

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**Oceňovanie opcií závislých od cesty pomocou Monte Carlo
metód**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Matematicko finančné modelovanie
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr. Ján Komadel



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Tomáš Buček
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Oceňovanie opcií závislých od cesty pomocou Monte Carlo metód.
Pricing path-dependent options using Monte Carlo methods.

Cieľ: Cieľom práce je analýza simulačných Monte Carlo metód používaných pri oceňovaní opcií závislých od cesty. Príkladom takýchto opcií sú napríklad ázijské alebo bariérové opcie.

Vedúci: Mgr. Ján Komadel
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 25.01.2017

Dátum schválenia: 27.01.2017
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

PodĎakovanie Touto cestou by som sa chcel poĎakovať môjmu vedúcemu diplomovej práce Mgr. Jánovi Komadelovi za odborné rady, podnetné pripomienky a všetok čas, ktorý venoval vedeniu tejto práce. Ďalej by som sa chcel poĎakovať pánovi prof. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, DrSc. za inšpiráciu k modifikáciám metódy protikladných náhodných premenných.

Abstrakt

BUČEK, Tomáš: Oceňovanie opcií závislých od cesty pomocou Monte Carlo metód [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Ján Komadel, Bratislava, 2018, 96 s.

V tejto práci sa zaoberáme oceňovaním opcií závislých od cesty pomocou Monte Carlo metód so zameraním na ázijské opcie. Najskôr uvádzame základnú metódu Monte Carlo. Predstavujeme taktiež model pre cenu akcie - geometrický Brownov pohyb, ktorý je zaužívaným modelom vo svete finančníctva. Tento model nám poskytuje predpoklad o pravdepodobnostnom rozdelení výnosu z ceny akcie, ktorý je potrebný pre aplikáciu Monte Carlo metód. Ďalej popisujeme metódy redukcie variancie a teda spresnenia odhadu touto metódou.

Najskôr uvádzame metódu kontrolných náhodných premenných a metódu protikladných náhodných premenných. Navrhujeme taktiež možnú modifikáciu metódy protikladných náhodných premenných, ktorá prispieva ku ďalšiemu spresneniu odhadu. Empirickými testami zisťujeme aj podmienky efektívnosti metódy protikladných náhodných premenných a nami navrhovaných modifikácií.

Ďalej popisujeme fungovanie a aplikácie metód redukcie variancie, ktoré znižujú varianciu odhadu pomocou zmeny spôsobu vzorkovania. Z týchto metód uvádzame metódu vrstveného vzorkovania a vzorkovanie podľa dôležitosti. Pri vzorkovaní podľa dôležitosti taktiež skúmame vplyvy parametrov opcie na hodnotu koreňa rovnice vystupujúcej v tejto metóde.

V poslednej kapitole sa venujeme porovnávaniu uvedených metód a ich modifikácií na ázijských opciách s obyčajnou metódou Monte Carlo. Venujeme sa taktiež celkovým porovnaniam presnosti a konvergenzie týchto metód na ázijských kúpnych opciách s fixnou realizačnou cenou, využívajúcich aritmetický priemer.

Kľúčové slová: Geometrický Brownov pohyb, Oceňovanie opcií, Ázijské opcie, Monte Carlo, Metódy redukcie variancie

Abstract

BUČEK, Tomáš: Pricing path-dependent options using Monte Carlo methods [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Ján Komadel, Bratislava, 2018, 96p.

In our work we investigate pricing path-dependent options using Monte Carlo methods, focusing on Asian options. At first we present basic Monte Carlo method. We also introduce geometric Brownian motion which is model for stock price, widely used in financial world. This model provides us with assumption for probability distribution of yield of stock price, which is crucial for application of Monte Carlo methods. Further we present variance reduction methods that reduce the variance of estimated price of option and therefore provide better accuracy.

First we describe control variate method and antithetic variate method. We propose potential modifications to the antithetic variate method, which provide further improvement of accuracy of the estimate. By empirical tests we determine conditions of effectiveness of this method and proposed modifications.

Further, we describe the idea and applications of variance reduction methods, which reduce variance through changing means of sampling. From these types of methods we describe stratified sampling and importance sampling. For importance sampling we also explore effects of option parameters on value of root of equation arising in this method.

In last chapter, we address comparing mentioned methods to crude Monte Carlo method. We also present overall comparison of accuracy and convergence of these methods on fixed strike call Asian options using arithmetic average.

Keywords: Geometric Brownian motion, Option pricing, Asian options, Monte Carlo, Variance reduction

Obsah

Úvod	11
1 Zavedenie pojmov	13
2 Monte Carlo	17
3 Metódy redukcie variancie	23
3.1 Metóda kontrolnej náhodnej premennej	23
3.2 Metóda protikladnej náhodnej premennej	26
3.3 Vrstvené vzorkovanie	30
3.3.1 Príklad použitia vrstveného vzorkovania	31
3.3.2 Asymptotické vlastnosti vrstveného odhadu	33
3.3.3 Optimálna alokácia	34
3.4 Vzorkovanie podľa dôležitosti	37
3.4.1 Aplikácia na opciu európskeho typu	42
4 Ázijské opcie	45
4.1 Metóda kontrolnej náhodnej premennej	46
4.2 Metóda protikladnej náhodnej premennej	50
4.3 Vrstvené vzorkovanie	52
4.3.1 Dovrstvenie	55
4.4 Vzorkovanie podľa dôležitosti	56
4.4.1 Pomer vierohodností	56
4.4.2 Linearizácia odhadu a optimálna cesta	57
4.4.3 Aplikácia na opcie ázijského typu	59

4.5	Večeřova PDR	60
5	Praktické testy a porovnanie	63
5.1	Aplikácia metódy kontrolnej náhodnej premennej	63
5.2	Aplikácia metódy protikladnej náhodnej premennej	65
5.2.1	Optimalizačné modifikácie	68
5.2.2	Násobné modifikácie	72
5.3	Aplikácia vrstveného vzorkovania	77
5.3.1	Dovrstvenie	81
5.4	Aplikácia vzorkovania podľa dôležitosti	81
5.4.1	Koreň rovnice	81
5.4.2	Konvergenca	85
5.5	Porovnanie metód	86
	Záver	93
	Literatúra	95

Úvod

Kontrakty podobné opciám sa obchodovali už v staroveku. Ich história siaha už do starovekého Grécka, kedy Tháles z Milétu využil kontrakt tohto typu na profit z možnosti využiť lisy na olivy. Od vtedy už prešla dlhá doba a opcie sa začali vypisovať aj na akcie firiem. V tomto smere bola prevratným momentom publikácia dizertačnej práce Louisa Bacheliera [1], v ktorej popísal Brownov pohyb ako model pre cenu akcie. V dnešnej dobe sa používa Brownov pohyb na modelovanie logaritmu ceny akcie, nič menej tento model nám stále dáva predpoklad o pravdepodobnostnom rozdelení ceny akcie.

Tento fakt je dôležitý pre aplikáciu metód Monte Carlo [6],[4], v ktorých potrebujeme mať predpoklad o pravdepodobnostnom rozdelení hodnoty, alebo argumentu funkcie, ktorej strednú hodnotu sa snažíme odhadnúť. Aplikácie tejto metódy sú využiteľné nielen vo finančnej matematike, ale napríklad aj vo fyzike. Ideou tejto metódy je opakované náhodné vybratie hodnoty z daného rozdelenia a následný výpočet priemeru. Takto vieme s dostatočným počtom opakovaní odhadnúť očakávanú hodnotu danej premennej. Konvergencia tejto metódy však nie je dostatočne rýchla a dosiahnutie presných odhadov si žiada vysoký počet realizácií daného rozdelenia. Snahou metód, ktoré popisujeme a navrhujeme v našej práci je znížiť kolísavosť odhadov týmito metódami. Na dosiahnutie žiadanej presnosti odhadu teda potrebujeme menší počet realizácií, čo môže byť výhodné aj z časového hľadiska.

V prvej kapitole uvedieme niektoré pojmy súvisiace s opciami a popisujeme aj geometrický Brownov pohyb ako model pre cenu akcie. V ďalšej popíšeme ako funguje obyčajná Monte Carlo metóda a overíme ju na oceňovaní najjednoduchšieho typu opcií. V tretej kapitole postupne predstavíme rôzne metódy znižujúce kolísavosť odhadu touto metódou. Ich aplikáciu a funkčnosť tiež znázorníme na najjednoduch-

šom type opcií. V nasledujúcej kapitole sa budeme venovať už priamym aplikáciám týchto metód na opcie závislé od cesty, konkrétne ázijské opcie s aritmetickým priemerom. Uvedieme taktiež parciálnu diferenciálnu rovnicu na oceňovanie tohto typu opcií, ktorej numerické riešenie budeme považovať, z dôvodu nedostatku trhových dát, za ich skutočnú cenu. V poslednej kapitole sa budeme venovať porovnaniu uvedených metód s obyčajnou metódou a taktiež ich vzájomnému porovnaniu.

Kapitola 1

Zavedenie pojmov

V tejto práci sa budeme zaoberať oceňovaním finančných derivátov zvaných opcie. Tie pre kupujúceho predstavujú právo kúpiť alebo prediť podkladové aktívum (najčastejšie akciu firmy) za danú cenu vo vopred stanovený dátum. Dôležité pojmy súvisiace s opciami sú:

- **Podkladové aktívum** - komodita, na ktorej predaj alebo kúpu dáva opcia kupujúcemu právo, nie však povinnosť.
- **Maturita** - dátum, kedy má majiteľ opcie možnosť uplatniť právo, ktoré mu opcia poskytuje. Vo všeobecnosti sa označuje ako T .
- **Realizačná cena** (*Strike price*) - cena, za ktorú má majiteľ opcie právo kúpiť alebo prediť podkladové aktívum. Zväčša sa označuje písmenom K .
- **Kúpna opcia** (*Call*) - takto označujeme typ opcie, ktorý predstavuje právo **kúpiť** podkladové aktívum.
- **Predajná opcia** (*Put*) - typ opcie, ktorý dáva majiteľovi právo **prediť** podkladové aktívum.
- **Bezriziková úroková miera** - miera výnosu bezrizikovej investície. Najčastejšie sa odhaduje ako výnos 3-mesačných štátnych dlhopisov.
- **Výplatná funkcia** (*Payoff*) - funkcia, ktorá predstavuje momentálnu hodnotu opcie pre jej vlastníka. V čase maturity T má tvar

$$\max(S_T - K, 0), \quad (1.1)$$

pre *call* opciu a

$$\max(K - S_T, 0), \quad (1.2)$$

pre *put* opciu.

Pre *call* opciu má výplatná funkcia zmienový tvar, pretože ak cena podkladového aktíva v čase maturity S_T bude menšia ako strike price K , tak sa majiteľovi opcie neoplatí uplatniť právo na kúpu. Na druhej strane ak S_T bude vyššia ako K , môže právo uplatniť, kúpiť podkladové aktívum za K a v okamihu ho predať za S_T . Jeho zisk teda bude mať hodnotu $S_T - K$. Pre *put* opciu to platí opačne. Tieto payoff funkcie však platia len pri vanilkových opciách európskeho typu.

- **Arbitráž** - nazývaná aj arbitrážna príležitosť je situácia na trhu, kedy je možné mať z určitej stratégie okamžitý, kladný zisk bez rizika.
- **Vanilkové opcie** - najjednoduchší typ opcií, ktorých výplatné funkcie závisia výhradne od ceny podkladového aktíva v čase maturity. Nevyznačujú sa teda nijakými špeciálnymi vlastnosťami.
- **Exotické opcie** - opcie, ktorých výplatné funkcie majú komplexnejšie argumenty. Príkladom takýchto opcií môžu byť opcie závislé od cesty:
 - *Ázijské opcie* - ich výplatná funkcia má ako argument priemer ceny podkladového aktíva od vypísania opcie až po jej maturitu.
 - *Bariérové opcie* - tieto opcie vyplatia stanovenú hodnotu ak počas obdobia do maturity cena podkladového aktíva prekročí nejakú hranicu, alebo práve naopak, môžu v tom momente prestať existovať.

Model ceny akcie

V roku 1827 škótsky botanik Robert Brown pozoroval opakovane pod mikroskopom pohyb peľových zrní na hladine vody. Následne opakoval pozorovanie aj s anorganickými časticami čím vylúčil, že spomínaný pohyb by súvisel so životom. Na prácu pána Browna nadviazal Louis Bachelier vo svojej dizertačnej práci [1], kde použil

Brownov pohyb ako model pre cenu akcie. Dnes sa Brownov pohyb vo veľkej miere používa, nie však ako model pre cenu akcie, ale pre jej logaritmus.

Brownov pohyb je teda stochastický proces tvaru

$$X_t = \mu t + \sigma W_t, \quad (1.3)$$

kde W_t je tzv. *Wienerov proces*, ktorý má nasledovné charakteristiky:

1. $W_0 = 0$,
2. W_t má spojité trajektórie s pravdepodobnosťou 1,
3. W_t má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a disperziou t , značíme $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$,
4. má nezávislé prírastky, teda $W_{t_1}, (W_{t_2} - W_{t_1}), \dots, (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$ sú nezávislé $\forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k$.

Geometrický Brownov pohyb, ktorým sa najčastejšie modeluje cena akcií má tvar

$$Y_t = Y_0 \times e^{\mu t + \sigma W_t}. \quad (1.4)$$

Vo finančnej matematike sa často vychádza z predpokladu, že cena akcií spĺňa stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma W_t.$$

Pokiaľ však mienime oceňovať deriváty akcií v rizikovo neutrálnej pravdepodobnosti, nahrádza sa tzv. *drift* μ bezrizikovou úrokovou mierou r . Stochastická diferenciálna rovnica pre cenu akcie má potom tvar

$$dS_t = r S_t dt + \sigma W_t. \quad (1.5)$$

Riešením tejto rovnice je práve geometrický Brownov pohyb, ktorý má tvar

$$S_t = S_0 \times e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}, \quad (1.6)$$

kde S_0 je aktuálna cena akcie a σ je volatilita akcie. Alternatívne sa dá (1.6) napísať aj nasledovne

$$\ln \frac{S_t}{S_0} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t,$$

odkiaľ vidíme, že logaritmický výnos akcie od dnes do času t má podľa vlastností *Wienerovho procesu* normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ a disperziou $\sigma^2 t$.

Keďže presnú hodnotu volatility akcie nepoznáme, tak sa zvykne odhadovať ako výberová smerodajná odchýlka z historických dát. Dáta by nemali siahať príliš do minulosti, pretože tie informácie nemajú vysokú výpovednú hodnotu o budúcnosti, ale nemali by byť taktiež veľmi chudobné, aby nebola informácia znova skreslená.

V tejto práci budú pre nás dôležité práve predpoklady o pravdepodobnostnom rozdelení prírastkov ceny akcie. Existuje však aj odlišný postup, s ktorým prišli Fisher Black a Myron Scholes v [2]. Tí za určitých predpokladov odvodili z (1.4) parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu derivátu, ktorého výplatná funkcia závisí len od konečnej ceny akcie. Táto rovnica má nasledovný tvar:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (1.7)$$

kde $V(S, t)$ predstavuje cenu derivátu.

Riešenie rovnice (1.7) explicitne poznáme pre rôzne deriváty, od ktorých výplatnej funkcie závisí koncová podmienka tejto rovnice. Pre vanilkovú *call* opciu má táto podmienka tvar

$$V(S, T) = \max(S - K, 0). \quad (1.8)$$

Riešenie rovnice (1.7) s koncovou podmienkou (1.8) odvodili Black a Scholes

$$\begin{aligned} V(S, t) = & S\Phi\left(\frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) \\ & - Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right), \end{aligned} \quad (1.9)$$

kde funkcia Φ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia.

Kapitola 2

Monte Carlo

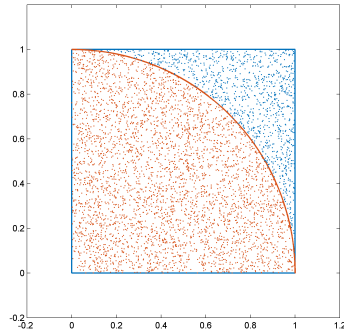
Hlavnou myšlienkou metódy Monte Carlo je opakovaný výber z nejakého pravdepodobnostného rozdelenia a následný výpočet žiadaného parametra. Jedným zo známych využití tejto metódy je napríklad výpočet hodnoty π . To možno dosiahnuť vytvorením štvorca so stranou dĺžky 2 a do tohto štvorca vpísať kruh s polomerom 1. Následne vygenerujeme n realizácií rovnomerného rozdelenia na danom štvorci. Keďže pomer plochy kruhu ku ploche štvorca je $\frac{\pi \times 1^2}{2^2} = \frac{\pi}{4}$, tak túto hodnotu môžeme odhadnúť ako pomer počtu vygenerovaných bodov, ktoré sú v kruhu ku celkovému počtu bodov. Tento pomer sa zachová ak použijeme len štvrtinu štvorca a štvrtý kruh. Tento výpočet ilustruje obrázok 2.1.

Vo finančnej matematike však najčastejšie potrebujeme odhadnúť strednú hodnotu funkcie nejakého procesu ako cenu derivátu, keďže je to ocenenie, ktoré zaručí absenciu arbitráže. Uvidíme, že na toto je metóda Monte Carlo vhodná, čo si ukážeme na príklade z finančnej matematiky. Najskôr však budeme potrebovať dve vety.

Veta 2.1 (Silný zákon veľkých čísel). *Nech $X_1, X_2, \dots, X_n$ je postupnosť nezávislých, rovnako rozdelených náhodných premenných so strednou hodnotou μ . Potom*

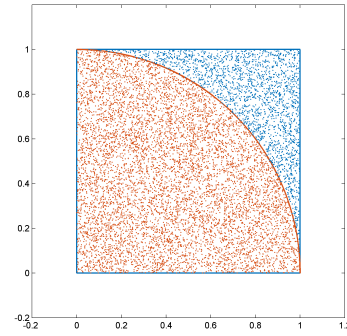
$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu\right) = 1.$$

Veta 2.2 (Centrálna limitná veta). *Nech $X_1, X_2, \dots, X_n$ je postupnosť nezávislých, rovnako rozdelených náhodných premenných so strednou hodnotou μ a disperziou σ^2 .*



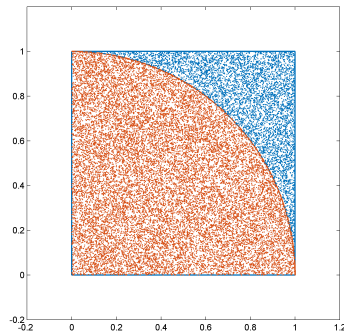
(a) 1 000 náhodných výberov bodov.

$$\hat{\pi} = 3.1264$$



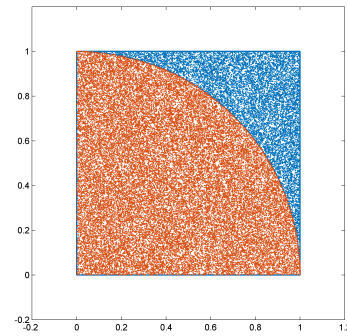
(b) 10 000 náhodných výberov bodov.

$$\hat{\pi} = 3.1208$$



(c) 25 000 náhodných výberov bodov.

$$\hat{\pi} = 3.1370$$



(d) 50 000 náhodných výberov bodov.

$$\hat{\pi} = 3.1416$$

Obr. 2.1: Odhad hodnoty π .

Potom $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < x \right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Teda ak $n \rightarrow \infty$ potom pravdepodobnostné rozdelenie $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ konverguje k normálnemu rozdeleniu s parametrami $(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Hľadáme teda hodnotu parametra

$$\theta = E(f(X)), \quad (2.1)$$

pričom X je náhodná premenná, ktorej rozdelenie explicitne poznáme, a z ktorého vieme generovať realizácie. Takýchto realizácií si teda môžeme vygenerovať n a ná-

sledne použiť aritmetický priemer. Dostaneme teda odhad parametra θ ,

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i).$$

Podľa *Zákona veľkých čísel* potom platí

$$\hat{\theta} \xrightarrow{s.i.} \theta, \text{ pre } n \rightarrow \infty.$$

Zároveň, podľa *Centrálnej limitnej vety* vieme, že asymptoticky má $\hat{\theta}$ pravdepodobnostné rozdelenie $\mathcal{N}\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Parameter σ^2 nepoznáme, ale vieme ho z vygenerovaných realizácií aproximovať ako

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(f(X_i) - \hat{\theta}\right)^2, \quad (2.2)$$

pričom vidíme, že smerodajná odchýlka odhadu $\hat{\theta}$ je $\frac{s}{\sqrt{n}}$. Pokiaľ by sme teda chceli znížiť nepresnosť odhadu o jedno desatinné miesto, museli by sme počet realizácií zvýšiť 100–násobne.

Teraz sa pozrime na konkrétnu aplikáciu metódy Monte Carlo vo finančnej matematike, kde ju použijeme na ocenenie *call* opcie európskeho typu. Vieme, že ocenenie takej opcie znamená najšť diskontovanú strednú hodnotu výplatnej funkcie tejto opcie. Funkcia f v (2.1) bude mať teda tvar

$$f(S_T) = e^{-rT} \times \max(S_T - K, 0), \quad (2.3)$$

kde T je maturita danej opcie, K je jej realizačná cena, S_T je cena podkladového aktíva v čase maturity a r je bezriziková úroková miera. Ďalej využijeme nutný predpoklad, že poznáme pravdepodobnostné rozdelenie ceny podkladového aktíva. Ako sme spomínali, vo finančnej matematike sa používa predpoklad, že cena akcie S sa riadi geometrickým Brownovým pohybom

$$S_t = S_0 \times e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t},$$

kde W_t je hodnota Wienerovho procesu v čase t a σ je volatilita ceny akcie. Z toho vieme odvodiť, že premenná S_T má lognormálne rozdelenie s parametrami $\left((r - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T\right)$. Náhodnú premennú S_T teda vieme simulovať pomocou normovaného normálneho rozdelenia nasledovne:

$$S_T = S_0 \times e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z},$$

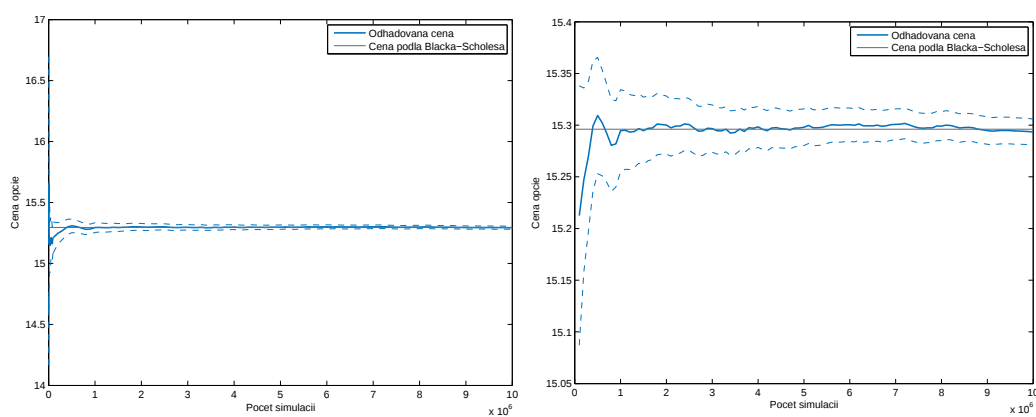
kde $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Keďže máme predpokladané rozdelenie náhodnej premennej S_T , môžeme pristúpiť ku samotnej metóde Monte Carlo a teda najskôr vygenerovať n realizácií S_T . Následne pre každú z nich vypočítame hodnotu diskontovanej výplatnej funkcie (2.3) a tie spriemerujeme. Výsledok reprezentuje odhad diskontovanej strednej hodnoty výplatnej funkcie a teda ceny danej opcie, podľa metódy Monte Carlo. V tabuľke 2.1 vidíme výsledky týchto odhadov a ich smerodajné odchýlky pre hodnoty $S_0 = 156.41$, $T = 1$, $K = 150$, $\sigma = 0.1730$, $r = 0.0142$, získané z trhových dát a meniaci sa parameter n . Vývoj odhadu ceny opcie v závislosti od počtu simulácií zobrazuje graf 2.2.

Tabuľka 2.1: Odhadovaná cena v závislosti od počtu realizácií

Počet simulácií	Odhadovaná cena podľa MC	Smerodajná odchýlka odhadu
5 000	15.3466	0.2884
10 000	15.1583	0.2000
50 000	15.2097	0.0907
100 000	15.2125	0.0640
1 000 000	15.2946	0.0203
10 000 000	15.2933	0.0064

Cena podľa Blacka a Scholesa bola v tomto prípade 15.2961. Vidíme teda, že smerodajná odchýlka sa správa podľa očakávaní a znížila sa rádovo 10-krát pri 100-krát vyššom počte simulácií. Obrázok 2.2 naznačuje, že cena odhadovaná touto metódou konverguje k tej podľa Blackovho-Scholesovho modelu. Ak sa však pozrieme na tento vývoj priblížene, len pre vyššie počty simulácií zistíme, že odhad v skutočnosti kolíše okolo ceny podľa Blacka a Scholesa. Cena teda nekonverguje monotónne ale osciluje zo zmenšujúcou sa smerodajnou odchýlkou, tak ako to môžeme vidieť na obrázku 2.2.



(a) Odhadovaná cena opcie v závislosti od počtu simulací, pre 1 000–10 000 000
(b) Odhadovaná cena opcie v závislosti od počtu simulací, pre 100 000 – 10 000 000 simulací.

Obr. 2.2: Vývoj odhadovanej ceny opcie podľa metódy Monte Carlo.

Kapitola 3

Metódy redukcie variancie

Keďže metóda Monte Carlo je asymptotická treba brať do úvahy, že ňou daný odhad má istú kolísavosť vyjadrenú varianciou (2.2). Hodnota tejto variancie, respektíve z nej odvodená smerodajná odchýlka sa dá znížiť počtom vygenerovaných realizácií náhodnej premennej. Z tvaru smerodajnej odchýlky $\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ vidíme, že na dosiahnutie desaťnásobného zníženia tohto parametra je nutné navýšiť počet realizácií stonásobne. To môže byť časovo náročné a preto v tejto kapitole predstavíme niektoré metódy, ktoré redukujú varianciu iným, časovo efektívnejším spôsobom. V tejto kapitole budeme použitie týchto metód ilustrovať na obyčajných opciách európskeho typu. Aplikácii metód na ázijské opcie sa budeme venovať v kapitole 4.

3.1 Metóda kontrolnej náhodnej premennej

Metóda kontrolnej premennej (*Control variate method*) je jedna z najefektívnejších metód na redukcii variancie metódy Monte Carlo. Uvedená na redukcii variancie pri oceňovaní práve ázijských opcií v [13] je však aplikovateľná aj na opcie európskeho typu, na ktorých najskôr znázorníme jej použitie. Táto metóda využíva veľkosť odchýlky v odhadoch ceny derivátu so známou cenou na korekcii odhadu ceny derivátu, ktorého cenu hľadáme.

