UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ANALÝZA METÓD OCEŇOVANIA DÔCHODKOV VYPLÁCANÝCH Z ÚSPOR V DRUHOM DÔCHODKOVOM PILIERI NA SLOVENSKU

Diplomová práca

2017

Bc. Tünde Tarcsiová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ANALÝZA METÓD OCEŇOVANIA DÔCHODKOV VYPLÁCANÝCH Z ÚSPOR V DRUHOM DÔCHODKOVOM PILIERI NA SLOVENSKU

Diplomová práca

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Školiteľ:	Mgr. Gábor Szűcs, PhD.

Bratislava, 2017

Bc. Tünde Tarcsiová

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Tünde Tarcsiová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Analýza metód oceňovania dôchodkov vyplácaných z úspor v druhom dôchodkovom pilieri na Slovensku
Analysis of valuation methods of life annuities paid from savings in the second pension pillar in Slovakia

Cieľ: Na začiatku výskumného procesu je potrebné zhrnúť aktuálne legislatívne podmienky vzťahujúce sa na vyplácanie dôchodkov z úspor v starobnom dôchodkovom sporení na Slovensku a poistno-matematické metódy výpočtu výšky mesačných dôchodkových dávok. Úlohou práce je uviesť základné možnosti investovania prostriedkov technických rezerv v prípade poistných zmlúv o doživotných dôchodkoch vyplácaných zo starobného dôchodkového sporenia. Cieľom práce je porovnať vplyv rôznych typov valuácií peňažných tokov na výšku dôchodkových dávok a na ziskovosť (stratovosť) poistných kontraktov o doživotných dôchodkoch vyplácaných z úspor v starobnom dôchodkovom sporení. Vplyv voľby metódy oceňovania peňažných tokov by sa mal zisťovať v praktickej časti diplomovej práce, a to aj prostredníctvom simulačných štúdií.

Vedúci: Mgr. Gábor Szűcs, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 21.01.2016

Dátum schválenia: 25.01.2016 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

....
študent vedúci práce

Poďakovanie

Touto cestou sa chcem poďakovať svojmu vedúcemu diplomovej práce Mgr. Gáborovi Szűcsovi, PhD. za ochotu, pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce.

Abstrakt

TARCSIOVÁ Tünde: Analýza metód oceňovania dôchodkov vyplácaných z úspor v druhom dôchodkovom pilieri na Slovensku [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, školiteľ: Mgr. Gábor Szűcs, PhD., Bratislava, 2017, 67 s.

Táto diplomová práca sa zaoberá vyplácaním dôchodkov zo starobného dôchodkového sporenia (z II. piliera) na Slovensku podľa aktuálneho legislatívneho rámca. Práca uvádza základy teórie životného poistenia používané pri modelovaní mesačných dôchodkových dávok a Leeov-Carterov model, ktorý slúži predovšetkým na modelovanie dlhovekosti. Obsahuje definície Svenssonovej výnosovej a forwardovej krivky, Smithovho-Wilsonovho modelu a detailné odvodenie troch modelov, ktoré slúžia na výpočet výšky mesačnej dôchodkovej dávky bez zvyšovania a bez pozostalostných dôchodkov vyplácanej z úspor v starobnom dôchodkovom sporení. Praktická časť sa zaoberá programovou implementáciou týchto troch modelov, aproximáciou dôchodkových dávok a rôznymi stresovými scenármi vzhľadom na úrokovú mieru. Práca uvádza aj modelovú výšku dávky v prípade dôchodku profesora Brunovského vyplácaného z II. piliera.

Kľúčové slová: vyplácanie dôchodkov z II. piliera, Svenssonova forwardová krivka, Smithov-Wilsonov model, stresové scenáre.

Abstract

TARCSIOVÁ Tünde: Analysis of valuation methods of life annuities paid from savings in the second pension pillar in Slovakia [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics, Supervisor: Mgr. Gábor Szűcs, PhD., Bratislava, 2017, 67 p.

This master thesis deals with the old-age pension scheme (II. pension pillar) and with valuation of old-age annuities in Slovakia under the current legislative framework. The thesis provides the basics of the life insurance mathematics used in modelling of old-age annuities and the Lee-Carter model to model the longevity of pensioners. It contains the definitions of the Svensson yield curve and forward rate curve, Smith-Wilson model and detailed derivation of three models for calculation of the old-age annuity benefit which does not include raising of the pension and does not include survivors' benefits paid from old-age pension scheme. The practical part of this work includes the program implementation of these three models, approximation of old-age annuities and various stress scenarios for interest rate risk. The work also contains the valuation of the old-age annuity in case of professor Brunovský.

Keywords: Payment of old-age annuities, Svensson's forward curve, Smith-Wilson model, stress scenarios.

Obsah

Úvod

Vyplácanie dôchodkov zo starobného dôchodkového sporenia (t. j. z II. piliera) sa začalo 1. januára 2015. Väčšina sporiteľov si po dosiahnutí dôchodkového veku pri súčasných nastaveniach systému kúpi doživotný dôchodok za svoje nasporené peniaze. Doživotné dôchodky v súčasnosti vyplácajú tri životné poisťovne, ktoré od Národnej banky Slovenska dostali licenciu. Pre životné poisťovne to predstavuje uzatvorenie veľkého množstva nových zmlúv s jednorazovým poistným (nasporená suma na osobnom dôchodkovom účte v dôchodkovej správcovskej spoločnosti). Osoby, ktoré dovŕšili dôchodkový vek, môžu požiadať o dôchodok v pobočkách Sociálnej poisťovne alebo prostredníctvom svojej dôchodkovej správcovskej spoločnosti. Výber životnej poisťovne (t. j. kúpa dôchodku) prebieha cez Centrálny informačný ponukový systém (CIPS), ktorý spravuje Sociálna poisťovňa. Životné poisťovne investujú najväčšiu časť spravovaných peňazí do bezpečných dlhopisov hlavne kvôli legislatívnym obmedzeniam. [6], [12]

V tejto práci predpokladáme, že poisťovne investujú iba do bezpečných finančných nástrojov, teda do bezkupónových dlhopisov a nie do akcií. Výnosnosť týchto dlhopisov modelujeme Svenssonovou forwardou krivkou a Smithovým-Wilsonovým modelom. Nepoužívame statické pravdepodobnosti úmrtia od Štatistického úradu Slovenskej republiky, ale pravdepodobnosti úmrtia odhadnuté na základe Leeho-Carterovho modelu, ktorý slúži predovšetkým na modelovanie dlhovekosti dôchodcov, nakoľko stredná budúca dĺžka života populácie na Slovensku rastie kvôli skvalitneniu zdravotnej starostlivosti a zvyšujúcemu sa životnému štandardu.

Diplomová práca obsahuje 7 kapitol. V prvej kapitole sa zaoberáme súčasným dôchodkovým zabezpečením na Slovensku. V krátkosti predstavíme jednotlivé piliere dôchodkového systému a podrobnejšie sa zaoberáme starobným dôchodkovým sporením (II. pilier) a vyplácaním dôchodkov z II. piliera. Predstavíme aj dôchodkové systémy vybraných troch krajín a uvádzame ako prebieha vyplácanie dôchodkov z II. piliera v týchto krajinách. V druhej kapitole uvedieme základy teórie životného poistenia a poistné produkty a dôchodky v prípade netto-princípu, ktoré použijeme v ďalších častiach práce pri modelovaní dôchodkov. V tretej kapitole prezentujeme Leeov-Carterov model, ktorý slúži predovšetkým na modelovanie dlhovekosti. Štvrtá kapitola je venovaná Základnému modelu s konštantnou technickou úrokovou mierou, pomocou ktorého dostávame vzorec pre výpočet mesačnej výšky dôchodkovej dávky. Piata kapitola obsahuje deficíciu Svenssovovej výnosovej a forwardovej krivky, vzťah medzi okamžitou forwardovou úrokovou mierou a spojitou úrokovou mierou. Uvedieme aj niektoré výhody a nevýhody Svenssonovho modelu a formulujeme náš 1. model, v ktorom technická úroková miera už nie je konštantná a jej hodnota sa riadi Svenssonovou forwardovou krivkou. Ďalšia kapitola je venovaná Smithovmu-Wilsonovmu modelu. Napíšeme spôsob odhadovania jeho parametrov, výhody a nevýhody modelu a odvodíme náš 2. model na základe Základného modelu a 1. modelu. V tomto modeli sa hodnota technickej úrokovej miery riadi podľa Smithovej-Wilsonovej výnosovej krivky. V poslednej kapitole sa nachádza praktická časť nášho diplomového výskumu - programová implementácia modelov v prostredí softvéru `R`. Uvedieme modelové výšky dôchodkových dávok vypočítaných na základe troch vyššie spomenutých modelov. Vytvoríme rôzne stresové scenáre vzhľadom na úrokovú mieru. Pri 2. modeli matematickým spôsobom vyjadríme kvalitu odhadnutej krivky pomocou pseudo-koeficientu determinácie. V poslednej podkapitole praktickej časti práce sa zaoberáme dôchodkom profesora Brunovského z II. piliera. Vypočítame, aký dôchodok by dostal prof. Brunovský s použitím Základného modelu, 1. modelu a 2. modelu.

1 Súčasné dôchodkové zabezpečenie na Slovensku

V tejto časti našej práce čerpáme zo zdrojov [22], [29] a [31]. Dôchodkové zabezpečenie na Slovensku od roku 2005 sa skladá zo starobného dôchodkového poistenia (I. pilier), starobného dôchodkového sporenia (II. pilier) a doplnkového dôchodkového sporenia (III. pilier). I. a III. pilier predstavujeme v krátkosti, aby čitateľ získal krátky prehľad o dôchodkovom syténe Slovenskej republiky ako celku, a podrobnejšie sa zaoberáme II. pilierom.

1.1 Starobné dôchodkové poistenie

Starobné dôchodkové poistenie, tzv. I. pilier je povinný, priebežne financovaný, dávkovo definovaný štátny pilier (tzv. Pay-as-you-go, PAYG systém). Dôchodky z I. piliera vypláca Sociálna poisťovňa (ďalej SP), inštitúcia, ktorá bola zriadená v roku 1994. Tento povinný pilier je upravený zákonom č. 461/2003 Z. z. o sociálnom poistení v znení neskorších predpisov.

Odvádzaním do tohto piliera zabezpečujú ekonomicky aktívni ľudia (pracujúci) dôchodky súčasných dôchodcov, nie svoje budúce dôchodky, pričom sa spoliehajú na to, že v budúcnosti bude dostatok ekonomicky aktívnych ľudí, ktorí zabezpečia ich príjem v starobe odvádzaním do SP. Z tohto dôvodu tento pilier môžeme chápať aj ako jednu tzv. medzigeneračnú zmluvu. Inými slovami, príspevky pracujúcich sú dôchodcom okamžite vyplácané vo forme dávok, teda peniaze sa neakumulujú.

1.2 Starobné dôchodkové sporenie

Starobné dôchodkové sporenie, tzv. II. pilier je kapitalizačným, príspevkovo definovaným pilierom, teda výška dôchodku z tohto piliera bude závislá na zaplatených príspevkoch a na ich zhodnotení. Tento pilier je kvázipovinný. To znamená, že osoba, ktorá sa rozhodne pre II. pilier, už z neho nemôže vystúpiť, len v prípade otvorenia tohto piliera. II. pilier bol od svojho zavedenia už viackrát otvorený. Upravuje ho zákon č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení a o zmene a doplnení niektorých zákonov [31]. Starobné dôchodkové sporenie sa skladá zo sporiacej (akumulačnej) a výplatnej (dekumulačnej) fázy.

1.2.1 Sporiaca fáza

Počas sporiacej fázy sa odvody pripíšu na osobný dôchodkový účet sporiteľa v ním vybranej dôchodkovej správcovskej spoločnosti (DSS). Peniaze na osobnom dôchodkovom účte sa zhodnocujú v dôchodkových fondoch.

Vstup do II. piliera

Osoby, ktoré ešte nedovŕšili vek 35 rokov a boli aspoň raz dôchodkovo poistené (t. j. odvádzali už do I. piliera), môžu vstúpiť do II. piliera. SP má povinnosť do 180 dní od vzniku prvej účasti v I. pilieri (od 31. decembra 2012) písomne informovať osoby o ich práve na uzatvorenie zmluvy o starobnom dôchodkovom sporení.

Výška odvodov

V roku 2012 sa znížili výšky príspevkov do tohto piliera z pôvodných 9% na 4% z vymeriavacieho základu. Táto zmena mala platnosť do 31. decembra 2016. Od roku 2017 sa budú odvody do II. piliera každoročne zvyšovať o 0,25%, kým nedosiahnu 6%, čiže výška odvodov do I. piliera sa bude znižovať, aby odvody do I. a II. piliera spolu tvorili 18% z vymeriavacieho základu sporiteľa.

Dôchodkové správcovské spoločnosti pôsobiace na Slovensku

V súčasnosti je na Slovensku šesť DSS, ktoré spravujú finančné prostriedky sporiteľov:

- Allianz - Slovenská dôchodková správcovská spoločnosť, a.s.,
- NN dôchodková správcovská spoločnosť, a.s.,
- VÚB Generali dôchodková správcovská spoločnosť, a.s.,
- AEGON, d.s.s., a.s.,
- Dôchodková správcovská spoločnosť Poštovej banky d.s.s., a.s.,
- AXA d.s.s., a.s.

DSS majú podľa zákona spravovať dva fondy (od 1.1.2013**):**

- dlhopisový garantovaný dôchodkový fond,
- akciový negarantovaný dôchodkový fond.

Zmiešané a indexové dôchodkové fondy môžu DSS naďalej spravovať alebo zlúčiť s inými fondmi.

1.2.2 Výplatná fáza

Od 1. januára 2015 prebieha na Slovensku vyplácanie starobných dôchodkov zo starobného dôchodkového sporenia (z II. piliera). Dôchodky vyplácajú životné poisťovne (ďalej len ŽP), ktorým Národná banka Slovenska (NBS) udelila licenciu na vyplácanie dôchodkov zo starobného dôchodkového sporenia:

- Allianz - Slovenská dôchodková správcovská spoločnosť, a.s.,
- Generali poisťovňa, a.s.,
- Union poisťovňa, a.s.

ŽP dostanú jednorazové poistné - nasporenú sumu na osobnom dôchodkovom účte v DSS. Inkasované poistné investujú najmä do dlhopisov, nakoľko podľa legislatívy sú nútené investovať pomerne konzervatívne.

Zo starobného dôchodkového sporenia sa vypláca:

- **starobný dôchodok**,
- predčasný starobný dôchodok,
- pozostalostný dôchodok.

Poznámka. Osoba, ktorá dovŕši dôchodkový vek, ale nepožiada o dôchodok z II. piliera, má možnosť priebežného vyplácania výnosov z investovania majetku v dôchodkovom fonde. Výnos z investovania nepovažujeme za dôchodok. ([31] §46*i*)

Starobný dôchodok sa vypláca formou:

- **doživotného dôchodku**,
- dočasného dôchodku,
- programového výberu,

pričom doživotný a dočasný dôchodok vyplácajú poisťovne, programový výber vyplácajú DSS.

Nárok na dôchodok z II. piliera majú sporitelia, ktorí dovŕšili dôchodkový vek. Podľa zákona [31] §44 odseku 1, požiadať o dôchodok môžu buď v pobočkách SP, podľa miesta trvalého pobytu alebo prostredníctvom svojej DSS. Stav žiadosti je možné sledovať prostredníctvom Centrálneho informačného ponukového systému (CIPS), ktorý spravuje SP. DSS vystaví certifikát o nasporenej sume na osobnom dôchodkovom účte ([31] §45) a následne SP pošle sporiteľovi ponukový list ([31] §46*c* odsek 1), ktorý je záväzný 30 dní od vyhotovenia ([31] §46 odsek 2). Ak si nevyberie žiaden dôchodok z ponuky, zostane sporiteľom a o dôchodok môže požiadať neskôr.

Ponuka doživotného starobného dôchodku (zákon [31] §46 odsek 1):

- **bez zvyšovania dôchodku a bez pozostalostných dôchodkov**,
- so zvyšovaním dôchodku a bez pozostalostných dôchodkov,
- bez zvyšovania dôchodku a s pozostalostnými dôchodkami s obdobím výplaty jeden rok,
- bez zvyšovania dôchodku a s pozostalostnými dôchodkami s obdobím výplaty dva roky,
- so zvyšovaním dôchodku a s pozostalostnými dôchodkami s obdobím výplaty jeden rok,
- so zvyšovaním dôchodku a s pozostalostnými dôchodkami s obdobím výplaty dva roky.

Podľa zákona [31] §46 odsek 3 výška dôchodku sa určí „použitím poistno-matematických metód tak, aby bola zabezpečená trvalá splniteľnosť záväzku poistiteľa voči poistenému“, čiže výška dôchodku je garantovaná. „Na ohodnotenie rizika pri určení sumy dôchodku“ poisťovne používajú „vlastné vierohodné predpoklady určené na základe dostupných údajov, pričom použitá pravdepodobnosť úmrtnosti zohľadňuje aj budúci demografický vývoj a jediným individuálnym rizikovým faktorom je vek budúceho poberateľa dôchodku.“ [31]

Poznámka. Chceli by sme zdôrazniť, že v rámci nášho diplomového výskumu neskúmame akumulačnú fázu (nezaoberáme sa s tým, aké investičné stratégie boli použité počas nasporenia sumy na osobnom dôchodkovom účte). V práci sa zaoberáme iba dekumulačnou fázou. V tejto práci počítame výšku doživotného dôchodku bez zvyšovania a bez pozostalostných dôchodkov.

1.3 Doplnkové dôchodkové sporenie

Doplnkové dôchodkové sporenie, tzv. III. pilier, upravuje zákon č. 650/2004 Z. z. o doplnkovom dôchodkovom sporení a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov. Finančné prostriedky účastníkov III. piliera spravujú doplnkové dôchodkové spoločnosti (DDS). V súčasnosti na Slovensku pôsobia štyri DDS:

- AXA d.d.s., a.s.,
- ING Tatry-Sympatia, d.d.s., a.s.,
- Stabilita, d.d.s., a.s.,
- Doplnková dôchodková spoločnosť Tatra banky, a.s.

1.4 Sporivé piliere vo svete

V tejto podkapitole uvedieme základné poznatky o dôchodkových systémoch troch krajín na svete, pričom sa zameriavame na vyplácanie dôchodkov z naakumulovaných prostriedkov zo sporivého piliera v týchto krajinách. Primárnym zdrojom pri vypracovaní tejto podkapitoly našej diplomovej práce je [8].

1.4.1 Česká republika

I. pilier je povinný verejný nefondovaný priebežný systém. Upravuje ho zákon č. 155/1995 Sb., o důchodovém pojištění. [21]

Bola zriadená odborná komisia pre dôchodkovú reformu a vláda sa rozhodla ukončiť sporenie v II. pilieri (Zákon č. 376/2015 Sb., o ukončení důchodového spoření). Sporitelia v II. pilieri mali povinnosť informovať svoju penzijnú spoločnosť o tom, ako má naložiť s naakumulovanými peniazmi do 30. septembra 2016. Prostriedky účastníkov, ktorí sa do tej doby neozvali, boli prevedené automaticky na ich daňový účet u príslušného finančného úradu a je možné ich považovať za daňový preplatok. Osoby môžu požiadať príslušný finančný úrad o vyplatenie svojich prostriedkov, ale bude to komplikovanejšie než výplata cez penzijnú spoločnosť, ktorá ich peniaze môže vyplatiť poštovnou poukážkou, prevodom na bežný účet alebo prevodom na jeho účet v rámci doplnkového penzijného sporenia (III. pilíř). [20]

III. pilier je doplnkové penzijné sporenie (dobrovoľný fondovaný systém) podľa zákona č. 427/2011 Sb., ktoré nahradilo Penzijní připojištění se státním příspěvkem upravené zákonom č. 42/1994 Sb. Doplnkové penzijné sporenie je dotované štátom. [21]

1.4.2 Nový Zéland

Dôchodkový systém na Novom Zélande tvoria: verejný štátny solidárny pilier, zamestnanecké schémy a sporiaci kapitalizačný pilier.

Nárok na dôchodkové dávky zo štátneho piliera majú osoby, ktoré mali trvalý pobyt na Novom Zélande aspoň 10 rokov po dovŕšení veku 20 rokov (z toho 5 rokov po dovŕšení veku 50).

Záujem o zamestnanecké penzijné schémy sa postupne znižuje, nakoľko nie sú podporované štátom a nie sú ani daňovo zvýhodnené.

Nový sporiaci II. pilier, tzv. KiwiSaver bol zavedený v roku 2007. Je dobrovoľným vládou dotovaným sporením. V roku 2014 bolo približne 67% obyvateľov vo veku 18−64 rokov účastníkmi KiwiSaver. Minimálny príspevok do tejto schémy sa zvýšil v roku 2013 z 4% na 6% a je rozdelený rovnomerne medzi zamestnávateľmi a zamestnancami. Zamestnanci si môžu zvoliť aj vyššie odvody a to buď vo výške 4% alebo 8%. Účastníci dostávajú 1000 NZD (zhruba 660 EUR), keď vstúpia. Po dosiahnutí dôchodkového veku sporiteľ dostane zo systému KiwiSaver jednorazové vyrovnanie. Napriek tomu, že úspory sú „zamknuté“ až do dosiahnutia dôchodkového veku, mladí sporitelia majú možnosť jednorazového výberu pri financovaní svojho prvého bývania. [8]

1.4.3 Poľsko

Dôchodkový systém v Poľsku pozostáva z troch pilierov, ale v súčasnosti sa chystá reforma systému.

I. pilier pozostáva z individuálnych virtuálnych účtov: z hlavného individuálneho virtuálneho účtu a jedného podúčtu (doplnkový virtuálny účet). Tento pilier sa dá chápať ako upravený PAYG systém. Virtuálne účty spravuje ZUS (Zakład Ubezpieczeń Społecznych), inštitúcia zabezpečujúca sociálne poistenie (inštitúcia podobná Sociálnej poisťovni v SR). [8]

II. pilier (Open Pension Fund - OFE, otvorené dôchodkové fondy) je fondovaný dobrovoľný súkromný pilier, alternatíva voči doplnkovému virtuálnemu účtu. Vo februári 2014 sa presunulo 51,5% z netto úspor z II. piliera do I. piliera.

Na základe reformy budú úspory v II. pilieri rozdelené nasledovne: 25% z úspor prevedú do I. piliera (Demographic Reserve Fund, Demografický rezervný fond, fond ktorý slúži na krytie deficitu I. piliera) a 75% do III. piliera. [19], [27]

2 Základy teórie životného poistenia

Pri vypracovaní tejto kapitoly používame zdroje [1], [9] a [13]. V klasickej teórii životného poistenia x označuje vek osoby, kde $x \in \{0, 1, 2, ..., \omega\}$, pričom ω je maximálny možný vek. Ročnú pravdepodobnosť prežitia označujeme symbolom p_x, ktorá vyjadruje pravdepodobnosť toho, že x-ročná osoba sa dožije $(x+1)$ rokov, pričom $p_\omega = 0$. Ročná pravdepodobnosť úmrtia $q_x = 1 - p_x$ vyjadruje pravdepodobnosť toho, že x-ročná osoba sa nedožije $(x+1)$ rokov, t. j. zomrie práve vo veku x. Faktor prežitia k rokov označujeme symbolom ${}_kp_x$, ktorý vyjadruje pravdepodobnosť toho, že x-ročná osoba prežije ďalších k rokov a platí vzťah:

$$ {}_kp_x = p_x\ p_{x+1}\ \ldots\ p_{x+k-1} = \prod_{h=0}^{k-1} p_{x+h}, \quad k = 1, 2, \ldots, \omega - x $$

a ${}_0p_x = 1$ pre $k = 0$. V prípade $k = 1$ sa index vľavo nepíše, čiže ${}_1p_x \equiv p_x$. Symbolom ${}_kq_x$ označujeme pravdepodobnosť toho, že osoba zomrie v priebehu najbližších k rokov a platí nasledujúci vzťah:

$$ {}_kq_x = 1 - {}_kp_x = {}_0p_x\ q_x + {}_1p_x\ q_{x+1} + \ldots + {}_{k-1}p_x\ q_{x+k-1} = \sum_{h=0}^{k-1} {}_hp_x\ q_{x+h}, \quad k = 1, 2, \ldots, \omega - x. $$

Pravdepodobnosti prežitia aj úmrtia je možné vyjadriť aj v neceločíselných vekoch, viď nasledujúcu definíciu.

Definícia 1. [1] Lineárna aproximácia pre pravdepodobnosť úmrtia x-ročnej osoby pre $0 < t \leq 1$ je:

$$ q_{x+t} = (1-t)q_x + tq_{x+1}. \tag{1} $$

Pravdepodobnosti prežitia v neceločíselných vekoch sa vyjadrujú analogicky.

Ročné pravdepodobnosti úmrtia a prežitia sú zverejnené v úmrtnostných tabuľkách. Pomocou nasledujúcej definície vieme vyjadriť aj mesačné pravdepodobnosti prežitia.

Definícia 2. Balducciho predpoklad. [9] Predpokladajme, že ročná miera úmrtnosti spĺňa vzťah ${}_{1-t}q_{x+t} = (1-t)q_x$, x je prirodzené číslo, $0 < t < 1$. Platí: $p_x = {}_tp_x\ {}_{1-t}p_{x+t}$. Odtiaľ:

$$ {}_tp_x = \frac{p_x}{1-(1-t)q_x} = \frac{p_x}{p_x + tq_x} = \frac{1}{1 + t\frac{q_x}{p_x}}. \tag{2} $$

Jedným zo základných princípov životného poistenia je tzv. princíp ekvivalencie, ktorý spočíva v tom, že súčasná hodnota príjmov poisťovne sa rovná súčasnej hodnote výdavkov poisťovne. V práci počas modelovaní a oceňovaní dôchodkov používame tzv. brutto-princíp ekvivalencie, t. j. berieme do úvahy rôzne náklady poisťovne, napr. náklady spojené s uzavretím, správou a vedením poistnej zmluvy. Netto-princíp ekvivalencie nepoužívame (neuvažujú sa náklady poisťovne).

Podľa zdroja [9] náklady delíme na:

- **počiatočné jednorazové náklady** α: náklady spojené s uzavretím poistnej zmluvy (napr. poplatky agentom, náklady na reklamu),
- **správne náklady** β: náklady spojené s nájomným, administratívne náklady,
- **inkasné náklady** γ: náklady spojené s inkasovaním poistného, ak sa poistné platí bežne.

2.1 Poistné produkty a dôchodky v prípade netto-princípu

Nižšie uvedieme definície poistných produktov a dôchodkov používaných v tejto práci. Najprv uvedieme ročné symboly a vzťahy, následne definujeme mesačné symboly a spôsoby výpočtu podľa zdrojov [1] a [13].

Poistenie pre prípad úmrtia

V prípade dočasného poistenia na úmrtie (na dobu n rokov) poisťovňa vyplatí jednu peňažnú jednotku (1 p. j.) na konci toho roka počas n ročnej poistnej doby, v ktorom poistená osoba zomrela.

Definícia 3. Súčasná hodnota dočasného poistenia pre prípad úmrtia na dobu n rokov je definovaná vzťahom:

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{h=0}^{n-1} v^{h+1} \ {}_hp_x \ q_{x+h}. \tag{3}$$

Predpoklad, že poisťovňa vyplatí poistnú sumu až na konci toho roka, v ktorom nastalo úmrtie, nie je reálny, preto definujeme také poistenie na úmrtie, pri ktorom poisťovňa vyplatí 1 p. j. na konci toho mesiaca, v ktorom nastalo úmrtie poistenej osoby.

