UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

SPRÁVA GARANTOVANÉHO FONDU V DÔCHODKOVOM SYSTÉME NA SLOVENSKU

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2017

Bc. Katarína Remiarová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

SPRÁVA GARANTOVANÉHO FONDU V DÔCHODKOVOM SYSTÉME NA SLOVENSKU

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	9.1.9 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2017

Bc. Katarína Remiarová

37444684

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Katarína Remiarová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Správa garantovaného fondu v dôchodkovom systéme na Slovensku.
Management of the guaranteed fund in the pension system in Slovakia.

Cieľ: Úrokové miery sú v súčasnosti nízke, čo vyvoláva otázky ohľadne efektívnosti garantovaného fondu. V práci pôjde o zvažovanie rôznych alternatív na efektívne riadenie, ktoré by poskytovalo aj po odpočítaní poplatkov adekvátne výnosy.

Vedúci: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 21.01.2016

Dátum schválenia: 25.01.2016

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

....

študent vedúci práce

Poďakovanie

Touto cestou by som sa rada poďakovala vedúcemu svojej diplomovej práce doc. Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD. za jeho ochotu, rady a odbornú pomoc, ktorá mi veľmi pomohla pri písaní tejto práce. Ďalej by som sa chcela poďakovať doc. RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za jej pomoc pri hľadaní chyby v kalibrácii Vašíčkovho modelu.

Abstrakt

REMIAROVÁ, Katarína: Správa garantovaného fondu v dôchodkovom systéme na Slovensku [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2017, 63s.

V tejto práci sa zaoberáme správou dlhopisového garantovaného fondu v dôchodkovom systéme na Slovensku. Na začiatku charakterizujeme dlhopisový garantovaný fond. Následne vyberieme model, ktorý použijeme na simuláciu okamžitých úrokových mier, a nakalibrujeme jeho parametre. Taktiež si povieme ako z okamžitej úrokovej miery odvodíme celú krivku časovej štruktúry úrokových mier. Ďalej si povieme, kedy budeme dlhopisy oceňovať proti krivke, kedy pomocou výnosu do splatnosti a ako budeme počítať ich duráciu. Potom si popíšeme program, ktorý nám bude spravovať naše simulované portfóliá. Nakoniec otestujeme rôzne kombinácie strategických alokácií a durácií a určíme v koľkých prípadoch by nastal pokles majetku vo fonde počas 10-ročného sledovaného obdobia. Naše výsledky naznačujú, že pravdepodobnosť poklesu dôchodkovej jednotky počas 10-ročního obdobia je minimálna, ak je použitá vhodná strategická alokácia.

Kľúčové slová: druhý pilier, dlhopisový fond,Vašíčkov model, simulácie úrokových mier, testovanie investičných stratégií, strategické alokácie, durácia

Abstract

REMIAROVÁ, Katarína: Management of guaranteed fund in the pension system in Slovakia [master thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2017, 63p.

In this work we deal with the management of guaranteed fund in the pension system in Slovakia. In the beginning, we characterize the guaranteed fund. Then we select the model that is going to be used to simulate the instantaneous interest rates and calibrate its parameters. We also explain how to deduct the entire term structure of interest rates from the short rate. In next section we declare when we price our bonds against the curve, when with yield to maturity and how will be counted their duration. Then we describe the program that is going to manage our simulated portfolios. Finally, we test various combinations of strategic allocations and durations, and determine in which cases a decrease in the fund will occur over the 10-year period. Our results suggest that the probability of a retirement unit's decrease over the 10-year period is minimal if the appropriate strategic allocation is used.

Keywords: second pillar, bond fund, Vašíček model, simulation of interest rates, testing of investment strategies, strategic allocation, duration

Obsah

Úvod

Svetové trhy sa v roku 2008 otriasli v základoch, v septembri tohto roku totiž zbankrotovala Americká investičná banka Lehman Brothers, čo je považované za začiatok svetovej hospodárskej krízy. Podnetom vzniku hospodárskej krízy bola kríza realitného trhu v USA, ktorá vznikla ako dôsledok ľahkovážneho poskytovania rizikových hypoték bankami širokej skupine nesolventného obyvateľstva s nižším životným štandardom na základe nezodpovedných ratingových agentúr. Dlžníci nesplácali a hypotekárne ústavy nemali z čoho poskytnúť ďalšie úvery. Finančné trhy sa začali rúcať, nakoľko boli ručené nebonitnými hypotekárnymi záložnými listami. Kríza sa rýchlo rozširovala a nakazila medzibankové trhy nielen v Amerike ale aj v Európe. Na trhoch nastala neistota a úrokové sadzby začali kolísať. Olej do ohňa priliali aj praskajúce realitné bubliny a globálna úverová kríza, ktorá sťažila prístup k finančným zdrojom a nabúrala dôveru investorov, pričom rástli svetové ceny ropy, energií aj potravín, čo priťažovalo tak výrobcom ako aj spotrebiteľom. Na akciových trhoch došlo k rekordným prepadom, od Európy, USA, až po Japonsko a Rusko cenné papiere strácali svoju hodnotu. Na burzách sa nekontrolovane vypredávalo a dochádzalo k ďalším finančným prepadom. V roku 2009 sa v Európe zastavil hospodársky rast, dokonca aj také silné ekonomiky ako je Veľká Británia a Nemecko boli v recesii. Táto kríza nám dokonca privodila niečo, čo sme doteraz považovali za nemožné, sú tým negatívne úrokové sadzby niektorých dlhopisov.

Táto skutočnosť môže spôsobiť problémy aj dlhopisovým fondom, čo sa negatívne prejavilo napríklad aj pri zhodnocovaní finančných prostriedkov v garantovaných fondoch druhého piliera dôchodkových správcovských spoločností na Slovensku, čo je predmetom tejto diplomovej práce. Garantované fondy druhého piliera sú zákonom prísne obmedzované, do čoho môžu a do čoho nemôžu investovať. Investície by mali byť rozložené tak, aby z dlhodobého - desaťročného hľadiska neklesla ich hodnota, v opačnom prípade musia dôchodkové správcovské spoločnosti siahnuť na vlastné zdroje a doplniť nimi majetok vo fonde.

Cieľom tejto diplomovej práce je realisticky nasimulovať rôzne scenáre úrokových mier a na nich otestovať viacero investičných stratégií. Scenáre budeme simulovať pomocou Vašíčkovho modelu, ktorý nakalibrujeme na úrokoch Euriboru podľa [11].

Potom sa budeme zaoberať vytváraním investičných stratégií, ktoré sa budú odlišovať nielen strategickou alokáciou, teda tým v akom pomere rozdelíme naše prostriedky medzi jednotlivé druhy dlhopisov, ale budú mať aj rôzne durácie. Neskôr budeme pomocou veľkého množstva simulácií zisťovať, ktoré stratégie zlyhávajú a ktoré sú naopak najspoľahlivejšie. Táto práca môže byť prínosná pre kohokoľvek, kto sa zaujíma o investičné stratégie dlhopisových fondov.

1 Dlhopisový garantovaný fond

Podľa zákona o starobnom dôchodkovom sporení č. 43/2004 každá dôchodková správcovská spoločnosť povinne spravuje a vytvára minimálne 2 fondy:

- akciový negarantovaný fond
- dlhopisový garantovaný fond

1.1 Obmedzenia v zákone

Ako už názov napovedá, v akciovom fonde má dôchodková správcovská spoločnosť pomerne voľné ruky pri investovaní. Akciový fond má vyšší potenciál výnosov ale zároveň vyššie riziko straty, pretože investuje výlučne do akcií. Nakoľko tento fond nie je garantovaný, pri poklese jeho hodnoty o časť svojich vkladov prídu klienti a nie dôchodková správcovská spoločnosť. Inak je to pri dlhopisovom garantovanom fonde, kde by prípadný pokles hodnoty majetku museli spoločnosti hradiť z vlastných zdrojov a preto sú pri investovaní oveľa opatrnejší. Podrobne je to opísané v § 63d Povinnosť dôchodkovej správcovskej spoločnosti doplniť majetok do dôchodkového fondu zákona o starobnom dôchodkovom sporení [16]. Hovorí sa tam, že dôchodková správcovská spoločnosť je povinná doplniť majetok v dlhopisovom garantovanom fonde, ak počas sledovaného obdobia klesne hodnota majetku v ňom. Pod sledovaným obdobím sa myslí 10-ročné obdobie, nové sledované obdobie začína vždy 1. januára a začaté sledované obdobia plynú súbežne. Pokles hodnoty majetku sa meria ako súčin absolútnych hodnôt poklesu hodnoty dôchodkovej jednotky, ktorej hodnotu v čase t budeme označovať a_t, a priemernej čistej hodnoty majetku v sledovanom období. Výpočet poklesu hodnoty dôchodkovej jednotky máme vyjadrený v rovnici (1).

$$Pokles\, hodnoty = min\left(0, \frac{\frac{\sum_{t\in last\, month} a_t}{\sum_{t\in last\, month} 1}}{\frac{\sum_{t\in first\, month} a_t}{\sum_{t\in first\, month} 1}} - 1\right) \tag{1}$$

Taktiež je zákonom obmedzené, čo môže dôchodková správcovská spoločnosť (ďalej iba DSS) nakupovať, presne je to popísané v § 81 Majetok v dôchodkovom fonde a v § 85 Strategické umiestnenie investícií dôchodkových fondov zákona o starobnom dôchodkovom sporení [16].

Ďalšie obmedzenia v súvislosti s bezpečným investovaním vkladov sporiteľov sa týkajú zloženia majetku v dlhopisovom garantovanom dôchodkovom fonde. Tieto sú špecifikované v § 86 zákona o starobnom dôchodkovom sporení.

§ 86

Dlhopisový garantovaný dôchodkový fond

1. Majetok v dlhopisovom garantovanom dôchodkovom fonde môžu tvoriť len dlhopisové a peňažné investície a obchody určené na obmedzenie devízového a úrokového rizika.

2. Majetok v dlhopisovom garantovanom dôchodkovom fonde, ktorý nie je zabezpečený voči devízovému riziku, môže tvoriť najviac 5 % čistej hodnoty majetku v dlhopisovom garantovanom dôchodkovom fonde.

Zdroj :[16]

1.2 Druhy dlhopisov

V tejto podkapitole si spomenieme niektoré druhy dlhopisov, zaoberať sa budeme iba tými, ktoré podľa zákona môžu byť súčasťou dlhopisového garantovaného fondu. Podľa emitentov môžeme nakupovať nasledujúce typy dlhopisov [9, 7].

- Štátne dlhopisy
  - Poskytujú najnižšie výnosy, ale sú najbezpečnejšie, keďže sú vydávané štátom, ktorý za ne ručí. Majú vysokú likviditu.
- Hypotekárne záložné listy
  - Sú kryté pohľadávkami k hypotekárnym úverom, teda reálne existujúcou nehnuteľnosťou.
  - Väčšina európskych bánk poskytuje hypotéky, ktorých úrok je súčtom trojmesačného Euriboru a fixnej prirážky.
- Korporátne (podnikové) dlhopisy

  - Emitentmi sú korporácie, ktoré môžu kedykoľvek skrachovať. Z toho dôvodu sú najrizikovejšie z tohto zoznamu.

- Bankové dlhopisy
  - Vydávajú ich banky a vďaka reguláciám bankového sektora sú bezpečnejšie ako korporátne
- Komunálne obligácie
  - Sú vydávané obcami alebo vyššími územnými celkami, teda sú pomerne bezpečné.

V tejto práci sa kvôli jednoduchosti budeme zaoberať iba prvými štyrmi typmi, pretože úrokové sadzby komunálnych dlhopisov sa nesprávajú veľmi rozdielne oproti štátnym, bolo by však ťažšie nájsť správne parametre na ich simuláciu.

1.3 Poplatky

So sporením si na dôchodok v druhom pilieri sú spojené poplatky. Výška poplatkov je štátom regulovaná v zákone o dôchodkovom sporení [16]. V zmysle tohto zákona má dôchodková správcovská spoločnosť (DSS) právo si účtovať tieto poplatky:

- odplatu za správu dôchodkového fondu,
- odplatu za vedenie osobného dôchodkového účtu,
- odplatu za zhodnotenie majetku v dôchodkovom fonde.

Štát v zákone o dôchodkovom sporení stanovil horné limity poplatkov, ale minimálne nie. Takže DSS si môžu, ale nemusí účtovať najvyšší možný poplatok. Výška poplatkov za správu dôchodkového fondu nesmie prevýšiť 0,3 % priemernej ročnej predbežnej čistej hodnoty majetku v dôchodkovom fonde. Odplata za vedenie osobného dôchodkového účtu môže byť maximálne 1 % zo sumy každého príspevku. Za zhodnotenie majetku v dôchodkovom fonde si DSS poplatok nemôže účtovať vždy, ale iba vtedy, ak fond vykáže zisk. Výška poplatku za zhodnotenie majetku sa vyčísli podľa vzorca (2) uvedeného v zákone o druhom pilieri [16].

$$O_t = K * NAV_t * \left(\frac{AHDJ_t}{max(AHDJ_{t-1})} - 1 \right) \tag{2}$$

V tomto výpočte sa vždy sleduje zhodnotenie majetku za posledné 3 roky. Veličina O_t predstavuje výšku poplatku za zhodnotenie majetku v dôchodkovom fonde v čase t, ktorý sa počíta ako súčin troch činiteľov:

- NAV_t - je čistá hodnota majetku v dôchodkovom fonde v čase t;
- $\left(\frac{AHDJ_t}{max(AHDJ_{t-1})} - 1 \right)$ - predstavuje zhodnotenie majetku, čo je podiel aktuálnej hodnoty dôchodkovej jednotky v čase t, vydelená jej maximom za posledné tri roky a zároveň znížená o jedna;
- K - je koeficient na určenie výšky poplatku za zhodnotenie majetku v dôchodkovom fonde, ktorý je zákonom [16] limitovaný a môže byť maximálne 0.1. Znamená to, že hodnota poplatku z dosiahnutého zhodnotenia majetku v danom fonde nemôže byť viac ako 10 % nárastu jeho čistej hodnoty.

Každá dôchodková správcovská spoločnosť má právny nárok na odplatu za zhodnotenie majetku v dôchodkovom fonde iba vtedy, ak vypočítaná čiastka podľa vyššie uvedeného vzorca (2) bude mať kladnú hodnotu. V prípade záporného výsledku DSS nemá právo si účtovať poplatok za zhodnotenie.

2 Modely úrokových mier

V druhej polovici minulého desaťročia nás postihla hospodárska kríza, ktorá je podľa niektorých odborníkov najhoršia od čias „Svetovej hospodárskej krízy“ v medzivojnovom období 20. storočia. Zasiahla finančné trhy prakticky na celom svete. Investori začali vyhľadávať menej rizikové investície ako sú napríklad štátne dlhopisy. Úrokové sadzby začali klesať natoľko, že sa dostali dokonca do záporných hodnôt. Na obrázku č. 1 môžeme vidieť, ako sa menili výnosy nemeckého štátneho 10-ročného dlhopisu od roku 2007 až po súčasnosť. Až do tohto obdobia boli záporné úrokové miery nepredstaviteľné a väčšina modelov ich nepripúšťala.

Obr. 1: Výnos do splatnosti nemeckých 10-ročných dlhopisov. Zdroj:[10]

2.1 Jednofaktorové modely okamžitej úrokovej miery

Asi najjednoduchšou alternatívou na modelovanie scenárov úrokových mier by bolo použiť vhodný jednofaktorový model (3). Budeme teda predpokladať, že vývoj úrokových mier je stochastický proces s jedným zdrojom náhodnosti.

$$dr = \mu(r,t)\,dt + \sigma(r,t)\,dw \tag{3}$$

Vzhľadom na vyššie spomínané záporné úrokové miery budeme na nasimulovanie scenárov úrokových mier potrebovať model, ktorý túto možnosť pripúšťa. Pravdepodobne najznámejším príkladom takéhoto modelu je Vašíčkov model, ktorý popisuje rovnica (5). Tento model patrí do kategórie takzvaných mean-reversion modelov (rovnica 4), teda modelov, ktoré majú tendenciu smerovať k parametru θ , ktorý vyjadruje dlhodobo rovnovážnu hodnotu. Pričom w je wienerov proces a κ, θ a σ sú kladné parametre.

$$dr_t = \kappa\left(\theta - r_t\right)dt + \sigma r_t^{\gamma} dw_t \tag{4}$$

$$dr_t = \kappa\left(\theta - r_t\right)dt + \sigma dw_t \tag{5}$$

Vašíčkov model síce pripúšťa záporné úrokové miery, ale predpokladá konštantnú volatilitu. Teda, že volatilita nezávisí od okamžitej úrokovej miery, čo v realite neplatí.

Nekonštantnú volatilitu predpokladá napríklad CIR model (rovnica 6), v ktorom je parameter σ vynásobený odmocninou z úroku.

$$dr_t = \kappa\left(\theta - r_t\right)dt + \sigma r_t^{1/2} dw_t \tag{6}$$

Tento model však nepripúšťa záporné úrokové miery, naše simulácie by teda nemali dostatočnú výpovednú hodnotu, pretože by nebrali do úvahy časť možných scenárov.

Mohli by sme sa zaoberať aj ďalšími jednofaktorovými modelmi, vo všetkých by sme však našli v zásade podobné problémy. Jedným z možných postupov je nasimulovať oba modely a následne ich skombinovať. Znamenalo by to, že by sme pripustili záporné úrokové miery a zároveň by sme mali nekonštantnú volatilitu. Je však otázne, akú váhu máme dať Vašíčkovmu a akú CIR modelu. Ďalším možným riešením je posunutie CIR modelu odčítaním nejakej konštanty. Ak by sme si v dátach odhadli hranicu, ktorú úrokové miery nikdy nepodlezú, tak by sme mohli CIR model posunúť o túto hranicu a mali by sme dosiahnuť hodnoverné výsledky simulácií. Určenie tejto hranice by však bolo komplikované, preto budeme v tejto práci pracovať výlučne s Vašíčkovým modelom.

2.2 Časová štruktúra úrokových mier

V predchádzajúcej časti sme si zvolili model, ktorý budeme používať na simuláciu okamžitej úrokovej miery. V tejto časti si vysvetlíme, ako z okamžitej úrokovej miery vytvoríme časovú štruktúru úrokových mier.

$$ln\,P\left(\tau,r\right)=\frac{1-e^{-\kappa\tau}}{\kappa}\left(R_{\infty}-r\right)-R_{\infty}\tau-\frac{\sigma^2}{4\kappa^3}\left(1-e^{-\kappa\tau}\right) \tag{7}$$

Ak poznáme okamžitú úrokovú mieru, teda začiatok výnosovej krivky, celú časovú štruktúru vieme určiť z rovníc (8).

$$\begin{aligned}
P\left(r,\tau\right) &= A\left(\tau\right)e^{-B(\tau)r}\\
\tau &= T-t\\
B\left(\tau\right) &= \frac{1-e^{-\kappa\tau}}{\kappa}\\
ln\,A\left(\tau\right) &= \left(\frac{1-e^{-\kappa\tau}}{\kappa}-\tau\right)R_{\infty}-\frac{\sigma^2}{4\kappa^3}\left(1-e^{-\kappa\tau}\right)^2\\
R_{\infty} &= \theta-\frac{\lambda\sigma}{\kappa}-\frac{\sigma^2}{2\kappa^2}
\end{aligned} \tag{8}$$

Podrobnejšie je to popísané v [3].

2.3 Kalibrácia Vašíčkovho modelu

V práci budeme potrebovať simulácie úrokových mier, aby sme mali na čom naše stratégie/portfóliá testovať. Úrokové miery budeme simulovať už spomínaným Vašíčkovým modelom, pretože na rozdiel napríklad od CIR modelu pripúšťa záporné úrokové miery. Najskôr však potrebujeme nakalibrovať parametre modelu, konkrétne κ, θ, λ a σ. Parametre Vašíčkovho modelu budeme kalibrovať na základe článku [11]. V tomto článku sa však namiesto κ, θ a λ odhadujú parametre α a β, ktorých vzťah s pôvodnými parametrami je v rovnici (9).

$$\alpha=\kappa\theta-\lambda\sigma,\ \beta=-\kappa \tag{9}$$

Účelová funkcia, ktorú budeme minimalizovať, je suma vážených štvorcov odchýlok reálne pozorovaných úrokov od úrokov vypočítaných Vašíčkovým modelom. Túto funkciu môžeme vidieť v rovnici (10).

$$F=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}w_{ij}\left(R\left(\tau_j,r_i\right)-R_{ij}\right)^2=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{w_{ij}}{\tau_j^2}\left(lnP\left(\tau_j,r_i\right)+\tau_jR_{ij}\right)^2 \tag{10}$$

R_{ij} je úrok pozorovaný v i-ty deň so splatnosťou j a $R\left(\tau_j,r_i\right)$ je úrok počítaný Vašíčkovým modelom s j-tou maturitou τ_j a okamžitou úrokovou mierou r_i, ktorá prislúcha i-temu dňu. Počet pozorovaní predstavuje n a m je počet rôznych maturít pozorovaných v každom čase; w_{ij} sú prislúchajúce váhy, my za ne budeme dosádzať, rovnako ako v [11], τ_j^2.

