

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ŠTATISTICKÉ POSTUPY PRE POROVNÁVANIE  
MARKOVOVÝCH REŤAZCOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**ŠTATISTICKÉ POSTUPY PRE POROVNÁVANIE  
MARKOVOVÝCH REŤAZCOV**

**DIPLOMOVÁ PRÁCA**

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie  
Študijný odbor: Aplikovaná matematika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Vedúci práce: doc. RNDr. Katarína Janková, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Klaudia Gibasová  
**Študijný program:** ekonomicko-finančná matematika a modelovanie  
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský  
**Sekundárny jazyk:** anglický

**Názov:** Štatistické postupy pre porovnávanie Markovových reťazcov  
*Statistical methods for comparison of Markov chains*

**Anotácia:** Pre dva nezávislé Markovove reťazce predpokladáme, že funkcie pravdepodobností prechodov majú rovnaký tvar, ale môžu sa líšiť v závislosti od neznámeho parametra. Na porovnávanie hodnôt parametra v jednotlivých reťazcoch je možné použiť rôzne sekvenčné prístupy. Cieľom práce je porovnanie týchto prístupov jednak pomocou známych výsledkov sekvenčnej analýzy, ako aj použitím vhodných simulácií.

**Vedúci:** doc. RNDr. Katarína Janková, CSc.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.  
**Dátum zadania:** 25.01.2017

**Dátum schválenia:** 27.01.2017

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

**PodĎakovanie** Na tomto mieste sa chcem veľmi pekne poďakovať svojej vedúcej diplomovej práce Doc. RNDr. Kataríne Jankovej, CSc. za ochotu, čas, ktorý mi venovala, pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce.

## Abstrakt

GIBASOVÁ, Klaudia: Štatistické postupy pre porovnávanie Markovových reťazcov [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Doc. RNDr. Katarína Janková, CSc., Bratislava, 2018, 54 s.

V našej práci sa venujeme sekvenčnej analýze a porovnávaniu parametrov Markovových reťazcov cez sekvenčné testovanie aj za pomoci simulácií. Venujeme sa reťazcom s nezávislými pozorovaniami a potom reťazcom, pri ktorých pozorovania vykazujú Markovskú závislosť. Cieľom je porovnať výsledky aproximácií operačnej charakteristiky so simuláciami.

**Kľúčové slová:** Sekvenčná analýza, Markovove reťazce, Operačná charakteristika

# Abstract

GIBASOVÁ, Klaudia: Statistical methods for comparison of Markov chains [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Doc. RNDr. Katarína Janková, CSc., Bratislava, 2018, 54 p.

In our work, we perform sequential analysis and comparison of Markov chains parameters through sequential testing using simulations as well. We deal with a chain of independent observations and then chains in which observations show Markov's dependence. The aim is to compare the results of the approximation of operating characteristics with simulations.

**Keywords:** Sequential analysis, Markov chains, Operating characteristic

# Obsah

|                                                                                                    |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Úvod</b>                                                                                        | <b>7</b>  |
| <b>1 Markovove reťazce</b>                                                                         | <b>9</b>  |
| 1.1 Náhodný proces, náhodný reťazec . . . . .                                                      | 9         |
| 1.2 Základy o Markovových reťazcoch . . . . .                                                      | 9         |
| 1.3 Štatistické postupy v Markovových reťazcoch vo všeobecnosti . . . . .                          | 11        |
| <b>2 Sekvenčná analýza pre nezávislé a závislé pozorovania</b>                                     | <b>14</b> |
| 2.1 Sekvenčná analýza nezávislých pozorovaní . . . . .                                             | 16        |
| 2.2 Sekvenčná analýza závislých pozorovaní . . . . .                                               | 20        |
| 2.2.1 Sekvenčná analýza závislých pozorovaní v prípade zložených hy-<br>potéz . . . . .            | 24        |
| <b>3 Sekvenčné testovanie</b>                                                                      | <b>26</b> |
| 3.1 Sekvenčné testovanie parametra ak sú pozorovania nezávislé . . . . .                           | 26        |
| 3.2 Ilustračný príklad na sekvenčné testovanie v prípade závislých pozorovaní                      | 31        |
| 3.3 Bonus Malus model . . . . .                                                                    | 34        |
| 3.4 Sekvenčné testovanie parametra Markovovho reťazca . . . . .                                    | 34        |
| 3.4.1 Nesequenčné testovanie parametra Markovovho reťazca . . . . .                                | 41        |
| 3.5 Prechod k jednoduchšej hypotéze pri sekvenčnom porovnaní 2 Marko-<br>vových reťazcov . . . . . | 42        |
| 3.6 Sekvenčné testovanie pre porovnanie parametrov 2 Markovových reťazcov                          | 44        |
| <b>Záver</b>                                                                                       | <b>49</b> |
| <b>Literatúra</b>                                                                                  | <b>51</b> |
| <b>Príloha A</b>                                                                                   | <b>52</b> |

# Úvod

Sekvenčná analýza vznikla v období okolo druhej svetovej vojny, kedy ju Abraham Wald a ďalší ako štatistická výskumná skupina použili na efektívnejšiu kontrolu kvality v priemysle počas vojny. Nezávisle od nich vyvinul vtedy podobný prístup Alan Turing na testovanie hypotéz o tom, či môžu byť rôzne nemecké kódované správy poprepájané a či je možné ich analyzovať spolu. Odvtedy sekvenčná analýza našla svoje využitie napríklad v medicínskych testoch, kedy každé pozorovanie navyiac znamená podstatné navýšenie nákladov na testovanie. Hlavnou výhodou sekvenčného testovania oproti klasickému je, že využíva minimálny počet pozorovaní potrebných na prijatie jednej z hypotéz. V dnešnej dobe, kedy sa všetko snažíme optimalizovať, znižovať náklady na prevedenie a čo najviac urýchľovať všetky procesy má sekvenčné testovanie svoje miesto. Preto má zmysel venovať sa sekvenčným testom a testovaniu ich vlastností, či sú postačujúce a nakoľko sú testy dôveryhodné. V mnohých štatistických analýzach sa predpokladá, že pozorovania vytvárajú postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných premenných. To často nie je odraz reality, ale aspoň umožňuje uskutočniť výpočty. Istým priblížením realite, ktoré zachováva mnohé postupy pri výpočtoch je predpoklad, že pozorovania sú realizáciami Markovovho reťazca. S takýmto predpokladom sme v našej práci počítali.

Sekvenčnou analýzou sa zaoberal ako prvý Wald [7]. V zdroji [2] bola rozobratá sekvenčná analýza pre postupnosti, kde sú všetky pozorovania navzájom nezávislé. Sekvenčnej analýze s jedným Markovovým reťazcom venovali pozornosť v [5] a porovnaniu dvoch reťazcov sa venovali v [6].