Definícia 4. Na základe vzťahu (3), súčasnú hodnotu dočasného poistenia na úmrtie, ktoré poistnú sumu vypláca na konci mesiaca úmrtia poistenej osoby, definujeme nasledovne:

$$A^{1\ (12)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{12}\sum_{h=\frac{1}{12}}^{n} v^h \ {}_{h-\frac{1}{12}}p_x \ {}_{\frac{1}{12}}q_{x+h-\frac{1}{12}}. \tag{4}$$

Polehotné dôchodky

V prípade doživotného polehotného ročne vyplácaného dôchodku poisťovňa vyplatí 1 p. j. na konci každého roka, ak je poistená osoba (dôchodca) nažive.

Definícia 5. Súčasnú hodnotu doživotného polehotného ročne vyplácaného dôchodku definujeme nasledovne:

$$a_x = \sum_{h=1}^{\omega-x} v^h \ {}_hp_x. \tag{5}$$

Predpoklad ročne vyplácaného polehotného dôchodku môžeme zovšeobecniť pre prípad mesačne vyplácaného polehotného dôchodku, viď nasledujúcu definíciu.

Definícia 6. Modifikovaním rovnice (5) vypočítame súčasnú hodnotu doživotného polehotného mesačne vyplácaného dôchodku pomocou vzťahu:

$$a_x^{(12)} = \frac{1}{12}\sum_{h=\frac{1}{12}}^{\omega-x} v^h \ {}_hp_x. \tag{6}$$

Definícia 7. Polehotný doživotný dôchodok s odkladom o k rokov označíme symbolom ${}_{k|}a_x$ a definujeme vzťahom:

$${}_{k|}a_x = v^{k+1} \ {}_{k+1}p_x + v^{k+2} \ {}_{k+2}p_x + ... + v^{\omega-x} \ {}_{\omega-x}p_x = \sum_{h=k+1}^{\omega-x} v^h \ {}_hp_x. \tag{7}$$

3 Leeov-Carterov model

V poslednej dobe sa očakávaná dĺžka života postupne zvyšuje, čiže ľudia sa dožívajú stále vyššieho veku ako sa predpokladalo (ďalej len dlhovekosť), preto v tejto diplomovej práci pri modelovaní doživotných mesačných dôchodkových dávok bez zvyšovania a bez pozostalostných dôchodkov zo starobného dôchodkového sporenia (z II. piliera) používame ročné pravdepodobnosti úmrtia odhadnuté na základe Leeovho-Carterovho modelu (ďalej len LC model) dlhovekosti, a nie statické pravdepodobnosti úmrtia od Štatistického úradu Slovenskej republiky.

LC model bol publikovaný v roku 1992 autormi Ronald D. Lee a Lawrence R. Carter v článku [4] a slúži predovšetkým na modelovanie dlhovekosti. Tento demografický model bol navrhnutý pre populáciu v USA, kde podľa článku [4] očakávaná dĺžka života novonarodenej osoby vzrástla od roku 1900 do roku 1988 z 47 na 75 rokov, a ak by pokračovala v takom prudkom raste, tak by v roku 2065 očakávaná budúca dĺžka života dosiahla 100 rokov, pričom inštitúcia Social Security Administration zabezpečujúca sociálne poistenie v USA predpovedala 80,5 rokov. Očakávanú budúcu dĺžku života 100 rokov samozrejme treba brať s rezervou.

Definícia 8. [4], [13] LC model je definovaný vzťahom:

$$m_{x,t} = \exp\left\{a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}\right\}, x \in \mathcal{X},\ t \in \mathcal{T},$$

kde $m_{x,t}$ je centrálna miera úmrtnosti osoby vo veku x v roku t, a_x a b_x sú vekovo špecifické parametre modelu, ktoré nezávisia od času, k_t je časovo sa meniaci index (nezávislý od veku) a $\varepsilon_{x,t}$ je náhodný šum (chybový člen) s nulovou strednou hodnotou a disperziou σ^2 pre $x \in \mathcal{X},\ t \in \mathcal{T}$, kde $\mathcal{X}$ je množina vekov a $\mathcal{T}$ je množina časov. Používa sa aj iný tvar LC modelu:

$$\ln\left(m_{x,t}\right) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}, x \in \mathcal{X},\ t \in \mathcal{T}.$$

Na pravej strane rovnice LC modelu sú len parametre, ktoré odhadujeme a neznámy index k_t, a nie regresory, preto sa model nedá odhadovať obyčajnou metódou najmenších štvorcov. V článku [4] aplikujú na maticu centrálnych mier úmrtnosti metódu singulárneho rozkladu. Ďalšie technické detaily sa nachádzajú v článku [4].

3.1 Metodika

Pri odhade parametrov LC modelu a predikovaní ročných pravdepodobností úmrtia vychádzame z Human Mortality Database (ďalej len HMD) [18], ktorá je spoločným projektom rôznych výskumných tímov. Táto databáza obsahuje úmrtnostné tabuľky a dáta potrebné na konštrukciu týchto tabuliek pre 38 štátov sveta, medzi nimi aj pre Slovensko. Odhad parametrov LC modelu a predikovanie budúcich mier úmrtnosti vykonáme v softvéri `R` [26] pomocou balíka `demography` [28]. Takými odhadmi sa zaoberá aj práca [2].

V prvom kroku potrebujeme stiahnuť úmrtnostnú tabuľku z HMD [18] a načítať do objektu `demogdata`. Na webovej stránke [18] sú dostupné dáta pre ženy, mužov a pre celkovú populáciu. My použijeme z dostupných dát ročnú centrálnu mieru úmrtnosti pre celkovú slovenskú populáciu pre veky $x \in \langle 62; 110 \rangle$ rokov z obdobia $1950 - 2014$. Po získaní dát nasleduje ich vyhladzovanie pomocou splajnu príkazom `smooth.demogdata`. Následne odhadneme parametre LC modelu (odhadneme dynamiku poklesu mier úmrtnosti) na základe vyhladzovaných dát z obdobia $1950 - 2014$ pomocou príkazu `lca`, t. j. vekovo špecifické parametre a_x a b_x a časovo sa meniaci index k_t. Po odhadnutí parametrov LC modelu vytvoríme predikciu budúcich logaritmických centrálnych mier úmrtia pre roky $2015 - 2063$ pomocou funkcie `forecast`, ktoré sme previedli na centrálne miery úmrtia. Centrálne miery úmrtia m_x prepočítame na ročné pravdepodobnosti úmrtia q_x. Podľa [13] pri prepočte používame približný vzťah $q_x \approx \frac{m_x}{1+0{,}5m_x}$ pre $x = 62, 63, \dots, 110$, ktorý platí za predpokladu rovnomerného rozloženia úmrtí v intervaloch $\langle x, x+1 \rangle$, $\forall x \in \{62, 63, \dots, 109\}$. Funkcia `forecast` zostrojí aj predikčný interval spoľahlivosti (90 %-ný, horný aj dolný) k budúcim logaritmickým centrálnym mieram úmrtia, ktoré tiež treba previesť na centrálne miery úmrtia a následne na ročné pravdepodobnosti úmrtia.

4 Základný model s konštantnou technickou úrokovou mierou

Tento základný model je pre nás východiskovým modelom, v ktorom naša modelová životná poisťovňa (ďalej len ŽP) predpokladá, že inkasované jednorazové poistné môže investovať pri konštantnej technickej úrokovej miere i počas celej doby investovania, t. j. výška i špecifikuje, aké zhodnotenie poistného očakáva naša ŽP. Bol publikovaný v práci [1]. V tejto diplomovej práci vykonáme niekoľko zmien a vylepšení tohto modelu v porovnaní s prácou [1].

Mesačnú výšku dôchodkovej dávky modelujeme pre dôchodcu vo veku x rokov (najmenší možný vstupný vek je 62 rokov), ktorý má v II. pilieri nasporených sumu P a predpokladáme, že sa môže dožiť maximálneho veku $\omega = 111$ rokov, teda ŽP vypláca dôchodok maximálne počas $(\omega - x)$ rokov (t. j. ak dôchodca požiada o vyplácanie doživotného dôchodku v najnižšom možnom veku, t. j. ako 62-ročný, v tom prípade naša ŽP predpokladá, že dôchodca bude poberať dávku maximálne počas $111 - 62 = 49$ rokov). Pri modelovaní výšky mesačnej dôchodkovej dávky berieme do úvahy § 32 odsek 2 zo zákona č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení [31], teda ak poberateľ doživotného dôchodku zomrie pred vyplatením prvých 84 mesačných dávok, pozostalí dostanú „sumu zodpovedajúcu rozdielu sumy určenej na výplatu týchto 84 mesačných súm doživotného dôchodku a súčtu vyplatených mesačných súm doživotného dôchodku“ (ďalej len 7-ročná garancia). Predpokladáme, že poisťovňa používa konštantnú technickú úrokovú mieru i. Ročné pravdepodobnosti úmrtia sú odhadnuté pomocou Leeovho-Carterovho modelu dlhovekosti pre dôchodcu vo veku $x \in \langle 62, 110 \rangle$, čiže poznáme pravdepodobnosť toho, že 62-ročná osoba sa nedožije ďalšieho roku (t. j. nedožije sa veku 63 rokov), 63-ročná osoba sa nedožije ďalšieho roku, atď. a 110-ročná osoba sa nedožije ďalšieho roku. Predpokladáme, že poisťovňa používa jednorazový fixný poplatok N, ktorý nezávisí od výšky nasporenej sumy v II. pilieri. Pri výpočte mesačnej dôchodkovej dávky berieme do úvahy nasledovné náklady: začiatočné náklady α vypočítame z prvej ročnej dôchodkovej dávky, administratívne (správne) náklady β sa počítajú z nevyplatenej časti rezerv. Nákladový koeficient δ používa naša modelová ŽP v prípade, ak dôchodca zomrie pred začiatkom vyplácania doživotného dôchodku. V takom prípade má ŽP povinnosť zo zákona [31] § 46g, odsek 5 vyplatiť celú nasporenú sumu P zníženú o oprávnené náklady vynaložené poisťovňou δ. Neberieme do úvahy § 42a zákona [31]: „Výnosy z umiestnenia prostriedkov technických rezerv, ktoré vzniknú v účtovnom období vyšším zhodnotením prostriedkov technických rezerv, ako sa pôvodne predpokladalo pri výpočte mesačnej sumy dôchodku (ďalej len „prebytok z výnosov“), sa rozdelí medzi poistených a poistiteľa pomerom dohodnutým v zmluve o poistení dôchodku, pričom časť prebytku z výnosov určená poisteným nesmie byť menej ako 90% z prebytku z výnosov.“

Poznámka. Pri riešení úloh o doživotných dôchodkoch bez zvyšovania a bez pozostalostných dôchodkov z II. piliera používame najnižší možný vstupný dôchodkový vek 62 *rokov. Podľa zákona sa však dôchodkový vek bude postupne zvyšovať. Dôchodkový vek na rok* 2017 *bol ustanovený opatrením Ministerstva práce, sociálnych vecí a rodiny Slovenskej republiky č.* 269/2016 *Z. z. na* 62 *rokov a* 76 *dní.* [29]

4.1 Peňažné toky poisťovne v jednotlivých mesiacoch

Peňažný tok (cash flow, CF) ŽP v čase $t = 0$ (0. mesiac) vyjadríme ako:

$$\widehat{CF}_0 = -P + 12\ \alpha\ S_m + N,$$

kde P označuje jednorazové poistné (nasporenú sumu na osobnom dôchodkovom účte), α vyjadruje počiatočné jednorazové náklady v percentách z prvej ročnej dôchodkovej dávky, S_m je mesačná výška dôchodkovej dávky a N je fixný poplatok, nezávislý od nasporenej sumy v II. pilieri.

Pre peňažný tok v prvom mesiaci môžeme písať:

$$\widehat{CF}_1 = S_m\ {}_{\frac{1}{12}}p_x\ v^{\frac{1}{12}} + P\ (1-\delta)\ {}_0p_x\ {}_{\frac{1}{12}}q_x\ v^{\frac{1}{12}} + \\ + S_m\ \beta\ v^{\frac{1}{12}}\ {}_{\frac{1}{12}}p_x\ \frac{1}{12} \sum_{j=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)-\frac{1}{12}} v^j\ {}_jp_{x+\frac{1}{12}},$$

kde x je vek dôchodcu v čase požiadania o vyplácanie dôchodku z II. piliera, ${}_{\frac{1}{12}}p_x$ vyjadruje pravdepodobnosť toho, že x-ročná osoba prežije jeden mesiac, v je diskontný faktor, kde $v = (1+i)^{-1}$ a ${}_{\frac{1}{12}}q_x$ vyjadruje pravdepodobnosť toho, že x-ročná osoba neprežije ďalší mesiac (t. j. jednu dvanástinu roka).

Prvý sčítanec vyjadruje, že mesačnú dôchodkovú dávku poisťovňa vyplatí dôchodcovi, ak sa dožil prvého mesiaca vyplácania dôchodku.

Druhý sčítanec vyjadruje prípad, ak dôchodca zomrie ešte pred začiatkom vyplácania doživotného dôchodku. Podľa zákona [31] § 46g, odseku 5 „ak poistník zomrel predo dňom vzniku povinnosti poistiteľa plniť zo zmluvy o poistení dôchodku“, tak pozostalí dostanú „sumu jednorazového poistného zaplateného na základe tejto zmluvy zníženú o sumu oprávnene vynaložených nákladov poistiteľa“:

$$A^{1\ (12)}_{x:\overline{(1/12)}|} = P\ (1-\delta)\ {}_0p_x\ {}_{\frac{1}{12}}q_x\ v^{\frac{1}{12}}, \tag{8}$$

pričom ${}_0p_x = 1$.

Peňažný tok v druhom mesiaci vyjadríme ako:

$$\begin{aligned}\widehat{CF}_2 = S_m\ {}_{\frac{2}{12}}p_x\ v^{\frac{2}{12}} + 83\ S_m\ {}_{\frac{1}{12}}p_x\ {}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{1}{12}}\ v^{\frac{2}{12}} + \\ + S_m\ \beta\ v^{\frac{2}{12}}\ {}_{\frac{2}{12}}p_x\ \frac{1}{12} \sum_{j=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)-\frac{2}{12}} v^j\ {}_jp_{x+\frac{2}{12}}.\end{aligned}$$

Peňažný tok v treťom mesiaci je:

$$\begin{aligned}\widehat{CF}_3 = S_m\ {}_{\frac{3}{12}}p_x\ v^{\frac{3}{12}} + 82\ S_m\ {}_{\frac{2}{12}}p_x\ {}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{2}{12}}\ v^{\frac{3}{12}} + \\ + S_m\ \beta\ v^{\frac{3}{12}}\ {}_{\frac{3}{12}}p_x\ \frac{1}{12} \sum_{j=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)-\frac{3}{12}} v^j\ {}_jp_{x+\frac{3}{12}}.\end{aligned}$$

$$\vdots$$

Peňažný tok v 84. mesiaci (posledný mesiac pred uplynutím 7-ročnej garancie) je:

$$\begin{aligned}\widehat{CF}_{84} = S_m\ {}_{\frac{84}{12}}p_x\ v^{\frac{84}{12}} + S_m\ {}_{\frac{83}{12}}p_x\ {}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{83}{12}}\ v^{\frac{84}{12}} + \\ + S_m\ \beta\ v^{\frac{84}{12}}\ {}_{\frac{84}{12}}p_x\ \frac{1}{12} \sum_{j=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)-\frac{84}{12}} v^j\ {}_jp_{x+\frac{84}{12}}.\end{aligned}$$

Druhý sčítanec vyjadruje výšku 7-ročnej garancie v jednotlivých mesiacoch. Podľa zákona [31] prípad, ak dôchodca zomrie ešte pred začiatkom vyplácania doživotného dôchodku, riešime osobitne (2. sčítanec pri odvodení peňažných tokov poisťovne v prvom mesiaci). Ak dôchodca zomrie v priebehu vyplácania dôchodku v prvých 7 rokoch, celkovú výšku 7-ročnej garancie odhadneme sčítaním 2. sčítanca v 2. až v 84. mesiaci: $S_m\ (MA)^1_{x:\overline{7}|}$, kde

$$(MA)^1_{x:\overline{7}|} = \sum_{t=\frac{1}{12}}^{7} (84 - 12\ t)\ v^{t+\frac{1}{12}}\ {}_tp_x\ {}_{\frac{1}{12}}q_{x+t}. \tag{9}$$

Druhý člen od $\widehat{CF}_{85}$ (vrátane) bude nulový, lebo po 84. mesiaci uplynula 7-ročná garancia, teda môžeme písať:

$$\widehat{CF}_{85} = S_m \ {}_{\frac{85}{12}}p_x \ v^{\frac{85}{12}} + S_m \ \beta \ v^{\frac{85}{12}} \ {}_{\frac{85}{12}}p_x \ \frac{1}{12} \sum_{j=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)-\frac{85}{12}} v^j \ {}_jp_{x+\frac{85}{12}}.$$

Tretí sčítanec vyjadruje súčasnú hodnotu správnych nákladov v jednotlivých mesiacoch. Symbolom $a^{(12)}_{x:\overline{(\omega-x)-t}|}$ označme:

$$a^{(12)}_{x:\overline{(\omega-x)-t}|} = \frac{1}{12} \sum_{j=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)-t} v^j \ {}_jp_{x+t}, \tag{10}$$

ktorý vyjadruje mesačnú výšku rezerv v čase t, pre $t = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, ..., \left(\omega - x - \frac{1}{12}\right)$ vytvorená poisťovňou pre svojho klienta, vo veku x, ktorému sa bude mesačne vyplácať $(\omega - x)$-ročný dôchodok.

$$\vdots$$

Peňažný tok poisťovne v predposlednom mesiaci vyplácania dôchodku je:

$$\begin{aligned}\widehat{CF}_{12\times\left(\omega-x-\frac{1}{12}\right)} &= S_m \ {}_{\left(\omega-x-\frac{1}{12}\right)}p_x \ v^{\left(\omega-x-\frac{1}{12}\right)} + \\ &+ S_m \ \beta \ v^{\left(\omega-x-\frac{1}{12}\right)} \ {}_{\left(\omega-x-\frac{1}{12}\right)}p_x \ \frac{1}{12} \sum_{j=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)-\left(\omega-x-\frac{1}{12}\right)} v^j \ {}_jp_{x+\left(\omega-x-\frac{1}{12}\right)}.\end{aligned}$$

Peňažný tok poisťovne v poslednom mesiaci vyplácania dôchodku môžeme písať v tvare:

$$\widehat{CF}_{12\times(\omega-x)} = S_m \ {}_{\omega-x}p_x \ v^{\omega-x}.$$

4.2 Výška úspor v starobnom dôchodkovom sporení

Uvažujme rovnicu ekvivalencie (t. j. rovnicu, v ktorej súčasná hodnota príjmov poisťovne sa rovná súčasnej hodnote výdavkov poisťovne), pričom berme do úvahy aj nákladové koeficienty používané pri brutto-princípe. Pravú stranu rovnice ekvivalencie počítajme podľa budúcich peňažných tokov, metódou odporúčanou v zdroji [15]:

$$0 = \sum_{i=0}^{12\times(\omega-x)} \widehat{CF}_i.$$

Dosadíme do $\widehat{CF}_0$:

$$0 = -P + 12 \ \alpha \ S_m + N + \sum_{i=1}^{12\times(\omega-x)} \widehat{CF}_i.$$

Vyjadríme P:

$$P = 12\ \alpha\ S_m + N + \sum_{i=1}^{12\times(\omega-x)} \widehat{CF}_i. \tag{11}$$

4.3 Odhad mesačnej výšky dôchodkovej dávky

Uvažujme predchádzajúcu konštrukciu a odvodenia. Dosadením do vzťahu (11) dostaneme:

$$\begin{aligned} P = {} & 12\ \alpha\ S_m + N + S_m \sum_{h=\frac{1}{12}}^{\omega-x} {}_hp_x\ v^h + P\ (1-\delta)\ {}_0p_x\ {}_{\frac{1}{12}}q_x\ v^{\frac{1}{12}} + \\ & + S_m\ (MA)^1_{x:\overline{7}|} + S_m \sum_{t=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)} \beta a^{(12)}_{x:\overline{(\omega-x)-t}|}\ v^t\ {}_tp_x. \end{aligned} \tag{12}$$

Z rovnice (12) vyjadríme mesačnú výšku dôchodkovej dávky:

$$S_m \approx \frac{1}{12} \times \frac{P\left(1-(1-\delta)v^{\frac{1}{12}}\ {}_0p_x\ {}_{\frac{1}{12}}q_x\right) - N}{\alpha + \sum\limits_{t=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)} \frac{1}{12}\ {}_tp_x\ v^t + \frac{1}{12}\ (MA)^1_{x:\overline{7}|} + \frac{1}{12} \sum\limits_{t=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)} \beta a^{(12)}_{x:\overline{(\omega-x)-t}|}\ v^t\ {}_tp_x}. \tag{13}$$

Symbolom ${}_{t|}a^{*(12)}_{x+t}$ označíme :

$${}_{t|}a^{*(12)}_{x+t} = \frac{1}{12}\ v^t\ {}_tp_x\ a^{(12)}_{x:\overline{(\omega-x)-t}|}. \tag{14}$$

Súčasnú hodnotu správnych nákladov v jednotlivých mesiacoch vypočítame nasledovne:

$$\beta\ S_m\ {}_{t|}a^{*(12)}_{x+t}, \tag{15}$$

kde $S_m\ {}_{t|}a^{*(12)}_{x+t}$ je súčasná hodnotá nevyplatenej časti mesačne vyplácaného dôchodku, t. j. správne náklady sa počítajú zo súčasnej hodnoty nevyplatenej časti mesačne vyplácaného dôchodku.

Poznámka. V niektorých zdrojoch (napr. [13]*) vo vzorci vystupuje ešte parameter γ. My používame vzorec bez γ (používaný napr. v práci* [1]*), lebo α a γ sa dajú spojiť v prípade, keď ide o jednorazovo platené poistné.*

5 Svenssonov model

Pri vypracovaní tejto časti vychádzame zo zdrojov [5], [11] a [13]. Svenssonov model (ďalej len SV model) patrí medzi modely výnosových a forwardových kriviek. Je zovšeobecnením Nelsonovho-Siegelovho modelu definovaného nižšie.

Definícia 9. [7], [13] Nech $\beta_{0t}, \beta_{1t}, \beta_{2t}, \lambda_t$ sú reálne parametre pre $t \in \langle 0; t_{max} \rangle$. **Nelsonova-Siegelova okamžitá forwardová krivka** v čase t je definovaná vzťahom

$$f_t(z) = \beta_{0t} + \beta_{1t} \exp\left(-\frac{z}{\lambda_t}\right) + \beta_{2t} \left(\frac{z}{\lambda_t}\right) \exp\left(-\frac{z}{\lambda_t}\right), \qquad z \in \langle 0; T_{max} \rangle.$$

Nelsonova-Siegelova výnosová krivka je definovaná predpisom

$$R_t(z) = \beta_{0t} + \beta_{1t} \frac{1 - \exp\left(-\frac{z}{\lambda_t}\right)}{\frac{z}{\lambda_t}} + \beta_{2t} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{z}{\lambda_t}\right)}{\frac{z}{\lambda_t}} - \exp\left(-\frac{z}{\lambda_t}\right)\right],$$

pre $z \in (0; T_{max}\rangle$, pričom $R_t(0) = f_t(0) = r_t = \beta_{0t} + \beta_{1t}$.

5.1 Svenssonova výnosová krivka

Svenssonova krivka je zovšeobecnením Nelson-Siegelovej krivky, viď nasledujúcu definíciu.

Definícia 10. [11], [13] Nech $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1, \tau_2$ sú reálne parametre pre $t \in \langle 0; t_{max} \rangle$. **Svenssonova výnosová krivka** je definovaná predpisom:

$$\begin{aligned} R_t(z) = \beta_{0t} + \beta_{1t} \frac{1 - \exp\left(-\frac{z}{\tau_{1t}}\right)}{\frac{z}{\tau_{1t}}} + \beta_{2t} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{z}{\tau_{1t}}\right)}{\frac{z}{\tau_{1t}}} - \exp\left(-\frac{z}{\tau_{1t}}\right)\right] + \\ + \beta_{3t} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{z}{\tau_{2t}}\right)}{\frac{z}{\tau_{2t}}} - \exp\left(-\frac{z}{\tau_{2t}}\right)\right], \quad z \in (0; T_{max}\rangle, \end{aligned}$$

pričom pre $z = 0$ hodnota $R_t(0)$ sa dodefinuje ako $R_t(0) = \beta_{0t} + \beta_{1t}$.

Definícia 11. Svenssonova výnosová krivka ak uvažujeme čas $t = 0$ je definovaná vzťahom:

$$\begin{aligned} R(z) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - \exp\left(-\frac{z}{\tau_1}\right)}{\frac{z}{\tau_1}} + \beta_2 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{z}{\tau_1}\right)}{\frac{z}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{z}{\tau_1}\right)\right] + \\ + \beta_3 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{z}{\tau_2}\right)}{\frac{z}{\tau_2}} - \exp\left(-\frac{z}{\tau_2}\right)\right], \quad z \in (0; T_{max}\rangle, \end{aligned}$$

kde $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1, \tau_2$ sú reálne parametre.

Pre **diskontné faktory (ceny bezkupónových diskontných dlhopisov)** platí vzťah [5]:

$$P(z) = \exp\left(-R(z) \times z\right),$$

kde $R(z)$ je ročný výnos dlhopisu.

5.2 Svenssonova forwardová krivka

Definícia 12. [11], [13] Nech $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1, \tau_2$ sú reálne parametre pre $t \in \langle 0; t_{max} \rangle$. **Svenssonova forwardová krivka** je definovaná vzťahom:

$$f_t(z) = \beta_{0t} + \beta_{1t} \exp\left(-\frac{z}{\tau_{1t}}\right) + \beta_{2t}\, \frac{z}{\tau_{1t}} \exp\left(-\frac{z}{\tau_{1t}}\right) + \beta_{3t}\, \frac{z}{\tau_{2t}} \exp\left(-\frac{z}{\tau_{2t}}\right),$$

pričom pre $z = 0$ hodnota $R_t(0)$ sa dodefinuje ako $R_t(0) = \beta_{0t} + \beta_{1t}$.

Definícia 13. Svenssonova forwardová krivka, ak uvažujeme čas $t = 0$, je definovaná predpisom:

$$f(z) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{z}{\tau_1}\right) + \beta_2\, \frac{z}{\tau_1} \exp\left(-\frac{z}{\tau_1}\right) + \beta_3\, \frac{z}{\tau_2} \exp\left(-\frac{z}{\tau_2}\right). \tag{16}$$

Pre **diskontné faktory (ceny dlhopisov)** platí vzťah [5]:

$$P(z) = \exp\left(-\int_0^z f(u)\mathrm{d}u\right). \tag{17}$$

Medzi okamžitou forwardovou úrokovou mierou $f(z)$ a spojitou úrokovou mierou $R(z)$ platí vzťah [5]:

$$f(z) = R(z) + z\frac{\partial R(z)}{\partial z}. \tag{18}$$

Opačný vzťah je [5]:

$$R(z) = \frac{1}{z}\int_0^z f(u)\mathrm{d}u. \tag{19}$$

Výhody a nevýhody SV modelu

Jedným z výhod SV modelu je, že poznáme priamu funkciu výnosovej a forwardovej krivky. Tento model používa v praxi Európska centrálna banka (ďalej len ECB), ktorá zozbiera dostupné výnosy vládnych dlhopisov krajín eurozóny a na základe nich odhadne parametre aktuálnej Svenssonovej krivky a publikuje ich na dennej báze (v pracovných dňoch). Zmyslom zverejneného SV modelu je interpolácia a extrapolácia výnosov bezkupónových dlhopisov (ďalej len ZCB). [16] Na druhej strane SV model má veľký počet neznámych parametrov, pričom neznáme parametre krivky sa obvykle odhadujú numericky.