Na výpočet úrokov Vašíčkovým modelom však potrebujeme aj okamžitú úrokovú mieru. Problémom je, že okamžitú úrokovú mieru nevieme pozorovať a aproximácia cez overnight nie je presná. Budeme ich teda musieť odhadovať spolu s ostatnými parametrami. Účelovú funkciu budeme potom minimalizovať cez parametre α, β, σ^2 a $r = r_1, ...r_n$.

V článku sa taktiež uvádza, že nakoľko je účelová funkcia kvadratická v α, σ^2 a $r = r_1, ...r_n$, vieme optimálne hodnoty týchto parametrov ľahko dopočítať pomocou sústavy n+2 lineárnych rovníc (11).

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} \\ c_1 &= \frac{1}{\beta}\left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau\right) \\ c_2 &= \frac{1}{2\beta^2}\left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta\tau})^2}{2\beta}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_1^2 & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_1 c_2 \\ \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_1 c_2 & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_2^2 \end{bmatrix} \\ B = C' &= \begin{bmatrix} \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_1 c_0 & \sum_j \frac{w_{2,j}}{\tau_j^2} c_1 c_0 & \cdots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} c_1 c_0 \\ \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_2 c_0 & \sum_j \frac{w_{2,j}}{\tau_j^2} c_2 c_0 & \cdots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} c_2 c_0 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_j \frac{w_{2,j}}{\tau_j^2} c_0^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} c_0^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
x' &= \begin{bmatrix} \alpha & \sigma^2 \end{bmatrix} \\
y' &= \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix} \\
u' &= \begin{bmatrix} -\sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} R_{i,j} c_1 & -\sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} R_{i,j} c_2 \end{bmatrix} \\
v' &= \begin{bmatrix} -\sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} R_{1,j} c_0 & -\sum_j \frac{w_{2,j}}{\tau_j^2} R_{2,j} c_0 & \cdots & -\sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} R_{n,j} c_0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{14}$$

Takto vypočítame hodnoty α, σ^2 a $r = r_1, ...r_n$ pre množinu hodnôt β. Optimálne riešenie následne nájdeme robustnou optimalizáciou cez parameter β.

Z kalibrácie dostaneme 3 parametre, avšak Vašíčkov model má 4 parametre.

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sqrt{\sigma^2}, \\
\kappa &= -\beta, \\
\lambda &= \frac{\kappa\theta - \alpha}{\sigma},
\end{aligned} \tag{15}$$

Za parameter θ, ktorý reprezentuje priemernú hodnotu okamžitej úrokovej miery, si teda budeme voliť rôzne hodnoty, ktorými budeme rozlišovať naše scenáre. Okamžitú úrokovú mieru potom nasimulujeme podľa rovnice (16).

$$r_{t+\Delta t} \sim N\left(\theta + e^{-\kappa\Delta t}\left(r_t - \theta\right), \frac{\sigma^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa\Delta t}\right)\right) \tag{16}$$

2.4 Úrokové miery podľa skupiny dlhopisov

2.4.1 Štátne dlhopisy

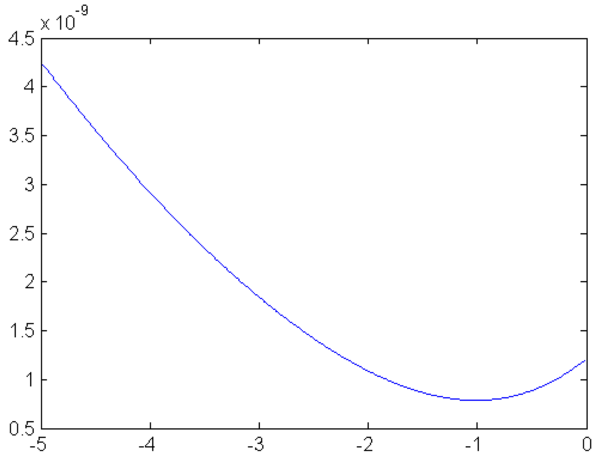
Ako vstupy na odhad parametrov Vašíčkovho modelu pre štátne dlhopisy použijeme denné dáta úrokov Euriboru, teda európskej medzibankovej ponúkanej úrokovej sadzby. Tieto dáta obsahujú údaje z každého pracovného dňa v roku 2016. Doby splatnosti (maturity) sú:

- týždeň,
- dva týždne,
- mesiac,
- dva mesiace,

- tri mesiace,
- šesť mesiacov,
- deväť mesiaov,
- rok.

Po vložení týchto dát nám vyšli parametre, ktoré použijeme pri simulácii úrokových mier pre štátne dlhopisy. Tieto parametre máme uvedené v rovnici (17) a na obrázku 2 vidíme závislosť hodnoty účelovej funkcie od parametra β.

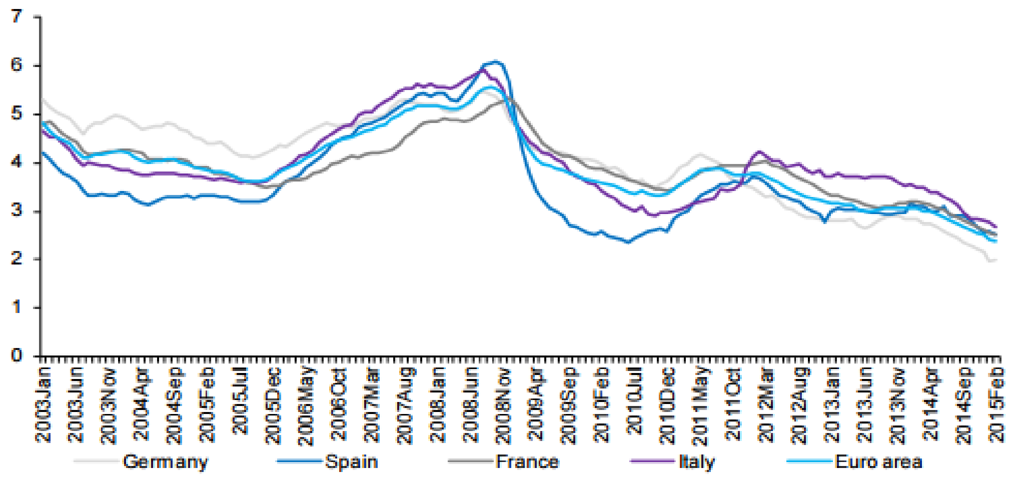
$$\begin{aligned} \sigma^2 &= 0.00473 \\ \alpha &= 0.00657 \\ \beta &= -1.01030 \end{aligned} \tag{17}$$



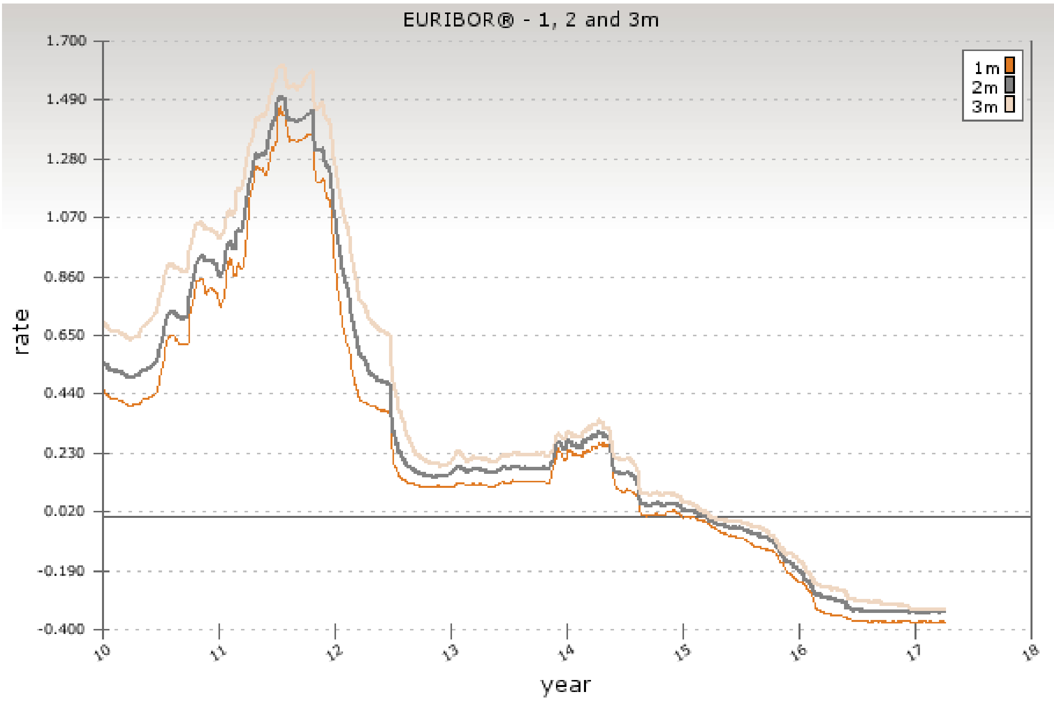
Obr. 2: Závislosť hodnoty účelovej funkcie od parametra β

2.4.2 Hypotekárne záložné listy

V predchádzajúcej kapitole sme si uviedli, že väčšina európskych bánk poskytuje hypotéky s úrokom ako Euribor plus fixná prirážka. V [6] sa hovorí, že ide zväčša o kombináciu trojmesačného Euriboru a bankou stanovenej marže. Na obrázku 3 máme svetlomodrou farbou zobrazené priemerné sadzby hypoték v eurozóne a na obrázku 4 sú žltou znázornené výšky výnosov trojmesačného Euriboru. Môžeme si všimnúť, že grafy na prvý pohľad vyzerajú identicky, až na približne trojpercentné posunutie.



Obr. 3: História úrokov hypoték. Zdroj:[14]



Obr. 4: 1,2 a 3 mesačný Euribor. Zdroj:[5]

V tabuľke 1 máme uvedené úroky hypoték niektorých krajín eurozóny. Ak spravíme vážený priemer podľa počtu obyvateľov a HDP na hlavu, vyjde nám, že priemerný úrok hypoték v týchto krajinách je 2,65%. Trojmesačný Euribor v čase písania tejto práce je -0.33%, čo nám potvrdzuje predchádzajúcu úvahu o trojpercentnom posune. Preto budeme v práci za úrokové miery hypotekárnych dlhopisoch dosadzovať simulácie úrokov štátnych dlhopisov, akurát navýšené o 3%.

Tabuľka 1: Úrokové miery hypoték. Zdroj:[2]

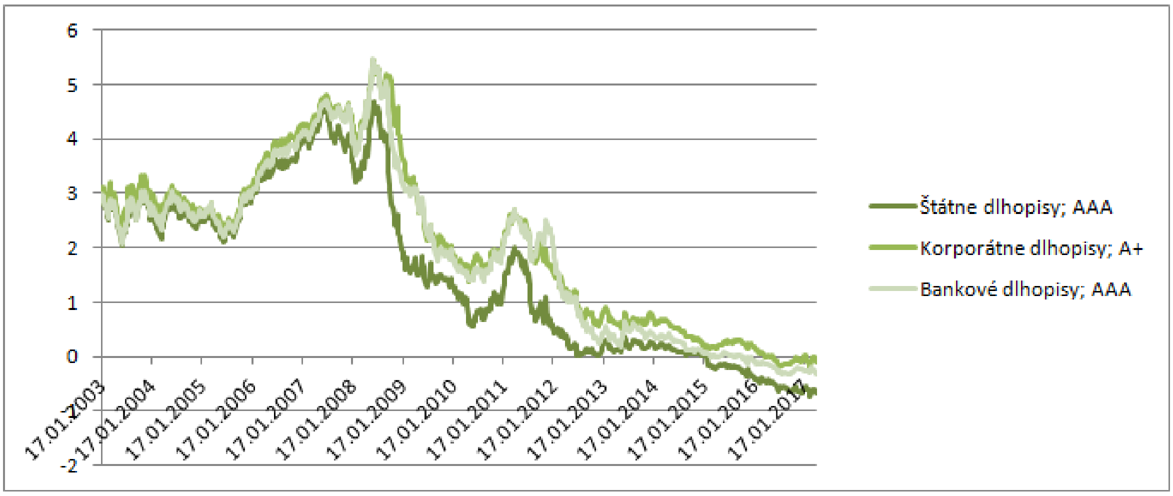
Krajina	HDP na hlavu	Populácia	Úrok	Posledná aktualizácia
Nemecko	34 388	80767000	0.89%	oct.16
Holandsko	39 877	16876800	1.20%	apr.17
Slovensko	7 325	5415949	1.29%	apr.17
Írsko	38 685	4609600	3.25%	apr.17
Rakúsko	39 634	8527230	3.40%	apr.17
Francúzsko	34 092	66050000	4.70%	apr.17
Malta	23 667	416055	4.99%	apr.17
Grécko	29 663	10992589	5.45%	apr.17

2.4.3 Bankové a korporátne dlhopisy

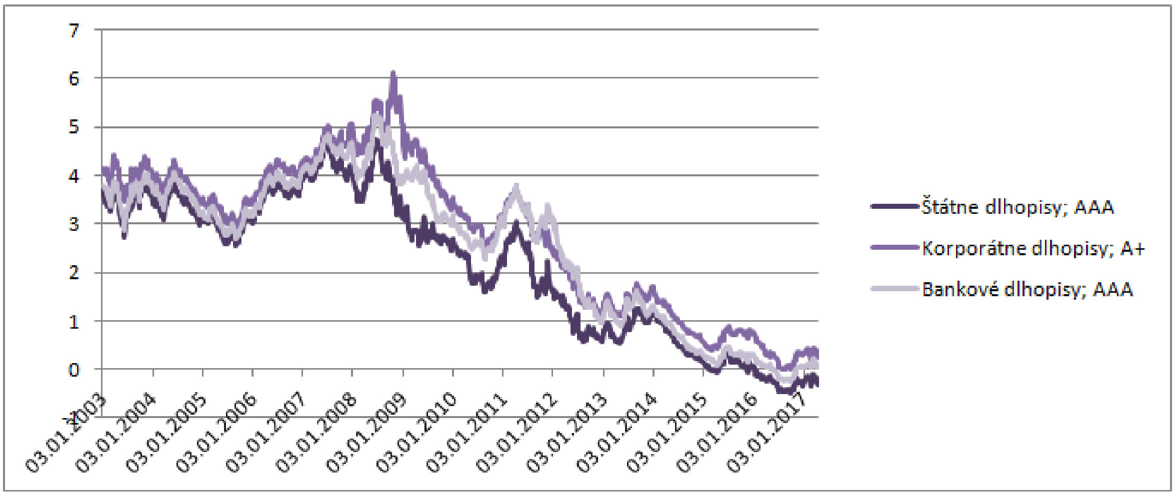
Pri posúvaní bankových a korporátnych dlhopisov sa budeme riadiť dátami z databázy BLOOMBERG. Tieto dáta obsahujú denné úrokové miery dlhopisov s maturitou dva, päť a desať rokov od januára 2003 do apríla 2017. K dispozícii máme nasledujúce druhy dlhopisov:

1. Štátne dlhopisy:
    - AAA,
    - A+,
    - BBB,
2. Korporátne dlhopisy:
    - A+,
    - BBB,
3. Bankové dlhopisy:
    - AAA,
    - A+,
    - BBB.

Kvôli obmedzeniam v zákone [16] budeme porovnávať len tie s najlepším ratingom. Porovnania ich úrokových mier máme znázornené na obrázkoch 5, 6 a 7. Všimnime si približne rovnaké správanie pri každom druhu dlhopisov. Budeme teda predpokladať, že podobne ako pri hypotekárnych dlhopisoch, aj tu pôjde iba o akési posunutie.

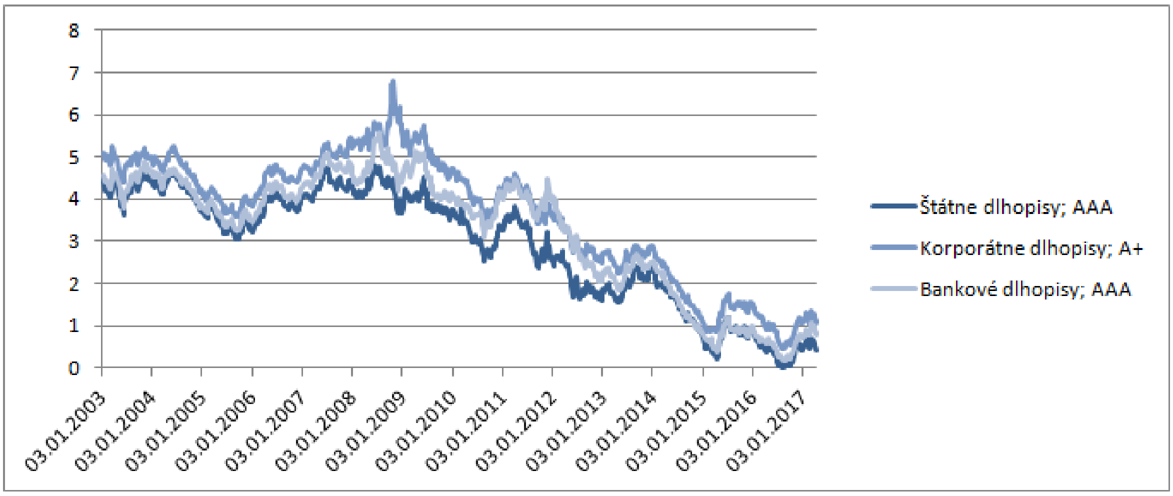


Obr. 5: Úrokové miery dlhopisov s maturitou dva roky.



Obr. 6: Úrokové miery dlhopisov s maturitou päť rokov.

V tabuľke 2 môžeme vidieť aritmetické priemery a mediány rozdielov úrokových mier bankových dlhopisov a štátnych AAA dlhopisov. Veľkosti týchto ukazovateľov sú približne rovnaké pre všetky 3 maturity, preto budeme úrokové miery bankových dlhopisov posúvať hore o 0.2% až 0.45%. Na začiatku každého roku zvolíme náhodné posunutie celej časovej štruktúry úrokových mier z rovnomerného rozdelenia s týmito ohraničeniami.



Obr. 7: Úrokové miery dlhopisov s maturitou desať rokov.

V prípade korporátnych dlhopisov, ktoré máme v tabuľke 3, pozorujeme rastúci trend odchýlok. Nebudeme preto posúvať iba o konštantu. Budeme predpokladať, že tieto rozdiely sú lineárne závislé od času, ktorý je v rovnici (18) reprezentovaný x.

$$posun = a + bx \tag{18}$$

Lineárnou regresiou sme odhadli parametre a a b:

$$a = 0.0052, b = 0.0002. \tag{19}$$

Rovnako ako v prípade bankových dlhopisov, ani v prípade korporátnych nebudeme posúvať všetky krivky rovnako. Budeme predpokladať, že parameter a je z rovnomerného rozdelenia s ohraničeniami 0.4% a 0.6% , zatiaľ čo b necháme konštantné.

Tabuľka 2: Rozdiely úrokových mier bankových AAA dlhopisov a štátnych AAA dlhopisov.

