

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



VLASTNOSTI HODNOTOVEJ FUNKCIE ÚLOHY
PARAMETRICKÉHO KVADRATICKÉHO
PROGRAMOVANIA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2018

Bc. Maroš BOBULSKÝ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**VLASTNOSTI HODNOTOVEJ FUNKCIE ÚLOHY
PARAMETRICKÉHO KVADRATICKEHO
PROGRAMOVANIA**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.



ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Maroš Bobulský

Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednooborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)

Študijný odbor: aplikovaná matematika

Typ záverečnej práce: diplomová

Jazyk záverečnej práce: slovenský

Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Vlastnosti hodnotovej funkcie úlohy parametrického kvadratického programovania
Properties of the value function of a parametric quadratic programming problem

Anotácia: Analýza hladkosti hodnotovej funkcie úlohy parametrického kvadratického programovania vzhľadom na parametre. Využitie výsledkov pri kvalitatívnom a kvantitatívnom vyhodnocovaní optimálneho zloženia portfólia.

Vedúci: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.

Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.

Dátum zadania: 25.01.2017

Dátum schválenia: 27.01.2017

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.

garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie Touto cestou sa chcem pod'akovat svojmu vedúcemu diplomovej práce prof. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, DrSc. za ochotu, pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj za možnosť zúčastniť sa medzinárodného projektu ENANEFA z oblasti finančnej matematiky v Nemecku, vo Wuppertali.

Abstrakt v štátom jazyku

BOBULSKÝ, Maroš: Vlastnosti hodnotovej funkcie úlohy parametrického kvadratického programovania [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc., Bratislava, 2018, 55 s.

Hodnotová funkcia, o ktorej vlastnostiach je táto práca, vzniká ako pomocná úloha pri transformácii nelineárnej Hamilton-Jacobi-Bellmanovej rovnice na jednoduchší kvázilineárny parabolický Cauchyho problém pomocou Riccatiho transformácie. Táto funkcia je sama osebe parametrická konvexná optimalizačná úloha. V tejto práci sa budeme venovať jej vlastnostiam. Jej vstupnými údajmi sú očakávané výnosy a kovariančná matica aktív v portfóliu investora. Jej priamym výstupom sú váhy rozloženia prostriedkov do konkrétnych aktív vedúce k maximalizácii zisku. Spomínané vstupy však ľahko odhadnúť, čo znedôveryhodňuje aj výsledky. Preto zavedieme spôsob robustnej obmeny tejto úlohy. Definujeme filtračné matice, ktoré zneistia výber správnych parametrov. Tento problém riešime pomocou tzv. worst-case optimalizácie, kedy sme opatrní a v každom bode definičného oboru optimalizácie pôvodnej úlohy si vyberáme za smerodajný najhorší možný parameter z príslušnej množiny parametrov. V našom prípade túto množinu tvoria filtračné matice. Takúto úlohu následne v tejto práci skúmame a rozoberáme jej variácie.

Kľúčové slová: Hodnotová funkcia, Hamilton-Jacobi-Bellmanova rovnica, Robustná optimalizácia, Filtračné matice

Abstract

BOBULSKÝ, Maroš: Properties of the value function of a parametric quadratic programming problem [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc., Bratislava, 2018, 55p.

Value function, the main topic of this thesis, is an auxiliary problem which arises in transformation of the non-linear Hamilton-Jacobi-Bellman equation for a simpler quasilinear parabolic Cauchy problem. This transformation is done by means of Riccati transformation. The value function is itself a parametric convex optimization problem. In this work we will deal with its properties. Its inputs are the expected returns and the covariance matrix of assets in the investor's portfolio. Its direct outputs are the weights of the redistribution of funds into specific assets in order to maximize expected profit. However, needed inputs are difficult to predict which causes that also the results are not very credible. Therefore, we will introduce a robust way of changing this task. We define filter matrices that make the selection of the right parameters more uncertain. Then, we solve this problem by the so-called worst-case optimization, when at every point of the domain of optimization problem we deliberately choose the worst possible parameter from the relevant uncertainty set of parameters. In our case, this set of uncertainty consists of filter matrices. Our main goal is to examine this problem and discuss its variations afterwards.

Keywords: Value Function, Hamilton-Jacobi-Bellman Equation, Robust Optimization, Filter matrices

Obsah

Úvod	9
1 Hodnotová funkcia	12
1.1 Hamilton–Jacobi–Bellmanova rovnica (HJB)	14
1.1.1 HJB v základnom tvare	15
1.1.2 Riccatiho transformácia	16
1.1.3 Riešenie HJB rovnice	18
1.2 Vlastnosti hodnotovej funkcie	19
1.2.1 Spojitosť	19
1.2.2 Výššia hladkosť	20
1.2.3 Druhá derivácia	21
1.3 Robustná optimalizácia	22
1.3.1 Diskrétny typ neistoty	23
1.3.2 Elipsoid neistoty	23
1.3.3 Neistota v podobe kvádra	24
2 Filtračné matice	25
2.1 Robustná úloha pomocou filtrov	25
2.2 Transformácia úlohy s filtrami	26
2.3 Zhladzovacie filtre	30
2.3.1 Deterministické množiny	31
2.3.2 Náhodne generovaná množina filtrov	34
2.3.3 Všeobecný 2×2 filter	36
2.4 Filtre redukujúce počet dát	38
3 Synchronizácia dát	43
3.1 Redukovanie dát zhladením	43
3.2 Analýza odchýlok	46
3.3 Ukazovateľ κ	48
3.4 Možné rozšírenia	50
Záver	52

Zoznam použitej literatúry **54**

Príloha A **55**

Úvod

Vo svete investovania nie je dôležité len to, čo kúpiť a čo predať, ale aj koľko toho kúpiť a koľko toho predať. Hamilton-Jacobi-Bellmanova rovnica (HJB) sa snaží riešiť práve tento problém. Jej riešenia ponúkajú také investičné stratégie, ktoré by v určitom konečnom čase mali viesť k maximalizácii investorovej funkcie užitočnosti. Tieto stratégie sú ponúkané v podobe optimálneho váhového rozloženia nad portfóliom aktív pre každý čas $t \in (0, T)$.

Hamilton-Jacobi-Bellmanova rovnica je nelineárna a ťažko riešiteľná. Podľa Kiliánovej a Ševčoviča v [7] však existuje zjednodušenie v podobe Riccatiho transformácie, pomocou ktorej vznikne pomocná diferenciálna rovnica (tzv. Cauchyho problém), ktorej riešenie vedie priamo k optimálnej odozve v podobe váh rozloženia prostriedkov do jednotlivých aktív. Táto pomocná rovnica už nie je plne nelineárna, ide o kvázilineárnu parabolickú rovnicu, ktorá sa dá numericky efektívne riešiť. Súčasťou tejto rovnice je aj takzvaná *hodnotová funkcia*, ktorá je sama osebe parametrický konvexný optimalizačný problém. Pomocou vyriešenia Cauchyho problému dostávame funkciu závislú od času a momentálnej hodnoty portfólia, ktorej hodnotu v danom čase pri konkrétnom stave prostriedkov považujeme za vstupný parameter spomínanej hodnotovej funkcie. Bezprostredným výstupom tejto hodnotovej funkcie sú optimálne váhy rozloženia portfólia. Takýmto spôsobom sa dokážeme dostať k najdôležitejším výstupným informáciám modelu bez priameho výpočtu funkcie, ktorá rieši HJB.

Táto práca sa bude venovať predovšetkým hodnotovej funkcií ako parametrickému konvexnému a v našom prípade dokonca kvadratickému problému, ktorá vzniká ako vedľajší produkt riešenia HJB pomocou Riccatiho transformácie. Budeme sa venovať jej správaniu vzhľadom na vstupný parameter, a to pre základný problém, no obzvlášť pre problém upravený. Špeciálne sa budeme venovať obmene hodnotovej funkcie na takzvanú robustnú úlohu. Robustnosť úloh je pomerne nový výraz a predstavuje úlohy, v ktorých parametre ovplyvňujúce tvar ohraničení nie sú úplne jasné, patria len nejakej množine neistoty. Existuje niekoľko možných spôsobov riešenia takýchto úloh. Tie popísali napr. Boyd s Vandenberghem v [4]. My sa budeme zaujímať predovšetkým o tzv. *worst-case* optimalizáciu, v ktoré sa pre každý bod definičného oboru, v rámci ktorého sa úloha optimalizuje, vyberie vždy ten najhorší možný parameter.

Robustnosť v našom prípade znamená neistotu v parametroch ako je očakávaný výnos a kovariancia medzi aktívami. Vyžadovať neistotu v týchto parametroch je odôvodnené. Vrámcí odhadovania správania sa náhodných procesov v budúcnosti nám totiž nestačí mať len dobré výpočtové modely. Tie sú nám vlastne nanič, ak nemáme správne vstupné údaje. A v tomto prípade je naozaj na zváženie, či to, čo do optimalizácie dosádzame, má aj nejakú výpovednú hodnotu. Odhadnúť správne napr. očakávané výnosy je veľmi náročné. Preto mierna dávka nedôvery v podobe zváženia viacerých parametrov namiesto jedného nezaškodí a naozaj má zmysel venovať tomu viac pozornosti. Ako si neskôr ukážeme, niekedy mierne zmeny vstupov veľmi ovplyvnia konečné zloženie portfólia. Týmto sa dostávame k cieľu tejto práce. Navrhнемe robustnú obmenu hodnotovej funkcie a tú budeme následne skúmať, čo sa napr. citlivosti na vstupy týka.

V prvej kapitole sa pridržíme už spomínaného článku Kilianovej a Ševčoviča [7]. Opíšeme odvodenie hodnotovej funkcie z HJB rovnice, spomenieme niektoré jej základné vlastnosti a neskôr podľa článku od Kilianovej a Trnovskej [8] zadefinujeme aj robustnú úlohu a jej možné obmeny.

V druhej kapitole sa zameriame na vlastný spôsob robustnosti. Zadefinujeme takzvané filtračné matice, ktoré vstupné dátá upravia, čím pozmenia ich disperziu. Pre rôzne filtre vzniknú rôzne disperzie, čím dostaneme do úlohy neistotu vo výbere tej správnej. Vo všeobecnosti, táto transformovaná úloha, vzhľadom na našu definíciu filtra, nie je vôbec triviálna. Preto ju budeme študovať, zjednodušovať, obracať a pomaly sa zoznamovať s jej vlastnosťami. Veríme, že táto snaha má zmysel. Filtrácia dát je možnou cestou k získaniu len tých informácií, ktoré zavážia a nazavádzajú.

V tretej kapitole sa pokúsime navrhnuť spôsob využitia filtračných matíc na reálnom finančnom trhu. Väčšina výpočtov vyžaduje, aby časové rady popisujúce historickú štruktúru vývoja cien boli rovnako dlhé a poskytované v pravidelných intervaloch k rovnakému časovému okamihu. To však nemusí byť pravda. Problém môže nastať napríklad vtedy, ak pre jednotlivé akcie v portfóliu čerpáme dátá z rôznych zdrojov. Jeden poskytovateľ môže zverejňovať ceny raz za deň, niekto iný, pre inú akciu, aj každú hodinu. Dáta si preto ešte pred výpočtom treba upraviť, naškálovať ich na rovnaké časové kroky. Filtračné matice nám pri tom pomôžu dátá zredukovať bez toho,

aby sme úplne zahodili informácie obsiahnuté v celom, zatiaľ neskrátenom, súbore. Nadbytočné údaje totiž nebude len vyhadzovať, začleníme ich do výpočtov na odhad nových naškálovaných dát.

1 Hodnotová funkcia

Ako sme už v úvode spomínali, hodnotová funkcia, ktorou sa budeme v tejto práci zaoberať, vzniká pri transformácii Hamilton–Jacobi–Bellmanovej rovnice ako pomocný optimalizačný problém. Pravdou však je, že jej konečná podoba sa da jednoducho vidieť a odvodiť aj z omnoho ľahšieho portfólio optimalizujúceho problému.

Na mysli máme konkrétny Markowitzov model. Ide o deterministickú statickú optimalizáciu nad portfóliom aktív, ktorej cieľom je maximalizovať výnos pri vopred zvolenej hranici rizika, ktorú nesmieme prekročiť. Výstupom sú váhy prerozdelenia financií do jednotlivých zložiek portfólia. Príklad možného výstupu môžeme nájsť na obrázku 1. Matematicky by sme problém mohli zapísť takto:

$$\begin{aligned} \max_{\theta \in \mathbb{R}^N} & \mu^T \theta \\ & \frac{1}{2} \theta^T \Sigma \theta \leq \frac{1}{2} \sigma^2, \\ & \sum_{i=1}^N \theta^i = 1, \\ & \theta \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Vektor $\mu \in \mathbb{R}^N$, kde $\mu^i = E(X^i)$, je vektor očakávaných výnosov aktív a Σ je ich kovariančná matica, $\Sigma_{ij} = cov(X^i X^j)$.

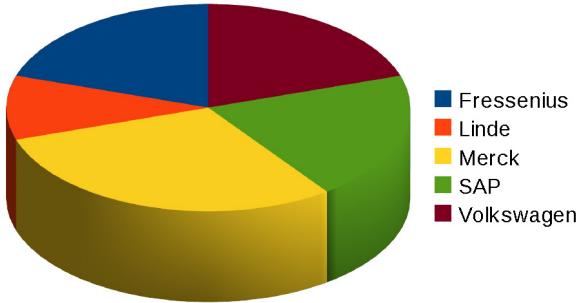
Ak by sme chceli problém (1) riešiť, v prvom rade by sme si zostavili tzv. *Lagrangeovu funkciu*:

$$\mathcal{L}(\theta, \varphi, \lambda, \xi) = -\mu^T \theta + \varphi \frac{1}{2} \theta^T \Sigma \theta + \lambda \mathbf{1}^T \theta + \xi^T \theta, \tag{2}$$

kde $\varphi \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, $\xi \geq 0$ sú Lagrangeove multiplikátory.

Rovnaká Lagrangeova funkcia ako (2) vznikne aj pre minimalizačný problém:

$$\begin{aligned} \min_{\theta \in \mathbb{R}^N} & -\mu^T \theta + \varphi \frac{1}{2} \theta^T \Sigma \theta \\ & \sum_{i=1}^N \theta^i = 1, \\ & \theta \geq 0, \end{aligned} \tag{3}$$



Obr. 1: Príklad možného optimálneho prerozdelenia aktív pre nemecký index DAX30.

Za predpokladu, že Lagrangeov multiplikátor $\varphi \geq 0$ je známy a pevne daný.

Na parameter φ sa môžeme pozerať ako na mieru investorovej averzie voči riziku. Čím je φ väčšie, tým je averzia vyššia. Vysoká averzia prikladá väčšiu váhu minimalizáciu rizika na úkor maximalizácie výnosu. Za následok to má zvýšenú tendenciu finančné prostriedky čo najviac diverzifikovať, aby nečakané výkyvy jednotlivých aktív čo najmenej ovplyvňovali celkovú hodnotu portfólia. Názornú zmenu optimálneho prerozdelenia váh pri zvyšujúcom sa φ možno vidieť na obrázku 2

Ak sa na minimalizačný problém (3) pozrieme ako na funkciu od vstupného parametra $\varphi \geq 0$, dostávame priamo hodnotovú funkciu $\alpha(\varphi)$, o ktorej vlastnostiach je táto práca.