Poznámka. V práci používame výnosovú krivku ECB, lebo poisťovne, ktoré vyplácajú dôchodky z úspor v II. pilieri, investujú inkasované poistné predovšetkým do takých dlhopisov, ktoré boli vydané štátmi eurozóny, resp. Európskej únie.

5.3 1. model

V tejto časti vychádzame z odvodenia Základného modelu s konštantnou technickou úrokovou mierou. Predpokladáme, že technická úroková miera i už nie je konštantná a jej hodnota sa riadi podľa Svenssonovej forwardovej krivky (t. j. časovú štruktúru úrokových mier odhadneme pomocou SV forwardovej krivky na základe vzorca (16)).

Peňažné toky poisťovne v jednotlivých mesiacoch

Peňažný tok (Cash flow, CF) poisťovne v čase $t = 0$ je:

$$\widehat{CF}_0 = -P + 12\ \alpha\ S_m + N.$$

Peňažný tok poisťovne v 1. mesiaci riešime osobitne kvôli zákonu [31] § 46g, odsek 5 a vyjadríme nasledovne:

$$\begin{aligned}\widehat{CF}_1 = S_m\ {}_{\frac{1}{12}}p_x\ \exp\left(-\int_0^{\frac{1}{12}} f(u)\mathrm{d}u\right) + \\ + P\ (1-\delta)\ {}_0p_x\ {}_{\frac{1}{12}}q_x\ \exp\left(-\int_0^{\frac{1}{12}} f(u)\mathrm{d}u\right) + \\ + S_m\ \beta\ \exp\left(-\int_0^{\frac{1}{12}} f(u)\mathrm{d}u\right)\ {}_{\frac{1}{12}}p_x\ \frac{1}{12}\sum_{j=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)-\frac{1}{12}} \exp\left(-\int_0^{j} f(u)\mathrm{d}u\right)\ {}_jp_{x+\frac{1}{12}}.\end{aligned}$$

Peňažné toky v 2. až 84. mesiaci sú:

$$\begin{aligned}\widehat{CF}_{12k} = S_m\ {}_kp_x\ \exp\left(-\int_0^{k} f(u)\mathrm{d}u\right) + \\ + (84 - 12\ (k-1))\ S_m\ {}_{k-\frac{1}{12}}p_x\ {}_{\frac{1}{12}}q_{x+k-\frac{1}{12}} \exp\left(-\int_0^{k} f(u)\mathrm{d}u\right) + \\ + S_m\ \beta\ \exp\left(-\int_0^{k} f(u)\mathrm{d}u\right)\ {}_kp_x\ \frac{1}{12}\sum_{j=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)-k} \exp\left(-\int_0^{j} f(u)\mathrm{d}u\right)\ {}_jp_{x+k},\end{aligned}$$

kde $k = \frac{2}{12}, ..., \frac{84}{12}$.

Ak dôchodca zomrie v priebehu vyplácania dôchodku v prvých 7 rokoch, celkovú výšku tzv. 7-ročnej garancie odhadneme sčítaním 2. sčítanca v 2. až v 84. mesiaci ako $S_m \times (MA)^{1}_{x:\overline{7}|}$, kde

$$(MA)^{1}_{x:\overline{7}|} = \sum_{t=\frac{1}{12}}^{7} (84 - 12\ t)\ \exp\left(-\int_0^{j+\frac{1}{12}} f(u)\mathrm{d}u\right)\ {}_tp_x\ {}_{\frac{1}{12}}q_{x+t}. \tag{20}$$

Druhý člen od $\widehat{CF}_{85}$ (vrátane) bude nulový, lebo po 84. mesiaci uplynula 7-ročná garancia. Peňažné toky v mesiacoch 85 až $12 \times \left(\omega - x - \frac{1}{12}\right)$:

$$\widehat{CF}_{12l} = S_m\ {}_lp_x\ \exp\left(-\int_0^l f(u)\mathrm{d}u\right) +$$
$$+ S_m\ \beta\ \exp\left(-\int_0^l f(u)\mathrm{d}u\right)\ {}_lp_x\ \frac{1}{12} \sum_{j=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)-l} \exp\left(-\int_0^j f(u)\mathrm{d}u\right)\ {}_jp_{x+l},$$

kde $l = \frac{85}{12}, ..., \left(\omega - x - \frac{1}{12}\right)$.

Tretí sčítanec vyjadruje súčasnú hodnotu správnych nákladov v jednotlivých mesiacoch. Symbolom $a^{(12)}_{x:\overline{(\omega-x)-t}|}$ označíme:

$$a^{(12)}_{x:\overline{(\omega-x)-t}|} = \frac{1}{12} \sum_{j=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)-t} \exp\left(-\int_0^j f(u)\mathrm{d}u\right)\ {}_jp_{x+t}. \tag{21}$$

Peňažný tok v poslednom mesiaci je:

$$\widehat{CF}_{12(\omega-x)} = S_m\ {}_{\omega-x}p_x\ \exp\left(-\int_0^{\omega-x} f(u)\mathrm{d}u\right).$$

Podľa rovnice ekvivalencie platí nasledovný vzťah:

$$P = 12\ \alpha\ S_m + N + \sum_{i=1}^{12\times(\omega-x)} \widehat{CF}_i. \tag{22}$$

Z rovnice (22) vyjadríme výšku mesačnej dôchodkovej dávky:

$$S_m \approx \frac{1}{12} \times \frac{P\left(1 - (1-\delta)v^{\frac{1}{12}}\ {}_0p_x\ {}_{\frac{1}{12}}q_x\right) - N}{\alpha + \sum_{t=\frac{1}{12}}^{\omega-x} \frac{1}{12}\ {}_tp_x\ \exp\left(-\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right)} +$$
$$+ \frac{1}{12} \times \frac{P\left(1 - (1-\delta)v^{\frac{1}{12}}\ {}_0p_x\ {}_{\frac{1}{12}}q_x\right) - N}{\frac{1}{12}\ (MA)^{1}_{x:\overline{7}|} + \sum_{t=\frac{1}{12}}^{\omega-x} \beta\ {}_{t|}a^{*(12)}_{x+t}}, \tag{23}$$

kde

$${}_{t|}a^{*(12)}_{x+t} = \frac{1}{12}\ \exp\left(-\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right)\ {}_tp_x\ a^{(12)}_{x:\overline{(\omega-x)-t}|}, \tag{24}$$

pre $t = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, ..., \left(\omega - x - \frac{1}{12}\right)$.

6 Smithov-Wilsonov model

Pri vypracovaní tejto časti vychádzame zo zdrojov [17] a [30]. Tento model publikovali A. Smith a T. Wilson v roku 2001 a slúži na interpoláciu a extrapoláciu neznámych výnosov dlhopisov. Pod interpoláciou rozumieme odhadovanie výnosu medzi známymi hodnotami podkladových výnosov. Extrapolácia pri tomto modeli znamená odhadovanie výnosov dlhopisov s dlhšou dobou splatnosti, akú má dlhopis s najdlhšou dobou splatnosti v podkladovom dátovom súbore.

Definícia 14. Smithov-Wilsonov model (ďalej len SW model) pre ceny dlhopisov je definovaný vzťahom:

$$P(z) = \mathrm{e}^{-z \times \mathrm{UFR}} + \sum_{j=1}^{N} \zeta_j \, W(z, T_j), \quad z \geq 0, \tag{25}$$

kde z je doba do maturity, N označuje počet štandardných dlhopisov s dobami splatnosti $T_1, T_2, \ldots, T_N$, UFR je tzv. spojitá nepodmienená forwardová úroková miera (ultimate forward rate) a ζ_j sú parametre SW modelu (pre $j = 1, 2, \ldots, N$). Wilsonova funkcia $W(z, T_j)$ je definovaná nasledovne:

$$\begin{aligned} W(z, T_j) &= \mathrm{e}^{-(z+T_j)\mathrm{UFR}} \times \\ &\quad \times \left[\alpha \min(z, T_j) - \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\alpha \max(z, T_j)} \left(\mathrm{e}^{\alpha \min(z, T_j)} - \mathrm{e}^{-\alpha \min(z, T_j)} \right) \right], \end{aligned}$$

kde α je tzv. mean-reversion parameter.

Definícia 15. Smithova-Wilsonova výnosová krivka je definovaná vzťahom:

$$R(z) = -\frac{\ln(P(z))}{z}.$$

Dosadením $P(z)$ dostaneme:

$$R(z) = -\frac{\ln \left(\mathrm{e}^{-z \times \mathrm{UFR}} + \sum_{j=1}^{N} \zeta_j \, W(z, T_j) \right)}{z}. \tag{26}$$

6.1 Odhad parametrov SW modelu

Odhad neznámych parametrov $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N$ dostaneme riešením tejto sústavy rovníc:

$$P_1 = P(T_1) = \mathrm{e}^{-T_1 \times \mathrm{UFR}} + \sum_{j=1}^{N} \zeta_j W(T_1, T_j)$$

$$P_2 = P(T_2) = \mathrm{e}^{-T_2 \times \mathrm{UFR}} + \sum_{j=1}^{N} \zeta_j W(T_2, T_j)$$

$$\ldots$$

$$P_N = P(T_N) = \mathrm{e}^{-T_N \times \mathrm{UFR}} + \sum_{j=1}^{N} \zeta_j W(T_N, T_j)$$

Poznámka. Táto sústava rovníc môže byť lineárne závislá pre niektoré vstupné dáta, preto táto metóda v niektorých prípadoch vyžaduje, aby užívateľ metódy odstránil tieto vstupné dáta. Táto situácia môže nastať v prípade, keď majú dva alebo viac vstupov rovnakú dobu splatnosti. Postup odhadovania parametrov SW krivky je citlivý na voľbu parametrov α a UFR *a na podkladové výnosy.* [30]

Výhody a nevýhody SW modelu

Odhad parametrov SW modelu dostaneme analytickým riešením vyššie uvedenej sústavy rovníc. Dostaneme skoro dokonalý fit a existuje veľká variabilita výnosových kriviek. Nevýhodami sú: náročnosť vhodnej voľby vstupných parametrov α a UFR a odhadnuté ceny štandardných dlhopisov môžu byť záporné.

Poznámka. Pre Eurozónu UFR = 4,2%, *čo je súčet očakávanej ročnej miery inflácie (2%) a očakávaného krátkodobého výnosu bezrizikových dlhopisov (2,2%).* [14]

Poznámka. Predpokladáme, že poisťovňa investuje inkasované poistné len do bezkupónových dlhopisov, nakoľko podľa teórie platí, že investíciu do kupónových dlhopisov je možné nahradiť vhodnou kombináciou investície do bezkupónových dlhopisov.

6.2 2. model

Pri odvodení 2. modelu vychádzame z odvodenia Základného modelu s konštantnou technickou úrokovou mierou a z odvodenia 1. modelu, v ktorom sa hodnota technickej úrokovej miery riadi podľa Svenssonovej forwardovej krivky (vzorec (16)). V tomto modeli sa hodnota technickej úrokovej miery riadi podľa SW výnosovej krivky (viď vzorec (26)).

Peňažné toky poisťovne v jednotlivých mesiacoch

Peňažné toky poisťovne v čase $t = 0$ (0. mesiac) sú:

$$\widehat{CF}_0 = \, - P + 12 \; \alpha \; S_m + N.$$

Peňažný tok v prvom mesiaci vyjadríme nasledovne:

$$\begin{aligned}\widehat{CF}_1 = & \; S_m \; {}_{\frac{1}{12}}p_x \; \exp\left(-\frac{1}{12} \; R\left(\frac{1}{12}\right)\right) + \\ & + P \; (1-\delta) \; {}_0p_x \; {}_{\frac{1}{12}}q_x \; \exp\left(-\frac{1}{12} \; R\left(\frac{1}{12}\right)\right) + \\ & + S_m \; \beta \; \exp\left(-\frac{1}{12} \; R\left(\frac{1}{12}\right)\right) \; {}_{\frac{1}{12}}p_x \; \frac{1}{12} \sum_{j=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)-\frac{1}{12}} \exp\left(-jR(j)\right) \; {}_jp_{x+\frac{1}{12}}.\end{aligned}$$

Peňažné toky v 2. až 84. mesiaci sú:

$$\begin{aligned}\widehat{CF}_{12k} = & \; S_m \; {}_kp_x \; \exp\left(-kR(k)\right) + \\ & + (84 - 12 \; k) \; S_m \; {}_{k-\frac{1}{12}}p_x \; {}_{\frac{1}{12}}q_{x+k-\frac{1}{12}} \exp\left(-kR(k)\right) + \\ & + S_m \; \beta \; \exp\left(-kR(k)\right) \; {}_kp_x \; \frac{1}{12} \sum_{j=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)-k} \exp\left(-jR(j)\right) \; {}_jp_{x+k},\end{aligned}$$

kde $k = \frac{2}{12}, ..., \frac{84}{12}$.

Ak dôchodca zomrie v priebehu vyplácania dôchodku v prvých 7 rokoch, celkovú výšku tzv. 7-ročnej garancie odhadneme sčítaním 2. sčítanca v 2. až v 84. mesiaci ako $S_m \times (MA)^1_{x:\overline{7}|}$, kde

$$(MA)^1_{x:\overline{7}|} = \sum_{t=\frac{1}{12}}^{7} (84 - 12t) \; \exp\left(-\left(t + \frac{1}{12}\right) \; R\left(t + \frac{1}{12}\right)\right) \; {}_tp_x \; {}_{\frac{1}{12}}q_{x+t}. \tag{27}$$

Peňažné toky v mesiacoch 85 až $12 \times \left(\omega - x - \frac{1}{12}\right)$ sú:

$$\begin{aligned}\widehat{CF}_{12l} = & \; S_m \; {}_lp_x \; \exp\left(-lR(l)\right) + \\ & + S_m \; \beta \; \exp\left(-lR(l)\right) \; {}_lp_x \; \frac{1}{12} \sum_{j=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)-l} \exp\left(-jR(j)\right) \; {}_jp_{x+l},\end{aligned}$$

kde $l = \frac{85}{12}, ..., \left(\omega - x - \frac{1}{12}\right)$.

Tretí sčítanec vyjadruje súčasnú hodnotu správnych nákladov v jednotlivých mesiacoch.

Symbolom $a^{(12)}_{x:\overline{(\omega-x)-t|}}$ tentokrát označíme:

$$a^{(12)}_{x:\overline{(\omega-x)-t|}} = \frac{1}{12} \sum_{j=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)-t} \exp\left(-jR(j)\right) \ {}_{j}p_{x+t}. \tag{28}$$

Peňažný tok v poslednom mesiaci je:

$$\widehat{CF}_{12(\omega-x)} = S_m \ {}_{\omega-x}p_x \ \exp\left(-(\omega-x)\ R(\omega-x)\right).$$

Podľa rovnice ekvivalencie platí nasledovný vzťah:

$$P = 12\ \alpha\ S_m + N + \sum_{i=1}^{12\times(\omega-x)} \widehat{CF}_i. \tag{29}$$

Z rovnice (29) vyjadríme mesačnú výšku dôchodkovej dávky:

$$S_m \approx \frac{1}{12} \times \frac{P\left(1-(1-\delta)\ \exp\left(-\frac{1}{12}\ R\left(\frac{1}{12}\right)\right)\ {}_{0}p_x\ {}_{\frac{1}{12}}q_x\right) - N}{\alpha + \sum_{t=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)} \frac{1}{12}\ {}_{t}p_x\ \exp\left(-tR(t)\right) + \frac{1}{12}\ (MA)^{1}_{x:\overline{7|}} + \sum_{t=\frac{1}{12}}^{(\omega-x)} \beta\ {}_{t|}a^{*(12)}_{x+t}}, \tag{30}$$

kde

$$ {}_{t|}a^{*(12)}_{x+t} = \frac{1}{12}\ \exp\left(-tR(t)\right)\ {}_{t}p_x\ a^{(12)}_{x:\overline{(\omega-x)-t|}} \tag{31}$$

vyjadruje výšku nevyplatenej časti dôchodku v čase t pre $t = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, ..., \left(\omega - x - \frac{1}{12}\right)$.

7 Programová implementácia

7.1 Programová implementácia Základného modelu

Pomocou vzorcov odvodených v kapitole 4 výpočet mesačnej dôchodkovej dávky implementujeme v softvéri `R` [26]. Veľký dôraz kladieme na časovú zložitosť funkcií, lebo je dôležité, aby naše programy bežali pomerne rýchlo. Zdrojové kódy, z ktorých vychádzame, sú naprogramované v softvéri `R` a nachádzajú sa v prílohách práce [1]. Nami vykonané modifikácie je možné nájsť v Prílohe A a v Prílohe B našej diplomovej práce.

Uvažujeme dôchodcu vo veku $x = 62$ rokov, ktorý z istej dôchodkovej správcovskej spoločnosti preniesol do našej modelovej životnej poisťovne (ďalej len ŽP) sumu $P = 10000$ EUR. Mesačnú výšku dôchodkovej dávky vypočítame pri rôznych úrovniach konštantnej technickej úrokovej miery: pri $i = 0{,}0\%$ p. a., $i = 0{,}7\%$ p. a. (viď. Opatrenie NBS z 1. decembra 2015 č. 25/2015 o maximálnej výške technickej úrokovej miery pre poisťovne, na ktoré sa uplatňuje osobitný režim [24]), $i = 1{,}2\%$ p. a., $i = 1{,}5\%$ p. a. a $i = 1{,}9\%$ p. a., pričom berieme do úvahy nasledovné nákladové koeficienty: $\alpha = 6\%$, $\beta = 0{,}2\%$ a $\delta = 5\%$. Konštantný poplatok, ktorý nezávisí od výšky nasporenej sumy v II. pilieri, stanovíme na $N = 50$ EUR. Následne definujeme vektor `qq`, ktorý obsahuje ročné pravdepodobnosti úmrtia pre dôchodcu vo veku $x \in \langle 0, 111\rangle$ rokov, pričom ročné pravdepodobnosti úmrtia vo veku $x \in \langle 62, 110\rangle$ rokov získame z Leeovho-Carterovho modelu (LC model) a ostatné pravdepodobnosti doplníme do vektora. Tento vektor má 112 prvkov: prvých 62 prvkov položíme rovné nule, pretože tie v našich výpočtoch nepoužívame, 63. prvok obsahuje ročnú pravdepodobnosť úmrtia pre dôchodcu vo veku 62 rokov, 64. prvok obsahuje ročnú pravdepodobnosť úmrtia pre dôchodcu vo veku 63 rokov, ..., 111. prvok obsahuje ročnú pravdepodobnosť úmrtia pre dôchodcu vo veku 110 rokov a posledný prvok vyjadruje pravdepodobnosť toho, že 111-ročná osoba zomrie v priebehu ďalšieho roka, pričom tá pravdepodobnosť je 1. Ak už poznáme vektor `qq`, môžeme vyjadriť aj vektor `pp`, ktorý má tiež 112 prvkov (prvých 62 prvkov sú jednotky, 63. prvok obsahuje ročnú pravdepodobnosť prežitia pre dôchodcu vo veku 62 rokov, atď. a posledný prvok je 0 (ročná pravdepodobnosť prežitia pre dôchodcu vo veku 111 rokov)).

Poznámka. Vstupný dôchodkový vek je možné zmeniť (parameter x). Takisto je možné zmeniť hodnotu parametrov P, i, α, β, δ a N.

Funkcia `davka(qq,fromAge,fromMonth,alfa,beta,P)` slúži na výpočet mesačnej výšky dôchodkovej dávky. [1] Vo funkcii `davka` sa zavolajú nasledovné pomocné funkcie:

- `balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,monthCount)`,
- `bald_q (l_q,fromAge,fromMonth,n)`,
- `lin_p(p)`,
- `lin_q(qq)`,
- `odurocitel(years)`,
- `axn_polehotny_b(pp,fromAge,fromMonth,n)`,
- `axn_beta(pp,qq,fromAge,fromMonth,beta)`,
- `MA1_xn(qq,fromAge,fromMonth,n)`.

Funkcie `balducci_p`, `bald_q`, `lin_p` a `lin_q` sa nachádzajú v Prílohe A. Funkcie `odurocitel`, `axn_polehotny_b`, `axn_beta`, `MA1_xn` a `davka` sa nachádzajú v Prílohe B.

Funkcia `balducci_p` vypočíta mesačné pravdepodobnosti prežitia na základe ročných pravdepodobností prežitia využitím Balducciho predpokladu (vzorec (2)). Vektor

$$\texttt{pp} = (1, 1, ..., 1, {}_1p_{62}, {}_1p_{63}, ..., {}_1p_{110}, 0)$$

obsahuje ročné pravdepodobnosti prežitia. Parameter `fromAge` je vstupný dôchodkový vek, `fromMonth` je číslo mesiaca, od ktorého sa začína vyplácanie dôchodkovej dávky z II. piliera a `monthCount` určuje počet mesiacov, počas ktorých poisťovňa bude vyplácať dôchodok.

V tejto praktickej časti práce uvažujeme vyplácanie dôchodkov počas $111 - 62 = 49$ rokov (588 mesiacov). Funkcia `balducci_p(pp,62,1,588)` nám dáva nasledovný vektor:

$$\left({}_{\frac{1}{12}}p_{62}, {}_{\frac{2}{12}}p_{62}, ..., {}_{\frac{576}{12}}p_{62}, ..., {}_{\frac{588}{12}}p_{62}\right).$$

Prvky tohto vektora môžeme vypočítať využitím Balducciho predpokladu nasledovným spôsobom:

$$\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{12}}p_{62} &= \frac{{}_1p_{62}}{1-(1-\frac{1}{12})\ {}_1q_{62}}, \\
&\vdots \qquad \vdots \\
{}_{\frac{12}{12}}p_{62} &= {}_1p_{62}, \\
{}_{\frac{13}{12}}p_{62} &= {}_1p_{62}\ {}_{\frac{1}{12}}p_{63} = {}_1p_{62}\ \frac{{}_1p_{63}}{1-(1-\frac{1}{12})\ {}_1q_{63}}, \\
{}_{\frac{14}{12}}p_{62} &= {}_1p_{62}\ {}_{\frac{2}{12}}p_{63} = {}_1p_{62}\ \frac{{}_1p_{63}}{1-(1-\frac{2}{12})\ {}_1q_{63}}, \\
&\vdots \qquad \vdots \\
{}_{\frac{24}{12}}p_{62} &= {}_2p_{62} = {}_1p_{62}\ {}_1p_{63}, \\
&\vdots \qquad \vdots \\
{}_{\frac{26}{12}}p_{62} &= {}_2p_{62}\ {}_{\frac{2}{12}}p_{64}, \\
&\vdots \qquad \vdots \\
{}_{\frac{588}{12}}p_{62} &= {}_{49}p_{62} = {}_1p_{62}\ {}_1p_{63}\ \cdots\ {}_1p_{110}.
\end{aligned}$$

Výstupom funkcie `lin_q(qq)` je 1332-prvkový vektor, kde prvých 732 prvkov sú nulových, 733. prvok vyjadruje pravdepodobnosť toho, že $61\frac{1}{12}$-ročná osoba neprežije ďalší rok, 734. prvok vyjadruje pravdepodobnosť toho, že $61\frac{2}{12}$-ročná osoba neprežije ďalší rok, atď., 744. prvok vyjadruje pravdepodobnosť toho, že 62-ročná osoba zomrie v priebehu ďalšieho roka, 745. prvok vyjadruje pravdepodobnosť toho, že $62\frac{1}{12}$-ročná osoba neprežije ďalší rok, atď. a posledný prvok vyjadruje pravdepodobnosť toho, že 111-ročná osoba sa nedožije ďalšieho roka. Výstup z funkcie `lin_q(qq)` teda môžeme zapísať v tvare:

$$\left(0, 0, ..., 0, {}_1q_{61+\frac{1}{12}}, ..., {}_1q_{62}, {}_1q_{62+\frac{1}{12}}, {}_1q_{62+\frac{2}{12}}, \dots, {}_1q_{110}, {}_1q_{110+\frac{1}{12}}, \dots, {}_1q_{110+\frac{11}{12}}, 1\right),$$

kde vstupný vektor `qq`, ktorý obsahuje ročné pravdepodobnosti úmrtia pre osoby vo veku $x \in \langle 0, 111\rangle$ rokov, má 112 prvkov. Aplikovaním Balducciho predpokladu na tento vektor v prostredí softvéra `R` pomocou funkcie `bald_q(lin_q(qq),62,1,7)` získame nasledovný vektor:

$$\left({}_{\frac{1}{12}}q_{62+\frac{1}{12}}, {}_{\frac{1}{12}}q_{62+\frac{2}{12}}, \dots, {}_{\frac{1}{12}}q_{62+\frac{84}{12}}\right).$$

Prvky tohto vektora môžeme vypočítať využitím Balducciho predpokladu nasledovne:

$$
\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{12}}q_{62+\frac{1}{12}} &= 1 - {}_{\frac{1}{12}}\, p_{62+\frac{1}{12}} = 1 - \frac{{}_1p_{62+\frac{1}{12}}}{1-\left(1-\frac{1}{12}\right)\ {}_1p_{62+\frac{1}{12}}},\\
{}_{\frac{1}{12}}q_{62+\frac{2}{12}} &= 1 - {}_{\frac{1}{12}}\, p_{62+\frac{2}{12}} = 1 - \frac{{}_1p_{62+\frac{2}{12}}}{1-\left(1-\frac{1}{12}\right)\ {}_1p_{62+\frac{2}{12}}},\\
&\vdots \qquad \vdots\\
{}_{\frac{1}{12}}q_{62+\frac{83}{12}} &= 1 - {}_{\frac{1}{12}}\, p_{62+\frac{83}{12}} = 1 - \frac{{}_1p_{62+\frac{83}{12}}}{1-\left(1-\frac{1}{12}\right)\ {}_1p_{62+\frac{83}{12}}},\\
{}_{\frac{1}{12}}q_{62+\frac{84}{12}} &= 1 - {}_{\frac{1}{12}}\, p_{62+\frac{84}{12}} = 1 - \frac{{}_1p_{62+\frac{84}{12}}}{1-\left(1-\frac{1}{12}\right)\ {}_1p_{62+\frac{84}{12}}}.
\end{aligned}
$$

Výstupom funkcie `lin_p(pp)` je 1332-prvkový vektor, kde prvých 732 prvkov sú jednotky, 733. prvok vyjadruje pravdepodobnosť toho, že $61\frac{1}{12}$-ročná osoba prežije ďalší rok, 734. prvok vyjadruje pravdepodobnosť toho, že $61\frac{2}{12}$-ročná osoba sa dožije ďalšieho roku, atď., 744. prvok vyjadruje pravdepodobnosť toho, že 62-ročná osoba sa dožije veku 63 rokov, 745. prvok vyjadruje pravdepodobnosť toho, že $62\frac{1}{12}$-ročná osoba prežije jeden rok, atď. a posledný prvok vyjadruje pravdepodobnosť toho, že 111-ročná osoba sa dožije ďalšieho roka. Výstup funkcie `lin_p(pp)` teda môžeme zapísať v tvare:

$$\Big(1, 1, ..., 1, {}_1p_{61+\frac{1}{12}}, ..., {}_1p_{62}, {}_1\, p_{62+\frac{1}{12}}, {}_1p_{62+\frac{2}{12}}, ..., {}_1p_{110}, {}_1p_{110+\frac{1}{12}}, ..., {}_1p_{110+\frac{11}{12}}, 0\Big),$$

kde vektor `pp`, ktorý obsahuje ročné pravdepodobnosti prežitia pre osoby vo veku $x \in \langle 0, 111\rangle$ rokov, má 112 prvkov.