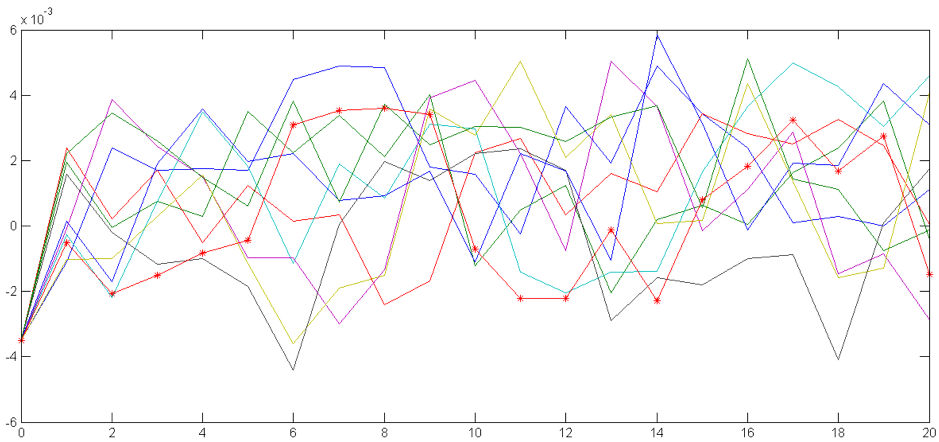
	aritmetický priemer	**medián**
2 roky	0.40736%	0.25700%
5 rokov	0.39916%	0.24650%
10 rokov	0.36511%	0.26800%

Tabuľka 3: Rozdiely úrokových mier korporátnych A+ dlhopisov a štátnych AAA dlhopisov.

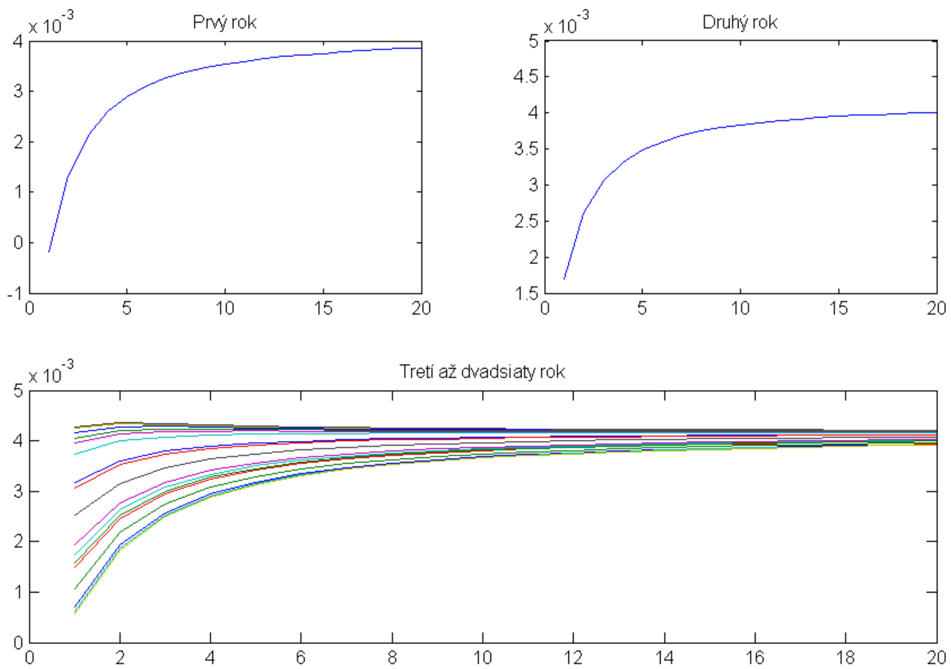
	aritmetický priemer	**medián**
2 roky	0.55397%	0.46800%
5 rokov	0.66298%	0.54400%
10 rokov	0.74258%	0.64100%

2.5 Ilustrácie simulácií úrokových mier

Na obrázku 8 máme znázornených 10 simulácií pomocou Vašíčkovho modelu, pričom pri všetkých sme použili rovnaké vstupné parametre , ktoré sme si už odhadli a sú v rovnici (17). Za začiatočnú okamžitú úrokovú mieru sme dosadili -0.35%, čo je priemerná výška EONIA v roku 2017 (Zdroj:[4]), a θ sme zvolili 0.1%. Príklad časovej štruktúry úrokových mier pre štátne dlhopisy môžeme vidieť na obrázku 9. Začiatky výnosových kriviek tvorí okamžitá úroková miera, ktorá je na obrázku 8 znázornená červenými hviezdičkami.



Obr. 8: Okamžité úrokové miery štátnych dlhopisov nasimulované pomocou Vašíčkovho modelu



Obr. 9: Príklad časovej štruktúry úrokových mier.

3 Ukazovatele stavu portfólia

V predchádzajúcich kapitolách sme sa zaoberali zákonnými obmedzeniami v druhom pilieri a hľadaním vhodného modelu na simuláciu úrokových mier. V tejto kapitole sa budeme zaoberať dlhopismi v portfóliu. Ujasníme si, ako budeme dlhopisy oceňovať a určovať ich priemernú dobu splatnosti.

3.1 Oceňovanie portfólia

V čase kúpy dlhopisu má dôchodková správcovská spoločnosť právo rozhodnúť sa, ako bude určovať cenu daného dlhopisu. Na výber má dve možnosti, buď bude hodnotu daného dlhopisu určovať metódou umorovanej hodnoty alebo metódou reálnej hodnoty. Toto rozhodnutie už však nemôže neskôr zmeniť.

3.1.1 AFS dlhopisy

Skratka AFS znamená aviable for sale, ide o dlhopisy, ktoré je možné kedykoľvek predať, preto sa oceňujú metódou reálnej hodnoty. Ak oceňujeme dlhopis s nominálnou hodnotou F, kupónom C a periódu jeho vyplácania t, maturitou $T = kt$, pričom poznáme časovú štruktúru úrokových mier a r_i vyjadruje súčasný úrok za časové obdobie it, potom vieme jeho súčasnú hodnotu vyjadriť ako je uvedené v rovnici (20).

$$PV = \sum_{i=1}^{k} Ce^{-r_i it} + Fe^{-r_k T} \tag{20}$$

Na porovnávanie jednotlivých dlhopisov nám môže poslúžiť takzvaný yield to maturity, teda výnos do splatnosti. Toto číslo nám vyjadruje, aký je výnos dlhopisu počas celej doby. Vieme ho vypočítať po dosadení nákupnej ceny, ktorá je pri par bondoch rovná nominálu, do rovnice (21). V tejto práci budeme pracovať iba s par bondami, teda hodnotu kupónu pri emitovaní vieme vyjadriť pomocou výnosu do splatnosti a nominálu.

$$F = \sum_{i=1}^{k} Ce^{-r_{YTM} it} + Fe^{-r_{YTM} T} \tag{21}$$

$$C = F\frac{(1 - e^{-r_{YTM} T})}{\sum_{i=1}^{k} e^{-r_{YTM} it}} \tag{22}$$

3.1.2 HTM dlhopisy

Ide o dlhopisy, ktorých cenu budeme určovať metódou umorovanej hodnoty. HTM je skratka pre výraz hold to maturity, teda dlhopisy, ktoré je DSS povinná držať až do splatnosti, preto ich oceňujeme výnosom do splatnosti a nie aktuálnym úrokom. To spôsobuje, že ich durácia, teda citlivosť na zmenu úrokov je nulová. Sú teda odolné voči posunu úrokových mier, čo je dobré v prípade rastu úrokov, pretože neklesne hodnota dlhopisu. Ak však úrokové miery klesnú, tak sa zvýši hodnota všetkých dlhopisov okrem HTM. Týmto spôsobom však môžeme oceňovať len niektoré typy dlhopisov. V bode 2 § 88 b zákona č. 43/ 2004 Z.z. o starobnom dôchodkovom sporení je presne vymedzené, kedy je prístupné dôchodkovou správcovskou spoločnosťou použiť metódu umorovanej hodnoty.

§ 88b

1. V dlhopisovom garantovanom dôchodkovom fonde sa hodnota majetku určuje metódou reálnej hodnoty alebo metódou umorovanej hodnoty. V inom ako dlhopisovom garantovanom dôchodkovom fonde sa hodnota majetku určuje metódou reálnej hodnoty.

2. Metódu umorovanej hodnoty môže dôchodková správcovská spoločnosť použiť len na určenie hodnoty dlhopisov, iných dlhových cenných papierov a nástrojov peňažného trhu, ak

   (a) boli vydané alebo zaručené štátom, centrálnou bankou štátu, Európskou úniou, Európskou centrálnou bankou, Svetovou bankou, Medzinárodným menovým fondom, Európskou investičnou bankou alebo Európskou bankou pre obnovu a rozvoj,

   (b) rating emitenta, emisie alebo emisného programu v čase nadobudnutia do dôchodkového fondu je najmenej na úrovni ratingového hodnotenia Slovenskej republiky,

   (c) boli denominované v rovnakej mene, v akej sa vyjadruje hodnota dôchodkovej jednotky,

   (d) ich výnos je určený pevnou sumou, pevnou úrokovou sadzbou, pohyblivou úrokovou sadzbou v závislosti od pohybu referenčných úrokových sadzieb na finančnom trhu alebo rozdielom medzi menovitou hodnotou cenného papiera a nižším emisným kurzom.

3. Dôchodková správcovská spoločnosť je povinná rozhodnúť o metóde, ktorou bude určovať hodnotu finančného nástroja podľa odseku 2 v čase jeho nadobudnutia do dôchodkového fondu, a toto rozhodnutie je pre ňu záväzné a nemenné.

4. Dôchodková správcovská spoločnosť nesmie predať finančný nástroj, ktorého hodnota sa určuje metódou umorovanej hodnoty; to neplatí, ak

   (a) tento finančný nástroj predáva najviac 30 dní pred dňom jeho splatnosti alebo

   (b) dôchodková správcovská spoločnosť identifikovala udalosti alebo zmeny ekonomických podmienok, na základe ktorých by mohlo dôjsť k významnému zníženiu úverovej spôsobilosti emitenta alebo ručiteľa, ktoré by mohlo poškodiť záujmy sporiteľov.

5. Dôchodková správcovská spoločnosť je povinná bezodkladne informovať Národnú banku Slovenska o predaji finančného nástroja podľa odseku 4 a hodnoverne preukázať vznik skutočností, ktoré boli dôvodom na jeho predaj.

Zdroj: [16]

Celé portfólio držaných dlhopisov následne oceníme ako súčet trhových resp. umorených hodnôt všetkých dlhopisov, ktoré sa v ňom nachádzajú.

3.2 Durácia

Durácia vyjadruje citlivosť ceny dlhopisu na zmenu úrokových sadzieb. Čím je táto hodnota vyššia, tým je náš fond citlivejší na zmenu úrokových sadzieb.

V práci budeme používať Fischer-Weilovu duráciu.

Definícia 3.1. *(Fisher-Weilova durácia) Uvažujme o spojitom prístupe úročenia, postupnosť platieb označíme* $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$*, krivku okamžitých úrokových mier* r_t*,* *kde* $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$. *Potom súčasná hodnota peňažného toku má hodnotu*

$$PV = \sum_{i=1}^{n} X_{t_i} e^{-r_{t_i} t_i} \tag{23}$$

Fisher-Weilovu duráciu definujeme ako

$$D_{FW} = \frac{1}{PV} \sum_{i=1}^{n} t_i X_{t_i} e^{-r_{t_i} t_i} \tag{24}$$

Zdroj:[8].

Zmenu súčasnej hodnoty dlhopisu pri posune krivky časovej štruktúry úrokových mier o $\Delta\lambda$ môžeme odhadnúť, ako

$$\Delta PV \sim -PV D_{FW} \Delta\lambda. \tag{25}$$

Zdroj:[8].

Duráciu celého portfólia vieme vyrátať, ako vážený priemer durácií všetkých aktuálne držaných dlhopisov (26). Váha je ekvivalentná tomu, akú časť hodnoty portfólia tvorí daný dlhopis.

$$D_p = \sum_i w_i D_i \tag{26}$$

4 Opis programu

V nasledujúcej časti sa budeme zaoberať vytváraním programu na simuláciu dlhopisového portfólia. V prvom rade budeme potrebovať simulácie úrokových mier a príslušných parametrov, ktorými sme sa už zaoberali v druhej kapitole. Na nich budeme naše portfóliá neskôr testovať.

Ako prvé si určíme dĺžku simulácie, teda koľko rokov budeme simulované portfólio pozorovať a počet simulácií. Vložíme hodnoty prichádzajúcich (príspevkov) a odchádzajúcich platieb (vyplácaných dôchodkov) v jednotlivých rokoch. V ďalšom kroku zvolíme faktory, ktoré budú rozlišovať naše stratégie. Sú nimi:

- cieľová durácia portfólia,
- váhy investícií do jednotlivých druhov dlhopisov,
- maturita štátnych dlhopisov, ktoré budeme nakupovať ako HTM.

4.1 Výpočet optimálnych váh

Súčasťou stratégie je určenie pomeru finančných prostriedkov investovaných v jednotlivých kategóriách dlhopisov. Niekedy sa nám však môže stať, že tento pomer nevieme presne dosiahnuť. Spôsobiť to môže napríklad veľký posun úrokových mier. V takom prípade potrebujeme nájsť najbližšie možné riešenie. Pod najbližším možným riešením budeme rozumieť také, v ktorom je súčet absolútnych hodnôt rozdielov váh v kategóriách a nami predurčených váh čo najmenší. Tento problém vieme naformulovať ako úlohu lineárneho programovania (27). Kde:

- v_i je súčasná hodnota dlhopisov, ktoré patria do i-tej kategórie (napríklad korporátne),
- b_i je množstvo peňažných prostriedkov, ktoré investujeme do i-teho druhu dlhopisov,
- SSA_i je strategická alokácia, teda množstvo peňazí, ktoré chceme mať investované do i-teho druhu dlhopisov,
- $Cash$ je množstvo peňazí, ktoré máme v danom čase a chceme ich investovať.

$$\begin{aligned}
&\min_{b_i,\Delta_i,\Delta_i^+,\Delta_i^-} \sum_{i=1,..,5} \Delta_i^+ + \Delta_i^- \\
&\qquad\qquad \Delta_i = \Delta_i^+ - \Delta_i^- \qquad i = 1,..,5 \\
&\qquad\qquad \Delta_i = v_i + b_i - SSA_i \qquad i = 1,..,5 \\
&\qquad\qquad \sum_{i=1,..,5} b_i = Cash \\
&\qquad\qquad b_i \geq 0 \qquad i = 1,..,5 \\
&\qquad\qquad \Delta_i^+, \Delta_i^- \geq 0 \qquad i = 1,..,5
\end{aligned} \tag{27}$$

4.2 Začiatočný kapitál a prichádzajúce a odchádzajúce platby

Skúsme odhadnúť hodnotu začiatočného kapitálu a prichádzajúcich a odchádzajúcich platieb pre priemernú DSS. Na Slovensku pôsobí šesť dôchodkových správcovských spoločností. Hodnota majetku v druhom pilieri predstavuje 7.17 miliárd eur. V dlhopisovom garantovanom fonde sa nachádza 81.8% celkového majetku, čo predstavuje 5.81 miliárd eur. Dlhopisový fond priemernej DSS má potom hodnotu 968 338 600.7 eur. Zdroj: [15].

Počet sporiteľov v druhom pilieri je 1 375 700 (zdroj: [12]) a odhad priemernej mzdy v roku 2017 je 945 eur (zdroj: [13]). Pri plánovanej výške príspevkov 6% príde do dôchodkových správcovských spoločností 936 073 908 eur ročne, čo v priemere vychádza 156 012 318 eur na jednu DSS. Odchádzajúce platby sú aktuálne zanedbateľné, avšak časom sa budú zvyšovať. Ich odhad však bohužiaľ takto jednoducho spraviť nevieme.

Exaktnosť v tejto časti práce nie je nutná, pretože prichádzajúce ani odchádzajúce platby nám neovplyvnia hodnotu aktuálnej dôchodkovej jednotky v danom roku.

4.3 Cash flow

V každom roku následne zopakujeme tieto kroky :

1. K hotovosti pripočítame vyplatené kupóny a nominály zmaturovaných dlhopisov.
2. Vypočítame súčasnú hodnotu každého aktuálne držaného dlhopisu. AFS dlhopisy budeme oceňovať proti danému času a kategórii prislúchajúcej výnosovej krivke.

Pri počítaní súčasnej hodnoty HTM dlhopisov budeme využívať výnos do splatnosti.

3. Vyčíslime duráciu každého dlhopisu v danom roku, pričom durácie HTM dlhopisov sú nulové.

4. Vypočítame aktuálnu hodnotu dôchodkovej jednotky.

5. Pripočítame prichádzajúce a odchádzajúce platby.

6. Pomocou vyššie spomínanej úlohy lineárneho programovania určíme pomer investícií do jednotlivých kategórií.

7. Vyčíslime cieľovú duráciu nových dlhopisov v každej kategórii. Premenná w_1 reprezentuje hodnotu dlhopisov i-teho druhu, ktoré vlastníme, ich durácia je D_i. Množstvo peňazí, za ktoré ideme nakúpiť nové dlhopisy daného druhu je označené ako w_2.
$$D_o = \frac{D_{ciel} * (w_1 + w_2) - D_i * w_1}{w_2} \tag{28}$$

8. Kúpime jeden štátny dlhopis s vopred určenou maturitou a označíme ho ako HTM.

9. Nakúpime 2 nové dlhopisy v každej zo zvyšných kategórii. Ich maturity a váhy investovaných peňazí, pri očakávanej durácii D_o, sú v tabuľke 4.

Tabuľka 4: Nákup dlhopisov

maturita	**váha investovaných peňazí**
$\lceil D_o \rceil$	$D_o - \lfloor D_o \rfloor$
$\lfloor D_o \rfloor$	$\lceil D_o \rceil - D_o$

Predstavme si situáciu, v ktorej máme cieľovú duráciu 2.5, durácia aktuálne držaných korporátnych dlopisov je 1.8 a ich súčasná hodnota je 20 000 000 eur. Použitím úlohy lineárneho programovania na výpočet váh nám vyšlo, že musíme dokúpiť korporátne dlhopisy za 5 000 000 eur. Očakávaná durácia nových dlhopisov teda bude
$$D_o = \frac{2.5 - 1.8\frac{20mil.}{25mil.}}{\frac{5mil.}{5mil.+25mil.}} = 5.3. \tag{29}$$

Následne by sme nakúpili dva korporátne dlhopisy s maturitami 5 a 6 rokov. Váha 5-ročného by bola $\lceil 5.3 \rceil - 5.3 = 0.7$, investovali by sme teda doň $0.7 * 5mil. = 3.5mil.$ eur. 6-ročný dlhopis by sme nakúpili za 1.5 mil. eur. Nakúpené dlhopisy síce nedosiahnu očakávanú duráciu, pretože durácia x-ročného par bondu je pri kladných úrokových mierach menšia ako x, avšak tento spôsob nákupu je oveľa menej výpočtovo náročný ako keby chceme triafať presnú duráciu. Pri veľkom počte simulácií by to výrazne zvýšilo čas testovania jednej stratégie.

Nesmieme zabudnúť ani na to, že ak naše portfólio obsahuje HTM dlhopisy, ktorých durácia je vždy 0, tak sa zvyšuje cieľová durácia pre ostatné skupiny. Ak portfólio obsahuje 25% HTM dlhopisov, tak cieľová durácia ostaných skupín bude

$$D_{ciel} = \frac{D_{PovodnyCiel}}{1 - 0.25}. \tag{30}$$

5 Tvorba stratégií

V predchádzajúcich kapitolách sme sa zaoberali zákonnými obmedzeniami v druhom pilieri, hľadaním vhodného modelu na simuláciu úrokových mier a vytvorili sme program na správu dlhopisových portfólií. V tejto kapitole sa budeme zaoberať vytváraním stratégií a ich testovaním na jednotlivých simuláciách úrokových mier.