Majme vygenerovaných $X_1, X_2, \dots, X_n$, n nezávislých, rovnako rozdelených realizácií náhodnej premennej X . Naším cieľom je teda odhadnúť $E(f(X)) = E(Y) = \theta$, kde $f(X) = Y$ môže byť napríklad diskontovaná výplatná funkcia európskej opcie.

Pomocou obyčajnej Monte Carlo metódy by sme mali odhad

$$\hat{\theta} = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n},$$

ktorý je nevychýlený a s pravdepodobnosťou 1 konverguje k $E(Y)$.

Predpokladajme však, že k dispozícii máme ďalší proces $Z = g(X)$, ktorého strednú hodnotu $E(Z)$ poznáme. V tomto prípade môže byť proces Z samotná cena akcie a $E(Z)$ bude jej stredná hodnota, teda $S_0 e^{rT}$. Potom môžeme skonštruovať nové náhodné premenné $\tilde{Y}_i^c = Y_i - c(Z_i - E(Z))$. Nový odhad parametra θ pomocou metódy kontrolných náhodných premenných bude mať tvar

$$\hat{\theta}_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [Y_i - c(Z_i - E(Z))] = \bar{Y} - c(\bar{Z} - E(Z)), \text{ kde } c \in \mathbb{R}.$$

Tento odhad bude, tak ako pri obyčajnej Monte Carlo metóde, nevychýlený keďže platí

$$E(\hat{\theta}_c) = E(\bar{Y} - c(\bar{Z} - E(Z))) = E(\bar{Y}) - c(E(\bar{Z}) - E(Z)) = E(\bar{Y}) = E(Y).$$

Nový odhad $\hat{\theta}_c$ bude mať nasledovnú varianciu:

$$\begin{aligned} \sigma_c^2 &= \text{Var}(\tilde{Y}) = \text{Var}(Y - c(Z - E(Z))) \\ &= \text{Var}(Y) - 2c\text{Cov}(Y, Z) + c^2\text{Var}(Z) \\ &= \sigma_Y^2 - 2c\sigma_Y\sigma_Z\rho_{YZ} + c^2\sigma_Z^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

kde ρ_{YZ} je korelačný koeficient náhodných premenných Y a Z , σ_Y^2 je variancia premennej Y a σ_Z^2 je variancia premennej Z . Nový odhad ceny $\hat{\theta}_c$ podľa tejto metódy má teda hodnotu variancie $\frac{\sigma_c^2}{n}$, pričom odhad pôvodnej Monte Carlo metódy (zodpovedajúcej parametru $c = 0$) má varianciu $\frac{\sigma_Y^2}{n}$. Vidíme, že nový odhad bude mať menšiu varianciu ak bude splnená nerovnosť $c^2\sigma_Z^2 < 2c\sigma_Y\rho_{YZ}$, ktorá platí ak sú náhodné premenné Y a Z dostatočne kladne alebo záporne korelované, čo si dokážeme neskôr.

Potrebuje si tiež odvodiť hodnotu neznámeho parametra c . Ten zvolíme tak aby minimalizoval výraz (3.1), preto musí spĺňať podmienku

$$2c\sigma_Z^2 - 2\sigma_Y\sigma_Z\rho_{YZ} = 0.$$

Optimálna hodnota koeficientu c , tak aby minimalizoval výraz (3.1) je

$$c^* = \frac{\sigma_Y}{\sigma_Z} \rho_{YZ} = \frac{\text{Cov}(Y, Z)}{\text{Var}(Z)}. \quad (3.2)$$

Dosadením (3.2) do (3.1) dostávame

$$\begin{aligned} \sigma_c^2 &= \sigma_Y^2 - 2c^* \sigma_Y \sigma_Z \rho_{YZ} + (c^*)^2 \sigma_Z^2 \\ &= \sigma_Y^2 - 2 \frac{\sigma_Y}{\sigma_Z} \rho_{YZ} \sigma_Y \sigma_Z \rho_{YZ} + \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_Z^2} \rho_{YZ}^2 \sigma_Z^2 \\ &= \sigma_Y^2 (1 - \rho_{YZ}^2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Vidíme teda, že pomer variancií odhadu metódy kontrolnej náhodnej premennej a Monte Carlo metódy bude

$$\frac{\sigma_c^2}{\sigma_Y^2} = 1 - \rho_{YZ}^2. \quad (3.4)$$

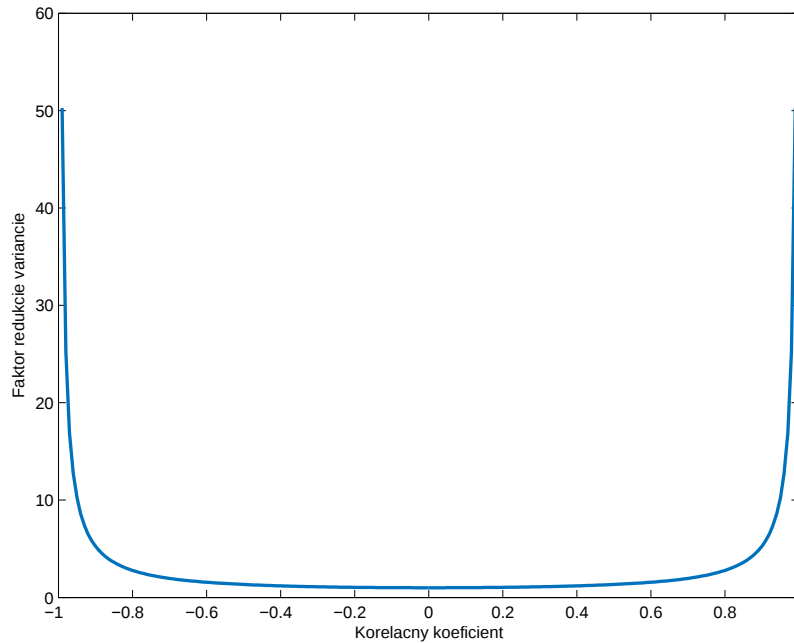
Z výrazu (3.4) možno pozorovať, že efektivita tejto metódy závisí od korelácie medzi pôvodným procesom a tým kontrolným. Ako už bolo spomenuté na znamienku korelácie však nezáleží, pretože v (3.3) vystupuje v druhej mocnine.

Faktor redukcie variancie $\frac{1}{1-\rho_{YZ}^2}$ narastá veľmi prudko ak sa absolútna hodnota korelácie blíži 1 a naopak v okolí hodnoty 0 rastie veľmi pomaly. Ak je hodnota korelácie 0.95, predstavuje to 10-násobné zmenšenie variancie, pri $\rho_{YZ} = 0.9$ je to už však iba 5-násobné zmenšenie. Znamená to, že na dosiahnutie signifikantného zlepšenia oproti obvyčajnej Monte Carlo metóde je potrebná vysoká korelácia vyššie spomenutých procesov. Nájsť však taký proces Z , ktorého strednú hodnotu navyše potrebujeme poznať, nemusí byť triviálny problém. Vývoj faktora redukcie variancie ilustruje obrázok 3.1.

Ďalším problémom je, že uvedené vzťahy platia iba za predpokladu, že poznáme presnú hodnotu c^* , na ktorej výpočet potrebujeme poznať skutočné hodnoty $\text{Var}(Y)$ a $\text{Cov}(Y, Z)$. Tieto parametre sú však neznáme, preto sa parameter c^* snažíme počas tejto metódy odhadnúť ako

$$\hat{c}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}) (Z_i - \bar{Z})}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}. \quad (3.5)$$

Ak v (3.5) predelíme čitateľ aj menovateľ $n - 1$, tak podľa Zákona veľkých čísel konverguje $\hat{c}_n \rightarrow c^*$ s pravdepodobnosťou 1. Asymptotický odhad $\hat{c}_n$ však do nášho odhadu vnáša ďalšiu odchýlku.



Obr. 3.1: Vývoj faktora redukcie variance v závislosti od korelácie medzi zvolenými procesmi.

Konečný tvar odhadu metódou kontrolnej premennej je

$$\hat{\theta}_c(\hat{c}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{c}_n (Z_i - E(Z))). \quad (3.6)$$

3.2 Metóda protikladnej náhodnej premennej

Pri tejto metóde (*Antithetic variate method*) uvažujeme ten istý problém ako v predošlej sekcii. Snažíme sa odhadnúť cenu derivátu pomocou generovania realizácií vývoja ceny jeho podkladového aktíva, v tomto prípade ceny akcie. Táto metóda je popísaná napríklad v [7], [11], [17].

Hľadáme $\theta = E(Y) = E(f(X))$, kde funkcia f môže byť napríklad diskontovaná výplatná funkcia európskej opcie. Ďalej predpokladajme, že máme len dve realizácie, Y a $\tilde{Y}$. Podľa klasickej metódy Monte Carlo odhadneme $E(Y)$ ako

$$\frac{Y + \tilde{Y}}{2}.$$

Variancia tohto odhadu potom bude

$$\text{Var}(Y + \tilde{Y}) = \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(Y, \tilde{Y}) + \text{Var}(\tilde{Y}). \quad (3.7)$$

Vidíme teda, že najlepšiu redukciu variancie dosiahneme minimalizáciou kovariancie dvojice týchto odhadov. Zároveň sa však snažíme zachovať rozdelenia týchto náhodných premenných, aby bol splnený predpoklad geometrického Brownovho pohybu. Rozviníme teda predošlú myšlienku a vygenerujeme n takýchto dvojíc Y_i a $\tilde{Y}_i$, pričom ich voľba bude nasledovná

$$Y_i = f(X_i), \tilde{Y}_i = f(-X_i). \quad (3.8)$$

Pre každé i majú teda dvojice Y_i a $\tilde{Y}_i$ rovnaké rozdelenie, ale sú závislé. Avšak dvojice $(Y_1, \tilde{Y}_1), (Y_2, \tilde{Y}_2), \dots, (Y_n, \tilde{Y}_n)$ sú rovnako rozdelené a zároveň nezávislé, čo nám umožňuje použiť na odhad premenné

$$\left(\frac{Y_1 + \tilde{Y}_1}{2} \right), \left(\frac{Y_2 + \tilde{Y}_2}{2} \right), \dots, \left(\frac{Y_n + \tilde{Y}_n}{2} \right), \quad (3.9)$$

ktoré budú taktiež rovnako rozdelené a nezávislé. Odhad parametra θ podľa tejto metódy bude aritmetický priemer realizácií (3.9)

$$\hat{\theta}_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{Y_i + \tilde{Y}_i}{2} \right). \quad (3.10)$$

Zanedbajme všetky výhody otočenia znamienka premenných $X_1, X_2, \dots, X_n$ oproti generovaniu ďalších n realizácií z hľadiska výpočtovej náročnosti. Inými slovami, náš predpoklad je, že vygenerovanie n dvojíc $(Y_i, \tilde{Y}_i)$ je rovnako výpočtovo náročné ako vygenerovanie $2n$ realizácií Y_i . Ak máme teda vygenerovaných n realizácií Y_i , môžeme sa rozhodnúť buď vygenerovať ďalších n realizácií Y alebo vytvoriť n premenných $\tilde{Y}$. Kritériom toho, čo sa rozhodneme urobiť môže byť práve porovnanie variancií odhadov týmito dvomi spôsobmi:

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i + \tilde{Y}_i}{2} \right) &< \text{Var} \left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} Y_i \right), \\ \frac{1}{4n^2} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n (Y_i + \tilde{Y}_i) \right) &< \frac{1}{4n^2} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^{2n} Y_i \right), \\ \frac{1}{4n} \text{Var} (Y_i + \tilde{Y}_i) &< \frac{1}{2n} \text{Var} (Y_i), \\ \text{Var} (Y_i + \tilde{Y}_i) &< 2 \text{Var} (Y_i) \end{aligned} \quad (3.11)$$

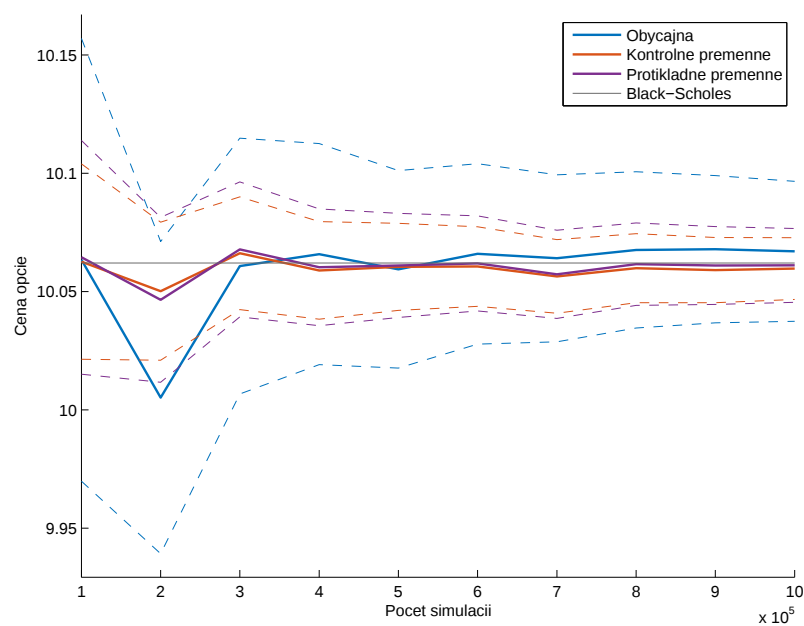
Pretože Y a $\tilde{Y}$ majú rovnaké rozdelenie platí, že $\text{Var}(Y) = \text{Var}(\tilde{Y})$. Aplikovaním tohto vzťahu do (3.7) a následným dosadením do (3.11) dostaneme

$$\begin{aligned} 2\text{Var}(Y_i) + 2\text{Cov}(Y_i, \tilde{Y}_i) &< 2\text{Var}(Y_i), \\ \text{Cov}(Y_i, \tilde{Y}_i) &< 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

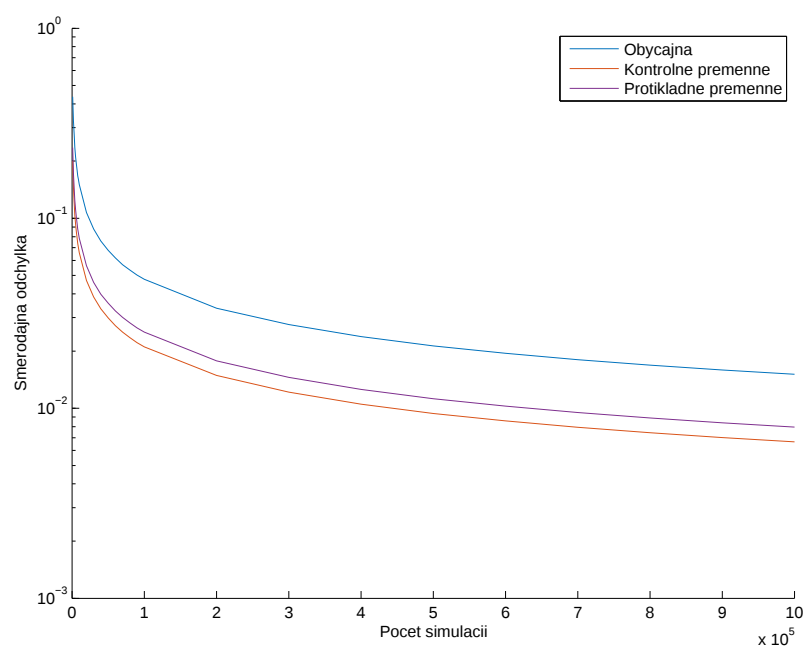
Preto, ak (3.8) spĺňa nerovnosť (3.12) potom je vhodnou voľbou na zníženie variancie odhadu. V takom prípade bude táto metóda aj rýchlejšia, pretože doteraz sme predpokladali, že vygenerovanie náhodných premenných $\tilde{Y}$ je rovnako výpočtovo náročné ako generovanie náhodných premenných Y . Táto metóda však používa $\tilde{Y}_i = f(-X_i)$, pričom $Y_i = f(X_i)$. Preto vygenerovanie premenných $\tilde{Y}$ znamená len prenásobiť už vygenerované $X_1, X_2, \dots, X_{\frac{n}{2}}$ hodnotou -1 a vypočítať $f(-X_i)$, čo je samozrejme výpočtovo menej náročné ako generovanie náhodných premenných. Tomu kedy táto metóda nespĺňa podmienku (3.12) sa budeme venovať v kapitole 5.

Metóda kontrolnej náhodnej premennej je obmedzená existenciou vhodnej kontrolnej premennej a našou vedomosťou o jej skutočnej strednej hodnote. Na rozdiel od tejto metódy sa však zdá byť metóda protikladných náhodných premenných univerzálne použiteľná, keďže znižuje výpočtovú náročnosť a zároveň aj smerodajnú odchýlku odhadu, ak samozrejme spĺňa podmienku (3.12). Na obrázku 3.2 vidíme porovnanie vývoja cien spomenutých metód a na obrázku 3.3 vidíme vývoj smerodajných odchýliek uvedených odhadov.

Z týchto porovnaní vidíme, že pri oceňovaní vanilkovej opcie, tieto metódy fungujú. Obe znížili varianciu odhadov cien, pričom metóda kontrolnej náhodnej premennej bola účinnejšia. Taktiež vidíme, že metódy neskreslili odhad, keďže konvergujú ku Blackovej-Scholesovej cene. Dokonca dokázali eliminovať istú výchylku, ktorú má obyčajná Monte Carlo metóda. Treba však poznamenať, že pozorovaná výchylka nie je spôsobená chybou v obyčajnej Monte Carlo metóde, ale tým, že táto metóda nemá možnosť eliminovať výchylky náhodne vygenerovaných prírastkov ceny akcie.



Obr. 3.2: Vývoj odhadovaných cien (plné čiary) a 95%-tných intervalov spoľahlivosti (prerušované čiary) obyčajnej metódy, metódy protikladných a kontrolných náhodných premenných.



Obr. 3.3: Vývoj smerodajných odchýliek obyčajnej metódy, metódy protikladných a kontrolných náhodných premenných na vanilkovej opcii.

3.3 Vrstvené vzorkovanie

V tejto metóde (*Stratified sampling*) sa využíva výber istej časti realizácií (vzoriek) z určitej podmnožiny, alebo *vrstvy* (po anglicky *stratum*). Ako si ukážeme, pri generovaní náhodných realizácií z nejakého rozdelenia nebude vždy ich histogram podobný hustote tohto rozdelenia, čo spôsobuje nepresnosť použitej metódy. Takúto nepresnosť sme mohli pozorovať na obrázku 3.2. Vrstvené vzorkovanie nám pomáha práve pri takýchto problémoch.

Snažíme sa odhadnúť $E(Y)$, kde $Y \in \mathbb{R}$ a nech $A_1, \dots, A_K$ sú disjunktné podmnožiny množiny $\mathbb{R}$ také, že $P(Y \in \cup_{i=1}^K A_i) = 1$. Potom platí

$$E(Y) = \sum_{i=1}^K P(Y \in A_i) E(Y | Y \in A_i) = \sum_{i=1}^K p_i E(Y | Y \in A_i),$$

kde $p_i = P(Y \in A_i)$. Keď generujeme realizácie $Y_1, \dots, Y_n$ náhodného procesu, tak všetky realizácie majú predpokladané rozdelenie premennej Y . Avšak podiel realizácií, ktoré padnú do A_i nebude vo všeobecnosti rovný p_i , ale bude k nemu konvergovať pre $n \rightarrow \infty$. Pri použití tejto metódy bude podiel realizácií z A_i dopredu daný.

Najjednoduchším príkladom tejto metódy je tzv. proporcionálne vzorkovanie. V tomto prípade zaručíme, že podiel realizácií, ktoré budú z A_i bude zodpovedať pravdepodobnosti $p_i = P(Y \in A_i)$. Ak je celkový počet realizácií n , potom počet realizácií z množiny A_i označme $n_i = n \times p_i$. Nech pre všetky $i = 1, \dots, K$, sú Y_{ij} , $j = 1, \dots, n_i$ nezávislé realizácie podmieneného rozdelenia Y ak $Y \in A_i$. Nevychýlený odhad $E(Y | Y \in A_i)$ bude aritmetický priemer realizácií z i -tej vrstvy

$$\hat{Y}_i = \frac{Y_{i1} + \dots + Y_{in_i}}{n_i}.$$

Nevychýlený odhad $E(Y)$ potom bude mať tvar

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^K p_i \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \sum_{i=1}^K p_i \frac{1}{p_i n} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}.$$

Vo všeobecnosti môžu byť vrstvy dané inou premennou X . Nech táto premenná nadobúda hodnoty z $\mathbb{R}$, potom vrstvy A_i sú disjunktné podmnožiny $\mathbb{R}$ a platí $P(X \in \cup_i A_i) = 1$. Môžeme teda použiť všeobecnejší zápis

$$E(Y) = \sum_{i=1}^K P(X \in A_i) E(Y | X \in A_i) = \sum_{i=1}^K p_i E(Y | X \in A_i),$$

kde $p_i = P(X \in A_i)$.

Ďalším zovšeobecnením je, že počty realizácií z vrstiev $n_1, \dots, n_K$ nemusia byť proporcionálne k $p_1, \dots, p_K$. Označme teda podiel vzoriek generovaných z vrstvy A_i ako $q_i = \frac{n_i}{n}$. Potom platí

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^K p_i \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \sum_{i=1}^K p_i \frac{1}{n \times q_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K \frac{p_i}{q_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}.$$

Minimalizáciou variancie tohto odhadu cez argument q_i taký, že $\sum_i q_i = 1$ vieme nájsť optimálne prerozdelenie realizácií vo vrstvách, ktoré bude z hľadiska variancie odhadu aspoň tak dobré ako to proporcionálne.

Čitateľovi mohla vyvstať otázka, prečo je vhodné uvažovať túto metódu. Dôvod je, že ak generujeme n realizácií z rozdelenia Y , tak podiel realizácií $\frac{n_i}{n}$ vygenerovaných z vrstvy A_i konverguje k p_i , avšak pre $n \rightarrow \infty$. Histogram vygenerovaných vzoriek teda nebude úplne pripomínať hustotu rozdelenia Y . Tento fakt si ukážeme na príklade, kedy za rozdelenie premennej Y budeme považovať normované normálne rozdelenie.

3.3.1 Príklad použitia vrstveného vzorkovania

Označme distribučnú funkciu normovaného normálneho rozdelenia ako F a

$$F^{-1}(z) = \inf\{x : F(x) \geq z\}$$

označuje k nej inverznú tzv. kvantilovú funkciu. Použili sme proporcionálnu alokáciu vzoriek a zvolili sme $p_i = \frac{1}{1000}$, $\forall i = 1, \dots, 1000$. Krajné body vrstiev A_i dostaneme pomocou kvantilovej funkcie nasledovne:

$$a_1 = F^{-1}\left(p_1 = \frac{1}{1000}\right), a_2 = F^{-1}\left(p_1 + p_2 = \frac{2}{1000}\right), \dots, \\ a_{1000} = F^{-1}(p_1 + \dots + p_{1000} = 1),$$

pričom dodefinujeme $a_0 = -\infty$. Vrstvy sú teda definované ako

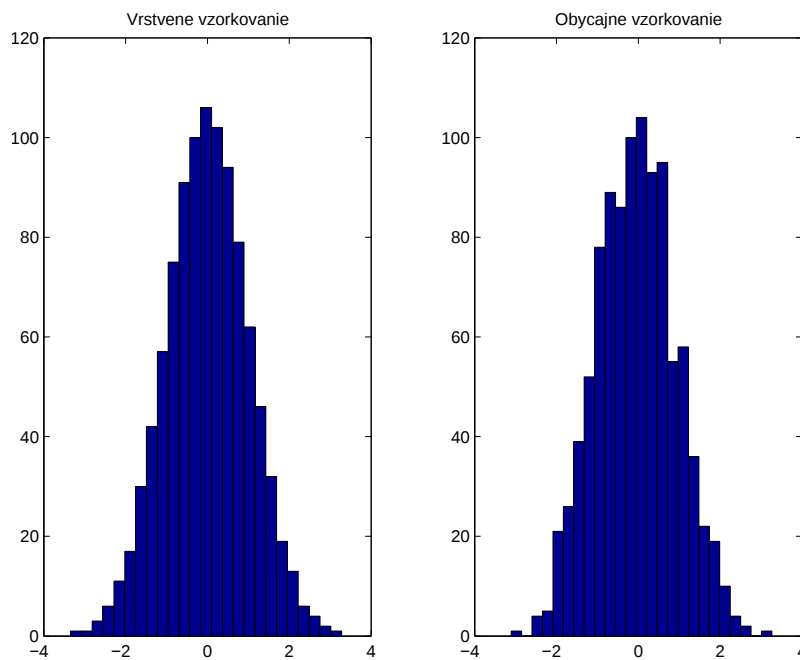
$$A_1 = (a_0, a_1), A_2 = (a_1, a_2), \dots, A_{1000} = (a_{999}, a_{1000}).$$

Keď teraz chceme generovať n_i realizácií z jednotlivých vrstiev A_i , stačí použiť inverznú transformáciu. Ak U má rovnomerné rozdelenie na intervale $[0, 1]$, potom

$$V = a_{i-1} + U(a_i - a_{i-1}), \quad j = 1, \dots, n_i$$

má rovnomerné rozdelenie na intervale (a_{i-1}, a_i) . Táto metóda ale konverguje asymptoticky, preto pri nízkom počte vrstiev môže byť nepresná.

Počet realizácií sme zvolili 1 000 to znamená, že z každej vrstvy vyberieme 1 realizáciu. Zároveň sme vygenerovali náhodne 1 000 realizácií z normovaného normálneho rozdelenia. Na obrázku 3.4 vidíme porovnanie obyčajného a vrstveného vzorkovania.



Obr. 3.4: Porovnanie obyčajného a vrstveného vzorkovania.

Z obrázku teda vidíme, že podiel realizácií vygenerovaných z jednotlivých vrstiev ozaj konverguje veľmi pomaly a histogram obyčajného vzorkovania len zďaleka pripomína hustotu normovaného normálneho rozdelenia. Vrstvené vzorkovanie naopak kopíruje tvar hustoty rozdelenia a vidíme, že zaisťuje správny počet vzoriek z danej vrstvy. Ak si čitateľ spomenie, v predošlej časti na obrázku 3.2 vzniklo v obyčajnej metóde vychýlenie od správnej ceny. Vrstvené vzorkovanie pomáha odstrániť nepresnosti a výchyľky práve takéhoto charakteru, vznikajúce pri generovaní realizácií náhodných premenných.