Funkcia `odurocitel(49)` vypočíta diskontný faktor $v = \left(v^{\frac{1}{12}}, v^{\frac{1}{12}}, ..., v^{\frac{588}{12}}\right)$ v neceločíselných časoch (t. j. v našom prípade v jednotlivých mesiacoch).

Funkciu `MA1_xn` zmeníme na základe zákona č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení v porovnaní s prácou [1]. Táto funkcia vypočíta súčasnú hodnotu 7-ročnej garancie: $(MA)^1_{x:\overline{7}|}$ podľa vzorca (9), ale prípad, keď dôchodca zomrie ešte pred vyplatením prvej dávky (vzorec (8)) riešieme osobitne (tento prípad táto funkcia neobsahuje).

Pomocou funkcie `axn_beta(pp,qq,fromAge,fromMonth,beta)` prebieha výpočet výšky správnych nákladov z nevyplatenej časti dôchodku podľa vzorca (14) vynásobené s β. Vo funkcii `axn_beta` zavoláme funkciu `axn_polehotny_b`, ktorý vypočíta výšku technických rezerv podľa vzorca (10):

```
axn_polehotny_b <- function(pp,fromYear,fromMonth,n){
  lin_pp <- lin_p(pp)
  monthCount <- n * 12
  axnb <- rep(0, monthCount)
  for (j in 0:(n-1)) {
    for (i in 1:12) {
      bpp <- balducci_p(lin_pp[seq(i,(12*(length(pp)-1) +i),by = 12)],
      fromYear+j, i , monthCount-i-12*j+1)
      bpp <- bpp[1:(length(bpp)-1)]
      vp <- odurocitel((monthCount-i-12*j+1)/12)
      vp <- vp[1:(length(vp)-1)]
      axnb[12*j+i] <- 1/12 * sum(bpp * vp)
    }
  }
  return(axnb)
}
```

Príkazmi:

```
lin_pp <- lin_p(pp)
bpp <- balducci_p(lin_pp[seq(1,(12*(length(pp)-1) +1),by = 12)],
       62, 1 , 588-1-12*0+1)
bpp <- bpp[1:(length(bpp)-1)]
```

dostaneme nasledovný vektor:

$$\left({}_{\frac{1}{12}}p_{62+\frac{1}{12}},\ {}_{\frac{2}{12}}p_{62+\frac{1}{12}},\ \ldots,\ {}_{\frac{587}{12}}p_{62+\frac{1}{12}}\right).$$

Prvky tohto vektora vypočíta funkcia nasledovne:

$$\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{12}}p_{62+\frac{1}{12}} &= \frac{{}_1p_{62+\frac{1}{12}}}{1-\left(1-\frac{1}{12}\right)\ {}_1q_{62+\frac{1}{12}}}, \\
{}_{\frac{2}{12}}p_{62+\frac{1}{12}} &= \frac{{}_1p_{62+\frac{1}{12}}}{1-\left(1-\frac{2}{12}\right)\ {}_1q_{62+\frac{1}{12}}}, \\
&\ \,\vdots \qquad \vdots \\
{}_{\frac{13}{12}}p_{62+\frac{1}{12}} &= {}_1p_{62+\frac{1}{12}}\ {}_{\frac{1}{12}}p_{63+\frac{1}{12}} = {}_1p_{62+\frac{1}{12}}\ \frac{{}_1p_{63+\frac{1}{12}}}{1-\left(1-\frac{1}{12}\right)\ {}_1q_{63+\frac{1}{12}}}, \\
&\ \,\vdots \qquad \vdots \\
{}_{\frac{587}{12}}p_{62+\frac{1}{12}} &= {}_1p_{62+\frac{1}{12}}\ {}_1p_{63+\frac{1}{12}}\ \cdots\ {}_1p_{62+47+\frac{1}{12}}\ {}_{\frac{11}{12}}p_{62+48+\frac{1}{12}} = \\
&= {}_1p_{62+\frac{1}{12}}\ {}_1p_{63+\frac{1}{12}}\ \cdots\ {}_1p_{62+47+\frac{1}{12}}\ \frac{{}_1p_{110+\frac{1}{12}}}{1-\left(1-\frac{11}{12}\right)\ {}_1q_{110+\frac{1}{12}}}.
\end{aligned}$$

Príkazy:

```
vp <-odurocitel((monthCount-1-12*0+1)/12)
vp <- vp[1:(length(vp)-1)]
```

vyrobia vektor:

$$\left(v^{\frac{1}{12}}, v^{\frac{2}{12}}, ..., v^{\frac{587}{12}}\right).$$

Podľa vzorca (10) je potrebné vypočítať: `axnb[12*0+1] <- 1/12 * sum(bpp * vp)`.
Príkazmi:

```
lin_pp <- lin_p(pp)
bpp <-balducci_p(lin_pp[seq(2,(12*(length(pp)-1) +2),by = 12)],
62, 2 , 588-2-12*0+1)
bpp <- bpp[1:(length(bpp)-1)]
```

získame vektor:

$$\left({}_{\frac{1}{12}}p_{62+\frac{2}{12}}, {}_{\frac{2}{12}}p_{62+\frac{2}{12}}, \dots, {}_{\frac{586}{12}}p_{62+\frac{2}{12}}\right).$$

$$\vdots$$

Príkazmi:

```
lin_pp <- lin_p(pp)
bpp <-balducci_p(lin_pp[seq(11,(12*(length(pp)-1) +11),by = 12)],
62+48, 2 , 588-11-12*48+1)
bpp <- bpp[1:(length(bpp)-1)]
```

sa vypočíta posledná nenulová pravdepodobnosť: ${}_{\frac{1}{12}}p_{62+\frac{587}{12}}$.
Príkazmi:

```
lin_pp <- lin_p(pp)
bpp <-balducci_p(lin_pp[seq(12,(12*(length(pp)-1) +12),by = 12)],
62+48, 2 , 588-12-12*48+1)
bpp <- bpp[1:(length(bpp)-1)]
```

dostaneme nulu, čiže ŽP v poslednom mesiaci už nevytvára rezervy, teda aj správne náklady budú nulové.

Funkcie `odurocitel` a `axn_beta` nezmeníme v porovnaní s prácou [1]. Vo funkciách `balducci_p`, `bald_q`, `lin_p`, `lin_q`, vykonáme malé modifikácie v porovnaní s prácou [1], aby boli časovo efektívnejšie, aby výpočet prebiehal rýchlejšie. Vo funkcii `davka` používame iný vzorec pre výpočet dôchodkovej dávky v porovnaní s [1], ktorý sme odvodili v kapitole Základný model s konštantnou technickou úrokovou mierou (viď vzorec (13)).

7.1.1 Stresový scenár pre výkyvy úrokovej miery

Predpokladajme, že naša ŽP počíta mesačnú výšku dôchodkovej dávky podľa Základného modelu pri konštantnej technickej úrokovej miere $i = 1{,}5\%$ pre dôchodcu

Tabuľka 1: Mesačná výška dôchodkovej dávky bez zvyšovania a bez pozostalostných dôchodkov v eurách vypočítaná pomocou Základného modelu pre osobu vo veku 62 rokov, pri výške úspor 10000 EUR, pri rôznych konštantných technických úrokových mierach a pri LC modelu dlhovekosti (programový kód pre tento výpočet sa nachádza v Prílohe A, v Prílohe B a v Prílohe C)

Technická úroková miera	**Mesačná výška dôchodkovej dávky**
0,0%	38,9954
0,7%	42,4339
1,2%	44,9628
1,5%	46,5075
1,9%	48,5975

(Zdroj: vlastné spracovanie)

vo veku $x = 62$ rokov pri výške úspor $P = 10000$ EUR, pri parametroch $\alpha = 6\%$, $\beta = 0{,}2\%$, $\delta = 5\%$ a $N = 50$ EUR.

Vytvoríme stresový scenár, v ktorom skúmame vplyv zmeny parametra i na súčasnú hodnotu zisku resp. straty poisťovne, teda skúmame, aký by bol zisk resp. strata ŽP, ak by predpokladala, že jednorazovo platené poistné môže investovať pri technickej úrokovej miere $i = 1{,}5\%$, ale situácia na finančných trhoch sa vyvinie inak, ako sa predpokladalo a poistné investuje napr. len pri $i = 0{,}2\%$ p. a. Súčasnú hodnotu zisku resp. straty ŽP vypočítame ako `P - CFPV(qq,fromYear,fromMonth,alfa,beta,SM)`, kde `P` je výška úspor v starobnom dôchodkovom sporení. Získané výsledky následne zhrnieme v Tabuľke 2.

Poznámka. V Tabuľke 2 hodnoty so znamienkom mínus vyjadrujú stratu a hodnoty so znamienkom plus vyjadrujú zisk.

Tabuľka 2: Stresový scenár pre výkyvov úrokovej miery: mesačnú výšku dôchodkovej dávky vypočítame pri konštantnej technickej úrokovej miere $i = 1{,}5\%$ pre osobu vo veku 62 rokov pri výške úspor 10000 EUR a skúmame, aký bude zisk resp. strata poisťovne, ak by nasporené peniaze mohla investovať pri úrokových mierach 0,0%, 0,2%, 1,2% a 1,9% (programový kód pre tento výpočet sa nachádza v Prílohe A, v Prílohe B a v Prílohe C)

Technická úroková miera	**Súčasná hodnota zisku resp. straty poisťovne v eurách**
0,0%	$-1916{,}755$
0,2%	$-1628{,}784$
1,2%	$-341{,}837$
1,9%	$+427{,}923$

(Zdroj: vlastné spracovanie)

7.2 Programová implementácia 1. modelu

Pomocou vzorcov odvodených v piatej kapitole (v časti 1. model) výpočet mesačnej dôchodkovej dávky implementujeme v softvéri `R`. Uvažujeme dôchodcu vo veku $x = 62$ rokov, ktorý z II. piliera preniesol sumu $P = 10000$ EUR. Berieme do úvahy nasledovné nákladové koeficienty: $\alpha = 6\%$, $\beta = 0{,}2\%$ a $\delta = 5\%$. Konštantný poplatok, ktorý nezávisí od výšky nasporenej sumy v II. pilieri stanovíme na $N = 50$ EUR. Mesačnú výšku dôchodkovej dávky modelujeme pomocou úrokovej miery, ktorej hodnota sa riadi podľa Svenssonovej forwardovej krivky (SV forwardová krivka) pre AAA dlhopisy a následne Svenssonovej forwardovej krivky pre všetky dlhopisy eurozóny. Parametre Svenssonovej krivky β_0, β_1, β_2, β_3, τ_1 a τ_2 získame zo stránky [16], kde sú uverejnené dva vektory parametrov: prvý vektor parametrov pre AAA dlhopisy a druhý vektor parametrov pre všetky dlhopisy eurozóny (teda vrátane AAA dlhopisov).

Tabuľka 3: Parametre SV krivky: 3. apríl 2017

Parameter	**AAA dlhopisy**	**Všetky dlhopisy eurozóny**
β_0	1,684030	2,857127
β_1	$-2{,}433030$	$-3{,}425618$
β_2	11,698503	37,823036
β_3	$-16{,}206668$	$-42{,}957370$
τ_1	1,432278	1,534703
τ_2	1,650098	1,626469

(Zdroj: [16], vlastné spracovanie)

Dosadením týchto parametrov do SV forwardovej krivky dostaneme ročné forwardové hodnoty v percentách, preto SV model modifikujeme, aby sme dostali ročné forwardové hodnoty v desatinných číslach. V softvéri `R` naprogramujeme funkciu `SV.fz(z)` na základe vzorca (16).

```
SV.fz <- function(z)
{
  if(length(z)==1) {
    if(z==0) { (beta0 + beta1)/100 }
    else{
      (beta0 + beta1* exp(-z/tau1) + beta2* (z/tau1)*exp(-z/tau1) +
       beta3* (z/tau2)*exp(-z/tau2))/100
    }
  }
  else{
    (beta0 + beta1* exp(-z/tau1) + beta2* (z/tau1)*exp(-z/tau1) +
     beta3* (z/tau2)*exp(-z/tau2))/100
  }
}
```

Výpočet dôchodkovej dávky pomocou 1. modelu implementujeme v softvéri `R` na základe vzorca (23).

```
davka <- function(qq,fromAge,fromMonth,alfa,beta,P){
  pp <- as.vector(1 - qq)
  n <- length(qq) - fromAge - 1
  cc <- seq(from=1, to=12*n, by=1)
  z <- cc/12
  fP <- rep(0, times=12*n)
  for(j in 1:(12*n)) { fP[j] <- exp(-integrate(SV.fz,0,z[j])$value) }
  davkaS <- (1/12) * ( (P*(1-(1-delta)*
            exp(-integrate(SV.fz, 0, (1/12))$value)*
```

```
            (1-balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,n)[1]))-N) /
            (alfa + (1/12)* balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,n*12)
            %*% fP + axn_beta(pp, qq, fromAge, fromMonth, beta) +
            MA1_xn(qq, fromAge, fromMonth, 7)))
  return(davkaS)
}
```

Funkcie, ktoré zavoláme vo funkcii `davka`, sa nachádzajú v Prílohe A a v Prílohe D tejto práce.

Otázka času anuitizácie

Pod časom anuitizácie rozumie okamih, kedy budúci dôchodca požiada o vyplácanie dôchodku z II. piliera. Výška dôchodkovej dávky závisí od času anuitizácie.

1. model aplikovaný pre uplynulé dva roky

Vypočítame, aká by bola výška dôchodkovej dávky z II. piliera, ak by dôchodca požiadal o dôchodok v januári 2015, vo februári 2015, ... alebo v apríli 2017, vždy prvý pracovný deň v danom mesiaci. Najprv predpokladáme, že poisťovňa používa Svenssonovu forwardovú krivku pre AAA dlhopisy. Následne predpokladáme, že poisťovňa používa Svenssonovu forwardovú krivku pre všetky dlhopisy eurozóny.

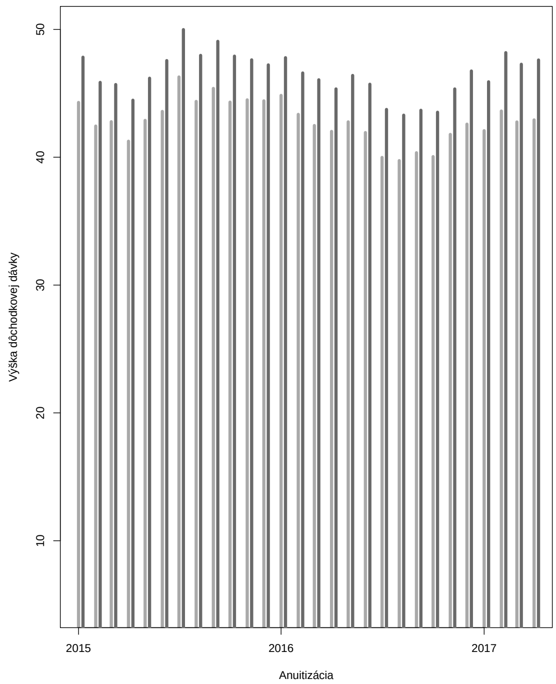
Tabuľka 4: Mesačná výška dôchodkovej dávky bez zvyšovania a bez pozostalostných dôchodkov v eurách vypočítaná pomocou 1. modelu pre osobu vo veku 62 rokov, pri výške úspor 10000 EUR, pri LC modelu dlhovekosti a pri rôznych SV krivkách (programový kód pre tento výpočet sa nachádza v Prílohe A, Prílohe D a Prílohe E)

Čas anuitizácie	**Dôchodková dávka pre AAA dlhopisy**	**Dôchodková dávka pre všetky dlhopisy eurozóny**
Január 2015	44,2846	47,8212
Február 2015	42,4361	45,8527
Marec 2015	42,7771	45,6848
Apríl 2015	41,2514	44,4590
Máj 2015	42,8803	46,1796
Jún 2015	43,5805	47,5586
Júl 2015	46,2777	49,9814
August 2015	44,3645	47,9653

September 2015	45,3805	49,0634
Október 2015	44,3079	47,9063
November 2015	44,4868	47,6167
December 2015	44,4099	47,2215
Január 2016	44,8341	47,7847
Február 2016	43,3511	46,5894
Marec 2016	42,4790	46,0564
Apríl 2016	42,0171	45,3418
Máj 2016	42,7660	46,3958
Jún 2016	41,9294	45,7087
Júl 2016	39,9830	43,7361
August 2016	39,7350	43,2880
September 2016	40,3499	43,6715
Október 2016	40,0475	43,5180
November 2016	41,7833	45,3399
December 2016	42,5859	46,7451
Január 2017	42,0765	45,8995
Február 2017	43,6121	48,1798
Marec 2017	42,7574	47,2714
Apríl 2017	42,9190	47,6049

(Zdroj: vlastné spracovanie)

V Tabuľke 4 v druhom stĺpci sa nachádzajú dávky vypočítané pomocou 1. modelu, v ktorom výška technickej úrokovej miery sa riadi SV forwardovou krivkou pre AAA dlhopisy a v treťom stĺpci nájdeme dávky vypočítané pomocou 1. modelu, kde výška technickej úrokovej miery sa riadi SV forwardovou krivkou pre všetky dlhopisy eurozóny. Výsledky potvrdili, ako veľmi závisí výška mesačnej dôchodkovej dávky od času anuitizácie: naša ŽP by garantovala najvyššiu dávku pri AAA dlhopisoch v júli 2015 (46,2777 EUR) a najnižšiu v auguste 2016 (39,7350 EUR), čiže by vznikli aj vyše 6 eurové rozdiely. Najvyššia dávka pri všetkých dlhopisoch eurozóny je garantovaná v júli 2015 (49,9814 EUR) a najnižšia v auguste 2016 (43,2880 EUR).



Obr. 1: Výšky dávok v uplynulých dvoch rokoch

(Zdroj: vlastné spracovanie)

Na Obr. 1 svetlosivou farbou je znázornený histogram pre dôchodkové dávky z prvého stĺpca z Tabuľky 4 a tmavosivou je znázornený histogram pre dôchodkové dávky z druhého stĺpca.

Vyplácanie dôchodkov od roku 2006 na základe 1. modelu

Vypočítame, aká by bola výška dôchodkovej dávky zo starobného dôchodkového sporenia, ak by vyplácanie dôchodkových dávok z II. piliera sa začalo už v januári 2006, teda dôchodca by požiadal o dôchodok v januári 2006, v januári 2007, ... alebo v januári 2017, vždy prvý pracovný deň v danom roku. Predpokladáme, že poisťovňa používa Svenssonovu forwardovú krivku pre AAA dlhopisy. Následne predpokladáme, že poisťovňa používa Svenssonovu forwardovú krivku pre všetky dlhopisy eurozóny.

Tabuľka 5: Mesačné výšky dôchodkových dávok bez zvyšovania a bez pozostalostných dôchodkov v eurách vypočítané na základe 1. modelu pre osobu vo veku 62 rokov pri výške úspor 10000 EUR a pri rôznych SV krivkách (programový kód pre tento výpočet sa nachádza v Prílohe A, v Prílohe D a v Prílohe E)

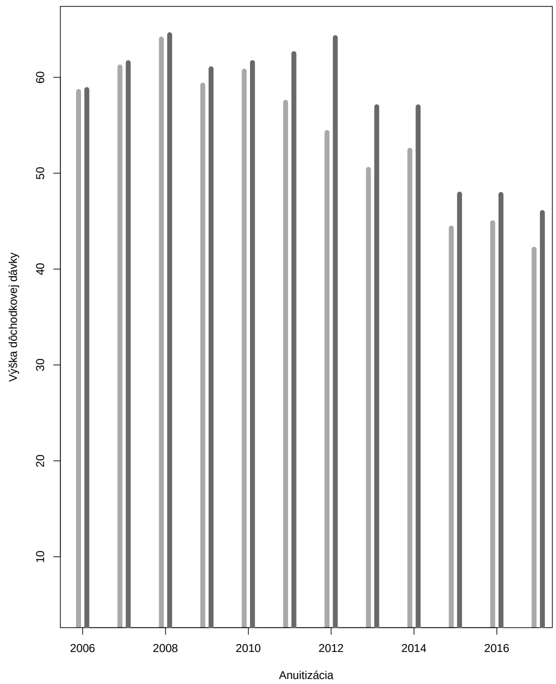
Čas anuitizácie	Dôchodková dávka pri AAA dlhopisoch	Dôchodková dávka pri všetkých dlhopisoch eurozóny
Január 2006	58,5214	58,7256
Január 2007	61,0786	61,5304
Január 2008	63,9955	64,4463
Január 2009	59,1887	60,8911
Január 2010	60,6506	61,5372
Január 2011	57,3999	62,4721
Január 2012	54,2518	64,1401
Január 2013	50,4084	56,9313
Január 2014	52,3960	56,9198
Január 2015	44,2846	47,8212
Január 2016	44,8341	47,7847
Január 2017	42,0765	45,8995

(Zdroj: vlastné spracovanie)

V Tabuľke 5 v druhom stĺpci sa nachádzajú dávky vypočítané pomocou 1. modelu, v ktorom výška technickej úrokovej miery sa riadi SV forwardovou krivkou pre AAA dlhopisy a v treťom stĺpci sú dávky vypočítané pomocou 1. modelu, kde výška technickej úrokovej miery sa riadi SV forwardovou krivkou pre všetky dlhopisy eurozóny. Naša ŽP by garantovala najvyššiu dávku pri AAA dlhopisoch v januári 2008 (63,9955 EUR) a najnižšiu v januári 2017 (42,0765 EUR), čiže by vznikli aj vyše 20 eurové rozdiely. Najvyššia dávka pri všetkých dlhopisoch eurozóny je garantovaná v januári 2008 (64,4463 EUR) a najnižšia v januári 2017 (45,8995 EUR).

Na Obr. 2 svetlosivou farbou je znázornený histogram pre dôchodkové dávky z prvého stĺpca z Tabuľky 5 a tmavosivou je znázornený histogram pre dôchodkové dávky z druhého stĺpca.

Poznámka. Chceli by sme zdôrazniť, že výšky mesačných doživotných dôchodkových dávok bez zvyšovania a bez pozostalostných dôchodkov sú len ilustračné. Výšky mesačných doživotných dôchodkových dávok veľmi závisia od voľby nákladových koeficientov α, β a δ, fixného poplatku N a tiež závisia od používanej forwardovej krivky. V prípade,



Obr. 2: 1. model aplikovaný od roku 2006

(Zdroj: vlastné spracovanie)

že hodnota technickej úrokovej miery by sa riadila Svenssonovou výnosovou krivkou, dostali by sme rovnaké výsledky na základe vzťahov (18) *a* (19).

7.2.1 Stresový scenár

Na základe Základného modelu vypočítame mesačnú výšku dôchodkovej dávky pri konštantnej technickej úrokovej miere. Následne vypočítame zisk resp. stratu ŽP, ak by ponúkala dôchodkovú dávku vypočítanú pri konštantnej technickej úrokovej miere, ale v skutočnosti hodnota technickej úrokovej miery sa riadila SV forwardovou krivkou. Pri tomto stresovom scenári používame parametre Svenssonovej krivky zo dňa 3.4.2017, ktoré získame zo stránky [16].

Súčasnú hodnotu peňažných tokov poisťovne, ktorá pri výpočte dôchodkových dávok používa 1. model vypočítame pomocou nasledovnej funkcie, ktorá je implementovaná v softvéri `R`:

```
CFPV <- function(qq,fromAge,fromMonth,alfa,beta,SM){
```

```
  pp <- as.vector(1 - qq)
  n <- length(qq) - fromAge - 1
  S_r <- 12 * SM
  cc <- seq(from=1, to=12*n, by=1)
  z <- cc/12
  fP <- rep(0, times=12*n)
  for(j in 1:(12*n)) { fP[j] <- exp(-integrate(SV.fz,0,z[j])$value) }
  CFPV <- (S_r * (1/12)* balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,n*12) %*% fP +
           S_r * alfa + S_r * axn_beta(pp,qq,fromAge,fromMonth,beta) +
           S_r * MA1_xn(qq,fromAge,fromMonth,7) + N)/(1-(1-delta)*
           exp(-integrate(SV.fz, 0, (1/12))$value)*
           (1-balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,n)[1]))
  return(CFPV)
}
```

Súčasnú hodnotu zisku resp. straty poisťovne vypočítame ako:

`P - CFPV(qq,fromAge=x,1,alfa,beta,SM)`, kde `P` je výška úspor v starobnom dôchodkovom pilieri.

Tabuľka 6: Stresový scenár pre úrokovú mieru: mesačnú výšku dôchodkovej dávky vypočítame pomocou Základného modelu pre osobu vo veku 62 rokov pri výške úspor 10000 EUR a skúmame, aký bude zisk resp. strata poisťovne, ak by hodnota technickej úrokovej miery sa riadila SV forwardovou krivkou pre AAA dlhopisy (programový kód pre tento výpočet sa nachádza v Prílohe A, v Prílohe D a v Prílohe F)

Technická úroková miera	**Dávka pomocou základného modelu**	**Zisk resp. strata ŽP**
0,7%	42,4339	+112,4502
1,2%	44,9628	−473,8108
1,5%	46,5075	−831,9270
1,9%	48,5975	−1316,4680

(Zdroj: vlastné spracovanie)

V Tabuľke 6 druhý stĺpec obsahuje mesačnú výšku dôchodkovej dávky v eurách pre osobu vo veku 62 rokov, pri výške úspor 10000 EUR vypočítané pomocou Základného modelu pri rôznych úrovniach technickej úrokovej miery. V treťom stĺpci sa nachádza zisk resp. strata poisťovne v prípade garantovania dôchodku z druhého stĺpca a zhodnotení úspor na základe 1. modelu, v ktorom hodnota technickej úrokovej miery sa riadi SV forwardovou krivkou pre AAA dlhopisy.

Poznámka. *V Tabuľke 6 hodnoty so znamienkom mínus vyjadrujú stratu a hodnoty so znamienkom plus vyjadrujú zisk.*

7.3 Programová implementácia 2. modelu

V tejto časti práce 2. model nastavíme pre slovenské podmienky, čiže predpokladáme, že ŽP môžu investovať inkasované poistné iba do slovenských vládnych dlhopisov. Používame výnosy do splatnosti 2, 5 a 10-ročných vládnych dlhopisov, ktoré získame z webovej stránky NBS [23]. Uvažujeme dôchodcu vo veku $x = 62$ rokov, ktorý z II. piliera preniesol sumu $P = 10000$ EUR. Berieme do úvahy nasledovné nákladové koeficienty: $\alpha = 6\%$, $\beta = 0{,}2\%$ a $\delta = 5\%$. Konštantný poplatok, ktorý nezávisí od výšky nasporenej sumy v II. pilieri, stanovíme na $N = 50$ EUR.

V softvéri `R` používame knižnicu `SmithWilsonYieldCurve` [25]. Potrebujeme vytvoriť vektor maturít `zz` a vektor výnosov do splatnosti vládnych dlhopisov (VDSVD) `vynosy`. Následne vytvoríme objekt podkladových aktív (investičných nástrojov) pomocou príkazu:

`dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR",times=length(zz)),Tenor=zz,Rate =vynosy)`, kde `Type="LIBOR"` znamená, že podkladové aktívum je buď krátkodobá medzibanková úrokovová miera (typu LIBOR, EURIBOR, atď.), alebo výnos štandardného bezkupónového dlhopisu (Zero-Coupon Bond, ZCB). Parameter `Tenor` obsahuje maturity (prípadne doby do maturity). Parameter `Rate` obsahuje ročné výnosy ZCB. V našom prípade tento objekt sa skladá z 3 podkladových aktív: z 2, 5 a 10-ročného slovenského vládneho dlhopisu. Parametre SW modelu ζ_1, ζ_2, ζ_3 a cenu dlhopisov v jednotlivých časoch získame nasledujúcim príkazom:

`fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,ufr=UFR,alpha=0.35)`.

