou mierou a cenou dlhopisu upravíme funkciu F na tvar

$$F = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{w_{ij}}{(T_{ij} - t_i)^2} (\ln P(t_i, T_{ij}, \delta_i) + \tau_j R_{ij})^2. \quad (3.3)$$

Cena domáceho dlhopisu je podľa (2.6) resp. (2.7) zložená z ceny európskeho dlhopisu násobenej funkciou $D(\dots)$. Predpokladáme, že ceny dlhopisov $P_e(t_i, T_{i,j})$ pre eurozónu sú známe. Všimnime si, že funkcia $D(\dots)$ je lineárnou funkciou parametrov λ a δ . V (3.3) môžu nastať dva prípady:

1. $T_{ij} \leq T^*$

$$\ln P(t_i, T_{ij}, \delta_i) = \ln(P_e(t_i, T_{ij})) + \ln(D(t_i, T_{ij}, \delta_i)),$$

kde

$$\ln D(t, T, \delta) = A(t, T) - \delta B(t, T) = c_0(t, T)\lambda_d + c_1(t, T)\delta + c_2(t, T),$$

$$c_0(t, T) = \frac{\sigma_d}{2} \left[\frac{(T^* - t)^2}{2} - \frac{(T^* - T)^2}{2} - (T^* - T)^2 \ln \left(\frac{T^* - t}{T^* - T} \right) \right],$$

$$c_1(t, T) = -\frac{1}{2} \left[T^* - t - \frac{(T^* - T)^2}{(T^* - t)} \right],$$

$$c_2(t, T) = \frac{\sigma_d^2}{8} \left[\frac{(T^* - t)^3}{3} - 2(T^* - T)^2(T - t) - \frac{(T^* - T)^4}{(T^* - t)} + \frac{2}{3}(T^* - T)^3 \right].$$

2. $T_{ij} \geq T^*$

$$\ln P(t_i, T_{ij}, \delta_i) = \ln(P_e(t_i, T_{ij})) + \ln(D^*(t_i, \delta_i)),$$

kde

$$\ln D^*(t, \delta) = A^*(t) - \delta B^*(t) = c_0^*(t)\lambda_d + c_1^*(t)\delta + c_2^*(t),$$

$$c_0^*(t) = \frac{\sigma_d}{2} \left[\frac{(T^* - t)^2}{2} \right],$$

$$c_1^*(t) = -\frac{1}{2} \left[T^* - t \right],$$

$$c_2^*(t) = \frac{\sigma_d^2}{8} \left[\frac{(T^* - t)^3}{3} \right].$$

Označme $\tau_j = T_{ij} - t_i$ a k_i počet úrokových mier v i -tom dni, ktoré majú čas splatnosti pred časom T^* . Pre zjednodušenie zápisu budeme v ďalšom postupe vynechávať pri funkciách zátvorke s premennou, napr. $c_0 := c_0(t_i, T_{ij})$. Funkcia F z (3.3) nadobudne tvar

$$F(\lambda_d, \sigma_d, \delta) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^{k_i} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (\ln P_e + c_2 + c_0\lambda_d + c_1\delta_i + \tau_j R_{ij})^2 + \sum_{j=k_i+1}^m \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (\ln P_e + c_2^* + c_0^*\lambda_d + c_1^*\delta_i + \tau_j R_{ij})^2 \right\}.$$

Kedže F je kvadratická v parametroch λ_d a $\delta_1, \dots, \delta_n$, ich optimálne hodnoty vzhľadom na parameter σ_d dostaneme pomocou $n + 1$ prvých derivácií funkcie F . V maticovom zápise

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & H \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} e &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{k_i} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (c_0)^2 + \sum_{j=k_i+1}^m \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (c_0^*)^2 \right), \\ g^T = f &= \left[\sum_{j=1}^{k_1} \frac{w_{1j}}{\tau_j^2} c_0 c_1 + \sum_{j=k_1+1}^m \frac{w_{1j}}{\tau_j^2} c_0^* c_1^*, \dots, \sum_{j=1}^{k_n} \frac{w_{nj}}{\tau_j^2} c_0 c_1 + \sum_{j=k_n+1}^m \frac{w_{nj}}{\tau_j^2} c_0^* c_1^* \right], \\ H &= \text{diag}(H_{11}, H_{22}, \dots, H_{nn}), \quad H_{ii} = \sum_{j=1}^{k_i} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (c_1)^2 + \sum_{j=k_i+1}^m \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (c_1^*)^2, \\ x &= \lambda_\delta, \\ y &= [\delta_1, \dots, \delta_n]^T, \\ u &= - \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^{k_i} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (c_0 \ln P_e + c_2 c_0 + \tau_j R_{ij} c_0) + \sum_{j=k_i+1}^m \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (c_0^* \ln P_e + c_0^* c_2^* + c_0^* \tau_j R_{ij}) \right\}, \\ v &= \begin{bmatrix} - \sum_{j=1}^{k_1} \frac{w_{1j}}{\tau_j^2} (\ln P_e c_1 + c_2 c_1 \tau_j R_{1j} c_1) - \sum_{j=k_1+1}^m \frac{w_{1j}}{\tau_j^2} (\ln P_e c_1^* + c_2^* c_1^* + \tau_j R_{1j} c_1^*) \\ \vdots \\ - \sum_{j=1}^{k_n} \frac{w_{nj}}{\tau_j^2} (\ln P_e c_1 + c_2 c_1 \tau_j R_{nj} c_1) - \sum_{j=k_n+1}^m \frac{w_{nj}}{\tau_j^2} (\ln P_e c_1^* + c_2^* c_1^* + \tau_j R_{nj} c_1^*) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Z (3.4) máme

$$ex + fy = u, \quad (3.5)$$

$$gx + Hy = v. \quad (3.6)$$

Kedže matica H je diagonálna, lahko vieme nájsť jej inverziu, teda z (3.6) dostávame

$$y = H^{-1} (v - gx). \quad (3.7)$$

Dosadením (3.7) do (3.5) potom dostávame rovnicu

$$(e - fH^{-1}g)x = u - fH^{-1}v,$$

odkiaľ vieme vyjadriť neznámu x . Týmto postupom dostaneme optimálne hodnoty parametrov λ_d a $\delta_1, \dots, \delta_n$ vzhľadom na σ_d . Parameter σ_d následne vypočítame jednorozmernou optimalizáciou funkcie F .

3.2 Aplikácia na simulované dáta

Postup z predošlej podkapitoly aplikujeme na simulované dáta. Najprv vygenerujeme európsku okamžitú úrokovú mieru R použitím Vašíčkovho modelu z (2.2) a spread úrokových mier δ pomocou Brownového mostu (2.3), obe pre časy $t = 1, 2, \dots, 200$ a vstup do eurozóny $T^* = 253$. Domácu okamžitú úrokovú mieru dostaneme podľa (2.1) ako súčet európskej a spreadu. Na základe nich vypočítame pre každý deň výnosovú krivku so splatnosťami $\tau_e = 1, 2, \dots, 12$ mesiacov pre eurozónu a $\tau_d = 1, 3, 6, 12$ mesiacov pre domácu krajinu. Schválne sme zvolili menší počet splatností pre domácu krajinu, pretože podobná situácia nastáva aj v reálnych dátach. Vstupné parametre modelov sú v tabuľke 1.

| <i>Vašíček</i> | <i>Brownov most</i> |
|-------------------|---------------------|
| $\sigma_e = 0.02$ | $\sigma_d = 0.02$ |
| $\lambda_e = 0.5$ | $\lambda_d = -0.1$ |
| $\kappa = 2$ | |
| $\theta = 0.02$ | |
| $R_0 = 0.04$ | $\delta_0 = -0.02$ |

Tabuľka 1: Vstupné parametre simulácie

Kalibrácia Vašíčkovho modelu

Z parametrov pre Vašíčkov model v tabuľke 1 vyjadríme použitím (3.1) rizikovo neutrálné parametre $\alpha = 0.03$, $\beta = -2$, $\sigma_e = 0.02$. Tie chceme spolu s okamžitou úrokovou mierou spätne odhadnúť pomocou kalibrácie Vašíčkovho modelu na simulované európske výnosové krivky. Podobne ako vo funkcii (3.2) aj pri kalibrácii Vašíčkovho modelu treba zvoliť parameter váh. Našou voľbou je $w_{ij}^e = \tau_j^2$ (takto zvolené váhy môžeme nájsť napríklad v [5]), teda väčšiu váhu prikladáme chybám pre dlhšie splatnosti.

