

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**MODELOVANIE  
TENKÝCH KVAPALNÝCH  
VRSTIEV**

Diplomová práca

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**MODELOVANIE  
TENKÝCH KVAPALNÝCH  
VRSTIEV**

Diplomová práca

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie

Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika (1114)

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci práce: Doc. Mgr. Peter Guba, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Katarína Šostáková  
**Študijný program:** ekonomicko-finančná matematika a modelovanie  
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský  
**Sekundárny jazyk:** anglický

**Názov:** Modelovanie tenkých kvapalných vrstiev.  
*Modelling of thin liquid films.*

**Cieľ:** Cieľom diplomovej práce je odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre popis dynamiky tenkého kvapalného filmu pomocou asymptotickej redukcie úplného systému riadiacich rovníc a hraničných podmienok. Rovnica pre tenký film predstavuje problém s voľnou hranicou, ktorý bude riešený pomocou numerických metód s cieľom analyzovať konečné deformácie interfejsu s konštantnými šmykovými napätiami.

**Vedúci:** doc. RNDr. Peter Guba, PhD.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
**Dátum zadania:** 21.01.2016

**Dátum schválenia:** 25.01.2016  
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

## **Pod'akovanie**

Ďakujem vedúcemu mojej diplomovej práce doc. Mgr. Petrovi Gubovi, PhD. za meto-  
dickú pomoc, cenné rady a nápady, odborné vedenie a najmä vzácny čas, ktorý mi pri  
vypracovávaní tejto diplomovej práce venoval.

Rovnako chcem pod'akovať priateľom Ing. Šimonovi Gajdošechovi a Mgr. Michalovi  
Strižencovi za umožnenie práce na ich silnejších počítačoch a v neposlednom rade rodine  
a priateľovi za trpezlivosť a podporu v ťažkých chvíľach.

## Abstrakt

Bc. Šostáková, Katarína: Modelovanie tenkých kvapalných vrstiev. Diplomová práca, Univerzita Komenského. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Vedúci diplomovej práce: doc. Mgr. Peter Guba, PhD. Bratislava: FMFI UK, 2017, 40 s.

V našej práci sa zaoberáme modelovaním dynamiky tenkej slznej vrstvy na povrchu oka. Tento model predstavuje problém s voľnou hranicou. Práca poskytuje súhrn základných riadiacich rovníc, ktoré vychádzajú zo zákonov zachovania, a rovníc, ktoré popisujú charakter rozhrania slzná vrstva/okolité prostredie. Asymptotickou redukciou systému rovníc a hraničných podmienok sme odvodili parciálnu diferenciálnu rovnicu, ktorá riadi dynamiku tenkého kvapalného filmu. Naším cieľom je numerické riešenie evolučnej parciálnej diferenciálnej rovnice pomocou metódy čiar. Analyzujeme správanie slzného filmu v závislosti od parametrov, ktoré reprezentujú zakrivenie, van der Waalovu interakciu a efekt zmáčania rohovky. Porovnávame prípady pre dokonalé zmáčanie rohovky, ktoré predstavuje idealizáciu reálnej situácie, s parciálnym zmáčaním.

**Kľúčové slová:** Suché oko, slzná vrstva, vyparovanie, van der Waalove napätie, zmáčanie rohovky

## Abstract

Bc. Šostáková, Katarína: Modelling of thin liquid films. Diploma thesis, Comenius University. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics. Supervisor: doc. Mgr. Peter Guba, PhD. Bratislava: Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University, 2017, 40 s.

In this diploma thesis, we focus on modelling of thin tear film dynamics on the surface of the eye. This model presents a free boundary problem. Our work gives a summary of basic governing equations based on the Laws of Conservation, and the equations describing the character of thin film/environment interface. Partial differential equation governing the thin liquid film dynamics was derived by asymptotic reduction of the system of equations and boundary conditions. One of our goals is the numerical solution of evolutionary partial differential equation. The behaviour of thin tear film depending on the parameters representing curvature, van der Waals force and wetting of the cornea is analyzed using the method of lines. We compare the case for perfect wetting of the cornea, which is an idealization of the real situation, with partial wetting.

**Keywords:** Dry eye, tear layer, evaporation, van der Waals tension, wetting of cornea

---

## Obsah

Úvod	8
<b>1 Formulácia problému</b>	<b>15</b>
1.1 Dynamické podmienky na rozhraní slzný film/vzduch . . . . .	16
<b>2 Bezrozmerná formulácia</b>	<b>19</b>
<b>3 Rovnice slznej vrstvy v limite malej hrúbky</b>	<b>21</b>
<b>4 Evolučná parciálna diferenciálna rovnica pre slzný film</b>	<b>23</b>
<b>5 Numerické experimenty</b>	<b>24</b>
5.1 Redukcia modelu pre prípad konštantného vyparovania . . . . .	24
5.2 Redukcia modelu pre prípad nekonštantného vyparovania . . . . .	26
5.3 Prípad nedokonalého zmáčania rohovky . . . . .	32
5.4 Dynamika minimálnej hrúbky slzného filmu . . . . .	36
<b>Záver</b>	<b>38</b>
<b>Implementácia numerickej metódy čiar</b>	
<b>so semidiskretizáciou v priestorovej oblasti</b>	<b>41</b>

## Úvod

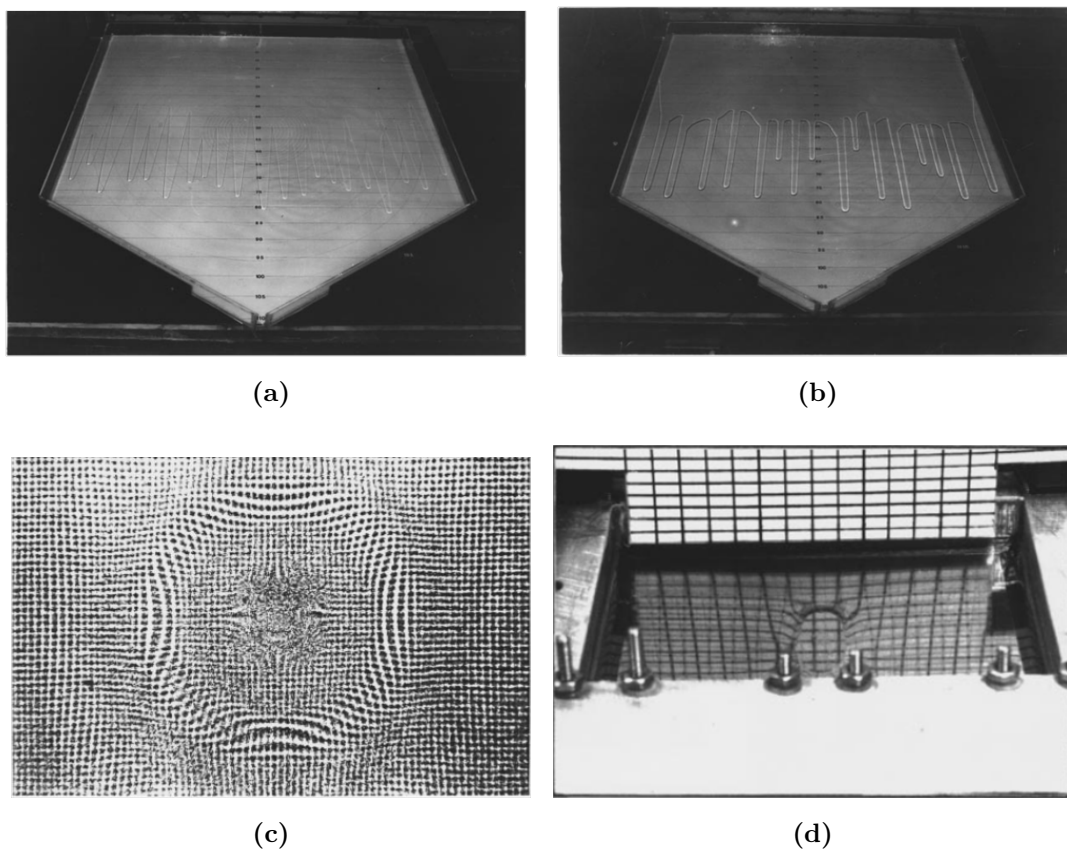
Tenké kvapalné vrstvy sú dôležité vo fyzike, biofyzike, inžinierstve aj v ostatných prírodných vedách. Zvyčajne sa používajú alebo vyskytujú na znižovanie trenia, chránenie materiálu pred poškodením a znečistením alebo na prenos látok ([13], [12], [2]). Tieto kvapaliny môžu pozostávať z rôznych látok ako voda, olej, alkohol a z iných komplexných látok. Keď sú látky vystavené rôznym fyzikálnym faktorom, ich správanie sa líši a vznikajú zaujímavé dynamické javy, ako napr nestabilita propagujúceho frontu (Obr. 1). Na Obr. 1a vidíme stekanie po naklonenej rovine s "prstami", ktoré sa ustálili do trojuholníkovitého tvaru. Pri zmene hustoty kvapaliny môžu vzniknúť aj prsty, ktorých hrany sa po čase ustália a stekajú priamo vertikálne - Obr. 1b. Efekt zvukových vln, ktoré pôsobili na vrstvu silikónového oleja na horizontálnej platni je zobrazený na Obr. 1c. Kvapalina vytvorila lokálne osovo-súmernú perturbáciu a ustálila sa do kruhového tvaru. Na Obr. 1d je zobrazený efekt nerovnomerného zahriatia vrstvy silikónového oleja na jednom mieste, pri ktorom sa kvapalina zhustila a vytvorila lokalizovanú depresiu. V práci [13] boli skúmané vplyvy iných fyzikálnych faktorov na kvapalné vrstvy. Ďalšie pozorované javy sú tvorba ruptúr, vln a chaotické odozvy. V našej práci sa budeme zaoberať najmä tvorbou ruptúr - pretrhnutím slznej vrstvy na povrchu oka.

## Syndróm suchého oka

Každý človek potrebuje žmurkať. Ihneď po tomto pohybe sa vytvorí na rohovke tenká vrstva kvapaliny, ktorá umožňuje správny lom svetla. Túto vrstvu nazývame tenkou slznou vrstvou (thin tear film). Táto kvapalná vrstva zvlhčuje oko, chráni ho pred baktériami, prachom a cudzími telesami a pomáha odvádzať nečistoty [6]. Všeobecne sa podceňuje zraková ostrosť, ktorá je najvyvinutejšou funkciou slznej vrstvy. Rozhranie slzná vrstva/vzduch má refrakčnú mohutnosť až 60 dioptrií, čo je podľa [7] najvyššia hodnota pozorovaná u zrkového analyzátoru. Aj malé porušenie tejto vrstvy môže mať za následok zhoršenú ostrosť.

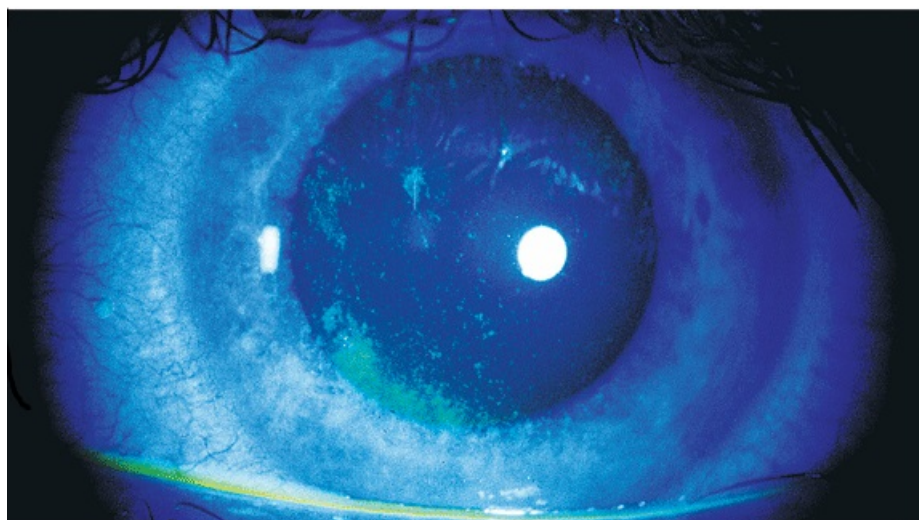
Syndróm suchého oka je súbor symptómov, pri ktorých dochádza k nedostatočnému alebo nefunkčnému zvlhčeniu oka a pretrhnutiu slzného filmu (viď Obr. 2). Podľa štúdií





**Obr. 1:** Rôzne formy prúdenia tenkých kvapalných vrstiev po naklonenej rovine, následky efektov zvukových vln a nerovnomerného zohriatia na tenkú kvapalnú vrstvu na horizontálnej platni.

z roku 2007 [15], asi 4.91 milióna obyvateľov USA trpí týmto syndrómom. V práci [8] z roku 2004, autori odhadujú, že syndróm suchého oka postihuje 10–20 % dospelých ľudí. Suché oko sa vyskytuje aj pri vážnejších ochoreniach ako Sjogrenov syndróm alebo poruchy Meibomovej žľazy. Pri Sjogrenovom syndróme, imunitný systém môže napadnúť žľazy na zvlhčovanie prostredia ako slinné žľazy v ústach alebo slzné žľazy pri oku. Žľaza vylučuje nedostatok slz, čo vedie k rýchlejšiemu vysychaniu, podráždeniu, pocitu cudzieho telesa v oku a ďalším príznakom suchého oka [16]. Tento tenký film sa môže rýchlejšie vyparovať aj kvôli poruche Meibomovej žľazy, ktorá sa nachádza na očných viečkach a tvorí ochrannú tukovú vrstvu lipidov. Táto vrstva umožňuje pomalšie vysychanie vďaka vlastnostiam lipidov, ktoré zabraňujú vyparovaniu [2], [16]. Neliečené symptómy suchého oka môžu mať trvalé následky na správnu funkciu oka a môžu viesť až k oslepnutiu [7].