Časovú štruktúru úrokových mier vypočítame pomocou funkcie `SW.Rz(z)`:

`SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }`.

Za odhad UFR zoberieme hodnotu $\frac{\beta_0}{100}$, kde β_0 je hodnota, ku ktorému SV krivka konverguje (limitný výnos pri SV krivke v percentách, viď v podkapitolách 5.2 a 7.2). Parameter α vyjadruje rýchlosť konvergencie SW výnosovej krivky k limitnému výnosu UFR.

Funkcia pre výpočet dôchodkovej dávky v softvéri `R` na základe vzorca (30):

```
davka <- function(qq,fromAge,fromMonth,alfa,beta,P){
  pp <- as.vector(1 - qq)
  n <- length(qq) - fromAge - 1
  cc <- seq(from=1, to=12*n, by=1)
  z <- cc/12
  davkaS <- (1/12) * ( (P*(1-(1-delta)*
            exp(-(1/12)*SW.Rz(1/12))*
            (1-balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,n)[1]))-N) /
            (alfa + (1/12)*sum(balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,n*12)*
            exp(-z*SW.Rz(z))) +
            axn_beta(pp, qq, fromAge, fromMonth, beta) +
            MA1_xn(qq, fromAge, fromMonth, 7)))
  return(davkaS)
}
```

Funkcie, ktoré zavoláme vo funkcii `davka`, sa nachádzajú v Prílohe A a v Prílohe G.

Určenie kvality odhadnutej SW krivky

Kvalitu odhadnutého SW modelu (odhadnutej SW krivky) nestačí posudzovať vizuálne, je potrebné nájsť aj matematický spôsob. Rozhodli sme sa pre pseudo-koeficient determinácie [10]:

$$R_c^2 = \frac{[\mathrm{cov}(Y,F)]^2}{\mathrm{var}(Y)\ \mathrm{var}(F)} = [\mathrm{cor}(Y,F)]^2, \tag{32}$$

kde $\mathrm{cov}(Y,F)$ je kovariancia medzi vektormi Y a F, pričom vektor Y obsahuje skutočné výnosy vládnych dlhopisov a vektor F obsahuje odhadnuté výnosy týchto dlhopisov pomocou SW modelu, $\mathrm{var}(Y)$ a $\mathrm{var}(F)$ sú disperzie týchto vektorov a $\mathrm{cor}(Y,F)$ je korelácia medzi vektormi Y a F. Odhadnutý model je tým kvalitnejší, čím je hodnota R_c^2 bližšie k hodnote 1.

Kvalitu nami odhadnutej SW krivky (t. j. kvalitu fitu: odhadnutá SW krivka ako dobre zachytáva pôvodné výnosy) meriame ako druhá mocnina korelácie medzi skutočnými výnosmi 2, 5 a 10-ročných vládnych dlhopisov a odhadnutými výnosmi týchto dlhopisov pomocou SW modelu na základe vzorca (32).

2. model aplikovaný pre uplynulé dva roky

Vypočítame, aká by bola výška dôchodkovej dávky z II. piliera, ak by dôchodca požiadal o dôchodok v januári 2015, vo februári 2015, ... alebo v marci 2017, vždy prvý pracovný deň v danom mesiaci. Predpokladáme, že poisťovňa používa SW výnosovú krivku. Za odhad spojitej nepodmienenej forwardovej úrokovej miery zoberieme UFR = 0,042, odporúčanú v zdroji [17]. Následne UFR odhadneme ako $\frac{\beta_0}{100}$, kde β_0 je jedným z parametrov SV krivky, ku ktorému SV krivka konverguje.

Tabuľka 7: Mesačná výška dôchodkovej dávky bez zvyšovania a bez pozostalostných dôchodkov v eurách vypočítaná pomocou 2. modelu pre osobu vo veku 62 rokov, pri výške úspor 10000 EUR, pri spojitej nepodmienenej forwardovej úrokovej miere UFR = 0,042 a pri mean-reversion parametri $\alpha = 0{,}3$ (programový kód pre tento výpočet sa nachádza v Prílohe A, v Prílohe G a v Prílohe H)

Čas anuitizácie	$\boldsymbol{\zeta_1}$	$\boldsymbol{\zeta_2}$	$\boldsymbol{\zeta_3}$	$\boldsymbol{R_c^2}$	**Dôchodková dávka**
Január 2015	0,4104	−0,2859	0,2688	0,9995	48,7992
Február 2015	0,8774	−0,7292	0,4709	0,9999	47,2398
Marec 2015	0,6769	−0,5508	0,4213	0,9999	46,7372
Apríl 2015	0,5290	−0,2507	0,2237	0,9997	48,1258
Máj 2015	0,7208	−0,3947	0,2651	0,9998	47,9423
Jún 2015	0,6453	−0,2187	0,1558	0,9996	48,6258
Júl 2015	0,7416	−0,2245	0,1259	0,9996	48,8726
August 2015	0,9552	−0,4231	0,2112	0,9997	47,9694
September 2015	1,1530	−0,5565	0,2495	0,9998	47,5644
Október 2015	1,3850	−0,7252	0,3057	0,9998	47,0257
November 2015	−0,3739	0,3844	0,1081	1,0000	47,5211
December 2015	−0,3799	0,4195	0,0877	1,0000	47,5251
Január 2016	−0,3738	0,4395	0,0750	1,0000	47,4607
Február 2016	−0,3340	0,3838	0,1119	1,0000	46,9380
Marec 2016	−0,2816	0,3259	0,1455	1,0000	46,4727
Apríl 2016	−0,2704	0,3341	0,1426	1,0000	46,2711
Máj 2016	−0,2766	0,3834	0,1113	1,0000	46,3362
Jún 2016	−0,3974	0,6437	−0,0419	1,0000	47,4841
Júl 2016	−0,2993	0,5067	0,0364	1,0000	46,5238
August 2016	−0,2216	0,4149	0,0886	0,9999	45,8514
September 2016	−0,2265	0,4741	0,0528	0,9999	45,8716
Október 2016	−0,2489	0,5759	−0,0102	0,9999	46,1551

November 2016	−0,3372	0,8080	−0,1432	1,0000	47,0816
December 2016	−0,4229	1,0356	−0,2637	1,0000	47,9540
Január 2017	−0,4130	1,1003	−0,2999	1,0000	47,9497
Február 2017	−0,4108	1,1826	−0,3451	1,0000	48,0730
Marec 2017	−0,3721	1,2290	−0,3763	1,0000	47,9902

(Zdroj: vlastné spracovanie)

V Tabuľke 7 v druhom, treťom a štvrtom stĺpci sa nachádzajú odhadnuté parametre SW modelu: ζ_1, ζ_2 a ζ_3. V piatom stĺpci sa nachádza pseudo-koeficient determinácie R_c^2. Naša ŽP by garantovala najvyššiu dávku pri UFR = 0,042 v júli 2015 (48,8726 EUR) a najnižšiu v auguste 2016 (45,8514 EUR), čiže môžu vznikať aj zhruba 3 eurové rozdiely.

Tabuľka 8: Mesačná výška dôchodkovej dávky bez zvyšovania a bez pozostalostných dôchodkov v eurách vypočítaná pomocou 2. modelu pre osobu vo veku 62 rokov, pri výške úspor 10000 EUR, pri rôznych hodnotách UFR a pri mean-reversion parametri $\alpha = 0{,}3$ (programový kód pre tento výpočet sa nachádza v Prílohe A, v Prílohe G a v Prílohe H)

Čas anuitizácie	**UFR**	$\boldsymbol{\zeta_1}$	$\boldsymbol{\zeta_2}$	$\boldsymbol{\zeta_3}$	$\boldsymbol{R_c^2}$	**Dôch. dávka**
Január 2015	0,0303	0,3970	−0,1937	0,1208	0,9995	47,2088
Február 2015	0,0229	0,8010	−0,5097	0,1908	0,9999	44,5430
Marec 2015	0,0230	0,6282	−0,3583	0,1490	0,9999	44,0963
Apríl 2015	0,0179	0,5127	−0,1137	−0,0163	0,9997	44,8155
Máj 2015	0,0230	0,6919	−0,2544	0,0486	0,9998	45,3558
Jún 2015	0,0241	0,6399	−0,1257	−0,0177	0,9996	46,2399
Júl 2015	0,0237	0,7363	−0,1383	−0,0389	0,9996	46,4513
August 2015	0,0206	0,9228	−0,2851	−0,0033	0,9997	45,0922
September 2015	0,0222	1,1081	−0,4039	0,0331	0,9998	44,9064
Október 2015	0,0252	1,3306	−0,5650	0,0970	0,9998	44,7886
November 2015	0,0281	−0,3237	0,4190	−0,0427	1,0000	45,7153
December 2015	0,0291	−0,3293	0,4471	−0,0510	1,0000	45,8554
Január 2016	0,0294	−0,3221	0,4633	−0,0587	1,0000	45,8425

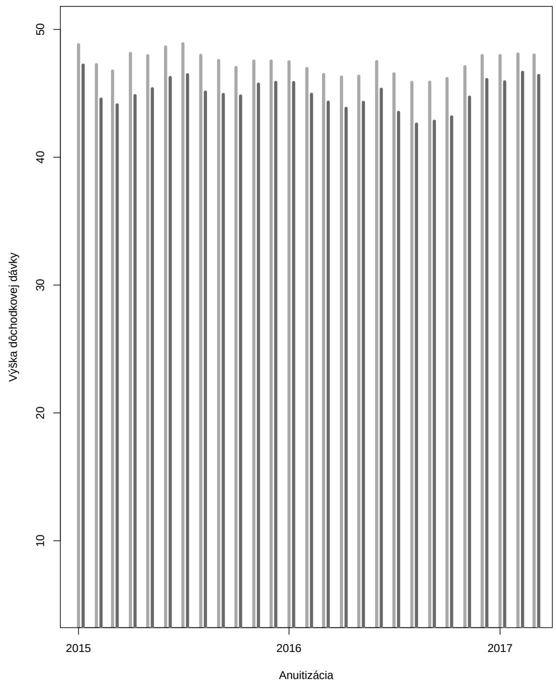
Február 2016	0,0265	−0,2756	0,4205	−0,0571	1,0000	44,9237
Marec 2016	0,0253	−0,2240	0,3755	−0,0441	1,0000	44,3035
Apríl 2016	0,0233	−0,2041	0,3840	−0,0641	1,0000	43,8262
Máj 2016	0,0261	−0,2135	0,4199	−0,0647	1,0000	44,2925
Jún 2016	0,0248	−0,3020	0,6216	−0,1792	1,0000	45,3149
Júl 2016	0,0186	−0,1909	0,5054	−0,1630	1,0000	43,5072
August 2016	0,0169	−0,1173	0,4372	−0,1439	0,9999	42,5893
September 2016	0,0182	−0,1164	0,4797	−0,1603	0,9999	42,8150
Október 2016	0,0183	−0,1237	0,5498	−0,1981	0,9999	43,1549
November 2016	0,0225	−0,2034	0,7332	−0,2644	1,0000	44,7025
December 2016	0,0261	−0,2880	0,9290	−0,3357	1,0000	46,0762
Január 2017	0,0244	−0,2569	0,9648	−0,3657	1,0000	45,8959
Február 2017	0,0294	−0,2878	1,0729	−0,3905	1,0000	46,6419
Marec 2017	0,0278	−0,2291	1,0931	−0,4177	1,0000	46,3945

(Zdroj: vlastné spracovanie)

V Tabuľke 8 v druhom stĺpci sa nachádza hodnota spojitej nepodmienenej forwardovej úrokovej miery UFR, treťom, štvrtom a piatom stĺpci sa nachádzajú odhadnuté parametre SW modelu: ζ_1, ζ_2 a ζ_3. V šiestom stĺpci sa nachádza pseudo-koeficient determinácie R_c^2. Naša ŽP by garantovala najvyššiu dávku pri rôznych UFR v januári 2015 (47,2088 EUR) a najnižšiu v auguste 2016 (42,5893 EUR), čiže môžu vznikať vyše 4 eurové rozdiely.

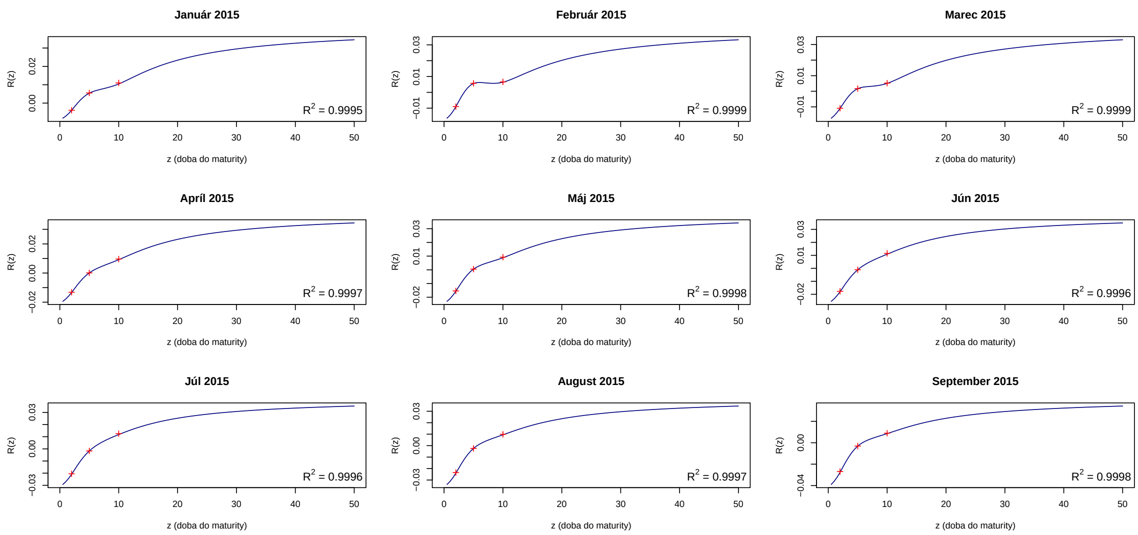
Na Obr. 3 svetlosivou farbou je znázornený histogram pre dôchodkové dávky z Tabuľky 7 a tmavosivou je znázornený histogram pre dôchodkové dávky z Tabuľky 8.

Poznámka. Chceli by sme zdôrazniť, že SW model používame v zjednodušenej podobe. Zjednodušenie sme spravili najmä pri odhade parametrov modelu. V reálnom svete poisťovne používajú oveľa komplikovanejšiu štruktúru podkladových aktív, na základe ktorých odhadujú parametre SW modelu (v práci používame iba tri skutočné výnosy slovenských vládnych dlhopisov). Dokumentácia Európskeho orgánu pre poisťovníctvo a dôchodkové poistenie zamestnancov (EIOPA) k SW modelu je veľmi rozsiahla a v diplomovej práci sme nemali dostatok priestoru na to, aby sme spravili dokonalý SW mo-



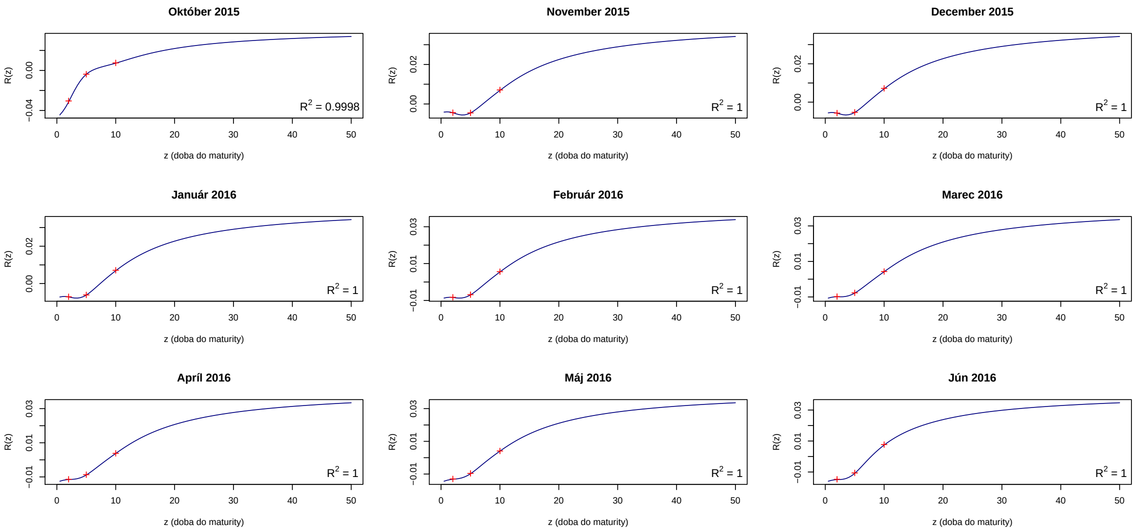
Obr. 3: 2. model aplikovaný v uplynulých dvoch rokoch

(Zdroj: vlastné spracovanie)



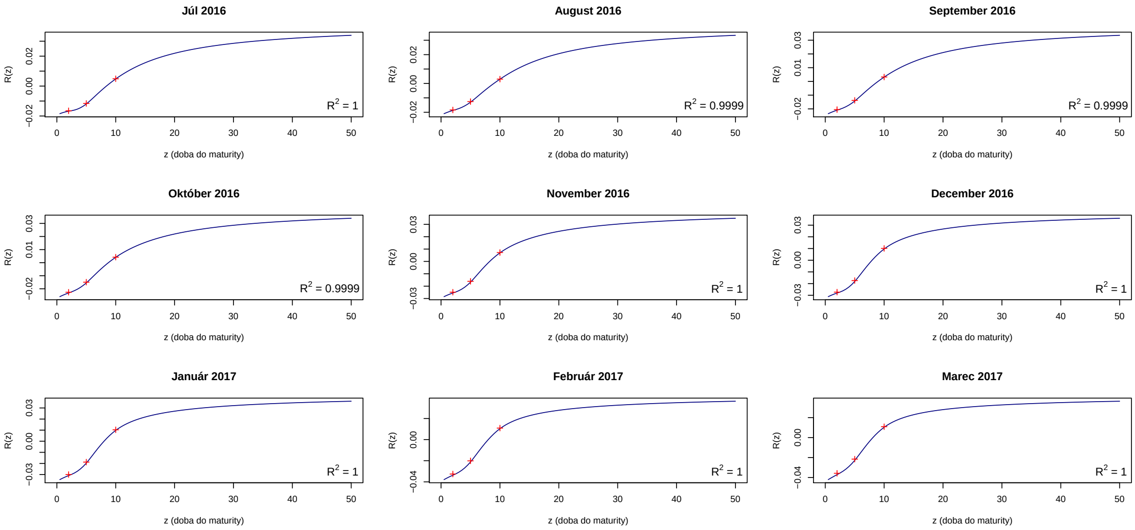
Obr. 4: Odhadnuté SW krivky pri UFR = 0,042 a $\alpha = 0{,}3$

(Zdroj: vlastné spracovanie)



Obr. 5: Odhadnuté SW krivky pri UFR = 0,042 a $\alpha = 0{,}3$

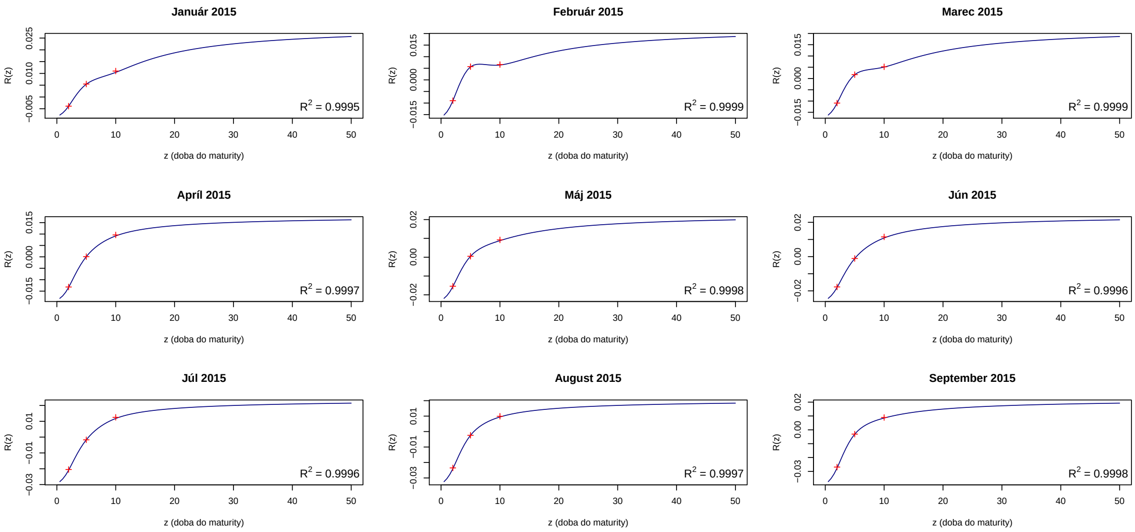
(Zdroj: vlastné spracovanie)



Obr. 6: Odhadnuté SW krivky pri UFR = 0,042 a $\alpha = 0{,}3$

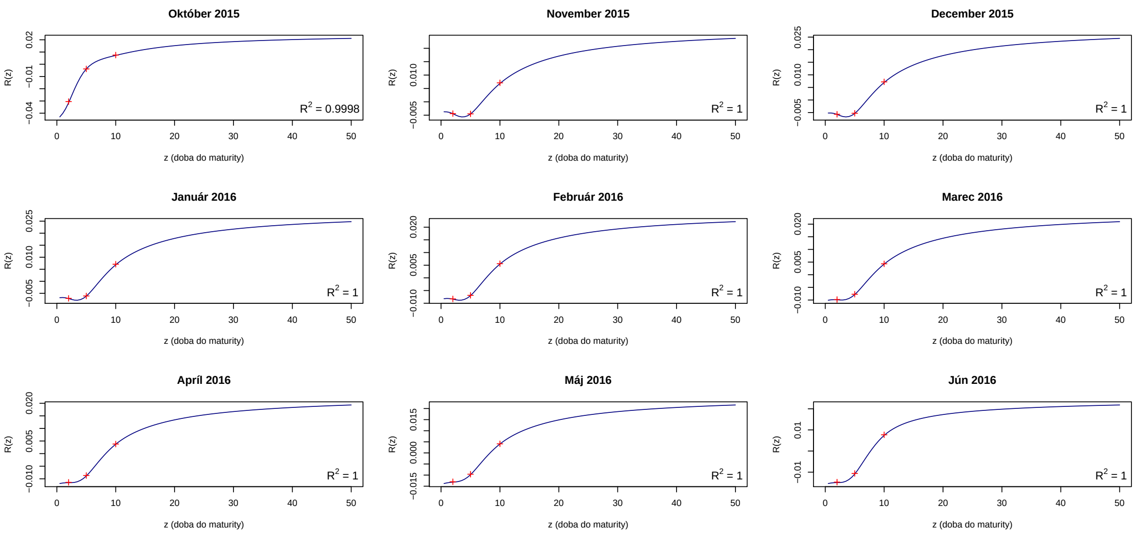
(Zdroj: vlastné spracovanie)

del, v ktorom by sme dodržali všetky predpoklady a podmienky z dokumentu [17], *čiže výšky mesačných doživotných dôchodkových dávok bez zvyšovania a bez pozostalostných dôchodkov sú len ilustračné. Výšky mesačných doživotných dôchodkových dávok veľmi závisia od voľby nákladových koeficientov α, β a δ, fixného poplatku N a tiež závisia od používanej SW krivky.*



Obr. 7: Odhadnuté SW krivky pri rôznych UFR a pri $\alpha = 0{,}3$

(Zdroj: vlastné spracovanie)

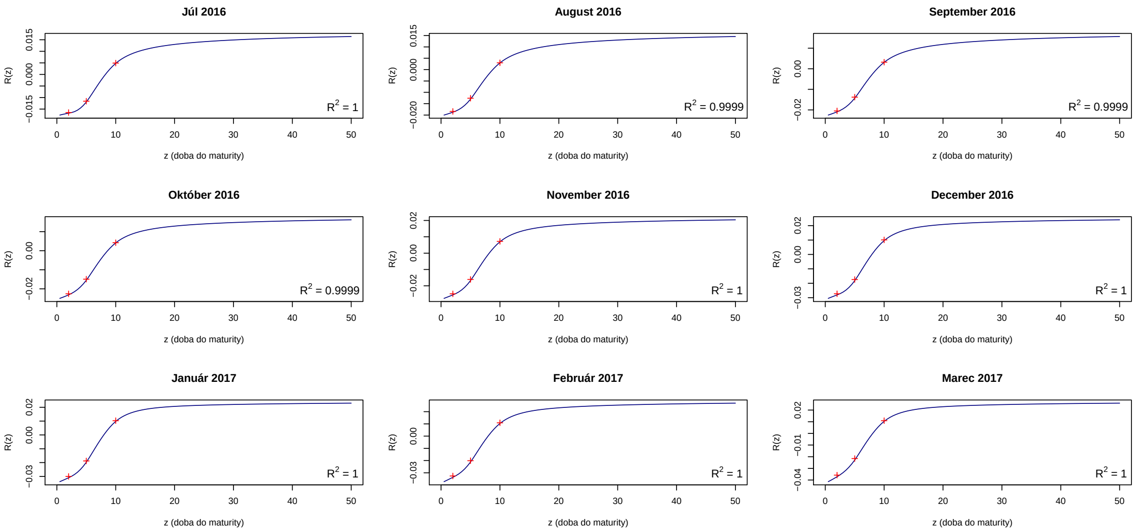


Obr. 8: Odhadnuté SW krivky pri rôznych UFR a pri $\alpha = 0{,}3$

(Zdroj: vlastné spracovanie)

7.3.1 Stresový scenár

Na základe Základného modelu vypočítame mesačnú výšku dôchodkovej dávky pri konštantnej technickej úrokovej miere. Následne vypočítame zisk resp. stratu ŽP, ak by ponúkala dôchodkovú dávku vypočítanú pri konštantnej technickej úrokovej miere,



Obr. 9: Odhadnuté SW krivky pri rôznych UFR a pri $\alpha = 0{,}3$

(Zdroj: vlastné spracovanie)

ale poistné by investovala pri úrokových mierach, ktoré sa riadia SW výnosovou krivkou.

Tabuľka 9: Stresový scenár pre úrokovú mieru: mesačnú výšku dôchodkovej dávky vypočítame pomocou Základného modelu pre osobu vo veku 62 rokov pri výške úspor 10000 EUR a skúmame, aký bude zisk resp. strata poisťovne, ak by hodnota technickej úrokovej miery sa riadila SW výnosovou krivkou (programový kód pre tento výpočet sa nachádza v Prílohe A, v Prílohe G a v Prílohe I)

Technická úroková miera	**Dávka pomocou Základného modelu**	**Zisk resp. strata ŽP pri UFR = 0,0420**	**Zisk resp. strata ŽP pri UFR = 0,0278**
0,7%	42,4339	+1152,0050	+849,3924
1,2%	44,9628	+627,6954	+307,0490
1,5%	46,5075	+307,4223	−24,2401
1,9%	48,5975	−125,9156	−472,4830

(Zdroj: vlastné spracovanie)

V Tabuľke 9 druhý stĺpec obsahuje mesačnú výšku dôchodkovej dávky v eurách pre osobu vo veku 62 rokov, pri výške úspor 10000 EUR vypočítané pomocou Základného modelu. V treťom stĺpci sa nachádza zisk resp. strata poisťovne v prípade garantovania dôchodku z druhého stĺpca a zhodnotení úspor na základe 2. modelu pri UFR = 0,042 a pri mean-reversion parametri $\alpha = 0{,}3$. V štvrtom stĺpci sa nachádza zisk resp. strata poisťovne v prípade garantovania dôchodku z druhého stĺpca a zhodnotení úspor na základe 2. modelu pri UFR = 0,0278 a pri mean-reversion parametri $\alpha = 0{,}3$.