5.1 Scenáre

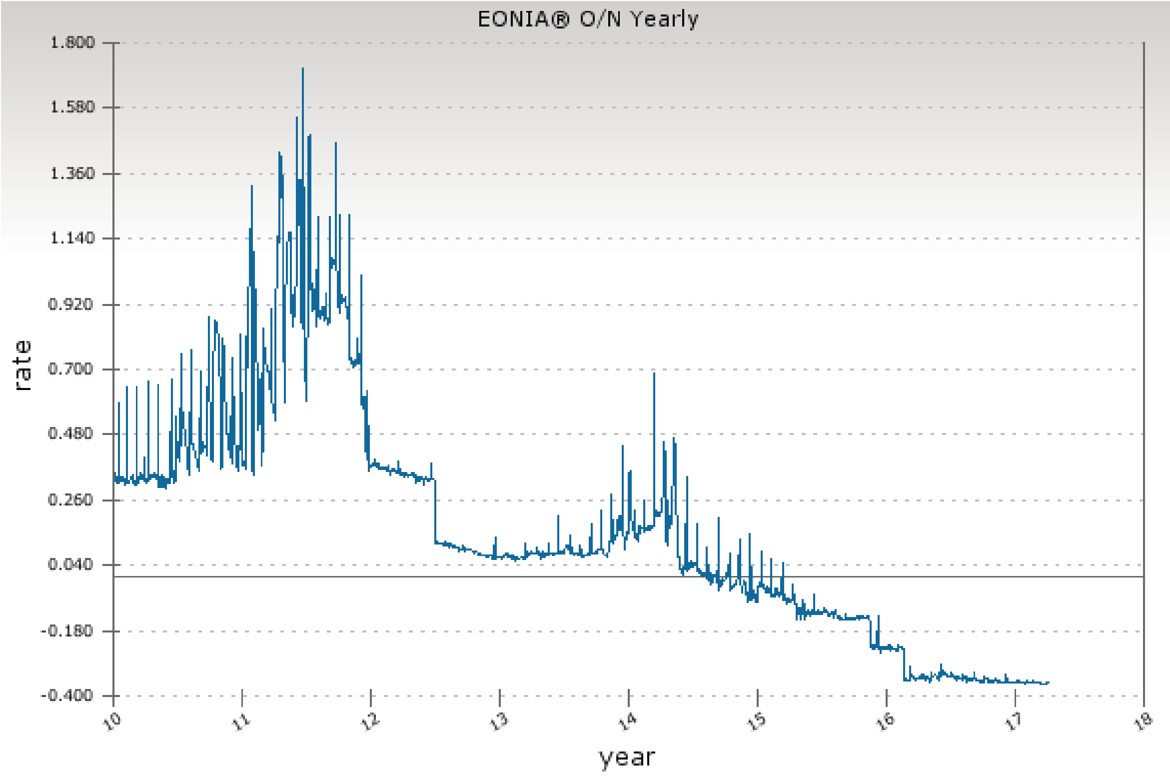
Predstavíme si scenáre, ktoré budeme generovať a testovať na nich naše stratégie. Za súčasnú okamžitú úrokovú mieru dosadíme -0.35%, čo je aktuálna hodnota EONIA [4]. Keďže nevieme skutočnú hodnotu parametra θ, skúsime sa pozrieť na historické úrokové miery overnightu EONIA, ktoré môžeme vidieť na obrázku 10. Ich hodnota sa za posledné roky pohybuje medzi -0.4% a 1.8%, za θ preto budeme dosádzať nasledujúce parametre:

- $\theta_1 = -0.35\%$,
- $\theta_2 = 0\%$,
- $\theta_3 = 0.5\%$,
- $\theta_4 = 1\%$,
- $\theta_5 = 2\%$,
- $\theta_6 = 5\%$.

Hodnoty 2% a 5% sa môžu zdať príliš vysoké, našim cieľom však je otestovať aj takéto extrémne alternatívy θ.

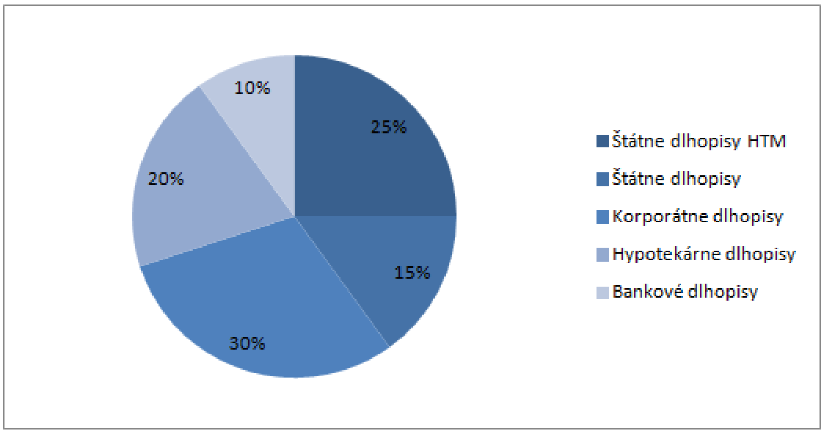
5.2 Stratégie

V predchádzajúcej kapitole sme spomínali, že pre každé portfólio si zvolíme cieľovú duráciu, váhy investícií do jednotlivých druhov dlhopisov a maturitu štátnych dlhopisov, ktoré budeme nakupovať ako HTM. Zmyslom HTM dlhopisov je získať vysoký výnos bez rizika, že nám padne hodnota kvôli posunu úrokových mier. Ako HTM preto budeme vždy nakupovať 20-ročné štátne dlhopisy.



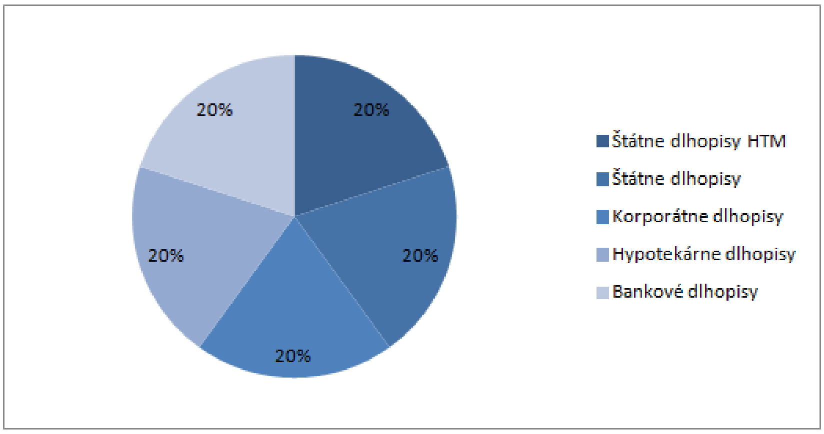
Obr. 10: EONIA. Zdroj: [4]

Budeme testovať 5 rôznych zložení portfólia. Prvé rozloženie prostriedkov môžeme vidieť na obrázku 11, druhé na obrázku 12 a tretie na obrázku 13.

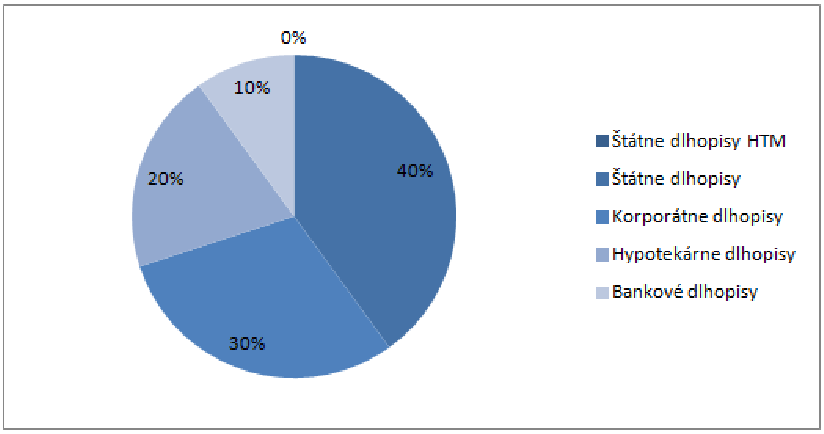


Obr. 11: Strategická alokácia 1

Pri prvej alokácii sme sa inšpirovali Allianz DSS, ich skladba dlhopisov sa nachádza vo výročnej správe [1], ktorá je verejne dostupná na internete. V tejto správe sa však neuvádza, koľko dlhopisov je označených ako HTM, preto sme si zvolili hodnotu, ktorá sa nám zdá byť realistická. V druhej alokácii investujeme rovnaké množstvo



Obr. 12: Strategická alokácia 2



Obr. 13: Strategická alokácia 3

prostriedkov do všetkých piatich kategórií. Tretia alokácia je rovnaká ako prvá, až na to, že v nej žiadne štátne dlhopisy neoznačujme ako HTM.

Zvyšné dve rozloženia budú slúžiť najmä na porovnávanie s prvými troma alokáciami. V štvrtej alokácii totiž všetky prostriedky investujeme do štátnych dlhopisov, pričom žiadne z nich neoznačíme ako HTM. V poslednom portfóliu budeme taktiež nakupovať len štátne dlhopisy, všetky však označíme ako HTM. Posledné dve alokácie sú vlastne spodnými ohraničeniami výnosov stratégií, pretože úrokové miery ostatných druhov dlhopisov sú v našich simuláciách len posunutím úrokov štátnych dlhopisov nahor.

Alokácie budeme testovať s rôznymi cieľovými duráciami portfólia. Konkrétne pôjde o:

- $D_1 = 1.5$,

- $D_2 = 2$,
- $D_3 = 2.5$,
- $D_4 = 3$.

Vyššie hodnoty durácie už testovať nebudeme. Bolo by to príliš riskantné, pretože aj malý posun úrokových mier nahor by signifikantne znehodnotil naše portfólio. Všetky durácie skombinujeme so všetkými alokáciami okrem poslednej, ktorá všetko investuje do štátnych dlhopisov a označuje ich ako HTM, čiže jej durácia je vždy 0. Týmito kombináciami nám vznikne 17 stratégií, ktoré máme uvedené v tabuľke 5. Budeme ich testovať na všetkých scenároch úrokových mier, ktoré vygenerujeme pre rôzne θ. Pričom pre každé θ vygenerujeme 2000 scenárov a určíme, v koľkých z týchto prípadov by DSS bola nútená doplácať, teda v koľkých simuláciách nastal pokles AHDJ počas 10-ročného kontrolného intervalu.

5.3 Poklesy aktuálnej hodnoty dôchodkovej jednotky

Po spustení všetkých simulácií ako prvé skontrolujeme, či nastal pokles dôchodkovej jednotky (ďalej ibe AHDJ) počas niektorého 10-ročného obdobia. Pri simuláciách úrokových mier s nezápornými parametrami θ nenastala táto situácia ani raz. Nastala iba pri simuláciách s $\theta = -0.35\%$, aj to iba pri alokácii 4, ktorá všetko investuje výlučne do štátnych dlhopisov a žiadne z nich neoznačuje ako HTM. Pri tejto alokácii nastal pokles v prípade použitia durácií 1.5, kde pokleslo 13 (obrázok 14) z 2000 simulácií, a 2, kde poklesla iba 1 simulácia (obrázok 28) z 2000.

Na obrázku 14 je však zobrazených príliš veľa vývojov AHDJ a nie je z neho jasné, akú časť finančných prostriedkov a kedy by musela DSS doplniť. Všetky vývoje AHDJ stratégie 13 pri $\theta = -0,35\%$, v ktorých nastal pokles počas niektorého 10-ročného sledovaného obdobia, máme preto aj s vývojom AHDJ po doplnení prostriedkov na obrázkoch 15 až 27. Všetkých 13 obrázkov má rovnakú mierku, aby sme mohli jednoducho porovnať jednotlivé dopĺňania majetku do fondu.

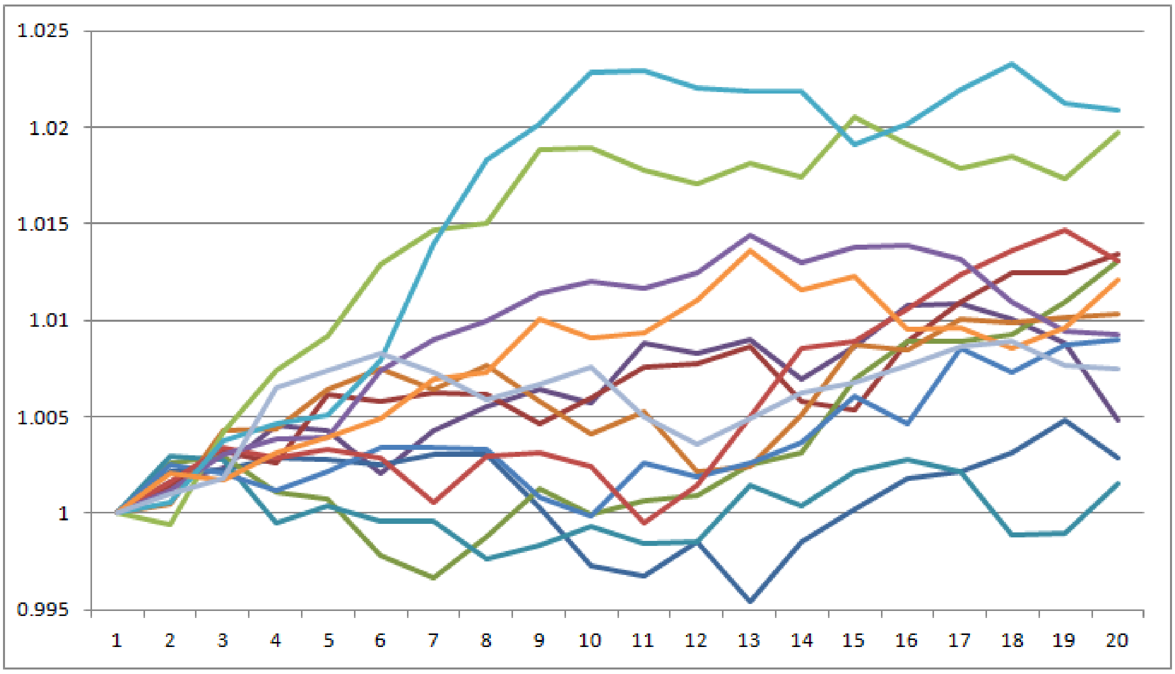
Z pohľadu DSS možno za najhorší scenár označiť vývoj AHDJ, ktorý je na obrázku 16. V tomto prípade bolo treba fond dopĺňať v jedenástom, dvanástom aj trinástom roku. Veľký pokles nastal aj v prípade scenára na obrázku 19, pri tomto

Tabuľka 5: Strategické alokácie a príslušné durácie

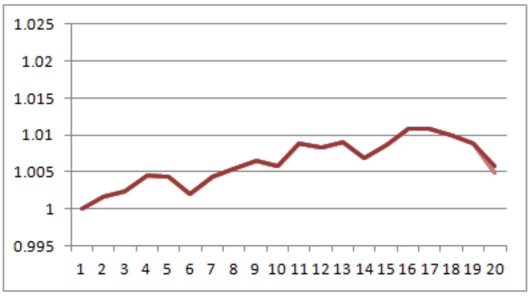
	Štátne HTM	**Štátne**	**Korporátne**	**Hypotekárne**	**Bankové**	**Durácia**
1	25%	15%	30%	20%	10%	1,5
2	25%	15%	30%	20%	10%	2,0
3	25%	15%	30%	20%	10%	2,5
4	25%	15%	30%	20%	10%	3,0
5	20%	20%	20%	20%	20%	1,5
6	20%	20%	20%	20%	20%	2,0
7	20%	20%	20%	20%	20%	2,5
8	20%	20%	20%	20%	20%	3,0
9	0%	40%	30%	20%	10%	1,5
10	0%	40%	30%	20%	10%	2,0
11	0%	40%	30%	20%	10%	2,5
12	0%	40%	30%	20%	10%	3,0
13	0%	100%	0%	0%	0%	1,5
14	0%	100%	0%	0%	0%	2,0
15	0%	100%	0%	0%	0%	2,5
16	0%	100%	0%	0%	0%	3,0
17	100%	0%	0%	0%	0%	0,0

scenári by bolo treba doplniť fond v jedenástom aj dvanástom roku. Na obrázku 24 bolo taktiež potrebné dopĺňať majetok do fondu dvakrát, avšak poklesy neboli také výrazné ako v predchádzajúcom prípade. Posledný prípad, kedy bolo treba dopĺňať majetok do fondu viac ako jedenkrát je na obrázku 27. Bolo ho potrebné doplniť v štrnástom, pätnástom aj šestnástom roku, výška týchto doplatkov však bola oproti predchádzajúcim prípadom niekoľkonásobne nižšia. Vo všetkých ostatných prípadoch by bolo potrebné dopĺňať prostriedky len jednorázovo. Pričom na obrázkoch 18,20, 23, a 25 bolo potrebné navýšiť AHDJ o menej ako 0.002. Zvyšných 5 scenárov, počas ktorých nastal pokles AHDJ počas niektorého 10-ročného sledovaného obdobia, zaznamenalo len minimálny pokles, ktorý nepresiahol 0.001.

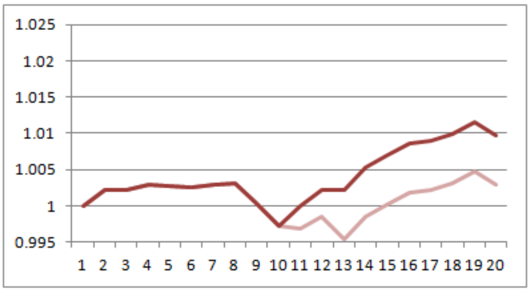
Ako sme si už spomínali, v prípade stratégie 14 a $\theta = -0.35\%$ by mala DSS povinnosť



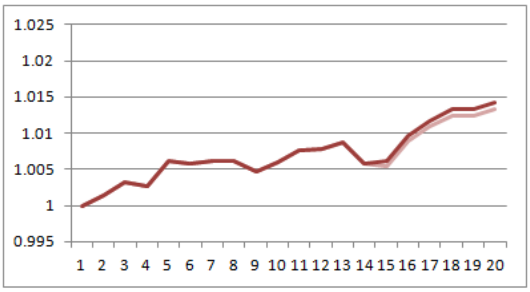
Obr. 14: Vývoje AHDJ, pri ktorých by DSS musela doplácať, stratégia 13, $\theta = -0,35\%$.