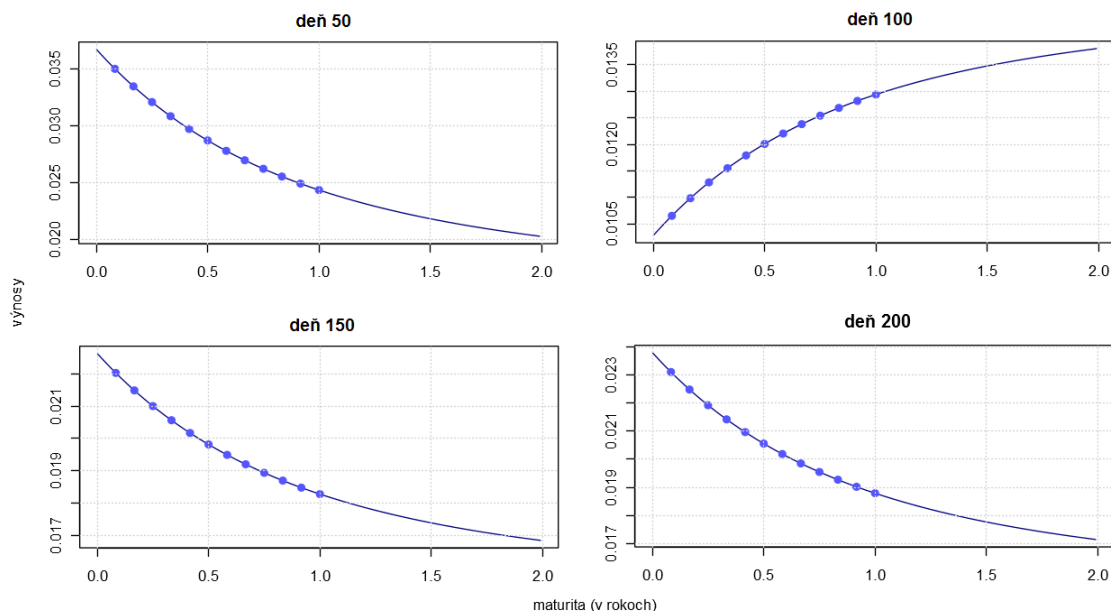
Kalibráciou Vašíčkovho modelu dostávame nasledujúce odhady parametrov:

$$\alpha = 0.02999999, \quad \beta = -1.99999997, \quad \sigma_e = 0.01999994,$$

- maximálna odchýlka medzi simulovanou a odhadnutou okamžitou úrokovou mierou (R) je $2.8928374995e-10$,

- maximálna odchýlka medzi simulovanými a modelovanými výnosmi je $3.851687e-09$.

Na obrázku 7 sú odhadnuté výnosové krivky spolu so simulovanými dátami pre štyri vybrané dni.



Obr. 7: Fitované výnosové krivky (simulované dáta, eurozóna)

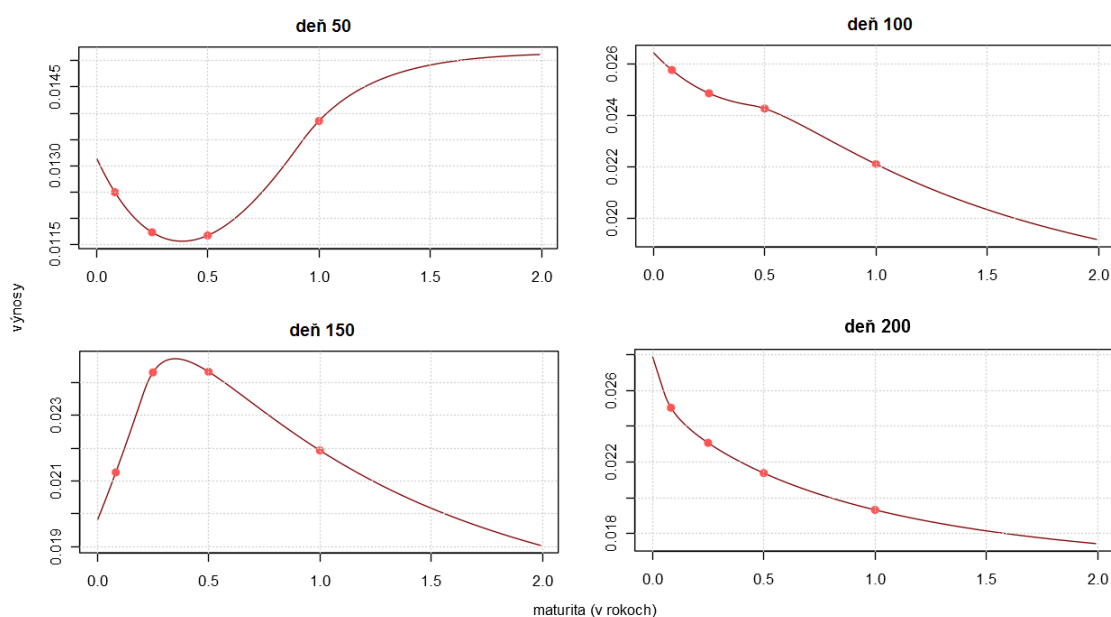
Kalibrácia Brownovho mostu

Vstupom do kalibrácie sú domáce aj európske simulované výnosové krivky. Použijeme rovnaký parameter váh, teda v (3.2) zvolíme $w_{ij} = \tau_j^2$. Odhadnuté výnosové krivky sú na obrázku 8 a nakalibrované parametre sú:

$$\lambda_d = 0.029999999, \quad \sigma_d = 0.020000004,$$

- maximálna odchýlka medzi simulovaným a odhadnutým spreadom úrokových mier (δ) je $1.6704736552e-13$,
- maximálna odchýlka medzi simulovanými a modelovanými výnosmi je $8.34017e-09$.

V oboch prípadoch sú odhady skoro totožné s pôvodnými parametrami a odhadnuté výnosové krivky skoro dokonale fitujú simulované výnosy, teda metóda kalibrácie z podkapitoly 3.1 zrejme funguje správne.



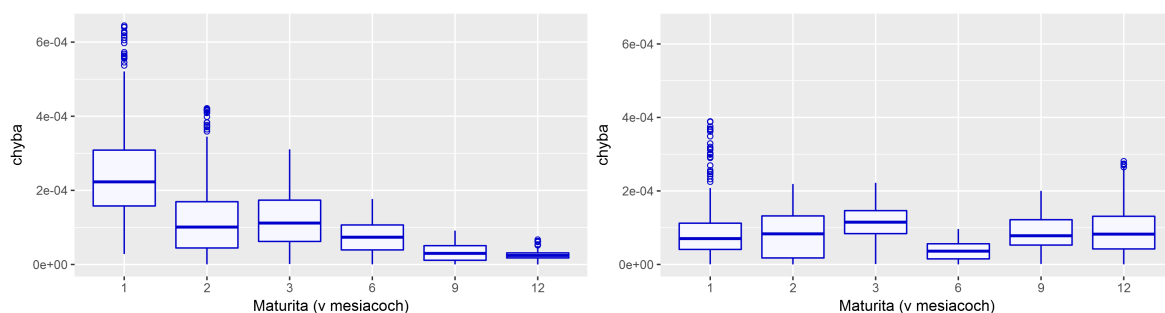
Obr. 8: Fitované výnosové krivky (simulované dáta, domáca krajina)

3.3 Aplikácia na reálne dáta

Rovnako nakalibrujeme model aj na reálne dáta, pričom vstupujúcou krajinou bude postupne Estónsko, Litva a Lotyšsko. Ako vstup kalibrácie použijeme dáta, ktoré sme popísali na začiatku kapitoly 2, teda ako výnosové krivky v eurozóne vezmeme EURIBOR a vo vstupujúcej krajine postupne TALIBOR, VILIBOR a RIGIBOR. Každý súbor dát obsahuje ročné obdobie výnosov pred vstupom domácej krajiny do eurozóny. Na kalibráciu používame výnosy v prvých 200 dňoch, teda dáta od začiatku januára do polovice októbra. Použité splatnosti výnosov pre jednotlivé krajiny sú v tabuľke 2.

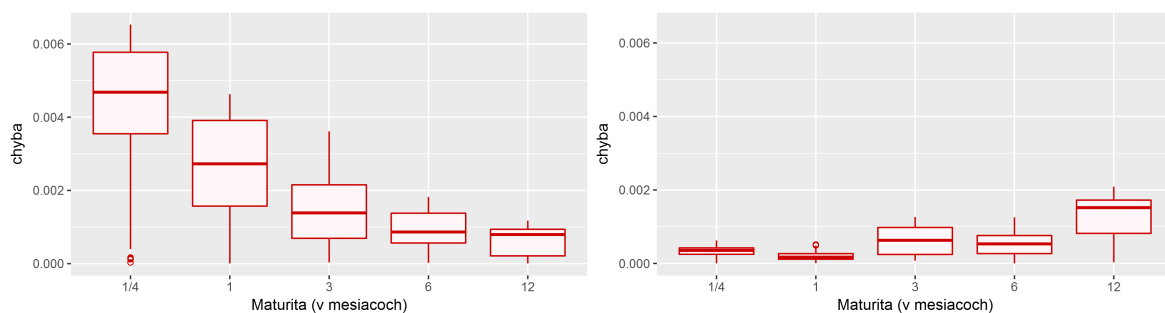
| <i>Obdobie</i> | <i>Dáta</i> | <i>Dostupné splatnosti</i> |
|-----------------------|-------------|-------------------------------------|
| 4.1.2010 - 15.10.2010 | EURIBOR | 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 mesiacov |
| | TALIBOR | 1,3,6,12 mesiacov |
| 2.1.2013 - 15.10.2013 | EURIBOR | 1,2,3,6,9,12 mesiacov |
| | RIGIBOR | 1 týždeň 1,3,6,12 mesiacov |
| 2.1.2014 - 15.10.2014 | EURIBOR | 1,2,3,6,9,12 mesiacov |
| | VILIBOR | 1,2 týždne 1,3,6,12 mesiacov |