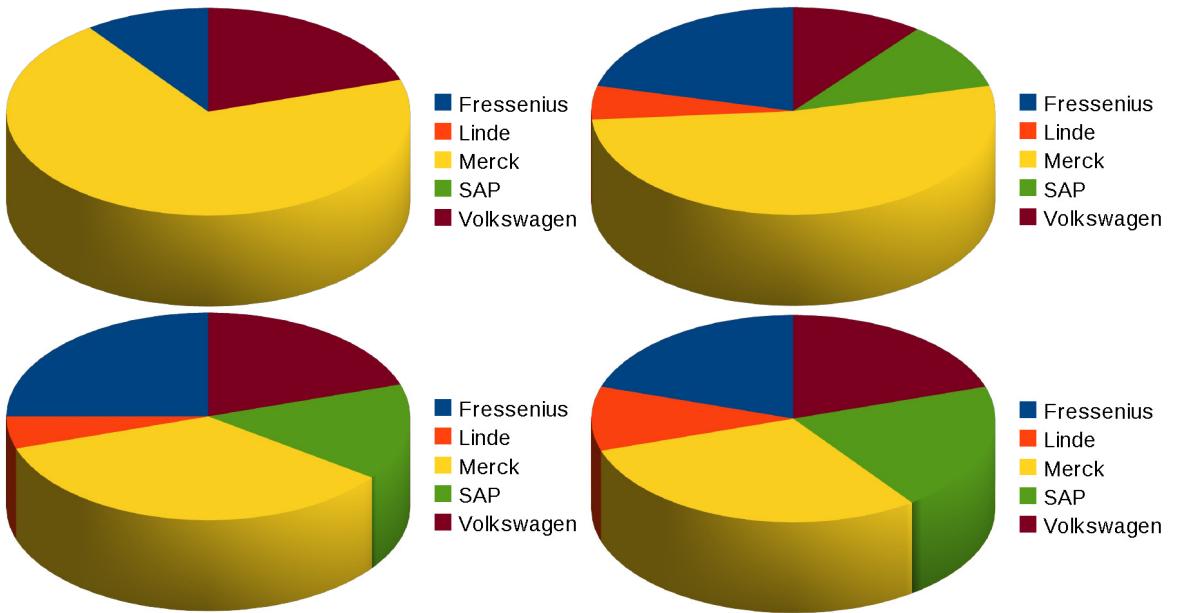
Hodnotovou funkciou budeme rozumieť problém parametrického kvadratického programovania popísaný nasledujúcou rovnicou:

$$\alpha(\varphi) = \min_{\theta \in \mathcal{S}^n} \left(-\mu^T \theta + \frac{\varphi}{2} \theta^T \Sigma \theta \right), \quad (4)$$

kde μ predstavuje vektor očakávaných výnosov firiem a Σ ich kovariančnú maticu. Tú predpokladáme, že je symetrická a kladne definitná. Symbolom θ budeme označovať príslušné váhy rozloženia prostriedkov v portfóliu. Vektor θ sa pohybuje v rámci \mathcal{S}^n , čo je konvexný kompaktný simplex. Inými slovami, vyžadujeme, aby všetky váhy boli nezáporné a ich súčet bol rovný jednej. V tejto práci budeme skúmať vlastnosti tejto funkcie vo všeobecnosti, no predovšetkým vzhľadom na parameter φ .

Predošlú definíciu hodnotovej funkcie popísali Kilianová a Ševčovič v [7]. Takmer celá táto kapitola sa bude tohto článku pridŕžať.

V nasledujúcej časti priblížime, z akého problému hodnotová funkcia pochádza. Uvidíme, že je nevyhnutnou súčasťou potrebnou na doriešenie daného problému. A



Obr. 2: Optimálne prerozdelenie váh pre $\varphi = 1, 4, 6, 8$ (zľava doprava, zhora dole).

ked'že riešenie minimalizačnej úlohy, z ktorej pozostáva, nie je triviálne, má zmysel zaoberať sa jej vlastnosťami.

1.1 Hamilton–Jacobi–Bellmanova rovnica (HJB)

Táto rovnica vznikla z dynamického stochastického problému hľadania optimálneho rozloženia váh na konečnom časovom horizonte, kde úlohou je maximalizovať očakávanú funkciu koncovej užitočnosti pri nejakých, vopred daných, podmienkach vyplývajúcich z logiky konštrukcie portfólia. Inými slovami, výstupom bude vektor rozloženia váh ako funkcia od času a momentálnej hodnoty portfólia, ktorá po aplikovaní na rozloženie prostriedkov v portfóliu prinesie najvyššiu očakávanú užitočnosť na konci vopred dohnutého obdobia.

Vychádzame z článku Kilianovej a Ševčoviča [7]. Najprv túto rovnicu v krátkosti odvodíme. Neskôr ukážeme transformáciu, pomocou ktorej sa riešenie úlohy zjednoduší z plne nelineárnej rovnice na riešenie kvázilineárnej rovnice. Spomínaná transformácia je tzv. *Riccatiho transformácia* a výslednú úlohu budeme nazývať Cauchyho úlohou. Jej bezprostrednou súčasťou je práve naša hodnotová funkcia.

1.1.1 HJB v základnom tvare

Riešime stochastický dynamický problém, v ktorom maximalizujeme očakávanú hodnotu užitočnosti portfólia:

$$\max_{\theta|_{[0,T]}} \mathbb{E}[U(X_T^\theta) | X_0^\theta = x_0], \quad (5)$$

kde $\{X_t^\theta\}$ je Itôv proces v čase $[0, T]$. Funkcia $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je vopred zvolená funkcia užitočnosti a x_0 počiatočný stav procesu $\{X_t^\theta\}$.

Funkcia $\theta : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ktorá zobrazuje $(x, t) \rightarrow \theta(x, t)$ reprezentuje neznámu funkciu, ktorá zastrešuje stochastický proces $\{X_t^\theta\}_{t \geq 0}$. Predpokladáme, že tento proces je riadený stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dX_t^\theta = \left(\epsilon e^{-X_t} + r + \mu(\theta) - \frac{1}{2}\sigma(\theta)^2 \right) dt + \sigma(\theta) dW_t, \quad (6)$$

kde W_t reprezentuje Brownov pohyb. Funkcie $\mu(\theta)$ a $\sigma(\theta)^2$ sú funkcie driftu a volatility. V našom prípade $\mu(\theta) = \mu^T \theta$ a $\sigma(\theta)^2 = \theta^T \Sigma \theta$. Poznamenajme, že vektor $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, keďže máme n firiem a $\Sigma = \bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^T$, kde $\bar{\Sigma} = (\bar{\sigma})_{i,j=1}^n$. Parameter $\epsilon \in \mathbb{R}$ je konšanta vyjadrujúca tok prostriedkov do systému. Parameter $r \geq 0$ je úroková miera. Podobne ako v predošlých častiach, $\theta \in \mathcal{S}^n$.

Podľa Bertsekasa [2] a Fleminga so Sonerom [5], hodnotová funkcia (nie tá, o ktorej je táto práca) definovaná ako:

$$V(x, t) := \max_{\theta|_{[t, T]}} \mathbb{E}[U(X_T^\theta) | X_t^\theta = x]$$

s koncovou podmienkou $V(x, T) := U(x)$, môže byť použitá na riešenie (5).

Tvrdenie 1.1. (Kilianová, Ševčovič [7]) Ak sa stochastický proces X_t^θ riadi pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice (6), tak potom hodnotová funkcia $V = V(x, t)$ rieši Hamilton–Jacobi–Bellmanovú rovnicu:

$$\partial_t V + \max_{\theta \in \mathcal{S}^n} \{ (\epsilon e^{-x} + r + \mu(\theta) - \frac{1}{2}\sigma(\theta)^2) \partial_x V + \frac{1}{2}\sigma(\theta)^2 \partial_x^2 V \} = 0, \quad (7)$$

vzhľadom na koncovú podmienku $V(x, T) := U(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a $t \in [0, T)$ [6, 10].

Príkladom, ktorý rieši (5), a v ktorom sa stochastický proces riadi podľa (6), je práve optimalizácia prerozdelenia prostriedkov v portfóliu závislá od času a momentálnej hodnoty portfólia.

Majme n firiem, ktorých ceny akcií sa riadia stochastickými procesmi $\{Y_t^i\}_{t \geq 0}$ pre všetky $i = 1, \dots, n$ s geometrickým Brownovým pohybom:

$$\frac{dY_t^i}{Y_t^i} = \mu_i dt + \sum_{j=1}^n \bar{\sigma}_{ij} dW_t^j.$$

Váhy pre takéto portfólio si označme $\bar{\theta} = \bar{\theta}(y, t)$. Hodnota takéhoto portfólia je potom stochastický proces $\{Y_t^{\bar{\theta}}\}_{t \geq 0}$, ktorý splňa stochastickú diferenciálnu rovnicu:

$$dY_t^{\bar{\theta}} = (\epsilon + (r + \mu(\bar{\theta}))Y_t^{\bar{\theta}})dt + \sigma(\bar{\theta})Y_t^{\bar{\theta}}dW_t. \quad (8)$$

Nakoniec, pôvodný stochastický proces $\{X_t^\theta\}$ je len logaritmickou transformáciou procesu $\{Y_t^\theta\}$, kde $\bar{\theta}(y, t) = \theta(x, t)$ a použila sa substitúcia $x = \ln(y)$.

1.1.2 Riccatiho transformácia

Teraz zavedieme transformáciou podľa Kilianovej s Ševčoviča [7]. Tá bude mať tvar:

$$\varphi(x, t) = 1 - \frac{\partial_x^2 V(x, t)}{\partial_x V(x, t)}. \quad (9)$$

Ide o takzvanú Riccatiho transformáciu. Na funkciu:

$$a(x, t) \equiv \varphi(x, t) - 1 = -\frac{\partial_x^2 V(x, t)}{\partial_x V(x, t)},$$

sa môžeme pozerať ako na koeficient averzie voči riziku pre hodnotovú funkciu $V(x, t)$, ktorá predstavuje momentálnu prechodnú funkciu užitočnosti investora v čase $t \in [0, T]$. Naozaj, vzhľadom na predpoklad rastúcosti funkcie užitočnosti, menovateľ $\partial_x V(x, t)$ je stále kladný. Naopak, čitatel $\partial_x^2 V(x, t)$ je kvôli konkávnosti $V(x, t)$ stále záporný, a teda celkový výraz $a(x, t)$ kladný, dokonca väčší ako 1 (samoarezime len za predpokladu, že $V(x, t)$ je naozaj konkávna funkcia). A čím bude averzia voči riziku vyššia, tým väčší bude aj koeficient $a(x, t)$.

Neskôr sa ukáže, že $\varphi = \varphi(x, t)$ z Riccatiho transformácie je presne to isté φ , ktoré vystupuje v našej hodnotovej funkcií (4). A keďže $\varphi(x, t)$ rastie rovnako ako $a(x, t)$ (sú to rovnaké funkcie, len posunuté o jednotku), tak so zvyšujúcou sa averziou voči riziku bude rásť aj dôležitosť minimalizovať predovšetkým člen s disperziou (na úkor člena minimalizujúceho záporný zisk) v optimalizácii, ktorá je súčasťou našej hodnotovej funkcie (4). To je v súlade s tým, že ak investor nerád riskuje, bude ho zaujímať predovšetkým malá disperzia výnosov jeho portfólia.

Teraz môžeme HJB rovnicu zo vzťahu (7) prepísať na:

$$0 = \partial_t V + (\epsilon e^{-x} + r - \alpha(\varphi)) \partial_x V, \quad (10)$$

$$V(x, T) := U(x),$$

kde funkcia $\alpha(\varphi)$ je parametrický optimalizačný problém:

$$\alpha(\varphi) = \min_{\theta \in \mathcal{S}^n} \left(-\mu(\theta) + \frac{\varphi}{2} \sigma(\theta)^2 \right). \quad (11)$$

Ak funkcia variancie $\theta \rightarrow \sigma(\theta)^2$ je ostro konvexná a funkcia $\theta \rightarrow \mu(\theta)$ lineárna, tak ide o konvexnú úlohu. Tie sa dajú veľmi efektívne riešiť. V našom prípade hodnotovej funkcie sú tieto podmienky splnené. Kovariančná matica Σ je kladne definitná a $\mu(\theta) = \mu^T \theta$ je lineárna.

Teraz uvedieme niekoľko tvrdení bez dôkazu. Tie možno nájsť aj s dôkazom v článku Kilianovej a Ševčoviča [7].

Tvrdenie 1.2. (Kilianová, Ševčovič [7]) Predkokladajme, že funkcia V splňa (10) a funkcia φ je definovaná ako v (9). Potom φ je riešením Cauchyho problému pre kvázilineárnu parabolickú rovnicu:

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi + \partial_x^2 \alpha(\varphi) + \partial_x [(\epsilon e^{-x} + r)\varphi + (1 - \varphi)\alpha(\varphi)] &= 0, & x \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \\ \varphi(x, T) &= 1 - U''(x)/U'(x) & x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (12)$$

Toto tvrdenie platí aj opačne. Pomocou riešenia φ rovnice (12) vieme nájsť riešenie HJB rovnice (10). Týmto spôsobom preto môžeme nahradíť riešenie pôvodnej ne-lineárnej Hamilton–Jacobi–Bellmanovej rovnice (7) riešením pomocnej kvázilineárnej rovnice (12). O tom hovorí ďalšie tvrdenie, ktoré taktiež uvádzame bez dôkazu.

Tvrdenie 1.3. (Kilianová, Ševčovič [7]) Nech $\varphi(x, t)$ je riešením Cauchyho problému (12). Potom funkcia $V(x, t)$ daná vzťahom:

$$\begin{aligned} \partial_t V - g \partial_x V &= 0, & V(x, T) &= U(x), & x \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \\ \text{kde } g(x, t) &= \alpha(\varphi(x, t)) - \epsilon e^{-x} - r \end{aligned} \quad (13)$$

je riešením Hamilton–Jacobi–Bellmanovej rovnice (7). Navyše platí, že:

$$\varphi = 1 - \frac{\partial_x^2 V}{\partial_x V}.$$

1.1.3 Riešenie HJB rovnice

Výhodou postupu z konca predošej podkapitoly (1.1.2) o Riccatiho transformácii je, že riešenie hodnotovej funkcie $\alpha(\varphi)$ môžeme vypočítať explicitne analyticky alebo aj numericky. To potom dosadíme do kvázilineárnej rovnice Cauchyho problému (12). Tú následne vypočítame pre φ . Týmto spôsobom teda nevypočítame konkrétnie $V(x, t)$ ale len $\varphi(x, t)$, ktoré nám v každom čase a pre každý stav hodnoty portfólia poskytne optimálnu odozvu $\theta = \theta(x, t)$ v podobe argumentov miním nadobúdajúcich sa po dosadení do $\alpha(\varphi)$. V konečnom dôsledku nás vlastne $V(x, t)$ až tak veľmi nezaujíma. Preto nevadí, že ho nedopočítame. Podstatnou informáciou pre investora sú práve váhy θ , ktoré mu v každom čase napovedajú, ako sa rozhodnuť v prerozdeľovaní svojich zdrojov.

Konkrétnie riešenie HJB, a teda podľa predošlého popisu, riešenie pomocného Cauchyho problému (12) možno nájsť v už spomínanom článku [7]. Toto riešenie hľadajú v tvare *pohybujúcej sa vlny*, ktorá vyzerá nasledovne:

$$\varphi(x, t) = v(x + c(T - t)), \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, T],$$

s rýchlosťou vlny $c \in \mathbb{R}$ a typom vlny $v = v(\xi)$.

My sa týmto riešením zatiaľ viac zaoberať nebudem. Skôr sa budeme sústrediť na riešenie hodnotovej funkcie $\alpha(\varphi)$ a jej vlastnosti. Tie sú dôležitou súčasťou dopočítania celkovej HJB rovnice. Táto rovnica poskytuje optimálne váhy pri prerozdeľovaní zdrojov. Jej vstupom sú však parametre ako očakávané výnosy a ich disperzia. Už pri malých zmenách vstupných údajov môže dôjsť ku kvalitatívne rozdielnym výsledkom. Inak povedané, investorovi nepomôžu optimálne stratégiu, ak vstupné odhady ohľadom situácie na trhu nie sú najspoloahlivejšie. V podkapitole (1.3) si preto podľa článku Kilianovej a Trnovskej [8] zavedieme tzv. robustnú optimalizáciu, pri ktorej okrem minimalizácie pôvodnej úlohy, budeme maximalizovať účelovú funkciu cez určité množiny neistoty vo vstupných parametroch. Predtým si však ešte opíšeme (v časti 1.2) niektoré vlastnosti hodnotovej funkcie.

1.2 Vlastnosti hodnotovej funkcie

Riešime problém parametrického kvadratického konvexného programovania zo začiatku tejto kapitoly:

$$\alpha(\varphi) = \min_{\theta \in \mathcal{S}^n} \left(-\mu^T \theta + \frac{\varphi}{2} \theta^T \Sigma \theta \right), \quad (14)$$

Pomocou $C^{k,1}(\mathbb{R}^+)$ budeme označovať priestor všetkých funkcií definovaných na $(0, \infty)$, ktorých k -ta derivácia je Lipschitzovsky spojité.

1.2.1 Spojitosť

Teraz si uvedieme niektoré vlastnosti hodnotovej funkcie (14), ktoré možno nájsť v Kilianová a Ševčovič [7].

Tvrdenie 1.4. (Kilianová, Ševčovič [7]) Nech $\Sigma \succ 0$ je kladne definitná matica a $\mu \in \mathbb{R}^n$. Potom optimálna hodnotová funkcia (14) je $C^{1,1}$ spojité. Okrem toho $\varphi \rightarrow \alpha(\varphi)$ je ostro rastúca a jej derivácia sa rovná:

$$\alpha'(\varphi) = \frac{1}{2} \hat{\theta}^T \Sigma \hat{\theta}, \quad (15)$$

kde $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\varphi) \in \mathcal{S}^n$ je argument jediného minima (14) pre $\varphi > 0$. Funkcia $(0, \infty) \ni \varphi \rightarrow \hat{\theta}(\varphi) \in \mathbb{R}^n$ je lokálne Lipschitzovsky spojité.