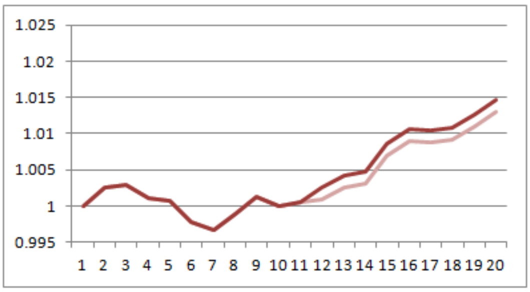
Obr. 15: Vývoj AHDJ s dopĺňaním do fondu 1



Obr. 16: Vývoj AHDJ s dopĺňaním do fondu 2

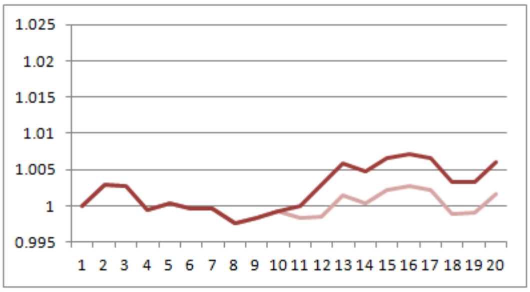


Obr. 17: Vývoj AHDJ s dopĺňaním do fondu 3

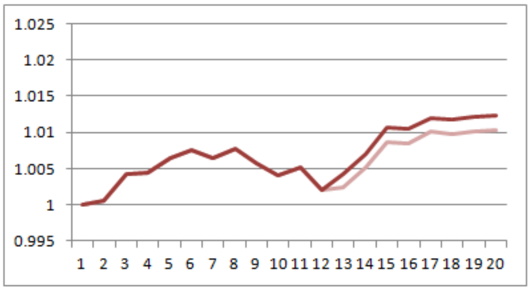


Obr. 18: Vývoj AHDJ s dopĺňaním do fondu 4

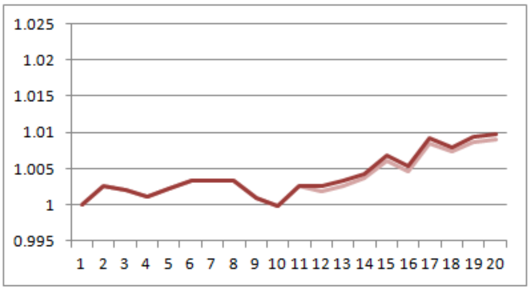
doplácať do fondu iba v jednom prípade, preto máme na obrázku 28 tmavomodrou farbou zobrazenú aj AHDJ po doplnení majetku do fondu. Pokles hodnoty nastal v



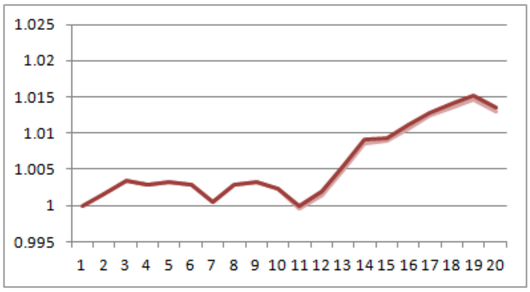
Obr. 19: Vývoj AHDJ s dopĺňaním do fondu 5



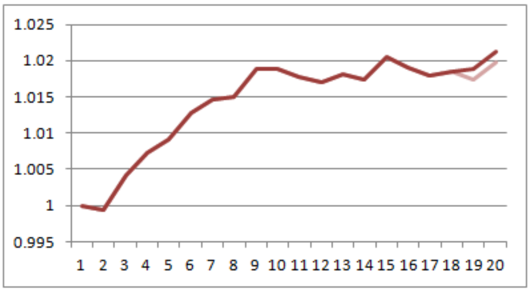
Obr. 20: Vývoj AHDJ s dopĺňaním do fondu 6



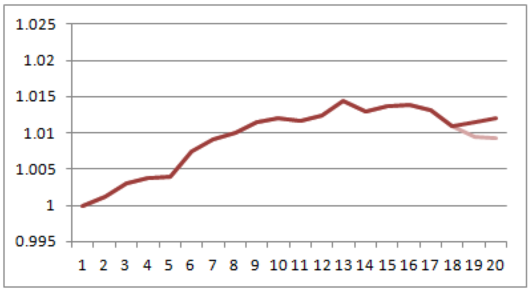
Obr. 21: Vývoj AHDJ s dopĺňaním do fondu 7



Obr. 22: Vývoj AHDJ s dopĺňaním do fondu 8



Obr. 23: Vývoj AHDJ s dopĺňaním do fondu 9

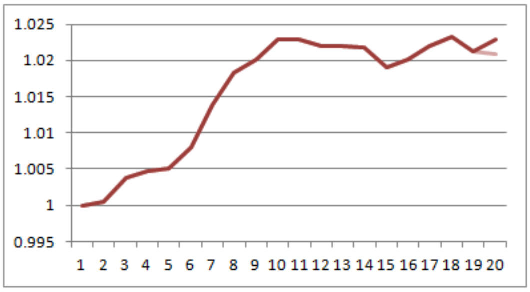


Obr. 24: Vývoj AHDJ s dopĺňaním do fondu 10

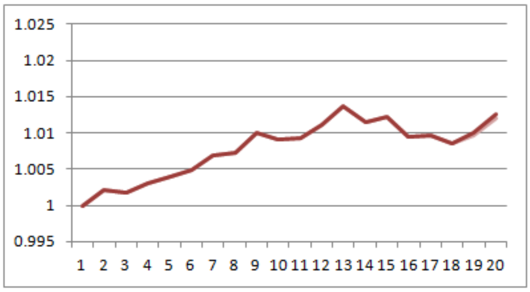
tomto prípade v jedenástom roku a oproti prvému roku bola AHDJ nižšia o 0.00169.

5.4 Vplyv poplatkov

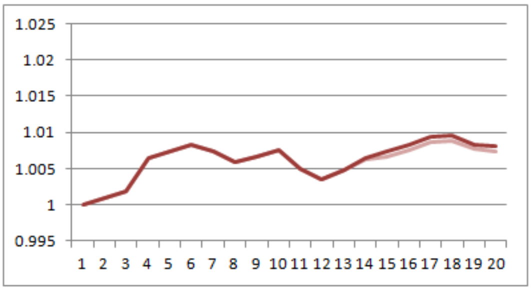
V prípade nezáporných θ nám alokácie 1,2 a 3 dopadli natoľko dobre, že nie je potrebné sa zaoberať odpočítavaním poplatkov, pretože minimálny výnos za 10-ročné obdobie predstavoval približne 5%, čo je viac, ako by stiahli maximálne poplatky, ktoré si môže DSS účtovať. Pri posledných dvoch stratégiách by to možno zopár simulácií



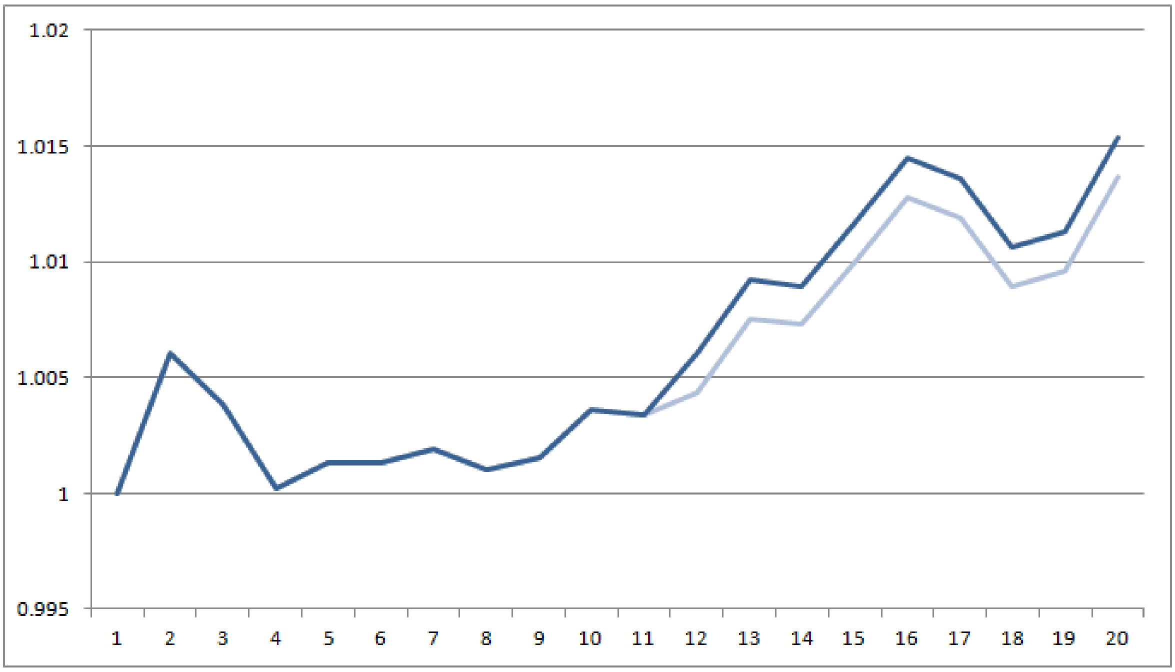
Obr. 25: Vývoj AHDJ s doplňaním do fondu 11



Obr. 26: Vývoj AHDJ s doplňaním do fondu 12



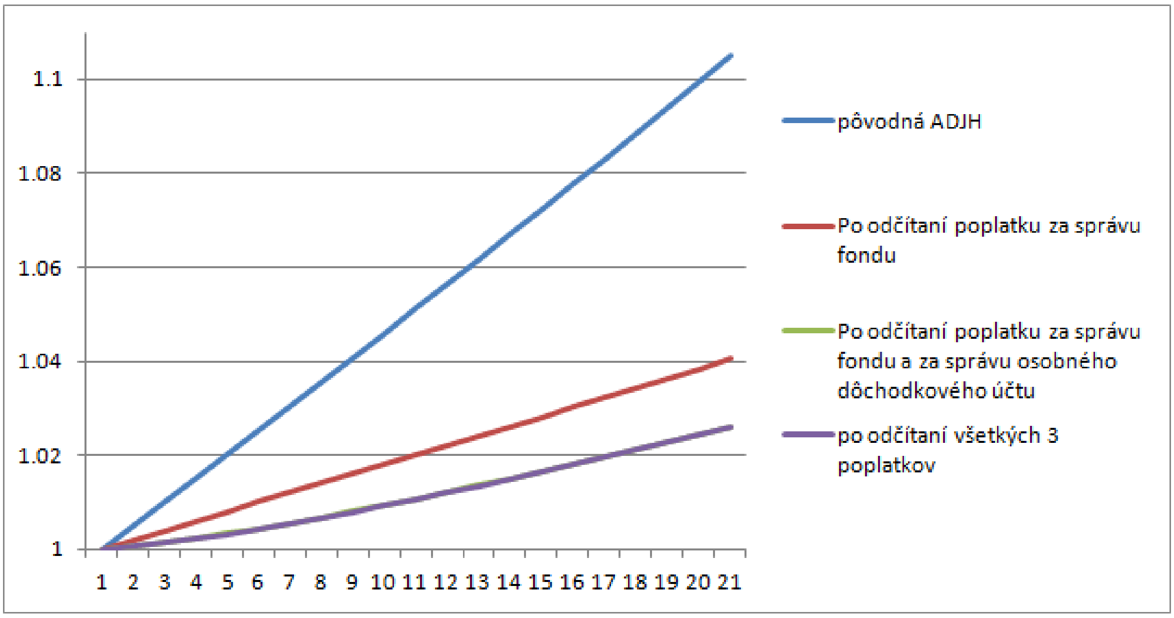
Obr. 27: Vývoj AHDJ s doplňaním do fondu 13



Obr. 28: Vývoj AHDJ, pri ktorom by DSS musela doplácať, stratégia 14, $\theta = -0,35\%$.

ovplyvnilo, avšak ako sme si už spomínali vyššie, tieto dve alokácie budú slúžiť najmä na porovnávanie výnosov. Navyše v zákone sa hovorí iba o hornej hranici poplatkov.

Ako dôkaz toho, že by nám odpočítanie maximálnych poplatkov úspešnosť našich stratégií neovplyvnilo, si uvedieme portfólio s konštantnými výnosmi 0.5% p.a. od ktorého odčítame všetky poplatky spomenuté v prvej kapitole. Na obrázku 29 môžeme vidieť, že aj po odpočítaní všetkých poplatkov neklesla AHDJ pod hodnotu spred 10 rokov. Overíme to aj na portfóliu, ktoré má náhodné výnosy, ktoré sú každoročne z rovnomerného rozdelenia s ohraničeniami 0% a 1% p.a.. Na obrázku 30 vidíme, že ani v tomto prípade nenastala situácia, pri ktorej by musela DSS dopĺňať peniaze do fondu. DSS to vytvára možnosť, aby si účtovala hornú hranicu možnej výšky poplatkov.

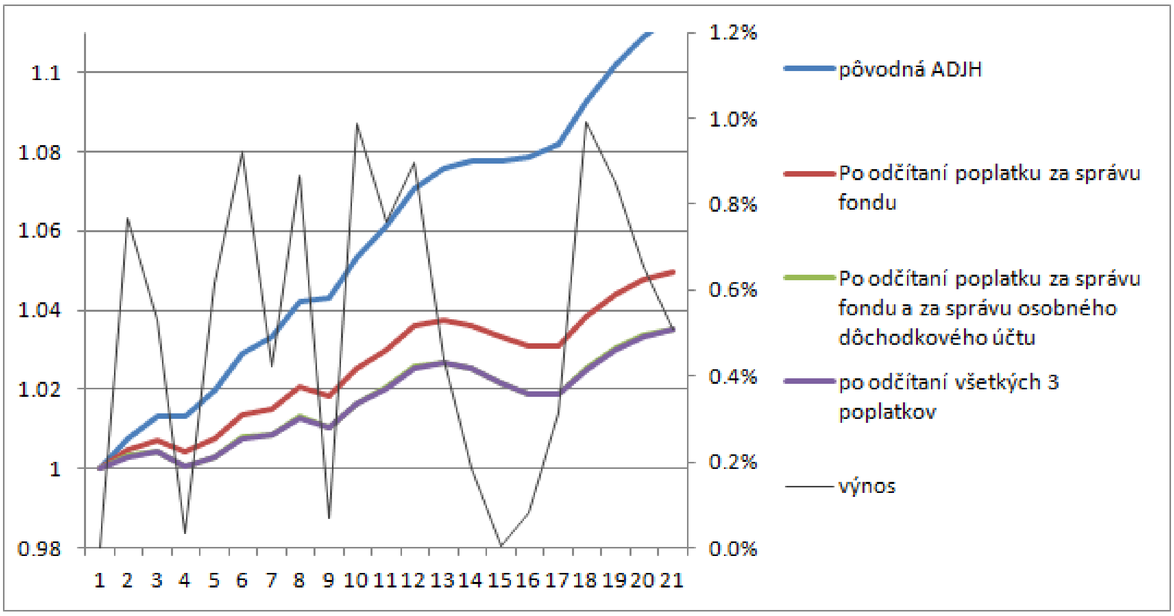


Obr. 29: AHDJ portfólia s konštantnými výnosmi 0.5% p.a. po odčítaní poplatkov

5.5 Priemery jednotlivých stratégií

Žiadna z prvých 12 stratégií nebola v ani jednom zo simulovaných scenárov záporná, čo by nezmenilo ani odčítanie poplatkov. Budeme sa teda zaoberať výlučne ich výnosnosťou, ktorú budeme porovnávať podľa scenárov, ktoré majú rôznu θ. Spolu s nimi sa však pozrieme aj na ilustračné stratégie, aby sme videli, o koľko sa líšia ich výnosy.

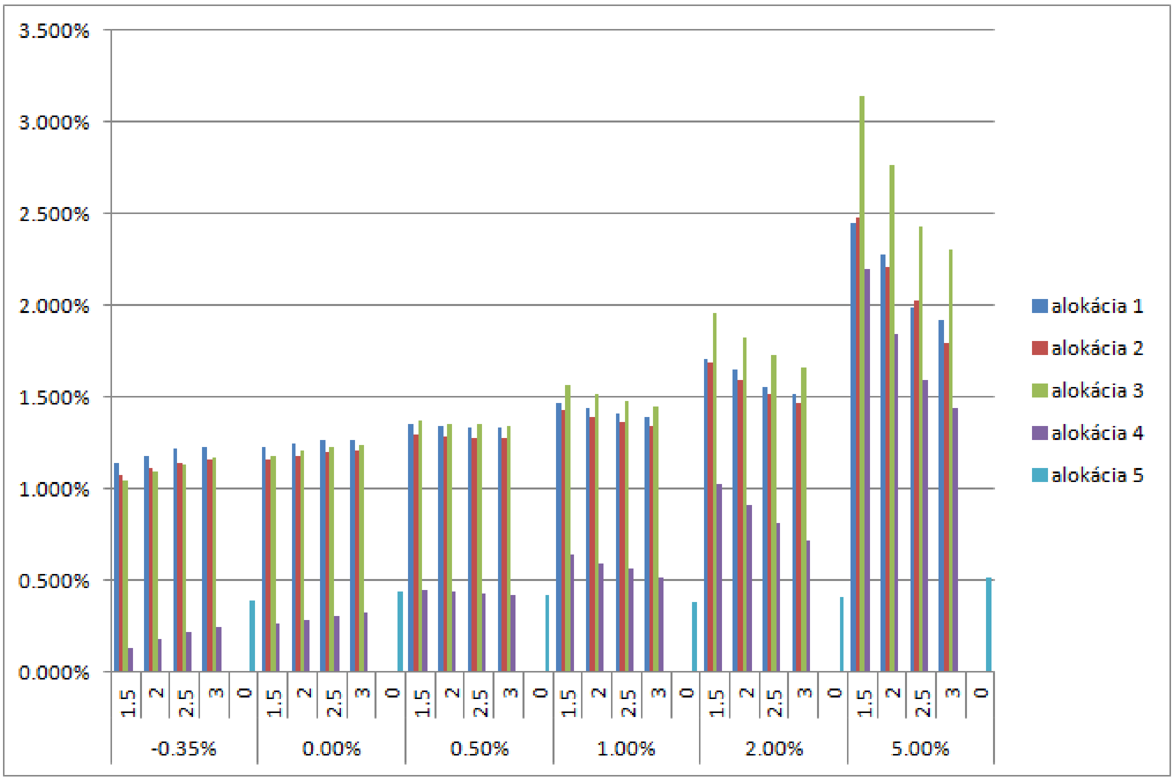
Priemerné ročné výnosy a ich štandardné odchýlky máme v tabuľke 6 pre prvú alokáciu, v tabuľke 7 pre druhú alokáciu, v tabuľke 8 pre tretiu alokáciu, v tabuľke 9 pre štvrtú alokáciu a v tabuľke 10 pre piatu alokáciu. Prehľadnejšie si môžeme priemerné výnosy porovnať na obrázku 31, kde máme priemerné výnosy jednotlivých



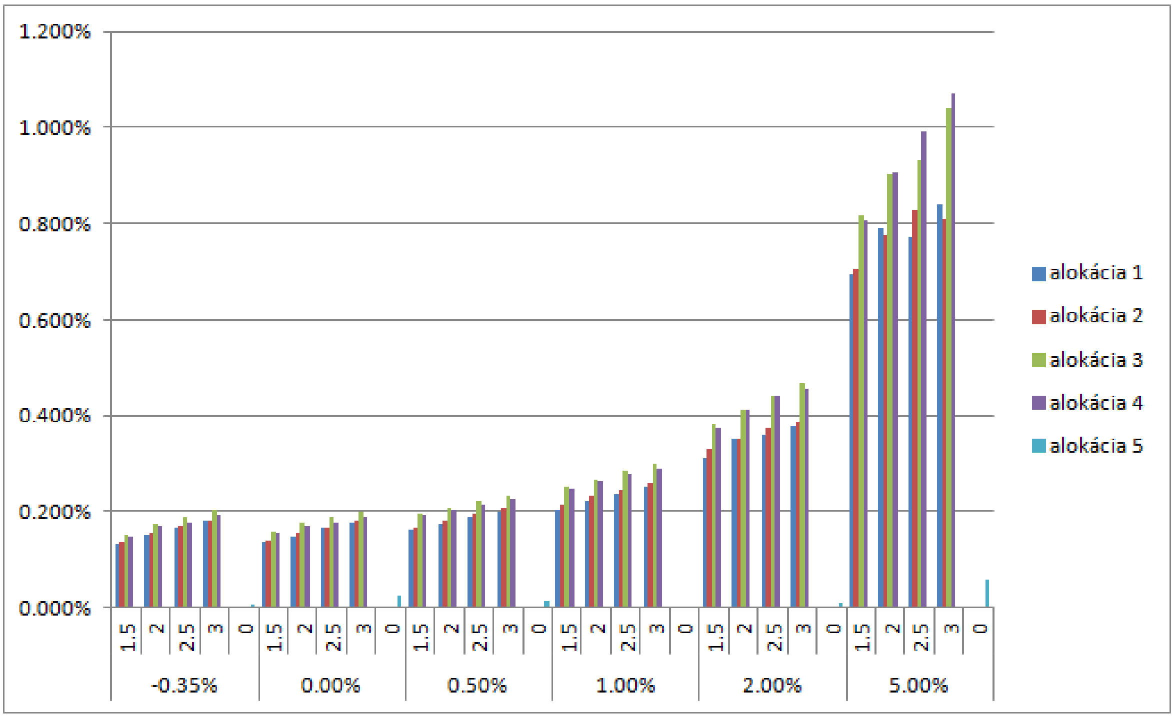
Obr. 30: AHDJ portfólia s s náhodnými výnosmi medzi 0% p.a. a 1% p.a. po odčítaní poplatkov

stratégií zgrupené cez parameter θ. Všimnime si, že pre $\theta = -0.35\%$ a $\theta = 0\%$ sa priemerné výnosy zvyšujú s rastúcou duráciou. Ak je $\theta = 0.5\%$, tak sú priemerné výnosy konštantné a takmer vôbec nezávisia od durácie, ale ak je θ 2% alebo 5% tak priemerné výnosy klesajú s rastúcou duráciou.

Ak chceme nájsť najlepšiu stratégiu, tak určite pôjde o nejakú s prvou, druhou alebo treťou alokáciou. Na prvý pohľad sa najlepšie javí tretia alokácia, pretože pre $\theta = -0.35\%$ až $\theta = 1\%$ sú jej výnosy porovnateľné s prvými dvoma stratégiami a pri vyšších hodnotách θ sa javí ako najvýnosnejšia. Takéto vysoké θ však nie sú veľmi pravdepodobné. Okrem toho môžeme na obrázku 32 vidieť, že má táto alokácia oproti prvým dvom viditeľne vyššiu volatilitu. Ak sa pozrieme súčasne na výnosy aj štandardné odchýlky, tak nám ako najvhodnejšia vychádza prvá alokácia. Zvolenie príslušnej durácie závisí od preferencií DSS, pretože vyššia durácia síce poskytuje vyšší výnos, ale aj vyššiu volatilitu, teda riziko prepadu. Priemerné hodnoty AHDJ pre všetkých 17 stratégií, pri rôznych hodnotách θ máme v prílohe A.