Tabuľka 2: Dáta použité pri kalibrácii



Obr. 9: Chybovosť nakalibrovaných výnosových kriviek EURIBORu,
vľavo $w_{ij}^e = \tau_j^2$, vpravo $w_{ij}^e = 1$

Pri kalibrácii Vašíčkovho modelu sme otestovali okrem voľby váh $w_{ij}^e = \tau_j^2$ aj $w_{ij}^e = 1$. Na obrázku 9 sú zobrazené odchýlky modelovaných a reálnych výnosov EURIBORu. V prípade voľby $w_{ij}^e = 1$ je podľa očakávania rozloženie chýb rovnomernejšie ako pri $w_{ij}^e = \tau_j^2$, kde chybovosť klesá s rastúcou splatnosťou. Z finančného hľadiska sú dôležitejšie dlhšie splatnosti, preto do kalibrácie Brownovho mostu použijeme váhy $w_{ij}^e = \tau_j^2$.



Obr. 10: Chybovosť nakalibrovaných výnosových kriviek RIGIBORu,
vľavo $w_{ij} = \tau_j^2$, vpravo $w_{ij} = 1$

Pri kalibrácii Brownovho mostu sme opäť otestovali váhy $w_{ij} = \tau_j^2$ a $w_{ij} = 1$. Odchýlky modelovaných a reálnych výnosov RIGIBORu sú na obrázku 10. V prípade druhej voľby sú odchýlky v prvých dvoch splatnostiach rádovo desaťkrát nižšie a klesnú aj odchýlky pri splatnostiach 3 a 6 mesiacov. Vzrastie len odchýlka pri ročnej splatnosti, no tento nárast nie je veľký. S cieľom lepšie ukotviť krátky koniec krivky teda použijeme $w_{ij} = 1$. V tabuľke 3 sú nakalibrované parametre pre takúto voľbu váh.

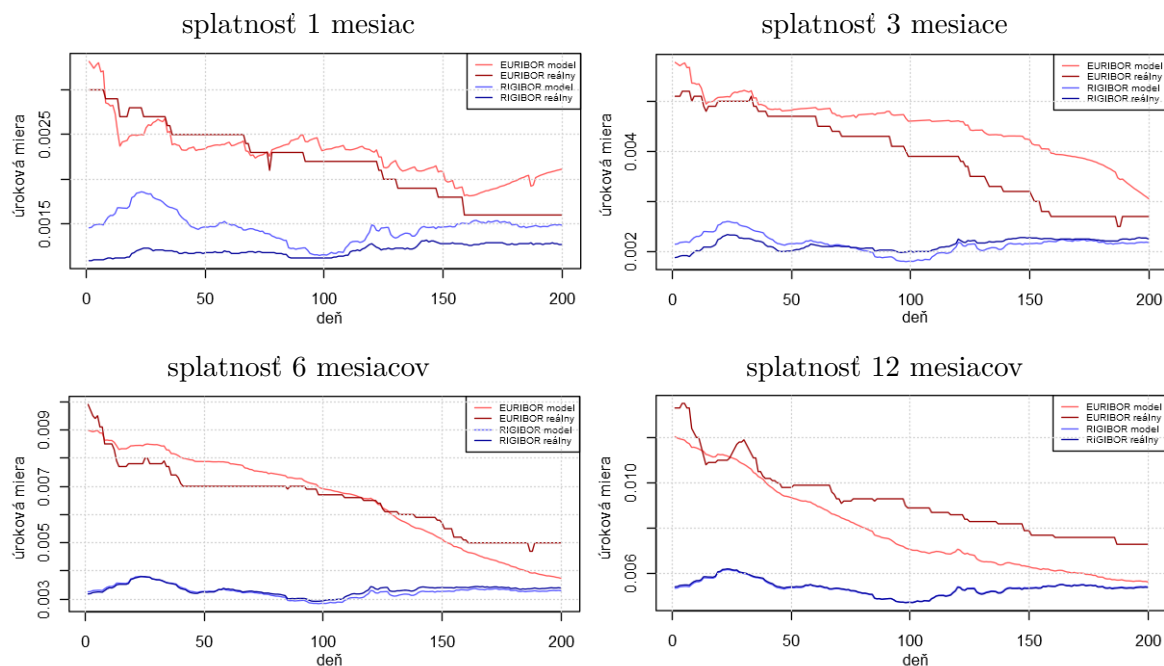
Rovnako sme analyzovali odchýlky aj v prípade EURIBOR-TALIBOR a EURIBOR-VILIBOR, výsledky možno nájsť v kapitole 5. Aj v nich sa prikláňame k voľbe $w_{ij}^e = \tau_j^2$ a $w_{ij} = 1$.

Na obrázku 11 sú zobrazené modelované a reálne úrokové miery EURIBORu a RI-

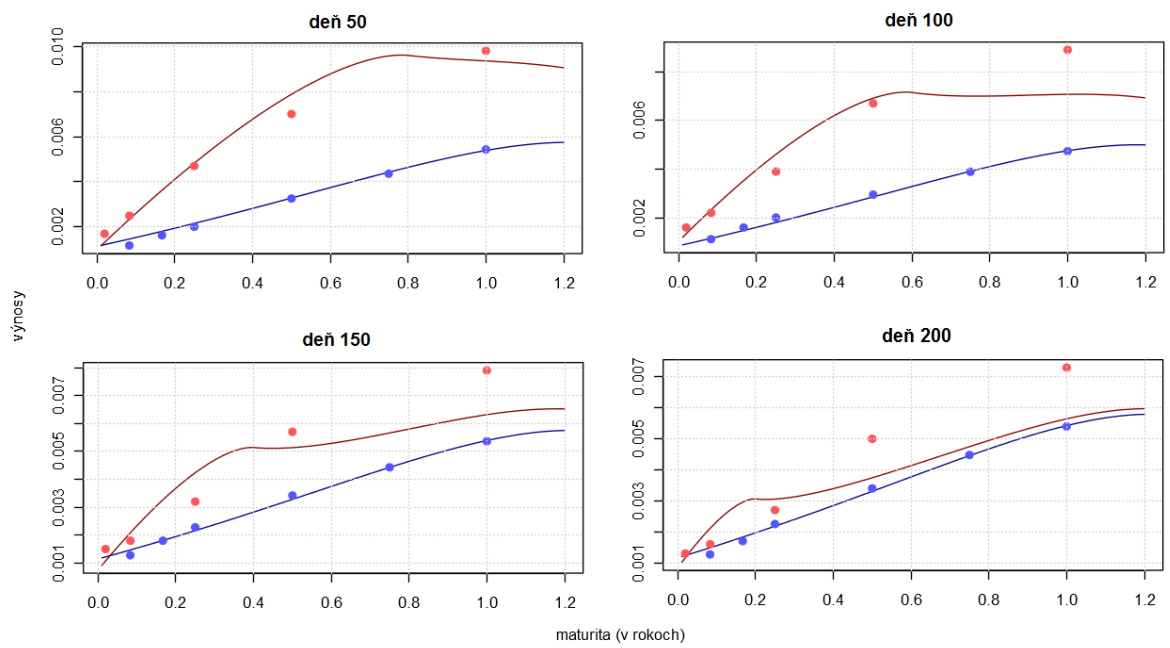
| α | β | σ_e | λ_d | σ_d |
|----------|----------|------------|-------------|------------|
| 0.006008 | 1.376476 | 0.062558 | -349.079 | 0.000072 |

Tabuľka 3: Nakalibrované parametre (EURIBOR-RIGIBOR)

GIBORu a na obrázku 12 zasa fitované výnosové krivky a reálne výnosy pre štyri vybrané dni. Vidíme, že odhadnuté úrokové miery sú oveľa presnejšie v prípade eurozóny. Všimnime si, že modelované úrokové miery RIGIBORu s dlhšími splatnosťami sú prťahované k EURIBORu rýchlejšie ako v skutočnosti (podobná situácia nastáva aj pri VILIBORE a TALIBORE, viď kapitola 5). To sa prejavuje aj na výnosových krivkách, ktoré v prípade vstupujúcej krajiny väčšinou nezachytávajú skutočný tvar výnosov.