Naším cieľom bolo zaoberať sa nezávislými Markovovými reťazcami, ktorých funkcie matice prechodov sú rovnaké. Líšia sa len v parametri a na porovnanie hodnôt parametra použiť sekvenčné prístupy a následne výsledky z rôznych prístupov porovnať pomocou sekvenčnej analýzy a simulácií.

Pre rôzne príklady sme zostrojili sekvenčné testy a snažili sa dospieť k aproximovanému tvaru operačnej charakteristiky. Následne sme aproximácie porovnali s výsledkami simulácií a očakávali sme, že ich hodnoty budú približne rovnaké. Tiež sme simulačne ráтали odhad stredného rozsahu výberu.

Prvá kapitola sa venuje základnému prehľadu o Markovových reťazcoch. V druhej ka-



pitole sme zhrnuli teoretické výsledky zo sekvenčnej analýzy pre Markovove reťazce s nezávislými a so závislými pozorovaniami. Na záver sme prevažne na príklady s Bonus Malus modelom aplikovali teóriu z druhej kapitoly. V jednom príklade sme sekvenčný test porovnali s výsledkami nesequenčného testu z hľadiska stredného rozsahu výberu, pravdepodobnosti chyby 1. a 2. druhu.

# 1 Markovove reťazce

V tejto práci budeme riešiť úlohy, ktoré používajú modely s Markovovými reťazcami. Takéto modely sú vhodné v prípade závislých pozorovaní, Markovova vlastnosť uľahčí mnohé výpočty. Cieľom tejto kapitoly je zhrnúť základné poznatky o Markovových reťazcoch a v krátkosti uviesť štatistické postupy, ktoré je možné pri takýchto reťazcoch použiť. Teória o základoch Markovových reťazcoch a o odhadovaní matice prechodu je čerpaná zo zdroja [3]. Teória o chí kvadrát teste bola čerpaná zo zdroja [1].

## 1.1 Náhodný proces, náhodný reťazec

Ak chceme matematicky opísať náhodný jav, je primerané použiť pojem pravdepodobnostného priestoru  $(\Omega, S, P)$  a náhodnej premennej. Je to funkcia na množine  $\Omega$ , ktorú vieme charakterizovať pravdepodobnostným rozdelením. Rozšírením náhodnej premennej je náhodný proces. Náhodný proces namiesto jednej premennej predstavuje postupnosť náhodných premenných pozorovaných v čase.

**Definícia 1.1.** *Náhodný proces je systém  $\{X_i\}_{i \in \mathbf{I}}$ , kde pre každé  $i \in \mathbf{I}$  je  $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  náhodná premenná.*

Pre pevné  $\omega \in \Omega$  dostaneme jednu realizáciu  $x(i, \omega)$  náhodného procesu ako funkciu premennej  $i \in \mathbf{I}$ . Je prirodzené si pod množinou  $\mathbf{I}$  predstavovať čas. Ak sú v tejto množine prirodzené alebo celé čísla, tak hovoríme o náhodnom procese s diskretným časom. Hodnoty, ktoré nadobúdajú náhodné premenné  $X_i$  budeme nazývať stavmi a množinu stavov budeme označovať  $S$ . My uvažujeme konečnú alebo spočítateľnú množinu stavov. Takýto náhodný proces sa nazýva **reťazec**.

## 1.2 Základy o Markovových reťazcoch

**Definícia 1.2.** *Postupnosť náhodných premenných  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s diskretnou množinou stavov  $S$  je Markovov reťazec, ak spĺňa nasledujúcu podmienku:*

$$P(X_{n+1} = T_j | X_n = T_i, X_{n-1} = T_{i_{n-1}}, \dots, X_0 = T_{i_0}) = P(X_{n+1} = T_j | X_n = T_i),$$

pre všetky  $n \in \mathbb{N}$  a pre všetky  $T_{i_0}, T_{i_1}, \dots, T_{i_{n-1}}, T_i, T_j \in S$  a ak:

$$P(X_0 = T_{i_0}, \dots, X_n = T_{i_n}) > 0.$$

Teda za podmienky , že  $X_n = T_i$  je  $X_{n+1}$  nezávislé od  $X_0, \dots, X_{n-1}$ . Ak podmienená pravdepodobnosť  $P(X_{n+1} = T_j | X_n = T_i)$  nezávisí od  $n$ , potom aj pre každé  $n \in \mathbf{I}$ ,  $s > 0$ ,  $T_i, T_j \in S$

$$P(X_{n+s} = T_j | X_n = T_i) = p_{ij}(s),$$

nezávisí od  $n$ . V tomto prípade hovoríme, že reťazec je homogénny. V tejto práci sme pracovali len s homogénnymi reťazcami. Ak je  $\mathbf{I} = [0, \infty)$ , tak môžeme reťazcu priradiť systém matíc

$$\{P(s); s \geq 0\}, \text{ kde } p_{ij}(s) = P(X_s = T_j | X_0 = T_i), \text{ pre } T_i, T_j \in S.$$

Platí, že  $p_{ij}(0) = 0$  ak  $i \neq j$  a  $p_{ii}(0) = 1$ .

Matica  $P(s)$  je matica prechodu za čas  $s$ , ak je  $s \geq 0$  pevné. Ak je  $P(s) = (p_{ij})_{i,j=1,2,\dots,s}$  matica prechodu pre  $s > 0$  Markovovho reťazca s množinou stavov  $S$  tak platí, že  $\sum_{i,j=1}^s p_{ij}(s) = 1$ . Stochastická matica je matica s nezápornými prvkami, ktorej súčet prvkov v každom riadku je rovný 1.

**Definícia 1.3.** *Nech  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  je Markovov reťazec. Rozdelenie pravdepodobnosti  $\Gamma = \{\Gamma_{T_j}\}_{j=1,2,\dots,s}$  je také, že  $P(X_0 = T_j) = \Gamma_{T_j}$  pre  $j = 1, 2, \dots, s$ , budeme nazývať počiatocným rozdelením reťazca  $\{X_n\}_{n \geq 0}$ .*

**Veta 1.4.** *Matice prechodu  $P(s)$ ,  $s \geq 0$  a počiatocné rozdelenie  $\Gamma$  jednoznačne určujú konečnorozmerné rozdelenia náhodného procesu  $\{X_n\}_{n \geq 0}$ .*

Každý Markovov reťazec jednoznačne určuje počiatocné rozdelenie a systém matíc prechodu za čas  $s$ . Pretože budeme pracovať len s reťazcami s diskretným časom, na určenie konečnorozmerných rozdelení procesu stačí počiatocné rozdelenie a matica prechodu za jednu časovú jednotku, z ktorého ľahko určíme maticu prechodu vyššieho rádu, teda stačí používať  $p_{ij} \equiv p_{ij}(1)$  a  $\mathbf{P} \equiv P(1) = (p_{ij})_{i,j=1,2,\dots,s}$ .