Obr. 31: Priemerné výnosy všetkých alokácií v závislosti od θ a durácie.



Obr. 32: Štandardné odchýlky všetkých alokácií v závislosti od θ a durácie.

Tabuľka 6: Priemerné ročné výnosy a ich štandardné odchýlky v prvej alokácii

Durácia	θ	**Priemerný ročný výnos**	**Štandardná odchýlka**
1.5	-0.35%	1.15%	0.13%
1.5	0.00%	1.23%	0.14%
1.5	0.50%	1.35%	0.16%
1.5	1.00%	1.47%	0.20%
1.5	2.00%	1.71%	0.31%
1.5	5.00%	2.45%	0.69%
2	-0.35%	1.18%	0.15%
2	0.00%	1.24%	0.15%
2	0.50%	1.34%	0.17%
2	1.00%	1.44%	0.22%
2	2.00%	1.65%	0.35%
2	5.00%	2.27%	0.79%
2.5	-0.35%	1.21%	0.17%
2.5	0.00%	1.26%	0.16%
2.5	0.50%	1.33%	0.19%
2.5	1.00%	1.41%	0.24%
2.5	2.00%	1.55%	0.36%
2.5	5.00%	1.99%	0.77%
3	-0.35%	1.22%	0.18%
3	0.00%	1.27%	0.18%
3	0.50%	1.33%	0.20%
3	1.00%	1.39%	0.25%
3	2.00%	1.51%	0.38%
3	5.00%	1.92%	0.84%

5.6 Zhodnotenie výsledkov

Naše výsledky sa na prvý pohľad môžu zdať až príliš pozitívne, vzhľadom na to, že DSS by musela doplácať iba pri jednej zo stratégií, aj to iba v minimálnom počte simulácií a pri zápornej θ. V ostatných prípadoch nenastal po 10 rokoch pokles, čo znamená,

Tabuľka 7: Priemerné ročné výnosy a ich štandardné odchýlky v druhej alokácii

Durácia	θ	**Priemerný ročný výnos**	**Štandardná odchýlka**
1.5	-0.35%	1.07%	0.14%
1.5	0.00%	1.16%	0.14%
1.5	0.50%	1.29%	0.17%
1.5	1.00%	1.43%	0.22%
1.5	2.00%	1.69%	0.33%
1.5	5.00%	2.48%	0.71%
2	-0.35%	1.11%	0.15%
2	0.00%	1.18%	0.15%
2	0.50%	1.29%	0.18%
2	1.00%	1.39%	0.23%
2	2.00%	1.59%	0.35%
2	5.00%	2.21%	0.78%
2.5	-0.35%	1.14%	0.17%
2.5	0.00%	1.20%	0.17%
2.5	0.50%	1.28%	0.19%
2.5	1.00%	1.36%	0.25%
2.5	2.00%	1.52%	0.38%
2.5	5.00%	2.02%	0.83%
3	-0.35%	1.16%	0.18%
3	0.00%	1.21%	0.18%
3	0.50%	1.27%	0.21%
3	1.00%	1.34%	0.26%
3	2.00%	1.47%	0.39%
3	5.00%	1.80%	0.81%

že by dôchodková správcovská spoločnosť nemusela dopĺňať žiadny majetok do fondu. Ak sa však pozrieme na obrázok 33 a uvedomíme si, že v každom desaťročnom období vytvorili všetky slovenské DSS zisk minimálne 10%, vidíme, že je to v súlade s našimi výsledkami.

Tabuľka 8: Priemerné ročné výnosy a ich štandardné odchýlky v tretej alokácii

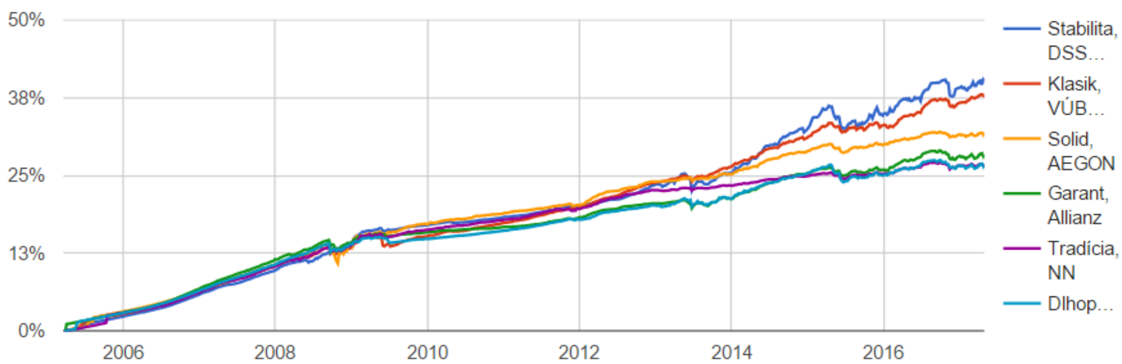
Durácia	θ	**Priemerný ročný výnos**	**Štandardná odchýlka**
1.5	-0.35%	1.04%	0.15%
1.5	0.00%	1.18%	0.16%
1.5	0.50%	1.37%	0.20%
1.5	1.00%	1.56%	0.25%
1.5	2.00%	1.95%	0.38%
1.5	5.00%	3.14%	0.82%
2	-0.35%	1.09%	0.17%
2	0.00%	1.20%	0.18%
2	0.50%	1.36%	0.21%
2	1.00%	1.51%	0.27%
2	2.00%	1.82%	0.41%
2	5.00%	2.76%	0.90%
2.5	-0.35%	1.13%	0.19%
2.5	0.00%	1.22%	0.19%
2.5	0.50%	1.35%	0.22%
2.5	1.00%	1.48%	0.28%
2.5	2.00%	1.73%	0.44%
2.5	5.00%	2.43%	0.93%
3	-0.35%	1.17%	0.20%
3	0.00%	1.24%	0.20%
3	0.50%	1.34%	0.23%
3	1.00%	1.45%	0.30%
3	2.00%	1.66%	0.47%
3	5.00%	2.30%	1.04%

Tabuľka 9: Priemerné ročné výnosy a ich štandardné odchýlky vo štvrtej alokácii

Durácia	θ	**Priemerný ročný výnos**	**Štandardná odchýlka**
1.5	-0.35%	0.13%	0.15%
1.5	0.00%	0.26%	0.16%
1.5	0.50%	0.45%	0.19%
1.5	1.00%	0.64%	0.25%
1.5	2.00%	1.03%	0.38%
1.5	5.00%	2.20%	0.81%
2	-0.35%	0.18%	0.17%
2	0.00%	0.29%	0.17%
2	0.50%	0.44%	0.20%
2	1.00%	0.60%	0.26%
2	2.00%	0.91%	0.41%
2	5.00%	1.84%	0.91%
2.5	-0.35%	0.22%	0.18%
2.5	0.00%	0.31%	0.18%
2.5	0.50%	0.43%	0.21%
2.5	1.00%	0.56%	0.28%
2.5	2.00%	0.82%	0.44%
2.5	5.00%	1.59%	0.99%
3	-0.35%	0.25%	0.19%
3	0.00%	0.33%	0.19%
3	0.50%	0.42%	0.23%
3	1.00%	0.51%	0.29%
3	2.00%	0.72%	0.46%
3	5.00%	1.44%	1.07%

Tabuľka 10: Priemerné ročné výnosy a ich štandardné odchýlky v piatej alokácii

Durácia	θ	**Priemerný ročný výnos**	**Štandardná odchýlka**
0	-0.35%	0.394%	0.005%
0	0.00%	0.442%	0.026%
0	0.50%	0.418%	0.015%
0	1.00%	0.386%	0.003%
0	2.00%	0.406%	0.010%
0	5.00%	0.517%	0.059%



Obr. 33: Porovnanie výnosov dlhopisových dôchodkových fondov. Zdroj: [15]

Záver

Táto diplomová práca sa zaoberala správou garantovaného fondu v druhom pilieri dôchodkového systému na Slovensku. Na začiatku sme si stručne popísali dlhopisový garantovaný fond. Konkrétne sme sa oboznamovali s obmedzeniami v zákone, poplatkami a druhmi dlhopisov, ktoré môže tento fond nakupovať.

V druhej kapitole sme sa venovali úrokovým mieram. Najskôr sme si určili, akým modelom budeme simulovať krátkodobú úrokovú mieru a zároveň sme si vysvetlili, ako nakalibrujeme parametre tohto modelu. Potom sme uviedli, ako z krátkodobej úrokovej miery dostaneme celú výnosovú krivku a zároveň sme určili parametre resp. posuny úrokových mier pre všetky nami používané skupiny dlhopisov.

V kapitole č. 3 sme upresnili, ako budeme počítať súčasnú hodnotu a duráciu portfólia.

Vo štvrtej kapitole sme vytvorili program na správu dlhopisového portfólia, ktorý nám v každom roku investuje dostupné finančné prostriedky tak, aby čo najpresnejšie trafil strategickú alokáciu a aby malo portfólio približne rovnakú duráciu ako je naša cieľová durácia. Zároveň nám tento program v každom roku vypočíta hodnotu dôchodkovej jednotky, podľa ktorej sa určuje pokles respektíve nárast prostriedkov vo fonde.

V poslednej kapitole sme vygenerovali 2000 simulácií úrokových mier pre každú zo 6 rôznych hodnôt parametra θ. Potom sme vymysleli päť rôznych strategických alokácií, ktoré sme skombinovali so štyrmi hodnotami durácie, čím nám vzniklo 17 investičných stratégií. Tieto stratégie sme otestovali na všetkých simuláciách úrokových mier.

Podľa našich výsledkov pokles hodnoty dlhopisových fondov počas 10 - ročného kontrolného obdobia nastane v minimálnom počte prípadov, aj to len pri investovaní výlučne do štátnych dlhopisov. Prvé tri strategické alokácie dokonca dopadli tak, že ani odpočítanie poplatkov by neznížilo výnosy natoľko, aby počas ktoréhokoľvek 10-ročného kontrolného obdobia klesla hodnota dôchodkovej jednotky.

Prínosom tejto práce je testovanie rôznych dlhopisových portfólií na úrokových mierach, ktoré sme simulovali podľa parametrov nakalibrovaných z reálnych úrokov Euriboru. Vďaka tomu môžeme výsledky tejto práce považovať za hodnoverné. Naše analýzy prezentujú, že ak sa správne rozložia investované peňažné prostriedky, tak je nepravdepodobné aby z dlhodobého hľadiska neboli zhodnotené. Znamená to, že hodnota garantovaného fondu vzrastie, čo je cieľom každej dôchodkovej správcovskej spoločnosti.

Zoznam použitej literatúry

[1] ASDSS: Polročná správa o hospodárení s majetkom v dôchodkovom fonde, dostupné na internete (4.12.2017): `https://www.asdss.sk/assets/Original/4280/ASDSS_Polrocna_sprava_KODF_1606_akt.pdf`

[2] Deposits: Eurozone Loans Rates by Country , dostupné na internete (21.4.2017): `https://eurozone.deposits.org/loans/`

[3] D. Ševčovič, B. Stehlíková, K. Mikula. *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov.* Nakladateľstvo STU, Bratislava 2009, 200 pages. In Slovak. ISBN 978-80-227-3014-3

[4] EMMI: Eonia® Rates, dostupné na internete (30.4.2017): `https://www.emmi-benchmarks.eu/euribor-eonia-org/eonia-rates.html`

[5] EMMI: Euribor® Rates, dostupné na internete (10.4.2017): `https://www.emmi-benchmarks.eu/euribor-org/euribor-rates.html`

[6] Euribor-rates.eu: Euribor and a Mortgage, dostupné na internete (10.4.2017): `http://euribor-rates.eu/euribor-mortgage.asp`

[7] Finančné trhy pre začiatočníkov , 20. časť : Druhy dlhopisov, dostupné na internete (3.12.2016): `http://www.derivat.sk/index.php?PageID=1393`

[8] I. Melicherčík, L. Olšarová, V. Úradníček. *Kapitoly z finančnej matematiky.* Epos, Bratislava, 2005, ISBN 80-8057-651-3

[9] Investície: Typy dlhopisov, dostupné na internete (3.12.2016): `http://www.investicie.eu/typy-dlhopisov/t125/`

[10] Investing: Germany 10-year bond yield, dostupné na internete (10.4.2017): `http://www.investing.com/rates-bonds/germany-10-year-bond-yield`

[11] J. Halgašová, B. Stehlíková, Z. Bučková. *Estimating the short rate from the term structures in the Vasicek model.* Tatra Mountains Mathematical Pubications 61 (2014), pp. 87-104

[12] Ministerstvo práce, soc. vecí a rodiny: II. pilier v číslach , dostupné na internete (21.4.2017):
`https://www.employment.gov.sk/sk/socialne-poistenie-dochodkovy-system/dochodkovy-system/ii-pilier-starobne-dochodkove-sporenie/zhodnotenie-majetku/`

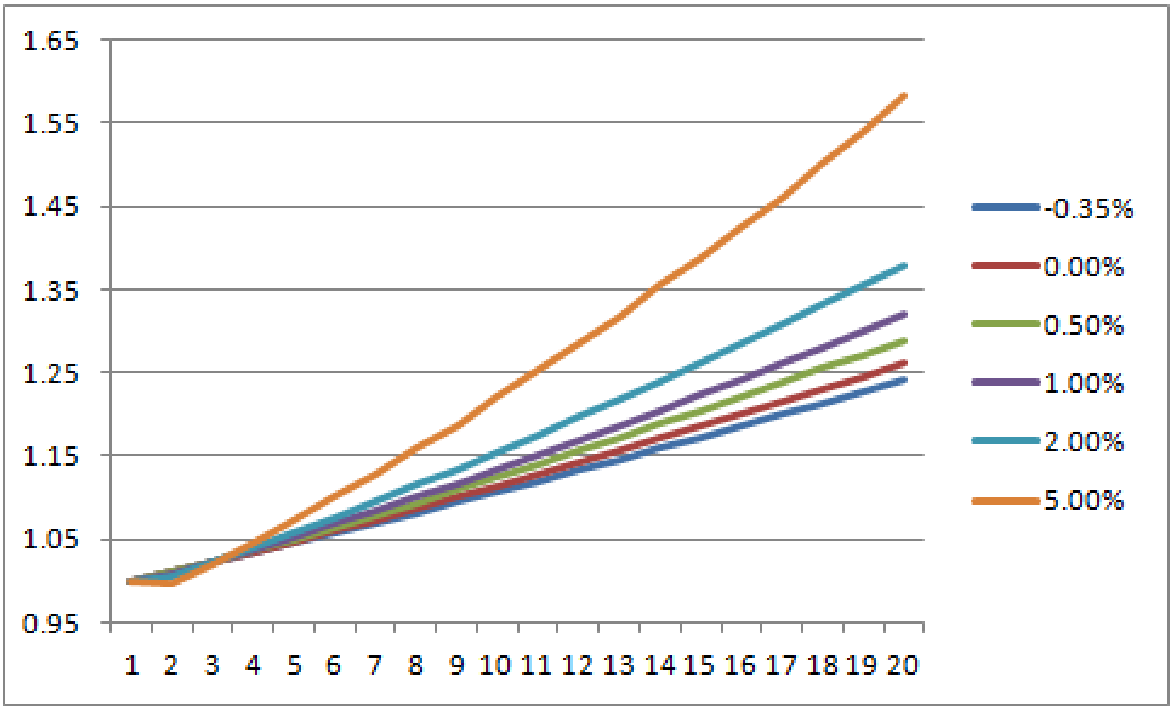
[13] Priemerná mzda , dostupné na internete (21.4.2017):
`http://www.minimalnamzda.sk/priemerna-mzda.php`

[14] Santiago Carbó Valverde, Francisco Rodríguez Fernández. *European mortgage interest rates: A comparative analysis of the case of Spain* SEFO - Spanish Economic and Financial Outlook,Vol. 4, No. 3 (May 2015)

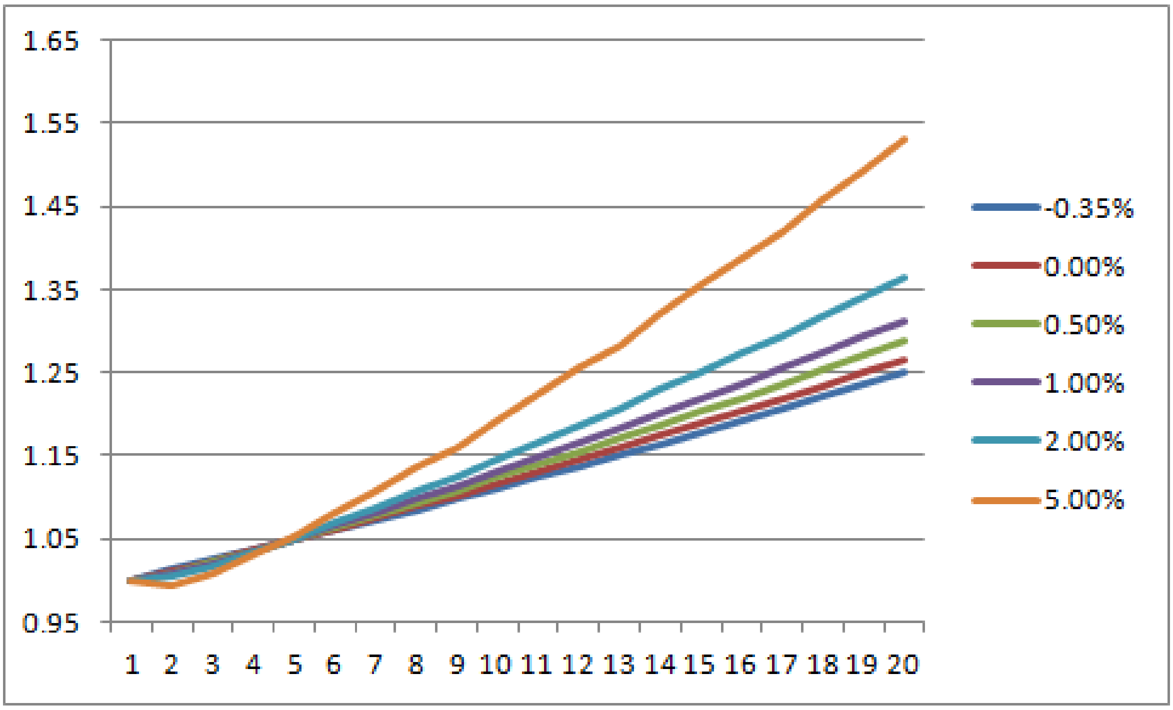
[15] SME:Druhý pilier, dostupné na internete (20.4.2017):
`http://druhypilier.sme.sk/`

[16] Zákon č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení, dostupné na internete (20.9.2016):
`http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Legislativa/_UplneZneniaZakonov/Z0432004.PDF`