Obr. 11: Vývoj modelovaných a reálnych úrokových mier EURIBORu a RIGIBORu pre danú splatnosť



Obr. 12: Fitované výnosy EURIBORu (modrá) a RIGIBORu (červená)

4 Predikcie

Short rate model je užitočný v praxi najmä vtedy, keď sme pomocou neho schopní aspoň približne predpovedať budúci vývoj úrokových mier. Na predpovedanie budúcich úrokových mier v eurozóne a vstupujúcej krajine, musíme najprv poznať budúce okamžité úrokové miery. V nasledujúcich podkapitolách najskôr odvodíme pravdepodobnostné rozdelenia pre short rate v eurozóne, spread a z nich plynúce rozdelenie short rateu vo vstupujúcej krajine. Následne otestujeme predikčnú silu modelu na simulovaných a reálnych dátach.

4.1 Podmienené rozdelenie short rate vo Vašíčkovom modeli

Na predpovedanie a určenie konfidenčných intervalov budúcej okamžitej úrokovej miery v eurozóne potrebujeme poznať jej podmienené rozdelenie. Zaujímá nás, z akého rozdelenia pochádza budúca hodnota short rate, ak poznáme tú dnešnú. Odvodenie tohto rozdelenia môžeme nájsť v práci [2] a jeho tvar pre $r_{t+\Delta t}$ pri danom r_t je

$$r_{t+\Delta t} | r_t \sim N \left(e^{-\kappa\Delta t} r_t + \theta (1 - e^{-\kappa\Delta t}), \frac{\sigma_e^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa\Delta t}) \right). \quad (4.1)$$

V úvode kapitoly 3 sme poznamenali, že Vašíčkov model kalibrujeme v rizikovo neutrálnnej pravdepodobnostnej miere s tromi parametrami $\alpha = \kappa\theta - \lambda_e\sigma_e$, $\beta = -\kappa$, σ_e , avšak v rozdelení vystupujú parametre modelu v reálnej pravdepodobnostnej miere, pričom platí

$$\kappa = -\beta, \quad \theta = \frac{\alpha + \lambda_e\sigma_e}{-\beta}.$$

Parameter κ poznáme, keďže poznáme β . Na výpočet parametra θ nám chýba λ_e . Tento parameter odhadneme metódou maximálnej vierohodnosti. Označme

$$\gamma = e^{-\kappa\Delta t}, \quad v^2 = \frac{\sigma_e^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa\Delta t}).$$

Rozdelenie (4.1) aplikujeme na časový rad nakalibrovannej okamžitej úrokovej miery v eurozóne R_0, \dots, R_n , teda

$$R_{i+1} | R_i \sim N \left(\gamma R_i + \theta(\lambda) (1 - \gamma), v^2 \right),$$

kde jediným neznámym parametrom je θ závisiaca od λ . Hustota podmieneného rozdelenia má teda tvar:

$$f(R_{i+1} | R_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} \exp \left\{ -\frac{[R_{i+1} - \gamma R_i - \theta(\lambda)(1 - \gamma)]^2}{2v^2} \right\}.$$

Ako sme už spomínali, na odhad parametra λ_e použijeme metódu maximálnej viero-
hodnosti. Tá spočíva v maximalizácii funkcie

$$L(\lambda) = \prod_{i=0}^{n-1} f(R_{i+1} | R_i),$$

no častejšie sa kvôli jednoduchosti maximalizuje funkcia

$$l(\lambda) = \ln L(\lambda) = \ln \prod_{i=0}^{n-1} f(R_{i+1} | R_i).$$

Nás zaujíma hodnota λ , pre ktorú je táto funkcia maximálna, teda hľadáme

$$\begin{aligned} \lambda_e &= \operatorname{argmax}_{\lambda} l(\lambda) \\ &= \operatorname{argmax}_{\lambda} \left\{ \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} \right)^n - \frac{1}{2v^2} \sum_{i=0}^{n-1} [R_{i+1} - \gamma R_i - \theta(\lambda)(1 - \gamma)]^2 \right\} \\ &= \operatorname{argmax}_{\lambda} \left\{ -\sum_{i=0}^{n-1} [R_{i+1} - \gamma R_i - \theta(\lambda)(1 - \gamma)]^2 \right\} \\ &= \operatorname{argmax}_{\lambda} \left\{ -\sum_{i=0}^{n-1} \left[R_{i+1} - \gamma R_i - \frac{\alpha + \lambda \sigma_e}{-\beta} (1 - \gamma) \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Funkcia je kvadratická a konkávna v λ , jej maximum nájdeme derivovaním. Optimálna hodnota parametra λ sa dá po krátkom výpočte a úpravách vyjadriť ako:

$$\lambda_e = \frac{-\beta}{n\sigma_e(1 - \gamma)} \sum_{i=0}^{n-1} (R_{i+1} - \gamma R_i) - \frac{\alpha}{\sigma_e}.$$

4.2 Podmienené rozdelenie spreadu v modeli Brownovho mostu

V predošlej kapitole sme vyjadrili podmienené rozdelenie európskej short rate na predpovedanie jej budúcich hodnôt. Rovnako chceme vedieť predpovedať aj short rate v domácej krajine. Najprv však musíme poznať podmienené rozdelenie pre model rozdielu úrokových mier (2.3).

Keďže sa v modeli (2.3) nachádza pri člene dw konštanta, podmienené rozdelenie bude opäť normálne. Zostavíme ODR pre strednú hodnotu spreadu:

$$d\mathbb{E}(\delta_t) = -\frac{\mathbb{E}(\delta_t)}{T^* - t} dt + \mathbb{E}(\sigma_d dw).$$

Druhý člen je nulový, pretože stredná hodnota prírastku Wienerovho procesu je nula, teda

$$d\mathbb{E}(\delta_t) = -\frac{\mathbb{E}(\delta_t)}{T^* - t} dt.$$

Riešením ODR dostávame tvar

$$\mathbb{E}(\delta_t) = \frac{T^* - t}{T^* - t_0} \delta_{t_0},$$

kde δ_{t_0} je známa a t_0 je čas, v ktorom pozorujeme hodnotu δ_{t_0} . Podmienené rozdelenie pre rozdiel okamžitých ú.m. má teda tvar:

$$\delta_t | \delta_{t_0} \sim N(m(t), V(t)),$$

kde

$$m(t) = \frac{T^* - t}{T^* - t_0} \delta_{t_0}$$

a disperziu $V(t)$ zatiaľ nepoznáme. Hustota podmieneného rozdelenia je

$$f(\delta_t | \delta_{t_0}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V(t)}} \exp\left\{-\frac{(\delta_t - m(t))^2}{2V(t)}\right\}.$$

Na vypočítanie disperzie dosadíme hustotu do Fokker-Planckovej PDR (1.6). Pomocou softvéru [13] sme upravili rovnicu na tvar, z ktorého vyplýva, že disperzia musí spĺňať ODR:

$$V'(t)(T^* - t) + 2V(t) = \sigma_d^2(T^* - t), \quad (4.2)$$

s podmienkou $V(t_0) = 0$. Najprv nájdeme homogénne riešenie, teda

$$\begin{aligned} V'(t) &= \frac{-2V(t)}{T^* - t}, \\ V(t) &= -\frac{(T^* - t)^2}{T^* - t_0} K. \end{aligned}$$

Celkové riešenie nájdeme metódou variácie konštánt, čiže $K = K(t)$. Dosadením do ODR (4.2) dostaneme

$$K'(t) = -\sigma_d^2 \frac{T^* - t_0}{(T^* - t)^2}.$$

Jej riešením je

$$K(t) = -\sigma_d^2 \frac{t - t_0}{T^* - t}.$$

Konečný tvar disperzie spreadu okamžitých úrokových mier teda je

$$V(t) = \frac{T^* - t}{T^* - t_0} \sigma_d^2 (t - t_0).$$

4.3 Podmienené rozdelenie short rate domácej krajiny

V predošlých dvoch podkapitolách sme odvodili podmienené rozdelenie okamžitej úrokovej miery v eurozóne

$$R_t | R_{t_0} \sim N \left(e^{-\kappa(t-t_0)} R_{t_0} + \theta (1 - e^{-\kappa(t-t_0)}), \frac{\sigma_e^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-t_0)}) \right),$$

ktorú modelujeme Vašíčkovým modelom (2.2) a podmienené rozdelenie rozdielu domácej a európskej okamžitej úrokovej miery

$$\delta_t | \delta_{t_0} \sim N \left(\frac{T^* - t}{T^* - t_0} \delta_{t_0}, \frac{T^* - t}{T^* - t_0} \sigma_d^2 (t - t_0) \right),$$

ktorý modelujeme Brownovým mostom (2.3). Zaujímá nás ešte podmienené rozdelenie okamžitej úrokovej miery pre domácu krajinu. Platí vzťah

$$r(t) = R(t) + \delta(t),$$

čiže podmienené rozdelenie pre $r(t)$ bude tiež normálne. Pre strednú hodnotu platí

$$\mathbb{E}(r(t)) = \mathbb{E}(R(t) + \delta(t)) = \mathbb{E}(R(t)) + \mathbb{E}(\delta(t))$$

a rovnako pre disperziu

$$\mathbb{D}(r(t)) = \mathbb{D}(R(t) + \delta(t)) = \mathbb{D}(R(t)) + \mathbb{D}(\delta(t)),$$