Poznámka. V Tabuľke 9 hodnoty so znamienkom mínus vyjadrujú stratu a hodnoty so znamienkom plus vyjadrujú zisk.

7.4 Dôchodok profesora Brunovského z II. piliera

Profesor Brunovský vstúpil do II. piliera 1.7.2005. V II. pilieri nasporil sumu $P = 13402{,}09$ EUR, ktorú preniesol dňa 1.9.2015 ako 80-ročný do istej ŽP. „V programovom výbere si vybral dôchodok bez zvyšovania a bez pozostalostného krytia vo výške 32,8 EUR. Zaplatil zaň jednorazové poistné vo výške 4127,8 EUR. Zvyšok mu vyplatili jednorazovo dňa 6.10.2015 v sume 9274,29 EUR“ [3], ale od dvoch ŽP (označme pracovne ŽP1 a ŽP2) dostal aj ponuku na anuitu. ŽP1 ponúkla 107,65 EUR a ŽP2 92,45 EUR. [3]

V tejto podkapitole skúmame situáciu, aký mesačný doživotný dôchodok bez zvyšovania a bez pozostalostných dôchodkov by dostal prof. Brunovský od našej modelovej ŽP, keby za všetky nasporené peniaze kúpil anuitu. Pri výpočtoch používame 3 typy pravdepodobnosti úmrtia: Leeove-Carterove predikcie ročných pravdepodobností úmrtia (LCA-DL), dolnú hranicu 90%-ného intervalu spoľahlivosti pre predikované pravdepodobnosti úmrtia (LCA DL-DH) a hornú hranicu 90%-ného intervalu spoľahlivosti pre predikované pravdepodobnosti úmrtia (LCA DL-HH). Dôchodkovú dávku vypočítame pomocou Základného modelu s konštantnou technickou úrokovou mierou, 1. modelu a 2. modelu pri nákladových koeficientoch $\alpha = 6\%$, $\beta = 0{,}2\%$ a $\delta = 5\%$. Konštantný poplatok, ktorý nezávisí od výšky nasporenej sumy v II. pilieri, stanovíme na $N = 50$ EUR.

Tabuľka 10: Mesačná výška dôchodkovej dávky prof. Brunovského v eurách, pri výške úspor 13402,09 EUR vypočítaná pomocou Základného modelu pri rôznych úrovniach technickej úrokovej miery a rôznych modeloch dlhovekosti

Technická úroková miera	LCA DL-DH	LCA-DL	LCA DL-HH
0,0%	92,2164	107,1740	122,0725
0,2%	93,4806	108,3655	123,1393
0,7%	96,6588	111,3524	125,8086
1,2%	99,8606	114,3502	128,4804
1,5%	101,7923	116,1537	130,0845
1,9%	104,3794	118,5633	132,2243

(Zdroj: vlastné spracovanie)

V Tabuľke 10 v prvom stĺpci sa nachádzajú výšky technických úrokových mier, v druhom stĺpci sú uvedené výšky dávok vypočítané pomocou dolnej hranice 90%-ného intervalu spoľahlivosti pre predikované pravdepodobnosti úmrtia odhadnuté na základe LC modelu. V treťom stĺpci nájdeme dávky vypočítané pri predikovaných pravdepodobnostiach úmrtia odhadnuté na základe LC modelu. V štvrtom stĺpci sú uvedené výšky dávok vypočítané pomocou hornej hranice 90%-ného intervalu spoľahlivosti pre predikované pravdepodobnosti úmrtia odhadnuté na základe LC modelu. Programový kód pre výpočet sa nachádza v Prílohe J. Naša ŽP by garantovala podobnú dávku ako ŽP1, ak by používala LCA-DL pravdepodobnosti úmrtia odhadnuté na základe LC modelu a výšku dávky by počítala pri technickej úrokovej miere 0,0% alebo 0,2%. Naša ŽP môže ponúknuť podobnú dávku ako ŽP2, ak by používala LCA-DL-DH pravdepodobnosti úmrtia odhadnuté na základe LC modelu a výšku dávky by počítala pri technickej úrokovej miere 0,0% alebo 0,2%.

Tabuľka 11: Mesačná výška dôchodkovej dávky prof. Brunovského v eurách, pri výške úspor 13402,09 EUR vypočítaná pomocou 1. modelu pri rôznych forwardových krivkách a rôznych modeloch dlhovekosti (čas anuitizácie: 1. september 2015)

Typ dlhopisov	LCA DL-DH	LCA-DL	LCA DL-HH
AAA	97,7466	111,4436	124,9074
všetky dlhopisy eurozóny	101,4593	114,6396	127,4562

(Zdroj: vlastné spracovanie)

V Tabuľke 11 v prvom riadku sa nachádzajú dávky vypočítané pomocou 1. modelu, v ktorom hodnota technickej úrokovej miery sa riadi Svenssonovou forwardovou krivkou pre AAA dlhopisy a v druhom riadku sú dávky vypočítané pomocou 1. modelu, v ktorom hodnota technickej úrokovej miery sa riadi Svenssonovou forwardovou krivkou pre všetky dlhopisy eurozóny. V druhom stĺpci sú uvedené výšky dávok vypočítané pomocou dolnej hranice 90%-ného intervalu spoľahlivosti pre predikované pravdepodobnosti úmrtia odhadnuté na základe LC modelu. V treťom stĺpci nájdeme dávky vypočítané pri predikovaných pravdepodobnostiach úmrtia odhadnuté na základe LC modelu. V štvrtom stĺpci sú uvedené výšky dávok vypočítané pomocou hornej hranice 90%-ného intervalu spoľahlivosti pre predikované pravdepodobnosti úmrtia odhadnuté na základe LC modelu. Programový kód pre výpočet sa nachádza v Prílohe K.

Tabuľka 12: Mesačná výška dôchodkovej dávky prof. Brunovského v eurách, pri výške úspor 13402,09 EUR vypočítaná pomocou 2. modelu pri rôznych SW výnosových krivkách a rôznych modeloch dlhovekosti (čas anuitizácie: 1. september 2015)

UFR	**LCA DL-DH**	**LCA-DL**	**LCA DL-HH**
0,0420	96,7375	109,3375	121,7144
0,0222	95,5209	108,6021	121,3546

(Zdroj: vlastné spracovanie)

V Tabuľke 12 v prvom riadku sa nachádzajú dávky pri UFR = 0,042, v druhom riadku pri UFR = $\frac{\beta_0}{100}$ = 0,0222. V druhom stĺpci sú uvedené výšky dávok vypočítané pomocou dolnej hranice 90%-ného intervalu spoľahlivosti pre predikované pravdepodobnosti úmrtia odhadnuté na základe LC modelu. V treťom stĺpci nájdeme dávky vypočítané pri predikovaných pravdepodobnostiach úmrtia odhadnuté na základe LC modelu. V štvrtom stĺpci sú uvedené výšky dávok vypočítané pomocou hornej hranice 90%-ného intervalu spoľahlivosti pre predikované pravdepodobnosti úmrtia odhadnuté na základe LC modelu. Programový kód pre výpočet sa nachádza v Prílohe L.

Záver

Vyplácanie dôchodkov zo starobného dôchodkového sporenia (z II. piliera) sa začalo 1.1.2015 a stále je aktuálnou témou. V tejto práci sme zhrnuli ako prebieha vyplácanie dôchodkov zo sporivého piliera na Slovensku a pomocou troch modelov sme vypočítali výšku mesačnej dôchodkovej dávky bez zvyšovania a bez pozostalostných dôchodkov za určitých predpokladov definovaných v práci, napr. brali sme do úvahy tzv. 7-ročnú garanciu, ale neriešili sme tzv. prebytok z výnosov.

V prvej kapitole sme sa zaoberali súčasným dôchodkovým zabezpečením na Slovensku. V krátkosti sme predstavili jednotlivé piliere dôchodkového systému Slovenskej republiky a podrobne sme sa zaoberali II. pilierom a vyplácaním dôchodkov z II. piliera. Predstavili sme aj dôchodkové systémy troch krajín a uviedli sme ako prebieha vyplácanie dôchodkov v týchto krajinách zo sporivého piliera. Druhá kapitola obsahovala základy teórie životného poistenia a poistné produkty a dôchodky v prípade netto-princípu, ktoré sme používali v ďalších častiach práce pri modelovaní dôchodkov. V tretej kapitole sme popísali Leeov-Carterov model, ktorý slúži predovšetkým na modelovanie dlhovekosti. Štvrtá kapitola bola venovaná Základnému modelu s konštantnou technickou úrokovou mierou, pomocou ktorého sme dostali vzorec pre výpočet mesačnej výšky dôchodkovej dávky. Piata kapitola obsahovala defícíciu Svenssonovej výnosovej a forwardovej krivky, vzťah medzi okamžitou forwardovou úrokovou mierou a spojitou úrokovou mierou. Uviedli sme aj niektoré výhody a nevýhody Svenssonovho modelu a formulovali sme náš 1. model, v ktorom technická úroková miera už nebola konštantná a jej hodnota sa riadila Svenssonovou forwardovou krivkou. Ďalšia kapitola bola venovaná Smithovmu-Wilsonovmu modelu. Napísali sme spôsob odhadovania jeho parametrov, výhody a nevýhody modelu a odvodili sme náš 2. model na základe Základného modelu a 1. modelu. Posledná kapitola obsahovala praktickú časť nášho diplomového výskumu - programovú implementáciu modelov v prostredí softvéra `R`. Uviedli sme výšky dôchodkových dávok vypočítaných na základe troch modelov. Pri 2. modeli sme matematickým spôsobom vyjadrili kvalitu odhadnutej krivky pomocou pseudo-koeficientu determinácie. Skonštruovali sme stresové scenáre, pomocou ktorých sme skúmali, aký bude zisk resp. strata poisťovne, ak by poisťovňa vypočítala mesačnú výšku dôchodkovej dávky pomocou Základného modelu s konštantnou technickou úrokovou mierou, ale situácia na finančných trhoch by sa riadila podľa SV modelu resp. SW modelu. V poslednej podkapitole praktickej časti práce sme sa zaoberali dôchodkom profesora Brunovského z II. piliera. Vypočítali sme, aký dôchodok by dostal prof. Brunovský s použitím Základného modelu, 1. modelu a 2. modelu pri troch rôznych vektoroch pravdepodobnosti úmrtia odhadnuté na základe LC modelu: pri Leeových-Carterových predikcií ročných pravdepodobností úmrtia, pri dolnej hranici 90%-ného intervalu spoľahlivosti pre predikované pravdepodobnosti úmrtia a pri hornej hranici 90%-ného intervalu spoľahlivosti pre predikované pravdepodobnosti úmrtia. Na záver by sme skonštatovali, že táto diplomová práca splnila stanovené ciele.

Literatúra

[1] Bubáková, B.: *Analýza vplyvu rizikových faktorov na vyplácanie doživotných dôchodkov z úspor v druhom dôchodkovom pilieri na Slovensku*, bakalárska práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava, 2016.

[2] Cibulková, K.: *Oceňovanie dôchodkov pre manželov v prípade závislosti ich životov*, diplomová práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava, 2017.

[3] Kancian, D.: *Brunovského dôchodok*, bakalárska práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava, 2016.

[4] Lee, R. D., Carter, L. R.: Modeling and Forecasting U. S. Mortality, *Journal of the American Statistical Association*, roč. 87, č. 419, 659-671, dostupné na internete (8.3.2016): `https://www.jstor.org/stable/pdf/2290201.pdf`.

[5] Melicherčík, I., Olšárová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky.* Epos, Bratislava. ISBN 80-8057-651-3.

[6] Melicherčík, I., Szűcs, G.: Vplyv vybraných faktorov na zisk životnej poisťovne pri doživotných dôchodkoch vyplácaných z úspor v II. dôchodkovom pilieri na Slovensku, *Forum Statisticum Slovacum* 6/2014, 103-114.

[7] Nelson, Ch. R., Siegel A. F.: Parsimonious Modeling of Yield Curves, *The Journal of Business*, Volume 60, Issue 4 (Oct., 1987), 473-489, dostupné na internete (2.4.2017): `http://www.math.ku.dk/~rolf/teaching/NelsonSiegel.pdf`.

[8] OECD (2015), *Pensions at a Glance 2015*, OECD and G20 indicators, OECD Publishing, Paris, dostupné na internete (27.2.2016): `http://www.oecd-ilibrary.org/docserver/download/8115201e.pdf?expires=1492263813&id=id&accname=guest&checksum=9395C932CEB6C8A4131334802A09A90F`.

[9] Potocký, R.: *Modely v životnom a neživotnom poistení*, Bratislava, STATIS, 2012.

[10] Schneeweiss, H., Zimmermann, K. F.: *Studies in Applied Econometrics*, Heidelberg: Physica-Verl., 1993, strana 46, dostupné na internete (9.2.2017): `https://books.google.sk/books?id=FiPzCAAAQBAJ&pg=PA46&lpg=PA46&dq=neter+and+maynes,+goldberger,+morrison,+efron&source=bl&ots=BC5AdHruXq&sig=iDCgRDMfY0-qH9ygoY-C2PWPbbQ&hl=sk&sa=X&ved=`

0ahUKEwjGrquT7IPSAhXLWhoKHQKtChQQ6AEIGDAA#v=onepage&q=neter%20and%20maynes%2C%20goldberger%2C%20morrison%2C%20efron&f=false.

[11] Svensson, L. E. O.: Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994. *National Bureau of Economic Research Working Paper*, Cambridge, Masachusets, september 1994, č. 4871, dostupné na internete (2.12.2016): http://www.nber.org/papers/w4871.pdf.

[12] Szűcs, G.: Dôchodky vyplácané z úspor v II. dôchodkovom pilieri na Slovensku, *Forum Statisticum Slovacum* 2/2015, 112-120.

[13] Szűcs, G.: *Stochastické modely úrokových mier v poisťovníctve*, dizertačná práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava, 2016, dostupné na internete (16.4.2017): http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/phd/szucs/szucs_thesis.pdf.

[14] Van Beers, R. H. A., Elshof, W.: *Evaluating the Solvency capital requirement of interest rate risk in Solvency II*, dostupné na internete (2.4.2017): https://www.actuaries.org/mexico2012/papers/vanBeers.pdf.

Internetové zdroje:

[15] DIRECTIVE 2009/138/EC OF THE EUROPEAN PARLIAMENT AND OF THE COUNCIL of 25 november 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II), Official Journal of the European Union, Chapter VI, dostupné na internete (2.12.2016): https://www.knf.gov.pl/Images/SII_dyrekt_2009_138_en_tcm75-27139.pdf.

[16] ECB [online]. Euro area yield curve. Webová stránka Európskej centrálnej banky, dostupné na adrese (25.11.2016): https://www.ecb.europa.eu/stats/money/yc/html/index.en.html.

[17] EIOPA [online]. Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures. Webová stránka EIOPA, dostupné na internete (17.2.2017): https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/Technical%20Documentation%20%2827%20February%202017%29.pdf.

[18] Human Mortality Database [online]. Webová stránka Human Mortality Database, dostupné na adrese (11.3.2017): http://www.mortality.org/.

[19] IPE (Investment and Pensions Europe) [online]. Poland: Dismantling the second pillar, dostupné na adrese (13.4.2017): https://www.ipe.com/pensions/pensions-in/cee/poland-dismantling-the-second-pillar/10016965.article.

[20] Ministerstvo financií Českej republiky [online]. II. pilíř - Důchodové spoření (ukončení). Webová stránka Ministerstva financií Českej republiky, dostupné na adrese (4.12.2016): http://www.mfcr.cz/cs/soukromy-sektor/soukrome-penzijni-systemy/ii-pilir-duchodove-sporeni#4.

[21] Ministerstvo práce a sociálnych vecí Českej republiky [online]. Webová stránka Ministerstva práce a sociálnych vecí, dostupné na adrese (2.5.2017): http://www.mpsv.cz/cs/3.

[22] Ministerstvo práce, sociálnych vecí a rodiny [online]. Webová stránka Ministerstva práce, sociálnych vecí a rodiny, dostupné na adrese (14.10.2016): https://www.employment.gov.sk/sk/socialne-poistenie-dochodkovy-system/dochodkovy-system/.

[23] Národná banka Slovenska [online]. Výnosy do splatnosti za vybrané vládne dlhopisy – časový rad. Webová stránka Národnej banky Slovenska, dostupné na adrese (17.2.2017): http://www.nbs.sk/sk/statisticke-udaje/financne-trhy/urokove-sadzby/dlhodobe-urokove-sadzby.

[24] Opatrenie Národnej banky Slovenska z 1. decembra 2015 č. 25/2015 o maximálnej výške technickej úrokovej miery, dostupné na adrese: http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Legislativa/_Vestnik/OPAT25-2015.pdf.

[25] Phil Joubert (2013). SmithWilsonYieldCurve: Smith-Wilson Yield Curve Construction. R package version 1.0.1. http://CRAN.R-project.org/package=SmithWilsonYieldCurve.

[26] R Core Team (2016). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna. Austria. [online]. Dostupné na adrese (5.11.2016): https://www.R-project.org/.

[27] Retirement Income Journal [online]. The information forum of the decumulation industry, dostupné na adrese (13.4.2017): http://retirementincomejournal.com/issue/júl-8-2016/article/polands-experiment-with-private-pension-funds-nears-end.

[28] Rob J Hyndman with contributions from Heather Booth, Leonie Tickle and John Maindonald. (2014). demography: Forecasting mortality, fertility, migration and population data. R package version 1.18. http://CRAN.R-project.org/package=demography.

[29] Sociálna poisťovňa [online]. Webová stránka Sociálnej poisťovne, dostupné na adrese (14.10.2016): http://www.socpoist.sk.

[30] The Financial Supervisory Authority of Norway [online]. A Technical Note on the Smith-Wilson Method, dostupné na internete (25.1.2017): http://www.finanstilsynet.no/Global/Forsikring%20og%20pensjon/Skadeforsikring/Tilsyn%20og%20overv%C3%A5king/Rapportering/A_Technical_Note_on_the_Smith-Wilson_Method_100701.pdf.

[31] Zákon č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení a o zmene a doplnení niektorých zákonov, dostupné na adrese: https://www.nbs.sk/_img/Documents/_Legislativa/_UplneZneniaZakonov/Z0432004.pdf.

Prílohy

Príloha A.

Táto príloha obsahuje ročné pravdepodobnosti úmrtia získané pomocou Leeovho-Carterovho modelu (používajú sa aj v práci [2]), funkciu pre implementáciu Balducciho predpokladu pre pravdepodobnosti prežitia osoby vo veku x na základe vzorca (2) v softvéri R, funkciu slúžiacu na lineárnu aproximáciu vektora pravdepodobnosti prežitia, funkciu pre implementáciu Balducciho predpokladu pre pravdepodobnosti úmrtia osoby vo veku x a funkciu slúžiacu na lineárnu aproximáciu vektora pravdepodobnosti úmrtia na základe vzorca (1). Programové kódy, z ktorých sme vychádzali, sa nachádzajú v prílohách práce [1]. Tie funkcie sme modifikovali, aby výpočet prebehol rýchlejšie a efektívnejšie.

```
# ročné pravdepodobnosti úmrtia získané pomocou Leeovho-Carterovho modelu
qq <- c(rep(0,times=62),0.0134487956396, 0.0143832069457, 0.0153509179303,
      0.0163628754127, 0.0174336005100, 0.0185815447097, 0.0198293973495,
      0.0212042960052, 0.0227379437193, 0.0244666610960, 0.0264313800300,
      0.0286775244004, 0.0312546431940, 0.0342155937617, 0.0376150508714,
      0.0415071737367, 0.0459424242297, 0.0509638010910, 0.0566031027011,
      0.0628781606484, 0.0697921460395, 0.0773358764215, 0.0854934578893,
      0.0942506712546, 0.1036045361017, 0.1135718443620, 0.1241944415453,
      0.1355396996362, 0.1476957557107, 0.1607623304004, 0.1748389696565,
      0.1900131808162, 0.2063510798881, 0.2238927922139, 0.2426539291509,
      0.2626330502094, 0.2838233328394, 0.3062251202001, 0.3298555410118,
      0.3547536201197, 0.3809784001857, 0.4085907421692, 0.4376270909908,
      0.4680763698888, 0.4999005723447, 0.5330496064505, 0.5674739689482,
      0.6031150057468, 0.6399012793944,1)
# ročné pravdepodobnosti prežitia
pp <- 1-qq

# Balducciho predpoklad pre pravdepodobnosti prežitia osoby vo veku x
balducci_p <- function(pp,fromAge,fromMonth,monthCount){
  tpx <- rep(0, monthCount)
  yearly <- 1
  for (j in 0:(ceiling(monthCount/12)-1)) {
    for (i in 1:12){
      tpx[12*j+i] <- yearly*( pp[fromAge+1+j] / (1 - (1 - i/12) *
                    (1 - pp[fromAge+1+j])) )
    }
    yearly <- tpx[12*j+i]
  }
  if (monthCount==0) tpx <- 1
  return(tpx[1:monthCount])
}

# lineárna aproximácia vektora pravdepodobnosti prežitia
lin_p <- function(p){
  times <- (length(p) - 1) * 12
  lin <- rep(0, times)
  for (j in 1:(length(p) - 1)) {
```

```
    for (i in 1:12) {
      lin[12*(j-1)+i] <- ((12 - i) / 12) * p[j] + (i/12) * p[j+1]
    }
  }
  return(lin)
}

# Balducciho predpoklad pre pravdepodobnosti úmrtia osoby vo veku x
bald_q <- function(l_q,fromAge,fromMonth,n){
  year <- fromAge
  monthCount <- n * 12
  qqt <- rep(0,monthCount)
  for (j in 1:(n)) {
    for (i in 1:12) {
      x <- (year+(j-1)) * 12 + i
      qqt[12*(j-1)+i] <- 1 - ((1 - l_q[x]) / (1 - l_q[x] + l_q[x]/12))
    }
  }
  return(qqt)
}

# lineárna aproximácia vektora pravdepodobnosti úmrtia
lin_q <- function(qq){
  monthCount <- (length(qq) - 1) * 12
  yearCount <- length(qq) - 1
  lin <- rep(0,monthCount)
  for (j in 1:yearCount) {
    for (i in 1:12) {
      lin[12*(j-1)+i] <- ((12 - i) / 12) * qq[j] + (i / 12) * qq[j+1]
    }
  }
  return(lin)
}
```

Príloha B.

Programové kódy v softvéri `R` pre Základný model s konštantnou technickou úrokovou mierou

Pred spustením programového kódu z Prílohy B je nutné spustiť kód z Prílohy A. Táto príloha obsahuje funkciu `odurocitel` na výpočet diskontného faktora v neceločíselných časoch, funkciu `axn_polehotny_b` pre implementovanie vzorca (10), funkciu `axn_beta` pre implementovanie vzorca (14) vynásobené s β ([1]), funkciu `MA1_xn` pre implementovanie tzv. 7-ročnej garancie na základe vzorca (9) vynásobené s $\frac{1}{12}$ a funkciu pre výpočet výšky mesačnej dôchodkovej dávky na základe vzorca (13).

```
# vektor odúročiteľov pre neceločíselné časy
odurocitel <- function(years){
  monthCount <- years * 12
  inside <- 1 + ia
  w <- rep(0,monthCount)
  for(i in 1:monthCount) {
    w[i] <- inside ^ (- i / 12)
    if(monthCount == 0){ w <- 1 }
  }
  return(w)
}

# polehotný dôchodok pre výpočet rezervy
axn_polehotny_b <- function(pp,fromYear,fromMonth,n){
  lin_pp <- lin_p(pp)
  monthCount <- n * 12
  axnb <- rep(0, monthCount)
  for (j in 0:(n-1)) {
    for (i in 1:12) {
      bpp <- balducci_p(lin_pp[seq(i,(12*(length(pp)-1) +i),by = 12)],
              fromYear+j, i , monthCount-i-12*j+1)
      bpp <- bpp[1:(length(bpp)-1)]
      vp <- odurocitel((monthCount-i-12*j+1)/12)
      vp <- vp[1:(length(vp)-1)]
      axnb[12*j+i] <- 1/12 * sum(bpp * vp)
    }
  }
  return(axnb)
}

# polehotný odložený dôchodok
axn_beta <- function(pp,qq,fromAge,fromMonth,beta){
  n <- length(qq) - fromAge - 1
  times <- n * 12
  axn_pol <- axn_polehotny_b(pp,fromAge,fromMonth,n)
  v <- odurocitel(n)
  p <- balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,times)
  ax <- rep(0, times)
  for (t in 1:times) {
    ax[t] <- (1/12) * beta * axn_pol[t] * v[t] * p[t]
```

```
  }
  return(sum(ax))
}

# Cena dodatočného poistenia na úmrtie:
# n je doba legislatívne určenej dĺžky trvania poistenia (n=7)
MA1_xn <- function(qq,fromAge,fromMonth,n){
  pp <- as.vector(1-qq)
  times <- n * 12
  month <- fromMonth
  v <- (1 + ia)^(-1)
  balducci_umrtie <- bald_q(lin_q(qq),fromAge,fromMonth,n)[1:(times)]
  bald_prezitie <- rep(0, times)
  for(t in 1:times){
    bald_prezitie[t] <- balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,times)[t]
  }
  mAx <- rep(0, n)
  for(j in 1:(times)){
    mAx[j] <- (1/12) *(84-j) * v^((j+1)/12)* bald_prezitie[j] *
              balducci_umrtie[j]
  }
  mA1xn <- sum(mAx)
  return(mA1xn)
}

# funkcia na výpočet dôchodkovej dávky
davka <- function(qq,fromAge,fromMonth,alfa,beta,P){
  pp <- as.vector(1 - qq)
  n <- length(qq) - fromAge-1
  davkaS <- (1/12) * ( (P*(1-(1-delta)*odurocitel(1/12)*
            (1-balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,n)[1]))-N) /
            (alfa + (1/12)*sum(balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,n*12)*
            odurocitel(n)) + axn_beta(pp, qq, fromAge, fromMonth, beta)+
            MA1_xn(qq, fromAge, fromMonth, 7)))
  return(davkaS)
}
```

Príloha C.

V tejto prílohe je uvedený príklad použitia Základného modelu s konštantnou technickou úrokovou mierou. Výsledky výpočtov sa nachádzajú v Tabuľke 1. Táto príloha obsahuje aj stresový scenár pre výkyvov úrokovej miery. Výsledky sa nachádzajú v Tabuľke 2. Pred spustením kódu z Prílohy C je nutné spustiť Prílohu A a Prílohu B.

```
# Ukážka použitia Základného modelu
x <- 62
P <- 10000
alfa <- 0.06
beta <- 0.002
delta <- 0.05
N <- 50
ia <- 0.007

# mesačná dávka pri úrokovej miere i = 0.7% p. a.
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)
SM

# Stresový scenár (viď. v podkapitole Základný model - Stresové scenáre)
ia <- 0.015
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)
SM

# súčasná hodnota peňažných tokov poisťovne
CFPV <- function(qq,fromAge,fromMonth,alfa,beta,SM){
  pp <- as.vector(1 - qq)
  n <- length(qq) - fromAge-1
  S_r <- 12 * SM
  CFPV <- ((S_r/12) * sum(balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,n*12)*
          odurocitel(n)) +
          S_r * alfa + S_r * axn_beta(pp,qq,fromAge,fromMonth,beta) +
          S_r * MA1_xn(qq,fromAge,fromMonth,7) + N)/(1-(1-delta)*
          odurocitel(1/12)*
          (1-balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,n)[1]))
  return(CFPV)
}

ia <- 0
P-CFPV(qq,x,1,alfa,beta,SM)

ia <- 0.002
P-CFPV(qq,x,1,alfa,beta,SM)

ia <- 0.012
P-CFPV(qq,x,1,alfa,beta,SM)

ia <- 0.019
P-CFPV(qq,x,1,alfa,beta,SM)
```

Príloha D.