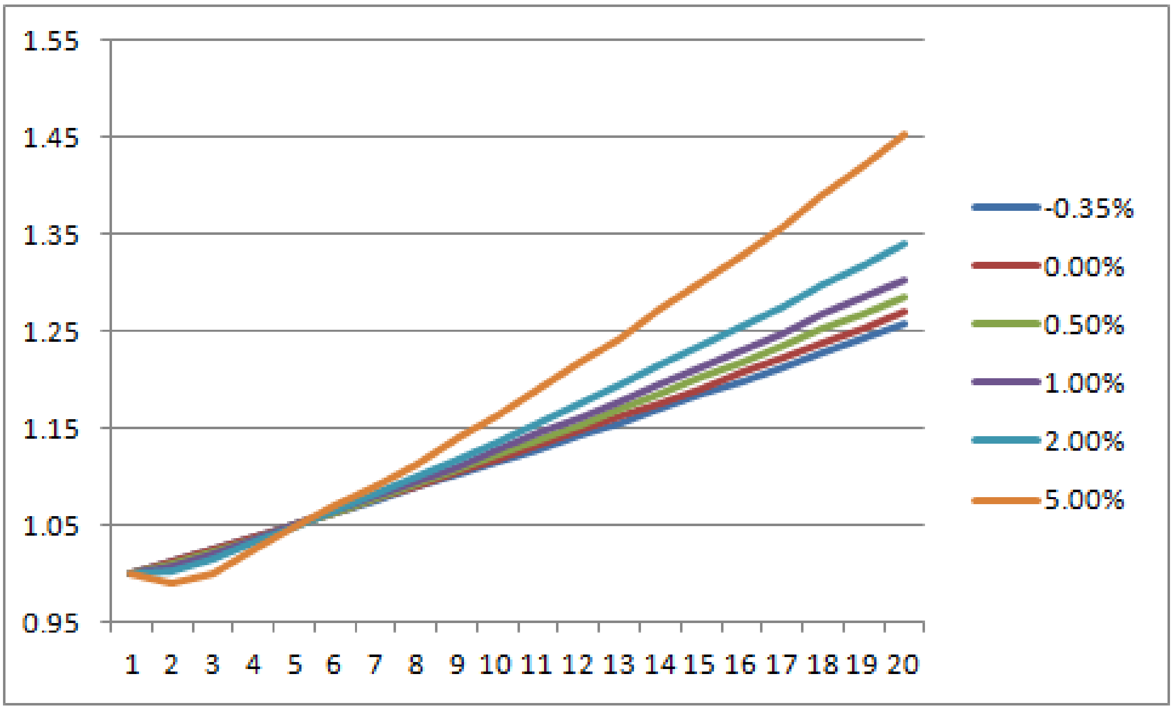
A Príloha



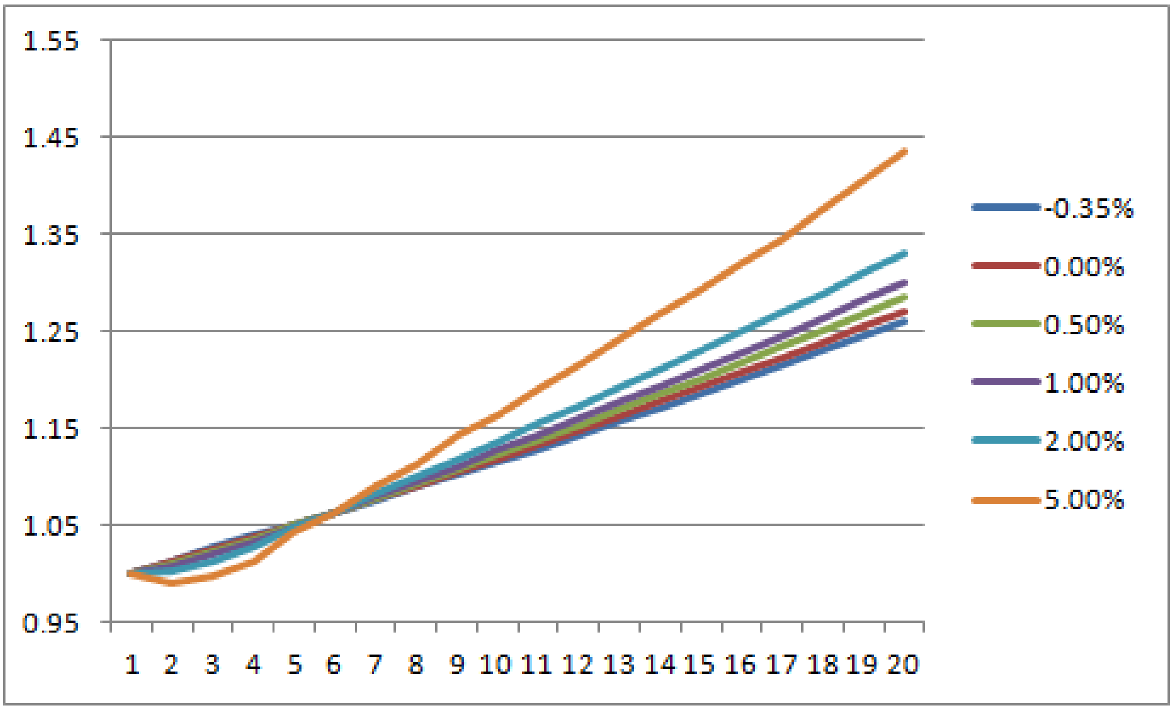
Obr. 34: Priemerné hodnoty AHDJ stratégie 1 pre rôzne hodnoty θ.



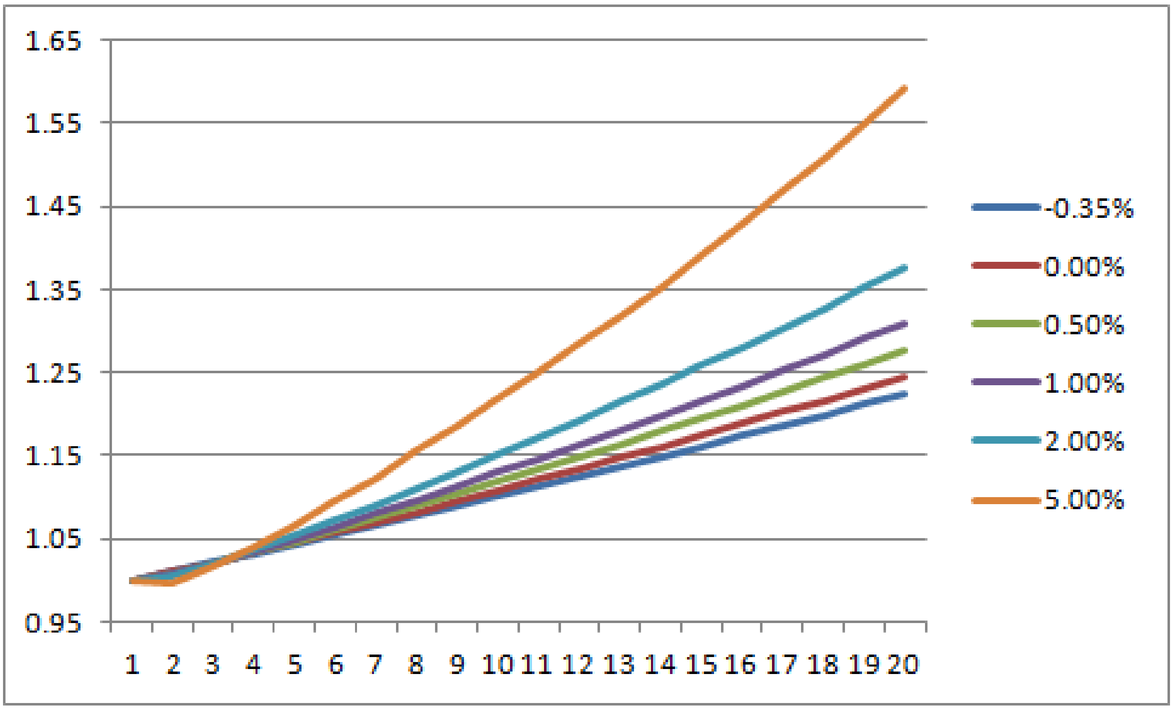
Obr. 35: Priemerné hodnoty AHDJ stratégie 2 pre rôzne hodnoty θ.



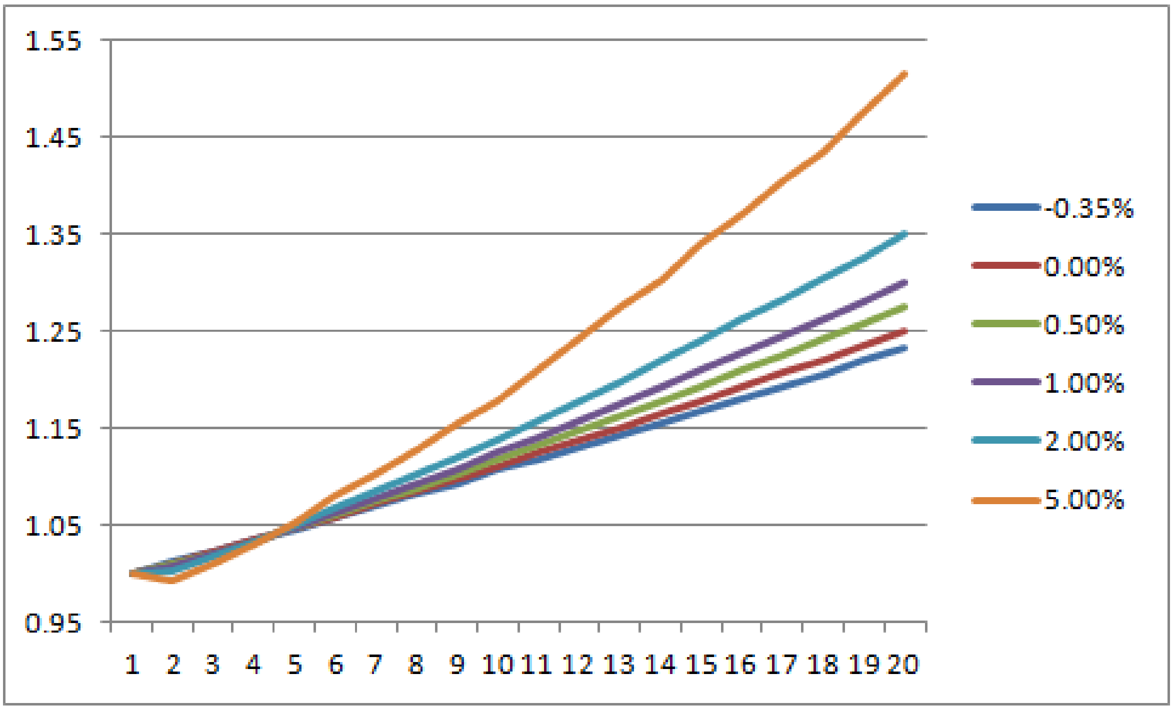
Obr. 36: Priemerné hodnoty AHDJ stratégie 3 pre rôzne hodnoty θ.



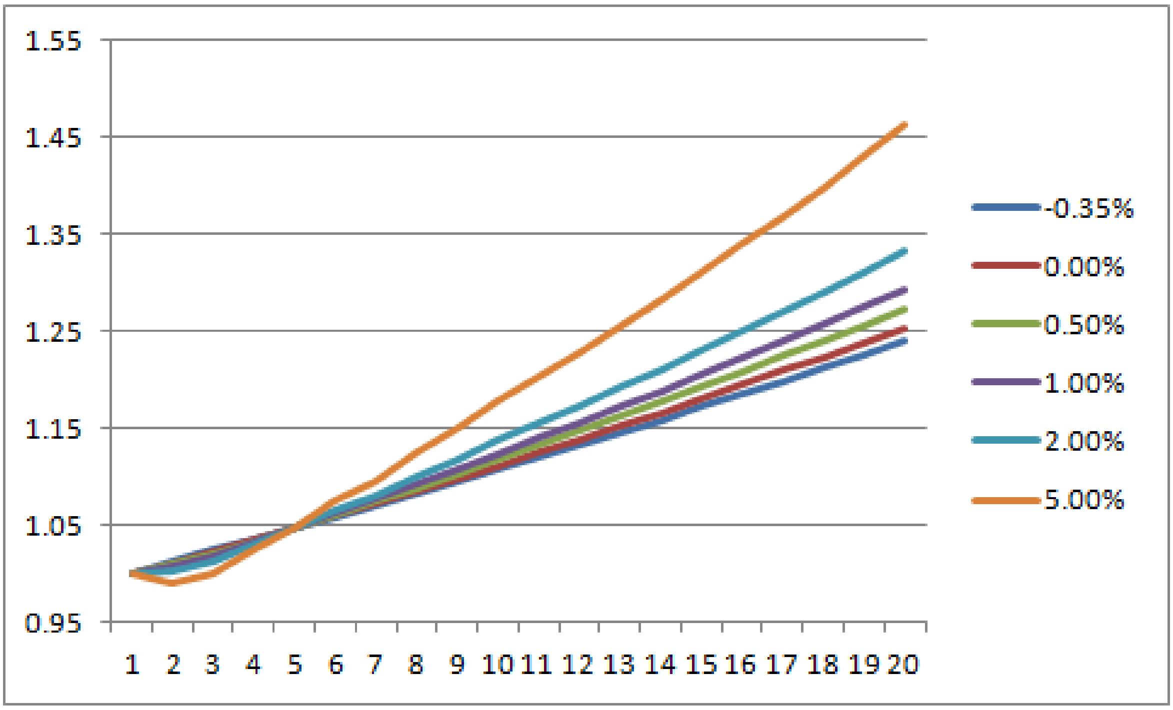
Obr. 37: Priemerné hodnoty AHDJ stratégie 4 pre rôzne hodnoty θ.



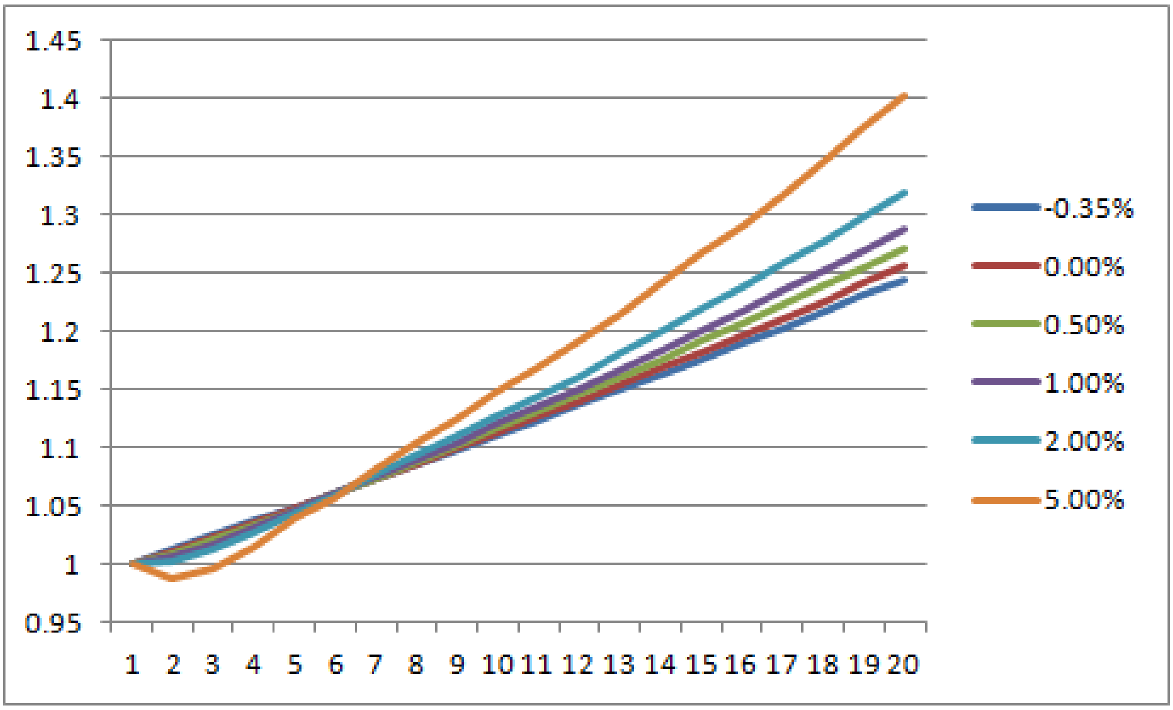
Obr. 38: Priemerné hodnoty AHDJ stratégie 5 pre rôzne hodnoty θ.



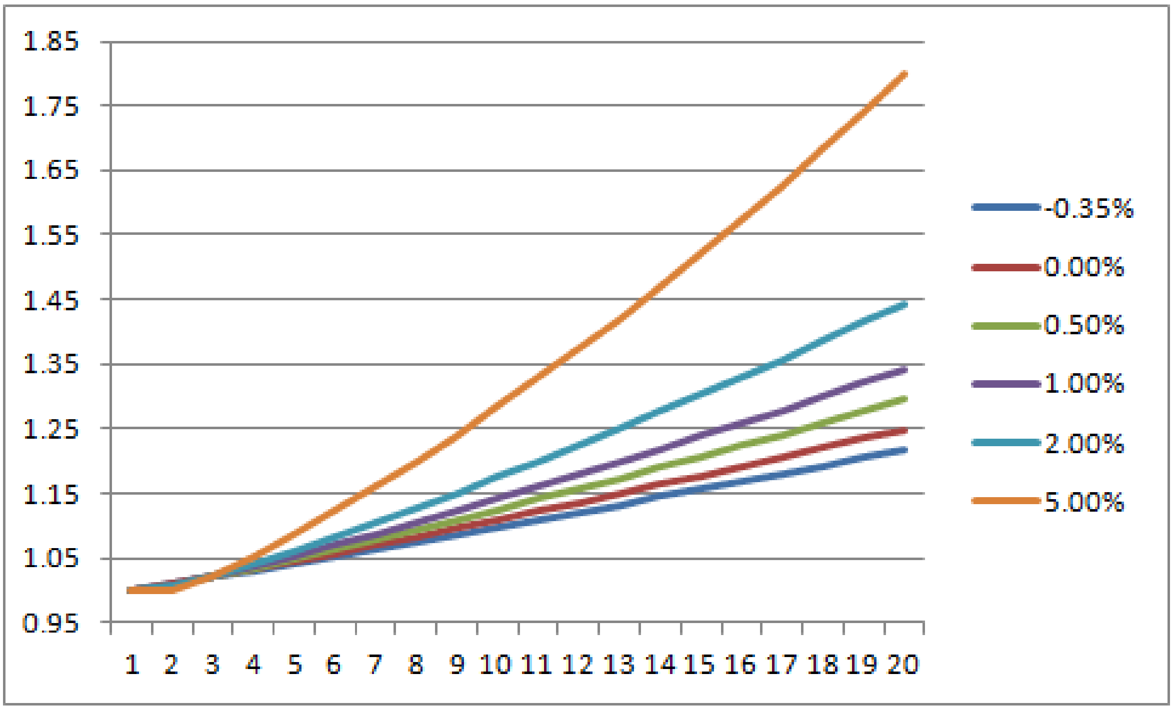
Obr. 39: Priemerné hodnoty AHDJ stratégie 6 pre rôzne hodnoty θ.



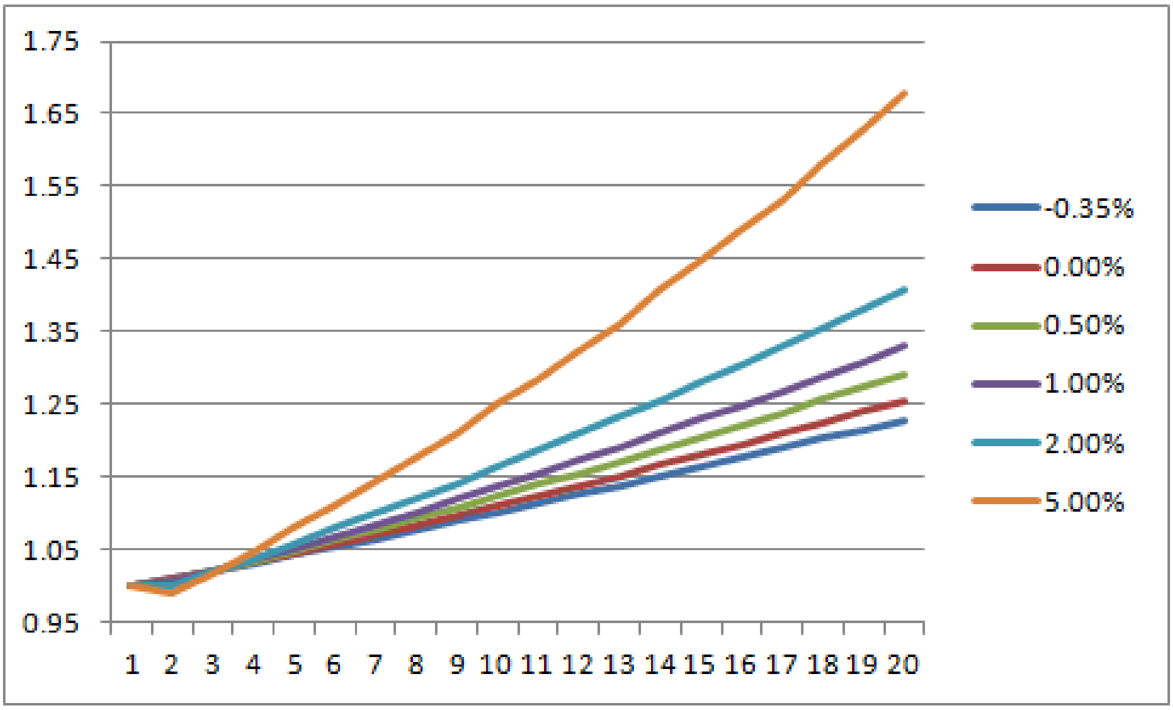
Obr. 40: Priemerné hodnoty AHDJ stratégie 7 pre rôzne hodnoty θ.