**Obr. 2:** Diagnóza suchého oka pomocou zafarbenia kontrastnou látkou. Pri dolnom viečku vidíme pás svetlejšej farby - miesto, kde sa zmenšuje hrúbka slznej vrstvy [7].

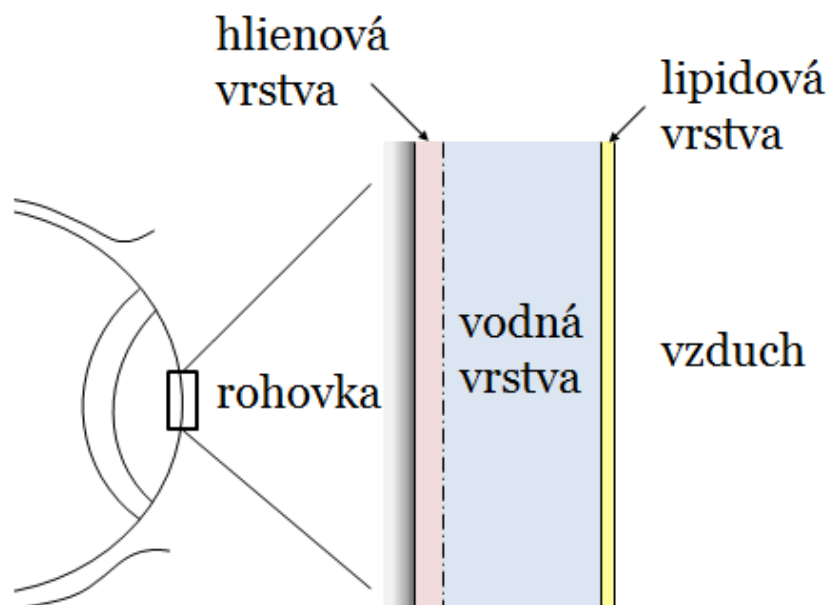
V tejto práci sa budeme zaoberať matematickými modelmi, ktoré popisujú dynamiku tenkej slznej vrstvy na povrchu oka. Hlbšie pochopenie fungovania tohto procesu pri zdravom oku môže napomôcť k pochopeniu procesu tvorby ruptúr a liečby syndrómu suchého oka.

## Štruktúra tenkej vrstvy

Podľa klasickej definície slzného filmu sa táto tenká kvapalina skladá z troch vrstiev: (i) lipidová vrstva, (ii) vodná vrstva a (iii) hlienová vrstva [3]. Tieto vrstvy sú umiestnené tak ako je ilustrované na Obr. 3. V poslednom období je táto definícia zpochybňovaná a uvažuje sa, že slzná kvapalina je jedna vrstva, v ktorej sú hlienová a vodná časť zmiešané [2].

Meranie hrúbky slznej vrstvy je komplikovaný proces. Využívajú sa rôzne metódy, napr. interferometria alebo optická koherenčná tomografia [16]. Tieto merania udávajú hodnotu hrúbky vrstvy v rozmedzí od niekoľkých mikrónov ( $10^{-6}$  m) po desiatky mikrónov [2]. Modernejšie metódy interferometrie naznačujú hodnoty v intervale  $1,5 - 4,7 \mu\text{m}$  [10].

Hlienová vrstva je prvá ochranná vrstva na povrchu oka. Je tvorená tromi typmi hlienov - rozpustné, ktoré sa vmiešajú do vodnej vrstvy, hlieny tvoriace gél nachádzajúce sa medzi mikroklkmi na povrchu oka a dlhé transmembránové hlieny. Medzi hlien-

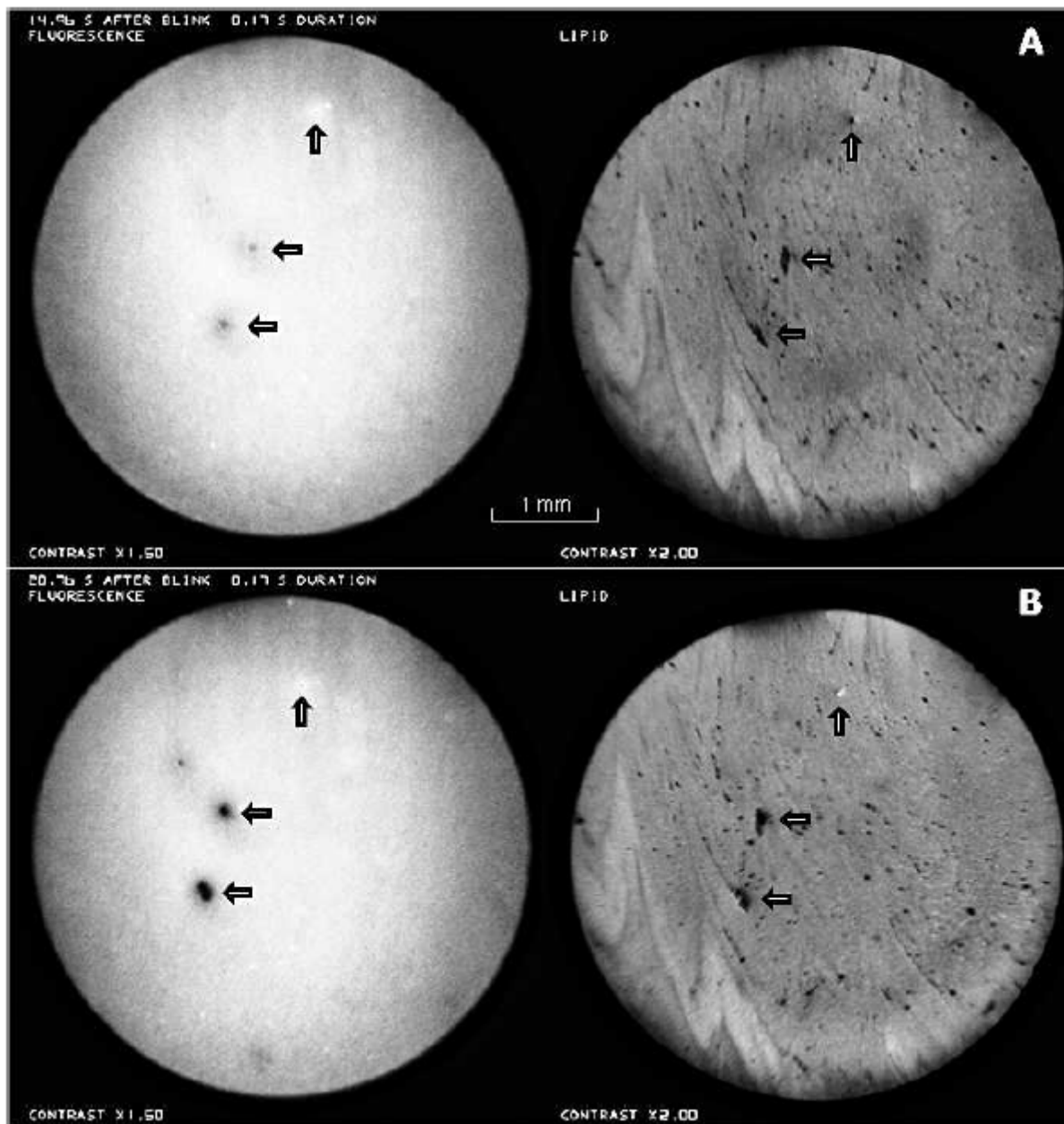


**Obr. 3:** Povrch zdravého oka sa skladá z hlienovej vrstvy na povrchu oka, vodnej vrstvy a z lipidovej vrstvy pri dotyku so vzduchom, resp. okolím.

vou a vodnou vrstvou nie je experimentálne rozlíšiteľné rozhranie. Vodná vrstva je z 98% voda, zvyšok tvoria rozpustné hlienové, soli a ďalšie látky [6]. Táto vrstva je bežne považovaná za slzu. Vonkajšia, lipidová vrstva sa skladá z nepolárnych lipidov na styčnej ploche so vzduchom. Na rozhraní vodnej a lipidovej vrstvy sa nachádzajú polárne lipidy. Táto vrstva je veľmi dôležitá, lebo znižuje povrchové napätie na rozhraní slzná vrstva/vzduch, spomaľuje vyparovanie vodnej vrstvy a tým stabilizuje slznú vrstvu voči ruptúram [2].

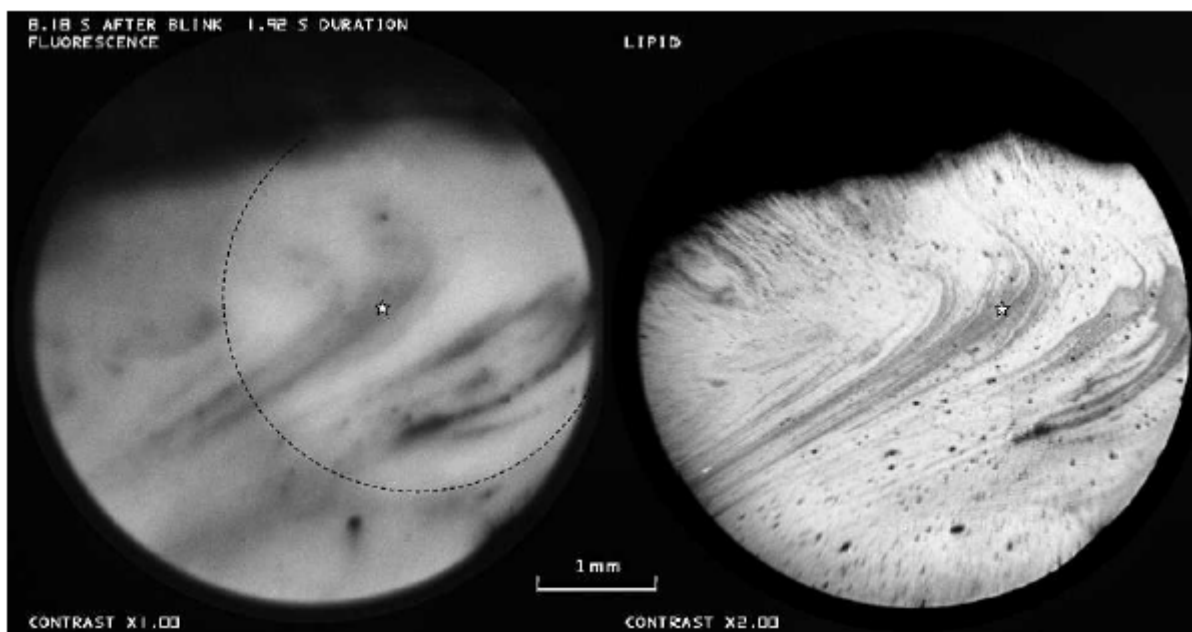
Lipidová a vodná vrstva boli študované v [11], kde skúmali závislosť tvorby ruptúr a bublín na hrúbke lipidovej vrstvy. Na Obr. 4 je zobrazená vodná (naľavo) a lipidová (napravo) vrstva v dvoch časových okamihoch. Vodná vrstva bola zafarbená fluorescínom pre dosiahnutie lepšej viditeľnosti pretrhnutia slzného filmu. Horizontálne šípky ukazujú na miesta, kde došlo k pretrhnutiu fluorescínovej aj lipidovej vrstvy. Vertikálna šípka ukazuje na miesto, kde sa pod lipidovou vrstvou vytvorila bublina. Tieto zábery ukazujú na porušenie slznej vrstvy zdravého oka 15 sekúnd a 21 sekúnd po žmurknutí. Obr. 5 zobrazuje zmešenie hrúbky slznej vrstvy na povrchu zdravého oka. Oblasť s menšou hrúbkou filmu je tmavšia (označená hviezdikou). Z obrázka sa dá po-

zorovať prepojenie hrúbky vodnej vrstvy a hrúbky lipidovej vrstvy. Oblasť ohraničená prerušovanou čiarou poukazuje na svetlejšiu oblasť rohovky v dôsledku šošovkovej fluorescence.



**Obr. 4:** Pretrhnutie fluoresceínovej vrstvy súvisí s ruptúrami tenkej lipidovej vrstvy (horizontálne šípky). Vertikálna šípka ukazuje na malú bublinu vytvorenú pod lipidovou vrstvou. Obrázok A zobrazuje vrstvy 15 sekúnd po žmurknutí. Obrázok B zobrazuje 21 sekúnd po žmurknutí. Meranie bolo vykonané na oku ženy bez očných ochorení.