Dôkaz. Najprv si všimnime, že zobrazenie $(0, \infty) \ni \varphi \rightarrow \hat{\theta}(\varphi) \in \mathcal{S}^n$ je spojité, čo sa dá vydedukovať priamo zo základných vlastností rýdzokonvexných funkcií minimalizovaných nad kompaktnou konvexnou množinou \mathcal{S}^n .

Účelovú funkciu v (14) označme $f(\theta, \varphi) := -\mu^T \theta + \frac{\varphi}{2} \theta^T \Sigma \theta$. Vzhľadom na to, že $|\partial_\varphi f(\theta, \varphi)|$ je spojitu funkciou na kompakte \mathcal{S}^n , tak $\sup_{\theta \in \mathcal{S}^n} |\partial_\varphi f(\theta, \varphi)| = C(\varphi) < \infty$. Rýdza konvexnosť funkcie f v θ ďalej hovorí, že v (14) existuje práve jedno minimum, a to v bode $\hat{\theta} \equiv \hat{\theta}(\varphi)$. Naviac, $\partial_\varphi f(\hat{\theta}(\varphi), \varphi) \equiv \frac{1}{2} \hat{\theta}(\varphi)^T \Sigma \hat{\theta}(\varphi)$ je spojité vo φ , keďže $\hat{\theta}(\varphi)$ je spojité. Použijúc všeobecnú obálkovú teóriu podľa Klatteho [9], dostávame, že funkcia $\alpha(\varphi)$ je diferencovateľná na intervale $(0, \infty)$.

Ďalej dokážeme, že $\alpha'(\varphi) > 0$. Funkcia $f(\theta, \varphi)$ je lineárna vo φ pre akékoľvek $\theta \in \mathcal{S}^n$. To ale znamená, že je aj úplne spojité vo φ pre akékoľvek θ . Opäťovne použijúc vyššie spomenutú obálkovú teóriu, dostávame:

$$\alpha(\varphi) = \alpha(0) + \int_0^\varphi \partial_\varphi f(\hat{\theta}(\xi), \xi) d\xi.$$

Z toho $\alpha'(\varphi) = \partial_\varphi f(\hat{\theta}(\varphi), \varphi) = \frac{1}{2}\hat{\theta}(\varphi)^T \Sigma \hat{\theta}(\varphi)$, čo je ostro kladné na \mathcal{S}^n . Preto funkcia $\varphi \rightarrow \alpha(\varphi)$ je C^1 spojité a rastúca pre $\varphi > 0$.

Lokálna Lipschitzovská spojitosť $\alpha'(\varphi)$ vychádza zo všeobecných výsledkov dokázaných v článku od Klatteho [9], podľa ktorých argument minima $\hat{\theta}(\varphi)$ je lokálne Lipschitzovsky spojity vo φ , a teda z toho vyplýva, že aj derivácia $\alpha'(\varphi) = \frac{1}{2}\hat{\theta}(\varphi)^T \Sigma \hat{\theta}(\varphi)$ je lokálne Lipschitzovsky spojité. \square

Z predošlého vyplýva, že rovnica (12) je ostro parabolická parciálna diferenciálna rovnica. To znamená, že existujú pozitívne kladné reálne čísla $\lambda^-, \lambda^+ \in (0, \infty)$ také, že $\alpha'(\varphi)$ splňa:

$$0 < \lambda^- \leq \alpha'(\varphi) \leq \lambda^+ < \infty \quad \forall \varphi > 0. \quad (16)$$

1.2.2 Výššia hladkosť

V tejto časti sa budeme zaoberať hladkosťou hodnotovej funkcie $\alpha(\varphi)$ v závislosti od parametra φ .

Nech

$$\mathcal{I}_\emptyset = \{\varphi > 0 \mid \hat{\theta}_i(\varphi) > 0, \quad \text{pre } \forall i = 1, \dots, n\},$$

potom

$$(0, \infty) = \mathcal{I}_\emptyset \cup \bigcup_{|M| \leq n-1} \mathcal{I}_M, \quad \text{kde } \mathcal{I}_M = \{\varphi > 0 \mid \hat{\theta}_i(\varphi) = 0 \Leftrightarrow i \in M\},$$

a M varíruje v rámci všetkých podmnožín aktívnych indexov, $M \subset \{1, \dots, n\}$. Symbolom $|M|$ označíme počet prvkov v množine M . Vzhľadom na to, že $\varphi \rightarrow \hat{\theta}(\varphi)$ je spojité, množina \mathcal{I}_\emptyset je otvorená.

Najprv budeme uvažovať prípad, kedy $\varphi \in \mathcal{I}_\emptyset$. Lagrangeova funkcia bude vyzeráť ako $L(\theta, \lambda) = (\varphi/2)\theta^T \Sigma \theta - \mu^T \theta - \lambda \mathbb{1}^T \theta$, pričom vektorom $\mathbb{1}$ budeme označovať vektor n jednotiek, $\mathbb{1}^T = (1, 1, \dots, 1)$.

Optimálne riešenie $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\varphi)$ a Lagrangeov multiplikátor $\lambda = \lambda(\varphi)$ potom môžeme odvodiť do tvaru:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\varphi}(\Sigma^{-1}\mu + \lambda\Sigma^{-1}\mathbb{1}), \quad \lambda = \frac{\varphi - \mathbb{1}^T \Sigma^{-1}\mu}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1}\mathbb{1}}.$$

Z toho potom:

$$\hat{\theta}(\varphi) = \mathbf{a} - \frac{1}{\varphi} \mathbf{b} \quad a \quad \alpha(\varphi) = a\varphi - \frac{b}{\varphi} + c, \quad (17)$$

kde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ môžu byť vyjadrené ako:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}} \Sigma^{-1} \mathbb{1}, \quad \mathbf{b} = -\Sigma^{-1} \mu + \frac{\mu^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}} \Sigma^{-1} \mathbb{1}, \quad (18)$$

a konštanty $a, b, c \in \mathbb{R}$ ako:

$$a = \frac{1}{2} \frac{1}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}} > 0, \quad b = \frac{1}{2} \mu^T \Sigma^{-1} \mu - \frac{1}{2} \frac{(\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mu)^2}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}} \geq 0, \quad c = -\frac{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mu}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}}. \quad (19)$$

To, že $b \geq 0$ vyplýva z Cauchy-Schwartzovej nerovnosti. Kým μ a $\mathbb{1}$ sú lineárne nezávislé, platí ostrá nerovnosť $b > 0$.

Teraz, ak $\varphi \in \mathcal{I}_M$ pre nejakú podmnožinu $M \subset \{1, \dots, n\}$ aktívnych indexov, potom minimalizačný problém (11) môže byť zredukovaný na menej rozmerný simplex $\mathcal{S}^{n-|M|}$. Takto je funkcia $\alpha(\varphi)$ hladká na $\text{int}(\mathcal{I}_M)$ a teda $\hat{\theta}(\varphi)$ spolu s $\alpha(\varphi)$ sú dané vzťahmi:

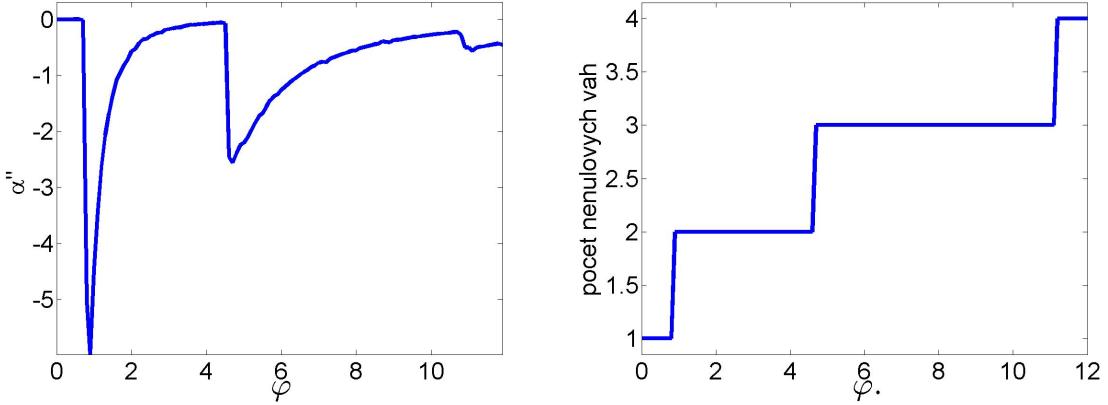
$$\begin{aligned} \hat{\theta}(\varphi) &= \mathbf{a}_M - \frac{1}{\varphi} \mathbf{b}_M \\ \alpha(\varphi) &= a_M \varphi - \frac{b_M}{\varphi} + c_M, \end{aligned} \quad (20)$$

pre akékoľvek $\varphi \in \text{int}(\mathcal{I}_M)$, kde $\mathbf{a}_M, \mathbf{b}_M \in \mathbb{R}^n$ a $a_M > 0, b_M \geq 0$ a $c_M \in \mathbb{R}$ sú vypočítané pomocou (18) a (19), kde dátu (a to stĺpce aj riadky) prináležiace k aktívnym indexom konkrétneho M sú zo Σ a μ vymazané.

Z toho vyplýva, že funkcia $\varphi \rightarrow \alpha(\varphi)$ definovaná v (11) je C^∞ hladká funkcia na otvorennej množine $\mathcal{J} = \mathcal{I}_\emptyset \cup \bigcup_{|M| \leq n-1} \text{int}(\mathcal{I}_M) \subset (0, \infty)$. Vyplýva to z (17) pre $\varphi \in \mathcal{I}_\emptyset$ a z (20) pre $\varphi \in \mathcal{I}_M$, kde $M \subset \{1, \dots, n\}$.

1.2.3 Druhá derivácia

Vzhľadom na tvrdenie o $C^{1,1}$ spojitosti je prvá derivácia optimálnej hodnotovej funkcie spojitá. Pri druhej derivácii to už však pravda byť nemusí. Túto vlastnosť teraz ukážeme na reálnych cenách akcií 25 firiem z portfólia nemeckého DAX30. Použili sme denné dátu za rok 2015. Na obrázku 3 môžeme vidieť druhú deriváciu hodnotovej funkcie vzhľadom na φ vypočítanú numericky pomocou CVX. Takisto sme znázornili počet nenulových váh, a teda počet firiem, do ktorých má investor investovať. Môžeme



Obr. 3: Druhá derivácia hodnotovej funkcie $\alpha''(\varphi)$ a počet nenulových váh pre 25 firiem portfólia DAX30 z denných dát za rok 2015.

si všimnúť, že naozaj, čím vyššia je averzia voči riziku (väčšie φ), tým viac druhov akcií, kvôli diverzifikácii rizika, v portfóliu máme.

Za povšimnutie stojí aj tvar krvky $\alpha''(\varphi)$. Môžeme vidieť, že body nespojitosti v ľavej časti obrázka 3 presne korešpondujú s takými hodnotami φ v pravej časti, kedy sa mení zloženie portfólia. Inak povedané, intervaly medzi týmito bodmi nespojitosti sú vlastne intervaly \mathcal{I}_M . Funkcia $\varphi \rightarrow \alpha(\varphi)$ je na týchto miestach C^∞ hladká.

V ďalšej časti (1.3) opíšeme niekoľko možných obmien hodnotovej funkcie, čo sa odhadu vstupných parametrov μ a Σ týka. Druhá derivácia $\alpha''(\varphi)$ nám neskôr pomôže pozorovať a porovnavať, ako veľmi tieto zmeny ovplyvňujú výsledné rozloženie portfólia.

1.3 Robustná optimalizácia

Vstupnými parametrami v optimalizačnej úlohe, ktorá je súčasťou hodnotovej funkcie (4), sú očakávané výnosy μ a disperzia Σ . Tie sa odhadujú na základe dát. Aj keby sme predpokladali, že naše odhady sú dostatočne presné, vždy existuje neistota v tom, aké nakoniec budú. Výsledok optimalizácie môže byť na tieto zmeny citlivý. Preto predpokladajme, že parametre nepoznáme presne, poznáme len ich tzv. množinu neistoty, z ktorej pochádzajú. V prípadoch ako tento, kedy parametre nie sú presne dané a poznáme len množinu do ktorej patria, hovoríme o robustnej optimalizácii.

Jeden zo spôsobov, ako tento problém vyriešiť, je tzv. *worst case* optimalizácia. V takom prípade pre každú θ vyberieme tie najhoršie parametre μ a Σ , až potom

minimalizujeme. Hodnotová funkcia tak nadobudne tvar:

$$\alpha(\varphi) = \min_{\theta \in \mathcal{S}^n} \left(\max_{\mu \in \mathcal{M}} -\mu^T \theta + \frac{\varphi}{2} \max_{\Sigma \in \mathcal{P}} \theta^T \Sigma \theta \right), \quad (21)$$

kde \mathcal{M} a \mathcal{P} sú množiny neistoty neznámych parametrov. Tie si musíme rozumne zvoliť.

Teraz uvedieme niekoľko možností voľby týchto množín, ktoré možno nájsť v Kilianová a Trnovská [8].

1.3.1 Diskrétny typ neistoty

(Kilianová, Trnovská [8]) Nech máme diskrétné množiny $\mathcal{M} = \{\mu_1, \dots, \mu_{K_1}\}$ a $\mathcal{P} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_{K_2}\}$. Úloha (21) potom po úpravách nadobúda tvar:

$$\begin{aligned} \min \quad & \delta_1 + \frac{\varphi}{2} \delta_2, \\ & \delta_1 + \mu_i^T \theta \geq 0, \quad i = 1, \dots, K_1 \\ & -\delta_2 + \theta^T \Sigma_i \theta \leq 0, \quad i = 1, \dots, K_2 \\ & \mathbb{1}^T \theta = 1, \quad \theta \geq 0. \end{aligned}$$

Takúto konvexnú úlohu už môžeme riešiť. Napr. pomocou softvéra CVX.

1.3.2 Elipsoid neistoty

(Kilianová, Trnovská [8]) Tentokrát bude $\Sigma \equiv \Sigma_0 \succ 0$ presne dané. Neistí si budeme v očakávaných výnosoch. Definujeme elipsoid so stredom v μ_0 a polomerom $\sqrt{\gamma}$ ako:

$$\mathcal{M} = \{\mu \mid (\mu - \mu_0)^T \Sigma_0^{-1} (\mu - \mu_0) \leq \gamma\}$$

alebo ekvivalentne:

$$\mathcal{M} = \{\mu_0 + \sqrt{\gamma} L u \mid \|u\|_2 \leq 1\},$$

kde L je matica spĺňajúca $LL^T = \Sigma_0$. Táto úloha sa dá upraviť na optimalizačnú úlohu nad kužeľom druhého rádu, ktorá je konvexná, a teda tiež môže byť riešená pomocou CVX:

$$\begin{aligned} \min \quad & \delta_1 + \frac{\varphi}{2} \theta^T \Sigma_0 \theta, \\ & -\mu_0^T \theta + \sqrt{\gamma} \|L^T \theta\|_2 \leq \delta_1, \\ & \mathbb{1}^T \theta = 1, \quad \theta \geq 0. \end{aligned}$$

1.3.3 Neistota v podobe kvádra

(Kilianová, Trnovská [8]) Pre pevne dané μ_0 predpokladáme, že odchýlky v očakávaných výnosoch každej firmy sú maximálne 100β percent. T.j.:

$$\mathcal{M} = \{\mu \mid |\mu_i - (\mu_0)_i| \leq \beta |(\mu_0)_i|\}.$$

Opäť za predpokladu pevne danej $\Sigma_0 \succ 0$ dostaneme:

$$\begin{aligned} \min \quad & (\beta|\mu_0| - \mu_0)^T \theta + \frac{\varphi}{2} \theta^T \Sigma_0 \theta, \\ & \mathbb{1}^T \theta = 1, \quad \theta \geq 0. \end{aligned}$$

2 Filtračné matice

V tejto kapitole sa budeme venovať robustnej optimalizácií a jej vplyvom na vlastnosti hodnotovej funkcie v porovnaní s pôvodnou úlohou (4) neobsahujúcou neistotu v parametroch.

Podobne, ako to bolo v predošej podkapitole (1.3), navrhнемe vlastný spôsob tvorby množín neistoty. Tie sa, na rozdiel od predoších možností, ktoré boli zamerané skôr na očakávané výnosy μ , budú viac venovať neistote v disperzii Σ . Pôjde o diskrétny typy množín, a teda o úlohu podobnú sekcií 1.3.1. Množina matíc disperzií \mathcal{P} bude vytváraná pomocou tzv. *filtračných matíc*, ktoré budú dátá výnosov určitým spôsobom triediť alebo upravovať (napr. zhľadzovať). Pre každý takýto spôsob úpravy potom dostaneme novú sadu dát, ktorej kovariančná matica bude tvoriť jeden konkrétny prvok Σ_i množiny všetkých kovariancí \mathcal{P} . Najprv však všeobecne zavedieme pojem filtračných matíc a úlohu (4) prepíšeme do príslušného tvaru.