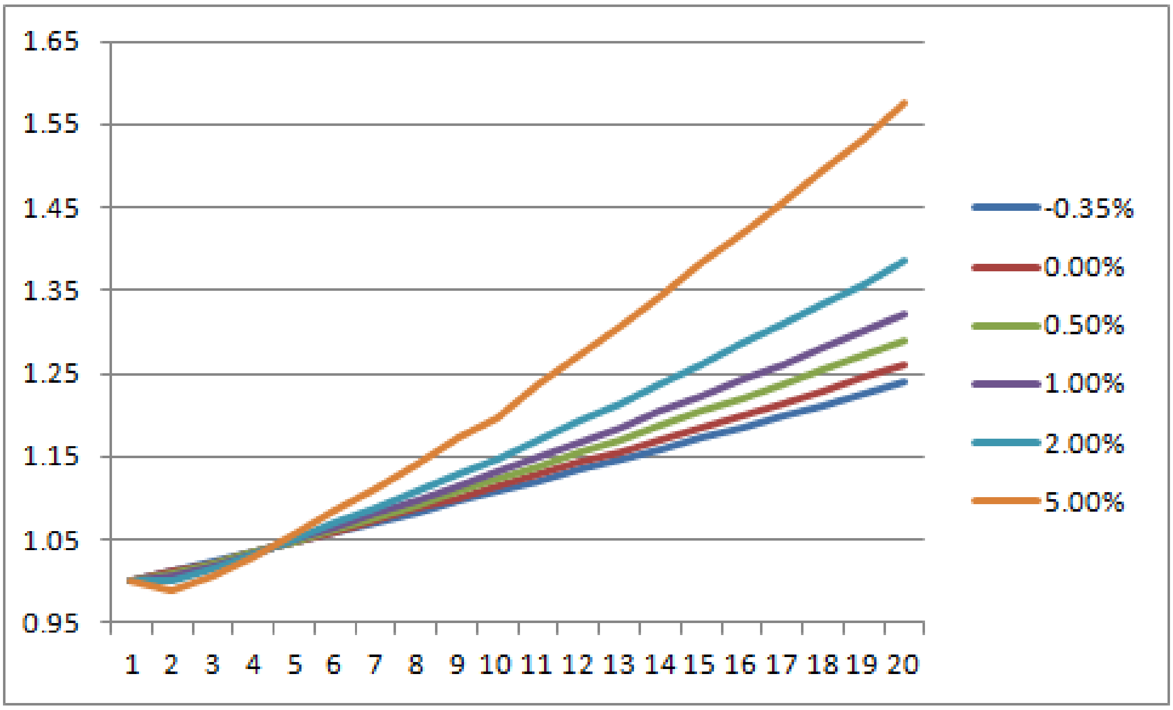
Obr. 41: Priemerné hodnoty AHDJ stratégie 8 pre rôzne hodnoty θ.



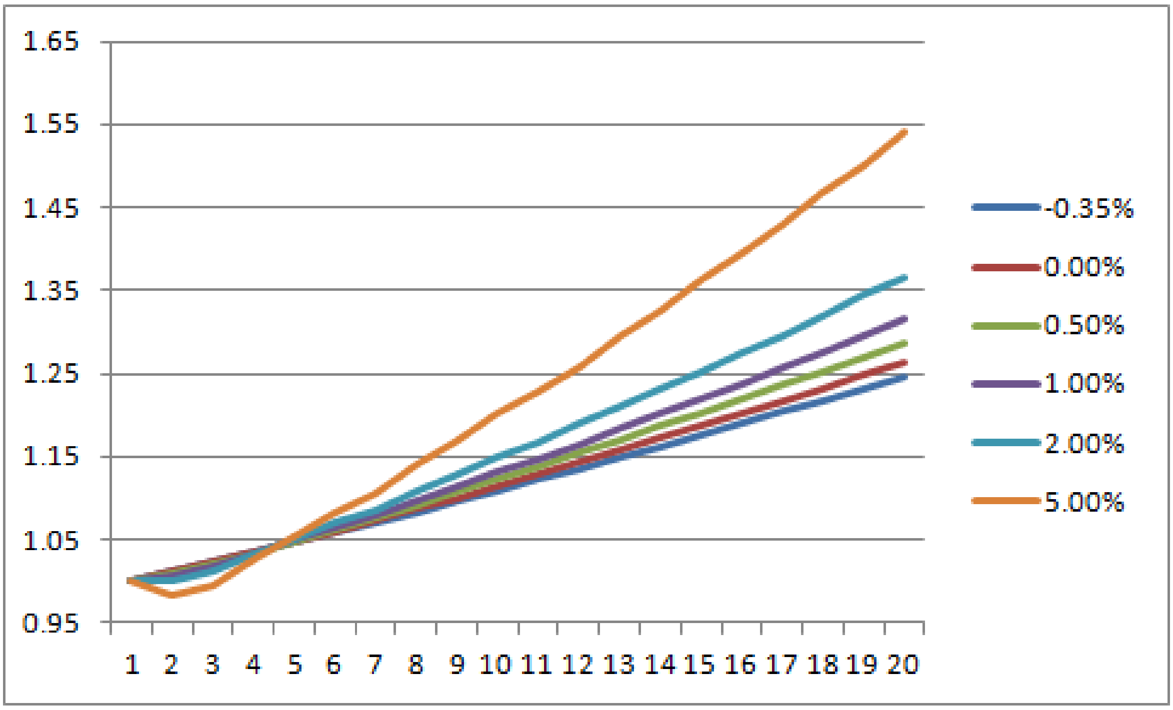
Obr. 42: Priemerné hodnoty AHDJ stratégie 9 pre rôzne hodnoty θ.



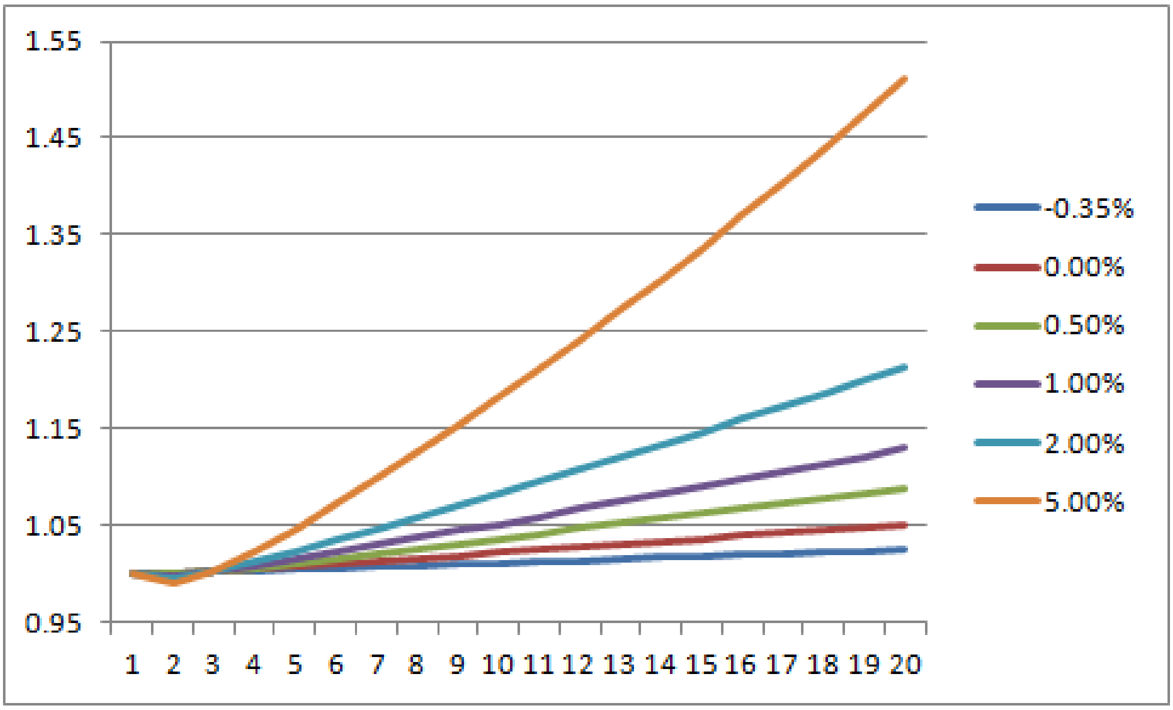
Obr. 43: Priemerné hodnoty AHDJ stratégie 10 pre rôzne hodnoty θ.



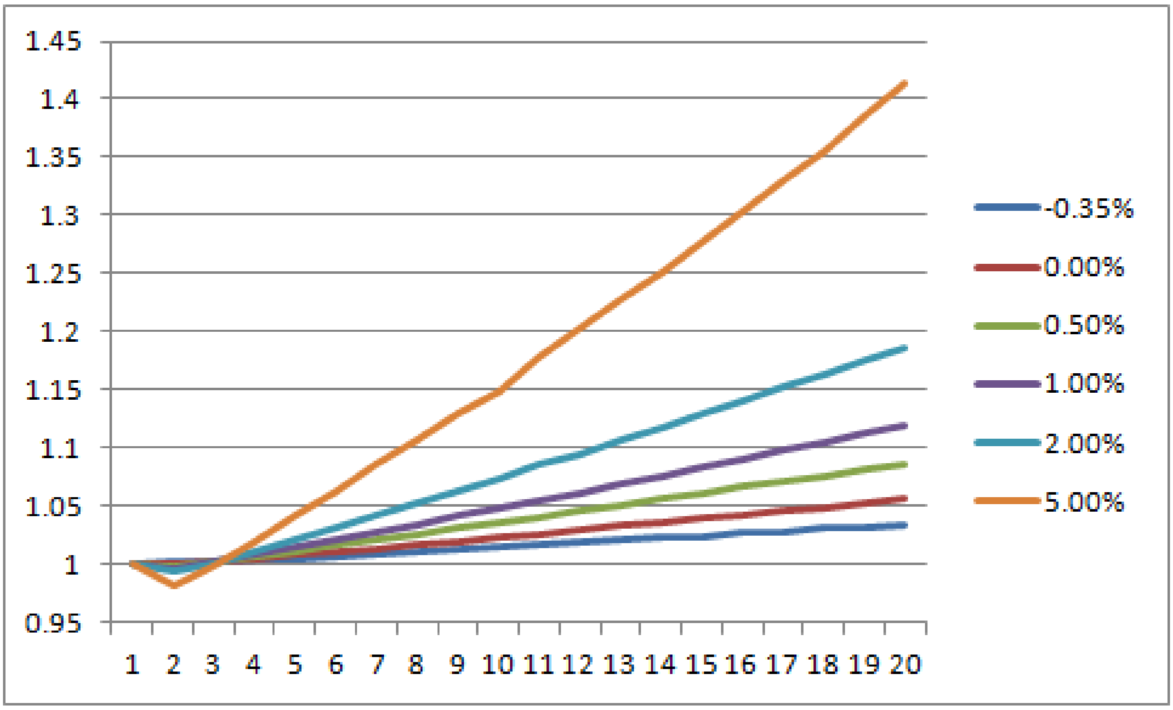
Obr. 44: Priemerné hodnoty AHDJ stratégie 11 pre rôzne hodnoty θ.



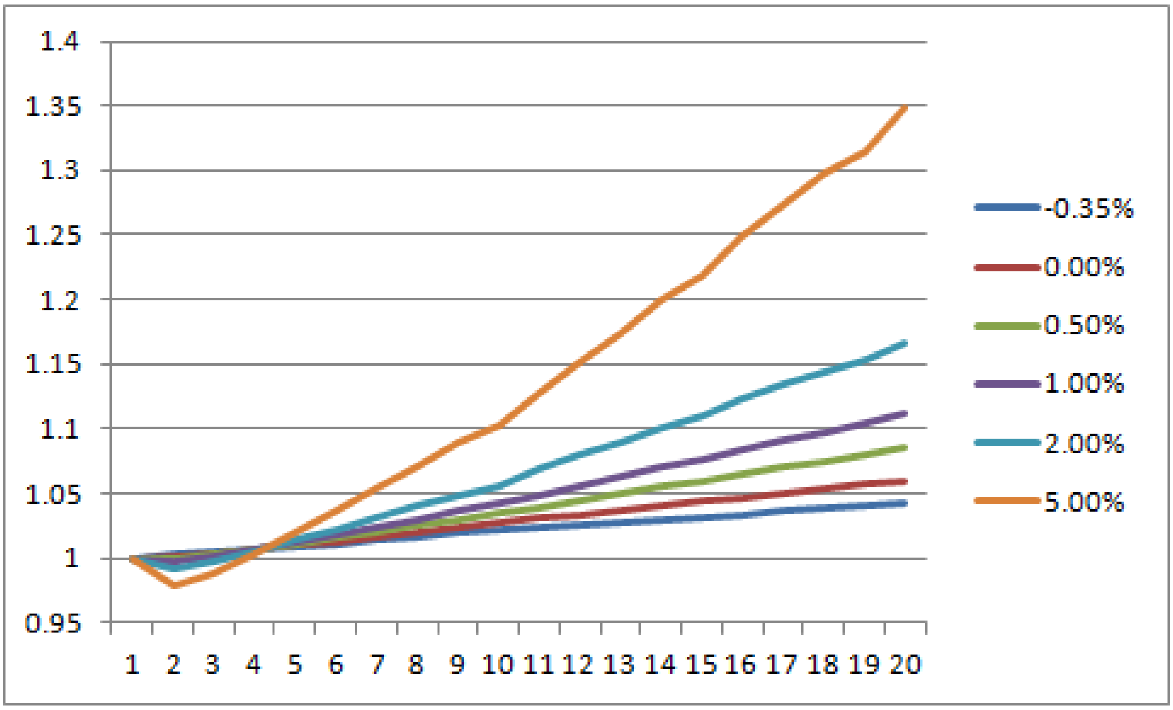
Obr. 45: Priemerné hodnoty AHDJ stratégie 12 pre rôzne hodnoty θ.



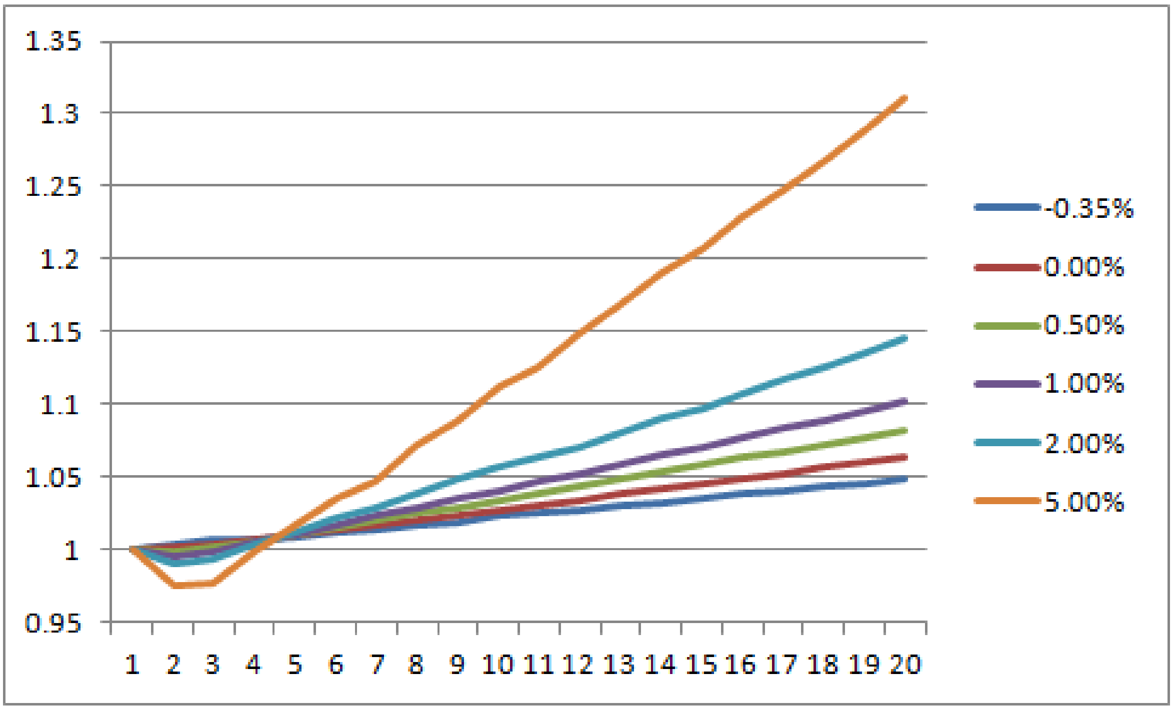
Obr. 46: Priemerné hodnoty AHDJ stratégie 13 pre rôzne hodnoty θ.



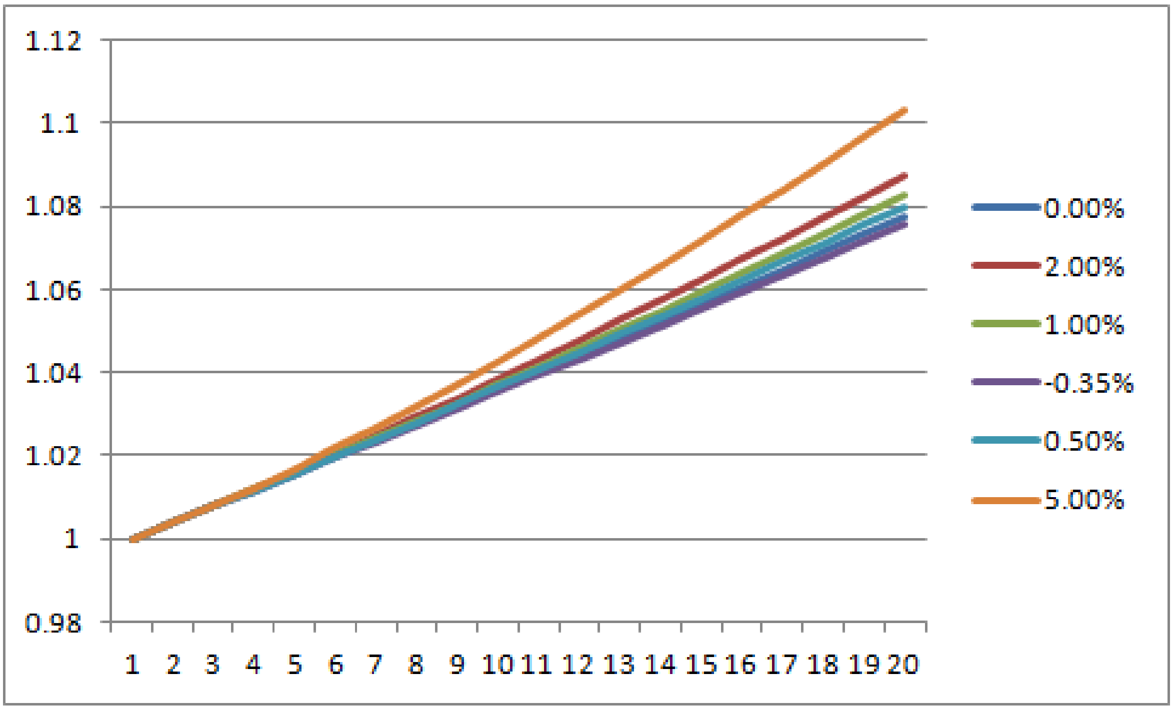
Obr. 47: Priemerné hodnoty AHDJ stratégie 14 pre rôzne hodnoty θ.



Obr. 48: Priemerné hodnoty AHDJ stratégie 15 pre rôzne hodnoty θ.



Obr. 49: Priemerné hodnoty AHDJ stratégie 16 pre rôzne hodnoty θ.



Obr. 50: Priemerné hodnoty AHDJ stratégie 17 pre rôzne hodnoty θ.