3.3.2 Asymptotické vlastnosti vrstveného odhadu

Ďalej sa pozrieme na problém intervalového odhadu pre $\mu = E(Y)$ pri vrstvenom vzorkovaní. Označme

$$\begin{aligned}\mu_i &= E(Y_{ij}) = E(Y \mid X \in A_i), \\ \sigma_i^2 &= \text{Var}(Y_{ij}) = \text{Var}(Y \mid X \in A_i).\end{aligned}$$

Nech $p_i = P(X \in A_i)$. Zoberme teraz fixnú alokáciu $n_1, \dots, n_K$, $n_i \geq 1, \forall i = 1, \dots, K$ a $n_1 + \dots + n_K = n$. Označme podiel realizácií z i -tej vrstvy ako $q_i = \frac{n_i}{n}$. Pre každú takúto alokáciu bude odhad $\hat{Y}$ nevychýlený

$$E(\hat{Y}) = \sum_{i=1}^K p_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n_i} E(Y_{ij}) = \sum_{i=1}^K p_i \mu_i = \mu.$$

Variancia odhadu $\hat{Y}$ je daná vzťahom

$$\text{Var}(\hat{Y}) = \sum_{i=1}^K p_i^2 \text{Var} \left(\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \right) = \sum_{i=1}^K p_i^2 \frac{\sigma_i^2}{n_i^2} = \frac{\sigma^2(q)}{n},$$

kde $\sigma_i^2 = \text{Var}(Y_{ij})$ a

$$\sigma^2(q) = \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2}{q_i} \sigma_i^2.$$

Pre každú vrstvu A_i sú $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots$ nezávislé, rovnako rozdelené náhodné premenné so strednou hodnotou μ_i a disperziou σ_i^2 a teda platí

$$\frac{1}{\sqrt{[nq_i]}} \sum_{j=1}^{[nq_i]} (Y_{ij} - \mu_i) \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_i^2), \quad (3.13)$$

pre $n \rightarrow \infty$ a $q_1, \dots, q_K$ pevné. Zápis $[nq_i]$ značí zaokrúhlenie smerom dole, ktoré sme doteraz nepoužívali, pretože sme predpokladali nq_i celé čísla. Pri limite pre $n \rightarrow \infty$ však n nadobúda hodnoty, pre ktoré nie je nq_i pri fixnom q_i , celé číslo. Aby mal výraz (3.13) zmysel, museli sme použiť dané zaokrúhlenie.

Bodový odhad $\sqrt{n}(\hat{Y} - \mu)$ môžeme zapísať ako

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\hat{Y} - \mu) &= \sqrt{n} \sum_{i=1}^K p_i \left(\frac{1}{[nq_i]} \sum_{j=1}^{[nq_i]} (Y_{ij} - \mu_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^K \frac{p_i}{\sqrt{q_i}} \left(\frac{1}{\sqrt{[nq_i]}} \sum_{j=1}^{[nq_i]} (Y_{ij} - \mu_i) \right).\end{aligned}$$

Vidíme teda, že výraz $\sqrt{n}(\hat{Y} - \mu)$ je asymptoticky lineárnou kombináciou, s koeficientmi $\frac{p_i}{q_i}$, nezávislých normálne rozdelených náhodných premenných so strednou hodnotou 0 a disperziou σ_i^2 . Z toho vyplýva

$$\sqrt{n}(\hat{Y} - \mu) \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2(q))$$

pre $n \rightarrow \infty$ a fixným počtom vrstiev K . Dôsledkom toho je fakt, že pre odhad hodnoty $E(Y) = \mu$ vieme skonštruovať $(1 - \delta)$ -percentný interval spoľahlivosti

$$\hat{Y} \pm F^{-1} \left(1 - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\sigma(q)}{\sqrt{n}}, \quad (3.14)$$

kde F^{-1} je kvantilová funkcia normovaného normálneho rozdelenia, pričom tento interval platí asymptoticky. Jediným problémom zostáva neznáma hodnota parametra $\sigma^2(q)$, ktorý však vieme odhadnúť ako

$$s^2(q) = \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2}{q_i} s_i^2,$$

kde s_i^2 je výberová štandardná odchýlka realizácií $Y_{i,1}, \dots, Y_{i,n_i}$ pre všetky $i = 1, \dots, K$.

Alternatívne sa dá $\sigma^2(q)$ odhadnúť nezávislými realizáciami odhadu $\hat{Y}$. Predpokladajme, že celkový počet realizácií n sa dá vyjadriť ako mk , kde m a k sú celé čísla a $m \geq 2$. Nech $k_i = q_i k$ sú taktiež celé čísla pre všetky $i = 1, \dots, K$ a teda $n_i = mk_i$. Odhad $\hat{Y}$ bude teda aritmetickým priemerom nezávislých odhadov $\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_m$, z ktorých každý alokuje $q_i k$ realizácií do i -tej vrstvy, s celkovým počtom k realizácií. Preto bude mať každý odhad $\hat{Y}_j$ varianciu $\frac{\sigma^2(q)}{k}$. Interval spoľahlivosti pre $E(Y)$ teda nadobudne tvar

$$\hat{Y} \pm F^{-1} \left(1 - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\frac{\sigma(q)}{\sqrt{k}}}{\sqrt{m}}, \quad (3.15)$$

ktorý je ekvivalentný s (3.14). V tomto prípade však aproximujeme $\frac{\sigma(q)}{\sqrt{k}}$ ako výberovú štandardnú odchýlku $\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_m$.

3.3.3 Optimálna alokácia

V prípade proporcionálnej alokácie realizácií do vrstiev platí $q_i = p_i$ a variancia odhadu spĺňa

$$\sigma^2(q) = \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2}{q_i} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^K p_i \sigma_i^2. \quad (3.16)$$

Aby sme vedeli túto varianciu porovnať s varianciou odhadu bez vrstveného vzorkovania potrebujeme:

$$E(Y^2) = \sum_{i=1}^K p_i E(Y^2 \mid X \in A_i) = \sum_{i=1}^K p_i (\sigma_i^2 + \mu_i^2),$$

navyše vieme, že platí

$$\mu = \sum_{i=1}^K p_i \mu_i,$$

potom dostávame

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - \mu^2 = \sum_{i=1}^K p_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^K p_i \mu_i^2 - \left(\sum_{i=1}^K p_i \mu_i \right)^2. \quad (3.17)$$

Podľa Jensenovej nerovnosti

$$\sum_{i=1}^K p_i \mu_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^K p_i \mu_i \right)^2.$$

Pri porovnaní (3.16) a (3.17) vidíme, že využitie proporcionálnej alokácie môže varianciu iba znížiť.

Riešením úlohy

$$\min \left\{ \sigma^2(q) \mid \sum_{i=1}^K q_i = 1, q_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, K \right\} \quad (3.18)$$

však môžeme nájsť alokáciu, ktorá ešte viac zníži varianciu. Parameter $\sigma^2(q)$ dosahuje minimum v

$$q_i^* = \frac{p_i \sigma_i}{\sum_{l=1}^K p_l \sigma_l}, \quad i = 1, \dots, K.$$

V praxi často nepoznáme hodnotu σ_i takže nemôžeme hneď aplikovať optimálne pomery realizácií q_i^* . Preto je vhodné najskôr spustiť počiatočné simulácie, z ktorých odhadneme hodnotu σ_i . Tú potom využijeme v simuláciách na odhadnutie $\mu = E(Y)$, v našom prípade ceny opcie.

V tabuľke 3.1 uvádzame porovnanie Monte Carlo metódy s obyčajným a s vrstveným vzorkovaním. Oceňovali sme opciu európskeho typu s počiatočnou cenou 150, realizačnou cenou 150, $T = 1$, $r = 0.015$ a $\sigma = 0.15$.

Z tabuľky vidíme, že táto metóda nie je úplne dokonalá, pretože odhad ceny opcie touto metódou konverguje k tej podľa Blacka a Scholesa (10.0620) s rastúcim

Tabuľka 3.1: Porovnanie metódy Monte Carlo využívajúcej obyčajné a vrstvené vzorkovanie, pri rôznych hodnotách počtov realizácií a vrstiev. Cena opcie dosiahnutá riešením Blackovej-Scholesovej rovnice je 10.0620.

Počet vrstiev	Počet realizácií	Obyčajné MC	Vrstvené MC	Počet vrstiev	Počet realizácií	Obyčajné MC	Vrstvené MC
10	1 000	9.6065	12.8292	1 000	1 000	10.0047	10.0549
	5 000	9.8295	12.9944		5 000	9.6664	10.0625
	10 000	9.8610	12.9042		10 000	10.4213	10.0747
	50 000	9.9610	13.0091		50 000	10.0192	10.0685
	100 000	10.0474	13.0292		100 000	9.9517	10.0701
50	1 000	10.4168	10.5100	5 000	1 000	-	-
	5 000	10.1499	10.5331		5 000	10.1937	10.0624
	10 000	10.0590	10.5839		10 000	10.0964	10.0627
	50 000	10.0539	10.4866		50 000	10.0423	10.0625
	100 000	10.0799	10.4947		100 000	10.0387	10.0618
100	1 000	9.6611	10.1063	10 000	1 000	-	-
	5 000	10.4547	10.2970		5 000	-	-
	10 000	10.2613	10.2336		10 000	10.1702	10.0620
	50 000	10.0761	10.2485		50 000	10.0620	10.0617
	100 000	10.0370	10.2429		100 000	10.0586	10.0618
500	1 000	9.9971	10.0431	50 000	1 000	-	-
	5 000	9.6844	10.0817		5 000	-	-
	10 000	10.1084	10.0763		10 000	-	-
	50 000	10.1391	10.0807		50 000	10.0682	10.0618
	100 000	10.0664	10.0823		100 000	10.1669	10.0618

počtom vrstiev. Dôležité preto je zvoliť dostatočný počet týchto vrstiev, ktorý sa v prípade európskych opcií javí byť hodnota medzi 5 000 a 10 000 vrstvami. Celkový počet realizácií potom už na hodnotu odhadu ceny nevplýva závažným spôsobom. Dôležité je poznamenať aj fakt, že pri opakovanom spustení Monte Carlo metódy využívajúcej vrstvené vzorkovanie nekolíšu hodnoty odhadov tak ako bez vrstveného vzorkovania. Tento fakt je spôsobený práve tým, že realizácie sú z podmieneného

rozdelenia. Pri počte vrstiev vzorkovania 10 000 jednotlivé odhady kolíšu až na 4-tom desatinnom mieste. Odhad touto metódou je teda veľmi stabilný.

Rovnaký test ako v tabuľke 3.1 sme robili aj pre rôzne hodnoty parametrov σ a K , ich výsledky však z dôvodu prehľadnosti uvádzame už len slovne. Pri ostatných testoch sa ukázalo, že bez ohľadu na hodnotu volatility ceny akcie nám stačí len 500 vrstiev pri oceňovaní opcií, ktorých realizačná cena je nižšia ako aktuálna. Odhad ceny opcie vtedy dosahoval presnosť na 2 desatinné miesta v porovnaní s Blackovou-Scholesovou cenou. Naopak odhad ceny opcií s realizačnou cenou vyššou ako aktuálna konvergoval pomalšie a presnosť na 2 desatinné miesta dosahoval až pri 10 000 vrstvách.

3.4 Vzorkovanie podľa dôležitosti

Ideou tejto metódy (*Importance sampling*) je zníženie variancie pomocou zmeny pravdepodobnostnej miery, v ktorej hľadáme strednú hodnotu. Túto pravdepodobnostnú mieru sa budeme snažiť zmeniť takým spôsobom, aby sme pripísali vyššiu váhu dôležitým výsledkom a tým zefektívnili vzorkovanie.

Predpokladajme, že sa snažíme odhadnúť hodnotu parametra

$$\theta = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx,$$

kde X je náhodný, vo všeobecnosti vektor, z priestoru $\mathbb{R}^k$ s hustotou f a h je funkcia $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Odhad pomocou obyčajnej Monte Carlo metódy má tvar

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i),$$

kde $X_1, \dots, X_n$ sú nezávislé realizácie pravdepodobnostného rozdelenia s hustotou f . Nech g je ľubovoľná iná hustota na $\mathbb{R}^k$, pre ktorú platí

$$f(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Potom môžeme napísať

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx.$$

Vidíme teda, že parameter θ môžeme reprezentovať ako strednú hodnotu vzhľadom na hustotu g nasledovne

$$\theta = E_g \left(h(x) \frac{f(x)}{g(x)} \right),$$

kde E_g reprezentuje strednú hodnotu ak X je z rozdelenia s hustotou g . Ak teda sú $X_1, \dots, X_n$ nezávislé realizácie rozdelenia s hustotou g , potom odhad pomocou tejto metódy za použitia hustoty g bude

$$\hat{\theta}_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) \frac{f(X_i)}{g(X_i)}. \quad (3.19)$$

Pomer vierohodností $\frac{f(X_i)}{g(X_i)}$ predstavuje váhu určujúcu dôležitosť danej realizácie.

Vidíme, že platí

$$E_g(\hat{\theta}_g) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx = \theta,$$

teda odhad $\hat{\theta}_g$ bude nevychýlený. Keďže oba odhady sú nevychýlené, tak na porovnanie ich variácií nám stačí porovnávať ich druhé momenty. Pre túto metódu bude mať jej druhý moment tvar

$$E_g \left[\left(h(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right)^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(x) \frac{f^2(x)}{g^2(x)} g(x) dx = E \left[h^2(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right]. \quad (3.20)$$

Tento výraz porovnáваме s druhým momentom odhadu bez použitia vzorkovania podľa dôležitosti

$$E(h^2(X)),$$

ktorý môže mať nižšiu alebo vyššiu hodnotu ako (3.20). Úspešnosť tejto metódy teda spočíva vo vhodnej voľbe hustoty g .

Pri oceňovaní opcií môžeme predpokladať, že funkcia h (zväčša diskontovaná výplata opcie) je nezáporná. Súčin $h(x)f(x)$ potom bude tiež nezáporný a dá sa normalizovať tak, aby bol hustotou nejakého rozdelenia. Nech by táto hustota bola g . Potom môžeme napísať

$$c \times g(x) = h(x)f(x),$$

kde c je konštanta rovná výrazu

$$\frac{h(x)f(x)}{g(x)},$$

pre ľubovoľnú hodnotu x . Vidíme, že odhad pomocou tejto metódy $\hat{\theta}_g$ v (3.19) je taktiež konštantný a teda je to odhad s nulovou varianciou. V praxi je však tento odhad nepoužiteľný, keďže na normalizáciu výrazu $h(x)f(x)$ ho potrebujeme predeliť jeho integrálom, ktorým je samotný parameter θ .

Tento poznatok, aj keď nie je v praxi aplikovateľný, nám poskytuje návod na to, ako zvoliť optimálnu hustotu g . Mali by sme sa teda snažiť generovať realizácie z rozdelenia, ktoré je proporcionálne súčinu $h(x)f(x)$. V našom prípade bude h diskontovaná výplatná funkcia danej opcie a f bude lognormálne rozdelenie Geometric-kého Brownovho pohybu, reprezentované transformáciou normovaného normálneho rozdelenia.

Teraz sa pokúsime túto metódu aplikovať a ilustrovať na opciách európskeho typu. V takomto prípade má zmysel uvažovať o premennej X ako o prírastku ceny akcie od času 0 do času maturity T . Ako sme uviedli vyššie, uvažujeme zmenu miery z pôvodnej hustoty f (v tomto prípade lognormálne rozdelenie) na hustotu g . Pomer vierohodností pre túto zmenu bude

$$\frac{f(X)}{g(X)}.$$

Potom ak E je stredná hodnota v pôvodnej miere a E_g je stredná hodnota v novej miere, musí platiť vzťah

$$E(h(X)) = E_g\left(h(X)\frac{f(X)}{g(X)}\right)$$

pre všetky funkcie, pre ktoré je ľavá strana rovnosti konečná.

Ako sme vraveli, hlavnou myšlienkou tejto metódy je vzorkovať na okolí najdôležitejšej cesty, v prípade európskych opcií na okolí najdôležitejšej koncovej ceny akcie. V tomto prípade budú dôležité koncové cesty, pre ktoré má výplatná funkcia danej opcie nenulovú hodnotu. Preto sa môžeme sústrediť len na zmenu strednej hodnoty rozdelenia, z ktorého generujeme prírastky. Vieme, že lognormálne rozdelenie vieme dosiahnuť transformáciou normálneho, takže môžeme uvažovať hustoty oboch rozdelení f a g v nasledovnom tvare

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

a

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}.$$

Pomer vierohodností pre zmenu miery pri danej realizácii X_i náhodnej premennej teda bude

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X_i^2}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2}}} = \frac{e^{-\frac{X_i^2}{2}}}{e^{-\frac{X_i^2 - 2\mu X_i + \mu^2}{2}}} = e^{-\mu X_i + \frac{\mu^2}{2}}. \quad (3.21)$$

Koncovú hodnotu ceny akcie môžeme reprezentovať ako

$$S_T = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z},$$

kde Z je náhodná premenná s normovaným normálnym rozdelením. Označme $G(Z)$ diskontovanú výplatnú funkciu závislú od Z

$$G(Z) = e^{-rT} [S_T(Z) - K]^+.$$

Našou úlohou je teda nájsť strednú hodnotu tejto funkcie ak $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. My sa však snažíme zmeniť strednú hodnotu rozdelenia tak, aby boli realizácie sústredené okolo najdôležitejšej konečnej ceny. Poznáme aj tvar pomeru vierohodností (3.21) pre takúto zmenu strednej hodnoty z 0 na μ . Označme E_μ strednú hodnotu ak $Z \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$. Potom vieme, že platí vzťah

$$E(G(Z)) = E_\mu \left(G(Z) e^{-\mu Z + \frac{\mu^2}{2}} \right)$$

pre ľubovoľné $\mu \in \mathbb{R}$. Nevychýlený odhad parametra θ teda nadobudne tvar

$$\hat{\theta}_\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G(Z_i) e^{-\mu Z_i + \frac{\mu^2}{2}},$$

kde Z_i sú nezávislé realizácie rozdelenia $\mathcal{N}(\mu, 1)$.

Ďalej sa budeme snažiť nájsť takú voľbu hodnoty parametra μ aby sme dosiahli nízku varianciu odhadu $\hat{\theta}_\mu$. Ak $G(Z)$ dosahuje iba nezáporné hodnoty, čo platí pre výplatnú funkciu opcie, tak môžeme použiť substitúciu $G(Z) = e^{F(Z)}$, s podmienkou ak $G(z) = 0$ tak $F(z) = -\infty$. Taktiež vieme, že hľadať strednú hodnotu $E_\mu(Z)$ je ekvivalentné pripočítaniu μ ku Z a hľadaniu strednej hodnoty v pôvodnej miere, teda $E(Z + \mu)$. Preto platí

$$\begin{aligned} E(G(Z)) &= E(e^{F(Z)}) = E_\mu \left(e^{F(Z)} \times e^{-\mu Z + \frac{\mu^2}{2}} \right) \\ &= E \left(e^{F(Z+\mu)} \times e^{\mu(Z+\mu) + \frac{\mu^2}{2}} \right) \\ &= E \left(e^{F(Z+\mu) - \mu Z - \frac{\mu^2}{2}} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Aby sme našli vhodný tvar μ rozvineme funkciu F v nevychýlenom odhade v (3.22) do prvého rádu

$$e^{F(Z+\mu)} \times e^{-\mu Z - \frac{\mu^2}{2}} \approx e^{F(\mu) + F'(\mu)Z} \times e^{-\mu Z - \frac{\mu^2}{2}}. \quad (3.23)$$

Z toho vidíme, že ak zvolíme deriváciu funkcie F v bode μ ako

$$F'(\mu) = \mu, \quad (3.24)$$

tak dosiahneme, že odhad v (3.22) bude konštanta nezávislá od Z . Voľbou μ tak aby spĺňalo (3.24) dosiahneme odhad z nulovou varianciou ak (3.23) platí presne a odhad s nízkou varianciou ak (3.23) platí približne.

Ako bolo spomenuté vyššie, optimálna hustota vzorkovania podľa dôležitosti je normalizovaný súčin funkcie, ktorej strednú hodnotu hľadáme, a pôvodnej hustoty. V našom prípade bude optimálna hustota úmerná

$$e^{F(z) - \frac{z^2}{2}}, \quad (3.25)$$

pretože $e^{F(z)}$ je diskontovaná výplatná funkcia a $e^{-\frac{z^2}{2}}$ je úmerné hustote normovaného normálneho rozdelenia. Ak teda znormalizujeme výraz (3.25) jeho integrálom od $-\infty$ po ∞ dostaneme hustotu rozdelenia, nie však nutne hustotu normálneho rozdelenia. Keďže sme sa obmedzili len na zmenu strednej hodnoty rozdelenia, tak naše rozdelenie môžeme zachovať a jeho strednú hodnotu μ zvoliť tak aby výsledné rozdelenie aspoň aproximovalo to optimálne. Jedným zo spôsobov je zvoliť μ ako modulus optimálneho rozdelenia, pričom vieme, že táto hodnota bude bod, v ktorom dosahuje hustota svoje maximum. Keďže vieme čomu je táto hustota úmerná, tak zvolíme μ také, aby spĺňalo

$$\mu = \operatorname{argmax}_z F(z) - \frac{z^2}{2}. \quad (3.26)$$

Podmienka prvého rádu pre danú optimalizáciu je $F'(z) = z$, čo korešponduje s (3.24). Navyše má zmysel uvažovať len interval $(0, \infty)$, pretože inde má účelová funkcia hodnotu $-\infty$. Účelová funkcia v (3.26) je rýdzo konkávna na tomto intervale, preto ak má podmienka prvého rádu riešenie, tak toto riešenie je aj jediným optimom.

Riešenie z^* predstavuje spomínaný najdôležitejší prírastok ceny aktíva, vzhľadom na súčin výplatnej funkcie a hustoty normovaného normálneho rozdelenia. Voľbou $\mu = z^*$ teda meníme strednú hodnotu rozdelenia na danú optimálnu hodnotu prírastku vedúcu do najdôležitejšej konečnej ceny aktíva.

3.4.1 Aplikácia na opciu európskeho typu

Teraz uvedené postupy aplikujeme na opcie európskeho typu, nájdením a použitím optimálnej strednej hodnoty rozdelenia. Využitím rastúcnosti exponenciálnej funkcie dostaneme, že úloha (3.26) je ekvivalentná maximalizácii funkcie $G(z)e^{-\frac{z^2}{2}}$, kde $G(z)$ je diskontovaná výplatná funkcia. Faktor diskontácie je konštanta, preto ju môžeme v rámci optimalizácie zanedbať. Tak isto môžeme uvažovať funkciu $G(z) = (S_T(z) - K)^+$ len pre tie z , pre ktoré je $(S_T(z) > K)$, teda tie kde je G diferencovateľná. Preto môžeme dostať podmienku prvého rádu deriváciou

$$\frac{d}{dz}(S_T(z) - K)e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{dS_T(z)}{dz} - (S_T(z) - K)z = 0.$$

Podľa predpokladu, že cena akcie sa riadi geometrickým Brownovým pohybom platí

$$S_T(z) = S_0 \times e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}z},$$

preto

$$\frac{dS_T(z)}{dz} = \sigma\sqrt{T} * S_T(z).$$

Podmienku prvého rádu tým pádom dostávame v tvare

$$z^* = \frac{\sigma\sqrt{T}(G(z) + K)}{G(z)},$$

kde $G(z) = S_T(z) - K$. Ak teda máme dané $y \equiv G(z)$, vieme dopočítať z^* a následne $S_T(z^*)$, ktoré nám však spätne udáva hodnotu $S_T(z^*) - K = y$. Preto optimálny prírastok z^* vieme nájsť ako koreň rovnice

$$S_T(z(y)) = y + K$$

$$S_T(z(y)) - y - K = 0$$

Po nájdení koreňa danej rovnice môžeme z y^* vypočítať optimálny prírastok z^* . Následne aplikujeme voľbu $\mu = z^*$ tým, že k realizáciám normovaného normálneho

rozdelenia Z_i pripočítame dané μ . Problémom už potom zostáva iba aproximácia strednej hodnoty $E(G(Z))$, ktorej nevychýlený odhad v novej pravdepodobnostnej miere má podľa (3.22) tvar

$$\hat{\theta}_\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G(Z_i + \mu) \times e^{\mu(Z_i + \mu) + \frac{\mu^2}{2}}.$$

Na záver uvádzame v tabuľke (3.2) porovnanie uvedenej metódy s obvyčajnou metódou Monte Carlo. Oceňovali sme európsku kúpnu opciu s parametrami $S_0 = 150$, $K = 150$, $r = 0.015$ a $\sigma = 0.15$. Možno si všimnúť, že táto metóda má oproti pôvodnej približne 3-krát nižšiu smerodajnú odchýlku, čo svedčí o stabilite jej odhadov. Pri nízkom počte realizácií, kedy je odhadovaná cena vzdialená tej skutočnej, môžeme pozorovať aj asymptotický charakter tejto metódy. Za skutočnú cenu v tomto prípade považujeme cenu podľa Blacka a Scholesa, ktorá mala hodnotu 10.0620.

Tabuľka 3.2: Porovnanie metódy Monte Carlo s obvyčajným vzorkovaním a metódy so vzorkovaním podľa dôležitosti. Cena podľa Blacka a Scholesa je 10.0620.

Počet realizácií	Monte Carlo		Vzorkovanie podľa dôležitosti	
-	Cena	Smerodajná odchýlka	Cena	Smerodajná odchýlka
1 000	9.5442	0.4785	10.0890	0.1633
5 000	9.8911	0.2124	10.0488	0.0728
10 000	9.9300	0.1503	10.0810	0.0515
50 000	10.0447	0.0672	10.0660	0.0230
100 000	10.0295	0.0475	10.0741	0.0163
500 000	10.0346	0.0213	10.0670	0.0073
1 000 000	10.0528	0.0151	10.0614	0.0052

Kapitola 4

Ázijské opcie

Ázijské opcie sú určitým typom opcií závislých od cesty. Do ich výplatnej funkcie vstupuje priemer ceny podkladového aktíva za celé obdobie trvania tohto derivátu. Priemerovať môžeme spojitě alebo diskkrétne, v tejto práci sa však budeme zaoberať iba spojitým spriemerovaním, ktoré budeme diskkrétne aproximovať. V závislosti od toho, ako vstupuje tento priemer do výplatnej funkcie, rozdeľujeme ázijské opcie na dva typy:

- **Fixná realizačná cena** (*Fixed strike*) - pri tomto type opcií vstupuje do výplatnej funkcie priemer ceny podkladového aktíva miesto jeho konečnej ceny. Výplatná funkcia pre opcie ázijského typu má tvar:

$$\begin{aligned} & - \max \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K, 0 \right), \text{ pre } call, \\ & - \max \left(K - \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt, 0 \right), \text{ pre } put. \end{aligned}$$

- **Plávajúca realizačná cena** (*Floating strike*) - pre tieto opcie bude do výplatnej funkcie vstupovať priemer ceny podkladového aktíva, pre násobený konštantou, ako realizačná cena. Výplatná funkcia má v takomto prípade tvar:

$$\begin{aligned} & - \max \left(S_T - k \times \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt, 0 \right), \text{ pre } call, \\ & - \max \left(k \times \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - S_T, 0 \right), \text{ pre } put. \end{aligned}$$

Výhodou priemeru ceny akcie ako argumentu výplaty je, že na rozdiel od európskych vanilkových opcií, výplata tohto typu opcií nie je náchylná na náhle výkyvy

ceny podkladového aktíva tesne pred maturitou opcie. Ázijské opcie sú teda vo všeobecnosti odolnejšie na náhle zmeny na trhu, alebo ovplyvňovanie ceny akcií ostatnými investormi.