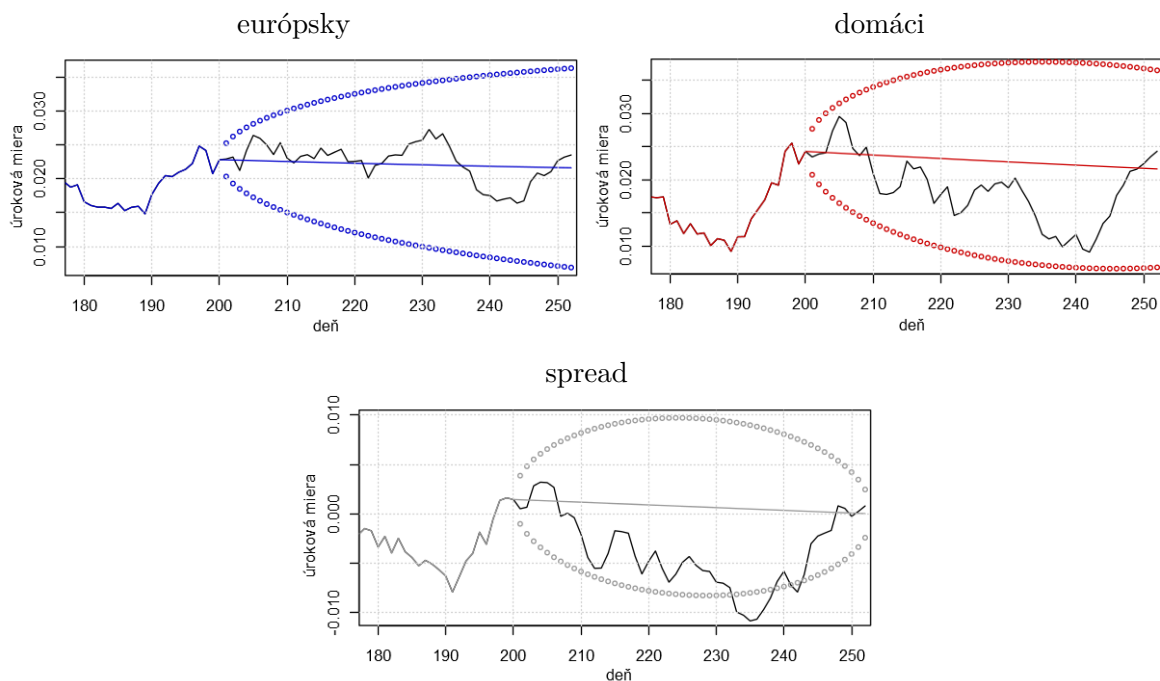
pričom sme využili predpoklad zo začiatku kapitoly (2), že $R(t)$ a $\delta(t)$ sa riadia nezávislými stochastickými procesmi. Podmienené rozdelenie domácej okamžitej úrokovej miery má teda tvar

$$r_t | R_{t_0}, \delta_{t_0} \sim N \left(e^{-\kappa(t-t_0)} R_{t_0} + \theta (1 - e^{-\kappa(t-t_0)}) + \frac{T^* - t}{T^* - t_0} \delta_{t_0}, \frac{\sigma_e^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-t_0)}) + \frac{T^* - t}{T^* - t_0} \sigma_d^2 (t - t_0) \right).$$

4.4 Aplikácia na simulované dáta

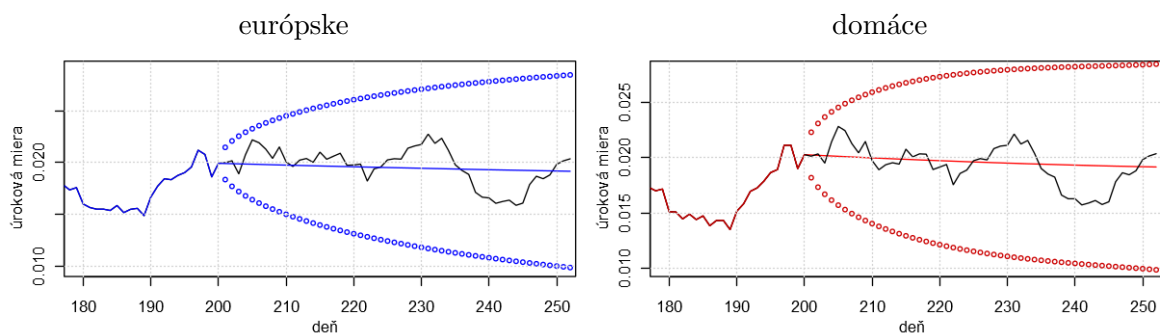
Rovnakým spôsobom ako v podkapitole 3.2 vygenerujeme simulované dáta s parametrami uvedenými v tabuľke 1. Pre časy $t = 1, 2, \dots, 200$ a čas vstupu do eurozóny $T^* = 253$ nakalibrujeme model. Okamžité úrokové miery a výnosové krivky predpovedáme jednorázovo v čase $t = 200$ na obdobie $t = 201, 202, \dots, 252$.

Predikcie short rateov a ich spreadu sú na obrázku 13. Predikované hodnoty sú stredné hodnoty príslušných pravdepodobnostných rozdelení odvodených v predošlých podkapitolách. Dolnú a hornú hranicu konfidenčných intervalov tvoria 2,5%-né a 97,5%-né kvantily týchto rozdelení.



Obr. 13: Predikcie a 95%-né konfidenčné intervaly simulovaných short rateov a spreadu

Na základe nakalibrovaných parametrov, predikovaných hodnôt okamžitých úrokových mier a ich konfidenčných intervalov vieme jednoducho dosadením do modelu predpovedať aj budúce výnosy a ich konfidenčné intervaly (obrázok 14). Predikovaný výnos pre daný deň je výnos, ktorý v tomto dni nastane s najväčšou pravdepodobnos-



Obr. 14: Predikcie a 95%-né konfidenčné intervaly 6 mesačných simulovaných úrokových mier

tou za podmienky, že náhodný proces sa riadi modelom. Konfidenčný interval výnosu pre daný deň nám zase hovorí, že budúca hodnota výnosu sa s 95%-nou pravdepodobnosťou bude nachádzať v tomto intervale, opäť za podmienky, že náhodný proces sa riadi modelom.

4.5 Aplikácia na reálne dáta

Použijeme rovnaké dáta, ako pri kalibrácii v kapitole 3. Predpoveď spravíme každý deň počas obdobia $t = 151, 152, \dots, 248$, čiže približne od začiatku augusta až po vstup do eurozóny. V každom dni nakalibrujeme model na predchádzajúcom 150-dňovom období a výnosové krivky predpovedáme vždy na jeden deň dopredu. Vykonanú predikciu porovnáme s benchmarkovou predikciou, ktorá použije skutočné výnosy zo dňa, kedy predpovedáme (teda predikuje, že výnosy sa nasledujúci deň nezmenia). Model je použiteľný, ak sú jeho predpovede v priemere bližšie k skutočným výnosom ako benchmark.

| <i>splatnosť</i> (<i>mesiace</i>) | <i>priemerná absolútna chyba (MAE)</i> | | | |
|--|--|------------------|----------------|------------------|
| | <i>EURIBOR</i> | | <i>RIGIBOR</i> | |
| | <i>model</i> | <i>benchmark</i> | <i>model</i> | <i>benchmark</i> |
| 1/4 | | | 2.651978e-04 | 2.020202e-06 |
| 1 | 2.725655e-04 | 1.757576e-05 | 3.214218e-04 | 2.020202e-06 |
| 2 | 1.811462e-04 | 1.535354e-05 | | |
| 3 | 1.130801e-04 | 1.505051e-05 | 5.971065e-04 | 1.616162e-05 |
| 6 | 9.437438e-05 | 2.060606e-05 | 8.107354e-04 | 2.424242e-05 |
| 9 | 3.760316e-05 | 2.464646e-05 | | |
| 12 | 3.639714e-05 | 2.888889e-05 | 1.4058681e-03 | 1.717172e-05 |

Tabuľka 4: Výsledky predikcií (EURIBOR-RIGIBOR)

V kalibrácii na dáta EURIBORu a RIGIBORu vychádza vysoká hodnota parametra σ_e , okolo 0.06. Z toho potom plynie aj vysoká volatilita podmienených rozdelení pre obe úrokové miery. Nemá teda význam počítat konfidenčné intervaly, pretože tie vyjdú príliš široké, čím úplne stratia výpovednú hodnotu (podobná situácia nastáva pri TALIBORe a VILIBORe).

V tabuľke 4 uvádzame výslednu chybovosť predikcií. Vidíme, že chyby pre EURIBOR aj RIGIBOR sú pre všetky splatnosti vyššie ako chyby benchmarkových predikcií. Dalo sa to očakávať už pri veľkej chybovosti nakalibrovaných výnosových kriviek v predošlej kapitole. Veľká je najmä chybovosť v predpovedaní úrokových mier RIGIBORu, pričom sa zväčšuje pre dlhšie maturity. Naopak v prípade EURIBORu platí, že predpovede sú lepšie pre dlhšie maturity. Tieto závery sa dalo očakávať kvôli voľbe váh, ktorú sme opisali pri kalibrácii v predošlej kapitole a dá sa to vidieť aj pri chybách kalibrácie na obrázkoch 9 a 10.