V našej práci sa budeme zaoberať iba prípadom oka bez kontaktných šošoviek. Slzná vrstva je ohraničená očnými viečkami, ktoré uvažujeme symetricky rozložené. Pri viečkach sa slzná vrstva zvýši na tzv. menisky, ktoré siahajú po hranicu oka, kde sa spojivkové bunky menia na kožné bunky. V tejto oblasti nastáva zmena zmočenia povrchu [3]. Priemerná výška menisku je v rozmedzí  $2.5 - 6 \times 10^{-4} \text{m}$  [8]. Budeme uvažovať

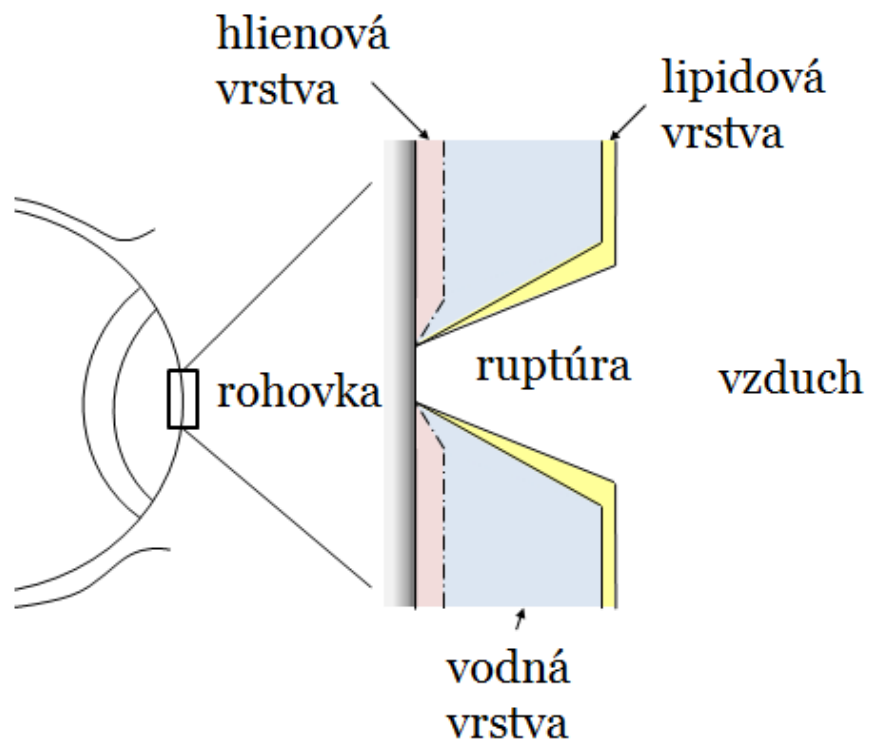


**Obr. 5:** Tmavé miesto v okolí hviezdičky zobrazuje tenšiu slznú aj lipidovú vrstvu. Prerušovaná čiara poukazuje na svetlejšiu oblasť v dôsledku šošovkovej fluorescencie. Meranie bolo vykonané na oku muža bez očných ochorení.

vrstvu na povrchu oka ako jednu kontinuálnu vrstvu. Zameriame sa na vyparovanie tenkého filmu a tvorbu ruptúr na povrchu oka, tak ako je zobrazené na Obr. 6. Zmeny vo vyparovaní budeme modelovať úpravou vlastností slznej kvapaliny.

Cieľom našej práce bude najmä dôkladné sformulovanie problému pomocou rovníc z dynamiky kvapalín a konzistentné odvodenie evolučnej parciálnej diferenciálnej rovnice pre hrúbku tenkého slzného filmu. Po odvodení sa zameriame na numerické riešenie pre hrúbku slzného filmu a kritický čas tvorby ruptúr v závislosti na vlastnostiach slznej kvapaliny. Naš prínos bude v detailnom odvodení parciálnej rovnice vývoja hrúbky slzného filmu, ktoré nie je ľahko dostupné v literatúre. Zrekonštruujeme numerické výsledky z [16] a porovnáme použité metódy. Budeme uvažovať aj prípad nedokonalého zmáčania rohovky a numericky modelovať vyparovanie slzného filmu v takomto

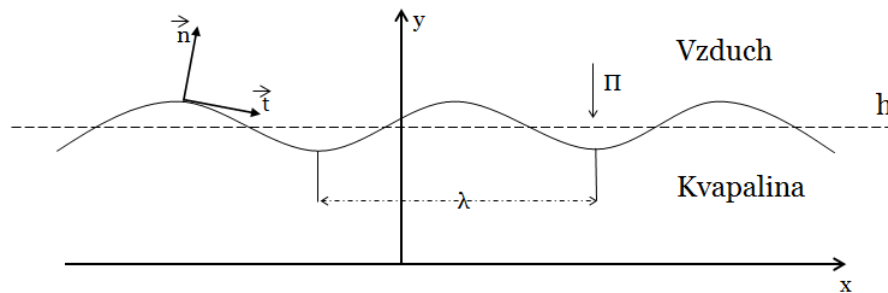
prípade. Poukážeme na rozdiely medzi vyparovaním dokonale a parciálne zmáčanej rohovky.



**Obr. 6:** Pri funkčných očných poruchách dochádza k rýchlejšiemu vyparovaniu a vzniká trhlina v tenkej slznej vrstve na povrchu oka.

# 1 Formulácia problému

Slznú vrstvu možno popísať ako nestlačiteľnú Newtonovskú kvapalinu s konštantnou hustotou  $\rho$  ( $\text{kgm}^{-3}$ ), viskozitou  $\mu$  ( $\text{Pa s}$ ), tepelnou kapacitou  $c_p$  ( $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ) a tepelnou vodivosťou  $k$  ( $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ). Ohraničeniami pre šírku vrstvy vo vertikálnom smere  $x$  sú očné viečka. Slznú vrstvu modelujeme ako symetrickú vzhľadom na  $x = 0$  na oblasti  $-L < x < L$ , ktorá sa nachádza medzi povrchom oka (kedy dochádza k roztrhnutiu kvapalnej vrstvy) a výškou  $h(x, t)$ ,  $0 < y < h(x, t)$ . Rozloženie kvapaliny a síl, ktoré na ňu pôsobia, sú ilustrované na Obr. 7.



**Obr. 7:** Povrch oka (natočený horizontálne) bez ohraničenia viečkami v miestach  $-L$  a  $L$ . Obrázok ilustruje sily pôsobiace na kvapalný slzný film.

Systém parciálnych diferenciálnych rovníc pre neznáme funkcie  $\mathbf{u}$ ,  $p$  a  $T$ , ktorý reprezentuje lokálne zachovanie hmoty (1.1), hybnosti (1.2) a tepla (1.3), má tvar:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho g \hat{\mathbf{i}}, \quad (1.2)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T \quad (1.3)$$

kde  $\mathbf{u} = [u, v]^T$  je rýchlosť kvapaliny,  $\mathbf{g} = g \hat{\mathbf{i}}$ ,  $g = \text{const}$  je gravitačné zrýchlenie a  $\hat{\mathbf{i}}$  je jednotkový vektor v smere  $x$ ,  $p = p(x, y, t)$  je tlakové pole (normálové napätie v kvapaline),  $h = h(x, t)$  je pozícia styčnej plochy so vzduchom, resp. okolím (hrúbka slznej vrstvy) a  $T = T(x, y, t)$  je teplota.

Rovnice (1.1)–(1.3) platia vo vnútri kvapaliny. Hraničné podmienky predpísané na

povrchu rohovky  $y = 0$  sú nasledovné:

Nulový horizontálny tok a vertikálny tok

$$u = 0, \quad v = 0 \quad (1.4)$$

Konštantná teplota

$$T = T_{eye} = \text{const.} \quad (1.5)$$

Podľa [16], teplota na povrchu oka klesne po žmurknutí o 1–1.5°C. My v našej práci zanedbávame toto ochladenie.

## 1.1 Dynamické podmienky na rozhraní slzný film/vzduch

Na dotykovej ploche so vzduchom, alebo voľnej hranici  $y = h(x, t)$ , sa kvapalina správa odlišne. V tejto časti budeme používať na označenie vyčíslovania premenných na strane kvapaliny symbol  $|^-$  a na strane vzduchu symbol  $|^+$ .

Vzhľadom na to, že chceme modelovať vyparovanie kvapaliny slzného filmu, rozhranie slzná vrstva/vzduch je nestacionárne. Rýchlosť na styčnej ploche budeme označovať  $\mathbf{u}_I$ . Zachovanie hmoty na pohyblivom rozhraní môžeme vyjadriť v tvare:

$$(\rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) \cdot \hat{\mathbf{n}})|^- = (\rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) \cdot \hat{\mathbf{n}})|^+, \quad (1.6)$$

kde  $\hat{\mathbf{n}}$  je normálový vektor na dotykovú plochu.

Pre normálový a dotykový jednotkový vektor na rozhraní slzná vrstva/vzduch platia nasledujúce vzťahy (pozri Obr. 8):

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2}}[-h_x, 1]^T, \quad \hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2}}[1, h_x]^T \quad (1.7)$$

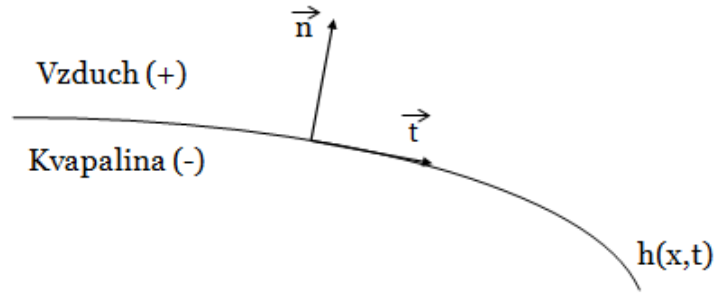
Na styčnej ploche slzného filmu a vzduchu môžeme hmotnostný tok na strane kvapaliny vyjadriť v tvare:

$$(\rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) \cdot \hat{\mathbf{n}})|^- \equiv \rho \frac{-uh_x + v - h_t}{\sqrt{1 + h_x^2}}. \quad (1.8)$$

Na strane vzduchu sa vzťah zjednodušuje na hmotnostný tok výparov, ktorý budeme označovať symbolom  $J$ . Výsledná forma zachovania hmoty na rozhraní je:

$$J = \rho \frac{-uh_x + v - h_t}{\sqrt{1 + h_x^2}}. \quad (1.9)$$





**Obr. 8:** Ilustrácia styčnej plochy kvapaliny a vzduchu.

Konštitučný vzťah pre hmotnostný tok výparov  $J$  uvedieme nižšie.

Podmienka pre rovnováhu napätia na styčnej ploche má dve časti - normálovú a dotyčnicovú. Pre stacionárny prípad rozhrania (t.j. bez vyparovania) má normálová časť podmienky tvar:

$$(\bar{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}})|^+ - (\bar{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}})|^- = \gamma(\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}, \quad (1.10)$$

a dotyčnicová časť:

$$(\bar{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{t}})|^+ - (\bar{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{t}})|^- = 0, \quad (1.11)$$

kde  $\gamma$  je povrchové napätie. Povrchové napätie je vo všeobecnosti funkciou polohy a teploty. V našom modeli uvažujeme prípad, kedy  $\gamma = \text{const}$ .

Tenzor napätí je definovaný prostredníctvom tlaku  $p$  a tenzora rýchlosti deformácie  $\bar{\mathbf{e}}$  v tvare:

$$\bar{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\bar{\mathbf{e}}, \quad \text{kde} \quad \bar{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) \quad (1.12)$$

a  $\mu$  je dynamická viskozita.

Pomocou tenzora napätí  $\bar{\sigma}$  vieme zapísať silu medzi styčnými kvapalnými elementami. Túto silu vyjadruje vektor napätí, definovaný ako:

$$\mathbf{t} = \bar{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (1.13)$$

kde  $\hat{\mathbf{n}}$  je normálový vektor na styčnú plochu.

Efekt vyparovania sa v rovnici (1.10) prejavuje v prítomnosti tzv. van der Waalsovej interakcie, označenej pomocou napätia  $\Pi$ . Tieto sily reprezentujú vzájomné silové pôsobenie medzi molekulami. Modifikovaná forma (1.10) má tvar [17]:

$$p|^{+} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \bar{\bar{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{n}})|^{-} = \gamma(\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \Pi. \quad (1.14)$$

Na ľavej strane sa člen  $(\bar{\bar{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{n}})|^{+}$  pre vzduch zjednodušil na konštantný tlak vzduchu (tzv. aproximácia zriedeného plynu).

Dosadením príslušných rovníc pre normálové vektory, tlak a tenzor napätia, môžeme odvodiť vzťah medzi van der Waalsovým napätím (tzv. spojovací tlak, conjoining pressure) a výškou dotykovej plochy:

$$\Pi = \Pi(h) = \frac{A^*}{h^3},$$

kde  $A^*$  je konštanta (tzv. Hamakerova konštanta). Tento vzťah predstavuje prípad dokonalého zmáčania rohovky, čo nekorešponduje realite. Pre realistické parciálne zmáčanie ([1],[17]):

$$\Pi = \frac{1}{h^3}[A^* + B^*(2hh_x^2h_{xx} - h_x^4)]. \quad (1.15)$$

Na voľnej hranici predpokladáme nehybnosť molekúl v smere vektora dotyčnicového k slznému filmu:

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0. \quad (1.16)$$

Rovnováha tepelného toku je daná rovnicou:

$$-k\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla T = L_m J, \quad (1.17)$$

kde  $L_m$  je latentné teplo vyparovania. Vo vyššie uvedených rovniciach je zanedbaná viskozita výparov a ich tepelná vodivosť (tzv. jednostranný model [5]).