2.1 Robustná úloha pomocou filtrov

Majme portfólio akcií N firiem, pričom výnosy každej z nich sú časovým radom s n prvkami, t.j. $X^i = \{X_j^i\}_{j=1}^n$ pre $i = 1, \dots, N$ (stĺpcové vektory). Kovariančnú maticu medzi jednotlivými prvkami môžeme napísť ako $\Sigma = \{\Sigma_{ij}\}_{i,j=1}^N$, kde kovariancia medzi prvkom i a j je:

$$\Sigma_{ij} = cov(X^i X^j) = \mathbb{E}(X^i X^j) - \mathbb{E}(X^i) \mathbb{E}(X^j).$$

Definujme teraz maticu $A = A_{m \times n}$ ako $m \times n$ filtračnú maticu, ktorá pôvodný n prvkový časový rad X^i upraví na filtrovaný m prvkový rad Y^i ako $Y^i = AX^i$. Celkové dátá sa zmenia na $Y = AX$, kde $Y = Y_{m \times N}$ je $m \times N$ matica (Pôvodné X malo rozmeru $n \times N$). Takto novovytvoreným dátam vypočítame kovarianciu a označíme ako $\Sigma_{ij}^A = cov(Y^i Y^j)$.

Predtým, ako prejdeme k diskretizácii množiny $\mathcal{P} = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_k, \dots)$, skúsme túto množinu zadefinovať spojito pomocou nejakých rozumných predpokladov na filtrovanie.

Filtrovanie si môžeme predstaviť ako redukciu alebo úpravu dát. Matice A môžu napríklad dátu X upraviť tak, že vynechajú niektoré hodnoty (napr. každú druhú), čím dôjde ku kvantitatívnej redukcii, alebo môžu dátu upraviť tak, že ich zhľadia (napr.

pomocou priemerovania susedných údajov), čím dôjde k redukcii kvalitatívnej. Matice, ktoré takto upravujú dátu, majú niečo spoločné. Konkrétnie, súčet riadkov je rovný jednej a všetky hodnoty sú kladné. Toto budeme požadovať od všetkých filtrov.

Definícia 2.1. Za filter pre dátu s n prvkami budeme považovať takú $m \times n$ maticu A , ktorej súčty riadkov sú rovné jednej, $A\mathbf{1} = \mathbf{1}$, a súčasne všetky jej členy sú kladné, $a_{ij} \geq 0$ pre všetký $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$. Prvky a_{ij} označujú jednotlivé členy $A = \{a_{ij} \mid i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$.

Po interpretácii značenia môžeme optimalizačnú úlohu v hodnotovej funkcií (4) prepísat na robustnú, a to ako:

$$\alpha(\varphi) = \min_{\theta \in \mathcal{S}^n} \left(-\mu^T \theta + \frac{\varphi}{2} \max_{A \in \mathcal{P}} \theta^T \Sigma^A \theta \right), \quad (22)$$

kde \mathcal{P} je možina matíc splňajúcich podmienky z definície 2.1.

Tvrdenie 2.2. Ak \mathcal{P} je množina matíc A splňajúcich podmienky z definície 2.1, tak \mathcal{P} je konvexná.

Dôkaz. Na to, aby bola množina konvexná, musí platiť, že ak $A_1 \in \mathcal{P}$ a súčasne $A_2 \in \mathcal{P}$, tak aj $\lambda A_1 + (1 - \lambda) A_2 \in \mathcal{P}$ pre $\forall \lambda \in (0, 1)$.

V našom prípade to znamená, že takéto konvexné kombinácie musia zachovať vlastnosť súčtu riadkov rovných jednej. To však platí. λA_1 má súčty riadkov rovné λ , $(1 - \lambda) A_2$ má súčty riadkov rovné $(1 - \lambda)$. Po sčítaní týchto dvoch matíc dostaneme súčty riadkov $\lambda + (1 - \lambda) = 1$.

Druhá vlastnosť, ktorú musí konvexná kombinácia A_1 a A_2 splňať, je nezápornosť členov. Kladná kombinácia dvoch kladných matíc je však opäť kladná matica. \square

2.2 Transformácia úlohy s filtrami

Takáto úloha je príliš všeobecná, preto sa ju pokúsime prepísat do vhodnejšieho tvaru.

Majme kovariančnú maticu Σ^A . Pre kovarianciu medzi prvkami i a j platí:

$$\Sigma_{ij}^A = cov(Y^i Y^j) = \mathbb{E}(Y^i Y^j) - \mathbb{E}(Y^i) \mathbb{E}(Y^j). \quad (23)$$

Postupne si rozpíšeme členy.

Najprv $\mathbb{E}(Y^i Y^j)$:

$$\mathbb{E}(Y^i Y^j) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_k^i Y_k^j = \frac{1}{m} (Y^i)^T Y^j = \frac{1}{m} (X^i)^T A^T A X^j. \quad (24)$$

Ďalej stredná hodnota $\mathbb{E}(Y^i)$ sa dá napísť ako:

$$\mathbb{E}(Y^i) = \frac{1}{m} \mathbf{1}^T Y^i = \frac{1}{m} \mathbf{1}^T A X^i = \frac{1}{m} (X^i)^T A^T \mathbf{1}. \quad (25)$$

Teraz výrazy (24) a (25) dosadíme do (23):

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij}^A &= \frac{1}{m} (X^i)^T A^T A X^j - \frac{1}{m^2} (X^i)^T A^T \mathbf{1} \mathbf{1}^T A X^j \\ &= (X^i)^T A^T Q A X^j, \end{aligned} \quad (26)$$

kde

$$Q = \frac{1}{m} \mathbb{I} - \frac{1}{m^2} \mathbf{1} \mathbf{1}^T, \quad (27)$$

je $m \times m$ matica.

Tvrdenie 2.3. Matica Q je kladne semidefinitná.

Dôkaz. Chceme ukázať, že $x^T Q x \geq 0$ pre $\forall x \in \mathbb{R}^m$. Rozpíšeme:

$$\begin{aligned} x^T Q x &= x^T \left(\frac{1}{m} \mathbb{I} - \frac{1}{m^2} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \right) x = \frac{1}{m} x^T x - \frac{1}{m^2} x^T \mathbf{1} \mathbf{1}^T x \\ &= \frac{1}{m} \sum x_i^2 - \frac{1}{m^2} (\sum x_i)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

pričom posledná nerovnosť vychádza z Cauchy-Schwarzovej nerovnosti, v ktorej prvým vektorom je vektor x a druhým m -rozmerný jednotkový vektor $\mathbf{1}$. \square

Kovariančnú maticu korešpondujúcu s filtračnou maticou A môžeme písť ako $\Sigma^A = X^T A^T Q A X$. Uvažovaná robustná úloha (22) sa mení na:

$$\alpha(\varphi) = \min_{\theta \in \mathcal{S}^n} \left(-\mu^T \theta + \frac{\varphi}{2} \max_{A \in \mathcal{P}} \theta^T X^T A^T Q A X \theta \right). \quad (28)$$

Tvrdenie 2.4. Účelová funkcia maximalizácie v (28) je konvexná v θ .

Dôkaz. Druhá derivácia podľa θ je rovná $2X^T A^T QAX$. Chceme ukázať, že táto matica je kladne semidefinitná, t. j. $\theta^T X^T A^T QAX\theta \geq 0$ pre všetky $\theta \in \mathbb{R}^N$. Toto tvrdenie priamo vyplýva z kladnej semidefinitnosti Q , ktorá hovorí, že $y^T Qy \geq 0$ pre všetky $y \in \mathbb{R}^m$. Nám stačí zobrať $y = AX\theta$. \square

Tento poznatok však nie je veľmi dôležitý, vzhľadom na to, že pred celkovou minimizáciou dochádza k maximalizácii cez matice A . Z toho dôvodu je pre nás nasledujúce tvrdenie oveľa dôležitejšie.

Tvrdenie 2.5. *Účelová funkcia maximalizácie v (28) je konvexná v A .*

Dôkaz. Nech X a θ sú pevne dané. Označme $Y = X\theta$. Chceme ukázať, že zobrazenie:

$$F : A \in \mathcal{P} \longrightarrow Y^T A^T QAY \in \mathbb{R}$$

je konvexné.

To urobíme pomocou druhej derivácie v smere. Nech B je ľubovoľná $m \times n$ matica. Prvú deriváciu zobrazenia F podľa A v A a smere B označíme ako $F'_A(A)B$. Druhú deriváciu F podľa A v A a smere (B, B) ako $F'_{AA}(A)(B, B)$. Teraz ukážeme, že pre akúkoľvek maticu B , je druhá derivácia v tomto smere nezáporná, a teda ide o konvexnú funkciu v danom smere. Ak je ale funkcia konvexná v každom smere, celá je konvexná.

Uvažujme zobrazenie $\Psi : t \longrightarrow F(A + tB)$. Prvú deriváciu v smere B môžeme vypočítať ako:

$$F'_A(A)B = \frac{d}{dt}F(A + tB)|_{t=0}$$

a druhú deriváciu v smere (B, B) ako:

$$\begin{aligned} F'_{AA}(A)(B, B) &= \frac{d}{dt}F'_A(A + tB)B|_{t=0} \\ &= \frac{d^2}{dt^2}F(A + tB)|_{t=0}. \end{aligned} \tag{29}$$

Zjednodušenie problému spočíva v tom, že namiesto derivovania podľa matice premenných, nám stačí derivovať podľa jednorozmerného t , keďže $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Výraz

$F(A + tB)$ si najprv rozpíšeme, potom ho dvakrát zderivujeme:

$$\begin{aligned}
F(A + tB) &= Y^T(A + tB)^TQ(A + tB)Y \\
&= Y^T(A^T + tB^T)Q(A + tB)Y \\
&= (Y^TA^T + tY^TB^T)Q(AY + tBY) \\
&= (Y^TA^TQ + tY^TB^TQ)(AY + tBY) \\
&= Y^TA^TQAY + tY^TA^TQBY + tY^TB^TQAY + t^2Y^TB^TQBY.
\end{aligned}$$

Výsledný výraz zderivujeme:

$$\frac{d}{dt}F(A + tB) = Y^TA^TQBY + Y^TB^TQAY + 2Y^TB^TQBYt.$$

a dosadíme $t = 0$. Prvá derivácia F v smere B nadobúda tvar:

$$\begin{aligned}
F'_A(A)B &= Y^TA^TQBY + Y^TB^TQAY \\
&= Y^T(A^TQB + B^TQA)Y
\end{aligned}$$

Teraz môžeme F derivovať druhýkrát. Opäť v smere B . Najprv rozpíšeme:

$$\begin{aligned}
F'_A(A + tB)B &= Y^T(A + tB)^TQBY + Y^TB^TQ(A + tb)Y \\
&= Y^T(A^T + tB^T)QBY + Y^TB^TQ(A + tb)Y \\
&= (Y^TA^TQBY + tY^TB^TQBY) + (Y^TB^TQAY + tY^TB^TQBY).
\end{aligned}$$

Derivovaním:

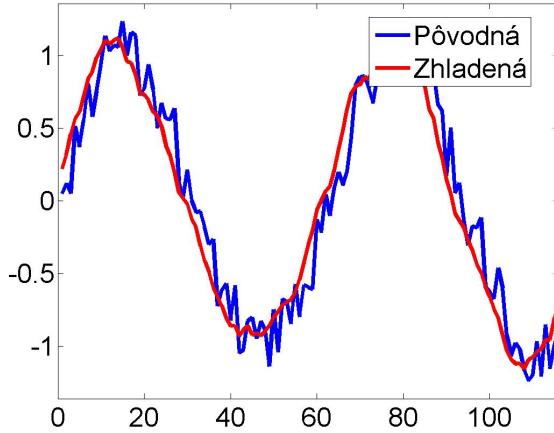
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F'_A(A + tB)B &= \frac{d^2}{dt^2}F(A + tB) \\
&= Y^TB^TQBY + Y^TB^TQBY \\
&= 2Y^TB^TQBY \equiv F'_{AA}(A)(B, B).
\end{aligned}$$

Posledný výraz už neobsahuje t . Bez dosádzania $t = 0$ priamo dostávame druhú deriváciu v smere B .

Pre lepšiu názornosť teraz zvoľme substitúciu $BY = x$. Dostávame:

$$2Y^TB^TQBY \longrightarrow 2x^TQx \geq 0.$$

Platnosť poslednej nerovnosti vyplýva z kladnej semidefinitnosti matice $Q \succeq 0$. Tú sme v dokázali pomocou Cauchy-Schwarzovej nerovnosti v tvrdení 2.3.



Obr. 4: Zhladzovanie perturbovanej funkcie filtrom, ktorý rovnomerne priemeruje 5 susedných hodnôt.

Druhá derivácia v smere B je nezáporná, a teda skúmaná funkcia F , vystupujúca ako účelová funkcia maximalizovaná v (28), je v tomto smere konvexná. Maticu B sme však volili ľubovoľne, a teda F je konvexná vo všetkých smeroch. Ako sme už spomenuli, z tohto faktu vyplýva, že F je konvexná v A celkovo. \square

Platnosť predošlého tvrdenia 2.5 riešenie robustnej optimalizačnej úlohy vystupujúcej v hodnotovej funkcií (28) značne komplikuje. Hovorí to, že sa snažíme maximalizovať konvexnú funkciu na konvexnom definičnom obore (Tvrdenie 2.2). Takáto úloha nie je konvexná, a preto je len veľmi ťažko všeobecne riešiteľná, keď predpokladáme spojitosť množiny neistoty \mathcal{P} . Preto sa zameriame hlavne na numerické riešenia nad jej diskrétnymi podmnožinami.

V nasledujúcich podkapitolách si množinu \mathcal{P} kvôli zjednodušeniu zmenšíme. Vytvoríme jej diskrétné podmnožiny, ktoré, okrem vlastností z definície 2.1, budú splňať niektoré iné, presne stanovené podmienky. Takto sa nám podarí úlohu zdiskretizovať a riešiť podľa spôsobu z diskrétneho typu neistoty v 1.3.1.

2.3 Zhladzovacie filtre

Za zhladzovacie filtre budeme považovať také, ktoré priemerujú susedné hodnoty, čím realizácie časových radov napohľad zhladzujú. Na obrázku 4 môžeme vidieť názorný

príklad aplikácie takého filtra. Tieto filtre budeme zostavovať ako trojdiagonálne matice (budeme priemerovať len tri susedné hodnoty), so súčtom riadkov 1 a všetkými hodnotami kladnými.

2.3.1 Deterministické množiny

Množinu \mathcal{P} matíc A zostavíme dvomi spôsobmi. V každom z týchto prípadov vytvoríme 1000 matíc:

- Na diagonále $\frac{1000-k}{999}$, mimo diagonály na oboch stranách $\frac{k-1}{2.999}$, pre $k = 1, \dots, 1000$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{k-1}{2.999} & \frac{1000-k}{999} & \frac{k-1}{2.999} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{k-1}{2.999} & \frac{1000-k}{999} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

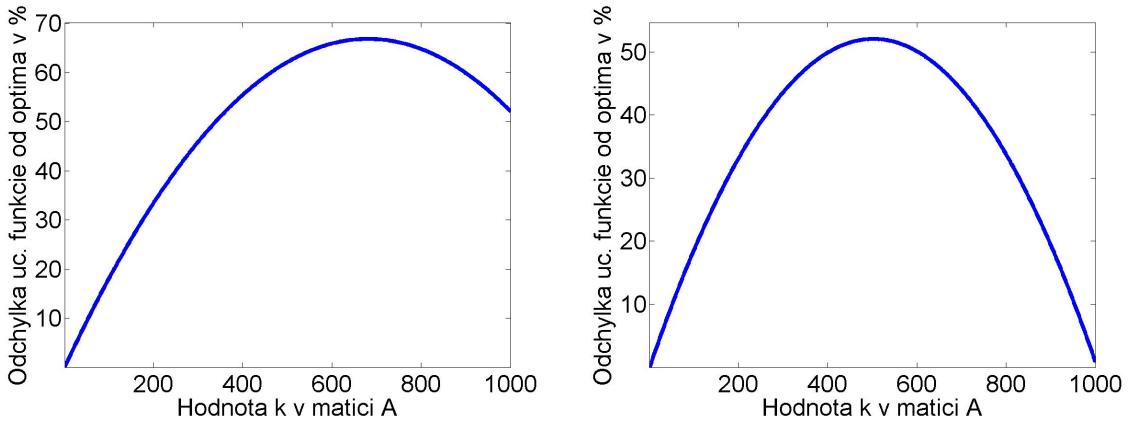
- Na diagonále nuly. Mimo diagonály $\frac{1000-k}{999}$ na jednej strane, $1 - \frac{1000-k}{999}$ na druhej, pre $k = 1, \dots, 1000$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1000-k}{999} & 0 & 1 - \frac{1000-k}{999} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1000-k}{999} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

V prvom prípade, matica A v množine \mathcal{P} je identitou pre $k = 1$. Postupne, ako sa k zvyšuje, diagonála klesá k nule a výrazy po stranách sa blížia k jednej polovici.