**Veta 1.5.** *Nech v Markovovom reťazci pre všetky  $T_i, T_j \in S$  existujú limity*

$$\pi_{T_j} = \lim_{s \rightarrow \infty} p_{ij}^s$$

nezávislé od  $i = 1, 2, \dots, s$ , pričom  $\pi_{T_j} > 0$  pre nejaké  $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ . Potom je  $\{\pi_{T_j}\}_{j=1,2,\dots,s}$  rozdelenie pravdepodobnosti a platí:

$$\pi_{T_j} = \sum_{i=1}^s \pi_{T_i} p_{ij}, \quad (1)$$

pre všetky  $j = 1, 2, \dots, s$ . Ak je  $\{x_{T_j}\}_{j=1,2,\dots,s}$  také rozdelenie pravdepodobnosti, že platí

$$x_{T_j} = \sum_{i=1}^s x_{T_i} p_{ij},$$

pre každé  $j = 1, 2, \dots, s$ , tak  $x_{T_j} = \lim_{s \rightarrow \infty} p_{ij}^s$ , existuje teda jediné rozdelenie s vlastnosťou (1).

Rozdelenie, ktoré spĺňa podmienku (1) je stacionárne rozdelenie Markovovho reťazca s maticou prechodu  $\mathbf{P}$ . Keby sme stacionárne rozdelenie použili ako počiatočné rozdelenie, tak pravdepodobnosť, že reťazec bude v čase  $n$  v stave  $T_j$ , by bola rovnaká pre všetky  $n$ . V konečnom reťazci takéto rozdelenie existuje, nemusí však byť jediné. Rozdelenie, ktoré navyše spĺňa predpoklady vety 1.5 je jediné a je to takzvané ergodické rozdelenie Markovovho reťazca.

### 1.3 Štatistické postupy v Markovových reťazcoch vo všeobecnosti

Pri modelovaní diskretných Markovových reťazcov je nutné poznať maticu prechodu. V tejto podkapitole si stručne uvedieme, aké štatistické metódy sa používajú na odhadovanie matice prechodu podľa [3] a uvedieme si aj klasický postup pre test o matici prechodu Markovovho reťazca. Je to test založený na  $\chi^2$  rozdelení, postupovali sme podľa [1].

Nech je  $X_n$  Markovov reťazec s konečnou množinou stavov  $S = (1, \dots, s)$ . Počiatočné rozdelenie je  $\Gamma$  a nepoznáme maticu prechodu  $\mathbf{P}$ . Budeme sa ju snažiť odhadnúť na základe realizácií reťazca v čase. Premenná  $D_{T_i T_j}$  predstavuje počet pozorovaných prechodov zo stavu  $T_i$  do stavu  $T_j$  za časy  $0, \dots, n$  a  $d_{T_i T_j}$  je realizácie náhodnej premennej  $D_{T_i T_j}$ . Matica  $D = (D_{T_i T_j})_{i,j=1,2,\dots,s}$  je matica početností pozorovaných prechodov za časy  $0, 1, \dots, n$ .

**Príklad:** Uvažovali sme jednoduchý Markovov reťazec, ktorý nadobúda len stav A alebo B. Mali sme 20 pozorovaní, ktoré tvoria postupnosť stavov.

A, A, B, A, B, B, B, A, A, B, A, A, A, B, B, A, B, A, B, B

Početnosti pozorovaných prechodov sme si vedeli zapísať do matice

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Na odhad prvkov matice  $\mathbf{P}$  je možné použiť napríklad metódu maximálnej vierohodnosti. Ďalšie metódy, ktoré sa používajú na štatistickú analýzu Markovových reťazcov, sú napríklad chí-kvadrát metódy. Teraz si uvedieme konkrétny test pomocou chí kvadrátu pre nesequenčné testovanie, ktorý bol uvedený v článku [1].

V tomto prípade budeme testovať, či sú pravdepodobnosti prechodu medzi vybranými stavmi rovné predpísaným hodnotám. Uvažujeme Markovov reťazec s konečným počtom stavov, matica prechodu má rovnaký tvar pre každý čas. Takýto reťazec je možné popísať počiatočným rozdelením a pravdepodobnosťami prechodu. Pravdepodobnosti prechodu sú podmienené pravdepodobnosťami prechodu do stavu  $T_j$ , ak sa reťazec predtým nachádzal v stave  $T_i$ . Uvažujeme stavy  $T_i, i = 1, 2, \dots, s$  a  $n$  pozorovaní. Matica prechodu  $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$ , kde  $p_{ij}$  je stacionárna pravdepodobnosť prechodu zo stavu  $T_i$  do stavu  $T_j$ . Túto pravdepodobnosť môžeme odhadnúť pomocou metódy maximálnej vierohodnosti, ktorá je podrobne uvedená v článku [1] a dostaneme výsledný tvar odhadu:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{d_{ij}}{d_{i*}}, \quad (2)$$

kde  $d_{ij}$  predstavuje počet, koľkokrát z  $n$  pozorovaní prešiel reťazec so stavu  $T_i$  do stavu  $T_j$ . Druhá premenná  $d_{i*}$  predstavuje počet prechodov zo stavu  $T_i$  do ľubovoľného zo stavov  $T_1, \dots, T_s$ . Tento odhad budeme potrebovať na zostavenie testovacej štatistiky, ak chceme testovať hypotézu:

$$H_0: p_{ij}(\theta) = p_{ij}^0(\theta_0)$$

pomocou chí kvadrát metódy. V zdroji [1] sa uvádza nasledujúca testovacia štatistika, ktorá tvrdí že za platnosti  $H_0$  má:

$$U = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s d_i^* \frac{(p_{ij} - p_{ij}^0)^2}{p_{ij}^0}$$

asymptoticky  $\chi^2$  rozdelenie s  $s(s-1)$  stupňami voľnosti. Rozdelenie chí kvadrát dostaneme, pretože premenné  $d_i^*(\hat{p}_{ij} - p_{ij}^0)^2$  sú asymptoticky nezávislé pre rôzne  $i$ . Potom sa test riadi nasledovnými pravidlami pri zvolenej hladine významnosti  $\alpha$ , čo je ekvivalentné s pravdepodobnosťou chyby 1. druhu, ktorá je uvedená na strane 15.