Na záver ešte uvádzame počty dní, v ktorých bol model v predpovedi úspešnejší ako benchmark (Tabuľka 5). Tu možno ešte lepšie vidno, že model je na predpovedanie RIGIBORu nepoužiteľný, keďže iba dvakrát prekonal benchmark - predpoveď založenú na úrokových mierach z predošlého dňa. Podobné výsledky dostávame aj v prípade TALIBORu a VILIBORu v kapitole 5.

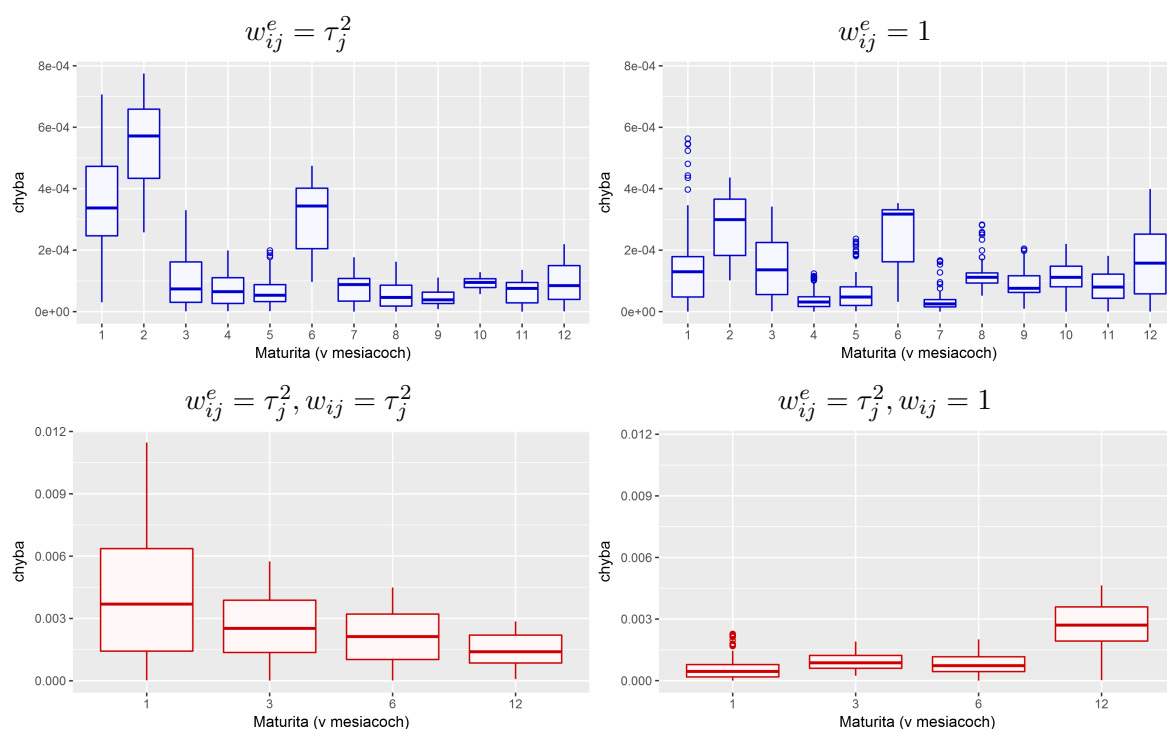
| | <i>splatnosť (mesiace)</i> | | | | | | |
|----------------|----------------------------|---|---|---|---|----|----|
| | 1/4 | 1 | 2 | 3 | 6 | 9 | 12 |
| <i>EURIBOR</i> | | 1 | 0 | 8 | 5 | 23 | 40 |
| <i>RIGIBOR</i> | 0 | 0 | | 2 | 0 | | 0 |

Tabuľka 5: Počet dní, v ktorých bol model v predikciách úspešnejší
(z celkového počtu 99 dní, EURIBOR-RIGIBOR)

5 Ďalšie výsledky

V tejto kapitole uvádzame dodatočné výsledky kalibrácie a predikcií na dátach EURIBORu v kombinácii s dátami TALIBORu a VILIBORu.

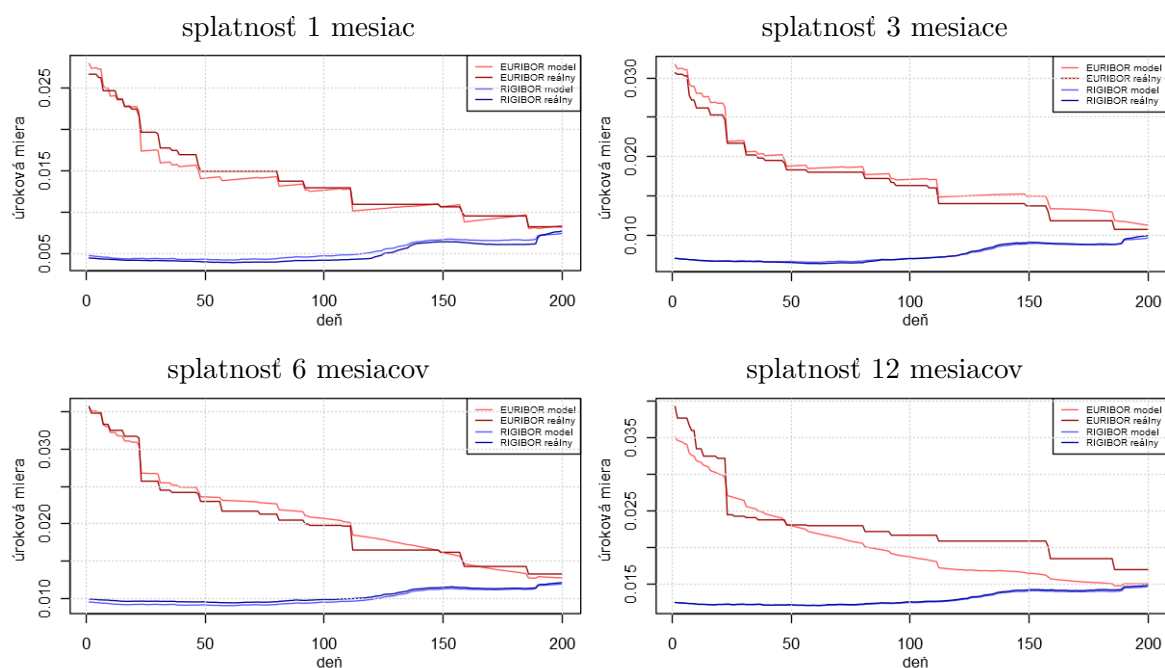
Kalibrácia EURIBOR-TALIBOR



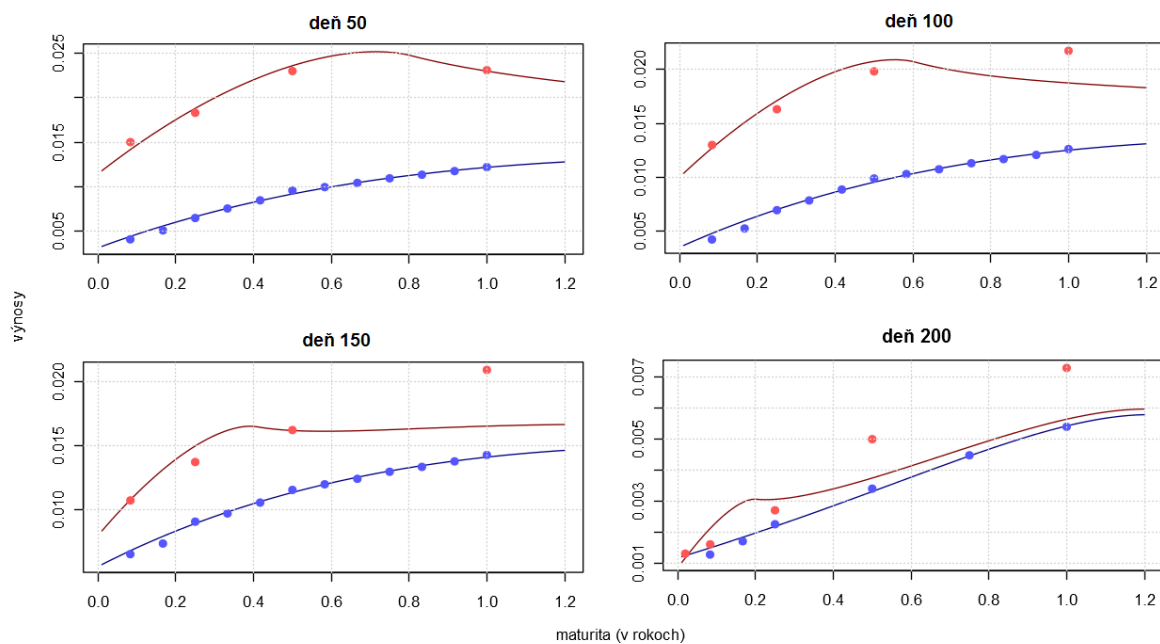
Obr. 15: Chybovosť nakalibrovaných výnosových kriviek,
hore - EURIBOR, dole - TALIBOR

| α | β | σ_e | λ_d | σ_d |
|----------|-----------|------------|-------------|------------|
| 0.033946 | -0.486528 | 0.202519 | -588.4282 | 0.000079 |