V druhom prípade je diagonála stále nulová. So zvyšujúcim sa k , jednotka na jednej strane diagonály sa postupne presúva na druhú stranu.

Takýmto spôsobom sme vytvorili dve množiny \mathcal{P} , ktoré obsahujú filtračné matice. Ide o diskrétné množiny, a preto na výpočet použijeme postup uvedený v 1.3.1. Počítame v softvéri CVX a používame tie isté dátu ako v časti 1.2.3. Časť hodnotovej funkcie obsahujúcu strednú hodnotu nateraz pre jednoduchosť vynecháme. Takisto na chvíľu vynecháme parameter φ , ktorý v tomto prípade vystupuje len ako konštanta a nezmení celkovú názornosť obrázkov. Budeme ho považovať za fixný $\varphi = 1$.



Obr. 5: Percentuálne odchýlky od optimálnej hodnoty disperzie (Klesajúca diagonála vľavo, Nulová diagonála s váhami po stranách napravo)

Takýmto spôsobom sa pre každé zvolené θ snažíme nájsť najhoršiu možnú disperziu cez A a následne ju minimalizujeme cez θ . Riešime úlohu:

$$\alpha(\varphi) = \min_{\theta \in \mathcal{S}^N} \left(\max_{k=1,\dots,K} \frac{\varphi}{2} \theta^T \Sigma^k \theta \right), \quad (30)$$

ktorá môže byť podľa časti 1.3.1 prepísaná ako:

$$\begin{aligned} \min_{\theta \in \mathcal{S}^N, \delta \in \mathbb{R}} \quad & \frac{\varphi}{2} \delta \\ \theta^T \Sigma^k \theta \leq \delta, \quad & \forall k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

V maximalizácii cez A v úlohe (28) sa jedno z ohraničení stáva aktívnym a vystupuje v optimálnej účelovej funkcií. Nás zaujíma, aké odchýlky, vzhl'adom na túto hodnotu v účelovej funkcií (v percentách) by vznikli, ak by sa namiesto najhoršej možnej použila niektorá iná filtračia.

Matematicky napísané, výstupom riešenia úlohy (30) sú optimálne hodnoty $\hat{\theta}$, $\hat{\delta}$ a aktívne \hat{k} , pre ktoré platí:

$$\hat{\theta}^T \Sigma^{\hat{k}} \hat{\theta} = \hat{\delta}. \quad (31)$$

Zároveň φ považujeme za fixné, $\varphi = 1$.

My chceme vedieť relatívnu odchýlku od optima vzhl'adom na všetky ostatné filtračie danú funkciou:

$$\Phi(k) = \frac{\hat{\theta}^T \Sigma^k \hat{\theta} - \hat{\theta}^T \Sigma^k \hat{\theta}}{\hat{\theta}^T \Sigma^k \hat{\theta}} = \frac{\hat{\delta} - \hat{\theta}^T \Sigma^k \hat{\theta}}{\hat{\delta}}. \quad (32)$$

V našom prípade nadobúda tvar:

$$\Phi(k) = \frac{\hat{\theta}^T X^T A_{\hat{k}}^T Q A_{\hat{k}} X \hat{\theta} - \hat{\theta}^T X^T A_k^T Q A_k X \hat{\theta}}{\hat{\theta}^T X^T A_{\hat{k}}^T Q A_{\hat{k}} X \hat{\theta}}.$$

Najviac sa budeme zaujímať o to, kde sú odchýlky najmenšie (a teda ide o maticu v aktívnom ohraničení vytvárajúcemu najväčšiu disperziu v dátach), a kde sú naopak odchýlky najväčšie (a teda ide o maticu, ktorá riziko podceňuje).

Pre všetky funkcie definované ako v (32) je zjavné, že platí:

$$\min_k \Phi(k) = 0.$$

Jedno z ohraničení totiž musí byť aktívnym a platí preň rovnica (31).

Maximum $\Phi(k)$ môže byť rôzne. Nás ale budú omnoho viac zaujímať argumenty týchto miním a maxim, ako minimá a maximá samotné. Presnejšie:

- $\text{argmin}_k \Phi(k)$: toto k presne identifikuje filtračnú maticu v aktívnom ohraničení.
- $\text{argmax}_k \Phi(k)$: toto k presne identifikuje maticu s najväčšou odchýlkou v disprezii v prípade jej realizácie.

Hodnoty funkcií $\Phi(k)$ vykreslíme pre $k = 1, \dots, 1000$ prináležiace konkrétnym filtračným maticiam A_k . Výsledky môžeme vidieť na obrázku 5, kde na horizontálnej osi je k , ktoré presne definuje o akú maticu A ide. Na vertikálnych osiach je uvedená odchýlka od optimálnej hodnoty v percentách (t.j. $\Phi(k).100$).

Aktívne ohraničenie musí mať odchýlku nula. V ľavej časti obrázka 5 sa táto hodnota nadobúda pre $k = 1$, čo podľa toho, ako sme definovali množinu \mathcal{P} v prvom prípade, znamená, že ide o identitu. Najväčšia disperzia dát bola v pôvodných dátach. Akékoľvek zhľadzovanie túto disperziu znižovalo. Podobne je to v druhom prípade na obrázku vpravo. Tam máme aktívne až dve ohraničenia. Pre $k = 0$ a $k = 1000$. To korešponduje s maticami, ktoré, až na zanedbateľný posun dát, sa dajú tiež považovať za identity.

Zaujímavé sú aj miesta, kde je odchýlka najväčšia. Vľavo pre $k = 681$, vpravo pre $k = 503$. V týchto prípadoch ide o matice, ktoré, podľa svojich možností, majú čo najrovnomernejšie rozložené váhy. V prvom prípade máme trojdiagonálnu maticu so

všetkými hodnotami rovnými približne $\frac{1}{3}$, v druhom prípade nulová diagonála okolo ktorej nájdeme dvakrát hodnotu blízko $\frac{1}{2}$.

Z predošlých príkladov to zatial vyzerá tak, že najväčšia disperzia sa nadobúda pre identitu a najmenšia pre rovnomerne rozdelené dáta. Tento predpoklad sa teraz pokúsime overiť ešte niekoľkými numerickými výpočtami.

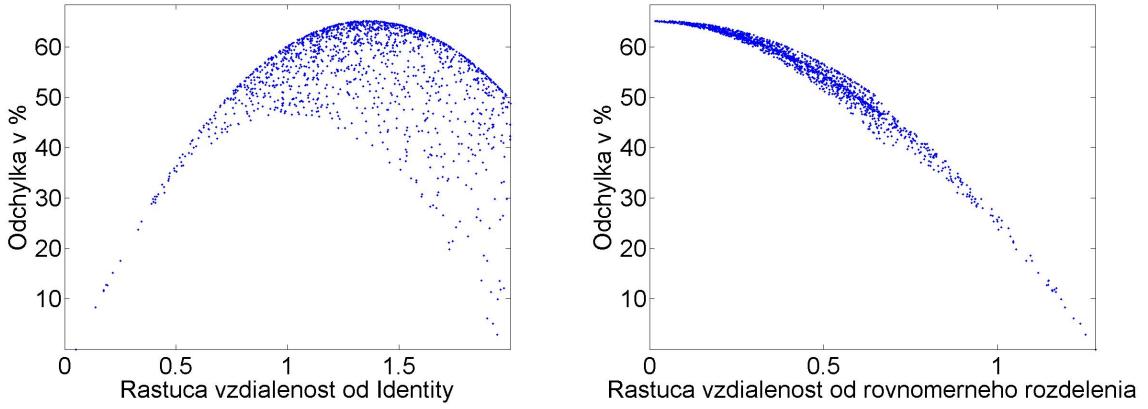
2.3.2 Náhodne generovaná množina filtrov

Množinu \mathcal{P} zostavíme tak, že budeme generovať náhodné trojdiagonálne matice A . Vygenerovali sme ich 1500. Vypočítame optimalizačnú úlohu s diskrétnou množinou neistoty (30) a takisto jednotlivé percentuálne odchýlky od optimálnej hodnoty účelovej funkcie. Teraz by nás zaujímalo, ako sa tieto odchýlky správajú, keď sa matica A vzdáluje od identity, a ako sa správajú pri vzdáľovaní sa od matice s rovnomerným rozložením váh. Vzdialenosť medzi maticami budeme meráť pomocou maximovej normy pre matice $\|A - \mathbb{I}\|_\infty$, resp. $\|A - \mathbb{U}\|_\infty$, kde symbolom \mathbb{U} sme označili trojdiagonálnu maticu s rovnomernými váhami rovnými $\frac{1}{3}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Maximová norma je pre ľubovoľnú maticu (nazvime napr. M) definovaná ako $\max(|M|\mathbf{1})$, kde $|M|$ je matica v absolútnej hodnote a $\mathbf{1}$ jednotkový vektor.

V tomto prípade už nemáme číslo k , ktoré jednoznačne definovalo maticu A_k . Matice boli generovane náhodne. Tentokrát na opis konkrétnej filtračnej matice použijeme jej normovú vzdialenosť od identity (obr. 6 vľavo), respektíve od rovnomerne rozloženej matice (obr. 6 vpravo). Obrázok 6 tentokrát nezobrazuje priebeh funkcie $\Phi(k)$, ale priebeh $\Phi(\|\cdot\|_\infty)$. Na obrázku 6 vľavo si môžeme všimnúť, že identita je maticou A v aktívnom ohraničení (matica s nulovou vzdialenosťou do identity sa prostredníctvom funkcie Φ zobrazuje na nulu). Ako sa tak vzdialenosť blíži k číslu dva, ochdýlky niektorých matíc A opäť klesajú do nuly. To nie je nič zvláštne. Maximová norma je



Obr. 6: Percentuálne odchýlky od optimálnej hodnoty disperzie vzhľadom na vzdialenosť filtračnej matice A od identity (vľavo) a od trojdiagonálneho, rovnomerne rozdeleného filtra (vpravo) v norme $\|\cdot\|_\infty$.

definovaná ako maximum zo súčtov riadkov v absolútnej hodnote. Ak od našej matice odpočítavame identitu a predpokladáme súčet riadkov A rovný jednej, tak maximálna možná normová vzdialenosť je rovná dvom a nadobúda sa pre matice, ktoré majú na diagonále nulu. Medzi takéto matice patria aj permutačné matice. A ak predpokladáme, že naša A v aktívnom ohraničení je identita \mathbb{I} , tak v aktívnom ohraničení musia byť aj matice permutujúce dátá \mathbb{P} . Premiešanie dát totiž disperziu nezmení.

Na obrázku 6 vpravo môžeme pozorovať, že čím sme ďalej od rovnomerne rozdených filtrov, tým viac sa účelová funkcia hodnotovej funkcie (momentálne len disperzia portfólia), upravená týmito filtrami, podobá na hodnotu v optime. Aktívne ohraničenie má matica s normovou vzdialenosťou $\frac{4}{3}$, čo opäť zodpovedá tomu, že jedna váha sa tlačí k jednotke a ostatné k nule (t.j. identita a permutačné matice).

Naozaj, popíšme si ľubovoľný i -ty riadok výrazu $|A - \mathbb{U}|$ zúžený len na diagonálne členy. Pre $A = \mathbb{I}$ dostávame:

$$|A - \mathbb{U}|_i = \left| (0, 1, 0) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right| = \left| \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \right| = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

Po sčítaní dostávame, že maximová normová vzdialenosť medzi identitou \mathbb{I} a rovnomerne rozloženou maticou \mathbb{U} je:

$$\|\mathbb{I} - \mathbb{U}\|_\infty = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

2.3.3 Všeobecný 2×2 filter

V predošlých častiach sme sa pokúšali ukázať, že pre identitu \mathbb{I} , a takisto aj pre permutačné matice, získavame najväčšiu disperziu dát. Takéto matice sú preto súčasťou aktívnych ohraničení úlohy (28). Spomínané výpočty však boli veľmi jednostranne orientované. Matice A boli pre jednoduchosť vytvorené len ako diskrétna podmnožina množiny všetkých matíc spĺňajúcich pôvodnú všeobecnú definíciu 2.1.

V tejto časti sa pokúsime ukázať, že to platí aj všeobecne. Zameriame sa na 2×2 matice A . Inak povedané, pre jednoduchosť budeme predpokladať, že naše dáta obsahujú len 2 údaje o zmenách cien akcií. Takisto budeme predpokladať, že riešime optimalizačnú úlohu rozloženia portfólia dvoch firiem. Toto zjednodušenie nám pomôže vyjadrovať váhy pomocou jednej premennej θ ako vektor $(\theta, 1 - \theta)$ pre $\theta \in (0, 1)$.

Maticu A budeme uvažovať v nasledujúcom tvaru:

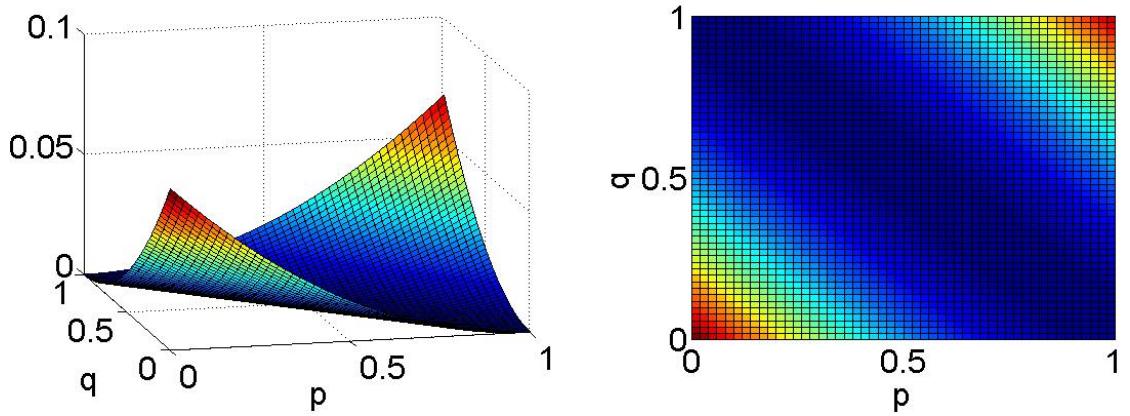
$$\begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{bmatrix}$$

kde parametre $p, q \in (0, 1)$. Takto definovaná matica spĺňa všeobecné predpoklady z definície 2.1.

Naším prvým cieľom je vykresliť hodnotu účelovej funkcie $\theta^T X^T A^T Q A X \theta$ pre pevne zvolené $\theta \in (0, 1)$ a pre všetky možné kombinácie parametrov p a q v rámci ich prípustného intervalu $(0, 1)$. Ak je nás predpoklad správny, najvyššie hodnoty sa nadobudnú práve pri $p, q = 0$ alebo $p, q = 1$, kedy má matica A bud' tvar identity \mathbb{I} alebo obrátenej 2×2 permutačnej matice \mathbb{P} . Najnižšie hodnoty by sme chceli pozorovať práve v oblasti rovnomerne rozloženej matice $\frac{1}{2}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$.

Na obrázku 7 sme vykreslili závislosť hodnoty účelovej funkcie hodnotovej funkcie od parametrov p a q . Ako sme predpokladali, najvyššia hodnota sa nadobúda pre $p, q = 0$ a $p, q = 1$. Môžeme si všimnúť, že najnižšiu disperziu dostávame na úsečke, pre ktorú platí, že $p = 1 - q$. Takéto matice A majú prvý aj druhý riadok rovnaký. Patrí medzi ne aj rovnomerne rozdelená matica $\frac{1}{2}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$.

Dáta pre tieto výpočty sme si náhodne niekoľkokrát vygenerovali. Výsledné obrázky vyzerali takmer zhodne. Na obrázku 7 je uvedený prípad konkrétnie pre $X_1 = -0.1829, 0.4502$ a $X_2 = -0.4656, -0.0613$. Taktiež nesmieme zabúdať, že váhu θ sme taktiež zvolili pevne ($\theta = 0.5$).