Test

- zamietá  $H_0$ , ak  $U > \chi^2_{s(s-1)}$ ,
- nezamietá  $H_0$ , ak  $U \leq \chi^2_{s(s-1)}$ .

Takto zostrojený test vychádza z pevného počtu pozorovaní. V ďalšom budeme uvažovať aj sekvenčné testy, kde počet pozorovaní bude náhodný. Takéto testy porovnáme s uvedeným  $\chi^2$  testom. Parametre, ktoré treba brať do úvahy sú rozsah alebo stredný rozsah výberu, chyba 1. druhu a chyba 2. druhu.

## 2 Sekvenčná analýza pre nezávislé a závislé pozorovania

Mnohé štatistické analýzy predpokladajú, že pozorovania vytvárajú postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných premenných. Toto často neodráža realitu, avšak aspoň umožňuje uskutočniť výpočty. Priblížením realite, ktoré zachováva mnohé výpočtové postupy, je predpoklad, že pozorovania sú realizáciami Markovovho reťazca. Teda náhodné premenné nie sú nezávislé, avšak ak poznáme realizáciu náhodnej premennej  $X_{n-1}$  môžeme predpokladať, že  $X_n$  nezávisí od náhodných premenných  $X_1, X_2, \dots, X_{n-2}$ . Preto sme sa v druhej kapitole zaoberali teoretickými výsledkami zo sekvenčnej analýzy osobitne pre nezávislé aj závislé pozorovania. Pod závislosťou v tejto práci uvažujeme vždy Markovovskú závislosť.

Uvedieme základné postupy a tvrdenia sekvenčnej analýzy. Vznik sekvenčnej analýzy bol motivovaný minimalizovaním počtu pozorovaní potrebných na konštrukciu testu s predpísanými chybami. Oproti bežnému testovaniu je to výhodné z hľadiska nákladov na test. Sekvenčné testovanie využíva minimálny stredný počet pozorovaní potrebných na to, aby bol test schopný prijať jednu z hypotéz pri zvolenej pravdepodobnosti chyby 1. a 2. druhu, v prípade jednoduchých hypotéz. Automaticky sa šetria náklady na vykonanie pozorovaní, keďže v tomto prípade by postačujúca vzorka mohla byť oveľa nižšie číslo v porovnaní s klasickým testom.

Najskôr sa budeme zaoberať situáciou, ak sú pozorovania nezávislé. Potom uvedieme teóriu v prípade Markovovsky závislých pozorovaní, ak pracujeme s jedným Markovovým reťazcom aj, ak pracujeme s dvoma reťazcami.

Keď testujeme hypotézy bežným nesequenčným spôsobom, uvažujeme náhodný výber pevného rozsahu  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Môžeme testovať nasledujúce hypotézy.

$H_0$ : výber je z rozdelenia s hustotou       $H_1$ : výber je z rozdelenia s hustotou

$$f(x, \theta_0)$$

$$f(x, \theta_1)$$

Potom výsledky Neyman-Pearsonovej lemy umožňujú použiť testovaciu štatistiku:

$$\prod_{r=1}^n \frac{f(X_r, \theta_1)}{f(X_r, \theta_0)},$$

kde  $H_0$  zamietame na hladine významnosti  $\alpha$ , ak  $\prod_{r=1}^n \frac{f(X_r, \theta_1)}{f(X_r, \theta_0)} \geq c$ , inak  $H_0$  nezamietame.

Konštantu  $c$  určíme tak, aby

$$P[\text{zamietame } H_0 \mid H_0 \text{ platí}] = \alpha.$$

V tomto prípade parameter  $\alpha$  predstavuje takzvanú pravdepodobnosť chyby prvého druhu. Podobne sa v prípade jednobodovej alternatívy definuje aj pravdepodobnosť chyby druhého druhu  $\beta$ .

$$P[\text{nezamietame } H_0 \mid H_1 \text{ platí}] = \beta.$$

Definovanie pravdepodobností chýb prvého a druhého druhu je uvedené napríklad v zdroji [4].

Wald [7] testovanie hypotéz bežným spôsobom modifikoval na sekvenčný prípad a navrhol test založený na podiele vierohodností, kde  $X_1, X_2, \dots$  je postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných premenných. Znenie hypotéz ostalo rovnaké, teda:

$H_0$ : výber je z rozdelenia s hustotou       $H_1$ : výber je z rozdelenia s hustotou

$$f(x, \theta_0)$$

$$f(x, \theta_1)$$

Volí sa  $B < A$ , pričom  $B, A \in \mathbb{R}$  a testovanie prebieha podľa nasledujúceho scenára.

Vezmeme  $n$  pevných pozorovaní  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a

- prijmem  $H_0$  ak  $\prod_{r=1}^n \frac{f(x_r, \theta_1)}{f(x_r, \theta_0)} \leq B$ ,
- prijmem  $H_1$  ak  $\prod_{r=1}^n \frac{f(x_r, \theta_1)}{f(x_r, \theta_0)} \geq A$ ,
- inak pokračujeme vo výbere a prejdeme k  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$  pozorovaniam.

Kladné konštanty  $A, B$  volíme tak, aby test spĺňal predpísané pravdepodobnosti prvého a druhého druhu. Určenie týchto konštánt je uvedené v [7]. V sekvenčnej analýze sa zvykne voliť

$$B = \frac{\beta}{1-\alpha} \quad A = \frac{1-\beta}{\alpha},$$

ak chceme mať chyby prvého a druhého druhu  $\alpha, \beta$ .

Sekvenčný test vo všeobecnosti nemusí skončiť s pravdepodobnosťou 1. Rozsah výberu bude v tomto prípade náhodná premenná, ktorej rozdelenie je dané postupnosťou  $X_1, X_2, \dots$ . Tieto skutočnosti sú presnejšie definované v nasledujúcich definíciách, ktoré sme čerpali zo zdroja [2].



**Definícia 2.1.** Rozsah výberu  $N = \min\{n \in \mathbb{N} : \prod_{r=1}^n \frac{f(X_r, \theta_1)}{f(X_r, \theta_0)} \notin (B, A)\}$ . Stredný rozsah výberu je  $E[N, \theta]$ .

**Veta 2.2.** Ak je  $E[N, \theta] < \infty$ , tak  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(N > n, \theta) = 0$ , teda test končí s pravdepodobnosťou 1.

Sekvenčný Waldov test skončí s pravdepodobnosťou 1, viac je o tom možné nájsť v [2]. Pretože nás bude v ďalšom zaujímať, ako sa pri testovaní menia pravdepodobnosti prijatia nulovej hypotézy alebo alternatívy v závislosti na parametroch, tak nasleduje definícia popisujúca pojmy, ktoré budeme ďalej používať.