Tento typ derivátu sa však obchoduje *over the counter* (OTC) a teda mimo oficiálneho trhu, bez prítomnosti tretej strany. Znamená to, že investori obchodujú tieto opcie medzi sebou a neexistujú teda údaje o ich skutočných cenách, s ktorými by sme vedeli naše odhady porovnať. Ázijské opcie však už boli popísané pomocou parciálnych diferenciálnych rovníc, napríklad v [16]. Vďaka numerickým riešeniam týchto rovníc máme k dispozícii referenčné ceny tohto derivátu a vieme určiť presnosť uvedených metód na oceňovanie ázijských opcií.

Ďalej popíšeme konkrétne aplikácie metód redukcie variancie uvedených v kapitole 3 na opcie ázijského typu. Tak isto upresníme voľbu niektorých parametrov a uvidíme aj samotné porovnanie a zhodnotenie metód. Zaoberať sa budeme *fixed strike* ázijskými opciami.

4.1 Metóda kontrolnej náhodnej premennej

V tejto časti popíšeme aplikáciu metódy kontrolnej náhodnej premennej na ázijské opcie typu *fixed strike*. Metóda je popísaná napríklad v [7], [3]. Alternatívneho pohľadu na problematiku sa venujú v [5] alebo v [10], kde uvádzajú reprezentácie kontrolných premenných cez martingaly a týmto spôsobom odvádzajú kontrolné premenné aj pre iné typy ázijských opcií.

Táto metóda je založená na tom, že redukuje odchýlku cien opcie pre jednotlivé realizácie ciest od tej skutočnej pomocou nejakého kontrolného procesu. Bližšie sme túto metódu popísali v kapitole 3. Berieme teda do úvahy ázijské *fixed strike* opcie s aritmetickým priemerom, ktorých výplatná funkcia má tvar

$$\max \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K, 0 \right), \quad (4.1)$$

pre opcie typu *call*. Keďže nedokážeme spojiť simulovať realizácie trajektórií geometrického Brownovho pohybu, budeme ho aproximovať realizáciami v diskretných bodoch a aritmetickým priemerom týchto hodnôt. Čím viac aproximačných bodov,

teda čím menší časový krok medzi nimi bude, tým bude táto metóda presnejšia. To však zvyšuje aj časovú náročnosť tejto metódy, preto musíme rozumne zvoliť počet deliacich bodov.

Ďalej si musíme zvoliť kontrolný proces, ktorý bude mať vysokú koreláciu s cenou ázijskej *fixed strike call* opcie s aritmetickým priemerom a zároveň poznáme jeho strednú hodnotu. Jedným z vhodných kandidátov na túto kontrolnú premennú je napríklad rovnaká ázijská *fixed strike call* opcia ale taká, ktorá používa miesto aritmetického geometrický priemer. Cena takejto opcie je totiž vysoko korelovaná s cenou opcie, ktorej cenu hľadáme a zároveň sa jej cena dá explicitne vyjadriť.

Definícia 4.1 (Lognormálne rozdelenie). *Náhodná premenná X má lognormálne rozdelenie ak jej logaritmus $Y = \ln(X)$ má normálne rozdelenie. Podobne, ak má náhodná premenná Y normálne rozdelenie, tak premenná $X = e^Y$ má lognormálne rozdelenie.*

Ak zachováme všeobecný predpoklad, že cena akcie sa riadi geometrickým Brownovým pohybom (1.6), potom platí

$$\ln \frac{S_t}{S_0} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t, \quad (4.2)$$

kde $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, čo znamená že prírastky ceny akcie majú lognormálne rozdelenie. Ich súčiny budú mať taktiež lognormálne rozdelenie a preto budeme môcť odhadnúť cenu ázijskej opcie využívajúcej geometrický priemer.

Vieme, že výplatná funkcia ázijskej *fixed strike, call* opcie s geometrickým priemerom má tvar

$$\max \left[\left(\prod_{i=0}^m S_{i \frac{T}{m}} \right)^{\frac{1}{m+1}} - K, 0 \right], \quad (4.3)$$

kde hodnoty $i \frac{T}{m}$ sú diskretizačné body času $t_i \in [0, T]$. Ďalej si môžeme násobok rozpísať

$$\prod_{i=0}^m S_{t_i} = \frac{S_{t_m}}{S_{t_{m-1}}} \left(\frac{S_{t_{m-1}}}{S_{t_{m-2}}} \right)^2 \cdots \left(\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} \right)^{m-1} \left(\frac{S_{t_1}}{S_0} \right)^m S_0^{m+1}, \quad (4.4)$$

kde $S_0 = S_{t_0}$ je aktuálna cena akcie. Podľa (4.2) a vlastností Wienerovho procesu potom platí

$$\begin{aligned}
\frac{S_{t_m}}{S_{t_{m-1}}} &= e^{((r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{m} + \sigma\sqrt{\frac{T}{m}}Z_m)}, \\
\frac{S_{t_{m-1}}}{S_{t_{m-2}}} &= e^{((r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{m} + \sigma\sqrt{\frac{T}{m}}Z_{m-1})}, \\
&\vdots \\
\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} &= e^{((r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{m} + \sigma\sqrt{\frac{T}{m}}Z_2)}, \\
\frac{S_{t_1}}{S_0} &= e^{((r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{m} + \sigma\sqrt{\frac{T}{m}}Z_1)},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

kde premenné Z_i sú rovnako rozdelené nezávislé náhodné premenné z normovaného normálneho rozdelenia. Ďalej vieme

$$\begin{aligned}
\ln \left[\frac{\left(\prod_{i=0}^m S_{t_i} \right)^{\frac{1}{m+1}}}{S_0} \right] &= \ln \left[\left(\frac{\prod_{i=0}^m S_{t_i}}{S_0^{m+1}} \right)^{\frac{1}{m+1}} \right] = \frac{1}{m+1} \ln \left[\frac{\prod_{i=0}^m S_{t_i}}{S_0^{m+1}} \right] \\
&= \frac{1}{m+1} \ln \left(\frac{S_{t_m}}{S_{t_{m-1}}} \left(\frac{S_{t_{m-1}}}{S_{t_{m-2}}} \right)^2 \dots \left(\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} \right)^{m-1} \left(\frac{S_{t_1}}{S_0} \right)^m \right) \\
&= \frac{1}{m+1} \left(\ln \left(\frac{S_{t_m}}{S_{t_{m-1}}} \right) + 2 \ln \left(\frac{S_{t_{m-1}}}{S_{t_{m-2}}} \right) + \dots \right. \\
&\quad \left. + (m-1) \ln \left(\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} \right) + m \ln \left(\frac{S_{t_1}}{S_0} \right) \right),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

pričom každý z členov $\ln \left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \right)$ má podľa (4.5) normálne rozdelenie s parametrami $\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{m}, \sigma^2 \frac{T}{m} \right)$.

S využitím (4.5) v (4.6) dostávame:

$$\begin{aligned}
\ln \left[\frac{\left(\prod_{i=0}^m S_{t_i} \right)^{\frac{1}{m+1}}}{S_0} \right] &= \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^m i \times \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{m} + \sigma\sqrt{\frac{T}{m}}Z_i \right), \\
&= \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{2} + \frac{\sigma\sqrt{\frac{T}{m}} \sum_{i=1}^m iZ_i}{m+1}.
\end{aligned}$$

Využitím vedomostí o disperzii súčtu rovnako rozdelených náhodných premenných dostávame

$$\frac{\sigma\sqrt{\frac{T}{m}} \sum_{i=1}^m iZ_i}{m+1} \sim \mathcal{N} \left(0, \frac{\sigma^2 T (1^2 + 2^2 + \dots + m^2)}{m(m+1)^2} \right),$$

$$\frac{\sigma \sqrt{\frac{T}{m}} \sum_{i=1}^m i Z_i}{m+1} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{(2m+1)\sigma^2 T}{6(m+1)}\right).$$

Potom platí

$$\frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{2} + \frac{\sigma \sqrt{\frac{T}{m}} \sum_{i=1}^m i Z_i}{m+1} \sim \mathcal{N}\left(\frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{2}, \frac{(2m+1)\sigma^2 T}{6(m+1)}\right).$$

Pre výnos z geometrického priemeru cien akcie teda platí

$$\ln \left[\frac{\left(\prod_{i=0}^m S_{t_i} \right)^{\frac{1}{m+1}}}{S_0} \right] = \left(\mu - \frac{\sigma_X^2}{2} \right) T + \sigma_X \sqrt{T} X, \quad (4.7)$$

kde $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$,

$$\mu = \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma_X^2}{2}, \quad (4.8)$$

a

$$\sigma_X = \sigma \sqrt{\frac{2m+1}{6(m+1)}}. \quad (4.9)$$

Vzťah (4.7) sa dá alternatívne zapísať nasledovne

$$\left(\prod_{i=0}^m S_{t_i} \right)^{\frac{1}{m+1}} = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma_X^2}{2}\right) T + \sigma_X \sqrt{T} X}, \quad (4.10)$$

odkiaľ vidíme, že geometrický priemer sa taktiež riadi geometrickým Brownovým pohybom, avšak s upravenými parametrami. Tento fakt môžeme využiť na ocenenie tohto typu opcie nasledovným spôsobom

$$\begin{aligned} C_a^g(S_0, K, T) &= e^{-rT} \times \mathbb{E} \left[\max \left(\left(\prod_{i=0}^m S_{t_i} \right)^{\frac{1}{m+1}} - K, 0 \right) \right], \\ &= e^{(\mu-r)T} e^{-\mu T} \mathbb{E} \left[\max \left(S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma_X^2}{2}\right) T + \sigma_X \sqrt{T} X} - K, 0 \right) \right], \\ &= e^{(\mu-r)T} C(S_0, K, T), \end{aligned}$$

kde $C_a^g(S_0, K, T)$ je cena ázijskej *fixed strike call* opcie s geometrickým priemerom a $C(S_0, K, T)$ je cena európskej vanilkovej *call* opcie pri bezrizikovej úrokovej miere μ a volatilita podkladového aktíva σ_X . Podľa Blackovho-Scholesovho vzorca platí

$$C(S_0, K, T) = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-\mu T} \Phi(d_2),$$

potom

$$\begin{aligned} C_a^g(S_0, K, T) &= e^{(\mu-r)T} C(S_0, K, T) \\ &= e^{(\mu-r)T} (S_0 \Phi(d_1) - K e^{-\mu T} \Phi(d_2)) \\ &= e^{-rT} (S_0 e^{\mu T} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)), \end{aligned}$$

kde Φ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia a

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\mu + \frac{\sigma_X^2}{2}\right)T}{\sqrt{T}\sigma_X}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma_X^2}{2}\right)T}{\sqrt{T}\sigma_X}.$$

Ukázali sme aký tvar má stredná hodnota nami zvolenej kontrolnej premennej a teda ju môžeme implementovať do spomínanej metódy. Poslednou neznámou v tejto metóde ostáva premenná

$$c^* = \frac{\text{Cov}(Y, Z)}{\text{Var}(Z)},$$

kde Y je cena aritmetickej ázijskej opcie a Z cena geometrickej ázijskej opcie. Keďže presné hodnoty $\text{Cov}(Y, Z)$ a $\text{Var}(Z)$ nepoznáme, odhadneme ich pri generovaní realizácií ako výberovú kovarianciu a výberovú varianciu daných premenných.

Alternatívnou voľbou kontrolnej premennej môže byť európska vanilková opcia, keďže strednú hodnotu jej diskontovanej výplatnej funkcie a teda cenu taktiež poznáme z Blackovho-Scholesovho vzorca. Ako však ukážeme v empirických testoch, cena tohto derivátu je menej korelovaná s cenou aritmetickej ázijskej opcie ako ázijská opcia s geometrickým priemerom.

4.2 Metóda protikladnej náhodnej premennej

Metóda protikladnej náhodnej premennej má jednoduchú aplikáciu. Stačí nám vygenerovať n realizácií vývoja ceny podkladového aktíva a k nim n opačných ciest. To docielime tak, že pre každú z n ciest vygenerujeme m prírastkov Z_i z normovaného normálneho rozdelenia a dosadíme ich do vzorca pre geometrický Brownov pohyb

$$S_t = S_0 \times e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\sqrt{t}Z_t}, \quad (4.11)$$

kde $t = 0, 1, 2, \dots, m$. Takzvané opačné cesty dostaneme jednoduchým prenasobením prírastkov Z_i hodnotou -1 a opätovným dosadením do vzorca (4.11). Pre každú

dvojicu obyčajnej a opačnej cesty oceníme opciu a spriemerujeme. Výsledok bude odhad ceny opcie touto metódou.

Možno si však všimnúť, že m prírastkov pre každú z n ciest predstavuje akúsi $n \times m$ maticu realizácií normovaného normálneho rozdelenia. Aby sme dostali prírastky pre opačné cesty prenásobíme každú hodnotu -1 , čo zodpovedá Hadamardovmu súčinu matice Z s maticou A takou, že

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Čo ak by sme ale uvažovali maticu A takú, aby minimalizovala varianciu celkového odhadu touto metódou, nie len kovarianciu dvojíc realizácií? To je samozrejme možné, treba však zvážiť viaceré aspekty tohto prístupu. Tým hlavným je, že ak násobíme hodnotou inou ako -1 alebo 1 , meníme tým aj rozdelenie danej náhodnej premennej. Ak je náhodná premenná z normovaného normálneho rozdelenia, potom platí:

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow l \times Z \sim \mathcal{N}(0, 1 \times l^2).$$

Z toho skutočne vidíme, že ak $l = -1$, rozdelenie sa nemení. Ak však zmeníme parameter l zmeníme aj pravdepodobnostné rozdelenie prírastku, čo znamená, že prírastky ceny akcie nebudú mať odhadnutú volatilitu. Vygenerované cesty budú teda reprezentovať ceny akcií, avšak s inou volatilitou. Mali by sme sa teda obmedziť na hodnoty parametra l iba 1 a -1 . To či takáto úprava danej metódy môže viesť k lepšej redukcii variancie popíšeme v časti o praktických testoch.

Ďalšími aspektami tohto prístupu, ktoré je treba zvážiť, sú časová náročnosť optimalizácie ale hlavne jej pamäťové požiadavky. Argumentom optimalizácie je totiž matica s rozmermi $n \times m$, čo zodpovedá vektoru $1 \times nm$. Hessova matica, ktorú aproximujeme v optimalizačnej úlohe má teda rozmery $nm \times nm$. Aby sme toto číslo znížili, môžeme optimalizovať napríklad tak, že všetky prírastky pre jednu konkrétnu cestu prenásobíme tou istou hodnotou, čím značne znížime dimenziu úlohy.

Alternatívne môžeme využiť vlastnosť geometrického Brownovho pohybu, ktorú využíva metóda protikladných náhodných premenných, avšak trochu odlišným spô-

sobom. Geometrický Brownov pohyb môžeme totiž v ľubovoľnom bode preklopiť, teda zmeniť znamienko jeho vygenerovaných prírastkov. Ak vygenerujeme cestu s prírastkami $\{0.5, 0.2\}$, tak rovnakú pravdepodobnosť má cesta s prírastkami $\{0.5, -0.2\}$, ale tak isto aj $\{-0.5, -0.2\}$ a $\{-0.5, 0.2\}$. My sme sa teda rozhodli nepoužiť iba maticu, ktorej všetky prvky majú hodnotu -1 ale tak isto aj jej modifikácie, kde prvých $\frac{m}{2}$ stĺpcov budú hodnoty -1 a druhých $\frac{m}{2}$ stĺpcov bude 1 . Rovnako použijeme aj -1 -násobok takejto matice. Týmto dostaneme 4 súbory realizácií vývoja ceny akcie namiesto jedného. Ak by sme teda uvažovali porovnanie tejto metódy a obyčajnej Monte Carlo metódy so štvornásobným počtom realizácií tak nami navrhnutá metóda bude výhodnejšia ak platí

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i + Y'_i + Y''_i + Y'''_i}{4} \right) &< \text{Var} \left(\frac{1}{4n} \sum_{i=1}^{4n} Y_i \right), \\ \frac{1}{16n^2} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n Y_i + Y'_i + Y''_i + Y'''_i \right) &< \frac{1}{16n^2} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^{4n} Y_i \right), \\ \frac{1}{16n} \text{Var} (Y_i + Y'_i + Y''_i + Y'''_i) &< \frac{1}{4n} \text{Var} (Y_i), \\ \text{Var} (Y_i + Y'_i + Y''_i + Y'''_i) &< 4 \text{Var} (Y_i). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ak je teda táto nerovnosť splnená, použiť našu metódu je výhodnejšie z hľadiska variancie a hlavne časovo menej náročné ako generovať ďalších $3n$ realizácií cesty ceny akcie. Hodnoty parametrov, pre ktoré je táto nerovnosť splnená sa pokúsime zistiť empiricky v kapitole 5.

Uvedeným spôsobom sa dá matica rozdeliť až na m stĺpcov a mohli by sme robiť všetky permutácie prenášobenia týchto stĺpcov hodnotami ± 1 . To by už bolo príliš náročné na pamäť zariadenia, preto sme sa rozhodli okrem 2-násobného vyskúšať už iba 3-násobné rozdelenie.

4.3 Vrstvené vzorkovanie

V tejto časti popíšeme aplikáciu vrstveného vzorkovania na ázijské opcie s aritmetickým priemerom. Alternatívne spôsobu generovania ciest pomocou Lévyho procesov a následnej aplikácii vrstveného vzorkovania sa venujú v [14].

Aplikácia tejto metódy má však jednu nevýhodu. V praxi totiž nepoznáme rozdelenie ceny opcie, preto ju nemôžeme generovať priamo, poznáme však predpokladané rozdelenie koncovej ceny podkladového aktíva. V prípade oceňovania opcií európskeho typu, bude premenná X reprezentovať koncovú cenu podkladového aktíva a Y , alebo $Y(X)$ bude diskontovaná hodnota výplatnej funkcie. V prípade ázijských opcií bude premenná X taktiež konečnou cenou, bude k nej však treba dopočítať zvyšné hodnoty ceny v predošlých diskretizačných bodoch času a následne ich priemer, ktorý je argumentom výplatnej funkcie. Hodnoty ceny akcie medzi časmi 0 a T sa dajú simulovať napríklad pomocou Brownovho mostu. Ten popisuje proces s fixnými hodnotami na začiatku a na konci. Ak W_t označuje Wienerov proces v čase t potom Brownov most má tvar

$$B_t = W_t - \frac{t}{T}W_T, \quad t \in [0, T]. \quad (4.13)$$

Inak zapísané, Brownov most je stochastický proces spĺňajúci

$$B_t = (W_t \mid W_T = 0), \quad t \in [0, T]. \quad (4.14)$$

Zo štatistickej teórie vieme, že ak máme vektor (X_1, X_2) s viacrozmerným normálnym rozdelením, potom

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \right), \quad (4.15)$$

pričom X_1 a X_2 môžu byť vektory. Predpokladajme, že Σ_{22} má plnú hodnotu. Potom podmienené rozdelenie náhodnej premennej X_1 ak $X_2 = x$ je

$$(X_1 \mid X_2 = x) \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}). \quad (4.16)$$

Proces $B(t)$ má teda normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a disperziou $\frac{t(T-t)}{T}$.

Teraz potrebujeme už len odvodiť podmienené rozdelenie $B(t)$ ak máme zadanú hodnotu na oboch okrajoch tohto procesu. Majme dané nejaké body v čase $0 < u < s < t$ a dané hodnoty $W_u = x$ a $W_t = y$. Poznáme zatiaľ iba nepodmienené rozdelenie

$$\begin{pmatrix} W_u \\ W_s \\ W_t \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u & u & u \\ u & s & s \\ u & s & t \end{pmatrix} \right).$$

Keďže (4.16) nám dáva informáciu o podmienenom rozdelení prvej zložky vektora za podmienky, že poznáme hodnotu druhej zložky, tak musíme najprv vektor permutovať

$$\begin{pmatrix} W_s \\ W_u \\ W_t \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & u & s \\ u & u & u \\ s & u & t \end{pmatrix} \right). \quad (4.17)$$

Teraz už môžeme aplikovať (4.16) na (4.17) čím dostávame, že podmienené rozdelenie W_s ak $W_u = x$ a $W_t = y$ je normálne so strednou hodnotou

$$0 - (u, s) \begin{pmatrix} u & u \\ u & t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{(t-s)x + (s-u)y}{t-u} \quad (4.18)$$

a disperziou

$$s - (u, s) \begin{pmatrix} u & u \\ u & t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} = \frac{(t-s)(s-u)}{t-u} \quad (4.19)$$

Predstavme si teda, že už máme dané hodnoty $W_{t_1} = x_1, W_{t_2} = x_2, \dots, W_{t_k} = x_k$ a chceme generovať hodnotu W_t , kde $t_i < t < t_{i+1}$ pre nejaké $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Potom

$$(W_t \mid W_{t_j} = x_j, j = 1, \dots, k) = (W_t \mid W_{t_i} = x_i, W_{t_{i+1}} = x_{i+1}).$$

Na dôkaz tohto vzťahu by sme mohli znova použiť (4.16), avšak stačí si uvedomiť Markovovskú vlastnosť Brownovho pohybu a to tú, že ak máme dané W_{t_i} a $W_{t_{i+1}}$ tak W_t je nezávislé od všetkých W_s , pre ktoré $s < t_i$ alebo $s > t_{i+1}$.

V praxi poznáme hodnotu v čase 0, aktuálnu cenu akcie, a hodnoty S_T , teda koncové ceny akcie, vieme vygenerovať vrstveným vzorkovaním. V tomto prípade bude jednoduchšie pamätať si hodnoty generované z $\mathcal{N}(0, T)$, z ktorých následne vhodnými transformáciami získavame hodnoty S_T . Označme dané hodnoty ako x_T . Ďalej použijeme vzťahy, ktoré sú spomenuté vyššie na to, aby sme dopočítali hodnoty ceny akcie v diskretizačných bodoch času na intervale $(0, T)$. Ako sme ukázali

$$(W_{t_i} \mid W_{t_{i-1}} = x_{i-1}, W_T = x_T) \sim \mathcal{N} \left(\frac{(T-t_i)x_{i-1} + (t_i-t_{i-1})x_T}{T-t_{i-1}}, \frac{(T-t_i)(t_i-t_{i-1})}{T-t_{i-1}} \right),$$

kde t_{i-1} je predošlý diskretizačný bod času, v ktorom poznáme hodnotu realizácie x_{i-1} a x_T je koncová hodnota procesu vygenerovaná vrstveným vzorkovaním. Tieto

realizácie sme schopní generovať pomocou transformácie

$$W_{t_i} = \frac{(T - t_i)x_{i-1} + (t - t_i)x_T}{T - t_{i-1}} + Z \sqrt{\frac{(T - t_i)(t_i - t_{i-1})}{T - t_{i-1}}},$$

kde Z je realizácia normovaného normálneho rozdelenia.

Takýmto spôsobom vieme rekurzívne dopočítať všetky hodnoty Brownovho pohybu medzi časmi 0 a T . Tieto hodnoty ešte potrebujeme dosadiť do

$$S_{t_i} = S_{t_{i-1}} e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W_{t_i}},$$

čím vypočítame príslušné ceny akcie, aby sme následne mohli spočítať ich priemer a pomocou neho vypočítať diskontovanú cenu opcie pre danú realizáciu cesty ceny akcie.

4.3.1 Dovrstvenie

Metóda vrstveného vzorkovania môže byť v niektorých prípadoch náročná na výpočet a aplikáciu. Idea vrstveného vzorkovania sa však dá aplikovať iným, časovo a výpočtovo menej náročným, spôsobom.

Tak ako predtým sa snažíme odhadnúť $E(Y)$ a vieme generovať nezávislé realizácie $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$. Naviac predpokladáme, že poznáme hodnoty $p_i = P(X \in A_i)$ pre vrstvy $A_1, \dots, A_K$. Označme

$$N_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{X_j \in A_i\}, \quad i = 1, \dots, K,$$

ako počet realizácií z vrstvy i , pričom

$$\mathbf{1}\{X \in A\} = \begin{cases} 1, & \text{ak } X \in A \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Ďalej označme

$$\mathcal{S}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{X_j \in A_i\} Y_j$$

ako súčet tých Y_j , pre ktoré X_j patrí do i -tej vrstvy. Klasický odhad, teda aritmetický priemer hodnôt $Y_1 + \dots + Y_n$ môžeme potom zapísať ako

$$\bar{Y} = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} = \frac{\mathcal{S}_1 + \dots + \mathcal{S}_K}{n} = \sum_{i=1}^K \frac{N_i}{n} \times \frac{\mathcal{S}_i}{N_i},$$

pokiaľ $N_i \neq 0$, $\forall i = 1, \dots, K$. Silný zákon veľkých čísel nám hovorí, že $\frac{N_i}{n} \rightarrow p_i$ a $\frac{S_i}{N_i} \rightarrow \mu_i$ s pravdepodobnosťou 1, kde $\mu_i = E(Y \mid X \in A_i)$. Princíp tejto metódy spočíva v nahradení pomeru $\frac{N_i}{n}$ jeho očakávanou hodnotou p_i :

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^K p_i \frac{S_i}{N_i}. \quad (4.20)$$

Vidíme teda, že zatiaľ čo obyčajný odhad $\bar{Y}$ dáva každej realizácii Y_i váhu $\frac{1}{n}$, odhad tejto metódy prideluje realizáciám z i -tej vrstvy váhy $\frac{p_i}{N_i}$. Docielime tým priradenie vyšších váh realizáciám z podvzorkovaných vrstiev ($N_i < np_i$) a nižších váh realizáciám z prevzorkovaných vrstiev ($N_i > np_i$). Ak by sa stalo, že $N_i = 0$ pre nejaké i , môžeme nahradiť výraz $\frac{S_i}{N_i}$ hodnotou 0, aby sme metódu mohli použiť.