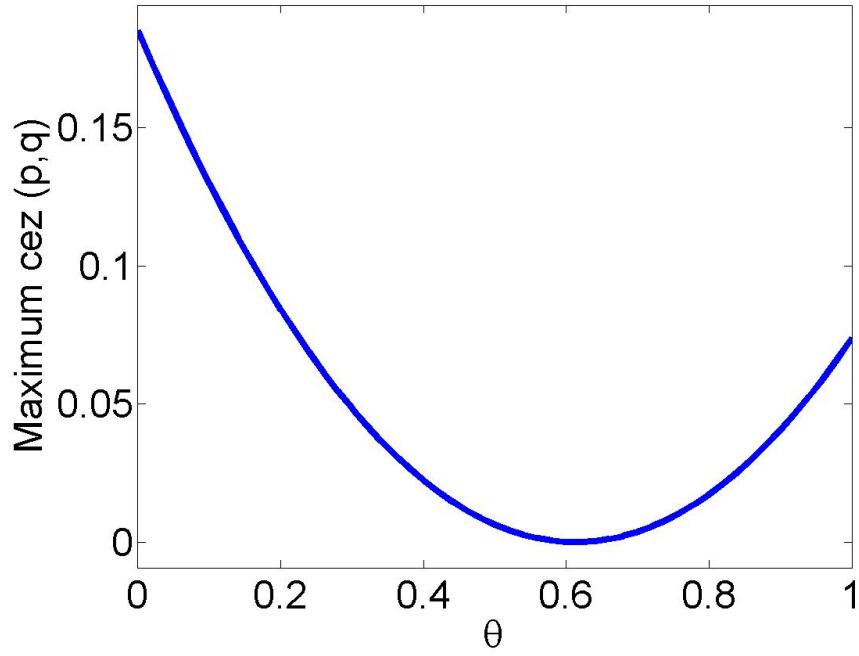


Obr. 7: Závislosť hodnoty účelovej funkcie hodnotovej funkcie od 2×2 filtračnej matice $[p, 1 - p; 1 - q, q]$ pre náhodne vygenerované dátá a pevne zvolené váhy $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Pre zvolenú θ sme ukázali, že identita \mathbb{I} maximalizuje hodnotu účelovej funkcie hodnotovej funkcie, konkrétnie disperziu (člen so strednou hodnotou sme do nej opäť nezahrnuli). Teraz skúsime prezrieť všetky hodnoty θ . Ak by bola identita maximom vo všetkých prípadoch, tak aj následná minimalizácia cez θ by v optime využívala ako aktívne ohraničenie práve tento filter.

Pre každú hodnotu θ teraz vyberieme maximálnu hodnotu cez všetky $(p, q) \in (0, 1) \times (0, 1)$. V zmysle obrázku 7, vždy najvyšší bod. Na obrázku 8 sme zobrazili závislosť týchto hodnôt od hodnoty θ . Minimum tejto funkcie je celkovým minimom riešeného problému (28) bez člena so strednou hodnotou pre prípad 2×2 filtračných matíc.

Maximálna hodnota pre každú pevne zvolenú váhu sa nadobudla pre identitu \mathbb{I} . Na obrázku 8 to možno vidieť v hladkosti grafu. Možno z toho nevidno, že ide konkrétnie o identitu, môžeme však vidieť minimálne to, že v rámci celého rozpätia pre θ bolo aktívne stále to isté ohraničenie. Stále tá istá filtračná matica.



Obr. 8: Maximálna hodnota účelovej funkcie hodnotovej funkcie cez všetky prípustné p a q vzhľadom na rozloženie váh $(\theta, 1 - \theta)$

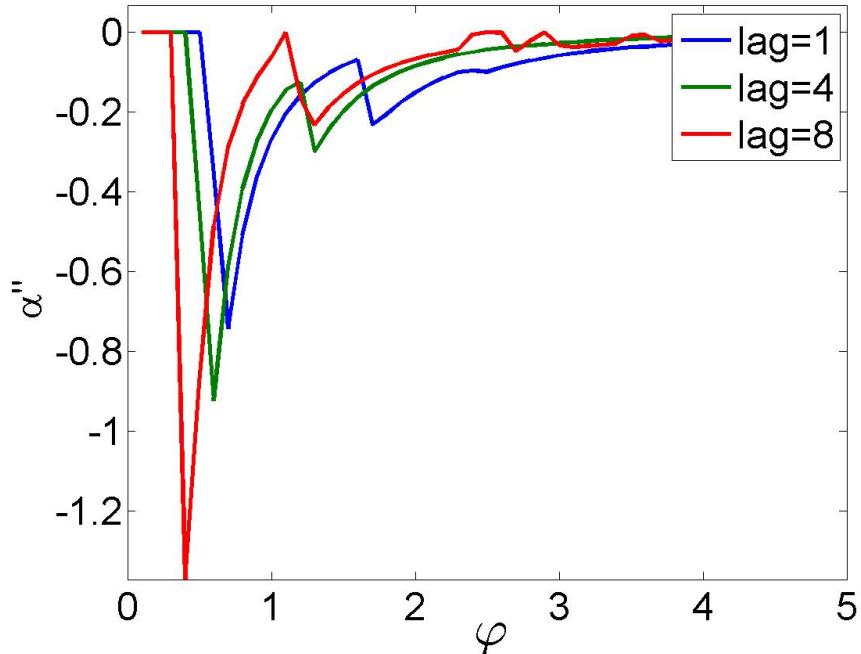
2.4 Filtre redukujúce počet dát

V tejto časti sa budeme zaoberať filtri, ktoré vynechávajú dátu. Ide o obdĺžnikové matice typu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Riešime úlohu (28). Ak by sme si z dát zobrali napríklad len každý ôsmy údaj, máme na výber osem možností vytvorenia nových dát. Záleží na tom, kde z ôsmich pozícii začneme. Použitím všetkých možností sme vytvorili 8 súborov dát. Využili sme na to 8 rôznych matic A a získali sme tak množinu \mathcal{P} , označme \mathcal{P}^8 , keďže sme zbierali každý ôsmy údaj. Pre množinu \mathcal{P}^8 môžeme vypočítať robustnú optimalizačnú úlohu (28) podľa návodu v 1.3.1.

Hodnotu 8 sme zvolili náhodne. Rozdiel medzi použitím všetkých údajov a každého ôsmeho si môžeme predstaviť ako rozdiel medzi tym, či zbierame dátu denne alebo

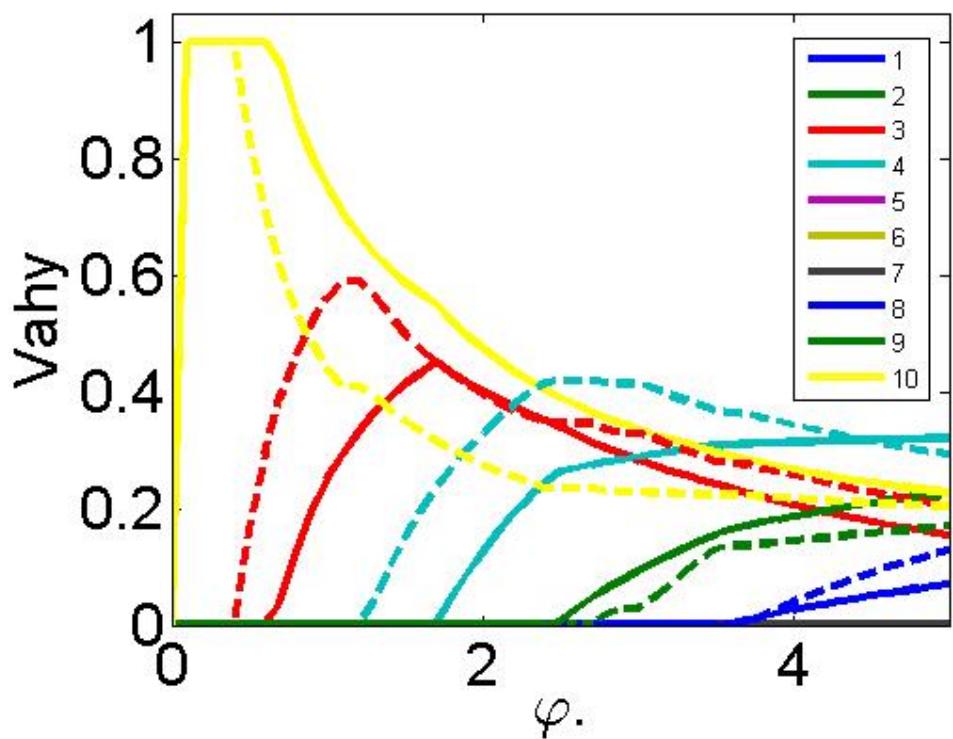


Obr. 9: Posun bodu nespojitosti v druhej derivácii hodnotovej funkcie smerom vľavo so vzrastajúcim počtom preskakovaných údajov.

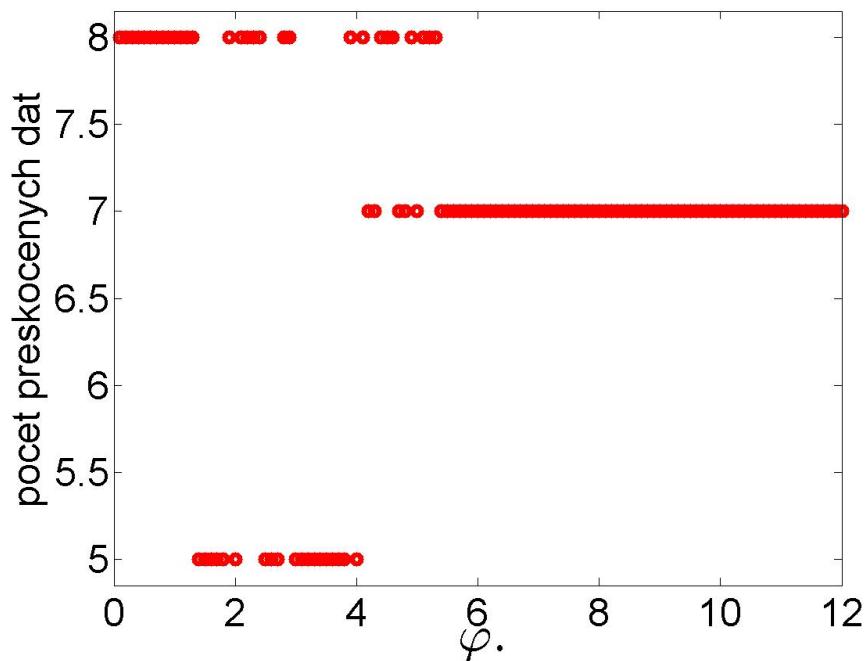
iba raz za niečo viac ako týždeň. Na jednej strane sme sa snažili použiť čo najvyššiu hodnotu, na strane druhej, tým že optimalizačná úloha je vypočítaná samostatne pre veľa hodnôt φ , výpočty sú náročné a zaberú veľmi veľa času. Hodnota 8 nám prišla ako dostatočne vysoká na to, aby dobre ilustrovala riešený problém a zároveň dostatočne nízka na to, aby jednotlivé výpočty zbehli v rozumnom čase. Dielikovanie pre φ sme volili rovné hodnote 0,1.

Podobne, ako pre \mathcal{P}^8 , sme vypočítali úlohy pre $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2, \dots, \mathcal{P}^7$. Kvôli náročnosti výpočtov používame ceny akcií už len 10 firiem uvedených v popise obrázka 12. Opäť počítame pomocou CVX a znázorníme druhé derivácie hodnotových funkcií. Kvôli jednoduchej prehľadnosti, vykreslíme len hodnoty pre posuny 1, 4 a 8.

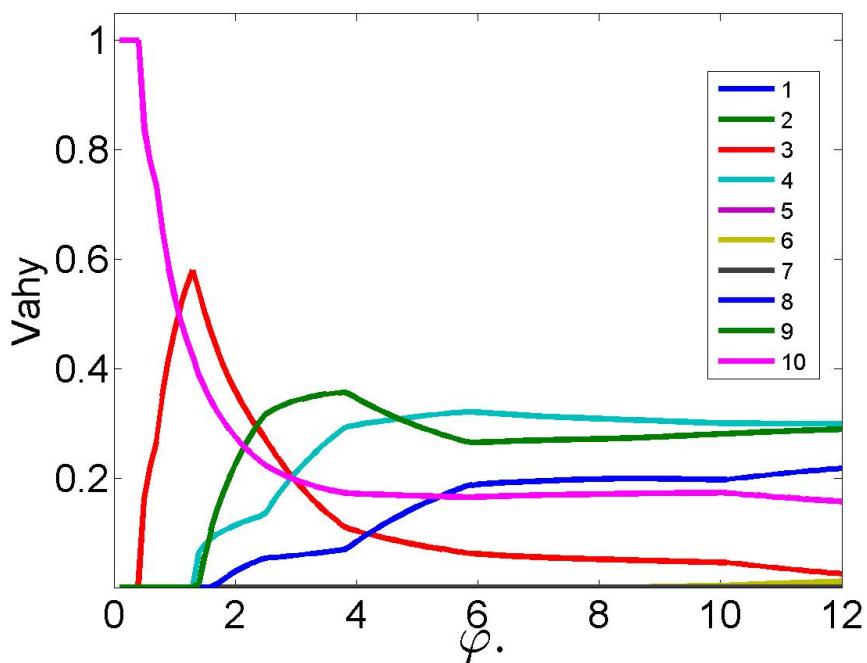
Na obrázku 9 môžeme vidieť, že so zvyšujúcim sa množstvom preskočených údajov, sa nám body nespojitosti v druhej derivácii hodnotovej funkcie posúvajú vľavo. Inými slovami, už pri nižších hodnotách φ sa začínajú do portfólia pridávať nové akcie. To možno vidieť na obázku 10.



Obr. 10: Zmena portfólia 10 nemeckých firiem pri zmene zberu dát. Lag1-plná čiara; Lag8-prerušovaná čiara. Mesačné dáta sú z obdobia rokov 2008-2015. Označenie použitých spoločností: 1. SOBA.F 2. AEC1.F 3. BCO.F 4. XONA.F 5. GEC.F 6. HWP.F 7. INL.F 8. JNJ.F 9. MDO.F 10. DWD.F



Obr. 11: Počet preskočených údajov.



Obr. 12: 1. SOBA.F 2. AEC1.F 3. BCO.F 4. XONA.F 5. GEC.F 6. HWP.F 7. INL.F 8. JNJ.F 9. MDO.F 10. DWD.F za roky 2008-2015.

Môže to súvisieť s mohutnosťou množín \mathcal{P}^i . Čím viac matíc obsahujú, tým viac možností vybrať takú, ktorá výrazne zvýsi disperziu. Ďalšou možnosťou je také vysvetlenie, že čím viac dát preskočíme, tým sú susedné hodnoty menej korelované. Autokorelácia časového radu so vzdialenosťou členov klesá. Susedné údaje teda pri veľkých preskočeniach takmer vôbec spolu nesúvisia (sú nezávislé), a teda vytvárajú väčšiu disperziu. To, že to platí, a že naozaj platí, že čím viac údaje podelíme, tým väčšiu disperziu môžeme očakávať, si ukážeme na nasledujúcim príklade.

Tentokrát vytvoríme jednu veľkú množinu $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^8 \mathcal{P}^i$ a vypočítame pomocou CVX.

Na obrázku 11 môžeme vidieť, že nech bolo φ akékoľvek, počet preskočených dát v aktívnom ohraničení sa drží nad hodnotou 5. Inak povedané, maximálna disperzia cez A sa nadobúdala pre matice vynechávajúce väčšie množstvo dát.

Pre štvorcové matice z predošej sekcie 2.3 možno platilo, že identita je filter, ktorý vytvára najväčšiu disperziu dát, všeobecne to však neplatí. Na obrázku 12 môžeme vidieť rozloženie váh tohto portfólia.

V prípade, že by sme riešili celý problém do konca (t.j. riešili HJB rovnicu) a zaujímaloby nás rozloženie váh vzhľadom na aktuálnu hodnotu portfólia v čase, výsledný graf by bol veľmi podobný. Na svedomí to ma obvyklý tvar výslednej funkcie $\varphi(x, t)$, ktorá je rastúca a rýdzomonotoná. Na obrázku 12 sa to prejaví len horizontálnym zúžením alebo roztiahnutím niektorých častí.

3 Synchronizácia dát

V predošlých kapitolách sme opísali problematiku hodnotovej funkcie, dokázali niekoľko jej vlastností a na príkladoch demonstrovali jej správanie v prípadoch robustnej obmeny pomocou takzvaných filtrov. Tie sme volili buď ako dáta zhľadzujúce alebo dáta redukujúce matice. V tejto časti sa bližšie pozrieme na možnú aplikáciu na finančnom trhu. Uvedieme niekoľko možných použití a tie následne porovnáme. Takisto zavedieme indikátor (nazvime κ), ktorým sa pokúsime vyjadriť efektivitu portfólia ako funkciu od vstupného parametra φ .

Pre riešenie optimalizačnej úlohy nad portfóliom aktív sú potrebné historické údaje cien. Každý z našich časových radov X^i obsahoval n záznamov o výnose toho daného aktíva. Vo všeobecnosti sa však tieto dĺžky rovnat nemusia. Problém môže nastať napríklad vtedy, ak pre jednotlivé akcie v portfóliu čerpáme dáta z rôznych zdrojov. Jeden poskytovateľ môže zverejňovať ceny raz za deň, niekto iný, pre inú akciu, aj každú hodinu. My však potrebujeme ceny aktív vyčíslené k rovnakým časovým okamihom.