Pre hmotnostný tok výparov kvapaliny slzného filmu budeme uvažovať nasledujúci konštitučný vzťah [1]:

$$KJ = \alpha(p - p_v) + T_I - T_s, \quad (1.18)$$

kde  $K$  a  $\alpha$  sú konštanty,  $T_I$  je teplota styčnej plochy a  $T_s$  je saturačná teplota.

## 2 Bezrozmerná formulácia

Riadiace rovnice, hraničné podmienky a počiatočnú podmienku prevedieme do bezrozmerného tvaru zavedením nasledujúcich bezrozmerných premenných:

$$\begin{aligned} x &= l\bar{x}, & y &= d\bar{y}, & t &= \frac{l}{U_0}\bar{t}, & h &= d\bar{h}, & u &= U_0\bar{u}, \\ v &= \epsilon U_0\bar{v}, & p &= \frac{\mu U_0}{l\epsilon^2}\bar{p}, & \bar{T} &= \frac{T - T_s}{\Delta T}, & J &= \frac{k\Delta T}{dL_m}\bar{J}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

kde  $\Delta T = T_{e_{ye}} - T_s$  a  $\epsilon = d/l$  reprezentuje pomer typickej vertikálnej a horizontálnej dĺžky. Bezrozmerný tvar rovníc je:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (2.2)$$

$$\epsilon^2 Re \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + G, \quad (2.3)$$

$$\epsilon^4 Re \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \epsilon^4 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2},$$

$$\epsilon^2 Re Pr \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \left( \epsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right), \quad (2.4)$$

kde  $Re = U_0 l / \nu$  je Reynoldsovo číslo,  $G = \rho g d^2 / \mu U_0$  je gravitačný faktor,  $\nu = \mu / \rho$  je kinematická viskozita a  $Pr = \mu c_p / k$  je Prandtlove číslo.

Hraničné podmienky na  $\bar{y} = 0$  sú:

$$\bar{u} = \bar{v} = 0,$$

$$\bar{T} = 1.$$

Dynamické podmienky (1.9), (1.14) a (1.16)–(1.18) na voľnej hranici slzný film/vzduch  $\bar{y} = h(x, t)$  majú po zbezrozmernení tvar:

$$E\bar{J} = \frac{(\bar{v} - \bar{u}\bar{h}_{\bar{x}} - \bar{h}_{\bar{t}})}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \bar{h}_{\bar{x}}^2}}, \quad \text{kde} \quad \bar{J} \equiv -\frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \bar{h}_{\bar{x}}^2}} (\bar{T}_{\bar{y}} - \epsilon^2 \bar{h}_{\bar{x}} \bar{T}_{\bar{x}}), \quad (2.5)$$

$$\bar{p} - \bar{p}_v - 2\epsilon^2 \frac{(\bar{v}_{\bar{y}} - \bar{h}_{\bar{x}} \bar{u}_{\bar{y}}) + \epsilon^2 (\bar{h}_{\bar{x}}^2 \bar{u}_{\bar{x}} - \bar{h}_{\bar{x}} \bar{v}_{\bar{x}})}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \bar{h}_{\bar{x}}^2}} = -\frac{1}{Ca} \left[ \frac{\bar{h}_{\bar{x}}}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \bar{h}_{\bar{x}}^2}} \right] - \Pi, \quad (2.6)$$

$$\bar{u} + \epsilon^2 \bar{h}_{\bar{x}} \bar{v} = 0, \quad (2.7)$$

$$\bar{K}\bar{J} = \delta(\bar{p} - \bar{p}_v) + \bar{T}_L, \quad (2.8)$$

a van der Waalsovo napätie:

$$\Pi = \frac{1}{\bar{h}^3} [A + B(2\bar{h}\bar{h}_{\bar{x}}^2\bar{h}_{\bar{x}\bar{x}} - \bar{h}_{\bar{x}}^4)]. \quad (2.9)$$

Bezrozmerné parametre v týchto rovniciach sú definované nasledovne:

$$\begin{aligned} A &= \frac{A^*}{\mu U_0 dl}, & B &= \epsilon^4 \frac{B^*}{\mu U_0 dl}, & \delta &= \frac{\alpha \mu U_0}{\Delta T l \epsilon^2}, \\ E &= \frac{k \Delta T}{d L_m}, & Ca &= \frac{\mu U_0}{\gamma \epsilon^3}, & \bar{K} &= \frac{K k}{d L_m}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Parameter  $A$  je tzv. Hamakerova konštanta, ktorá kontroluje veľkosť van der Waalsovho napätia v prípade dokonalého zmáčania rohovky ( $B = 0$ ). Parameter  $B$  je mierou parciálneho zmáčania rohovky. Parameter  $\delta$  je mierou rozdielu medzi dynamickým tlakom v slznom filme a konštantným referenčným tlakom  $\bar{p}_v$ . V tejto práci budeme skúmať iba vplyv parametrov  $A$ ,  $B$  a  $\delta$ , preto význam parametrov  $E$ ,  $Ca$  a  $\hat{K}$  neuvádzame.

### 3 Rovnice slznej vrstvy v limite malej hrúbky

V tejto časti detailne spíšeme všetky vedúce rovnice v limitnej forme, čo tvorí hlavný prínos tejto práce. Je to dôležitá časť pre pochopenie dynamiky tenkých filmov.

Pomer strán  $\epsilon$  je vzhľadom na rozmery oka typicky veľmi malý, preto skúmame limitu tenkého filmu pre  $\epsilon \rightarrow 0$ . V takom prípade dostaneme systém:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (3.1)$$

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + G = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} = 0. \quad (3.3)$$

Podmienky pre hranicu  $y = 0$  zostávajú nezmenené. Podmienky voľnej hranice  $y = h(x, t)$  sa zmenia nasledovne:

$$E\bar{J} = \bar{v} - \bar{u}\bar{h}_{\bar{x}} - \bar{h}_{\bar{t}}, \quad (3.4)$$

$$\bar{p} - \bar{p}_v = -\frac{1}{Ca}\bar{h}_{\bar{x}\bar{x}} - \Pi, \quad (3.5)$$

kde  $\Pi$  z (2.9) sa nezmení.

$$\bar{u} = 0, \quad (3.6)$$

$$\bar{J} = -\bar{T}_{\bar{y}} \quad (3.7)$$

a (2.8) zostáva nezmenená.

Pre prehľadnosť budeme v ďalšej časti vynechávať čiarky nad premennými. Použitím zbezrozmerneného systému rovníc a podmienok vieme zapísať vzťahy pre premenné  $u, v, T$  a  $p$ , ktoré platia v kvapaline.

Tlakové pole má nasledujúcu formu:

$$p = p_v - \frac{1}{Ca}h_{xx} - \Pi. \quad (3.8)$$

Komponenty rýchlosti sú popísané ako:

$$u = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - G \right) (y^2 - hy), \quad (3.9)$$

$$v = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \left( \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{2} hy^2 \right) - \frac{1}{4} h_x \left( \frac{\partial p}{\partial x} - G \right) y^2. \quad (3.10)$$

Teplotné pole je dané:

$$T = 1 - Jy, \quad (3.11)$$

kde

$$J = \frac{1}{\bar{K} + h} \left[ 1 + \delta \left( -\frac{1}{Ca} h_{xx} - \Pi \right) \right]. \quad (3.12)$$

Tieto výrazy spĺňajú všetky rovnice a podmienky okrem kinematickej podmienky (3.4). Vložením  $u$  a  $v$ , vyčíslených v  $y = h$ , do podmienky (3.4) dostávame skalárnu rovnicu vývoja hrúbky slzného filmu. Ak zvolíme  $l$  podľa [4] ako  $l = d^{1/3} D^{2/3}$ , kde  $D = \sqrt{\gamma/\rho g}$ , dostaneme  $Ca = 1$ .

## 4 Evolučná parciálna diferenciálna rovnica pre slzný film

Po vektorových úpravách sme získali výslednú parciálnu diferenciálnu rovnicu pre časopriestorový vývoj hrúbky slzného filmu v tvare:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{E}{\bar{K} + h} \left[ 1 - \delta \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \Pi \right) \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h^3}{12} \left( \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} + G \right) \right], \quad (4.1)$$

kde

$$\Pi = \frac{1}{h^3} [A + B(2hh_x^2 h_{xx} - h_x^4)] \quad (4.2)$$

a  $A$ ,  $B$ ,  $G$ ,  $E$ ,  $\bar{K}$  a  $\delta$  sú bezrozmerné parametre definované nasledovne:

$$\begin{aligned} A &= \frac{A^*}{\mu U_0 dl}, & B &= \epsilon^4 \frac{B^*}{\mu U_0 dl}, & G &= \frac{\rho g d^2}{\mu U_0}, \\ E &= \frac{k \Delta T}{\rho U_0 \epsilon d L_m}, & \bar{K} &= \frac{kK}{d L_m}, & \delta &= \frac{\alpha \mu U_0}{\epsilon^2 l (T_{eye} - T_s)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Parciálna diferenciálna rovnica (4.1) je prvého rádu v čase a štvrtého rádu v priestore.

Hraničné podmienky a počiatočná podmienka sú zvolené v tvare:

$$h(\pm L, t) = h^0, \quad h_{xx}(\pm L, t) = h_{xx}^0, \quad (4.4)$$

$$h(x, t = 0) = \begin{cases} h_{min} & \text{ak } |x| < L - \Delta x_m \\ h_{min} + \Delta h_m (|x| - (L - \Delta x_m))^2 & \text{ak } |x| \geq L - \Delta x_m, \end{cases} \quad (4.5)$$

kde  $x_m$  je šírka najdlhšieho úseku medzi horným a dolným viečkom oka a  $h_{min}$  je hrúbka v strede oka. Tieto podmienky zodpovedajú predpísanej výške menisku a predpísanej krivosti menisku v kontakte s očným viečkom.

## 5 Numerické experimenty

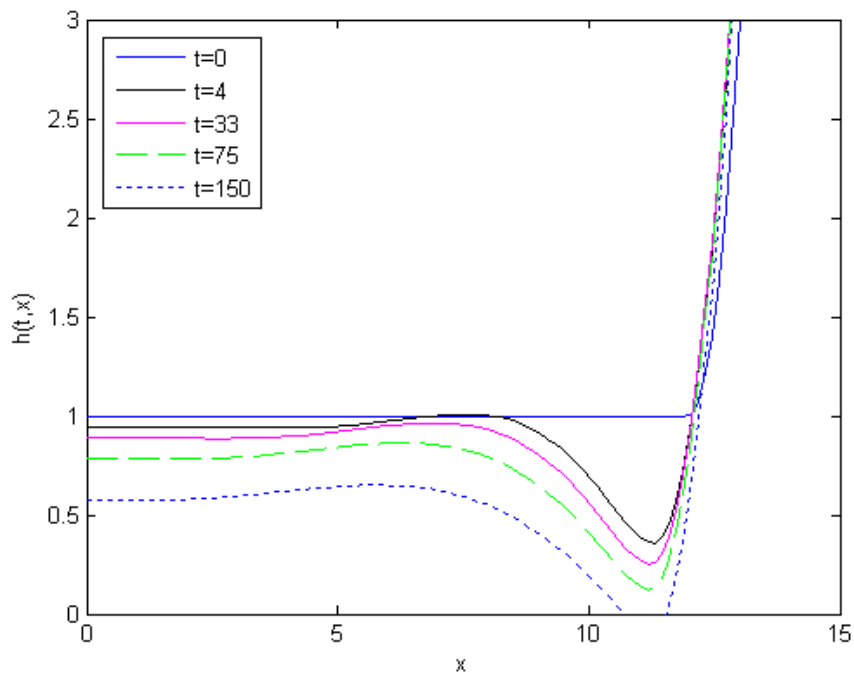
Skalárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu (4.1) budeme riešiť aplikáciou numerickej metódy čiar so semidiskretizáciou v priestore pomocou konečných diferencií s presnosťou  $O(k^2)$ , kde  $k$  je rozdiel medzi bodmi  $x_i$  a  $x_{i+1}$  pri rovnomernom delení [14]. Tieto aproximácie boli tvorené pre počet deliacich bodov  $n = 200$ .

Využitím experimentálnych dát [16] sme získali nasledujúce hodnoty pre bezrozmerné parametre:  $L = 14$ ,  $h^0 = 9$ ,  $h_{xx}^0 = 4$ ,  $h_{min} = 1$ ,  $\Delta h_m = 2$ ,  $\Delta x_m = 2$ ,  $G = 0$ ,  $E = 14.1$  a  $K = 4930$ . Naším cieľom je analýza závislosti riešenia na parametroch  $A$ ,  $B$  a  $\delta$ , ktoré sú spojené s efektom vyparovania. Vplyv gravitácie zanedbávame vzhľadom na vplyv menší ako má povrchové napätie.