Programové kódy v jazyku `R` pre 1. model

Pred spustením programového kódu z Prílohy D je nutné spustiť Prílohu A. Táto príloha obsahuje funkciu `SV.fz` naprogramovanú na základe vzorca (16), funkciu `axn_polehotny_b` (vzorec (21)), funkciu `axn_beta` (vzorec (24) vynásobené s β), funkciu `MA1_xn` (vzorec (20) vynásobené s $\frac{1}{12}$) a funkciu `davka` naprogramovanú na základe vzorca (23).

```
# Svenssonova forwardová krivka
SV.fz <- function(z)
{
  if(length(z)==1) {
    if(z==0) { (beta0 + beta1)/100 }
    else{
      (beta0 + beta1* exp(-z/tau1) + beta2* (z/tau1)*exp(-z/tau1) +
       beta3* (z/tau2)*exp(-z/tau2))/100
    }
  }
  else{
    (beta0 + beta1* exp(-z/tau1) + beta2* (z/tau1)*exp(-z/tau1) +
     beta3* (z/tau2)*exp(-z/tau2))/100
  }
}

# polehotný dôchodok pre výpočet rezervy
axn_polehotny_b <- function(pp,fromAge,fromMonth,n){
  lin_pp <- lin_p(pp)
  monthCount <- n * 12
  axnb <- rep(0, monthCount)
  for (j in 0:(n-1)) {
    for (i in 1:12) {
      bpp <- balducci_p(lin_pp[seq(i,(12*(length(pp)-1) +i),by = 12)],
             fromAge+j, i , monthCount-i-12*j+1)
      bpp <- bpp[1:(length(bpp)-1)]
      vp <- exp(-integrate(SV.fz, 0, ((monthCount-i-12*j+1)/12))$value)
      vp <- vp[1:(length(vp)-1)]
      axnb[12*j+i] <- 1/12 * sum(bpp * vp)
    }
  }
  return(axnb)
}

# polehotný odložený dôchodok za využitia rezervného vektora
axn_beta <- function(pp,qq,fromAge,fromMonth,beta){
  n <- length(qq) - fromAge - 1
  times <- n * 12
  axn_pol <- axn_polehotny_b(pp,fromAge,fromMonth,n)
  p <- balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,times)
  ax <- rep(0, times)
  for (t in 1:times) {
```

```
    ax[t] <- ((1/12) * beta * axn_pol[t] ) *
              exp(-integrate(SV.fz, 0, (t/12))$value) * p[t]
  }
  return(sum(ax))
}

# Cena dodatočného poistenia na úmrtie,
# kde n je doba legislatívne určenej dĺžky trvania poistenia
MA1_xn <- function(qq,fromAge,fromMonth,n){
  pp <- as.vector(1-qq)
  times <- n * 12
  month <- fromMonth
  balducci_umrtie <- bald_q(lin_q(qq),fromAge,fromMonth,n)[1:times]
  bald_prezitie <- rep(0, times)
  for(t in 1:times){
    bald_prezitie[t] <- balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,times)[t]
  }
  mAx <- rep(0, n)
  for(j in 1:(times)){
    mAx[j] <- (1/12)*(times-j) *
                exp(-integrate(SV.fz, 0, ((j+1)/12))$value)*
                    bald_prezitie[j] * balducci_umrtie[j]
  }
  mA1xn <- sum(mAx)
  return(mA1xn)
}

# funkcia na výpočet dávky
davka <- function(qq,fromAge,fromMonth,alfa,beta,P){
  pp <- as.vector(1 - qq)
  n <- length(qq) - fromAge - 1
  cc <- seq(from=1, to=12*n, by=1)
  z <- cc/12
  fP <- rep(0, times=12*n)
      for(j in 1:(12*n)) { fP[j] <- exp(-integrate(SV.fz,0,z[j])$value) }
  davkaS <- (1/12) * ( (P*(1-(1-delta)*
            exp(-integrate(SV.fz, 0, (1/12))$value)*
            (1-balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,n)[1]))-N) /
            (alfa + (1/12)* balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,n*12) %*% fP +
            axn_beta(pp, qq, fromAge, fromMonth, beta) +
            MA1_xn(qq, fromAge, fromMonth, 7)))
  return(davkaS)
}
```

Príloha E.

V tejto prílohe je uvedený príklad použitia 1. modelu v prostredí softvéru R. Výsledky výpočtov sa nachádzajú v Tabuľke 4 v Tabuľke 5. Pred spustením Prílohy E je nutné spustiť Prílohu A a Prílohu D.

```
# Ukážka použitia 1. modelu
x <- 62; P <- 10000
alfa <- 0.06; beta <- 0.002; delta <- 0.05
N <- 50

SM <- c(rep(0,times=12))
#Parametre pre AAA dlhopisy 2. január 2006
beta0 <-4.054219; beta1 <--1.918581; beta2 <-1.821323
beta3 <--3.329259; tau1 <-1.074156; tau2 <-2.071315
SM[1] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre AAA dlhopisy  2. január 2007
beta0 <-4.172025; beta1 <--1.007039; beta2 <-0.276090
beta3 <--1.029455; tau1 <-0.377867; tau2 <-2.780967
SM[2] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre AAA dlhopisy  2. január 2008
beta0 <-4.879421; beta1 <--1.288654; beta2 <-0.222145
beta3 <--2.678307; tau1 <-0.430823; tau2 <-1.910693
SM[3] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre AAA dlhopisy  2. január 2009
beta0 <-0.108792; beta1 <-1.611718; beta2 <-10.426767
beta3 <--0.958181; tau1 <-12.040810; tau2 <-0.750536
SM[4] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre AAA dlhopisy  4. január 2010
beta0 <-3.519283; beta1 <--3.068811; beta2 <-7.034122
beta3 <--0.906928; tau1 <-7.850378; tau2 <-0.270181
SM[5] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre AAA dlhopisy  3. január 2011
beta0 <-3.314164; beta1 <--2.813316; beta2 <-9.800351
beta3 <--7.871491; tau1 <-4.080560; tau2 <-2.368589
SM[6] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre AAA dlhopisy  2. január 2012
beta0 <-3.223000; beta1 <--3.213000; beta2 <-6.369753
beta3 <--5.830986; tau1 <-3.629880; tau2 <-2.119828
SM[7] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre AAA dlhopisy  2. január 2013
beta0 <-1.357593; beta1 <--1.268692; beta2 <-24.725118
beta3 <--21.803698; tau1 <-5.570258; tau2 <-4.253324
SM[8] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
```

```
#Parametre pre AAA dlhopisy  2. január 2014
beta0 <-2.487967; beta1 <--2.363560; beta2 <-23.809434
beta3 <--22.473467; tau1 <-4.562237; tau2 <-3.744783
SM[9] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre AAA dlhopisy  2. január 2015
beta0 <-0.515507; beta1 <--0.505507; beta2 <-23.514243
beta3 <--21.737949; tau1 <-7.218427; tau2 <-6.016489
SM[10] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre AAA dlhopisy  4. január 2016
beta0 <-2.142562; beta1 <--2.649562; beta2 <-19.953238
beta3 <--24.067787; tau1 <-1.656860; tau2 <-1.814525
SM[11] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre AAA dlhopisy  2. január 2017
beta0 <-1.450341; beta1 <--2.274341; beta2 <-11.885632
beta3 <--16.084991; tau1 <-1.336620; tau2 <-1.574650
SM[12] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

SM2 <- c(rep(0,times=12))
#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny  2. január 2006
beta0  <-4.127814; beta1 <--1.974376; beta2 <-2.893153
beta3 <--4.267800; tau1 <-1.264359; tau2 <-2.046948
SM2[1] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny  2. január 2007
beta0 <-4.302578; beta1 <--1.087958; beta2 <-0.309218
beta3 <--1.355178; tau1 <-0.441775; tau2 <-2.556642
SM2[2] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny  2. január 2008
beta0 <-5.052361; beta1 <--1.360038;beta2 <-1.296855
beta3 <--3.347811; tau1 <-1.008619; tau2 <-2.074857
SM2[3] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny  2. január 2009
beta0 <-0.010000; beta1 <-1.981836; beta2 <-11.047584
beta3 <--1.403362; tau1 <-13.015524; tau2 <-0.323879
SM2[4] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny  4. január 2010
beta0 <-0.286491; beta1 <-0.709284; beta2 <-13.481885
beta3 <--2.501662; tau1 <-12.584180; tau2 <-0.250000
SM2[5] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny  3. január 2011
beta0 <-4.342999; beta1 <--3.521214; beta2 <-18.074798
beta3 <--13.743335; tau1 <-5.176682; tau2 <-4.733931
SM2[6] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny  2. január 2012
```

```
beta0 <-5.611809; beta1 <--5.601809; beta2 <-62.594015
beta3 <--64.560289; tau1 <-1.089639; tau2 <-1.166082
SM2[7] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny  2. január 2013
beta0 <-4.398055; beta1 <--4.388055; beta2 <--121.953610
beta3 <-117.533422; tau1 <-1.114492; tau2 <-1.081390
SM2[8] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny  2. január 2014
beta0 <-4.592163; beta1 <--4.532388; beta2 <-40.391362
beta3 <--46.704710; tau1 <-1.070707; tau2 <-1.165019
SM2[9] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny  2. január 2015
beta0 <-3.032044; beta1 <--3.022044; beta2 <-40.942429
beta3 <--45.712723; tau1 <-1.967964; tau2 <-2.073825
SM2[10] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny  4. január 2016
beta0 <-2.941722; beta1 <--3.307722; beta2 <-38.006096
beta3 <--43.062931; tau1 <-1.606516; tau2 <-1.714455
SM2[11] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny  2. január 2017
beta0 <-2.443636; beta1 <--3.052636; beta2 <-37.937410
beta3 <--42.900472; tau1 <-1.434069; tau2 <-1.537153
SM2[12] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

SM3 <- c(rep(0,times=28))
## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 2. január 2015
beta0 <- 0.515507; beta1 <- -0.505507; beta2 <- 23.514243
beta3 <- -21.737949; tau1 <- 7.218427; tau2 <- 6.016489
SM3[1] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 2. február 2015
beta0 <- 1.367299; beta1 <- -1.357299; beta2 <- -1.624537
beta3 <- -4.020307; tau1 <- 0.377396; tau2 <- 2.454337
SM3[2] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 2. marec 2015
beta0 <- 1.527344; beta1 <- -1.482438; beta2 <- -1.929027
beta3 <- -4.565550; tau1 <- 0.364503; tau2 <- 2.450406
SM3[3] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 1. apríl 2015
beta0 <- 0.876326; beta1 <- -0.866326; beta2 <- -1.535030
beta3 <- -2.995853; tau1 <- 0.264342; tau2 <- 2.004957
SM3[4] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 4. máj 2015
beta0 <- 1.384982; beta1 <- -1.694982; beta2 <- 3.399746
```

```
beta3 <- -5.554454; tau1 <- 2.165637; tau2 <- 2.424980
SM3[5] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 1. jún 2015
beta0 <- 1.569588; beta1 <- -1.848588; beta2 <- 2.758273
beta3 <- -6.034498; tau1 <- 1.378898; tau2 <- 1.882615
SM3[6] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 1. júl 2015
beta0 <- 2.377076; beta1 <- -2.651076; beta2 <- 1.709571
beta3 <- -6.982651; tau1 <- 1.105705; tau2 <- 1.861105
SM3[7] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 3. august 2015
beta0 <- 0.865395; beta1 <- -1.097691; beta2 <- -11.075954
beta3 <- 12.006487; tau1 <- 4.740689; tau2 <- 6.311895
SM3[8] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 1. september 2015
beta0 <- 0.850118; beta1 <- -1.113538; beta2 <- -10.642031
beta3 <- 12.385633; tau1 <- 4.770541; tau2 <- 6.554711
SM3[9] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 1. október 2015
beta0 <- 1.904139; beta1 <- -2.275179; beta2 <- 20.200886
beta3 <- -23.870509; tau1 <- 1.593018; tau2 <- 1.740959
SM3[10] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 2. november 2015
beta0 <- 1.977329; beta1 <- -2.332329; beta2 <- 20.092114
beta3 <- -23.960792; tau1 <- 1.651716; tau2 <- 1.790685
SM3[11] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 1. december 2015
beta0 <- 2.137582; beta1 <- -2.588582; beta2 <- 19.831167
beta3 <- -24.221467; tau1 <- 1.760597; tau2 <- 1.928930
SM3[12] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 4. január 2016
beta0 <- 2.142562; beta1 <- -2.649562; beta2 <- 19.953238
beta3 <- -24.067787; tau1 <- 1.656860; tau2 <- 1.814525
SM3[13] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 1. február 2016
beta0 <- 1.791719; beta1 <- -2.266008; beta2 <- 20.005511
beta3 <- -23.998569; tau1 <- 1.648633; tau2 <- 1.811371
SM3[14] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 1. marec 2016
beta0 <- 1.626840; beta1 <- -2.156840; beta2 <- 20.058326
beta3 <- -23.929473; tau1 <- 1.766467; tau2 <- 1.928987
SM3[15] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
```

```
## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 1. apríl 2016
beta0 <- 1.385913; beta1 <- -1.899913; beta2 <- 20.337442
beta3 <- -23.629999; tau1 <- 1.723754; tau2 <- 1.860998
SM3[16] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 2. máj 2016
beta0 <- 1.646197; beta1 <- -2.205197; beta2 <- 12.233239
beta3 <- -15.872670; tau1 <- 1.764797; tau2 <- 1.994132
SM3[17] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 1. jún 2016
beta0 <- 1.450580; beta1 <- -2.034580; beta2 <- 12.343221
beta3 <- -15.750422; tau1 <- 1.868046; tau2 <- 2.090447
SM3[18] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 1. júl 2016
beta0 <- 0.823943; beta1 <- -1.509943; beta2 <- 12.708745
beta3 <- -15.360058; tau1 <- 1.684580; tau2 <- 1.866770
SM3[19] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 1. august 2016
beta0 <- 0.762192; beta1 <- -1.422097; beta2 <- 12.752010
beta3 <- -15.299968; tau1 <- 1.748119; tau2 <- 1.928726
SM3[20] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 1. september 2016
beta0 <- 0.968291; beta1 <- -1.637291; beta2 <- 12.588147
beta3 <- -15.446722; tau1 <- 1.774159; tau2 <- 1.969918
SM3[21] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 3. október 2016
beta0 <- 0.931710; beta1 <- -1.711710; beta2 <- 12.604563
beta3 <- -15.414638; tau1 <- 1.838815; tau2 <- 2.042258
SM3[22] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 1. november 2016
beta0 <- 1.365230; beta1 <- -2.138493; beta2 <- 12.444185
beta3 <- -15.565063; tau1 <- 1.865193; tau2 <- 2.045943
SM3[23] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 1. december 2016
beta0 <- 1.516247; beta1 <- -2.337247; beta2 <- 11.993026
beta3 <- -15.996825; tau1 <- 1.397167; tau2 <- 1.588318
SM3[24] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

## Parametre pre AAA dlhopisy  <- 2. január 2017 zo stránky ECB
beta0 <- 1.450341; beta1 <- -2.274341; beta2 <- 11.885632
beta3 <- -16.084991; tau1 <- 1.336620; tau2 <- 1.574650
SM3[25] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre AAA dlhopisy  1. február 2017
```

```
beta0 <-  1.811478; beta1 <--2.533478; beta2 <-11.696068
beta3 <--16.247855; tau1 <-1.369053; tau2 <-1.586887
SM3[26] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre AAA dlhopisy  1. marec 2017
beta0 <-1.722401; beta1 <--2.604401; beta2 <-11.645552
beta3 <--16.283611; tau1 <- 1.453633; tau2 <-  1.702165
SM3[27] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre AAA dlhopisy  3. apríl 2017
beta0 <-  1.684030; beta1 <--2.433030; beta2 <-11.698503
beta3 <--16.206668; tau1 <- 1.432278; tau2 <-  1.650098
SM3[28] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

SM4 <- c(rep(0,times=28))
#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 2. január 2015
beta0 <- 3.032044; beta1 <- -3.022044; beta2 <- 40.942429
beta3 <- -45.712723; tau1 <- 1.967964; tau2 <- 2.073825
SM4[1] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 2. február 2015
beta0 <- 2.292625; beta1 <- -2.282625; beta2 <- 28.104425
beta3 <- -31.634338; tau1 <- 2.075237; tau2 <- 2.162617
SM4[2] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 2. marec 2015
beta0 <- 2.297102; beta1 <- -2.287102; beta2 <- 25.616439
beta3 <- -29.518594; tau1 <- 2.014249; tau2 <- 2.109473
SM4[3] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 1. apríl 2015
beta0 <- 1.790813; beta1 <- -1.780813; beta2 <- 26.210600
beta3 <- -28.934353; tau1 <- 2.464597; tau2 <- 2.464870
SM4[4] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 4. máj 2015
beta0 <- 2.299311; beta1 <- -2.431311; beta2 <- 41.574403
beta3 <- -45.067539; tau1 <- 1.921513; tau2 <- 1.970464
SM4[5] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 1. jún 2015
beta0 <- 2.407860; beta1 <- -2.473214; beta2 <- 42.463240
beta3 <- -44.082182; tau1 <- 3.759882; tau2 <- 3.608333
SM4[6] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 1. júl 2015
beta0 <- 2.369988; beta1 <- -2.459645; beta2 <- 43.567538
beta3 <- -42.868392; tau1 <- 4.837416; tau2 <- 4.459809
SM4[7] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 3. august 2015
beta0 <- 2.060134; beta1 <- -2.136423; beta2 <- 43.189727
```

```
beta3 <- -43.210586; tau1 <- 4.706483; tau2 <- 4.372678
SM4[8] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 1. september 2015
beta0 <- 2.215271; beta1 <- -2.316968; beta2 <- 43.388406
beta3 <- -42.967278; tau1 <- 4.775160; tau2 <- 4.414142
SM4[9] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 1. október 2015
beta0 <- 2.518104; beta1 <- -2.606773; beta2 <- 42.550461
beta3 <- -43.788838; tau1 <- 4.479145; tau2 <- 4.246406
SM4[10] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 2. november 2015
beta0 <- 2.814925; beta1 <- -3.028925; beta2 <- 38.140260
beta3 <- -43.019178; tau1 <- 1.622141; tau2 <- 1.712592
SM4[11] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 1. december 2015
beta0 <- 2.908868; beta1 <- -3.208868; beta2 <- 37.961838
beta3 <- -43.172941; tau1 <- 1.746062; tau2 <- 1.856673
SM4[12] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 4. január 2016
beta0 <- 2.941722; beta1 <- -3.307722; beta2 <- 38.006096
beta3 <- -43.062931; tau1 <- 1.606516; tau2 <- 1.714455
SM4[13] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 1. február 2016
beta0 <- 2.648292; beta1 <- -2.935292; beta2 <- 38.032902
beta3 <- -43.014546; tau1 <- 1.624525; tau2 <- 1.727357
SM4[14] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 1. marec 2016
beta0 <- 2.534911; beta1 <- -2.882911; beta2 <- 38.075715
beta3 <- -42.981262; tau1 <- 1.594096; tau2 <- 1.704633
SM4[15] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 1. apríl 2016
beta0 <- 2.326060; beta1 <- -2.686060; beta2 <- 38.337241
beta3 <- -42.686978; tau1 <- 1.720725; tau2 <- 1.820835
SM4[16] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 2. máj 2016
beta0 <- 2.610224; beta1 <- -3.035224; beta2 <- 38.160516
beta3 <- -42.848240; tau1 <- 1.681822; tau2 <- 1.783954
SM4[17] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 1. jún 2016
beta0 <- 2.479195; beta1 <- -2.936195; beta2 <- 38.265269
beta3 <- -42.734178; tau1 <- 1.819134; tau2 <- 1.916762
SM4[18] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
```

```
#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 1. júl 2016
beta0 <- 1.862918; beta1 <- -2.361918; beta2 <- 38.604798
beta3 <- -42.385798; tau1 <- 1.729750; tau2 <- 1.813273
SM4[19] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 1. august 2016
beta0 <- 1.689801; beta1 <- -2.184801; beta2 <- 38.742657
beta3 <- -42.247032; tau1 <- 1.628672; tau2 <- 1.713133
SM4[20] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 1. september 2016
beta0 <- 1.818568; beta1 <- -2.340568; beta2 <- 38.668308
beta3 <- -42.317364;tau1 <- 1.653063; tau2 <- 1.741504
SM4[21] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 3. október 2016
beta0 <- 1.832891; beta1 <- -2.488891; beta2 <- 38.690362
beta3 <- -42.290254; tau1 <- 1.691659; tau2 <- 1.788282
SM4[22] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 1. november 2016
beta0 <- 2.254399; beta1 <- -2.866399; beta2 <- 38.482352
beta3 <- -42.446853; tau1 <- 1.640985; tau2 <- 1.733164
SM4[23] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 1. december 2016
beta0 <- 2.606894; beta1 <- -3.121223; beta2 <- 38.133573
beta3 <- -42.710976; tau1 <- 1.658576; tau2 <- 1.736066
SM4[24] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 2. január 2017
beta0 <- 2.443636; beta1 <- -3.052636; beta2 <- 37.937410
beta3 <- -42.900472; tau1 <- 1.434069; tau2 <- 1.537153
SM4[25] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 1. február 2017
beta0  <- 2.941035; beta1 <- -3.399035; beta2 <-37.659618
beta3 <--43.159573;tau1 <-1.416033; tau2 <-1.506041
SM4[26] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 1. marec 2017
beta0 <-2.784572; beta1 <--3.301531; beta2 <-37.857833
beta3 <--42.955964; tau1 <-1.612617; tau2 <-1.693902
SM4[27] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny 3. apríl 2017
beta0 <-  2.857127; beta1 <--3.425618; beta2 <-37.823036
beta3 <--42.957370; tau1 <-  1.534703; tau2 <-  1.626469
SM4[28] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
```

Príloha F.

Programové kódy v jazyku `R` pre stresové scenáre

Pred spustením Prílohy F je nutné spustiť Prílohu A a Prílohu D. Výsledky sú zhrnuté v Tabuľke 6.

```
CFPV <- function(qq,fromAge,fromMonth,alfa,beta,SM){
  pp <- as.vector(1 - qq)
  n <- length(qq) - fromAge - 1
  S_r <- 12 * SM
  cc <- seq(from=1, to=12*n, by=1)
  z <- cc/12
  fP <- rep(0, times=12*n)
  for(j in 1:(12*n)) { fP[j] <- exp(-integrate(SV.fz,0,z[j])$value) }
  CFPV <- (S_r * (1/12)* balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,n*12) %*% fP +
           S_r * alfa + S_r * axn_beta(pp,qq,fromAge,fromMonth,beta) +
           S_r * MA1_xn(qq,fromAge,fromMonth,7) + N)/(1-(1-delta)*
           exp(-integrate(SV.fz, 0, (1/12))$value)*
           (1-balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,n)[1]))
  return(CFPV)
}

x <- 62
P <- 10000
alfa <- 0.06
beta <- 0.002
delta <- 0.05
N <- 50
#Parametre pre AAA dlhopisy 3. apríl 2017
beta0 <-  1.684030
beta1 <--2.433030
beta2 <-11.698503
beta3 <--16.206668
tau1 <- 1.432278
tau2 <-  1.650098

#výška dávky sa vypočítala pri konštantnej technickej úrokovej miere i=0.007
SM <- 42.43392
P-CFPV(qq,fromAge=x,1,alfa,beta,SM)

#výška dávky sa vypočítala pri konštantnej technickej úrokovej miere i=0.012
SM <- 44.96275
P-CFPV(qq,fromAge=x,1,alfa,beta,SM)

#výška dávky sa vypočítala pri konštantnej technickej úrokovej miere i=0.015
SM <- 46.50748
P-CFPV(qq,fromAge=x,1,alfa,beta,SM)

#výška dávky sa vypočítala pri konštantnej technickej úrokovej miere i=0.019
SM <- 48.59754
P-CFPV(qq,fromAge=x,1,alfa,beta,SM)
```

Príloha G.

Programové kódy v jazyku `R` pre 2. model

Pred spustením Prílohy G je nutné spustiť Prílohu A. Táto príloha obsahuje funkciu `axn_polehotny_b` pre implementovanie vzorca (28), funkciu `axn_beta` pre implementovanie vzorca (31) vynásobené s β ([1]), funkciu `MA1_xn` pre implementovanie tzv. 7-ročnej garancie na základe vzorca (27) vynásobené s $\frac{1}{12}$ a funkciu pre výpočet výšky mesačnej dôchodkovej dávky na základe vzorca (30).

```
# polehotný dôchodok pre výpočet rezervy
# za využitia Balducciho predpokladu
axn_polehotny_b <- function(pp,fromAge,fromMonth,n){
  lin_pp <- lin_p(pp)
  monthCount <- n * 12
  axnb <- rep(0, monthCount)
  for (j in 0:(n-1)) {
    for (i in 1:12) {
      bpp <- balducci_p(lin_pp[seq(i,(12*(length(pp)-1) +i),by = 12)],
              fromAge+j, i , monthCount-i-12*j+1)
      bpp <- bpp[1:(length(bpp)-1)]
      vp <- exp(-(monthCount-i-12*j+1)/12*SW.Rz((monthCount-i-12*j+1)/12))
      vp <- vp[1:(length(vp)-1)]
      axnb[12*j+i] <- 1/12 * sum(bpp * vp)
    }
  }
  return(axnb)
}

# polehotný odložený dôchodok za využitia rezervného vektora
axn_beta <- function(pp,qq,fromAge,fromMonth,beta){
  n <- length(qq) - fromAge - 1
  times <- n * 12
  axn_pol <- axn_polehotny_b(pp,fromAge,fromMonth,n)
  p <- balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,times)
  ax <- rep(0, times)
  for (t in 1:times) {
    ax[t] <- ((1/12) * beta * axn_pol[t] ) * exp(-(t/12)*SW.Rz(t/12)) * p[t]
  }
  return(sum(ax))
}

# Cena dodatočného poistenia na úmrtie,
# kde n je doba legislatívne určenej dĺžky trvania poistenia
MA1_xn <- function(qq,fromAge,fromMonth,n){
  pp <- as.vector(1-qq)
  times <- n * 12
  month <- fromMonth
  balducci_umrtie <- bald_q(lin_q(qq),fromAge,fromMonth,n)[1:times]
  bald_prezitie <- rep(0, times)
  for(t in 1:times){
    bald_prezitie[t] <- balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,times)[t]
```

```
  }
  mAx <- rep(0, n)
  for(j in 1:(times)){
    mAx[j] <- (1/12)*(times-j) * exp(-((j+1)/12)*SW.Rz((j+1)/12))*
                bald_prezitie[j] * balducci_umrtie[j]
  }
  mA1xn <- sum(mAx)
  return(mA1xn)
}

# funkcia na výpočet dávky
davka <- function(qq,fromAge,fromMonth,alfa,beta,P){
  pp <- as.vector(1 - qq)
  n <- length(qq) - fromAge - 1
  cc <- seq(from=1, to=12*n, by=1)
  z <- cc/12
  davkaS <- (1/12) * ( (P*(1-(1-delta)*exp((-1/12)*
            SW.Rz(1/12))*(1-balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,n)[1]))-N) /
            (alfa + (1/12)*sum(balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,n*12)*
            exp(-z*SW.Rz(z))) +
            axn_beta(pp, qq, fromAge, fromMonth, beta) +
            MA1_xn(qq, fromAge, fromMonth, 7)))
  return(davkaS)
}
```

Príloha H.