Tabuľka 6: Nakalibrované parametre (EURIBOR-TALIBOR)

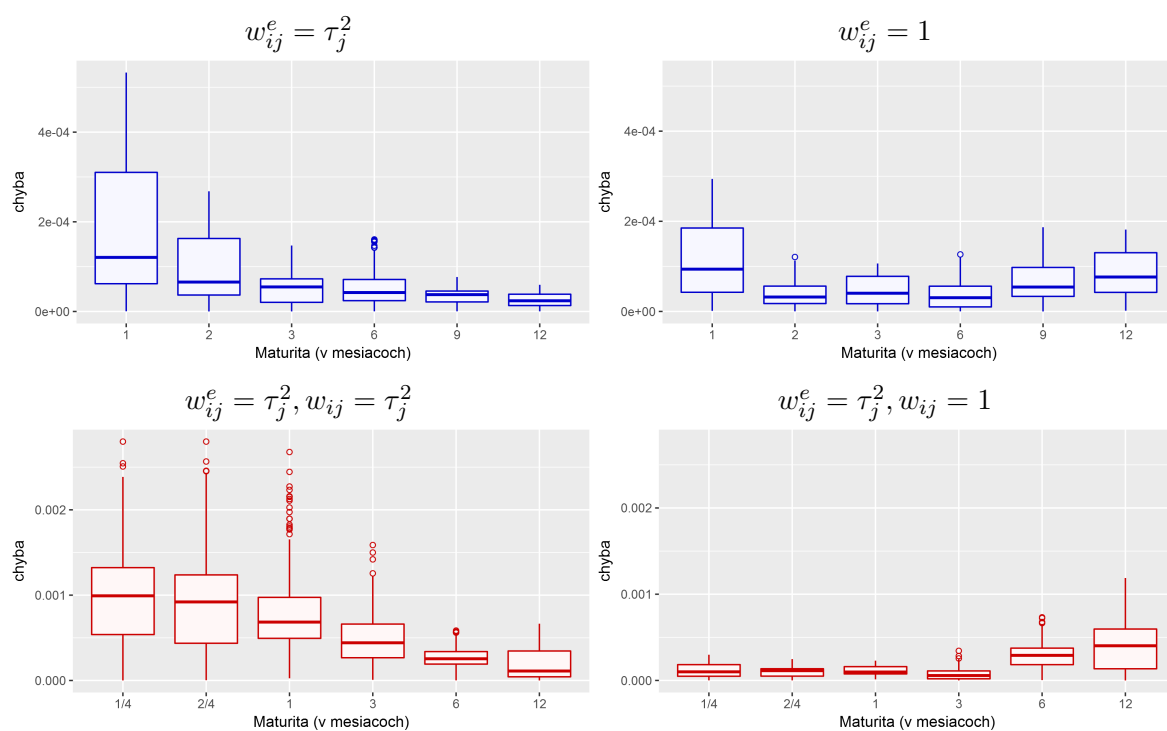


Obr. 16: Vývoj modelovaných a reálnych úrokových mier EURIBORu a TALIBORu pre danú splatnosť



Obr. 17: Fitované výnosy EURIBORu (modrá) a TALIBORu (červená)

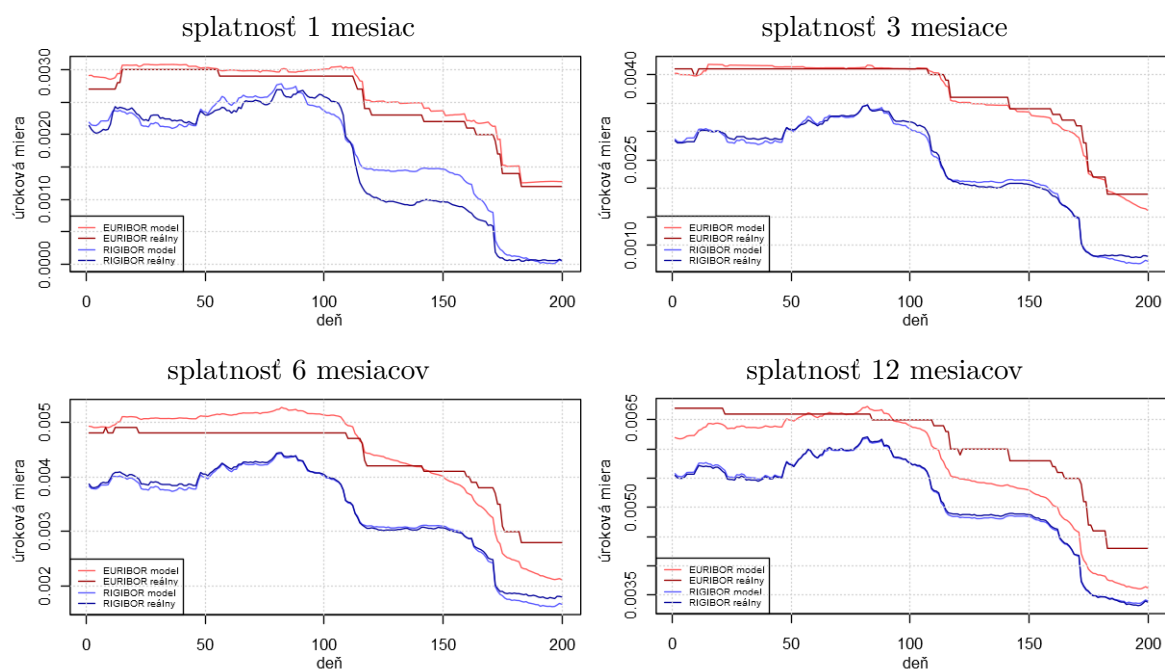
Kalibrácia EURIBOR-VILIBOR



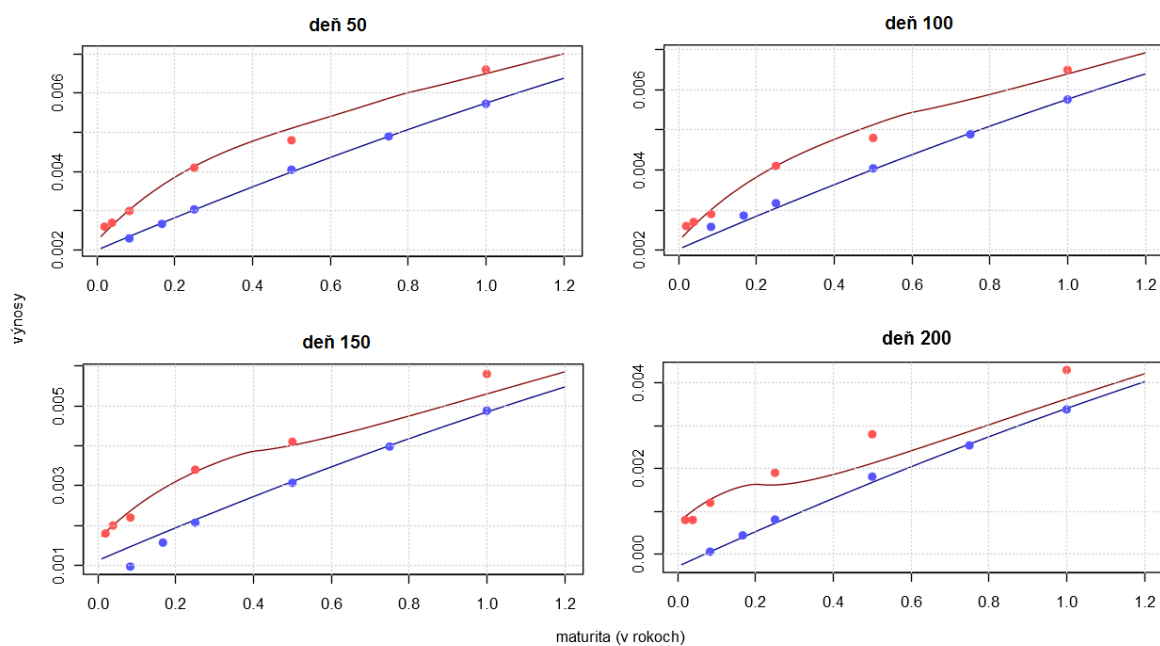
Obr. 18: Chybovosť nakalibrovaných výnosových kriviek,
hore - EURIBOR, dole - VILIBOR

| α | β | σ_e | λ_d | σ_d |
|----------|----------|------------|-------------|------------|
| 0.008317 | 0.045541 | 0.055274 | -0.050275 | 0.257894 |

Tabuľka 7: Nakalibrované parametre (EURIBOR-VILIBOR)