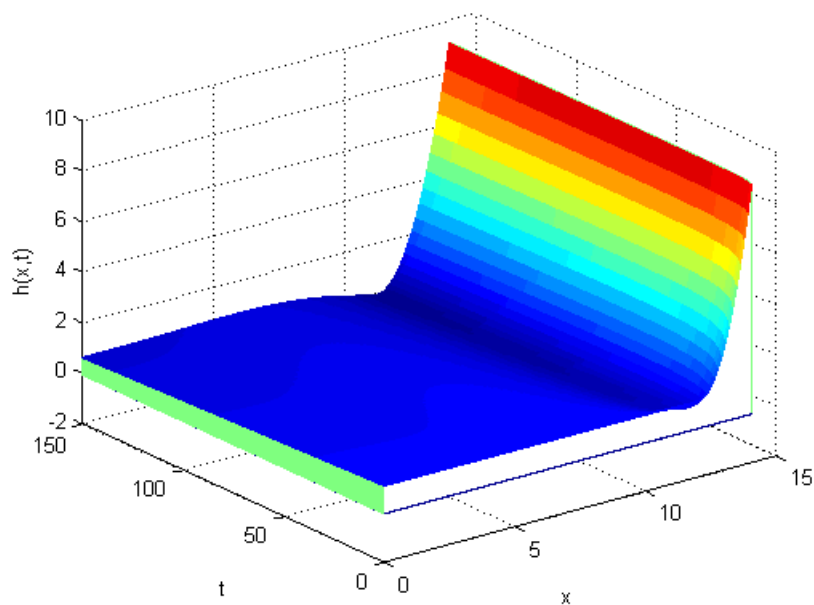
### 5.1 Redukcia modelu pre prípad konštantného vyparovania

Implementáciu numerickej metódy čiar sme najskôr testovali pre prípad dokonalého zmáčania rohovky ( $B = 0$ ), ktorý bol študovaný v práci [16]. Najprv sme sa venovali prípadu konštantného vyparovania ( $\delta = 0$ ) s dokonalým zmáčaním rohovky bez vplyvu van der Waalsovej interakcie. Tieto výsledky nám umožnili zhodnotiť funkčnosť implementácie. Výsledky sú zobrazené na Obr. 9 a 10. K pretrhnutiu filmu dochádza v čase  $t \doteq 90$ , ktorý je v súlade s výsledkami [16].





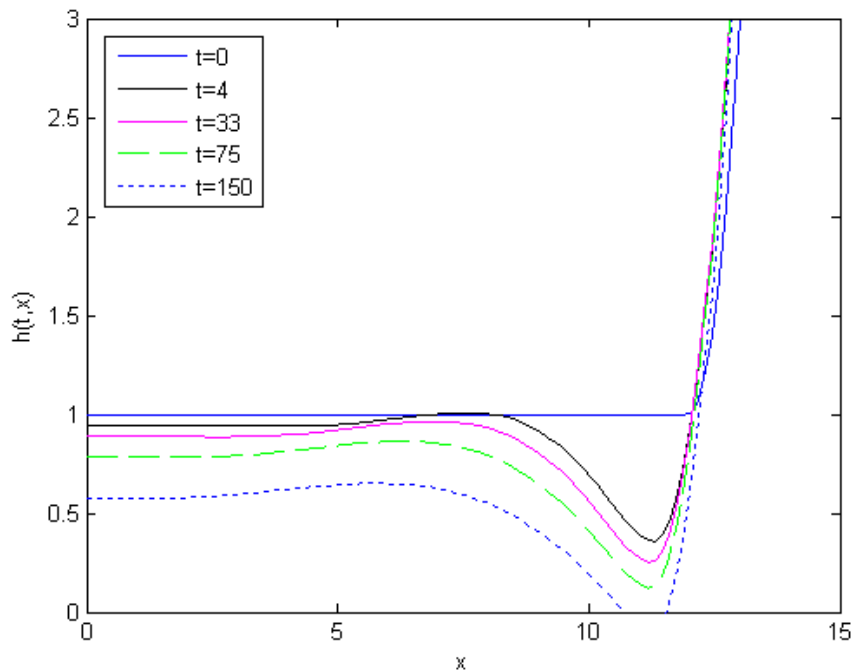
**Obr. 9:** Časový vývoj profilu slzného filmu  $h(x, t)$ . Hodnoty bezrozmerných parametrov sú  $A = B = \delta = 0$ . Situácia zodpovedá prípadu konštantného vyparovania slzného filmu bez van der Waalsovej interakcie.



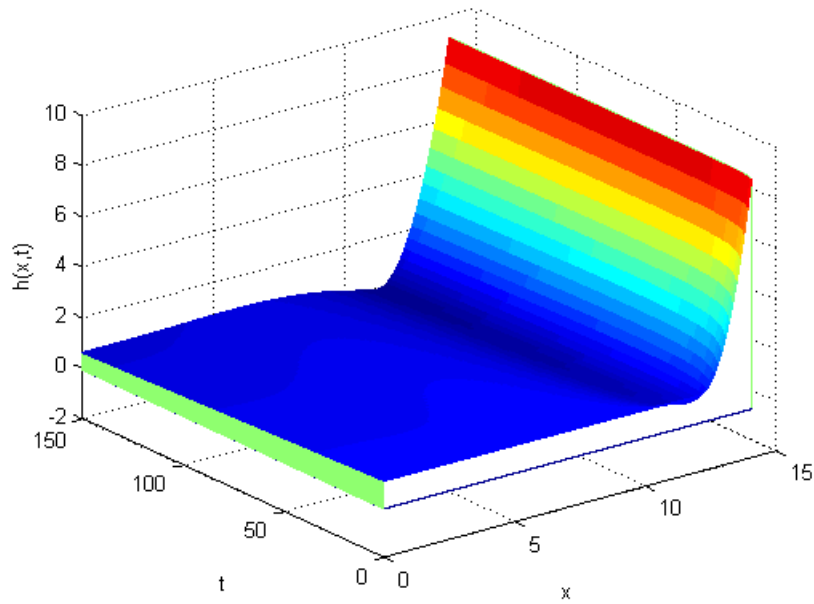
**Obr. 10:** Časový vývoj profilu slzného filmu  $h(x, t)$ . Hodnoty bezrozmerných parametrov sú  $A = B = \delta = 0$ . Situácia zodpovedá prípadu konštantného vyparovania slzného filmu bez van der Waalsovej interakcie.

## 5.2 Redukcia modelu pre prípad nekonštantného vyparovania

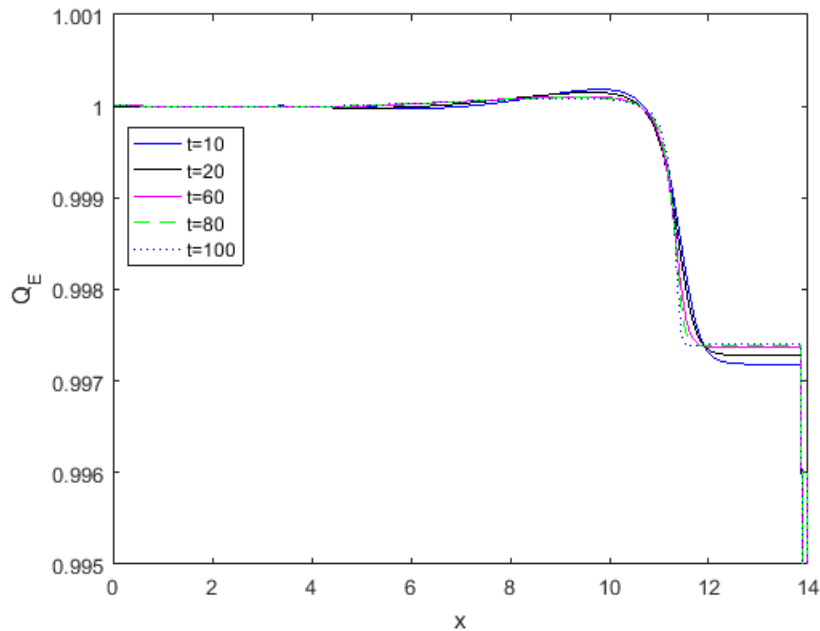
Profil slzného filmu s nekonštantným vyparovaním pre  $\delta = 10^{-3}$ , ktoré je spôsobené zakrivením povrchu bez van der Waalsovho napätia, je zobrazený na Obr. 11 a 12. K pretrhnutiu slzného filmu dochádza v čase  $t = 94$ . Porovnaním našich výsledkov s výsledkami v [16] možno identifikovať rozdiel v hrúbke filmu ako aj v čase pretrhnutia slzného filmu. Čas roztrhnutia filmu v práci [16] je  $t = 82$ , čo zodpovedá rozmernému časovému rozdielu zhruba 5 sekúnd. Usudzujeme, že tento rozdiel môže byť spôsobený použitím rozdielnych metód priestorovej diskretizácie.



**Obr. 11:** Časový vývoj profilu slzného filmu  $h(x,t)$ . Hodnoty bezrozmerných parametrov sú  $A = B = 0$  a  $\delta = 10^{-3}$ . Situácia zodpovedá prípadu dokonalého zmáčania rohovky s nekonštantným vyparovaním slzného filmu bez van der Waalsovej interakcie.



**Obr. 12:** Časový vývoj profilu slzného filmu  $h(x,t)$ . Hodnoty bezrozmerných parametrov sú  $A = B = 0$  a  $\delta = 10^{-3}$ . Situácia zodpovedá prípadu dokonalého zmáčania rohovky s nekonštantným vyparovaním slzného filmu bez van der Waalsovej interakcie.

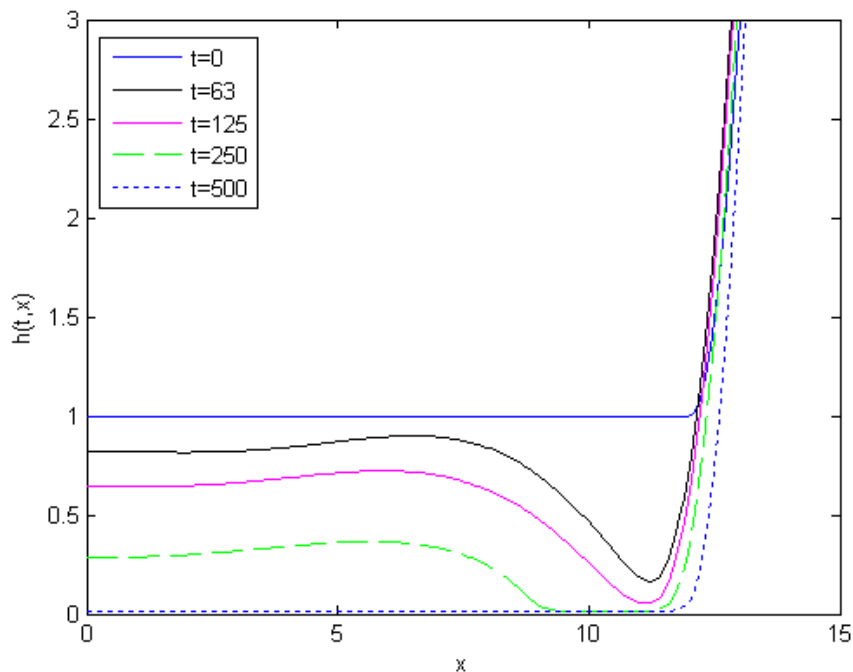


**Obr. 13:** Tok výparov  $Q_E$  pre hodnoty bezrozmerných parametrov  $A = B = 0$  a  $\delta = 10^{-3}$ . Situácia zodpovedá prípadu dokonalého zmáčania rohovky s nekonštantným vyparovaním slzného filmu bez van der Waalsovej interakcie.

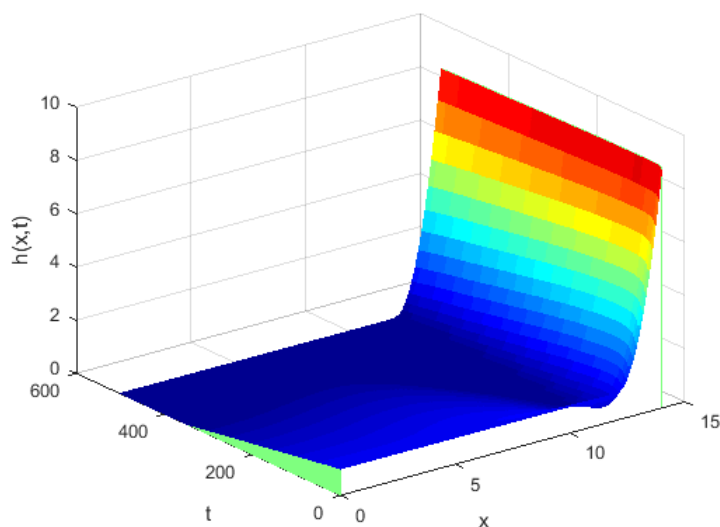
Pridaním oboch členov, ktoré ovplyvňujú zakrivenie a hrúbku slzného filmu, spôsobuje výrazné kvantitatívne zmeny v riešení. Proces vyparovania sa spomalil aj dôsledkom zmeny hrúbky filmu. Po ustálení na rovnovážnej hrúbke  $h_{eq} = (\delta A)^{1/3}$  je vyparovanie lokálne nulové a slzný film sa ďalej vyparuje na hrubších miestach. Uvedené chovanie môžeme pozorovať na výsledkoch zobrazených na Obr. 14 a 15. K pretrhnutiu slzného filmu dochádza výrazne neskôr (v čase  $t = 192$ ). Tieto výsledky sú kvalitatívne zhodné s výsledkami [1] pre problém vyparovania kvapalných filmov z rovnomerne zakrivených povrchov.