Jeden zo spôsobov, ako tento súlad v dátach dosiahnuť, je použitie len tých časových okamihov, v ktorých máme záznam o cene pre všetky aktíva súčasne. Tento prístup zvolíme ako základný a s ním porovnáme metódu, pri ktorej použijeme filtrovanie dát.

3.1 Redukovanie dát zhladením

Ako základ pre nasledujúce výpočty použijeme rovnaké dáta ako v kapitole 2 v časti 2.4. Pracujeme s cenami akcií desiatich spoločností nemeckého indexu DAX30, ktoré sú uvedené v popise obrázku 10. Z mesačných cien za obdobie rokov 2008 až 2015 sme si vypočítali kovariančnú maticu a očakávané výnosy. Na ich základe sme si vygenerovali vlastné denné dáta. Spôsob ich výpočtu uvádzame v prílohe A. Pre tento prístup sme sa rozhodli preto, aby sme mohli mať k dispozícii ceny akcií pre akýkoľvek vopred zvolený časový interval.

Používame denné dáta za jeden kalendárny rok. Situáciu teraz trochu skomplikujeme. Aby sme dosiahli nesúlad v časových intervaloch zberu dát, pre prvých 5 firiem v zozname použijeme len každý druhý údaj, a teda hodnoty akcií za každý druhý deň.

Problém nastáva v tom, že v sadech prvých 5 aktív máme o polovicu menej údajov. Každému údaju ako keby prislúchali až dva záznamy v druhej sade. Tú potrebujeme zredukovať. Urobíme to na základe váženého priemerovania dvoch susedných dát do jedného. Robustnosť úlohy, a teda celkovo vytváranie množiny neistoty \mathcal{P} , bude súvisieť s hľadaním najhoršej možnej kombinácie vzhľadom na parameter p . Matice $A \in \mathcal{P}$ budú mať tvar:

$$\begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-p & p \end{bmatrix}$$

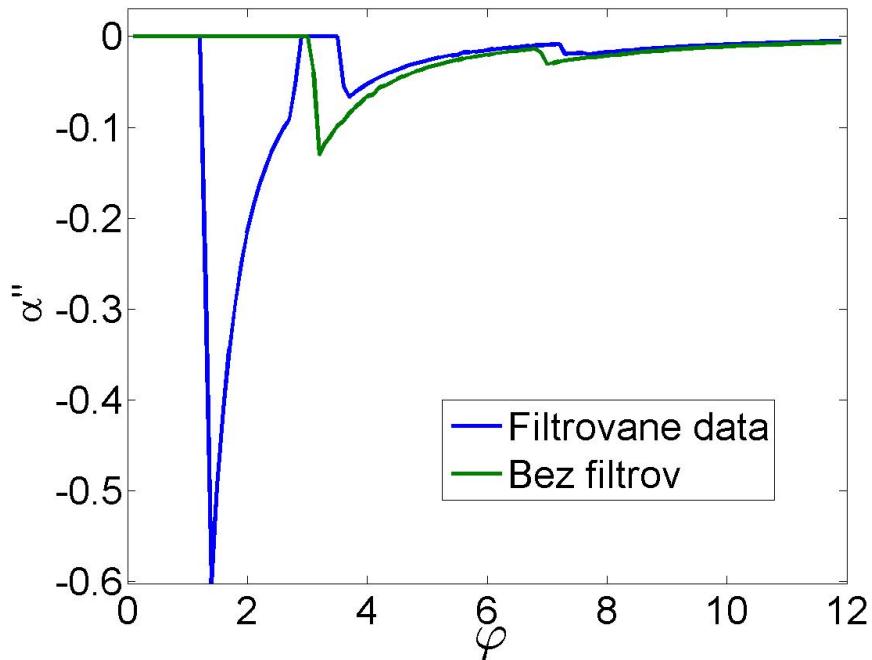
kde $p \in (0, 1)$.

Tieto matice s rozmerom $\frac{n}{2} \times n$ upravia dĺžku sady s dennými dátami na polovicu, tak aby sa dala použiť vo výpočtoch spolu so sadou dát s hodnotami len za každý druhý deň. V určitom zmysle ide o kombináciu spôsobov filtrovania spomenutých v kapitole 2. Jednak matice A nie sú štvorcové, čiže dôjde k redukcii počtu, a jednak tieto matice susedné hodnoty zhladzujú.

Kvôli diskretizácii problému, množinu \mathcal{P} naplníme takými maticami A , v ktorých parameter p postupne prejde celý interval $(0, 1)$. Dielik volíme rovný 0.01. Výsledná množina \mathcal{P} pozostáva zo 101 matíc A . Riešime robustnú úlohu (28). Použijeme spôsob pre diskrétnu množinu neistoty z časti 1.3.1.

Ešte pred samotným výpočtom, je potrebné povedať, že dátu, s ktorými pracujeme sú ceny akcií. Filtračné matice sa však neaplikujú priamo na ne, ale na ich výnosy. Okrem tejto úpravy je potrebná ešte jedna. Dve sady dát spočiatku nie sú rovnako veľké. Časové rady sa upravia na rovnakú dĺžku až po ich filtrovaní. Okrem toho potrebujeme filtrovať len časť dát. Do štandardnej úlohy (28) však vstupujú všetky dátu súčasne. Z toho dôvodu je potrebné výnosy vypočítané z dvojdenných dát trochu upraviť. Konkrétnie tak, aby ich filter nijak neovplyvňoval. Takýmto spôsobom budú môcť do úlohy vstupovať spolu s dátami, ktoré filtrovať chceme.

Požadovaný efekt dosiahneme tak, že dvojdenné výnosy zduplicujeme tak, aby ich prenásobenie váhami p a $(1-p)$ nakombinovalo do rovnakého čísla. Na krátky čas teda budeme mať všetky dátu rozmeru n . Po aplikovaní filtra $n \rightarrow \frac{n}{2}$.



Obr. 13: Posun bodu nespojitosti v druhej derivácii hodnotovej funkcie smerom vľavo pri použití redukovania dát pomocou zhladzovacích filtrov.

Posledná pripomienka pred samotným výpočtom sa týka škálovania. Tým, že nepracujeme s dátami zbieranými za rovnako dlhé časové obdobia, nesmieme zabúdať na prepočítavanie výnosov a variancií na jednu, vopred dohodnutú, časovú jednotku. My teraz, ako aj vo všetkých výpočtoch doteraz, prepočítavame výsledné hodnoty na ročnú bázu.

Na obrázku 13 môžeme vidieť, že druhá derivácia hodnotovej funkcie, v prípade zhladzovania, je posunutá oproti štandardnému výpočtu viac doľava. Znamená to to, že do portfólia vstupuje viac aktív už pri menších hodnotách averzie voči riziku reprezentovaných parametrom φ . Model je konzervatívnejší vzhľadom na to, že sme v každom bode minimalizácie cez θ hľadali najhoršie možné naváženie $(p, (1 - p))$ susedných výnosov. Pod štandardným prístupom sme rozumeli spôsob, v ktorom sme ceny akcií zobraли len v tých okamihoch, kedy boli dostupné pre obidve sady dát. Pracovali sme teda s dvojdennými výnosmi 10 spoločností.

3.2 Analýza odchýlok

Podobne ako v kapitole 2, pre každé φ nás budú zaujímať najväčšie a najmenšie odchýlky disperzií v účelovej funkcií v prípade, že by sa v skutočnosti zrealizovala iná, ako nami zvolená, maticou A v aktívnom ohraničení definovaná, disperzia. Matematicky zapísané, hľadáme funkcie:

$$\Phi^1(\varphi) = \max_{p \in (0,1)} \left(\frac{\hat{\theta}^T X^T A^T(\hat{p}(\varphi)) Q A(\hat{p}(\varphi)) X \hat{\theta}^T - \hat{\theta}^T X^T A^T(p) Q A(p) X \hat{\theta}^T}{\hat{\theta}^T X^T A^T(\hat{p}(\varphi)) Q A(\hat{p}(\varphi)) X \hat{\theta}^T} \right), \quad (33)$$

a takisto:

$$\Phi^2(\varphi) = \min_{p \in (0,1)} \left(\frac{\hat{\theta}^T X^T A^T(\hat{p}(\varphi)) Q A(\hat{p}(\varphi)) X \hat{\theta}^T - \hat{\theta}^T X^T A^T(p) Q A(p) X \hat{\theta}^T}{\hat{\theta}^T X^T A^T(\hat{p}(\varphi)) Q A(\hat{p}(\varphi)) X \hat{\theta}^T} \right), \quad (34)$$

kde $\hat{p}(\varphi)$ je parameter, ktorý presne definuje maticu v aktívnom ohraničení $A(\hat{p}(\varphi))$.

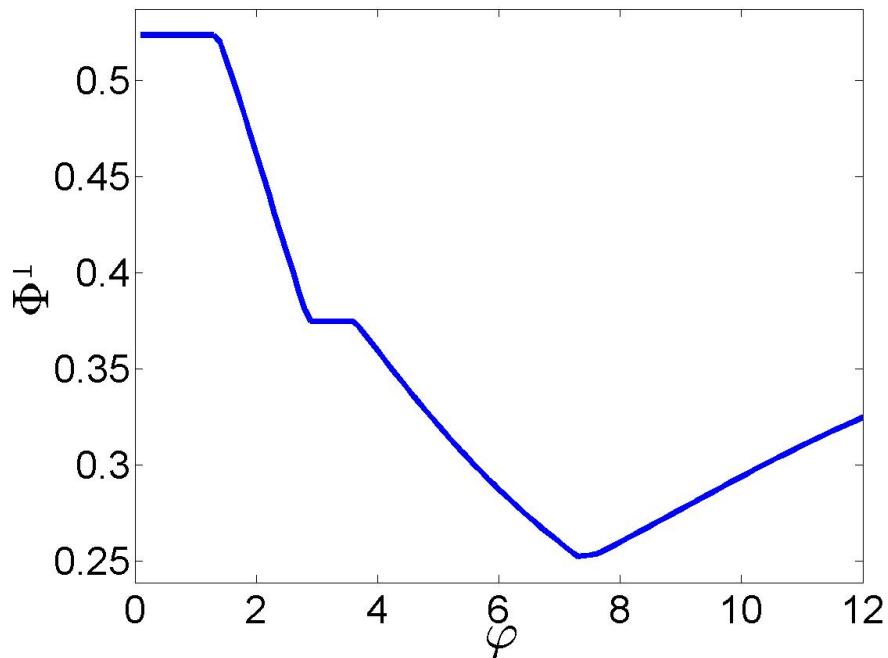
Pre každé φ tak zistíme, ako najviac by sme sa mohli zmýliť v odhadovaní disperzie portfólia v prípade, že by sa zrealizoval niektorý iný scenár. Túto informáciu poskytne funkcia Φ^1 .

Vzhľadom na to, že aspoň jedno ohraničenie musí byť aktívne, funkcia Φ^2 by mala byť celá nulová. Tu nás bude skôr zaujímať argument tohto minima. V tomto prípade parameter p presne definuje konkrétnu maticu $A = A(p)$. To p , ktoré minimalizuje Φ^2 nám poskytuje presnú informáciu o matici A v aktívnom ohraničení.

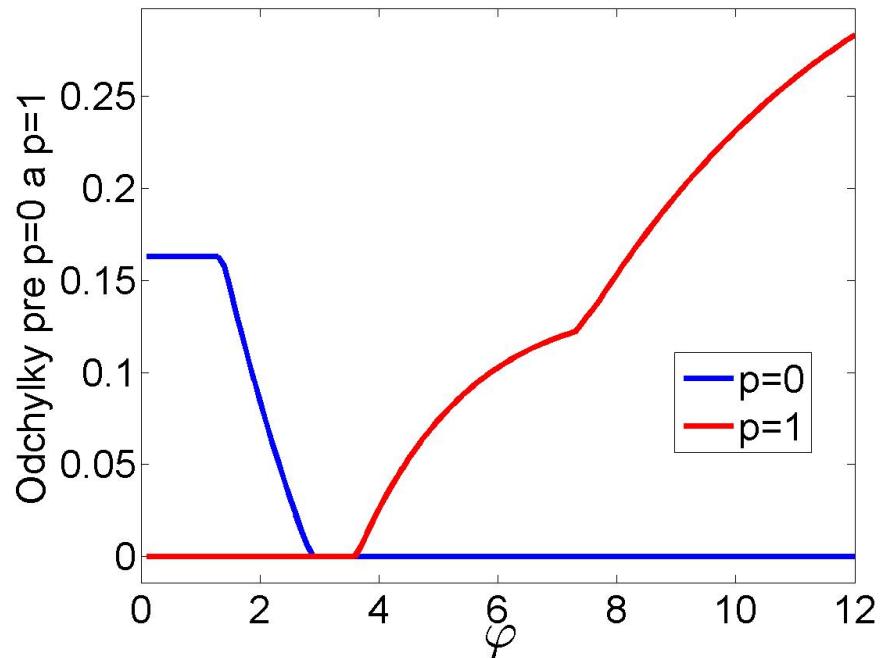
Na obrázku 14 môžeme vidieť, že pre φ medzi hodnotami 7 a 8 sa realizujú najmenšie odchýlky. Z tvaru funkcie Φ^1 môžeme usúdiť, že v prípade volenia investorovej averzie voči riziku tak, aby φ bolo z tohto intervalu, môžeme očakávať najmenej neočakávaných výchyliek v optimalizácii odhadovanej disperzii. Variácia disperzií cez množinu \mathcal{P} je tu najužšia.

Teraz sa pozrime na argumenty minima minimalizovanej funkcie v optimalizačnej úlohe Φ^2 . Tie sme numericky vypočítali a zistili, že vždy sa jedná o matice $A \in \mathcal{P}$ vytvorené pomocou hodnôt $p = 0$ alebo $p = 1$. Inak povedané, disperziu v dátach maximalizovalo úplné vypustenie jedného z dvoch údajov v každom páre.

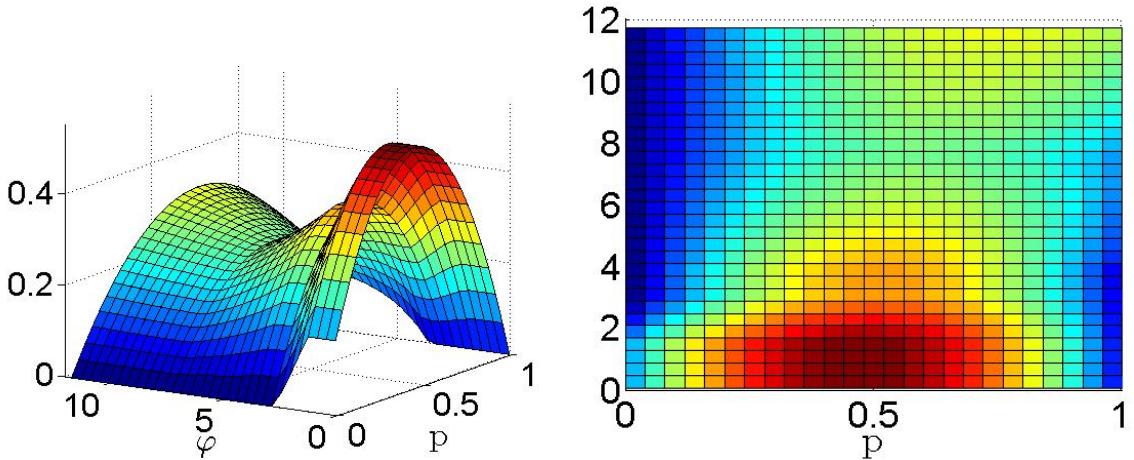
Na obrázku 15 sme vykreslili odchýlky od disperzie v optime vzhľadom na disperziu poskytnutú maticami A pre hodnoty $p = 0$ a $p = 1$. Tieto krivky nie sú nič iné ako



Obr. 14: Maximálna odchýlka disperzie portfólia od optimálnej disperzie definovaná vzťahom (33).



Obr. 15: Odchýlka disperzie portfólia od disperzie v optime, v prípade, že by sa zrealizovala matica $A \in \mathcal{P}$ pre $p = 0$ alebo $p = 1$.



Obr. 16: Odchýlka disperzie portfólia od disperzie v optime závislá od vstupného φ a p .

funkcia Φ^1 , ktorú upravíme tak, že namiesto maximalizácie cez p , priamo dosadíme najprv $p = 0$ a potom $p = 1$.