**Definícia 2.3.** Operačná charakteristika testu je funkcia  $L : \Theta \rightarrow [0, 1]$  definovaná predpisom  $L(\theta) = P[\text{prijať } H_0; \theta]$ . Podobne silofunkcia testu je funkcia  $P : \Theta \rightarrow [0, 1]$  definovaná predpisom  $P(\theta) = P[\text{prijať } H_1; \theta]$ .

Základný predpoklad sekvenčného testovania, ktoré je založené na vlastnostiach náhodnej prechádzky je nezávislosť pozorovaní náhodných premenných  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Náhodné premenné  $X_1, \dots, X_n$  sú združené nezávislé a funkcia hustoty pravdepodobnosti náhodného vektora  $(X_1, \dots, X_n)$  má tvar:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n; \theta) = f(x_0; \theta) f(x_1; \theta) \dots f(x_n; \theta)$$

Bežne sa s týmto predpokladom počíta, pretože je často splnený. Ako príklad môžu poslúžiť produkty vyrábané strojovou výrobou a vo veľkom množstve. Ak nevieme poradiť v akom dané produkty vychádzali zo stroja, môžeme predpokladať, že vybraná vzorka bude náhodná. Ak však uvažujeme aj poradiť vyrobených produktov, tak má zmysel uvažovať závislosť. Jeden z dôvodov závislosti pozorovaní je fakt, že stroje podliehajú istým zmenám a preto za sebou idúce produkty vykazujú istú závislosť. Stroje pracujú dlho a preto v istých časových intervaloch môžu vykazovať podobné odchýlky, čo by sa nestalo, keby boli skutočne nezávislé.

My si najskôr zhrnieme teóriu pre nezávislé pozorovania a potom uvedieme teoretické výsledky pre závislé pozorovania.

## 2.1 Sekvenčná analýza nezávislých pozorovaní

V nasledujúcej podkapitole si zhrnieme teoretické výsledky zo sekvenčnej analýzy o nezávislých pozorovaniach. Ako sme už spomínali, predpoklad nezávislosti je v realite

ťažko splniteľný, ale z matematického hľadiska sa s takýmito reťazcami ľahšie pracuje. Nasledujúce výsledky zo sekvenčnej analýzy pre nezávislé pozorovania uviedla autorka v [2].

Máme  $X_1, X_2, \dots$  postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných premenných s hustotou  $f(x, \theta)$ . Testujeme hypotézy:

$$H0 : \theta = \theta' \quad H1 : \theta = \theta'', \quad \theta' \neq \theta'' \quad (3)$$

V takomto prípade môže testovacia štatistika vyzerat' nasledovne, ak berieme pevný počet pozorovaní  $n$ .

$$Z_r = \ln \frac{f(X_r, \theta'')}{f(X_r, \theta')} \quad (4)$$

$$S_n = \ln \prod_{r=1}^n \frac{f(X_r, \theta'')}{f(X_r, \theta')} = \sum_{r=1}^n Z_r \quad (5)$$

Na základe výberu  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sa testuje podľa nasledovných pravidiel:

- prijímame  $H0$ , ak  $\sum_{r=1}^n Z_r \leq \ln B = \ln \frac{\beta}{1-\alpha} = b$ ,
- prijímame  $H1$ , ak  $\sum_{r=1}^n Z_r \geq \ln A = \ln \frac{1-\beta}{\alpha} = a$ ,
- inak pokračujeme vo výbere a pridáme  $x_{n+1}$  pozorovanie.

Nasledujú pomocné tvrdenia, ktoré vyústia do znenia Waldovej identity, ktorá je potrebná na odvodenie tvaru operačnej charakteristiky a stredného rozsahu výberu. Náhodná premenná  $N$  je rozsah výberu sekvenčného testu.

**Lema 2.4.** *Pre ľubovoľné  $\theta', \theta''$  také, že  $E[Z_r, \theta'] < \infty$ ,  $E[Z_r, \theta''] < \infty$  a ľubovoľný sekvenčný test s hypotézou  $H0$  oproti  $H1$  uvedený v (3) platí :*

$$E\left[\prod_{r=1}^N \frac{f(X_r, \theta'')}{f(X_r, \theta')} \mid H0 \text{ prijímame}; \theta'\right] = \frac{L(\theta'')}{L(\theta')} ,$$

$$E\left[\prod_{r=1}^N \frac{f(X_r, \theta'')}{f(X_r, \theta')} \mid H1 \text{ prijímame}; \theta'\right] = \frac{P(\theta'')}{P(\theta')} .$$

**Veta 2.5.** *Nech  $X_1, X_2, \dots$  sú nezávislé rovnako rozdelené s hustotou  $f(x, \theta)$ . Nech  $U(X_1)$  je ľubovoľná štatistika taká, že  $E[U(X_1); \theta] < \infty$ . Nech náhodná premenná  $N$  je rozsah výberu sekvenčného testu, pričom  $E[N, \theta] < \infty$  pre každú  $\theta$ . Potom*

### 1. Waldova identita:

$$E\left[\sum_{r=1}^N U(X_r); \theta\right] = E[U(X_1); \theta] \cdot E[N; \theta],$$

Ak  $E[U(X_1); \theta] = 0$  a  $E[U(X_1)^2; \theta] < \infty$  tak

### 2. Waldova indentita:

$$E[(\sum_{r=1}^N U(X_r))^2; \theta] = E[U(X_1)^2; \theta].E[N; \theta].$$

Ďalej si zdefinujeme momentovú vytvárajúcu funkciu. Jej užitočnosť spočíva v tom, že na to, aby náhodná premenná mala všetky momenty konečné, stačí, aby bola táto funkcia konečná v nejakom okolí 0. Navyiac z nej vieme tieto momenty ľahko dopočítať.

**Definícia 2.6.** *Nech  $X$  je náhodná premenná. Potom funkcia  $M : \mathbb{R} \rightarrow [0; \infty]$  definovaná ako:*

$$M(t) = E[e^{tX}]$$

*je momentová vytvárajúca funkcia náhodnej premennej  $X$ .*

Zhrnieme si niektoré jej vlastnosti.

**Veta 2.7.** *Nech  $X$  je náhodná premenná splňajúca  $M(t) = E[e^{tX}] < \infty$ , pre  $t = \pm b$ ,  $b > 0$ . Potom  $M(t) < \infty$ , pre  $t \in (-b, b)$ ,*

*$M(t)$  je spojitá a konverná pre  $t \in (-b, b)$ ,*

*$M(t)$  má deriváciu ľubovoľného rádu v  $(-b, b)$ ,*

*$E[X^z] < \infty, \forall z \geq 1$  a platí  $E[X^z] = M^{(z)}(0)$ .*

Špeciálne v sekvenčnej analýze je užitočná nasledujúca vlastnosť, pretože ju využijeme pri hľadaní riešenia rovnice uvedenej neskôr.