Pre lepšie pochopenie vyparovania sme zaviedli multiplikátor toku vyparovania:

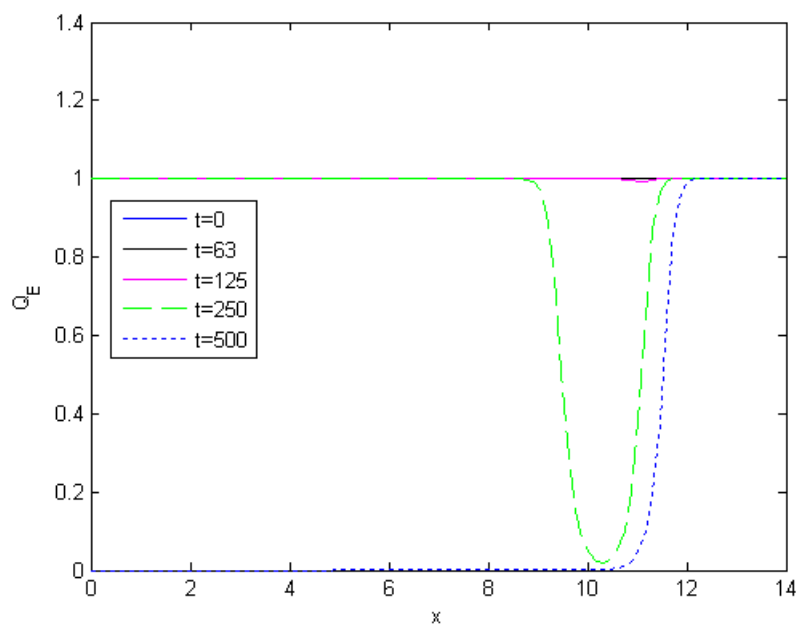
$$Q_E(x, t) \equiv 1 - \delta \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \Pi \right). \quad (5.1)$$



**Obr. 14:** Časový vývoj profilu slzného filmu  $h(x, t)$ . Hodnoty bezrozmerných parametrov sú  $A = \delta = 10^{-3}$  a  $B = 0$ . Situácia zodpovedá prípadu dokonalého zmáčania rohovky s nekonštantným vyparovaním slzného filmu a nenulovou van der Waalsovou interakciou.

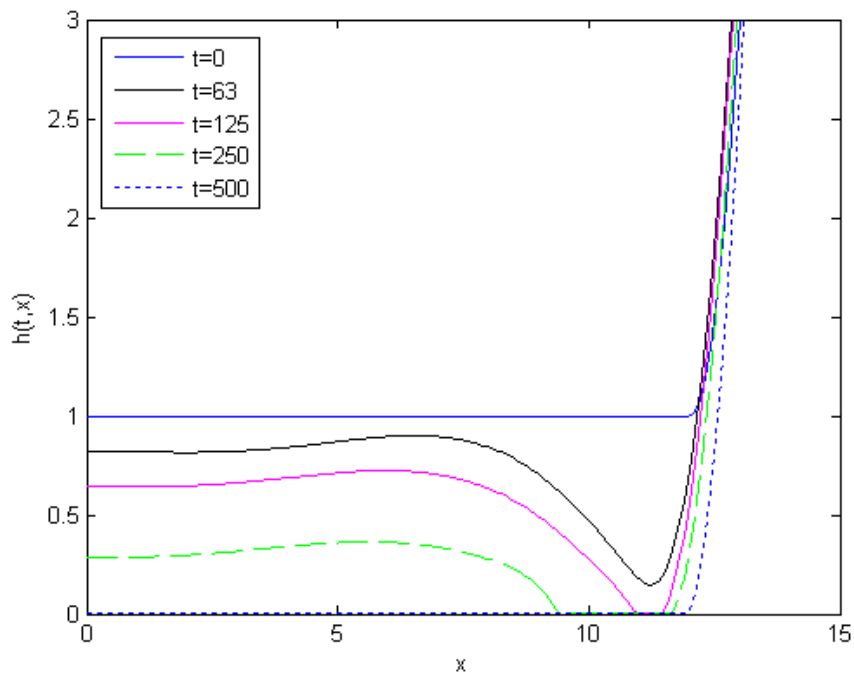


**Obr. 15:** Časový vývoj profilu slzného filmu  $h(x,t)$ . Hodnoty bezrozmerných parametrov sú  $A = \delta = 10^{-3}$  a  $B = 0$ . Situácia zodpovedá prípadu dokonalého zmáčania rohovky s nekonštantným vyparovaním slzného filmu a nenulovou van der Waalsovou interakciou.

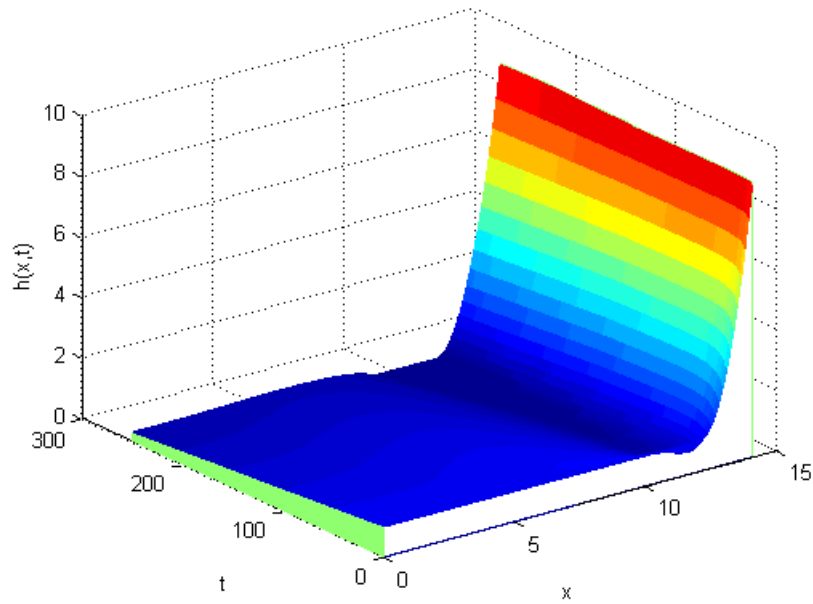


**Obr. 16:** Tok výparov  $Q_E$  pre hodnoty bezrozmerných parametrov  $A = \delta = 10^{-3}$  a  $B = 0$ . Situácia zodpovedá prípadu dokonalého zmáčania rohovky s nekonštantným vyparovaním slzného filmu a nenulovou van der Waalsovou interakciou.

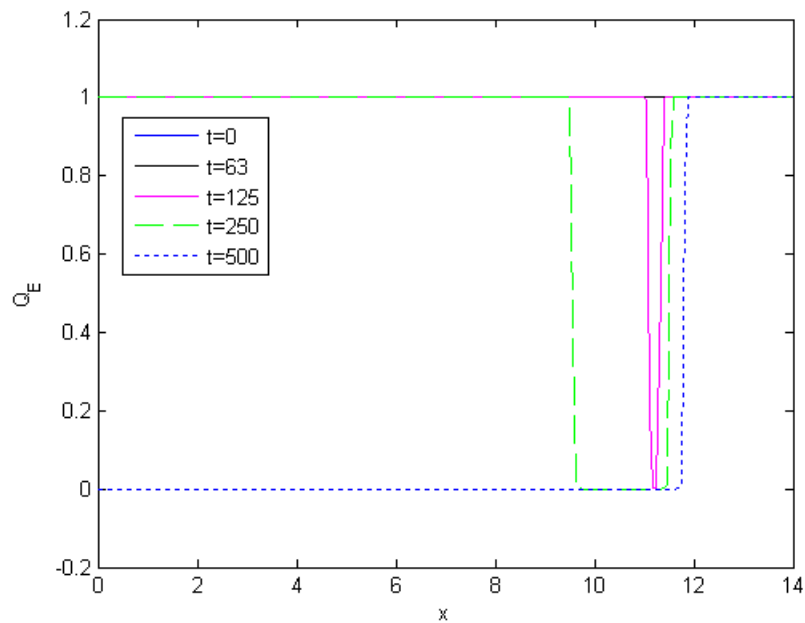
Na Obr. 17 a 18 uvádzame výsledky analogické výsledkom na Obr. 14 a 15, ale pre menšie hodnoty parametrov  $A$  a  $\delta$ . Vidíme, že vyparovanie prebieha rýchlejšie a k pretrhnutiu slzného filmu dochádza v skoršom čase  $t = 109$ . Zaujímavá zmena je predovšetkým v toku výparov  $Q_E$ , ktorá je zobrazená na Obr. 19. V porovnaní s Obr. 16 sa v čase  $t = 250$  výrazne znížilo vyparovanie v oblasti približne  $x \in [9, 12]$  a v krajných bodoch dochádza k rapídnej zmene z nulovej hodnoty na hodnotu  $Q_E = 1$ .



**Obr. 17:** Časový vývoj profilu slzného filmu  $h(x, t)$ . Hodnoty bezrozmerných parametrov sú  $A = 10^{-6}$ ,  $\delta = 4.5 \times 10^{-8}$  a  $B = 0$ . Situácia zodpovedá prípadu dokonalého zmáčania rohovky s nekonztantným vyparovaním slzného filmu a nenulovou van der Waalsovou interakciou.



**Obr. 18:** Časový vývoj profilu slzného filmu  $h(x, t)$ . Hodnoty bezrozmerných parametrov sú  $A = 10^{-6}$ ,  $\delta = 4.5 \times 10^{-8}$  a  $B = 0$ . Situácia zodpovedá prípadu dokonalého zmáčania rohovky s nekonštantným vyparovaním slzného filmu a nenulovou van der Waalsovou interakciou.

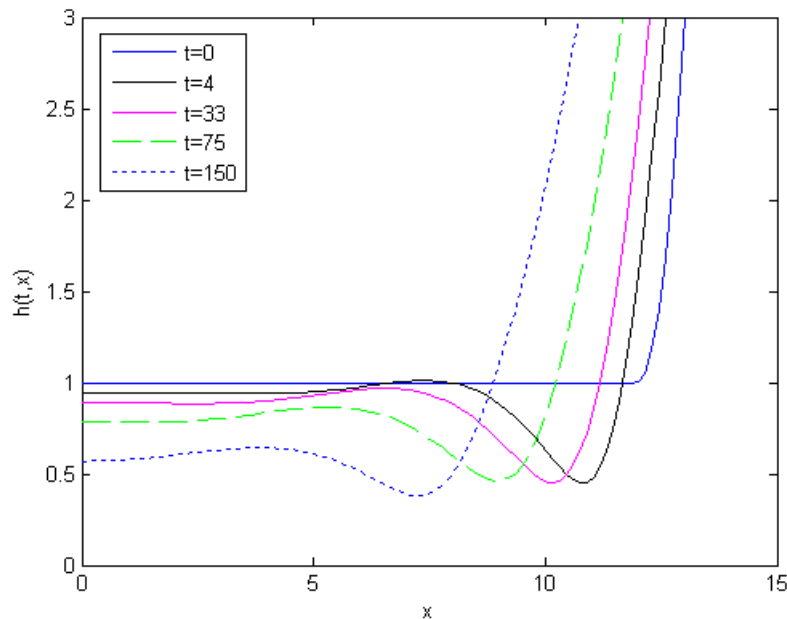


**Obr. 19:** Tok výparov  $Q_E$  pre hodnoty bezrozmerných parametrov  $A = 10^{-6}$  a  $\delta = 4.5 \times 10^{-8}$  a  $B = 0$ . Situácia zodpovedá prípadu dokonalého zmáčania rohovky s nekonštantným vyparovaním slzného filmu a nenulovou van der Waalsovou interakciou.

### 5.3 Prípád nedokonalého zmáčania rohovky

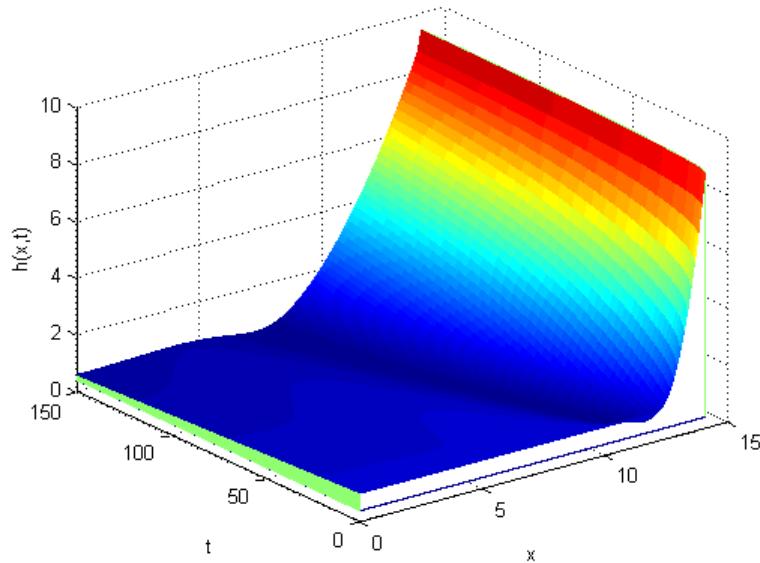
V kapitole 5.1 a 5.2 sme sa zaoberali prípadom dokonalého zmáčania rohovky ( $B = 0$ ), ktorý je idealizáciou reálnej situácie parciálneho zmáčania. Nasledujúce časti diplomovej práce obsahujú pôvodné výsledky.