4.4 Vzorkovanie podľa dôležitosti

V tejto časti popíšeme aplikáciu postupov uvedených v 3.4 na ázijské opcie s aritmetickým priemerom. Touto metódou sa hlbšie zaoberajú v [8],[9] alebo [15].

4.4.1 Pomer vierohodností

Hlavný rozdiel medzi európskymi a ázijskými opciami je práve v tvare výplatnej funkcie. V tomto prípade už nesimulujeme iba koncovú cenu akcie ale aj ceny v diskretných bodoch času medzi 0 a T .

Berieme do úvahy vektor premenných Z , ktorý reprezentuje prírastky ceny akcie medzi jednotlivými bodmi času. Rozdelenie cesty ceny ako takej nepoznáme, poznáme však rozdelenie jej prírastkov. Predpokladáme, že tieto prírastky sa riadia geometrickým Brownovým pohybom, pričom môžeme využiť Markovovskú vlastnosť tohto procesu. Majme teda diskretnú cestu ceny akcie S_{t_i} , $i = 0, 1, \dots, m$ a podmienenú pravdepodobnosť S_{t_i} pri danom $S_{t_{i-1}} = z$ s hustotou $f_i(z, \cdot)$. Ak sa teda pokúšame o zmenu hustôt f_i za hustoty g_i , pomer vierohodností pre danú zmenu bude mať tvar

$$\prod_{i=1}^m \frac{f_i(S_{t_{i-1}}, S_{t_i})}{g_i(S_{t_{i-1}}, S_{t_i})}.$$

Ak označíme E strednú hodnotu v pôvodnej miere a E_g strednú hodnotu v novej pravdepodobnostnej miere potom platí

$$E(h(S_{t_1}, \dots, S_{t_m})) = E_g \left(h(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \prod_{i=1}^m \frac{f_i(S_{t_{i-1}}, S_{t_i})}{g_i(S_{t_{i-1}}, S_{t_i})} \right),$$

pre všetky funkcie h , pre ktoré stredná hodnota na ľavej strane existuje a je konečná.

V tejto práci uvažujeme rovnomerné rozdelenie časových krokov, navyše cieľené podmienené rozdelenie ceny akcie vieme dosiahnuť spätnou transformáciou z realizácií normovaného normálneho rozdelenia. Premenné Z_i , $i = 1, \dots, m$ budú preto nezávislé rovnako rozdelené so spoločnou hustotou f . Zmenou miery sa ich nezávislosť zachová. Pomer vierohodností sa teda zmení na tvar

$$\prod_{i=1}^m \frac{f(Z_i)}{g(Z_i)}. \quad (4.21)$$

Pričom ak znova označíme E strednú hodnotu v pôvodnej miere a E_g strednú hodnotu v novej miere tak

$$E(h(S_{t_1}, \dots, S_{t_m})) = E_g \left(h(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \prod_{i=1}^m \frac{f(Z_i)}{g(Z_i)} \right),$$

ak stredná hodnota na ľavej strane existuje a je konečná.

Tak ako v časti 3.4, aj tu sa zameriame na hľadanie a vzorkovanie podľa najdôležitejšej cesty a teda výhradne zmenu strednej hodnoty rozdelenia. Ak má teda hustota f tvar $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, potom $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$. Dosadením do (4.21) dostávame

$$\prod_{i=1}^m \frac{f(Z_i)}{g(Z_i)} = e^{-\mu \sum_{i=1}^m Z_i + \frac{m}{2} \mu^2}.$$

My však predpokladáme, že prírastky najdôležitejšej cesty nebudú v čase konštantné, preto uvažujeme v každom časovom kroku hustotu normálneho rozdelenia g_i so strednou hodnotou μ_i a disperziou 1. Potom

$$\prod_{i=1}^m \frac{f(Z_i)}{g_i(Z_i)} = e^{\sum_{i=1}^m \mu_i Z_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \mu_i^2}.$$

4.4.2 Linearizácia odhadu a optimálna cesta

Ak teda označíme Z vektor realizácií $Z_1, \dots, Z_m$ normovaného normálneho rozdelenia, potom za predpokladu geometrického Brownovho pohybu simulujeme cenu akcie

pomocou vzorca

$$S_{t_i} = S_{t_{i-1}} e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_i}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.22)$$

kde Δt označuje dĺžku časového kroku. Ďalej definujeme diskontovanú výplacnú funkciu G závislú od Z ako

$$G(Z) = G(Z_1, \dots, Z_m) = e^{-rT} (\bar{S}(Z) - K)^+,$$

kde $\bar{S}$ predstavuje aritmetický priemer hodnôt $S_{t_1}, \dots, S_{t_m}$.

Našou snahou je teda zmeniť rozdelenie Z z $\mathcal{N}(0, I)$ na $\mathcal{N}(\mu, I)$ a odvodiť tvar nevychýleného odhadu $E(G(Z))$. Označme E_μ a P_μ strednú hodnotu a pravdepodobnosť ak $Z \sim \mathcal{N}(\mu, I)$. Potom podľa predošlej sekcie platí

$$E(G(Z)) = E_\mu \left(G(Z) e^{-\mu^T Z + \frac{1}{2} \mu^T \mu} \right)$$

pre ľubovoľné $\mu \in \mathbb{R}^m$.

Pretože funkcia G dosahuje iba nezáporné hodnoty, môžeme použiť transformáciu $G(z) = e^{F(z)}$, pričom platí $G(z) = 0 \rightarrow F(z) = -\infty$. Taktiež využijeme fakt, že výpočet strednej hodnoty Z v pravdepodobnostnej miere P_μ je ekvivalentné výpočtu strednej hodnoty v pôvodnej miere zo $Z + \mu$. Potom platí

$$\begin{aligned} E(G(Z)) &= E(e^{F(Z)}) = E_\mu \left(e^{F(Z) e^{-\mu^T Z + \frac{1}{2} \mu^T \mu}} \right) \\ &= E \left(e^{F(Z+\mu) e^{-\mu^T (Z+\mu) + \frac{1}{2} \mu^T \mu}} \right) \\ &= E \left(e^{F(Z+\mu) e^{-\mu^T Z - \frac{1}{2} \mu^T \mu}} \right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

Aby sme našli optimálny tvar μ rozvineme funkciu F do prvého rádu

$$e^{F(Z+\mu)} e^{-\mu^T Z - \frac{1}{2} \mu^T \mu} \approx e^{F(\mu) + \nabla F(\mu) Z} e^{-\mu^T Z - \frac{1}{2} \mu^T \mu}, \quad (4.24)$$

kde $\nabla F(\mu)$ označuje gradient funkcie F v bode μ . Ak vieme zvoliť μ tak aby spĺňalo

$$\nabla F(\mu) = \mu^T, \quad (4.25)$$

potom pravá strana (4.24) je konštantná vzhľadom na Z . Takáto voľba μ teda vytvára odhad s nulovou varianciou ak (4.24) platí presne a odhad s nízkou varianciou ak (4.24) platí približne.

Ďalej postupujeme podľa odvodení zo sekcie 3.4 s tým rozdielom, že premenné μ a z sú vektory. Podľa týchto odvodení je vhodné zvoliť μ také, aby spĺňalo

$$\mu = \operatorname{argmax}_z F(z) - \frac{z^T z}{2}. \quad (4.26)$$

Z toho nám vzniká podmienka prvého rádu $\nabla F(z) = z^T$, ktorá korešponduje s (4.25). Navyše ak účelová funkcia v (3.26) je rýdzo konkávna a podmienka prvého rádu má riešenie, potom toto riešenie je aj jediným optimom.

Riešenie optimalizácie (4.26) z^* sú prírastky optimálnej cesty a voľbou $\mu = z^*$ v rozdelení, z ktorého generujeme, budeme dostávať cesty ceny akcie práve na okolí tej optimálnej.

4.4.3 Aplikácia na opcie ázijského typu

V tejto časti uvedieme konkrétne aplikácie odvodených postupov na ázijské opcie s aritmetickým priemerom. Riešenie úlohy (4.26) je ekvivalentné maximalizácii výrazu $G(z)e^{-\frac{1}{2}z^T z}$, kde G je diskontovaná výplatná funkcia ázijskej opcie využívajúcej aritmetický priemer. Vzhľadom na optimalizáciu môžeme zanedbať diskontný faktor e^{-rT} a tak isto brať do úvahy iba z , pre ktoré platí $\bar{S} > K$. Pre tieto z má teda účelová funkcia tvar

$$(\bar{S}(z) - K)e^{-\frac{1}{2}z^T z}$$

a je diferencovateľná, preto môžeme napísať podmienku prvého rádu ako

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial z_j} - (\bar{S} - K)z_j = 0. \quad (4.27)$$

S využitím (4.22) dostávame

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial z_j} = \frac{1}{m} \sum_{i=j}^m \frac{\partial S_{t_i}}{\partial z_j} = \frac{1}{m} \sum_{i=j}^m \sigma \sqrt{\Delta t} S_{t_i},$$

kde Δt predstavuje dĺžku časového kroku. Dosadením do (4.27) nadobúda podmienka prvého rádu tvar

$$z_j = \frac{1}{G(z)} \sum_{i=j}^m \sigma \sqrt{\Delta t} S_{t_i},$$

alternatívne

$$z_1 = \frac{\sigma \sqrt{\Delta t (G(z) + K)}}{G(z)}, \quad z_{j+1} = z_j - \frac{\sigma \sqrt{\Delta t} S_{t_j}}{m G(z)}, \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (4.28)$$

Ak teda máme dané $y \equiv G(z)$, vieme pomocou (4.28) vypočítať z_1 , z (4.22) S_{t_1} , potom z_2 a tak ďalej. Každé y teda definuje prírastky $z(y)$ a cestu $S_{t_i}(z(y))$, $i = 1, \dots, m$. Riešenie podmienok prvého rádu je teda ekvivalentné hľadaniu takého y , pre ktoré výplata opcie pri ceste ceny $S_{t_1}(z(y)), \dots, S_{t_m}(z(y))$ je y . Preto stačí nájsť koreň rovnice

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S_{t_j}(z(y)) - y - K = 0. \quad (4.29)$$

Na rozdiel od rovnice odvodennej rovnakým postupom pre európske opcie, tu už nevieme, či má daná rovnica riešenie. Výsledky numerických testov v [8] však naznačujú, že táto rovnica má práve jeden koreň. Tento koreň sa dá jednoducho nájsť pomocou dosádzania hodnôt y . Keď máme koreň y^* , vieme dopočítať $z^* = z(y^*)$ a položiť $\mu = z^*$. Našli sme teda optimálnu strednú hodnotu rozdelenia, z ktorého generujeme realizácie Z_i a následne použiť tvar odhadu z (4.23) na výpočet odhadovanej ceny opcie.

4.5 Večeřova PDR

Jedným z možných spôsobov oceňovania ázijských opcií je aj pomocou modelovania jej ceny parciálnou diferenciálnou rovnicou a jej následným numerickým riešením. Keďže skutočné ceny ázijských opcií nemožno získať z trhových dát, budeme ceny nadobudnuté týmto postupom považovať za skutočné ceny ázijských opcií.

Ako prvé pri odvodení parciálnej diferenciálnej rovnice pre ázijské opcie si musíme predstaviť pojem opcie na obchodovací účet. Je to kontrakt, ktorý dovoľuje jeho držiteľovi meniť svoju pozíciu v podkladovom aktíve. Držiteľovi sa zisky a straty z jeho obchodovania akumulujú na účte a v čase expirácie dostáva opciu na tento účet s realizačnou cenou 0. Inými slovami, v prípade, že je stav na účte kladný môže si ho ponechať a ak je na účte strata, tak sa zanedbá.

Predpokladáme naďalej, že cena akcie sa riadi geometrickým Brownovým pohybom a teda platí

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

kde r je bezriziková úroková miera a σ je volatilita akcie. Označme stratégiu držiteľa a teda počet akcií ktoré vlastní v čase t ako q_t . Tá podlieha podmienke udanej v

kontrakte a to tak, že $q_t \in [\alpha_t, \beta_t]$. Dá sa ukázať, že držiteľ by nikdy nemal mať pozíciu z vnútra daného intervalu ale v každom čase, by malo byť q_t rovné buď α_t alebo β_t . Pri ázijských opciách platí $\alpha_t = \beta_t$, takže držiteľ sa nemôže rozhodovať.

Ďalšie detaily odvodenia rovnice môže čitateľ nájsť v [16], my uvádzame výslednú rovnicu pre opcie ázijského typu:

$$u_t + r(q_t - z)u_z + \frac{1}{2}(q_t - z)^2\sigma^2u_{zz} = 0, \quad (4.30)$$

kde z je transformovaná priestorová premenná, pre ktorú platí $Z_t^q = \frac{X_t^q}{S_t}$, pričom X_t^q je stav obchodovacieho účtu držiteľa.

Aby rovnica (4.30) zodpovedala ázijskej opcii, musíme zvoliť stratégiu q_t nasledovne:

- **Fixed strike call** - $q_t = 1 - \frac{t}{T}$,
- **Fixed strike put** - $q_t = \frac{t}{T} - 1$,
- **Floating strike call** - $q_t = \frac{t}{T} - 1 + K$,
- **Floating strike put** - $q_t = 1 - \frac{t}{T} - K$.

Funkcia u má dva argumenty, z a t . Premenná t značí čas, premenná z je transformovaná priestorová premenná. Rovnako treba transformovať aj koncovú podmienku. Ukážku tejto transformácie demonštrujeme na koncovej podmienke a teda výplatnej funkcii pre fixed strike call ázijskú opciu:

$$\begin{aligned} V(\overline{S_T} - K, T) &= \max(\overline{S_T} - K, 0), \\ u\left(\frac{\overline{S_T} - K}{S_T}, T\right) &= \max\left(\frac{\overline{S_T} - K}{S_T}, 0\right), \\ u(z, T) &= \max(z, 0). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Keďže už máme všetko potrebné môžeme pristúpiť k samotnému numerickému riešeniu rovnice (4.30). Najskôr musíme zvoliť na akom intervale budeme uvažovať koncovú podmienku. Vhodnou voľbou môže byť interval $[-1, 1]$, čo zodpovedá opcii s realizačnou cenou od 0 po dvojnásobok konečnej ceny akcie. Ďalej je potrebné zvoliť počet priestorových a časových krokov, my sme zvolili počet priestorových $M = 200$ a časových $N = 504$. Keďže predpokladáme 252 obchodovacích dní v roku, tak pri

maturite 1 rok to bude zodpovedať 2 kroky za deň. Diskrétne premenné budú teda mať tvar

$$z_i = z_0 + i \times h, \quad t_j = j \times \tau,$$

kde h je dĺžka priestorového a τ dĺžka časového kroku.

Teraz môžeme pristúpiť ku diskretizácii rovnice (4.30). Zvolili sme implicitnú Crank-Nicholsonovu schému a prvú centrálnu diferenciu. Rovnica teda dostáva nasledovný tvar:

$$\begin{aligned} & \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + r(q_t - z_i) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} + \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{2h} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2}(q_j - z_i)^2 \sigma^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} \right) \right] = 0 \\ & \vdots \\ & \frac{1}{2} [(q_j - z_i)^2 \sigma^2 - hr(q_j - z_i)] u_{i-1}^j - [(q_j - z_i)^2 \sigma^2 + 2\nu] u_i^j \\ & + \frac{1}{2} [(q_j - z_i)^2 \sigma^2 + hr(q_j - z_i)] u_{i+1}^j = \\ & - \frac{1}{2} [(q_j - z_i)^2 \sigma^2 - hr(q_j - z_i)] u_{i-1}^{j+1} + [(q_j - z_i)^2 \sigma^2 - 2\nu] u_i^{j+1} \\ & - \frac{1}{2} [(q_j - z_i)^2 \sigma^2 + hr(q_j - z_i)] u_{i+1}^{j+1}, \quad (4.32) \end{aligned}$$

kde r je bezriziková úroková miera, σ je volatilita akcie a $\nu = \frac{h^2}{\tau}$. Okrajová podmienka (4.31) sa diskretizáciou zmení na nasledovný tvar

$$u_i^N = \max(0, z_i). \quad (4.33)$$

Na vyriešenie parciálnej diferenciálnej rovnice (4.30) teda už stačí iba skonštruovať maticu systému (4.32), zahrnúť okrajovú podmienku (4.33) a zadať ju do výpočtového programu.

Kapitola 5

Praktické testy a porovnanie

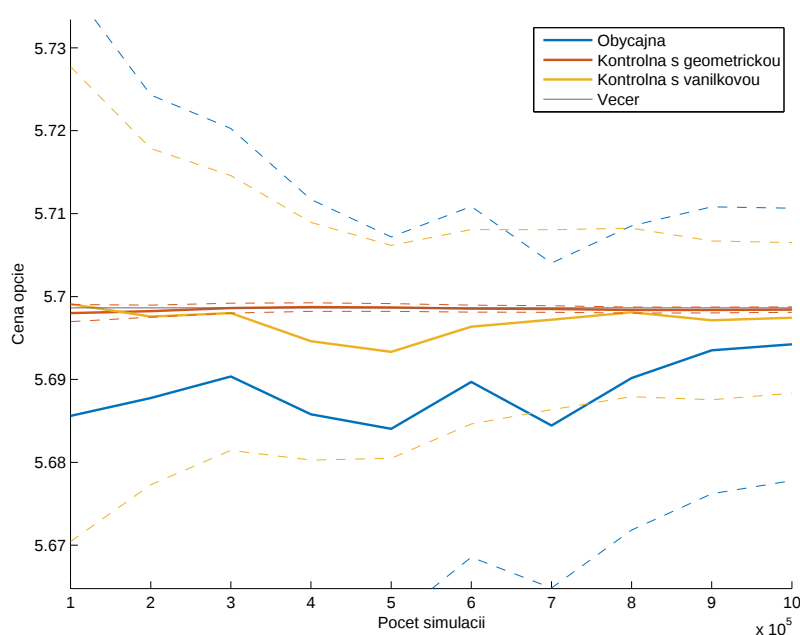
V tejto kapitole sa budeme venovať testom spomínaných metód. Najskôr porovnáme jednotlivé metódy uvedené v predošlých kapitolách na ázijských, kúpnych opciách s aritmetickým priemerom. V poslednej časti uvedieme celkové porovnanie týchto metód.

5.1 Aplikácia metódy kontrolnej náhodnej premennej

Ako prvé predstavíme porovnanie dvoch alternatív metódy kontrolnej premennej uvedenej v 4.1. V prvom prípade volíme ako kontrolnú premennú ázijskú opciu s geometrickým priemerom, zatiaľ čo v druhom vanilkovú európsku opciu. Na naše testy sme použili nasledovné hodnoty parametrov aktuálna cena akcie $S_0 = 150$, realizačná cena $K = 150$, maturita $T = 1$, volatilita ceny akcie $\sigma = 0.15$ a bezriziková úroková miera $r = 0.015$.

Maturita opcie zodpovedá jednému roku pričom vieme, že priemerne je v roku 252 obchodovacích dní na trhu, preto sme sa rozhodli použiť počet krokov $m = 252$ a teda dĺžka časového kroku zodpovedá jednému dňu. Pre ilustráciu sme zvolili vyšší počet realizácií vývoja ceny a to jeden milión. Na obrázku 5.1 vidíme porovnanie vývoja odhadovaných cien a 95%-ných intervalov spoľahlivosti pre spomenuté alternatívy metódy kontrolnej premennej.

Ako môžeme vidieť, alternatíva využívajúca geometrickú ázijskú opciu má od



Obr. 5.1: Vývoj odhadovaných cien (plné čiary) a 95%-tných intervalov spoľahlivosti (prerušované čiary) metódy kontrolnej premennej s geometrickou ázijskou a európskou vanilkovou opciou.

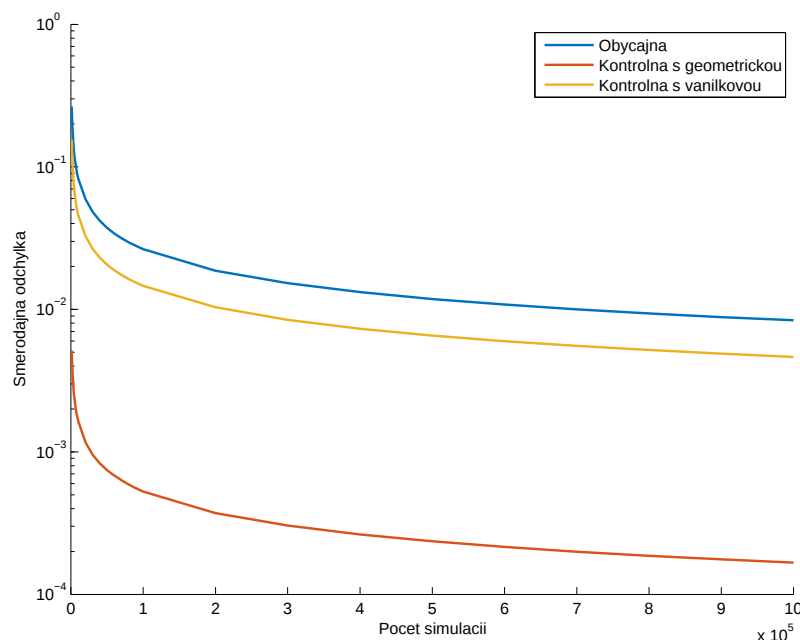
začiatku veľmi úzky interval spoľahlivosti, teda je viac spoľahlivá. Navyše vidíme, že ňou odhadovaná cena nekolíše tak ako pri európskej vanilkovej opcii. To je spôsobené tým, že geometrická a aritmetická ázijská opcia majú vyšší korelačný koeficient, než aritmetická ázijská s európskou vanilkovou. Preto ak pre nejakú realizáciu bude cena aritmetickej opcie príliš vysoká, bude príliš vysoká aj cena geometrickej a táto metóda patrične upraví odhadovanú cenu. Obe metódy taktiež vedeli odbúrať výchylku, pravdepodobne spôsobenú generovaním prírastkov, od skutočnej ceny opcie.

Empiricky sme sa pokúsili zistiť hodnoty uvedených korelačných koeficientov. Pre rôzne nastavenia sme viackrát zopakovali vygenerovanie istého počtu ciest, pomocou výberovej kovariancie a variancie sme odhadli korelačný koeficient a všetky výsledky spriemerovali. Priemerne boli hodnoty korelačných koeficientov nasledovné:

- **Geometrická vs. aritmetická ázijská** - $\rho_{G,A} = 0.9943$,
- **Európska vanilková vs. aritmetická ázijská** - $\rho_{E,A} = 0.7193$.

Faktor redukcie variancie uvedený v kapitole 3 má pre geometrickú ázijskú opciu hodnotu 87.97 a pre európsku vanilkovú opciu 2,07. Znamená to teda, že oproti

obyčajnej Monte Carlo metóde sa v prvom prípade redukuje variancia až zhruba 88-násobne zatiaľ čo v druhom prípade iba 2-násobne. Tento fenomén môžeme pozorovať na vývoji smerodajných odchýliek odhadov v logaritmickej škále na obrázku 5.2.



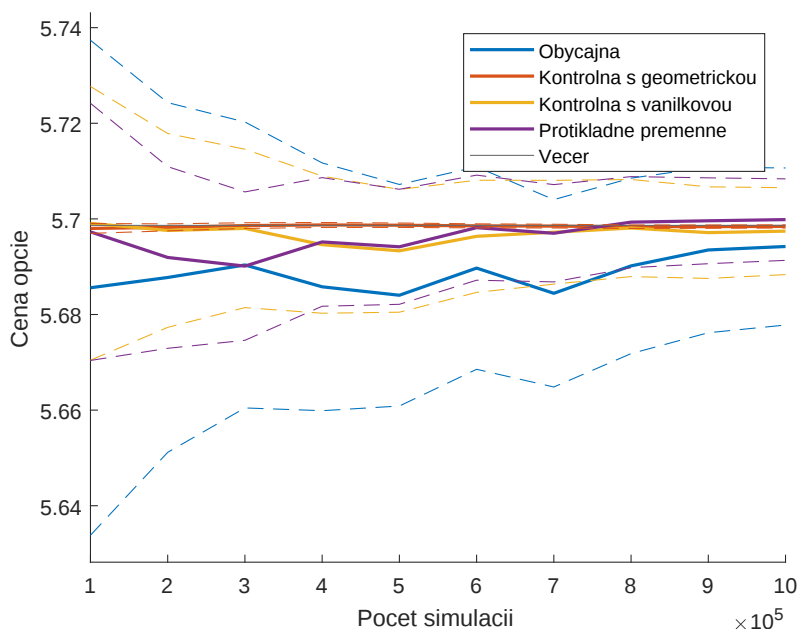
Obr. 5.2: Vývoj smerodajných odchýliek obyčajnej metódy, metódy kontrolnej premennej s geometrickou ázijskou a európskou vanilkovou opciou.

Možno si teda klásť otázku, prečo hľadať alebo používať iné metódy ako metódu kontrolnej premennej. Pre tento typ opcií je to možno dobrá voľba, avšak ako sme spomínali, táto metóda je založená na predpoklade, že poznáme proces dostatočne korelovaný s tým, ktorého strednú hodnotu hľadáme a navyše, že vieme aj explicitne vyjadriť jeho strednú hodnotu. Pre iné deriváty nemusí byť ľahké nájsť takýto proces. Preto uvádzame aj iné metódy, ktoré nemajú tak silné predpoklady na ich aplikáciu.

5.2 Aplikácia metódy protikladnej náhodnej premennej

Ďalej znázorníme porovnanie metódy protikladných náhodných premenných s metódami uvedenými vyššie. Toto porovnanie môžeme vidieť na obrázku 5.3. Vidíme, že metóda protikladných náhodných premenných kolíše menej ako obyčajná Monte

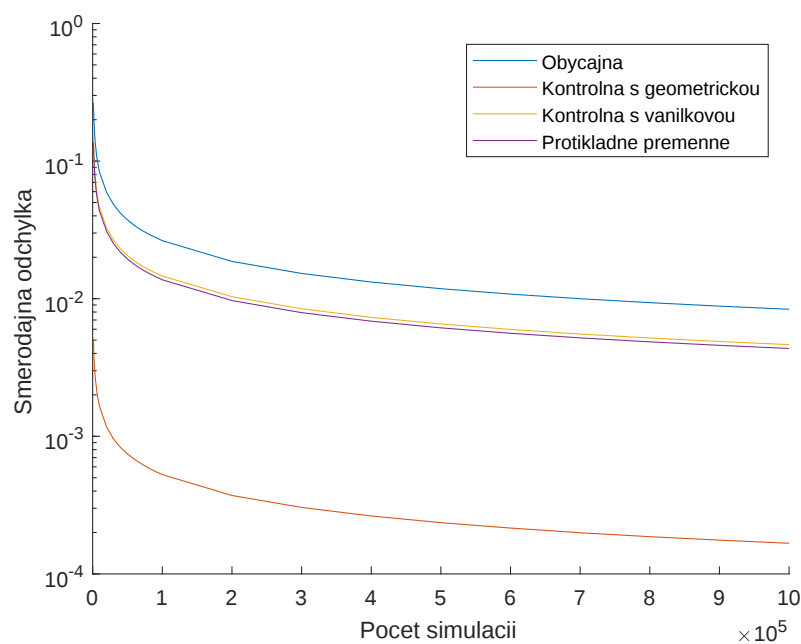
Carlo metóda, nemá však tak úzky interval spoľahlivosti ako metóda kontrolných náhodných premenných. Táto metóda teda neposkytuje tak dobrú redukciu variance, čo potvrdzuje aj obrázok 5.4.