**Lema 2.8.** *Nech  $X$  má  $M(t) = E[e^{tX}] < \infty$ , pre  $\forall t \in \mathbb{R}$ .*

*Potom, ak  $P[X > 0] > 0, P[X < 0] > 0$ , tak*

*ak  $E[X] \neq 0$ , tak existuje práve jedno  $t_0 \neq 0$  také, že  $M(t_0) = 1$ ,*

*ak  $E[X] = 0$ , tak  $M(t) = 1$  a z toho vyplýva, že riešením je  $t = 0$ .*

Predchádzajúce tvrdenia boli potrebné, aby sme mohli uviesť znenie základnej identity sekvenčnej analýzy.

### **Základná (Waldova) identita sekvenčnej analýzy**

Nech  $Z_1, Z_2, \dots$  sú nezávislé a rovnako rozdelené náhodné premenné také, že

$$M(t) = E[e^{tZ_1}] < \infty, M(t) \geq 1.$$

Nech  $N$  je rozsah výberu sekvenčného Waldovho testu končiaceho s pravdepodobnosťou 1. Potom

$$E[e^{tS_N} M(t)^{-N}] = 1, \tag{6}$$

kde  $S_N = \sum_{r=1}^N Z_r$ . Wald túto identitu použil na odvodenie aproximácie operačnej charakteristiky a stredného rozsahu výberu.

Budeme predpokladať:

$$P[Z_r > 0; \theta] > 0, P[Z_r < 0; \theta] > 0 \Rightarrow \exists! t_0 \neq 0, M(t_0) = 1 \Rightarrow E[e^{t_0 S_N}; \theta] = 1.$$

Podrobnejším rozpísaním predošlej rovnice sa dostaneme k aproximovanému tvaru operačnej charakteristiky.

$$\begin{aligned} E[e^{t_0 S_N}; \theta] &= E[e^{t_0 S_N} | \text{prijímam H0}; \theta] \cdot P[\text{prijímam H0}; \theta] + \\ &+ E[e^{t_0 S_N} | \text{prijímam H1}; \theta] \cdot P[\text{prijímam H1}; \theta] = \\ &= E[e^{t_0 S_N} | S_N \leq b; \theta] \cdot L(\theta) + E[e^{t_0 S_N} | S_N \geq a; \theta] \cdot (1 - L(\theta)) = 1 \end{aligned}$$

Členy v predchádzajúcej rovnici si môžeme aproximovať. Toto zjednodušenie je možné, pretože ak si predstavíme  $S_N$  ako celé číslo, tak podmienka  $S_N \leq b$  bude splnená najskôr v hodnote  $S_N = b$ . V skutočnosti  $S_N$  nie je celé číslo, ale hranica  $b$  sa väčšinou presahuje len zanedbateľne, preto stačí uvažovať nasledovné tvary:

$$E[e^{t_0 S_N} | S_N \leq b; \theta] \approx e^{t_0 b} \quad E[e^{t_0 S_N} | S_N \geq a; \theta] \approx e^{t_0 a} \quad (7)$$

Takto sa dostávame k rovnici:

$$1 \approx e^{t_0 b} L(\theta) + e^{t_0 a} (1 - L(\theta))$$

Odtiaľ je už zrejmé vyjadrenie aproximácie operačnej charakteristiky

$$L(\theta) \approx \frac{1 - e^{t_0 a}}{e^{t_0 b} - e^{t_0 a}}, \text{ ak } E[Z_r; \theta] \neq 0$$

Keby sme si podobne dopodrobna rozpísali tvar  $E(N, \theta)$ , dospeli by sme k aproximovanému tvaru:

$$E(N, \theta) \approx \frac{b \cdot L(\theta) + a \cdot (1 - L(\theta))}{E[Z_1, \theta]}, \text{ ak } E[Z_r; \theta] \neq 0,$$

pretože  $E[N, \theta] = \frac{E[S_N, \theta]}{E[Z_1, \theta]}$  z Waldovej identity.

## 2.2 Sekvenčná analýza závislých pozorovaní

Závislými pozorovaniami sa zaoberali autori v článkoch [5],[6]. Keď sa zaoberáme sekvenčnou analýzou v prípade pre závislé pozorovania, uvažujeme Markovovskú závislosť kedy to, v akom stave sa reťazec nachádza v čase  $n$ , závisí len od toho, v akom stave sa reťazec nachádzal v čase  $n - 1$ . Pre takéto procesy vyzerá združené rozdelenie pravdepodobnosti pre pozorovania  $x_0, x_2, \dots, x_n$  nasledovne:

$$p(x_0, x_2, \dots, x_n; \theta) = p(x_0, \theta)p(x_1|x_0; \theta) \dots p(x_n|x_{n-1}; \theta)$$

Predpokladáme, že za sebou idúce pozorovania tvoria Markovov reťazec. Je možné rozšírenie, ak uvažujeme, že závislosť medzi pozorovaniami je daná Markovovou vlastnosťou vyššieho rádu. Týmto prípadom sa my však zaoberať nebudeme. Ďalej uvažujeme, že je známy tvar matice prechodu, ktorá môže byť závislá od jednorozmerného alebo viacrozmerného parametra  $\theta = (\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^k) \in \Theta \subset \mathbb{R}^k, k \geq 1$ . Úlohou je testovať hypotézu

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad H_1 : \theta = \theta_1, \quad \theta_0 \neq \theta_1 \quad (8)$$

Uvažujeme postupnosť pozorovaní  $\mathbf{S} : x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ . Vierohodnosť pozorovaní pri jednotlivých parametroch má nasledujúci tvar:

$$P_{in}(\mathbf{S}) = p(x_0|\theta_i) \prod_{r=1}^n p(x_r|x_{r-1}, \theta_i) (i = 0, 1)$$

Nech

$$Z_0 = \ln \frac{p(x_0|\theta_1)}{p(x_0|\theta_0)}, \quad Z_r = \ln \frac{p(x_r|x_{r-1}, \theta_1)}{p(x_r|x_{r-1}, \theta_0)}, \quad r \geq 1.$$

Potom Waldov test založený na podiele vierohodnosti, ktorý testuje hypotézy v (8)

- prijíma  $H_0$ , ak  $\sum_{r=0}^n Z_r \leq \ln B$ ,
- prijíma  $H_1$ , ak  $\sum_{r=0}^n Z_r \geq \ln A$ ,
- inak pokračuje vo výbere a prejde k pozorovaniam  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ .

Pri nezávislých pozorovaniach boli operačná charakteristika a stredný rozsah výberu odvodené pomocou Waldovej identity. Pre Markovovsky závislé reťazce bola v [5] odvodená analógia Waldovej identity, čo je výraz (6) pre premenné typu

$$Z_r = h(X_{r-1}, X_r), \quad r \geq 1$$

a následne boli odvodené operačná charakteristika a stredný rozsah výberu sekvenčného testu. Uvažujeme len prípad, kedy pozorovania tvoria konečný Markovov reťazec. V [5] uviedli zaujímavé výsledky, napríklad, že nám stačí poznať najväčšie vlastné číslo matice prechodu spojené s asymptotickou formulou, pretože ho používame namiesto  $M(t)$ , čo je momentová vytvárajúca funkcia použitá v nezávislom prípade. Je to kvôli tomu, že za určitých predpokladov majú takmer rovnaké vlastnosti.

Teraz uvedieme výsledky potrebné na odvodenie analógie Waldovej identity. Táto časť teórie bola čerpaná z článku [5].

Uvažujeme Markovov reťazec, ktorý sa môže nachádzať v  $s$  konečných možných stavoch  $T_1, T_2, \dots, T_s$  a jeho matica prechodu je  $\mathbf{P} = (p_{ij})$ , kde

$$p_{ij} = P\{X_{r+1} = T_j | X_r = T_i\} \text{ pre } (r \geq 0).$$

Teraz uvedieme známe výsledky z teórie matíc a Markovových reťazcov, ktoré budeme potrebovať:

(i) Pre každú stochastickú maticu  $\mathbf{P}$ , pre každé  $n$  z prirodzených čísel, môžeme maticu  $P^n$  vyjadriť pomocou vlastných čísel  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  nasledovne:

$$P^n = \sum_{i=1}^s \lambda_i^n \mathbf{s}_i \mathbf{t}_i',$$

kde  $\mathbf{s}_i, \mathbf{t}_i'$  sú stĺpcové a riadkové vektory prislúchajúce vlastnej hodnote  $\lambda_i$  stochastickej matice  $\mathbf{P}$ . Vektory sú naškálované tak, aby  $\mathbf{t}_i' \mathbf{s}_i = 1$ , pre  $(i = 1, 2, \dots, s)$ . Ak označíme  $\mathbf{p}_0$  počiatočné rozdelenie pravdepodobnosti a  $\mathbf{p}_n$  pravdepodobnosť v  $n$ -tom stave tak

$$\mathbf{p}_n = P^n \mathbf{p}_0 = \sum_{i=1}^s \alpha_i \lambda_i^n \mathbf{s}_i, \text{ kde } \alpha_i = \mathbf{t}_i' \mathbf{p}_0$$

(ii) Matica  $\mathbf{P}$  má vždy vlastnú hodnotu  $\lambda_1 = 1$  a príslušný vektor  $\mathbf{t}_1' = (1, 1, \dots, 1)$  a  $\alpha_1 = 1$ , teda pre regulárny Markovov reťazec je takéto vlastná hodnota jednonásobná a zvyšné vlastné hodnoty sú v absolútnej hodnote menšie ako 1.

(iii) Uvažujme postupnosť náhodných premenných  $\{Z_r\}$  takých, že

$$Z_r = h_{ij}, \text{ ak } X_{r-1} = T_i, X_r = T_j, (r \geq 1)$$

$$S_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n.$$

Označme  $P(t) = (p_{ij} e^{th_{ij}})$ , ktorá vznikla upravením pôvodnej matice prechodu a jednonásobné vlastné hodnoty tejto matice budú  $\lambda_i(t)$ , pre  $i = 1, 2, \dots, s$ . Naviac

$$\psi_i(t) = \mathbf{t}_1' \mathbf{s}_i(t), \quad \alpha_i(t) = \mathbf{t}_i'(t) \mathbf{p}_0,$$

Teraz už vektory  $\mathbf{s}_i(t)$ ,  $\mathbf{t}_i'(t)$  prislúchajú vlastnej hodnote  $\lambda_i(t)$  upravenej matice prechodu. Potom si vieme strednú hodnotu rozpísať podrobnejšie v tvare:

$$\Phi_n(t) = E[e^{tS_n}] = \mathbf{t}_1' P^n(t) \mathbf{p}_0 = \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) \lambda_i^n(t) \psi_i(t) \quad (9)$$

Všade predpokladáme, že Markovov reťazec je kladný a že podmienené rozdelenie  $Z_r$  dané  $X_{r-1} = T_i$  je nede degenerované aspoň pre jedno  $T_i$ . Tiež predpokladáme, že  $E[e^{Z_r t} | X_{r-1} = T_i]$  existuje pre všetky  $T_i$  a pre všetky reálne  $t$ . Ďalej je v článku [5] možné nájsť lemy, ktoré tvrdia nasledovné.

Pretože  $\lambda_1(t) > |\lambda_i(t)|$ , pre  $i = 2, 3, \dots, s$  asymptoticky pre  $N \rightarrow \infty$ :

$$\Phi_N(t) \approx \alpha_1(t) \lambda_1^N(t) \psi_1(t) \quad (10)$$

**Lema 2.9.** Ak sú  $\lambda_i'(t), \lambda_i''(t)$  konečné pre  $i=1, 2, \dots, s$ , potom je  $\lambda_1''(t) > 0$ , pre  $\forall t \in \mathbb{R}$

**Lema 2.10.** Pre Markovove reťazce, ktorých počiatočné pravdepodobnostné rozdelenie  $\mathbf{p}_0$  je rovnaké ako pravdepodobnostné rozdelenie v stacionárnom stave  $\mathbf{s}_1$  platí

$$\begin{aligned} \text{pre } N \rightarrow \infty : \quad E[S_N] &= N \lambda_1'(0) \\ E[S_N^2] &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Nasledujúca lema tvrdí, že test potrebuje na prijatie niektorej z hypotéz konečný počet pozorovaní a pravdepodobnosť, žeby sa počet pozorovaní blížil k nekonečnu je takmer nulová, teda pravdepodobnosť že test skončí je 1.

**Lema 2.11.** Uvažujme hranice  $b < 0, a > 0$ . Označme  $N$  ako najmenšie celé číslo, pri ktorom súčet  $S_N$  neleží vo vnútri intervalu  $(b, a)$ , teda  $S_N \notin (b, a)$ . Potom pre  $s$  konečné

$$N_0^s P[N \leq N_0] \rightarrow 0, \quad \text{pre } N_0 \rightarrow \infty.$$

Nasledujúca lema nám zaručuje existenciu jediného riešenia.