Parciálne zmáčanie rohovky výrazne ovplyvňuje správanie slzného filmu. Uvažujeme najprv prípad s nenulovou van der Waalsovou interakciou na časovom intervale  $t \in [0, 150]$ . Na Obr. 20 a 21 je zobrazené numerické riešenie pre  $A = \delta = 10^{-3}$  a  $B = 10^{-4}$ . Slzný film sa nevyparuje prioritne z jedného miesta ako v prípade dokonalého zmáčania rohovky (Obr. 14), ale slzná vrstva sa presúva na meniskus, ktorý sa zväčšuje a spomaľuje vyparovanie. V porovnaní s prípadom dokonalého zmáčania sa čas prerhnutia filmu výrazne predlžuje (situácia nie je zobrazená na Obr. 20, 21). Ak sa film roztrhne, ruptúra sa rýchlo rozširuje vzhľadom na malú hrúbku slzného filmu v okolí ruptúry.



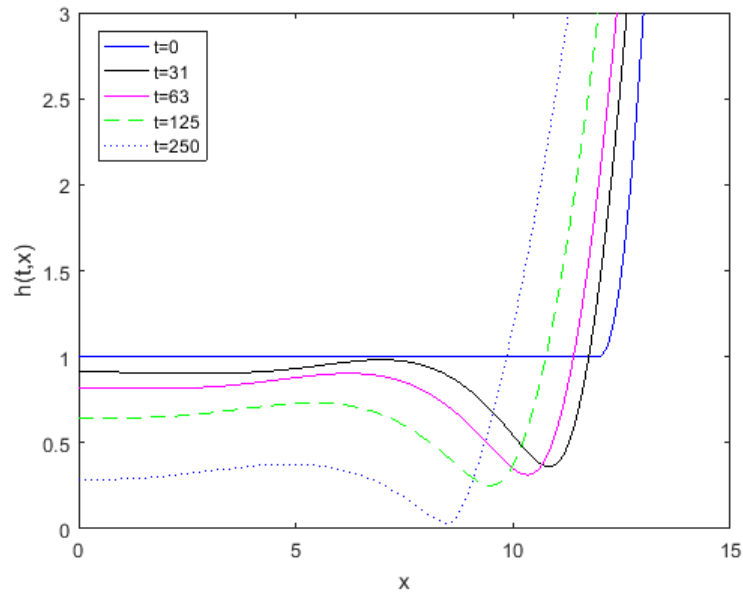
**Obr. 20:** Časový vývoj profilu slzného filmu  $h(x, t)$ . Hodnoty bezrozmerných parametrov sú  $A = \delta = 10^{-3}$  a  $B = 10^{-4}$ . Situácia zodpovedá prípadu parciálneho zmáčania rohovky s nekonaštantným vyparovaním slzného filmu a nenulovou van der Waalsovou interakciou.



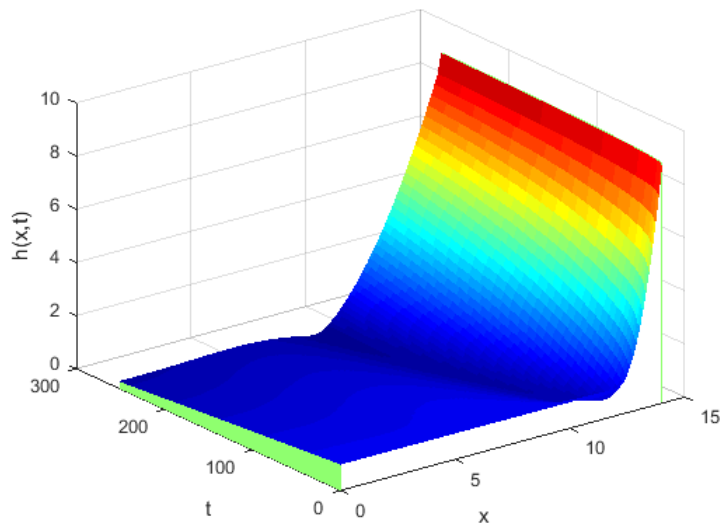


**Obr. 21:** Časový vývoj profilu slzného filmu  $h(x,t)$ . Hodnoty bezrozmerných parametrov sú  $A = \delta = 10^{-3}$  a  $B = 10^{-4}$ . Situácia zodpovedá prípadu parciálneho zmáčania rohovky s nekonštantným vyparovaním slzného filmu a nenulovou van der Waalsovou interakciou.

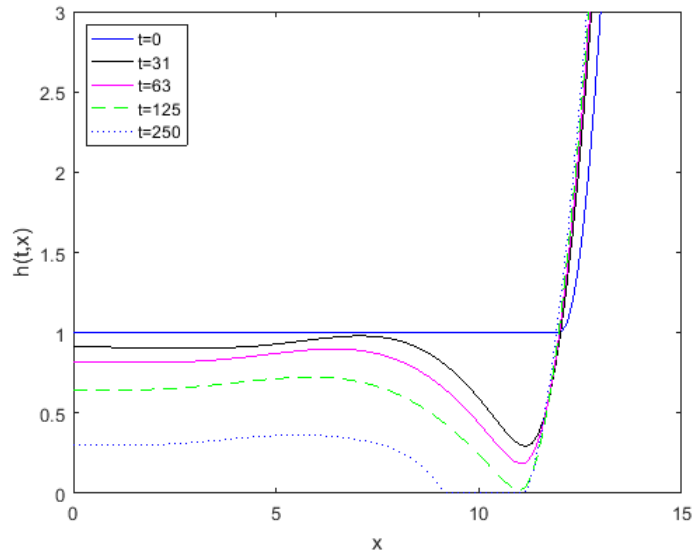
Pri znižovaní parametrov  $A$ ,  $\delta$  a  $B$  (Obr. 22 a 23) sa presun slzného filmu spomaľuje a minimálna hrúbka filmu sa znižuje. Dochádza k rýchlejšiemu pretrhnutiu slzného filmu. Tento jav nám potvrdzujú aj Obr. 24 a 25, kde sú hodnoty bezrozmerných parametrov  $A = 10^{-6}$ ,  $\delta = 4.5 \times 10^{-8}$  a  $B = 10^{-5}$ . Na časovom intervale  $t \in [0, 250]$  dochádza k ruptúre v čase  $t = 127$ , ktorá sa ďalej rozširuje. Porovnaním grafov Obr.22 a 24 v čase  $t = 125$  možno vidieť predĺženie času na tvorbu ruptúry takmer dvojnásobne. Na Obr. 24 vidíme, že pretrhnutie slzného filmu sa následne rozširuje v smere do centrálnej časti oka a šírka menisku zostáva nezmenená. Táto situácia sa približuje prípadu s dokonalým zmáčaním rohovky, kedy kvapalina slzného filmu nepropaguje v priestore.



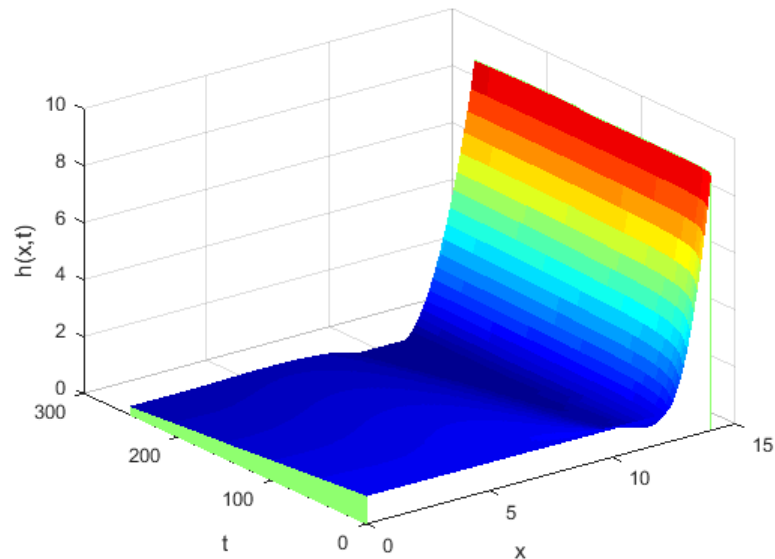
**Obr. 22:** Časový vývoj profilu slzného filmu  $h(x,t)$ . Hodnoty bezrozmerných parametrov sú  $A = 10^{-4}$ ,  $\delta = 10^{-5}$  a  $B = 5 \times 10^{-5}$ . Situácia zodpovedá prípadu parciálneho zmáčania rohovky s nekonštantným vyparovaním slzného filmu a nenulovou van der Waalsovou interakciou



**Obr. 23:** Časový vývoj profilu slzného filmu  $h(x,t)$ . Hodnoty bezrozmerných parametrov sú  $A = 10^{-4}$ ,  $\delta = 10^{-5}$  a  $B = 5 \times 10^{-5}$ . Situácia zodpovedá prípadu parciálneho zmáčania rohovky s nekonštantným vyparovaním slzného filmu a nenulovou van der Waalsovou interakciou.



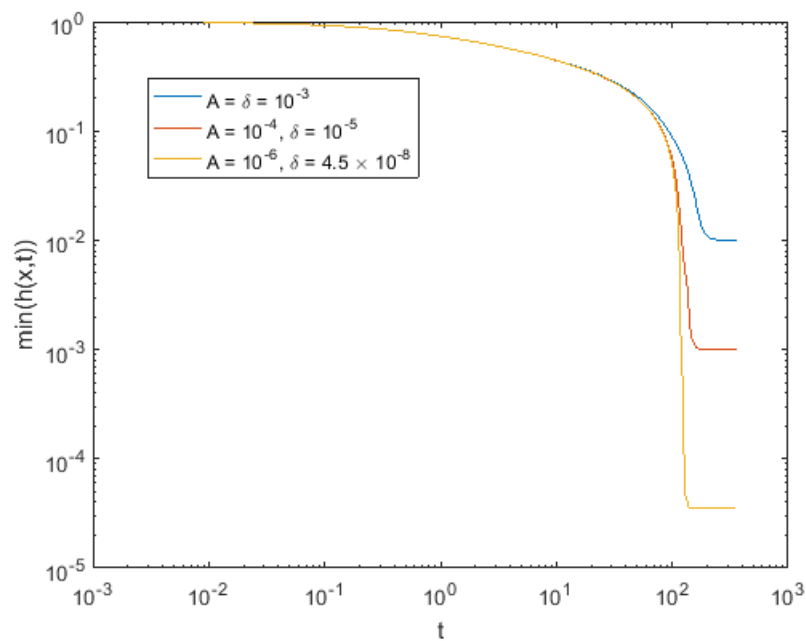
**Obr. 24:** Časový vývoj profilu slzného filmu  $h(x, t)$ . Hodnoty bezrozmerných parametrov sú  $A = 10^{-6}$ ,  $\delta = 4.5 \times 10^{-8}$  a  $B = 10^{-5}$ . Situácia zodpovedá prípadu parciálneho zmáčania rohovky s nekonztantným vyparovaním slzného filmu a nenulovou van der Waalsovou interakciou.



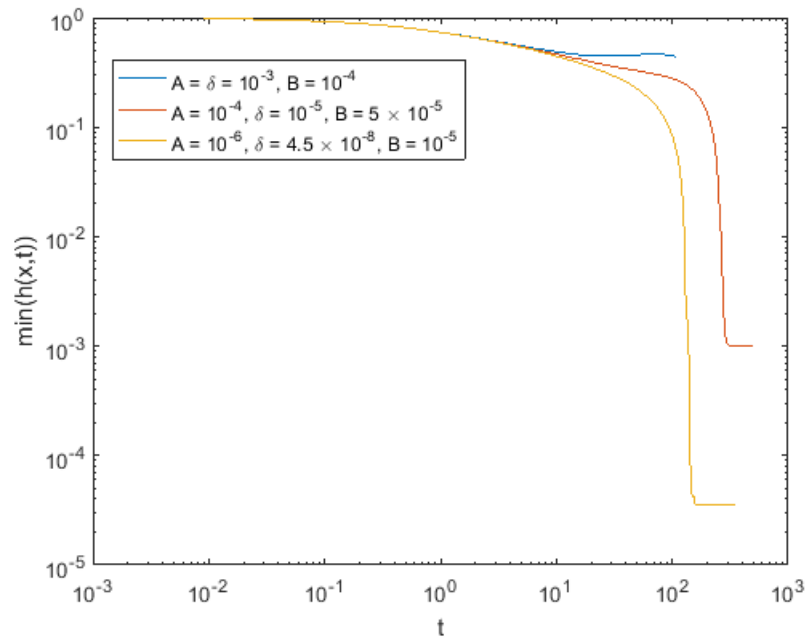
**Obr. 25:** Časový vývoj profilu slzného filmu  $h(x, t)$ . Hodnoty bezrozmerných parametrov sú  $A = 10^{-6}$ ,  $\delta = 4.5 \times 10^{-8}$  a  $B = 10^{-5}$ . Situácia zodpovedá prípadu parciálneho zmáčania rohovky s nekonztantným vyparovaním slzného filmu a nenulovou van der Waalsovou interakciou.