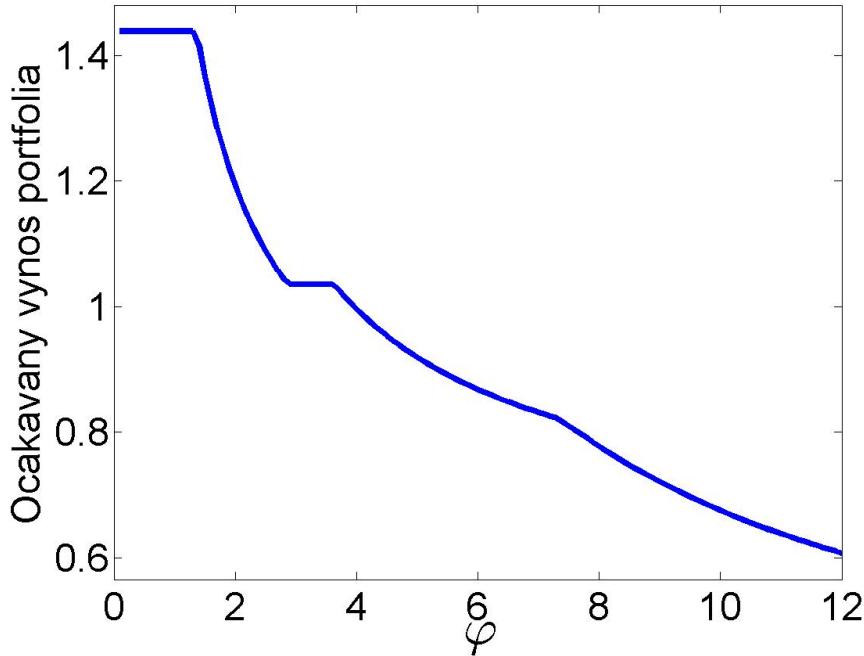
Vidíme, že najprv je maticou v aktívnom ohraničení A pre $p = 1$. Pre φ väčšie ako približne hodnota 4 sa však situácia mení. Maticou v aktívnom ohraničení sa stáva A pre $p = 0$.

Zaobrali sme sa maximálnymi a minimálnymi odchýlkami. Vzhľadom však na to, že tieto odchýlky závisia len od dvoch parametrov φ a p , môžeme, len pre lepšiu predstavu, vykresliť aj 3D obrázok. To sme urobili v obrázku 16.

Ak si ho poriadne prezrieme, na obrázku 14 je zobrazený pomyselný chrbát 3D vizualizácie z obrázku 16 vľavo. Obrázok 15 zobrazuje bočné hranice pre $p = 0$ alebo $p = 1$ a φ voľné. Vpravo je náhľad zhora, kde najtmavšie modré časti signalizujú parametre p vytvárajúce aktívne ohraničenia v robustnej optimalizačnej úlohe (28). Je pekne vidno, ako sa váhy p presúvajú z jednej strany na druhú v momente, keď φ prechádza hodnotami blízkymi číslu 4.

3.3 Ukazovateľ κ

Teraz sa pozrieme na to, akú užitočnú informáciu pre investora by sme mohli čerpať z predošlých výpočtov.



Obr. 17: Očakávaný výnos portfólia v závislosti od optimálnych váh $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\varphi)$.

Väčší nátlak na minimalizáciu volatility portfólia, a teda jeho celkovej rizikovosti, má svoju cenu vo forme nižších očakávaných výnosov. Naozaj, zatiaľ čo disperzie pri rastúcom φ klesajú, klesajú aj zisky realizované za predpokladu, že portfólio sa bude vyvíjať tak, ako sme odhadli. Priebeh očakávaných výnosov portfólia vzhľadom na optimálne rozloženie váh $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\varphi)$, ako funkcie od φ , možno nájsť na obrázku 17.

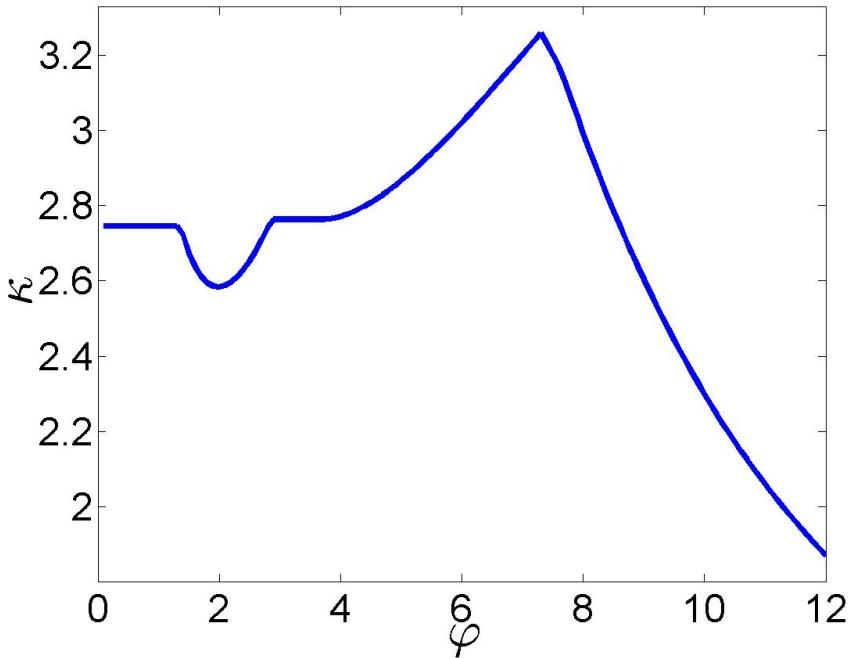
Dôležitou úlohou pre investora je zvoliť svoju averziu voči riziku, ktorá je reprezentovaná parametrom φ , dostatočne vysokú, aby jeho investície neboli príliš rizikové, no zároveň dostatočne nízku, aby jeho očakávaný zisk nebol príliš malý. My sa pokúsime vytvoriť vlastný ukazovateľ κ , ktorý tieto aspekty rozhodovania zohľadní a ponúkne rozumné rady pre voľbu φ . Definujeme ho ako:

$$\kappa(\varphi) = \hat{\theta}^T \mu \left(\max_{p \in (0,1)} \left(\frac{\hat{\theta}^T X^T A^T(\hat{p}(\varphi)) Q A(\hat{p}(\varphi)) X \hat{\theta}^T - \hat{\theta}^T X^T A^T(p) Q A(p) X \hat{\theta}^T}{\hat{\theta}^T X^T A^T(\hat{p}(\varphi)) Q A(\hat{p}(\varphi)) X \hat{\theta}^T} \right) \right)^{-1},$$

čo sa dá jednoduchšie napísat' ako:

$$\kappa(\varphi) = \frac{\hat{\theta}^T \mu}{\Phi^1(\varphi)}. \quad (35)$$

Vytvoríme zlomok, kde v čitateli bude očakávaný výnos a v menovateli maximálna



Obr. 18: Pomer očakávaného výnosu a maximálnej možnej odchýlky v disperzii v závislosti od φ .

možná odchýlka v prípade, že sme disperziu dát odhadli chybne. Pre tento podiel platí, že čím ma vyššiu hodnotu, tým lepšie. Naozaj, čitateľ chceme čo najväčší, pretože obsahuje očakávaný výnos. Na druhej strane, menovateľ chceme čo najmenší, aby rozpätie turbulencií v disperzii cez všetky matice $A \in \mathcal{P}$ bolo čo najmenšie. Táto požiadavka celkové κ opäť zväčší.

Teraz už len stačí funkciu $\kappa(\varphi)$ vykresliť a nájsť jej maximum. Konkrétnie φ , vystupujúce ako argument maxima, je naším odporúčaním pre voľbu optimálnej averzie voči riziku. Graf $\kappa(\varphi)$ možno nájsť na obrázku 18. Optimálne φ vyšlo v hodnote približne $\varphi = 7.3$.

3.4 Možné rozšírenia

V sekcii 3.1 sme opísali prípad, kedy pre určitú skupinu aktív nám chýbal každý druhý údaj. To sme vyriešili zredukovaním počtu dát v ostatných aktívach za pomocí váženého priemerovania susedných dvoch výnosov. Vo všeobecnosti však dát môže chýbať viac. V takých prípadoch je rozloženie váh výpočtovo náročnejšie. Numericky sa nám však

potvrdilo (teraz, ako aj v kapitole 2), že maximálna disperzia sa nadobúda výlučne pre také váhy, kedy sa jedna rovná jednotke a ostatné sú nulové. Tento fakt významne zjednodušuje výpočty. Stačí nám totiž použiť len filtre redukujúce dátá z podkapitoly 2.4, pričom dostaneme rovnaké výsledky, ako keby sme sa snažili nad dátami pri filtrácii rozkladať aj nejednotkové váhy.

Záver

V kapitole 1 sme zhrnuli dostupnú literatúru o riešení Hamilton-Jacobi-Bellmanovej rovnice pomocou Riccatiho transformácie, definovali všetky potrebné pojmy a naznačili, ako funguje robustná optimalizácia. Definície, tvrdenia a celkovo, formuláciu problému, sme prebrali z článku Kilianovej a Ševčoviča [7]. Jednotlivé robustné transformácie vychádzali z nadväzujúceho článku Kilianovej a Trnovskej [8]. Prvá časť tejto kapitoly slúžila len ako náhľad do problematiky, ktorej súčasťou je aj samotná hodnotová funkcia, o ktorej je zvyšok práce. V druhej časti kapitoly 1 sme rozoberali možné robustné variácie, ktoré majú za úlohu zneistiť výber správnych vstupných parametrov.

V kapitole 2 sme navrhli vlastný spôsob obmeny hodnotovej funkcie na robustnú pomocou takzvaných filtračných matíc, ktoré sme si zadefinovali v definícii 2.1. Úloha 28, ktorá vznikla, nebola triviálna a vyriešiť ju všeobecne je veľmi náročné.

Pred samotným riešením sme dokázali platnosť niekoľkých vlastností. Ukázali sme, že úloha (28) je konvexná v parametri θ , premennej A a množina \mathcal{P} , obsahujúca matice A , je v zmysle jej definície tiež konvexná. Napriek tomu ide o problém, ktorý celkovo konvexný nie je. Komplikácie spôsobuje to, že sa snažíme maximalizovať konvexnú funkciu na konvexnej množine. Toto už konvexné nie je.

V ďalších častiach kapitoly 2 sme sa preto obmedzili na numerické výpočty, v ktorých sme si množinu \mathcal{P} zjednodušili. Vytvorili sme si jej diskrétnu podmnožinu.

Najprv sme sa zamerali na trojdiagonálne matice A , kladné, so súčtom riadkov rovným jednej. Ukázalo sa, že bez ohľadu na to, aký spôsob sme pri výbere týchto matíc zvolili, maximálna disperzia sa nadobúdala stále pre pôvodné nefiltrované dátu. Najmenšiu disperziu môžeme pozorovať v prípadoch, keď sú hodnoty v riadkoch rozdelené rovnomerne, a teda všetky sú rovnaké.

Neskôr sme sa zaobrali obdlžníkovými maticami A , ktoré pôvodné dátu redukovali, vynechávali niektoré údaje. Čím viac údajov sme preskakovali, tým väčšie disperzie vznikali. To súvisí s mohutnosťou množín \mathcal{P} , ktorá rástla úmerne s rastom dohodnutého počtu preskakovaných dát. Mali sme totiž viac možností na vytváranie matíc A . Ďalším možným vysvetlením je fakt, že pre veľké preskočenia už dátu daného konkrétneho časového radu spolu takmer vôbec nesúvisia (podobajú sa bielemu šumu), a teda ich disperzia rastie.

Rast v disperzii sme mohli pozorovať aj na správaní hodnotovej funkcie. Jej jednotlivé body nespojitosti sa pohybovali smerom vľavo. Kilianová a Ševčovič v [7] poukázali na to, že toto správanie indikuje skoršie zapájanie aktív do portfólia. Investor je celkovo konzervatívnejší. Spomínané body nespojitosti indikovali konkrétnie φ , pri ktorých sa zloženie portfólia menilo.

V poslednej kapitole sme sa snažili vymyslieť spôsob, ktorým by sa robustná obmena optimalizačnej úlohy (28) dala použiť na finančnom trhu. Zhladzovanie a vynechávanie dát sa môže hodíť v prípadoch, keď ceny aktív nie sú k dispozícii v rovnakých časových intervaloch alebo rovnako často. Takéto dátá treba zosynchronizovať. V rámci tohto kroku sa stretávame s tým, že niektoré časové rady musíme preriediť. Niektoré údaje by sme mohli jednoducho vyhodiť. Bolo by ich však škoda. Stratili by sme informácie, ktoré sme dostali zadarmo. Aby sme tomu zabránili, použili sme filtračné matice, ktoré susedné dátá nemazali, ale konvexne kombinovali.

Po vyriešení úlohy (28) sme sa začali viac zaujímať o výsledné vlastnosti vzhľadom na parameter φ . Všimli sme si, že maximálna odchýlka disperzie od disperzie portfólia v optime, vzhľadom na celú množinu neistoty \mathcal{P} a parameter φ , vyzerá ako konvexná množina s minimom v rozumných hodnotách pre φ . Z toho dôvodu sme navrhli indikátor, ktorý by mal pomôcť voliť najrozumnejšie φ symbolizujúce investorovu averziu voči riziku. Nazvali sme ho κ a vyjadruje pomer medzi očakávaným výnosom a maximálnou odchýlkou v disperzii v prípade, že by sa realizovala niektorá iná filtračná matica $A \in \mathcal{P}$ ako tá, ktorú sme predpokladali. Zo samotnej štruktúry indikátora κ vyplýva, že čím je vyšší, tým lepšie. Ak sa naň pozrieme ako na funkciu $\kappa = \kappa(\varphi)$, tak argument jej maxima považujeme za rozumnú voľbu parametra φ .

Zoznam použitej literatúry

- [1] F. Bagagiolo, M. Bardi and I. Capuzzo Dolcetta, *A viscosity solutions approach to some asymptotic problems in optimal control* Partial differential equation methods in control and shape analysis (eds G. da Prato and J.-P. Zolézio), (Dekker, New York, 1997), 29–39.
- [2] D. P. Bertsekas, *Dynamic programming and stochastic control* Academic Press, New York, 1976
- [3] Boyd, S., Kim, S.-J.: *Robust Efficient Frontier Analysis With A Separable Uncertainty Model*, November 2007
- [4] Boyd, S., Vandenberghe, L.: *Convex Optimization*, Cambridge University Press, New York, 2004
- [5] W. H. Fleming and H. M. Soner: *Controlled Markov processes and viscosity solutions* Springer, New York, 1993
- [6] N. Ishimura and D. Ševčovič, *On traveling wave solutions to a Hamilton-Jacobi-Bellman equation with inequality constraints*, Japan J. Indust. Appl. Math. 30 (2013) 51–67;
- [7] Kilianová, S., Ševčovič, D.: *Optimal Investment Problem via Riccati Transformation.*, ANZIAM J.(55) 14-38 (2013)
- [8] Kilianová, S., Trnovská, M.: *Robust Portfolio Optimization Via Solution To The Hamilton-Jacobi-Bellman Equation*, International Journal of Computer Mathematics, (93), 725–734 (2016)
- [9] D. Klatte, *On the Lipschitz behavior of optimal solutions in parametric problems of quadratic optimization and linear complementarity*”, Optimization 16 (1985) 819–831
- [10] Z. Macová and D. Ševčovič, *Weakly nonlinear analysis of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation arising from pension savings management*, Intl J. Numer. Anal. Model. 7 (2010)

Príloha A

Generovanie dát

- Z reálnych cien akcií si vypočítame kovariančnú maticu S a vektor očakávaných výnosov μ . Na ich základe vymodelujeme nové dátá pomocou generovania z normálneho normovaného rozdelenia $\mathcal{N}(0, 1)$.
- Dielik dt vyjadruje úmernú časť dňa ako často chceme generovať novú cenu. Generujeme teda $\frac{1}{dt}$ -krát denne.
- Funkciu sme naprogramovali v matlabe:

```
function [akcie] = ceny_akcii(dt) %1/dt krat denne generujeme data
F=10;
data=xlsread('DAX.xls','Ceny','B3:K96');
vynosy=diff(log(data));
S=1/22*cov(vynosy);
mu=1/22*mean(vynosy)';
sqrtS=chol(S,'lower');
vyvoj=zeros(F,(1/dt)*261);
vyvoj(:,1)=data(1,:)';
%pocet firiem
%nacitanie mesacnych cien
%vypocet vynosov
%denna kovariancna matica
%denne ocakovane vynosy
%Choleskeho rozklad
%pociatocna cena pouzita z dat

for i=2:261*(1/dt)
    vyvoj(:,i)=vyvoj(:,i-1) + vyvoj(:,i-1).* (mu*dt+sqrt(dt)*sqrtS*randn(F,1));
end

akcie=vyvoj'; %vysledne ceny
end
```