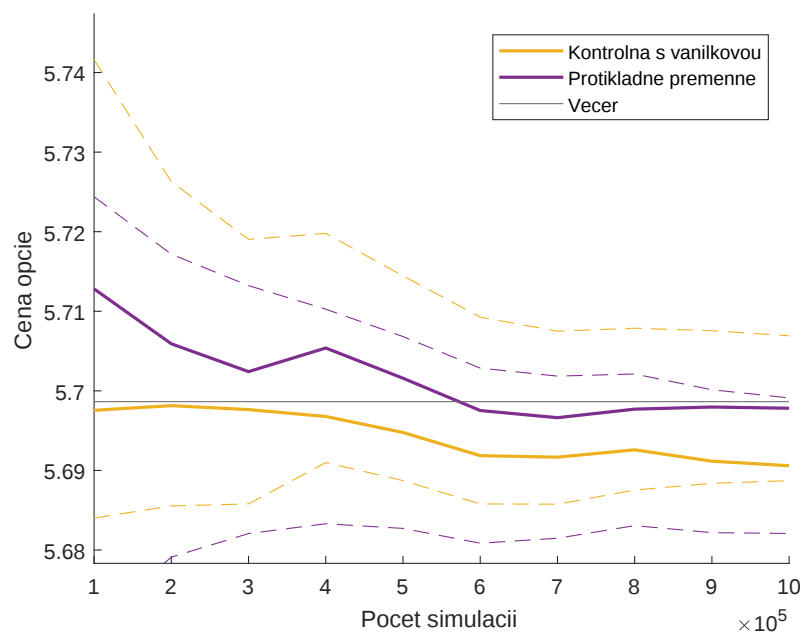
Obr. 5.3: Vývoj odhadovaných cien (plné čiary) a 95%-tných intervalov spoľahlivosti (pre-rušované čiary) obyčajnej metódy, metódy kontrolnej premennej s geometrickou ázijskou opciou, metódy kontrolnej premennej s európskou vanilkovou opciou a metódy protikladných náhodných premenných.

Z obrázku 5.4 však vidíme, že metóda protikladných premenných poskytuje lepšiu redukciu variance ako metóda kontrolných premenných s kontrolnou vanilkovou európskou opciou. Metóda protikladných náhodných premenných má však obrovskú výhodu aj v tom, že nepotrebuje kontrolný proces, preto je ľahšie aplikovateľná. Obrázok 5.5 ilustruje porovnanie týchto dvoch metód. Na tomto obrázku znova vidíme, že záleží aj od daných realizácií prírastkov ciest ceny akcie, či odhad metódy skutočne konverguje.

Ako sme však spomínali v kapitole 3, existuje istá podmienka kedy je metódu protikladných náhodných premenných vhodné použiť. My sme sa pokúsili empiricky zistiť, kedy je táto podmienka (3.11) porušená. Skonstruovali sme preto pokus, v ktorom sme pre každú kombináciu parametrov $\sigma \in \{0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4\}$, $K \in \{120, 135, 150, 165, 180\}$, $T \in \{0.5, 1, 1.5, 2\}$ 10-krát ocenili opciu pomocou me-



Obr. 5.4: Vývoj smerodajných odchýliek obyčajnej metódy, metódy kontrolnej premennej s geometrickou ázijskou opciou, európskou vanilkovou opciou a metódy protikladných náhodných premenných v logaritmickej škále.



Obr. 5.5: Vývoj odhadovaných cien (plné čiary) a 95%-tných intervalov spoľahlivosti (prerušované čiary) metódy kontrolnej premennej s európskou vanilkovou opciou a metódy protikladných náhodných premenných .

tódy protikladných náhodných premenných a obyčajnou metódou. Pre každé ocenenie sme overili platnosť podmienky. Z dôvodu prehľadnosti uvádzame v tabuľke 5.1

iba tie kombinácie parametrov, pri ktorých nastalo porušenie danej nerovnosti aspoň raz. Stĺpec *porušenie nerovnosti* informuje o tom, koľkokrát, z daných 10 ocenení, bola porušená podmienka (3.11).

Tabuľka 5.1: Testovanie porušenia nerovnosti (3.11) metódou protikladných náhodných premenných pri rôznych hodnotách parametrov. Uvedené sú len kombinácie parametrov, kedy bola porušená nerovnosť (3.11) aspoň 1-krát.

σ	K	T	Porušenie nerovnosti		σ	K	T	Porušenie nerovnosti
0.05	165	1	7		0.15	180	0.5	8
	165	1.5	7			180	1	2
	165	2	6			180	1.5	4
	180	2	1			180	2	5
0.1	165	0.5	7		0.2	165	0.5	1
	165	1	2			180	0.5	5
	180	0.5	1			180	1	4
	180	1	8		0.25	180	0.5	2
	180	1.5	8			180	1	2
	180	2	5		0.3	180	0.5	2
0.15	165	0.5	4		-	-	-	-

Z tabuľky 5.1 teda vidíme, že k porušeniu nerovnosti dochádza v prípadoch, kedy je realizačná cena vyššia ako aktuálna. Preto je vhodné použiť túto metódu pri oceňovaní opcií, ktoré majú vysokú realizačnú cenu, krátku maturitu a/alebo nízku varianciu ceny akcie.

5.2.1 Optimalizačné modifikácie

Ďalej sme testovali naše modifikácie metódy protikladných náhodných premenných uvedené v 4.2. Metóda protikladných náhodných premenných využíva prírastky, ktoré náhodne vygenerujeme ale tak isto aj dané prírastky s opačným znamienkom. Maticu prírastkov Z teda prenásobíme pomocou Hadamardovho súčinu maticou so

všetkými prvkami -1 . V tejto modifikácii metódy sa pokúsime danú maticu optimalizovať tak, aby minimalizovala výslednú varianciu odhadu.

Očakávania o časovej náročnosti optimalizácií variancie sa potvrdili. Zatiaľ čo časy pre vygenerovanie a samotný výpočet odhadovanej ceny obyčajnými metódami sa pohybovali rádovo v tisícinách sekundy, optimalizácia hodnôt matice A trvala v priemere tri a pol minúty, čo je značne dlhší čas. Navyše ako sme už spomínali, táto metóda nie je konzistentná s predpokladom konštantnej volatility ceny akcie, keďže tá je v každom časovom kroku iná.

Do optimalizácie matice A sme preto implementovali podmienku, že druhé mocniny jej prvkov musia byť rovné 1. Inými slovami, prvky matice môžu byť iba 1 alebo -1 , čím sa v každom časovom kroku zachováva predpokladaná volatilita ceny akcie. V tomto prípade sme však nezaznamenali žiadne zlepšenia, keďže optimalizácia vždy prehlásila náš počiatočný bod a teda maticu s prvkami iba -1 za optimum. Skúsili sme preto zmeniť počiatočný bod na maticu, kde prvých $\frac{m}{2}$ stĺpcov sú hodnoty -1 a posledných $\frac{m}{2}$ stĺpcov sú hodnoty 1. Optimalizácia však znova skončila pri matici samých -1 . Pri danej optimalizácii je teda zdanlivo takáto matica lokálnym minimom.

Skúsili sme teda prvky danej matice obmedziť len na hodnoty z intervalu $[-1.05, -0.95]$ aby sme zamedzili vplyvu násobenia prírastkov týmito hodnotami na volatilitu ceny akcie v danom kroku. Naďalej však platí, že takéto násobenie volatilitu mení a teda nemáme zachovaný predpoklad o tom, že cena akcie má odhadnutú volatilitu a že táto volatilita je konštantná. Avšak, ak by cena odhadnutá takouto metódou nebola príliš odlišná od tej skutočnej, mohli by sme túto metódu prehlásiť za isté zlepšenie. Za skutočnú cenu opcie pokladáme cenu, ktorú dostaneme numerickým riešením parciálnej diferenciálnej rovnice, ktorú uvádza Večeř v [16]. Túto rovnicu a taktiež spôsob riešenia sme popísali v 4.5.

Ďalej však treba poznamenať, že kvôli nárokom tejto optimalizačnej úlohy na pamäť, sme museli znížiť počet realizácií vývoja ceny akcie na 250 a počet deliacich bodov v čase na 50.

Z nami navrhnutých modifikácií metódy protikladných náhodných premenných sme sa rozhodli viaceré vyskúšať a porovnať ich. V tabuľke 5.2 sú uvedené informácie

o každej z nich, pričom ich označenia značíme nasledovne:

- **Neohraničená** - metóda, pri ktorej optimalizujeme varianciu odhadov pomocou matice A a jej prvky nie sú nijako ohraničené.
- **Ohraničená** - metóda, pri ktorej optimalizujeme varianciu odhadov pomocou matice A , avšak jej prvky sú z intervalu $[-1.05, -0.95]$.
- **Neohraničená, po riadkoch** - metóda, pri ktorej optimalizujeme varianciu tak, že každý prírastok jednej náhodne vygenerovanej cesty ceny akcie je násobený rovnakou neohraničenou hodnotou.
- **Ohraničená, po riadkoch** - metóda, pri ktorej optimalizujeme varianciu tak, že každý prírastok jednej náhodne vygenerovanej cesty ceny akcie je násobený rovnakou hodnotou z intervalu $[-1.05, -0.95]$.

Tabuľka 5.2: Porovnanie modifikácií metódy protikladných premenných

	Protikladné náhodné premenné	Neohraničená	Ohraničená	Neohraničená, riadky	Ohraničená, riadky
Variancia	19.57540	10.00858	19.57540	10.22399	18.41823
Čas(s)	0.00786	261.60071	5.84856	19.36474	1.91025
Odhad ceny	5.759940	6.477015	5.759940	6.407217	5.698640

Cena získaná numerickým riešením Večeřovej parciálnej diferenciálnej rovnice je 5.6986. Ako sme spomínali, kvôli pamäťovým nárokom na optimalizáciu variance sme museli obmedziť počet realizácií ciest ceny akcie na 250 a počet deliacich bodov času na 50. Preto aj samotná odhadovaná cena obvyčajnej metódy nie je až tak presná, avšak vzhľadom na obmedzený počet realizácií je výsledok pomerne dobrý.

Ako prvé vidíme, že neohraničené metódy zjavne ponúkajú značnú redukciu variance. Háčik je však v tom, že sa tým mení aj odhadovaná cena, ktorá je značne nižšia ako skutočná. Nízka variancia v prípade týchto dvoch metód zjavne nemá význam, keďže výsledný odhad je veľmi nepresný.

Ohraničená metóda sa v prípade plnej matice zhoduje s pôvodnou, teda na danom intervale hodnôt nevieme nájsť zlepšujúcu alternatívu. Ak však robíme optimalizáciu jednou hodnotu pre každú cestu vidíme, že sa dá dosiahnuť zníženie variancie odhadu. V tomto prípade vidíme, že cena získaná ohraničenou optimalizáciou po riadkoch sa zhoduje s cenou podľa Večeľa. Tento fakt však považujeme za dielo náhody. Nevieme teda dopredu povedať, aká veľká bude odchýlka tejto ceny od skutočnej a preto je použitie tejto modifikácie tiež diskutabilné. V tomto prípade bola cena zhodná so skutočnou, pri opakovaných testoch to však nebolo vždy tak. Taktiež sme pri opakovanom testovaní pozorovali zaujímavý fenomén, že modifikovaná metóda vždy podhodnotila opciu oproti pôvodnej metóde a to vždy o hodnotu z rozmedzia 0.07 až 0.09. Taktiež mala vždy nižšiu varianciu a to o hodnotu z intervalu [1.1, 1.5]. Toto zníženie variancie teda nie je razantné a navyše so sebou nesie istú dávku vychýlenia, ktoré naopak znižuje presnosť odhadu ceny opcie. Takýto typ modifikácií sa teda neosvedčil ako spoľahlivá možnosť zníženia variancie odhadu.

Modifikácie, pri ktorých násobíme všetky prírastky každej realizácie jednou hodnotou majú nižšiu dimenziu optimalizačnej úlohy. Preto sme sa rozhodli zvýšiť počet realizácií a znova ich porovnať s obyčajnou metódou protikladných náhodných premenných. V tabuľke 5.3 môžeme vidieť výsledok jedného z viacerých pokusov.

Tabuľka 5.3: Porovnanie metód s optimalizáciou prírastkov každej cesty jednou hodnotou. Skratka MPNP značí metódu protikladných náhodných premenných.

Počet realizácií		MPNP	Neohraničená	Ohraničená
1000	Variancia	17.95802	9.31401	17.47837
	Čas(s)	0.00397	124.65995	3.88300
	Odhad ceny	5.679547	5.681512	5.655019
2000	Variancia	19.15530	9.57247	19.10823
	Čas(s)	0.00805	574.28478	10.96522
	Odhad	5.664046	5.694589	5.661715

V prípade 1000 realizácií vidíme, že obe nami navrhnuté metódy ponúkajú isté zlepšenie v rámci hodnôt variancie, neohraničená metóda dokonca takmer dvojnásobné. Na čo je však potrebné znova upozorniť je fakt, že obe tieto metódy narúšajú

predpoklad o konštantnej volatilitate. Napriek tomu sa neohraničená metóda zdá byť lepšia, keďže ňou odhadnutá cena je bližšie k tej, ktorú dostaneme riešením Večerevej rovnice, 5.6986. To však v ostatných prípadoch nebola pravda, pretože v nich bola táto metóda vždy horšia ako pôvodná. Ak zohľadníme aj časovú náročnosť tejto metódy, tak môžeme prehlásiť, že nie je v tomto prípade lepšia než pôvodná.

V prípade 2000 realizácií znova pozorujeme značné zníženie variancie aj lepši odhad ceny neohraničenou metódou oproti pôvodnej. Toto nastalo dokonca vo viacerých prípadoch a teda neohraničená metóda nevykazovala jednostrannú výchylku, ale zdalo sa, že lepšie konverguje ku skutočnej cene. Bohužiaľ nebolo tomu tak vo všetkých prípadoch, dá sa teda predpokladať, že nami pozorované výsledky boli vzhľadom na nízky počet pozorovaní iba dielom náhody. A ak znova zohľadníme časovú náročnosť a neistotu konvergenzie tejto metódy k správne riešeniu, môžeme ju vylúčiť ako kandidáta na urýchlenie a spresnenie oceňovania opcií.

Na ohraničenej verzii tejto metódy naopak nepozorujeme signifikantné zníženie variancie. Navyše, tak ako pri nižšom počte realizácií, znova táto metóda podhodnocovala opciu a to v každom z našich pozorovaní. Zdá sa teda, že tento fenomén je spôsobený danými ohraňčeniami, tie nám však značne znižujú časové nároky na optimalizáciu a taktiež odchýlku od predpokladaného modelu ceny akcie. Túto metódu sme sa teda rozhodli podrobiť ešte jednému testu a to pri 10 000 realizáciách cesty ceny akcie. V takom prípade sa už však navrhovaná metóda zhodovala s pôvodnou. Tento fakt sa dal očakávať, keďže s rastúcim počtom realizácií klesala miera redukcie variancie a odhadovaná cena sa blížila k tej, ktorú nám dala metóda protikladných náhodných premenných. Spomínaný trend možno pozorovať v tabuľkách 5.2 a 5.3.

5.2.2 Násobné modifikácie

Poslednými testovanými modifikáciami metódy protikladných náhodných premenných je delenie matice, ktorou násobíme prírastky, na rovnako veľké segmenty stĺpcov. Následne vytvoríme všetky permutácie násobenia segmentov týchto matíc hodnotami ± 1 . Znamená to teda, že dostaneme 4 súbory realizácií cesty ceny akcie v prípade delenia na dva segmenty. Prvá bude s vygenerovanými prírastkami, druhá

bude tá z metódy protikladných náhodných premenných, teda prírastky prenásobené maticou samých -1 s použitím Hadamardovho súčinu. Ďalšie dva súbory vzniknú Hadamardovým súčinom matice prírastkov a nasledovných dvoch matíc:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Pri metóde s trojnásobným delením budú tieto matice rozdelené na tretiny, čím získame až 8 permutácií a teda aj 8 súborov realizácií cesty ceny akcie.

Ako sme avizovali, najskôr empiricky zistíme pre aké hodnoty parametrov je splnená podmienka (4.12). Pre každú kombináciu hodnôt parametrov σ , K a T sme urobili 10 ocenení opcie danou metódou s počtom realizácií cesty 10 000, 252 časovými krokmi, $T = 1$, $S_0 = 150$ a $r = 0.015$. V tabuľke 5.4 uvádzame kombinácie hodnôt parametrov, pre ktoré bola porušená nerovnosť (4.12) a v stĺpci PN počet porušení z 10 ocenení.

Ako si možno všimnúť, naša metóda sa neosvedčila v prípadoch, kedy je realizačná cena vyššia ako počiatočná. Pri vysokej volatility ceny akcie $\sigma > 0.3$ došlo k porušeniu aj pre realizačnú cenu rovnú počiatočnej. Domnievame sa, že tento fenomén je spôsobený tým, že pri vyššej volatility ceny akcie častejšie dôjde k situácii kedy $\bar{S} > K$ a teda výplata opcie bude nezáporná. Avšak v našej metóde k tomuto prímeru pribudnú ešte tri priemery z ciest ceny akcie, ktoré majú najmenej polovicu prírastkov opačných. S veľkou pravdepodobnosťou skončia tieto priemery na hodnote nižšej ako K a preto bude ich cena nulová. Toto považujeme za zdroj vyššej variancie odhadu v takýchto prípadoch.

Ďalej porovnáme nami navrhované metódy s metódou protikladných náhodných premenných. V tabuľke 5.5 vidíme porovnanie týchto metód s metódou protikladných náhodných premenných pri nastavení parametrov $S_0 = 150$, $K = 150$, $T = 1$, $\sigma = 0.15$, $r = 0.015$ a počtom časových krokov 252.

Ako prvé vidíme, že nami navrhnuté metódy naozaj poskytujú redukciu variancie a teda aj zúženie intervalu spoľahlivosti. Možno si však aj všimnúť, že metóda delenia matice prírastkov na polovicu vykazuje isté vychýlenie, teda ak pôvodná

Tabuľka 5.4: Porušenia nerovnosti (4.12) 2-násobnou metódou protikladných náhodných premenných.

σ	K	T	PN		σ	K	T	PN		σ	K	T	PN
0.05	165	1	6		0.2	165	1.5	10		0.3	180	2	10
	165	1.5	10			165	2	10		0.35	150	1	1
	165	2	10			180	0.5	10			150	1.5	5
	180	1.5	1			180	1	10			150	2	8
	180	2	5			180	1.5	10			165	0.5	10
0.1	165	0.5	10			180	2	10			165	1	10
	165	1	10		0.25	165	0.5	10			165	1.5	10
	165	1.5	10			165	1	10			165	2	10
	165	2	10			165	1.5	10			180	0.5	10
	180	0.5	3			165	2	10			180	1	10
	180	1	7			180	0.5	10			180	1.5	10
	180	1.5	10			180	1	10			180	2	10
	180	2	10			180	1.5	10		0.4	150	1	4
0.15	165	0.5	10			180	2	10			150	1.5	9
	165	1	10		0.3	150	1.5	1			150	2	10
	165	1.5	10			150	2	3			165	0.5	10
	165	2	10			165	0.5	10			165	1	10
	180	0.5	9			165	1	10			165	1.5	10
	180	1	10			165	1.5	10			165	2	10
	180	1.5	10			165	2	10			180	0.5	10
	180	2	10			180	0.5	10			180	1	10
0.2	165	0.5	10			180	1	10			180	1.5	10
	165	1	10			180	1.5	10			180	2	10

Tabuľka 5.5: Porovnanie metódy protikladných náhodných premenných (MPNP) s upravenými metódami protikladných náhodných premenných.

Počet realizácií		MPNP	2násobná MPNP	3násobná MPNP	Večeř
10 000	smerodajná odchýlka	0.04423	0.03851	0.03236	
	cena	5.71291	5.72314	5.70101	5.69864
100 000	smerodajná odchýlka	0.01384	0.01206	0.01021	
	cena	5.71189	5.70399	5.700475	5.69864

metóda opciu nadhodnotí, spomínaná metóda ju nadhodnotí viac a vice versa. Pri opakovanom spúšťaní kódu sa však táto hypotéza nepotvrdila a nami navrhnutá metóda vykazovala menšie vychýlenie ako pôvodná. Ďalším pozorovaním je, že miera zvýšenia presnosti a teda zúženia intervalu spoľahlivosti klesá s narastajúcim počtom realizácií. To však nie je problém, pretože tieto metódy sú žiadané práve preto, aby sme nemuseli generovať veľké množstvo realizácií.

Ako sme ukázali, tieto metódy sú vhodné na ocenenie opcií, ktorých realizačná cena je nižšia ako aktuálna cena akcie. Preto sme sa rozhodli urobiť rovnaký test s tým rozdielom, že sme položili $K = 135$. Výsledky tohto testu vidíme v tabuľke. Vidíme teda, že navrhnuté metódy priniesli redukcii variancie odhadu, navyše vy-

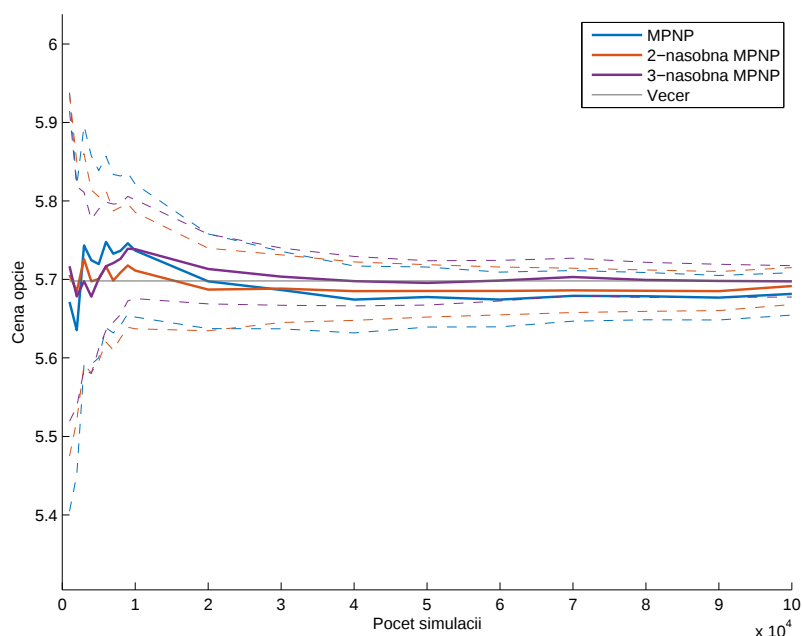
Tabuľka 5.6: Porovnanie metódy protikladných náhodných premenných (MPNP) s upravenými metódami protikladných náhodných premenných.

Počet realizácií		MPNP	2násobná MPNP	3násobná MPNP	Večeř
10 000	smerodajná odchýlka	0.02295	0.01969	0.01735	
	cena	16.3928	16.3998	16.4066	16.4239
100 000	smerodajná odchýlka	0.00753	0.0656	0.00558	
	cena	16.4322	16.4261	16.4252	16.4239

kazujú vyššiu presnosť ako obyčajná metóda protikladných náhodných premenných.

Navrhnuté metódy nie sú efektívne iba z hľadiska redukcie variancie, ale aj z časového hľadiska. Metóda delenia matice prírastkov na tri časti totiž poskytuje 8-násobne viac realizácií ako pôvodná metóda. Ak zvolíme počet realizácií 10 000, tak pôvodná metóda disponuje práve takým počtom realizácií, zatiaľ čo metóda delenia na tri časti pracuje až s 80 000 realizáciami. V rámci časovej náročnosti to teda znamená, že pri 10 000 realizáciách trvá metóde protikladných náhodných premenných oceniť opciu 1.7354 sekundy a modifikovanej metóde 7.2370 sekundy. Modifikovaná metóda má však k dispozícii 8-násobne viac realizácií a ak by pôvodná metóda pracovala s rovnakým počtom, jej čas na odhadnutie ceny opcie by bol 18.2394 sekundy. Vidíme teda, že ak chceme znížiť čas výpočtu a zároveň spresniť odhad, je výhodnejšie využiť nami navrhnutú metódu ako zvyšovať počet realizácií cesty ceny akcie v pôvodnej metóde. Navyše táto metóda je veľmi jednoduchá na implementáciu.

Na obrázku 5.5 môžeme vidieť vývoj odhadovaných cien spomínanými metódami aj s ich 95%-nými intervalmi spoľahlivosti.

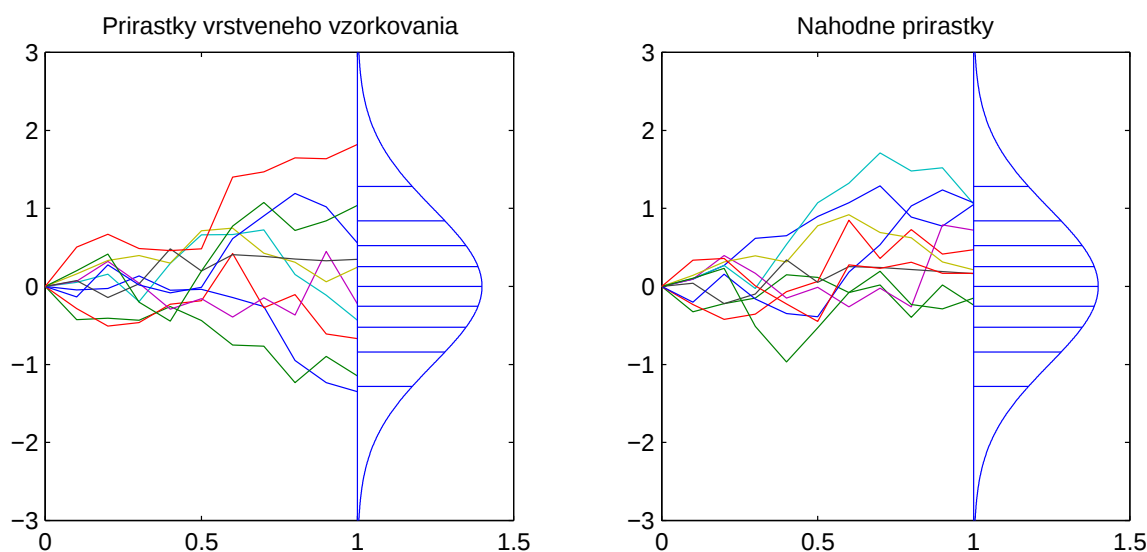


Obr. 5.6: Vývoj odhadovaných cien (plné čiary) a 95%-tných intervalov spoľahlivosti (pre-rušované čiary) metód protikladných náhodných premenných a ich modifikáciami delenia matice prírastkov na 2 a 3 časti.