Obr. 19: Vývoj modelovaných a reálnych úrokových mier EURIBORu a VILIBORu pre danú splatnosť



Obr. 20: Fitované výnosy EURIBORu (modrá) a VILIBORu (červená)

Predikcie EURIBOR-TALIBOR

| <i>splatnosť</i> (<i>mesiace</i>) | <i>priemerná absolútna chyba (MAE)</i> | | | |
|--|--|------------------|----------------|------------------|
| | <i>EURIBOR</i> | | <i>TALIBOR</i> | |
| | <i>model</i> | <i>benchmark</i> | <i>model</i> | <i>benchmark</i> |
| 1 | 2.740040e-04 | 3.813725e-05 | 3.155746e-04 | 3.431373e-05 |
| 2 | 3.492898e-04 | 2.970588e-05 | | |
| 3 | 1.395777e-04 | 2.617647e-05 | 8.416984e-04 | 3.529412e-05 |
| 4 | 1.629454e-04 | 2.127451e-05 | | |
| 5 | 1.370286e-04 | 2.264706e-05 | | |
| 6 | 1.290538e-04 | 2.333333e-05 | 7.747391e-04 | 3.529412e-05 |
| 7 | 4.168777e-05 | 2.284314e-05 | | |
| 8 | 1.332151e-04 | 2.401961e-05 | | |
| 9 | 8.231152e-05 | 2.460784e-05 | | |
| 10 | 8.192626e-05 | 2.401961e-05 | | |
| 11 | 2.917638e-05 | 2.303922e-05 | | |
| 12 | 1.687121e-04 | 2.392157e-05 | 2.6146098e-03 | 4.607843e-05 |

Tabuľka 8: Výsledky predikcií (EURIBOR-TALIBOR)

| | <i>splatnosť (mesiace)</i> | | | | | | | | | | | |
|----------------|----------------------------|---|----|----|---|---|----|---|---|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| <i>EURIBOR</i> | 10 | 4 | 11 | 11 | 9 | 2 | 25 | 5 | 9 | 9 | 37 | 2 |
| <i>TALIBOR</i> | 2 | | 1 | | | 3 | | | | | | 0 |

Tabuľka 9: Počet dní, v ktorých bol model v predikciách úspešnejší
(z celkového počtu 102 dní, EURIBOR-TALIBOR)

Predikcie EURIBOR-VILIBOR

| <i>splatnosť</i> (<i>mesiace</i>) | <i>priemerná absolútna chyba (MAE)</i> | | | |
|--|--|------------------|----------------|------------------|
| | <i>EURIBOR</i> | | <i>VILIBOR</i> | |
| | <i>model</i> | <i>benchmark</i> | <i>model</i> | <i>benchmark</i> |
| 1/4 | | | 8.128737e-05 | 9.803922e-06 |
| 2/4 | | | 1.755224e-04 | 1.176471e-05 |
| 1 | 1.045164e-04 | 1.519608e-05 | 2.079936e-04 | 9.803922e-06 |
| 2 | 5.230854e-05 | 1.735294e-05 | | |
| 3 | 7.239679e-05 | 1.715686e-05 | 4.206773e-04 | 1.568627e-05 |
| 6 | 1.281567e-04 | 2.019608e-05 | 6.463447e-04 | 1.372549e-05 |
| 9 | 3.134128e-05 | 2.127451e-05 | | |
| 12 | 3.119520e-05 | 2.147059e-05 | 7.165991e-04 | 1.568627e-05 |

Tabuľka 10: Výsledky predikcií (EURIBOR-VILIBOR)

| | <i>splatnosť (mesiace)</i> | | | | | | | |
|----------------|----------------------------|-----|---|----|----|---|----|----|
| | 1/4 | 2/4 | 1 | 2 | 3 | 6 | 9 | 12 |
| <i>EURIBOR</i> | | | 7 | 17 | 12 | 9 | 20 | 22 |
| <i>VILIBOR</i> | 0 | 0 | 0 | | 4 | 1 | | 0 |

Tabuľka 11: Počet dní, v ktorých bol model v predikciách úspešnejší
(z celkového počtu 102 dní, EURIBOR-VILIBOR)

Záver

Myšlienkou tejto práce bolo modelovať úrokové miery v eurozóne a krajine, ktorá do eurozóny vstupuje. Úrokové miery by mali konvergovať s blížiacim sa vstupom do eurozóny. Na zachytenie konvergenzie sme použili model z práce [1], ktorého princíp je založený na modelovaní rozdielu úrokových mier Brownovým mostom.

Autori tejto práce nešpecifikovali model pre európske úrokové miery. Zvolili sme Vašíčkov model, ktorý patrí medzi jednoduchšie short rate modely. V spomínanej práci sú uvedené modelom implikované ceny dlhopisov pre vstupujúcu krajinu aj s postupom ich odvodenia. Autori však neuvádzajú výpočet dvoch diferenciálnych rovníc, ktoré vedú k riešeniu. Spravili sme teda vlastný výpočet, a tým overili správnosť tohto riešenia. Okrem toho sme analyticky vyjadrili niektoré vlastnosti modelu, ktoré sme od modelu intuitívne očakávali. Model sme kalibrovali minimalizáciou vzdialeností modelovaných a reálnych výnosových kriviek. Postup kalibrácie Vašíčkovho modelu sme prebrali z práce [5]. Podobný postup s menšími modifikáciami sme aplikovali aj pri kalibrácii modelu Brownového mostu. Správnosť kalibračných metód sa potvrdila na simulovaných dátach, kde nakalibrované parametre boli takmer totožné s parametrami použitými na generovanie dát. Kalibráciu sme potom aplikovali na reálne dáta eurozóny a troch krajín, ktoré prednedávnom vstupovali do eurozóny - Litva, Lotyšsko a Estónsko. Následne sme odvodili podmienené pravdepodobnostné rozdelenia európskeho short rateu, spreadu a z nich vyplývajúce rozdelenie domáceho short rateu, ktoré sú kľúčové pri predikciách. Predikcie reálnych úrokových mier mali veľkú chybovosť, najmä v prípade vstupujúcich krajín, čo sme očakávali už kvôli značným chybám pri kalibrácii. Ukázali sme, že model navrhnutý v práci [1] nie je vhodný na modelovanie medzibankových úrokových mier v troch nami zvolených krajinách.

Počas tejto práce sme používali medzibankové úrokové miery EURIBOR, RIGIBOR, TALIBOR a VILIBOR. Existujú však aj iné typy úrokových mier, na ktorých by sa mohol model odskúšať. Takisto by sa dalo model otestovať aj pre iné krajiny, ktoré v minulosti vstúpili do eurozóny. Ďalšou možnosťou by mohla byť modifikácia samotného modelu. Vašíčkov model na modelovanie európskych výnosových kriviek sa dá zameniť za iný, zložitejší model, prípadne sa môže upraviť aj druhá stochastická rovnica modelu na modelovanie spreadu.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Ajevskis V., Vitola K.: *A Convergence Model of the Term Structures of Interest Rates*, Review of Finance 14 (2010): 727–747
- [2] Čechvala M.: *Kalibrácia jednofaktorového modelu úrokových mier pomocou viacerých kritérií*, Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava 2015
- [3] Kuric T.: *Radonova-Nikodymova veta*, Bakalárska práca, Prírodovedecká fakulta Masarykovej univerzity, Brno, 2013
- [4] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, 2005. ISBN 80-8057-651-3
- [5] Halgašová J., Stehlíková B., Bučková Z.: *Estimating the short rate from the term structures in the Vasicek model*, Tatra Mountains Mathematical Publications 61 (2014), 87-103
- [6] Rouah F.D.: *The Feynman-Kac Theorem*, <http://www.frouah.com/finance>
- [7] Santamaria T. C., Schwartz E. S.: *Convergence within the EU: Evidence from Interest Rates*, Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA, vol. 29, no. 2-2000, 243-266
- [8] Stehlíková B., Zíková Z.: *Convergence model of interest rates of CKLS type*, Kybernetika 48 (2012), 567-586
- [9] Ševčovič D., Stehlíková B., Mikula K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, STU, 2009. ISBN 978-80-227-3014-3
- [10] Eesti Pank, *TALIBOR*, dostupné na internete (19.4.2017): <http://statistika.eestipank.ee/?lng=en#listMenu/1730/>
- [11] European Money Market Institute, *Euribor Rates*, dostupné na internete (19.4.2017): <https://www.emmi-benchmarks.eu/euribor-org/euribor-rates.html>
- [12] Latvijas Banka, *RIGIBOR*, dostupné na internete (19.4.2017): <https://www.bank.lv/statistika/naudas-tirgus-index/rigibid-rigibor-vesturiskie-dati>

- [13] Softvér wxMaxima, dostupné na internete (19.4.2017):
<http://andrejv.github.io/wxmaxima/>
- [14] Lietuvos Bankas, *VILIBOR*, dostupné na internete (19.4.2017):
<http://www.lb.lt/statistics/statbrowser.aspx?group=7222>