## 5.4 Dynamika minimálnej hrúbky slzného filmu

Detailnejšie sme skúmali závislosť dynamiky vyparovania na parametroch  $A$ ,  $\delta$  a  $B$ . Na Obr. 26 je zobrazená závislosť hrúbky filmu od parametrov  $\delta$  a  $A$  pri dokonalom zmáčaní rohovky ( $B = 0$ ). Pre rôzne hodnoty parametrov sme zistili, že po čase sa hrúbka filmu ustáli - hodnota sa dá nájsť ako  $(\delta A)^{1/3}$  [16]. Nezávisí teda na jednotlivých parametroch. Tento jav potvrdzuje dynamiku slznej vrstvy pre  $t \rightarrow \infty$  zobrazenú na Obr. 9–17.



**Obr. 26:** Graf zodpovedá minimálnej hrúbke slzného filmu pri dokonalom zmáčaní rohovky ( $B = 0$ ) ako funkcie času pre rôzne parametre  $\delta$  a  $A$ .



**Obr. 27:** Graf zodpovedá minimálnej hrúbke slzného filmu pri parciálnom zmáčaní rohovky ( $B \neq 0$ ) ako funkcie času pre rôzne parametre  $A$ ,  $\delta$  a  $B$ .

Porovnaním dynamiky minimálnej hrúbky pre parciálne zmáčanie rohovky (Obr. 27) s prípadom dokonalého zmáčania (Obr. 26) si môžeme všimnúť, že hodnota rovnovážnej minimálnej hrúbky filmu pre  $B \neq 0$  s rovnakými parametrami  $A$  a  $\delta$  je zhodná s hodnotou rovnovážnej hrúbky v prípade dokonalého zmáčania rohovky<sup>1</sup>. Dynamika vyparovania slznej vrstvy nezávisí od parametra  $B$  a hrúbka filmu sa aj v tomto prípade ustáli na rovnovážnej hodnote  $h_{eq}$ . V situáciách pre  $B = 10^{-4}$  a  $B = 5 \times 10^{-5}$  dochádza k lokálnej zmene v okolí času  $t = 10^2$ . Hodnota parametra  $B$  ovplyvňuje čas, v ktorom slzný film dosiahne rovnovážnu minimálnu hrúbku (Obr. 27). Pre vyššie hodnoty efektu zmáčania rohovky je čas ustálenia minimálnej hrúbky dlhší.

<sup>1</sup>Potrebný dlhší čas simulácie pre dosiahnutie ustáleného stavu  $(\delta A)^{1/3}$  pre väčšie hodnoty  $A$  a  $\delta$ .

## Záver

Táto práca sa zaoberá modelovaním dynamiky tenkej slznej vrstvy na povrchu oka. Zo základných zákonov zachovania sme odvodili evolučnú parciálnu diferenciálnu rovnicu pre hrúbku slzného filmu a získali numerické riešenie pre deformácie profilu filmu v závislosti od parametrov, ktoré reprezentujú zakrivenie, van der Waalsovu interakciu a efekt zmáčania rohovky.

V úvode práce je uvedená motivácia pre štúdium správania tenkého filmu s popisom jeho základnej biologickej štruktúry a objasnenie fyziologických problémov vyplývajúcich z deformácie profilu slznej vrstvy.

Základné riadiace rovnice, ktoré vychádzajú zo zákonov zachovania, sú uvedené v kapitole 1. Ďalšie rovnice, ktoré ovplyvňujú hrúbku slznej vrstvy, popisujú charakter rozhrania medzi slznou vrstvou a okolitým prostredím. Z bezrozmerných rovníc sme použitím limity tenkej vrstvy (kapitola 3) odvodili evolučnú parciálnu diferenciálnu rovnicu (kapitola 4).

Numerické riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice odvodenej v kapitole 4 je obsahom kapitoly 5. Rovnicu sme previedli na systém obyčajných diferenciálnych rovníc aplikáciou metódy čiar. Riešenie systému časových obyčajných diferenciálnych rovníc sme získali pre sadu rôznych hodnôt parametrov  $A$ ,  $\delta$  a  $B$ , ktoré charakterizujú zakrivenie, van der Waalsovu interakciu a efekt zmáčania rohovky. Medzi hlavné výsledky patrí identifikácia toku výparov pozdĺž slzného filmu ako funkcia kontrolných parametrov. Zistili sme, že pri parciálnom zmáčaní rohovky ( $B \neq 0$ ) sa predlžuje čas tvorby ruptúr v slznom filme, proces vyparovania v centrálnej časti filmu sa spomaľuje a objem kvapaliny sa sústreďuje v oblasti menisku (viď kapitola 5.3). Uviedli sme čas, pri ktorom sa minimálna hrúbka filmu efektívne ustáli na stacionárnej (konštantnej) hodnote (kapitola 5.4). Naše numerické výsledky potvrdzujú, že rovnovážna minimálna hrúbka filmu efektívne nezávisí od efektu zmáčania rohovky, ale je riadená parametrami  $A$  a  $\delta$ , spojenými so zakrivením povrchu. Pôvodný príspevok tejto práce je obsiahnutý v kapitolách 5.3 a 5.4.

---

## Literatúra

- [1] Ajaev, V. S., *Spreading of Thin Volatile Liquid Droplets on Uniformly Heated Surfaces*, Journal of Fluid Mechanics, 528, 279–296, 2005b.
- [2] Bron, A. J., Tiffany, J. M., Gouveia, S. M., Yokoi, N., Voon, L. W., *Functional Aspects of the Tear Film Lipid Layer*, Experimental Eye Research, ,2004
- [3] Braun, R. J., *Dynamics of the Tear Film*, Annual Review of Fluid Mechanics, 267–297, 2012
- [4] Braun, R. J., Fitt, A. D., *Modelling Drainage of the Precorneal Tear Film after Blink*, Mathematical Medicine and Biology, 20, 1–28, 2003
- [5] Burelbach, J. P., Bankoff, S. G., Davis, S. H., *Nonlinear Stability of Evaporating/Condensing Liquid Films*, Journal of Fluid Mechanics, 195, 463–494, 1988
- [6] Fatt, I., Weissman, B., *Physiology of the Eye: An Introduction to the Vegetative Functions*, Butterworth-Heinemann, 2. edícia, 1992
- [7] Hoh, H., *Diagnóza suchého oka*, Bausch & Lomb, 1999
- [8] Johnson, M. E., Murphy, P. J., *Changes in the Tear Film and Ocular Surface from Dry Eye Syndrome*, Progress in Retinal Eye Research, 23, 449–474, 2004
- [9] King, J. R., *Two Generalisations of the Thin Film Equation*, Mathematical and Computer Modelling, 34, 737–756, 2001
- [10] King-Smith, P. E., Fink, B. A., Fogt, N., Nichols, K. K., Hill, R. M., Wilson, G. S., *The Thickness of the Human Precorneal Tear Film: Evidence from Reflection Spectra*, Investigative Ophthalmology and Visual Science, 41, 3348–3359, 2000
- [11] King-Smith, P. E., Reuter, K. S., Braun, R. J., Nichols, J. J., Nichols, K. K., *Tear Film Breakup and Structure Studied by Simultaneous Video Recording of Fluorescence and Tear Film Lipid Layer Images*, Investigative Ophthalmology and Visual Science, 54, 4900–4909, 2013.

- [12] O'Brien, S. B. G., Schwartz, L. W., *Theory and Modeling of Thin Film Flows*, Encyclopedia of Surface and Colloid Science, 5283–5297, 2002
- [13] Oron, A., Davis, S. H., Bankoff, S. G., *Long-scale Evolution of Thin Liquid Films*, Review on Modern Physics, 69, 931–980, 1997
- [14] Schiesser, W. E., *The Numerical Method of Lines*, Academic Press, 1991.
- [15] Smith, J. A., Albeitz, J., Begley, C., Caffrey, B., Nichols, K. K., et al., *The Epidemiology of Dry Eye Disease: Report of the Epidemiology Subcommittee of the International Dry Eye WorkShop*, The Ocular Surface, 5 , 93–107, 2007
- [16] Winter, K., Anderson, D. M., Braun, J. R., *A Model for Wetting and Evaporation of a Post-blink Precorneal Tear Film*, Mathematical Medicine and Biology, 27, 211–225, 2010
- [17] Wu, Q., Wong, H., *A Slope-dependent Disjoining Pressure for Non-zero Contact Angles*, Journal of Fluid Mechanics, 506 157–185, 2004.



## Implementácia numerickej metódy čiar so semidiskretizáciou v priestorovej oblasti

```
function [h, t, Qe, t-critical] = count_pde(input_A, input_delta, input_B, input_n)
global n L xl xu k x A B delta E K G hmin dxm dhm h0xx h0L t0 tf Pi
% Inicializacia konstant
% Pocet deliacich bodov n a polovicna sirka ocneho viecka v bezrozmernej
% forme
n = input_n;
L = 14;
% Konstanty van der Waalsova interakcia A, zmacanie rohovky B, konstantnost
% vyparovania delta a rychlost vyparovania E
A = input_A;
B = input_B;
delta = input_delta;
E = 14.1;
K = 4930;
G = 0;
% Hranicne podmienky na urcenie meniskov
hmin = 1;
dxm = 2;
dhm = 2;
h0xx = 4;
h0L = 9;
% Casovy interval
t0 = 0;
tf = 100;
% Mriezka na priestore x
xl = 0;
xu = L;
k = (xu-xl)/(n-1);
x = xl:k:xu;
% Mriezka na casovej premennej t podla podmienky CFL
nout = ((tf-t0)/(k^2))/0.45 - n + 1;
tout = linspace(t0,tf,nout);
```

```

% Zaciatozna podmienka pre cas t = 0
for i=1:n
    if (abs(x(i)) < (L - dxm))
        h0(i) = hmin;
    else
        h0(i) = hmin + dhm * (abs(x(i)) - (L - dxm))^2;
    end
end

% Nastavenie tolerancie vypoctu
reltol = 1e-03;
abstol = 1e-05;
options = odeset('RelTol', reltol, 'AbsTol', abstol);
% Riesenie systemu casovych ODR pomocou funkcie ode23s
[t,h] = ode23s(@ode, tout, h0, options);
% Vypocet toku vyparovania Qe
for cas = 1: length(t)
    Qe(cas,:) = 1 - delta.*(der2(h(cas,:),k) + Pi);
end
% Vypocet casu pretrhnutia (ruptury) slzneho filmu
t_critical = 0;
for cas = 1:length(t)
    for priestor = 1:n
        if (h(cas, priestor) <= 0)
            t_critical = t(cas)
            break
        end
    end
end
if(t_critical ~= 0)
    break
end
end
end

function ht = ode(t,h)
global n k A B delta E K G h0L Pi
% Hranicna podmienka pre meniskus
h(n) = h0L;

```

```

% Volanie funkcie s navratom 1., 2. a 3. priestorovej derivacie
hx = der1(h,k);
hxx = der2(h,k);
hxxx = der3(h,k);
% Vyplnenie vektorov potrebnych pre vypocet ODR
h = h';
Pi = 1./(h.^3) .* (A + B.*(2.*h.* hx.^2.*hxx - hx.^4));
inside = (h.^3)./12 .* (hxxx + der1(Pi, k) + G);
ht = -E./(K + h).*(1 - delta.*(hxx + Pi)) - der1(inside, k);
% Transpozicia: Funkcia ode23s ocakava na vystupe vektor
ht=ht';
end

```

```

% Funkcia pre aproximaciu 1. derivacie s presnostou O(k^2)
function [hx] = der1(h, k)
global n
hx(1) = (-h(1) + h(2)) / k;
for i = 2:(n-1)
    hx(i) = (-h(i-1) + h(i+1))/ (2*k);
end
hx(n) = (h(n) -h(n-1))/ k;
end

```

```

% Funkcia pre aproximaciu 2. derivacie s presnostou O(k^2)
function [hxx] = der2(h, k)
global n h0xx
hxx(1) = (h(1) -2*h(2) + h(3) )/k^2;
hxx(n) = h0xx ;
for i = 2:(n-1)
    hxx(i) = (h(i+1) -2*h(i) + h(i-1))/k^2 ;
end
end

```

```
% Funkcia pre aproximáciu 3. derivácie s presnosťou  $O(k^2)$ 
function [hxxx] = der3(h, k)
global n
hxxx(1) = (-h(1) +3*h(2) -3*h(3) + h(4))/(k^3) ;
hxxx(2) = (-h(2) +3*h(3) -3*h(4) + h(5))/(k^3) ;
hxxx(n-1) = (h(n-1) - 3*h(n-2) + 3*h(n-3) - h(n-4))/(k^3);
hxxx(n) = (h(n) - 3*h(n-1) + 3*h(n-2) - h(n-3))/(k^3);
for i = 3:(n-2)
    hxxx(i) = (-h(i-2) +2*h(i-1) -2*h(i+1) + h(i+2))/(2*k^3) ;
end
end
```