5.3 Aplikácia vrstveného vzorkovania

V tejto časti znázorníme aplikáciu vrstveného vzorkovania, ukážeme niektoré vlastnosti tejto metódy a porovnáme ho s obyčajnou Monte Carlo metódou.

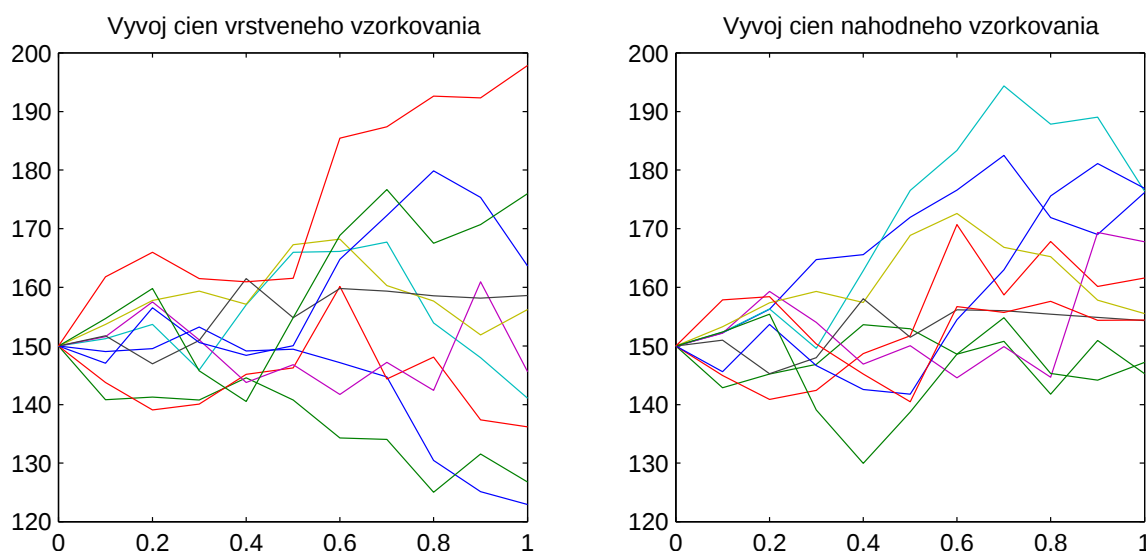
Najskôr ilustrujeme fungovanie tejto metódy na obrázku 5.7. Počet realizácií, vrstiev a taktiež časových krokov sme zvolili, kvôli prehľadnosti, 10.



Obr. 5.7: Porovnanie prírástkov vygenerovaných vrstveným vzorkovaním a náhodne vygenerovaných prírástkov.

Tu vidíme nedostatky náhodného vzorkovania. Pri nižšom počte realizácií totiž môže dôjsť k výchyľke a vygenerované realizácie nebudú plne reprezentovať rozdelenie, z ktorého boli vygenerované. Práve tento fenomén do istej miery potláča vrstvené vzorkovanie. Na obrázku 5.7 vidíme 10 vrstiev s rovnakou pravdepodobnosťou a v každej z týchto vrstiev končí práve jedna cesta prírástkov. To má za následok nie len lepší opis hustoty daného rozdelenia ale aj stabilitu ocenení. Náhodné vzorkovanie totiž nemá stabilnú alokáciu realizácií a s náhodnou kolísavosťou tejto alokácie súvisí aj vyššia kolísavosť odhadov.

Výchyľku vygenerovaných prírástkov môžeme pozorovať aj na odhade ceny opcie. Odhad pomocou vrstveného vzorkovania bol 6.1942, zatiaľ čo odhad obyčajnou metódou mal hodnotu 6.8004. To je zapríčinené práve odchýľkou náhodného vzorkovania, pretože väčšina jej prírástkov končí v kladných hodnotách. Na obrázku 5.8 vidíme cesty ceny akcie vygenerované prírástkami zobrazenými na obrázku 5.7.



Obr. 5.8: Porovnanie ciest ceny akcie vygenerovaných vrstveným vzorkovaním a náhodným generovaním.

V tomto prípade je nutné poznamenať ešte jeden fakt. V niektorých prípadoch sa môže stať, že odhad náhodného vzorkovania bude mať nižšiu varianciu ako táto metóda. To je však spôsobené náhodnosťou a teda nie úplne reprezentatívnou alokáciou náhodných realizácií. Môžeme to vidieť aj na obrázku 5.8, kde koncové hodnoty ceny akcie pokrývajú menší interval ako pri vrstvenom vzorkovaní. Napriek nižšej variancii realizácií, ktorá z toho plynie je odhad vrstveného vzorkovania presnejší práve preto, že lepšie reprezentuje rozdelenie koncovej ceny akcie. Aby sme ukázali vyššiu stabilitu odhadov vrstveného vzorkovania, urobili sme druhý test, v ktorom pre každú dvojicu počtu vrstiev a počtu realizácií robíme 10 odhadov. Z týchto odhadov uvádzame v tabuľke 5.7 priemer odhadov a tak isto ich výberovú varianciu.

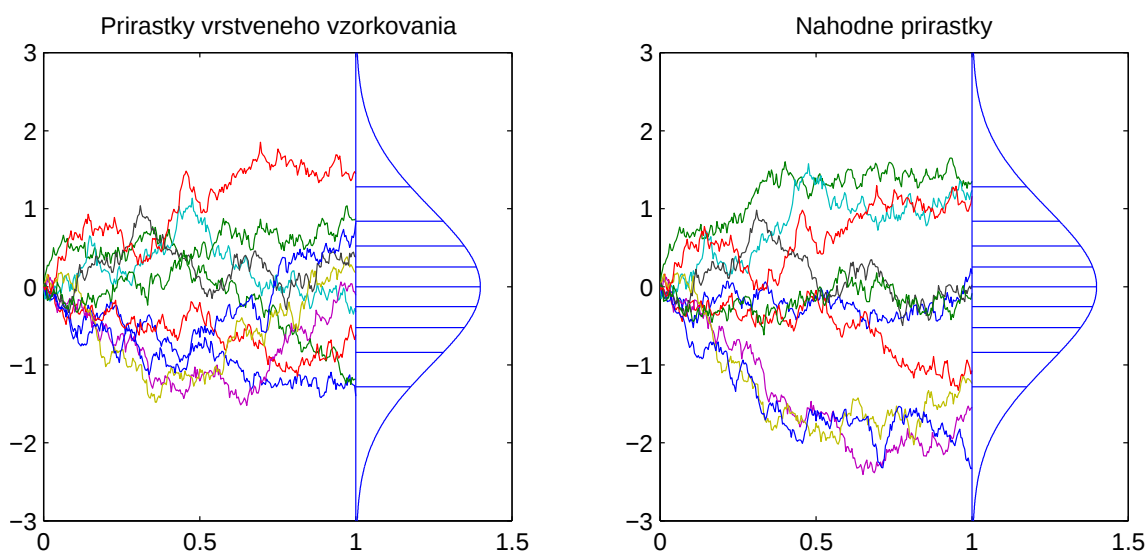
Vidíme teda, že variancia odhadu je zhruba 3-krát nižšia ako pri náhodnom vzorkovaní. Navyše pri opakovaných testoch sa ukázalo, že pri vysokom počte 10 000 vrstiev a 100 000 realizácií bola vo väčšine prípadov metóda vrstveného vzorkovania rýchlejšia ako obyčajná Monte Carlo metóda využívajúca náhodné vzorkovanie. V prípadoch kedy bolo vrstvené vzorkovanie pomalšie to bolo najviac iba o 0.1 sekundy. Pri milión realizáciách už boli časy vrstveného vzorkovania horšie, ale najviac o 2 sekundy oproti obyčajnej Monte Carlo metóde. Tento čas však nepredstavuje drastické zdržanie, navyše ak je vykompenzované vyššou presnosťou a stabilitou odhadu. Nevýhodou tejto metódy ale môže byť zložitejšia aplikácia ako obyčajnej

Tabuľka 5.7: Porovnanie náhodného (NV) a vrstveného vzorkovania (VV) pomocou priemeru a výberovej variancie desiatich odhadov.

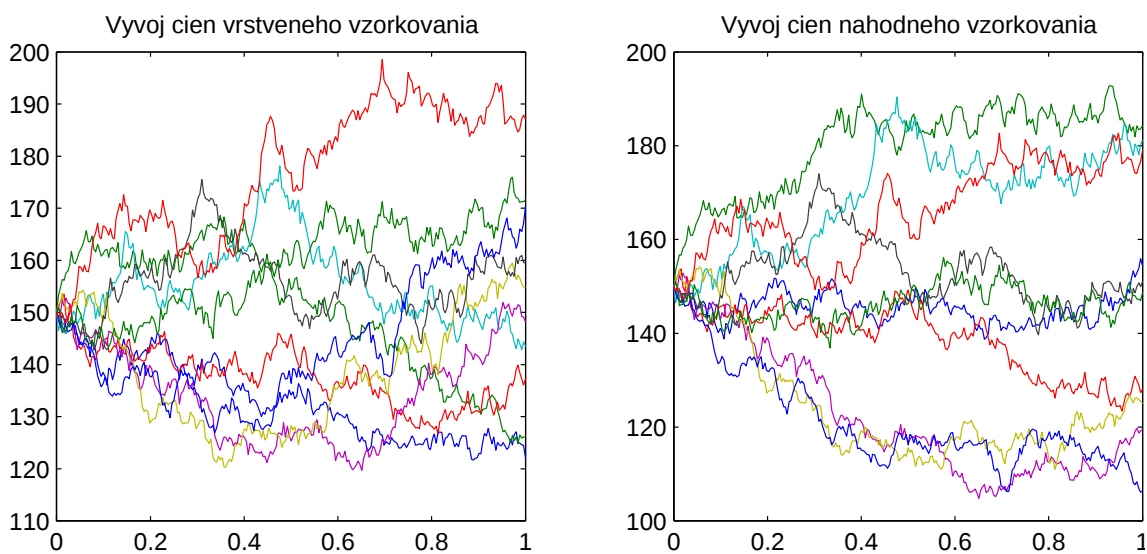
Počet vrstiev	Počet realizácií	Odhad VV	Odhad NV	Variancia VV	Variancia NV
10	1 000	5.7526	5.7587	0.0123	0.0197
	5 000	5.6986	5.6890	0.0030	0.0156
	10 000	5.7019	5.7137	0.0022	0.0072
	50 000	5.7022	5.6990	0.0003	0.0015
	100 000	5.6905	5.6844	0.0003	0.0009
100	1 000	5.8085	5.8581	0.0217	0.0242
	5 000	5.6674	5.6428	0.0042	0.0059
	10 000	5.6808	5.6838	0.0020	0.0067
	50 000	5.7001	5.7085	0.0002	0.0008
	100 000	5.6933	5.6925	0.0002	0.0006
1 000	1 000	5.6729	5.6549	0.0230	0.1033
	5 000	5.7064	5.7160	0.0044	0.0053
	10 000	5.6852	5.6920	0.0025	0.0060
	50 000	5.6950	5.6869	0.0002	0.0016
	100 000	5.6937	5.6946	0.0002	0.0006
10 000	1 000	-	-	-	-
	5 000	-	-	-	-
	10 000	5.6885	5.6833	0.0021	0.0053
	50 000	5.6889	5.6943	0.0007	0.0019
	100 000	5.7046	5.7087	0.0002	0.0009

Monte Carlo metódy.

Pre ilustráciu uvádzame na obrázkoch 5.9 a 5.10 aj rovnaké porovnanie ako na obrázkoch 5.7 a 5.8 s desiatimi realizáciami a vrstvami avšak 252 časovými krokmi.



Obr. 5.9: Porovnanie prírastkov vygenerovaných vrstveným vzorkovaním a náhodne vygenerovaných prírastkov s 252 časovými krokmi.



Obr. 5.10: Porovnanie ciest ceny akcie vygenerovaných vrstveným vzorkovaním a náhodným generovaním s 252 časovými krokmi.

5.3.1 Dovrstvenie

Ideou tejto metódy je náhodná generácia prírastkov, avšak podľa toho v ktorej vrstve daná realizácia skončila, jej priradíme istú váhu. Takto dostanú realizácie z podvzorkovaných vrstiev vyššie váhy a tie z prevrzorkovaných naopak nižšie váhy. Testy o tejto metóde zrejme stačí zhrnúť slovne. Táto metóda pri rôznych počtoch vrstiev a realizácií mala síce nižšiu varianciu odhadu ako obyčajná metóda avšak neboli bližšie ku cene podľa Večeňa. Navyše ak sa rovnal počet vrstiev počtu realizácií mala táto metóda tendenciu značne podhodnocovať opciu. Z časového hľadiska, pri rovnakom počte realizácií trvalo tejto metóde ocenenie opcie dvakrát tak dlho ako obyčajnej metóde. Na oceňovanie ázijských opcií s aritmetickým priemerom sa preto táto metóda javí nevýhodná.

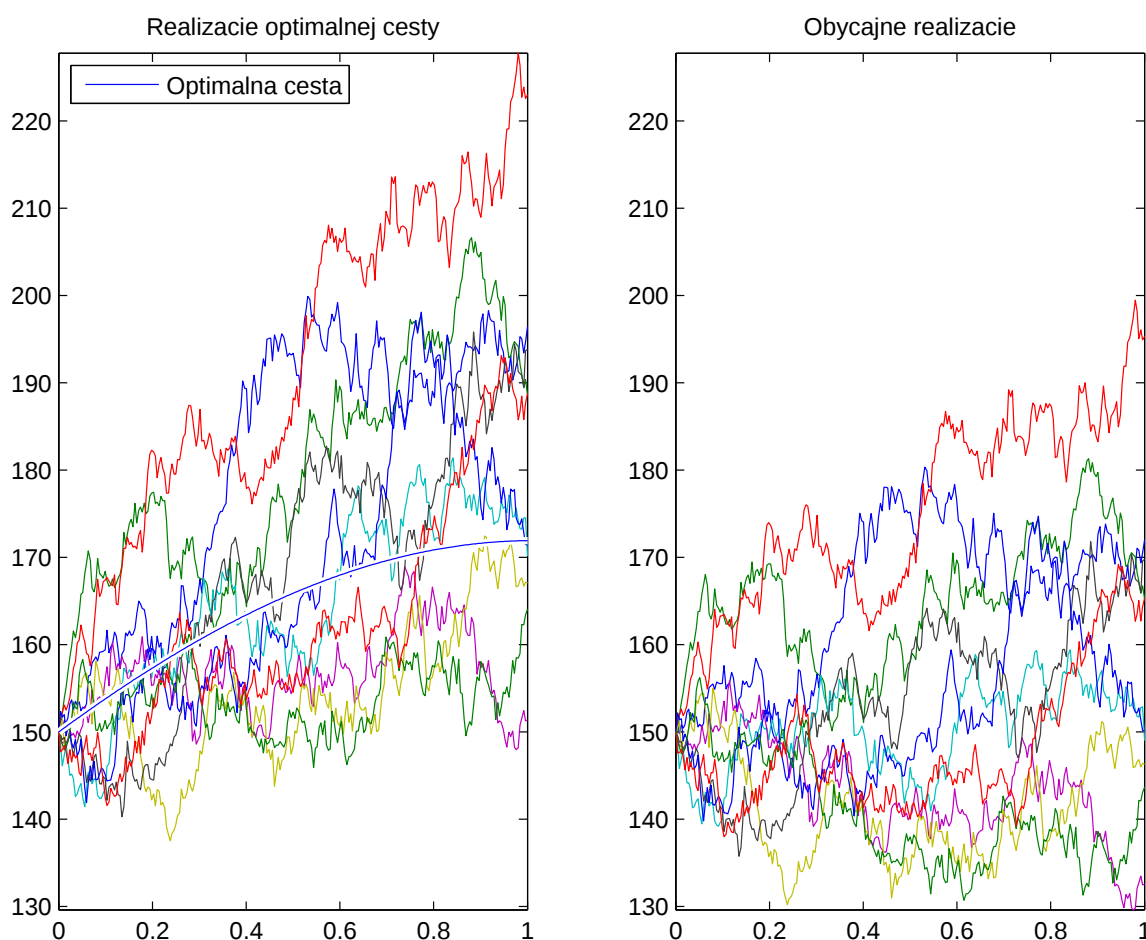
5.4 Aplikácia vzorkovania podľa dôležitosti

V tejto metóde sa pokúšame nájsť takú strednú hodnotu rozdelenia prírastkov, aby minimalizovala varianciu odhadu. Táto stredná hodnota môže byť v každom čase iná a vektor takýchto stredných hodnôt sa potom dá interpretovať ako optimálna cesta.

Na obrázku 5.11 uvádzame optimálnu cestu, obyčajné realizácie a realizácie optimálnej cesty získané transformáciou prírastkov obyčajných realizácií. Parametre opcie boli $S_0 = 150$, $K = 150$, $T = 1$, $r = 0.015$, $\sigma = 0.15$ s počtom realizácií 10 a 252 časových krokov. Ako môžeme vidieť realizácie generované z upraveného rozdelenia ležia vyššie ako obyčajné. To je však žiadané. V tomto prípade bola hodnota opcie odhadnutá z obyčajných realizácií 4.5166 a z realizácií optimálnej cesty 5.6317. Cena získaná riešením Večeňovej parciálnej diferenciálnej rovnice bola 5.6986 a teda vidíme, že napriek nízkemu počtu realizácií je metóda vzorkovania podľa dôležitosti pomerne presná.

5.4.1 Koreň rovnice

Jednou z odlišností tejto metódy od ostatných spomenutých je nutnosť hľadania koreňa rovnice (4.29). Rozhodli sme sa teda empiricky zistiť a spísať ako vplývajú

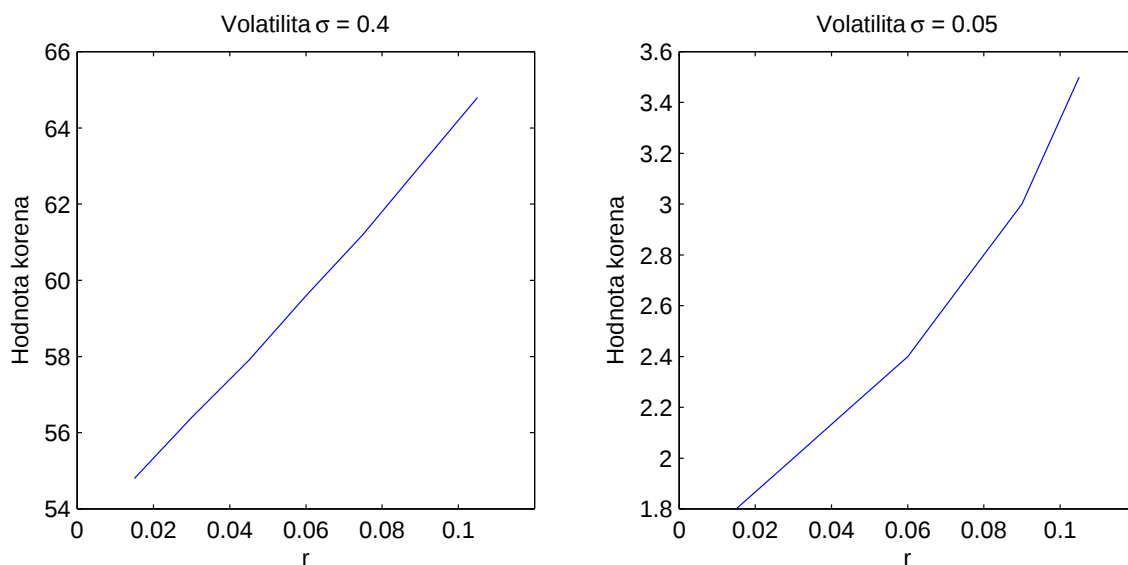


Obr. 5.11: Ilustrácia optimálnej cesty, obyčajných realizácií cesty a realizácií optimálnej cesty získaných pomocou obyčajných realizácií.

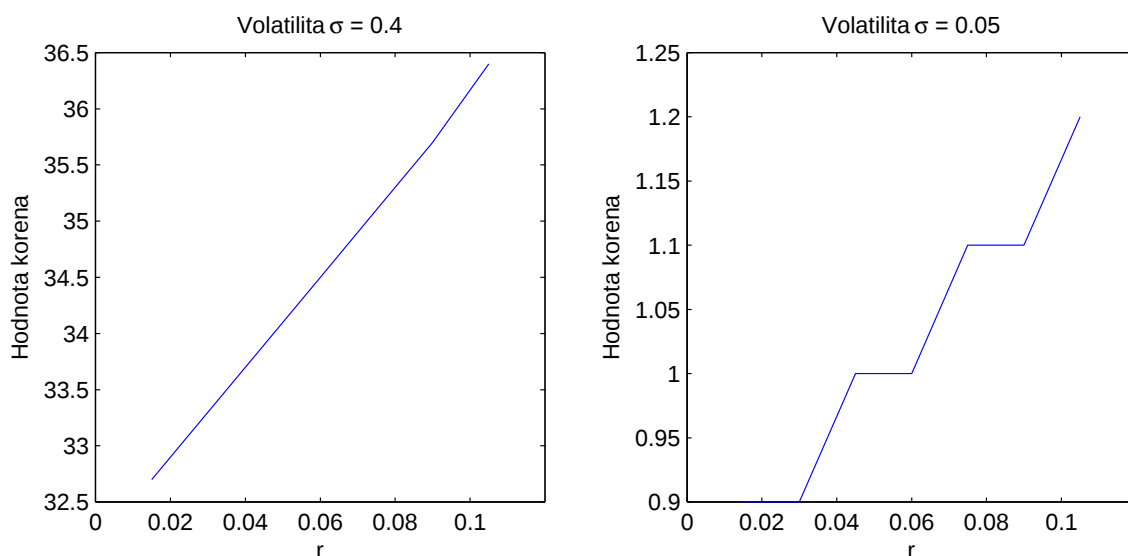
hodnoty jednotlivých parametrov opcie na hodnotu tohto koreňa.

Ako prvý môžeme uviesť vplyv bezrizikovej úrokovej miery r . Ten sme testovali na intervale $[0.015, 0.105]$. Z testov usudzujeme, že pozícia koreňa rovnice (4.29) môže nadobúdať rôzne typy závislostí od tohto parametra, pri zmene hodnôt parametrov T a K . S klesajúcou volatilitou ceny akcie naberá graf tejto závislosti konvexný tvar, nič menej táto zmena je takmer nepozorovateľná, preto ju môžeme aproximovať aj lineárne. Závislosť hodnoty koreňa od r pri hodnotách parametrov $S_0 = 150$, $K = 180$, $T = 2$ a 252 časových krokoch môžeme pozorovať na obrázku 5.12.

Existujú ale aj kombinácie parametrov kedy táto závislosť prestáva byť prostou funkciou. Takýto výsledok, uvedený na obrázku 5.13, môžeme dostať napríklad pri hodnotách parametrov $S_0 = 150$, $K = 180$, $T = 1$ a 252 časových krokov



Obr. 5.12: Závislosť hodnoty koreňa rovnice (4.29) od r pri $S_0 = 150$, $K = 180$, $T = 2$ a 252 časových krokoch.

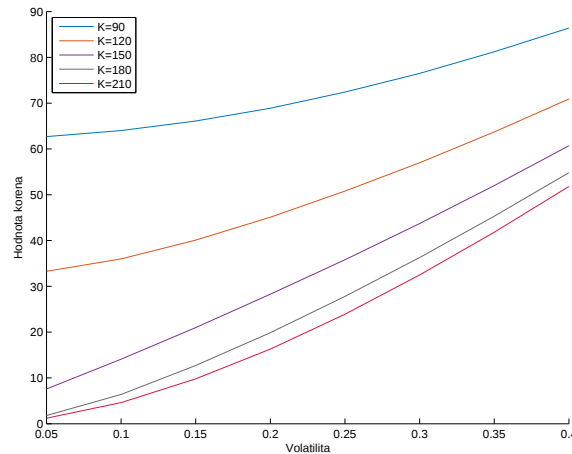


Obr. 5.13: Závislosť hodnoty koreňa rovnice (4.29) od r pri $S_0 = 150$, $K = 180$, $T = 1$ a 252 časových krokoch.

Závislosť hodnoty koreňa rovnice od maturity opcie T sa zdá byť lineárny, bez ohľadu na zmeny hodnôt ostatných parametrov.

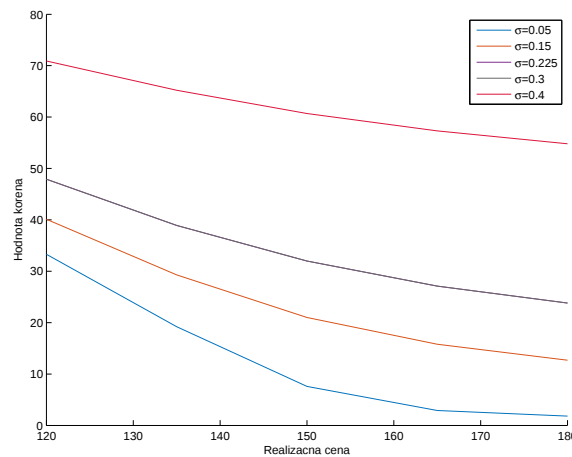
Od hodnoty volatility ceny akcie závisí hodnota koreňa rovnice nelineárne, pričom pre hodnoty blízke hodnote S_0 v našom prípade 150 je táto závislosť lineárna. Toto môžeme pozorovať na obrázku 5.14.

Závislosť hodnoty koreňa od realizačnej ceny sa taktiež zdá byť nelineárna avšak



Obr. 5.14: Závislosť hodnoty koreňa rovnice (4.29) od σ pri $S_0 = 150$, $T = 2$, $r = 0.015$, 252 časových krokoch a meniacom sa K .

pre vysokú volatilitu ceny akcie sa javí byť lineárnou. Ostatné parametre ovplyvňujú závislosť koreňa od K iba nepatrne. Hodnota koreňa je bližšie k nule pre hodnoty vyššie ako počiatočná cena akcie a naopak, sa nule vzdďaľuje pre hodnoty realizačnej ceny nižšie ako počiatočná cena akcie. Túto závislosť pozorujeme na obrázku 5.15.



Obr. 5.15: Závislosť hodnoty koreňa rovnice (4.29) od K pri $S_0 = 150$, $T = 2$, $r = 0.015$, 252 časových krokoch a meniacom sa σ .