V tejto prílohe je uvedený príklad použitia 2. modelu v prostredí softvéru `R`.

Pred spustením Prílohy H je nutné spustiť Prílohu A a Prílohu G. Výsledky sa nachádzajú v Tabuľke 7 a v Tabuľke 8.

```
alfa <- 0.06
beta <- 0.002
N <- 50
x <- 62
P <- 10000
delta <- 0.05
library(SmithWilsonYieldCurve)

SM2 <- c(rep(0,times=27))
zz <- c(2, 5, 10)
xi2 <- matrix(c(rep(0,times=81)),nrow=27, ncol=3, byrow=TRUE)
alpha <- 0.3
#UFR <- 0.042

#jan. 2015
vynosy <- c(-0.0039, 0.0055, 0.011)
UFR <- 3.032044/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                  Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[1,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[1] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
par(mfrow=c(3,3))
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Január 2015",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#---------------------------------------------------------------------------
#febr. 2015
vynosy <- c(-0.009, 0.0057, 0.0066)
UFR <- 2.292625/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                  Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[2,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[2] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
```

```
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Február 2015",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#---------------------------------------------------------------------------
#marec 2015
vynosy <- c(-0.0109, 0.0017, 0.0052)
UFR <- 2.297102/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[3,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[3] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Marec 2015",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#---------------------------------------------------------------------------
#apríl 2015
vynosy <- c(-0.0132, 0.0001, 0.0096)
UFR <- 1.790813/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[4,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[4] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Apríl 2015",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#--------------------------------------------------------------------------
#máj 2015
vynosy <- c(-0.0154, 0.0005, 0.0092)
UFR <- 2.299311/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
```

```
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[5,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[5] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Máj 2015",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#------------------------------------------------------------------------
#jún 2015
vynosy <- c(-0.0177, -0.0011, 0.0115)
UFR <- 2.407860/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[6,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[6] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Jún 2015",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#------------------------------------------------------------------------
#júl 2015
vynosy <- c(-0.0205, -0.0017, 0.0125)
UFR <- 2.369988/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[7,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[7] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Júl 2015",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#------------------------------------------------------------------------
#august 2015
```

```
vynosy <- c(-0.0235, -0.0024, 0.0099)
UFR <- 2.060134/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[8,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[8] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="August 2015",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#---------------------------------------------------------------------------
#sept. 2015
vynosy <- c(-0.0269, -0.0031, 0.0089)
UFR <- 2.215271/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[9,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[9] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="September 2015",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression(paste
(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#--------------------------------------------------------------------
#okt. 2015
vynosy <- c(-0.0305, -0.0038, 0.0075)
UFR <- 2.518104/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[10,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[10] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
par(mfrow=c(3,3))
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Október 2015",
```

```
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#--------------------------------------------------------------------------
#nov. 2015
vynosy <- c(-0.0044, -0.0045, 0.0071)
UFR <- 2.814925/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                  Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[11,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[11] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="November 2015",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#---------------------------------------------------------------------------
#dec. 2015
vynosy <- c(-0.0057, -0.0053, 0.0072)
UFR <- 2.908868/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                  Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[12,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[12] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="December 2015",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#---------------------------------------------------------------------------
#jan. 2016
vynosy <- c(-0.0071, -0.0061, 0.0071)
UFR <- 2.941722/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                  Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[13,] <- SW$xi
```

```
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[13] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Január 2016",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#-----------------------------------------------------------------------
#febr. 2016
vynosy <- c(-0.0083, -0.0069, 0.0056)
UFR <- 2.648292/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[14,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[14] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Február 2016",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#-----------------------------------------------------------------------
#marec 2016
vynosy <- c(-0.0098, -0.0077, 0.0043)
UFR <- 2.534911/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[15,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[15] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Marec 2016",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#-----------------------------------------------------------------------
#apríl 2016
vynosy <- c(-0.0114, -0.0087, 0.0038)
UFR <- 2.326060/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
```

```
                  Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[16,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[16] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Apríl 2016",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#--------------------------------------------------------------------------
#máj 2016
vynosy <- c(-0.013, -0.0096, 0.0041)
UFR <- 2.610224/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                  Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[17,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[17] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Máj 2016",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#--------------------------------------------------------------------------
#jún 2016
vynosy <- c(-0.0147, -0.0106, 0.0077)
UFR <- 2.479195/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                  Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[18,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[18] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Jún 2016",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
```

```
#-----------------------------------------------------------------------
#júl 2016
vynosy <- c(-0.0165, -0.0116, 0.0049)
UFR <- 1.862918/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[19,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[19] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
par(mfrow=c(3,3))
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Júl 2016",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#------------------------------------------------------------------------
#august 2016
vynosy <- c(-0.0184, -0.0126, 0.003)
UFR <- 1.689801/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[20,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[20] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="August 2016",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#------------------------------------------------------------------------
#sept. 2016
vynosy <- c(-0.0205, -0.0138, 0.0032)
UFR <- 1.818568/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[21,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[21] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
```

```
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="September 2016",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#-------------------------------------------------------------------------
#okt. 2016
vynosy <- c(-0.0226, -0.0149, 0.0042)
UFR <- 1.832891/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[22,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[22] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Október 2016",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#-------------------------------------------------------------------------
#nov. 2016
vynosy <- c(-0.0249, -0.0161, 0.0072)
UFR <- 2.254399/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[23,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[23] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="November 2016",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#------------------------------------------------------------------------
# VDSVD, dec. 2016: http://www.nbs.sk/_img/Documents/STATIST/US/VDSVD_CR.xls
vynosy <- c(-0.0273, -0.0174, 0.0101)
UFR <- 2.606894/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
# fitovanie SW-modelu
```

```
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[24,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[24] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="December 2016",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#---------------------------------------------------------------------------
#jan. 2017
vynosy <- c(-0.03, -0.0188, 0.0103)
UFR <- 2.443636/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[25,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[25] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Január 2017",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#----------------------------------------------------------------------------
#febr. 2017
vynosy <- c(-0.0326, -0.0201, 0.0109)
UFR <- 2.941035/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[26,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[26] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Február 2017",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
#---------------------------------------------------------------------------
#marec 2017
```

```
vynosy <- c(-0.0358, -0.0216, 0.0109)
UFR <- 2.784572/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                 Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
xi2[27,] <- SW$xi
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2[27] <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="Marec 2017",
xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression
(paste(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
```

Príloha I.

Programové kódy v jazyku `R` pre stresový scenár

Pred spustením Prílohy I je nutné spustiť Prílohu A a Prílohu G. Výsledky sú uvedené v Tabuľke 9.

```
x <- 62; P <- 10000
alfa <- 0.06; beta <- 0.002; delta <- 0.05
N <- 50

CFPV <- function(qq,fromAge,fromMonth,alfa,beta,SM){
  pp <- as.vector(1 - qq)
  n <- length(qq) - fromAge - 1
  S_r <- 12 * SM
  cc <- seq(from=1, to=12*n, by=1)
  z <- cc/12
  CFPV <- (S_r * sum((1/12)* balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,n*12) *
             exp((-z)*SW.Rz(z))) +
             S_r * alfa + S_r * axn_beta(pp,qq,fromAge,fromMonth,beta) +
             S_r * MA1_xn(qq,fromAge,fromMonth,7) + N)/(1-(1-delta)*
             exp((-1/12)*SW.Rz(1/12))*
             (1-balducci_p(pp,fromAge,fromMonth,n)[1]))
  return(CFPV)
}

library(SmithWilsonYieldCurve)
zz <- c(2,5, 10)
alpha <- 0.3
#marec 2017
vynosy <- c(-0.0358, -0.0216, 0.0109)
UFR <- 0.042
#UFR <- 2.784572/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                            Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }

#Výška dávky sa vypočítala pri konštantnej technickej úrokovej miere i=0.007
SM <- 42.43392
P-CFPV(qq,fromAge=x,1,alfa,beta,SM)
#Výška dávky sa vypočítala pri konštantnej technickej úrokovej miere i=0.012
SM <- 44.96275
P-CFPV(qq,fromAge=x,1,alfa,beta,SM)
#Výška dávky sa vypočítala pri konštantnej technickej úrokovej miere i=0.015
SM <- 46.50748
P-CFPV(qq,fromAge=x,1,alfa,beta,SM)
#Výška dávky sa vypočítala pri konštantnej technickej úrokovej miere i=0.019
SM <- 48.59754
P-CFPV(qq,fromAge=x,1,alfa,beta,SM)
```

Príloha J.

Programový kód v jazyku R pre výpočet dôchodku prof. Brunovského pomocou Základného modelu

Pred spustením Prílohy J je nutné spustiť Prílohu A a Prílohu B. Výsledky sú uvedené v Tabuľke 10.

```
x <- 80; P <- 13402.09
alfa <- 0.06; beta <- 0.002; delta <- 0.05; N <- 50

# LCA-DLHOVEK, NOVÝ MODEL, HMD 1950-2014 -> 2015-2063, total population
# ročné pravdepodobnosti úmrtia Lee Carter
qq <- c(rep(0,times=62),0.0134487956396, 0.0143832069457, 0.0153509179303,
        0.0163628754127, 0.0174336005100, 0.0185815447097, 0.0198293973495,
        0.0212042960052, 0.0227379437193, 0.0244666610960, 0.0264313800300,
        0.0286775244004, 0.0312546431940, 0.0342155937617, 0.0376150508714,
        0.0415071737367, 0.0459424242297, 0.0509638010910, 0.0566031027011,
        0.0628781606484, 0.0697921460395, 0.0773358764215, 0.0854934578893,
        0.0942506712546, 0.1036045361017, 0.1135718443620, 0.1241944415453,
        0.1355396996362, 0.1476957557107, 0.1607623304004, 0.1748389696565,
        0.1900131808162, 0.2063510798881, 0.2238927922139, 0.2426539291509,
        0.2626330502094, 0.2838233328394, 0.3062251202001, 0.3298555410118,
        0.3547536201197, 0.3809784001857, 0.4085907421692, 0.4376270909908,
        0.4680763698888, 0.4999005723447, 0.5330496064505, 0.5674739689482,
        0.6031150057468, 0.6399012793944,1)
pp <- 1-qq

ia <- 0.007
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)

ia <- 0
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)

ia <- 0.002
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)

ia <- 0.012
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)

ia <- 0.015
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)

ia <- 0.019
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)

# LCA dlhovek dolná
qq <- c(rep(0,times=62),0.0128682907512, 0.0134441258580, 0.0140373418103,
        0.0146374246541, 0.0152506527073, 0.0158909367330, 0.0165769929710,
        0.0173309787491, 0.0181778998921, 0.0191456123934, 0.0202652162228,
        0.0215715355769, 0.0231033131777, 0.0249027482865, 0.0270140850940,
        0.0294811166935, 0.0323437265953, 0.0356339552025, 0.0393725124821,
```

```
        0.0435670198456, 0.0482133146682, 0.0533006551046, 0.0588205792351,
        0.0647777988782, 0.0712004181598, 0.0781465024890, 0.0857047489596,
        0.0939884148748, 0.1031232103268, 0.1132311549559, 0.1244133421435,
        0.1367352003185, 0.1502181001267, 0.1648406544260, 0.1805513465705,
        0.1972911409482, 0.2150211637099, 0.2337476784544, 0.2535366312880,
        0.2745162386396, 0.2968650098956, 0.3207670205596, 0.3463534292675,
        0.3736546038647, 0.4026543586540, 0.4333320494015, 0.4656850805451,
        0.4997041724309, 0.5353638644257)
pp <- 1-qq

ia <- 0.007
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)
ia <- 0
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)
ia <- 0.002
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)
ia <- 0.012
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)
ia <- 0.015
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)
ia <- 0.019
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)

#LCA dlhovek horná
qq <- c(rep(0,times=62),0.0140553026114, 0.0153873753827, 0.0167863759268,
        0.0182898475164, 0.0199258741103, 0.0217227310379, 0.0237122942513,
        0.0259319425695, 0.0284254967285, 0.0312432380979, 0.0344411028162,
        0.0380792786941, 0.0422205104408, 0.0469284014694, 0.0522658829164,
        0.0582938231211, 0.0650695263445, 0.0726447080946, 0.0810625464869,
        0.0903536798976, 0.1005315532942, 0.1115881872243, 0.1234920091298,
        0.1361895387027, 0.1496122100313, 0.1636884084727, 0.1783591793873,
        0.1935945804021, 0.2094069016317, 0.2258573256434, 0.2430539610860,
        0.2611410965274, 0.2802813901057, 0.3006340887734, 0.3223330811612,
        0.3454686567548, 0.3700763482121, 0.3961352094908, 0.4235759633313,
        0.4522958219196, 0.4821771010509, 0.5131125391205, 0.5450261943586,
        0.5778802180800, 0.6116398893170, 0.6462484488899, 0.6816275616547,
        0.7176889656592, 0.7543380147390,1)
pp <- 1-qq

ia <- 0.007
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)
ia <- 0
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)
ia <- 0.002
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)
ia <- 0.012
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)
ia <- 0.015
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)
ia <- 0.019
SM <- davka(qq=qq, x, 1, alfa, beta, P)
```

Príloha K.

Programový kód v jazyku R pre výpočet dôchodku prof. Brunovského pomocou 1. modelu

Pred spustením Prílohy K je nutné spustiť Prílohu A a Prílohu D. Výsledky sa nachádzajú v Tabuľke 11.

```
x <- 80; P <- 13402.09
alfa <- 0.06; beta <- 0.002; delta <- 0.05; N <- 50

## Parametre pre AAA dlhopisy <- 1 september 2015
beta0 <- 0.850118; beta1 <- -1.113538; beta2 <- -10.642031
beta3 <- 12.385633; tau1 <- 4.770541; tau2 <- 6.554711

# LCA-DLHOVEK, NOVÝ MODEL, HMD 1950-2014 -> 2015-2063, total population
# ročné pravdepodobnosti úmrtia
qq <- c(rep(0,times=62),0.0134487956396, 0.0143832069457, 0.0153509179303,
        0.0163628754127, 0.0174336005100, 0.0185815447097, 0.0198293973495,
        0.0212042960052, 0.0227379437193, 0.0244666610960, 0.0264313800300,
        0.0286775244004, 0.0312546431940, 0.0342155937617, 0.0376150508714,
        0.0415071737367, 0.0459424242297, 0.0509638010910, 0.0566031027011,
        0.0628781606484, 0.0697921460395, 0.0773358764215, 0.0854934578893,
        0.0942506712546, 0.1036045361017, 0.1135718443620, 0.1241944415453,
        0.1355396996362, 0.1476957557107, 0.1607623304004, 0.1748389696565,
        0.1900131808162, 0.2063510798881, 0.2238927922139, 0.2426539291509,
        0.2626330502094, 0.2838233328394, 0.3062251202001, 0.3298555410118,
        0.3547536201197, 0.3809784001857, 0.4085907421692, 0.4376270909908,
        0.4680763698888, 0.4999005723447, 0.5330496064505, 0.5674739689482,
        0.6031150057468, 0.6399012793944)
pp <- 1-qq
SM <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

# LCA dlhovek dolná
qq <- c(rep(0,times=62),0.0128682907512, 0.0134441258580, 0.0140373418103,
      0.0146374246541, 0.0152506527073, 0.0158909367330, 0.0165769929710,
      0.0173309787491, 0.0181778998921, 0.0191456123934, 0.0202652162228,
      0.0215715355769, 0.0231033131777, 0.0249027482865, 0.0270140850940,
      0.0294811166935, 0.0323437265953, 0.0356339552025, 0.0393725124821,
      0.0435670198456, 0.0482133146682, 0.0533006551046, 0.0588205792351,
      0.0647777988782, 0.0712004181598, 0.0781465024890, 0.0857047489596,
      0.0939884148748, 0.1031232103268, 0.1132311549559, 0.1244133421435,
      0.1367352003185, 0.1502181001267, 0.1648406544260, 0.1805513465705,
      0.1972911409482, 0.2150211637099, 0.2337476784544, 0.2535366312880,
      0.2745162386396, 0.2968650098956, 0.3207670205596, 0.3463534292675,
      0.3736546038647, 0.4026543586540, 0.4333320494015, 0.4656850805451,
      0.4997041724309, 0.5353638644257)
pp <- 1-qq
SM <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#LCA dlhovek horná
qq <- c(rep(0,times=62),0.0140553026114, 0.0153873753827, 0.0167863759268,
```

```
      0.0182898475164, 0.0199258741103, 0.0217227310379, 0.0237122942513,
      0.0259319425695, 0.0284254967285, 0.0312432380979, 0.0344411028162,
      0.0380792786941, 0.0422205104408, 0.0469284014694, 0.0522658829164,
      0.0582938231211, 0.0650695263445, 0.0726447080946, 0.0810625464869,
      0.0903536798976, 0.1005315532942, 0.1115881872243, 0.1234920091298,
      0.1361895387027, 0.1496122100313, 0.1636884084727, 0.1783591793873,
      0.1935945804021, 0.2094069016317, 0.2258573256434, 0.2430539610860,
      0.2611410965274, 0.2802813901057, 0.3006340887734, 0.3223330811612,
      0.3454686567548, 0.3700763482121, 0.3961352094908, 0.4235759633313,
      0.4522958219196, 0.4821771010509, 0.5131125391205, 0.5450261943586,
      0.5778802180800, 0.6116398893170, 0.6462484488899, 0.6816275616547,
      0.7176889656592, 0.7543380147390)
pp <- 1-qq
SM <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#Parametre pre všetky dlhopisy eurozóny <- 1 september 2015
beta0 <- 2.215271; beta1 <- -2.316968; beta2 <- 43.388406
beta3 <- -42.967278; tau1 <- 4.775160; tau2 <- 4.414142

# LCA-DLHOVEK, NOVÝ MODEL, HMD 1950-2014 -> 2015-2063, total population
# ročné pravdepodobnosti úmrtia
qq <- c(rep(0,times=62),0.0134487956396, 0.0143832069457, 0.0153509179303,
        0.0163628754127, 0.0174336005100, 0.0185815447097, 0.0198293973495,
        0.0212042960052, 0.0227379437193, 0.0244666610960, 0.0264313800300,
        0.0286775244004, 0.0312546431940, 0.0342155937617, 0.0376150508714,
        0.0415071737367, 0.0459424242297, 0.0509638010910, 0.0566031027011,
        0.0628781606484, 0.0697921460395, 0.0773358764215, 0.0854934578893,
        0.0942506712546, 0.1036045361017, 0.1135718443620, 0.1241944415453,
        0.1355396996362, 0.1476957557107, 0.1607623304004, 0.1748389696565,
        0.1900131808162, 0.2063510798881, 0.2238927922139, 0.2426539291509,
        0.2626330502094, 0.2838233328394, 0.3062251202001, 0.3298555410118,
        0.3547536201197, 0.3809784001857, 0.4085907421692, 0.4376270909908,
        0.4680763698888, 0.4999005723447, 0.5330496064505, 0.5674739689482,
        0.6031150057468, 0.6399012793944)
pp <- 1-qq
SM <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

# LCA dlhovek dolná
qq <- c(rep(0,times=62),0.0128682907512, 0.0134441258580, 0.0140373418103,
        0.0146374246541, 0.0152506527073, 0.0158909367330, 0.0165769929710,
        0.0173309787491, 0.0181778998921, 0.0191456123934, 0.0202652162228,
        0.0215715355769, 0.0231033131777, 0.0249027482865, 0.0270140850940,
        0.0294811166935, 0.0323437265953, 0.0356339552025, 0.0393725124821,
        0.0435670198456, 0.0482133146682, 0.0533006551046, 0.0588205792351,
        0.0647777988782, 0.0712004181598, 0.0781465024890, 0.0857047489596,
        0.0939884148748, 0.1031232103268, 0.1132311549559, 0.1244133421435,
        0.1367352003185, 0.1502181001267, 0.1648406544260, 0.1805513465705,
        0.1972911409482, 0.2150211637099, 0.2337476784544, 0.2535366312880,
        0.2745162386396, 0.2968650098956, 0.3207670205596, 0.3463534292675,
        0.3736546038647, 0.4026543586540, 0.4333320494015, 0.4656850805451,
        0.4997041724309, 0.5353638644257)
pp <- 1-qq
```

```
SM <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)

#LCA dlhovek horná
qq <- c(rep(0,times=62),0.0140553026114, 0.0153873753827, 0.0167863759268,
        0.0182898475164, 0.0199258741103, 0.0217227310379, 0.0237122942513,
        0.0259319425695, 0.0284254967285, 0.0312432380979, 0.0344411028162,
        0.0380792786941, 0.0422205104408, 0.0469284014694, 0.0522658829164,
        0.0582938231211, 0.0650695263445, 0.0726447080946, 0.0810625464869,
        0.0903536798976, 0.1005315532942, 0.1115881872243, 0.1234920091298,
        0.1361895387027, 0.1496122100313, 0.1636884084727, 0.1783591793873,
        0.1935945804021, 0.2094069016317, 0.2258573256434, 0.2430539610860,
        0.2611410965274, 0.2802813901057, 0.3006340887734, 0.3223330811612,
        0.3454686567548, 0.3700763482121, 0.3961352094908, 0.4235759633313,
        0.4522958219196, 0.4821771010509, 0.5131125391205, 0.5450261943586,
        0.5778802180800, 0.6116398893170, 0.6462484488899, 0.6816275616547,
        0.7176889656592, 0.7543380147390)
pp <- 1-qq
SM <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
```

Príloha L.

Programový kód v jazyku R pre výpočet dôchodku prof. Brunovského pomocou 2. modelu

Pred spustením Prílohy L je nutné spustiť Prílohu A a Prílohu G. Výsledky sa nachádzajú v Tabuľke 12.

```
alfa <- 0.06
beta <- 0.002
N <- 50
x <- 80
P <- 13402.09
delta <- 0.05
# LCA-DLHOVEK, NOVÝ MODEL, HMD 1950-2014 -> 2015-2063, total population
# ročné pravdepodobnosti úmrtia
qq <- c(rep(0,times=62),0.0134487956396, 0.0143832069457, 0.0153509179303,
        0.0163628754127, 0.0174336005100, 0.0185815447097, 0.0198293973495,
        0.0212042960052, 0.0227379437193, 0.0244666610960, 0.0264313800300,
        0.0286775244004, 0.0312546431940, 0.0342155937617, 0.0376150508714,
        0.0415071737367, 0.0459424242297, 0.0509638010910, 0.0566031027011,
        0.0628781606484, 0.0697921460395, 0.0773358764215, 0.0854934578893,
        0.0942506712546, 0.1036045361017, 0.1135718443620, 0.1241944415453,
        0.1355396996362, 0.1476957557107, 0.1607623304004, 0.1748389696565,
        0.1900131808162, 0.2063510798881, 0.2238927922139, 0.2426539291509,
        0.2626330502094, 0.2838233328394, 0.3062251202001, 0.3298555410118,
        0.3547536201197, 0.3809784001857, 0.4085907421692, 0.4376270909908,
        0.4680763698888, 0.4999005723447, 0.5330496064505, 0.5674739689482,
        0.6031150057468, 0.6399012793944)

pp <- 1-qq

library(SmithWilsonYieldCurve)
alpha <- 0.3
zz <- c(2, 5, 10)
#UFR <- 0.042

#sept. 2015
vynosy <- c(-0.0269, -0.0031, 0.0089)
UFR <- 2.215271/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                            Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
      ufr=UFR, alpha=alpha)
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="september 2015",
      xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
```

```
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression(paste
(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)

# LCA dlhovek dolná
qq <- c(rep(0,times=62),0.0128682907512, 0.0134441258580, 0.0140373418103,
        0.0146374246541, 0.0152506527073, 0.0158909367330, 0.0165769929710,
        0.0173309787491, 0.0181778998921, 0.0191456123934, 0.0202652162228,
        0.0215715355769, 0.0231033131777, 0.0249027482865, 0.0270140850940,
        0.0294811166935, 0.0323437265953, 0.0356339552025, 0.0393725124821,
        0.0435670198456, 0.0482133146682, 0.0533006551046, 0.0588205792351,
        0.0647777988782, 0.0712004181598, 0.0781465024890, 0.0857047489596,
        0.0939884148748, 0.1031232103268, 0.1132311549559, 0.1244133421435,
        0.1367352003185, 0.1502181001267, 0.1648406544260, 0.1805513465705,
        0.1972911409482, 0.2150211637099, 0.2337476784544, 0.2535366312880,
        0.2745162386396, 0.2968650098956, 0.3207670205596, 0.3463534292675,
        0.3736546038647, 0.4026543586540, 0.4333320494015, 0.4656850805451,
        0.4997041724309, 0.5353638644257)
pp <- 1-qq

#sept. 2015
vynosy <- c(-0.0269, -0.0031, 0.0089)
UFR <- 2.215271/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                            Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
                                           ufr=UFR, alpha=alpha)
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM2 <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="september 2015",
      xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression(paste
(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)

#LCA dlhovek horná
qq <- c(rep(0,times=62),0.0140553026114, 0.0153873753827, 0.0167863759268,
        0.0182898475164, 0.0199258741103, 0.0217227310379, 0.0237122942513,
        0.0259319425695, 0.0284254967285, 0.0312432380979, 0.0344411028162,
        0.0380792786941, 0.0422205104408, 0.0469284014694, 0.0522658829164,
        0.0582938231211, 0.0650695263445, 0.0726447080946, 0.0810625464869,
        0.0903536798976, 0.1005315532942, 0.1115881872243, 0.1234920091298,
        0.1361895387027, 0.1496122100313, 0.1636884084727, 0.1783591793873,
        0.1935945804021, 0.2094069016317, 0.2258573256434, 0.2430539610860,
        0.2611410965274, 0.2802813901057, 0.3006340887734, 0.3223330811612,
        0.3454686567548, 0.3700763482121, 0.3961352094908, 0.4235759633313,
        0.4522958219196, 0.4821771010509, 0.5131125391205, 0.5450261943586,
        0.5778802180800, 0.6116398893170, 0.6462484488899, 0.6816275616547,
        0.7176889656592, 0.7543380147390)
pp <- 1-qq
```

```
#sept. 2015
vynosy <- c(-0.0269, -0.0031, 0.0089)
UFR <- 2.215271/100
dfInstruments <- data.frame(Type=rep("LIBOR", times=length(zz)),
                            Tenor=zz, Rate=vynosy)
colnames(dfInstruments)  <-  c("Type", "Tenor", "Rate")
SW <- fFitSmithWilsonYieldCurveToInstruments(dfInstruments,
                                             ufr=UFR, alpha=alpha)
SW.Rz <- function(z) {-log(SW$P(z))/z }
SM3 <- davka(qq, x, 1, alfa, beta, P)
y.SW <- c(SW.Rz(2),SW.Rz(5),SW.Rz(10))
R_squared <- round(cor(vynosy,y.SW)^2, 4)
curve(SW.Rz, from=0, to=50, col="Navy",main="september 2015",
      xlab="z (doba do maturity)",ylab="R(z)")
points(zz, vynosy, pch=3, col="red", cex=1)
legend("bottomright",legend=c(eval(substitute( expression(paste
(R^2," = ",R_squared)), list(R_squared=R_squared) ))),bty="n",cex=1.2)
```