Pre hodnoty parametrov $S_0 = 150$, $K \in [120, 180]$, $T \in [0.5, 2]$, $\sigma \in [0.05, 0.4]$, $r = 0.015$ a počet časových krokov 252 sa pohybovala hodnota koreňa v intervale $[0.4, 70.9]$. Maximum bolo dosiahnuté pre hodnoty $\sigma = 0.4$, $K = 120$ a $T = 2$. Naopak minimum nastalo pri hodnotách $\sigma = 0.5$, $K = 180$ a $T = 0.5$. Táto informácia môže čitateľovi pomôcť zúžiť interval uvažovaných hodnôt a hľadať koreň rovnice

(4.29) s vyššou jemnosťou, čím môžeme získať presnejšie hodnoty optimálnej cesty a teda aj presnejšie odhady.

5.4.2 Konvergencia

Teraz pristúpime k testom o konvergencii odhadovanej ceny touto metódou a porovnáme ju s metódou využívajúcou náhodné vzorkovanie. Test bol urobený tak, že obe metódy použili rovnaké prírastky, metóda vzorkovania podľa dôležitosti k nim však pripočítala vektor optimálnych stredných hodnôt a použila patričné transformácie. Pre každú hodnotu počtu realizácií sme urobili 10 ocenení a v tabuľke 5.8 sú uvedené priemery odhadovaných cien a variancií daných odhadov. Hodnoty parametrov opcie boli $S_0 = 150$, $K = 150$, $T = 1$, $\sigma = 0.15$, $r = 0.015$ a počet časových krokov 252. Cena získaná riešením Večerovej parciálnej diferenciálnej rovnice je 5.6986.

Tabuľka 5.8: Porovnanie priemerov z desiatich odhadov a variancií vzorkovania podľa dôležitosti a náhodného vzorkovania, pre každú hodnotu počtu realizácií.

Počet realizácií	VPD odhad	NV odhad	VPD variancia	NV variancia
1 000	5.7275	5.6870	0.00849	0.07022
5 000	5.6987	5.6841	0.00172	0.01393
10 000	5.6830	5.6937	0.00086	0.00705
50 000	5.6936	5.6920	0.00017	0.00141
100 000	5.6990	5.7088	0.00009	0.00070
500 000	5.6985	5.6949	0.00002	0.00014
1 000 000	5.6982	5.6989	0.00001	0.00007

Táto metóda sa zdá byť približne rovnaká ako metóda s náhodným vzorkovaním. To však môže byť spôsobené rovnosťou počiatočnej a realizačnej ceny. Ak zmeníme hodnotu parametra na $K = 120$, pričom hodnoty ostatných parametrov ponecháme, dostaneme výsledky v tabuľke 5.9. Cena podľa Večeľa bola v tomto prípade 30.6793.

Tu už vidíme, že metóda vzorkovania podľa dôležitosti ponúka oveľa stabilnejšie výsledky ako obyčajná metóda, aj pri nízkom počte realizácií. Variancia vzorkovania podľa dôležitosti dosahuje pri 1 000 realizáciách rádovo hodnoty ako obyčajná

Tabuľka 5.9: Porovnanie priemerov z desiatich odhadov a variancií vzorkovania podľa dôležitosti a náhodného vzorkovania, pre každú hodnotu počtu realizácií. Hodnoty parametrov opcie sú $S_0 = 150$, $K = 120$, $T = 1$, $\sigma = 0.15$, $r = 0.015$ a počet časových krokov 252.

Počet realizácií	VPD odhad	NV odhad	VPD variancia	NV variancia
1 000	30.6817	30.6276	0.00938	0.16663
5 000	30.6848	30.7339	0.00197	0.03330
10 000	30.6777	30.6986	0.00097	0.01669
50 000	30.6774	30.6839	0.00020	0.00333
100 000	30.6759	30.6640	0.00010	0.00167
500 000	30.6780	30.6758	0.00002	0.00033
1 000 000	30.6774	30.6704	0.00001	0.00017

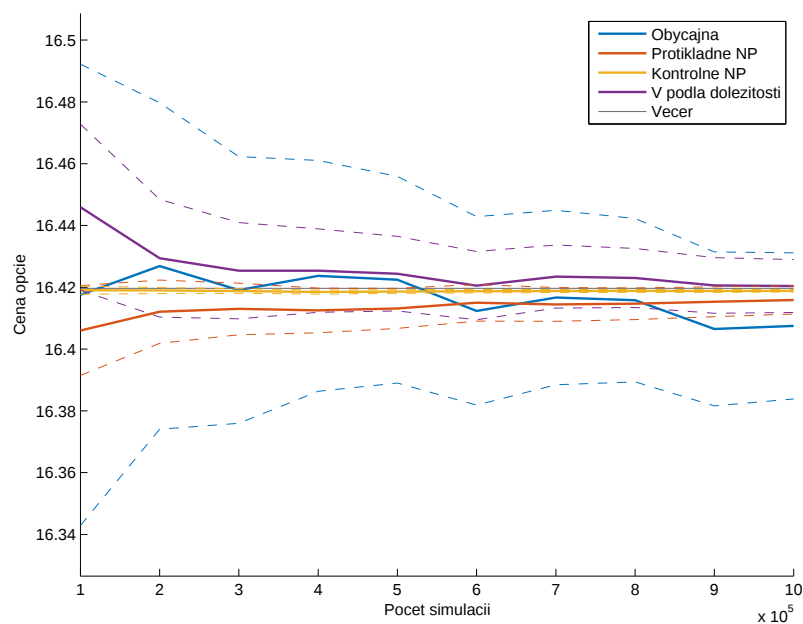
metóda pri 50 000 realizáciách. Táto redukcia variancie však nie je zadarmo a v priemere trvá ocenenie pomocou vzorkovania podľa dôležitosti pri 1 000 realizáciách 2-krát tak dlho ako obyčajnej metóde pri 50 000 realizáciách. Použitie tejto metódy teda závisí od preferencií používateľa.

5.5 Porovnanie metód

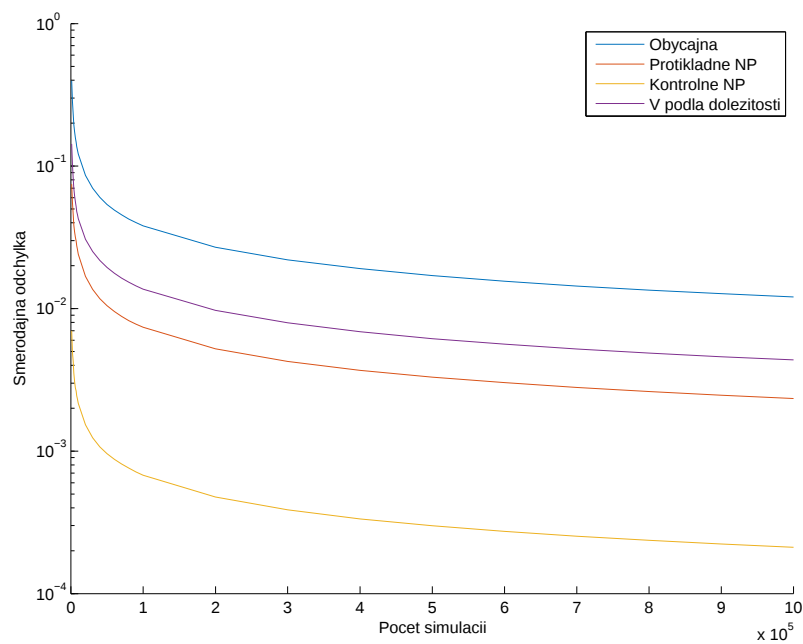
Teraz pristúpime k celkovému porovnaniu uvedených metód. Najskôr porovnáme obyčajnú metódu, metódu protikladných náhodných premenných, metódu kontrolnej náhodnej premennej a vzorkovanie podľa dôležitosti. Test je totiž konštruovaný tak aby vygeneroval naraz všetky prírastky a my postupne konštruujeme odhady tak, aby metódy využívali postupne väčší podiel z týchto prírastkov. Tým bude lepšie ilustrovaná konvergencia metód. Pri vrstvenom vzorkovaní však nie je možné použiť tento algoritmus. Táto metóda by v každom kroku používala iné prírastky a teda nebola znázornená jej konvergencia, navyše by jej odhady mali odlišný charakter ako odhady ostatných metód.

Hodnoty parametrov sme nastavili $S_0 = 150$, $K = 135$, $T = 1$, $\sigma = 0.15$, $r = 0.015$ a 252 časových krokov. Výsledky prvého testu môžeme vidieť na obrázkoch

5.16 a 5.17.



Obr. 5.16: Vývoj odhadovaných cien (plné čiary) a 95%-tných intervalov spoľahlivosti (prerušované čiary) obyčajnej metódy, metódy protikladných náhodných premenných, metódy kontrolnej náhodnej premennej a vzorkovania podľa dôležitosti.



Obr. 5.17: Vývoj smerodajných odchýliek obyčajnej metódy, metódy protikladných náhodných premenných, metódy kontrolnej náhodnej premennej a vzorkovania podľa dôležitosti.

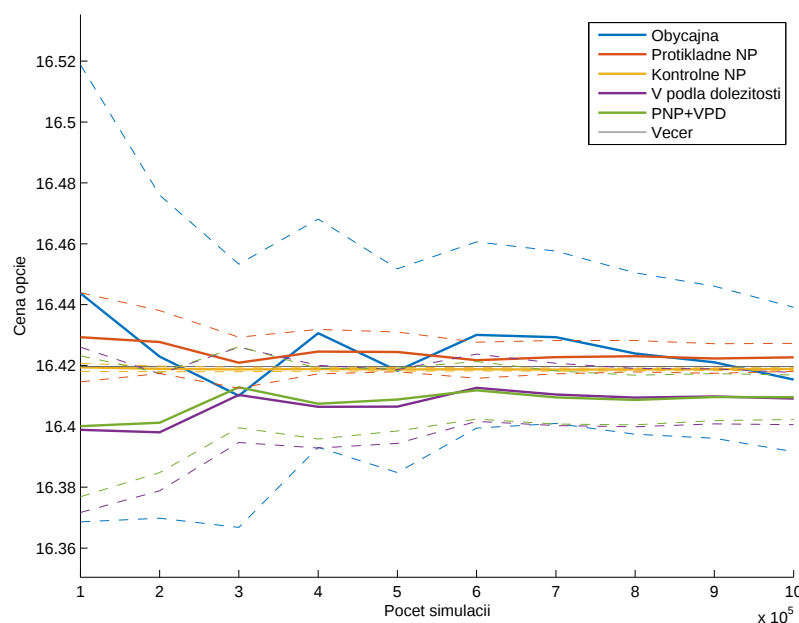
Z obrázku 5.16 vidíme, že sa potvrdili predošlé výsledky a metóda kontrolnej náhodnej premennej má najnižšiu smerodajnú odchýlku a je tak isto najbližšie cene získanej riešením Večerovej parciálnej diferenciálnej rovnice. Pomerne presná je tak isto aj metóda vzorkovania podľa dôležitosti, avšak jej smerodajná odchýlka je vyššia, tým pádom aj širší interval spoľahlivosti. Naopak nižšiu smerodajnú odchýlku dosahuje metóda protikladných náhodných premenných, avšak jej cena konverguje pomalšie. Vidíme taktiež, že odhad obvyčajnej metódy je veľmi kolísavý a v tomto prípade nepozorujeme konvergenciu k cene podľa Večeľa. Časové náročnosti metód pri milión realizáciách boli nasledovné:

- Obyčajná metóda - 11.84s,
- Metóda kontrolnej náhodnej premennej - 68.11s,
- Metóda protikladných náhodných premenných - 72.36s,
- Vzorkovanie podľa dôležitosti - 59.99s.

Keďže odhady metódou protikladných náhodných premenných mali nízku varianciu a odhady vzorkovaním podľa dôležitosti zas väčšiu presnosť, rozhodli sme sa tieto dve metódy skombinovať. Urobili sme rovnaký typ testu pričom sme medzi použité metódy zahrnuli aj túto kombináciu. Výsledky testu uvádzame na obrázkoch 5.18 a 5.19.

Z obrázku 5.19 vidíme, že touto kombináciou sme znížili varianciu oproti vzorkovaniu podľa dôležitosti. Oproti metóde protikladných náhodných premenných však variancia odhadu vzrástla. Navyše, ako vidíme z obrázku 5.18, bola metóda protikladných náhodných premenných presnejšia a jej kombinácia so vzorkovaním podľa dôležitosti vykazuje výchylku od ceny podľa Večeľa. Táto metóda sa tým pádom nejaví ako vhodná voľba na oceňovanie tohto typu opcií.

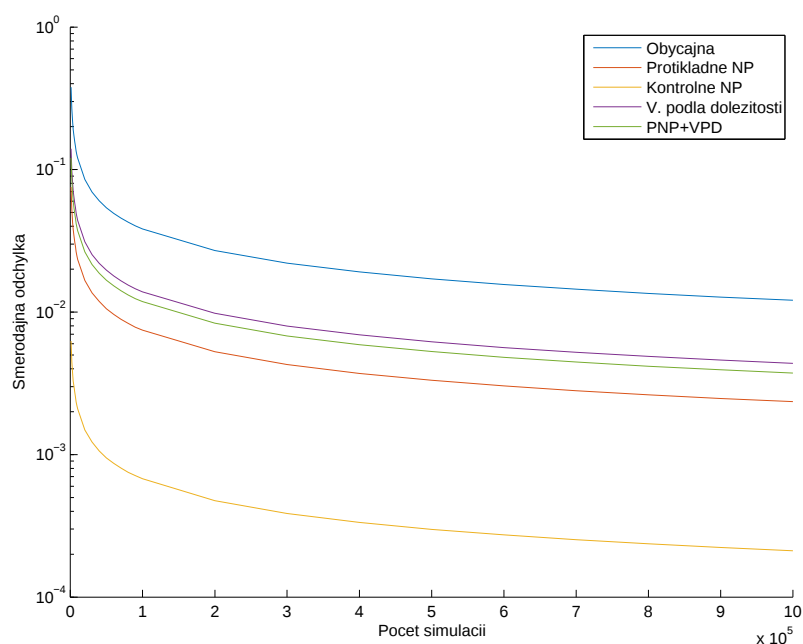
Druhý typ testov sme konštruovali tak, aby bolo možné zahrnúť aj vrstvené vzorkovanie. Rozdiel oproti minulým testom je v tom, že pre každý počet realizácií robíme nové realizácie prírastkov, nakoľko tak musíme robiť aj v metóde vrstveného vzorkovania. Tá bude mať prírastky vygenerované tak ako je popísané v kapitole 4, zatiaľ čo ostatné metódy budú používať náhodne vygenerované prírastky, rovnaké



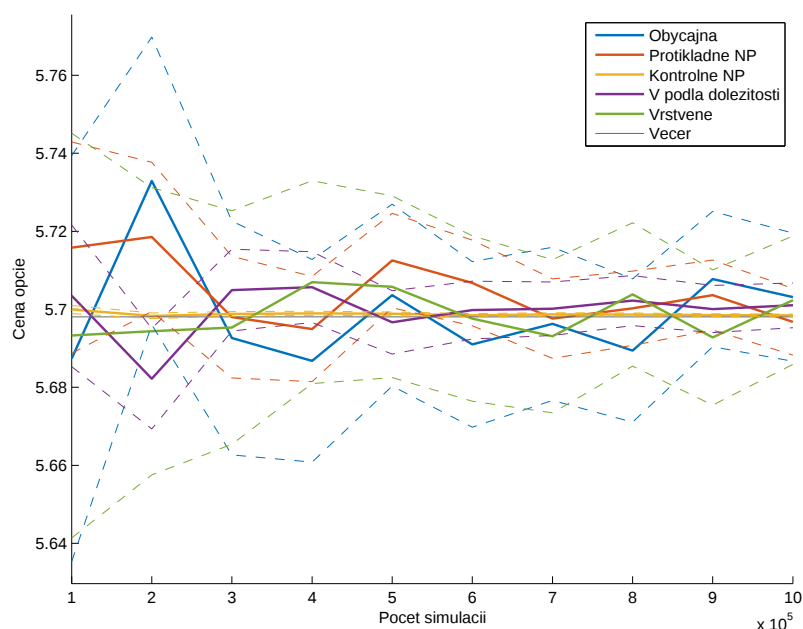
Obr. 5.18: Vývoj odhadovaných cien (plné čiary) a 95%-tných intervalov spoľahlivosti (prerušované čiary) obvyčajnej metódy, metódy protikladných náhodných premenných, metódy kontrolnej náhodnej premennej, vzorkovania podľa dôležitosti a kombinácie vzorkovania podľa dôležitosti s metódou protikladných náhodných premenných.

pre každú metódu. Test sme robili znova pre nastavenie parametrov $S_0 = 150$, $K = 135$, $T = 1$, $\sigma = 0.15$, $r = 0.015$ a 252 časových krov. Výsledky vidíme na obrázkoch 5.20 a 5.21.

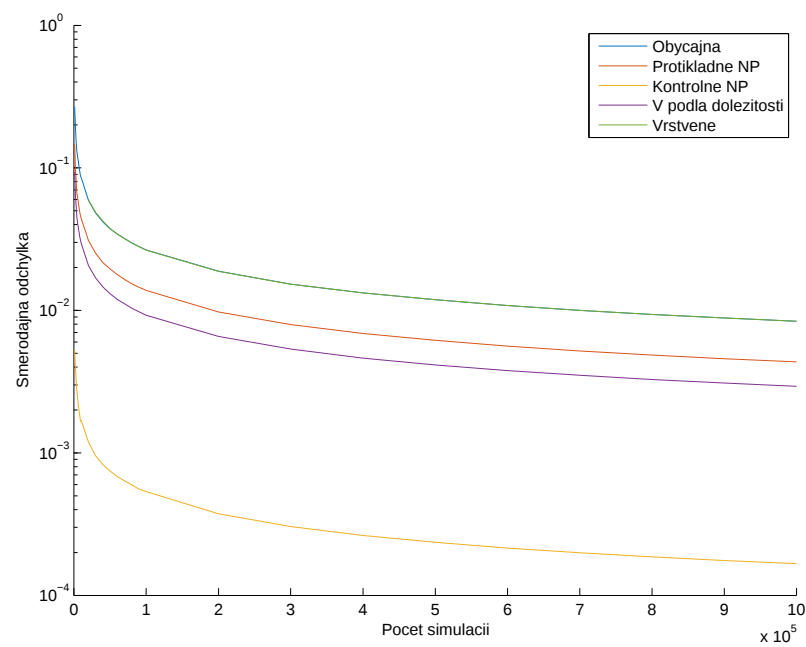
Na obrázku 5.20 môžeme pozorovať, že tak ako v predošlých testoch, obvyčajná metóda kolíše najviac zo všetkých, zatiaľ čo metóda kontrolnej náhodnej premennej je veľmi presná. Vidíme, že vzorkovanie podľa dôležitosti vykazuje vyššiu presnosť ako pri predošlých testoch. Zaujímavý je však vývoj odhadu vrstveného vzorkovania. Ten je pomerne stabilný a odlišuje sa od ceny podľa Večeľa do jedného centu. Napriek tejto stabilite odhadu vidíme na obrázku 5.21, že smerodajná odchýlka tohto odhadu je takmer zhodná zo smerodajnou odchýlkou obvyčajnej Monte Carlo metódy. Tento fenomén sme však už popísali v sekcii 5.3.



Obr. 5.19: Vývoj smerodajných odchýlok obyčajnej metódy, metódy protikladných náhodných premenných, metódy kontrolnej náhodnej premennej, vzorkovania podľa dôležitosti a kombinácie vzorkovania podľa dôležitosti s metódou protikladných náhodných premenných pre $S_0 = 150$, $K = 135$, $T = 1$, $\sigma = 0.15$, $r = 0.015$ a 252 časových krokov.



Obr. 5.20: Vývoj odhadovaných cien (plné čiary) a 95%-tných intervalov spoľahlivosti (prerušované čiary) obyčajnej metódy, metódy protikladných náhodných premenných, metódy kontrolnej náhodnej premennej, vzorkovania podľa dôležitosti a vrstveného vzorkovania.



Obr. 5.21: Vývoj smerodajných odchýliek obvyčajnej metódy, metódy protikladných náhodných premenných, metódy kontrolnej náhodnej premennej, vzorkovania podľa dôležitosti a vrstveného vzorkovania.

Záver

V tejto práci sme najskôr oboznámili čitateľa so základnou Monte Carlo metódou na odhad strednej hodnoty. Následne sme v kapitole 3 uviedli viaceré metódy na redukciiu variancie odhadu touto metódou. Ich použitie sme kvôli jednoduchosti najskôr demonštrovali na opciách európskeho typu a taktiež sme overili ich efektivitu na tomto type opcií. V nasledujúcej kapitole 4 sme predstavili aplikácie daných metód na opcie ázijského typu a taktiež sme uviedli nami navrhované modifikácie metódy protikladných náhodných premenných.

V kapitole 5 sme pristúpili k testovaniu a porovnávaniu daných metód na oceňovaní opcií ázijského typu s aritmetickým priemerom. Pri porovnaní všetkých metód v sekcii 5.5 sme zistili, že najlepšou metódou na redukciiu variancie je metóda kontrolnej náhodnej premennej. Jej efektivita je podmienená voľbou kontrolného procesu, ktorý má vysokú koreláciu s procesom, ktorého strednú hodnotu hľadáme. V prípade ázijských opcií s aritmetickým priemerom máme k dispozícii ázijskú opciu s geometrickým priemerom, ktorej cenu vieme explicitne vyjadriť a dosahuje vysoké hodnoty korelácie. To je dôvodom drastického poklesu variancie odhadu v prípade tejto metódy avšak pre iné typy opcií môže byť problematické nájsť podobný proces so známou strednou hodnotou. Vzorkovanie podľa dôležitosti bolo v poradí druhou najlepšou metódou na redukciiu variancie, aj keď v niektorých prípadoch vykazovalo výchylku od ceny podľa Večera. To môže byť nevýhodou pri použití tejto metódy, keďže si nemusíme byť istí, že cena, ku ktorej táto metóda konverguje, je správna. S presnosťou odhadovanej ceny na tom boli lepšie metóda protikladných náhodných premenných a vrstvené vzorkovanie. Tie sú taktiež ľahšie aplikovateľné ako metóda kontrolných premenných, aj keď neposkytujú takú značnú redukciiu variancie. Variancia odhadov vrstveného vzorkovania je síce zhodná s obyčajnou Monte Carlo

metódou ale netreba zabúdať, že v tomto prípade sme generovali z podmieneného rozdelenia, preto variancia realizácií ceny opcie a variancia odhadu nie sú v tomto prípade rovnocenné. Bližšie sme tento fenomén popísali spolu s danou metódou v sekcii 5.3.

Pre metódu protikladných náhodných premenných sme sa v sekcii 5.2 pokúsili aj empiricky zistiť pri akých hodnotách parametrov opcie je jej použitie efektívne. Táto metóda nie je vhodná pri oceňovaní *out-of-the-money*, kúpnych opcií teda tých, ktorých realizačná cena je vyššia ako aktuálna cena akcie. Pri predajných opciách očakávame opačný výsledok a teda, že táto metóda nie je vhodná pre opcie, ktorých realizačná cena je nižšia ako aktuálna cena akcie. V sekcii 5.2.2 sme rovnako testovali efektivitu nami navrhnutej 2-násobnej a 3-násobnej metódy protikladných náhodných premenných. Tá sa javila byť náchylnejšia na realizačnú cenu opcie a bola neefektívna v istých prípadoch aj ak aktuálna cena akcie bola rovná realizačnej cene. Preto túto metódu popísanú v sekcii 4.2 odporúčame používať iba na oceňovanie kúpnych opcií s nižšou realizačnou cenou ako aktuálnou cenou akcie a opačne, predajných opcií s vyššou realizačnou cenou ako aktuálnou cenou akcie.

Pri metóde vzorkovania podľa dôležitosti je nutné nájsť koreň rovnice (4.29). V sekcii 5.4.1 sme rozobrali, ako na hodnotu tohto koreňa vplývajú parametre opcie, aby bolo ľahšie odhadnúť jeho hodnotu a hľadať ho s väčšou jemnosťou.

Literatúra

- [1] Bachelier L.: *Théorie de la spéculation*, Gauthier-Villars, 1900.
- [2] Black, F., Scholes, M.: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No.3, str. 637-654, 1973.
- [3] Boyle, P., Broadie, M., Glasserman, P.: *Monte Carlo methods for security pricing*. *Journal of economic dynamics and control*, 21(8-9), str. 1267-1321, 1997.
- [4] Dagpunar, J. S.: *Simulation and Monte Carlo: With applications in finance and MCMC*. John Wiley & Sons, 2007.
- [5] Fu, M. C., Madan, D. B., Wang, T.: *Pricing continuous Asian options: a comparison of Monte Carlo and Laplace transform inversion methods*. *Journal of Computational Finance*, 2(2), str. 49-74, 1999.
- [6] Gilks, W. R., Richardson, S., Spiegelhalter, D.: *Markov chain Monte Carlo in practice.*, CRC press, 1995.
- [7] Glasserman P.: *Monte Carlo methods in financial engineering*, Springer Science & Business Media, 2013 Mar 9.
- [8] Glasserman, P., Heidelberger, P., Shahabuddin, P.: *Asymptotically optimal importance sampling and stratification for path-dependent options*, *Mathematical Finance*, 9.2, str. 117-152, 1999.
- [9] Guasoni, P., Robertson, S.: *Optimal importance sampling with explicit formulas in continuous time*. *Finance and Stochastics* 12.1, str. 1-19, 2008.
- [10] Han, C. H., Lai, Y.: *Generalized control variate methods for pricing Asian options*. *The Journal of Computational Finance* 14.2, str. 87, 2010.

- [11] Jäckel P. *Monte Carlo methods in finance*. J. Wiley, 2002.
- [12] Kamizono, K., Kariya, T., Liu, R. Y., Nakatsuma, T.: *A new control variate estimator for an Asian option*. Asia-Pacific Financial Markets, 11(2), str. 143-160, 2004.
- [13] Kemna, A. G., Vorst, A. C.: *A pricing method for options based on average asset values*. Journal of Banking Finance 14.1, str. 113-129, 1990.
- [14] Leobacher, G.: *Stratified sampling and quasi-Monte Carlo simulation of Lévy processes*. Monte Carlo Methods and Applications mcma, 12(3), str. 231-238, 2006.
- [15] Privault, N., Yu, J.: *Stratified approximations for the pricing of options on average*. Journal of Computatuional Science, 19.4, str. 95-113, 2016.
- [16] Večeř J.: *A new PDE approach for pricing arithmetic average Asian options*, Journal of computational finance, str. 105-13, 2001.
- [17] Zhang, H.: *Pricing asian options using Monte Carlo methods*. Project report 2009:7, Uppsala University, 2009.