**Lema 2.12.**

- Ak  $\lambda_1(t) \rightarrow \infty$  pre  $t \rightarrow \pm\infty$
- ak sú  $\lambda_i'(t), \lambda_i''(t)$  konečné pre  $\forall t$  pre  $i=1, 2, \dots, s$
- a ak  $\lambda_1'(0) \neq 0$ , potom existuje jediné  $t_0 \neq 0$ , pre ktoré platí  $\lambda_1(t_0) = 1$ .

V časti 3.2 si na konkrétnom jednoduchom príklade slovne rozoberieme, čo tieto lemy tvrdia. Teraz nasleduje analógia Waldovej lemy.

### Analógia Waldovej identity

Nech  $S_N = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N$  a nech  $N$  označuje najmenšie celé číslo, pre ktoré  $S_N \notin (b, a)$  potom

$$E[e^{S_N t} \lambda_1^{-N}(t) \beta(t|X_N)] = \alpha_1(t), \quad (11)$$

pre  $\forall t \in \mathbb{R} : \lambda_1(t) \geq 1$ . Kde  $\beta(t|X_N)$  je  $j$ -ty prvok  $\mathbf{t}'_1(t)$ , ak  $X_N = T_j$ .

**Lema 2.13.** *Ak pre všetky reálne  $t$  z uzavretého intervalu  $\mathbb{I}$ , všetky derivácie  $\lambda_1(t)$  a všetky prvky vektora  $\mathbf{t}'_1(t)$  existuje  $\lambda_1(t) \geq 1$ , potom je rovnica (11) diferencovateľná vzhľadom na  $t \in \mathbb{I}$  ľubovoľný počet krát.*

Použitím analógie Waldovej identity a lemy, bola odvodená pravdepodobnosť, že  $S_N$  dosiahne jednu hranicu skôr ako druhú. Ak sa hranica dosiahla práve vtedy, keď sa ukončilo testovanie, volíme  $t = t_0$  v analógii Waldovej identity. Majúc stále na pamäti, že testujeme hypotézy v (8), vieme odvodiť aproximovaný tvar operačnej charakteristiky, ak vychádzame z tvaru identity (11). Test skončí, ak sa nadobudne hodnota  $a$  alebo  $b$  a vieme, že  $B = e^b$ ,  $A = e^a$ . Potom

$$\begin{aligned} E[e^{S_N t} \lambda_1^{-N}(t) \beta(t|X_N)] &= \alpha_1(t) \\ e^{bt} \lambda_1^{-N}(t) E'_b P[S_N = b] + e^{at} \lambda_1^{-N}(t) E'_a (1 - P[S_N = b]) &= \alpha_1(t) \end{aligned}$$

a keďže  $t = t_0$  vieme, že platí  $\lambda_1(t) = 1$ . Bolo už jednoduché vyjadriť tvar operačnej charakteristiky, ktorý je už aproximovaný, keďže sme uvažovali, že presne dosiahneme hranice ukončenia testu.

$$P[S_N = b] = \frac{e^{at} E'_a - \alpha_1(t)}{e^{at_0} E'_a - e^{bt} E'_b} = P[\text{prijetia} \quad H_0] = L(\theta) \quad (12)$$

kde  $E'_a = E[\beta(t|X_N)|S_N = a]$ ,  $E'_b = E[\beta(t|X_N)|S_N = b]$ . Zvyčajne je však tvar  $E'_a$ , a  $E'_b$  zložitý, keďže závisí od  $X_N$ , ktoré nie vždy poznáme. Preto je postačujúce používať aproximovanú formu operačnej charakteristiky. Táto forma pripúšťa, že sa test rozhodne, ktorú hypotézu prijať, ak testovacia štatistika bude približne na hraniciach, nemusí byť úplne presne. Napriek tomu je to zanedbateľný rozdiel oproti skutočnej hodnote a tak je možné použiť tento tvar:

$$L(\theta) \approx \frac{A^t - 1}{A^t - B^t} \quad (13)$$



Stredný rozsah výberu  $E(N, \theta)$  bol odvodený zderivovaním analógie Waldovej identity podľa  $t$  pri  $t = 0$ .

$$E(N, \theta) \approx \frac{E[S_N] + \alpha'_1(0) - E[\beta'(0|X_N)]}{\lambda'_1(0)}, (\lambda'_1(0) \neq 0) \quad (14)$$

### 2.2.1 Sekvenčná analýza závislých pozorovaní v prípade zložených hypotéz

V článku [6] sa autori zaoberali prípadom, keď je potrebné testovať zložené hypotézy a venovali sa tomu, za akých podmienok je možné prejsť na jednoduché hypotézy so znamienkom rovná sa. Uvažovali, že  $\pi = (X_r^1, X_r^2, r \geq 0)$  je dvojrozmerný Markovov reťazec, definovaný na priestore stavov  $S = \{1, \dots, s\}$ . Matice prechodu  $\mathbf{P}_i, i = 1, 2$  majú rovnaký tvar, líšia sa len v parametri  $\theta$ . Cieľom bolo testovať:

$$H0 : \theta_1 < \theta_2 \quad H1 : \theta_1 > \theta_2, \quad (15)$$

za predpokladu, že  $\theta_1 < \theta_2$ . V nasledujúcej časti sme zhrnuli výsledky uvedené v [6]. Uviedli predpoklady potrebné na to, aby postačovalo testovať jednoduchú hypotézu:

$$H0^* : \theta_1 = \theta_1^0, \theta_2 = \theta_2^0 \quad H1^* : \theta_1 = \theta_1^0, \theta_2 = \theta_1^0. \quad (16)$$

Nech sú  $P_i(t), i = 1, 2$  matice, ktoré vznikli upravením matíc prechodu pre prvý a druhý reťazec, ak by sme chceli testovať hypotézy v (16) a  $Q(t)$  je odvodená od matice prechodu prislúchajúcej testom v (15). Teda  $Q(t) = (q_{ij}(t, \theta_1, \theta_2))$  je matica pre dvojrozmerný Markovov reťazec  $\pi = (X_r^1, X_r^2, r \geq 0)$ .

Zrejme platí, že  $Q(t) = P_2(t) \otimes P_1(t)$ . Potom autori tvrdia, že platí:

$$\gamma(t, \theta_1, \theta_2) = \mu(t, \theta_1) \lambda(t, \theta_2), \quad (17)$$

kde  $\mu, \lambda$  sú najväčšie vlastné čísla upravených matíc prechodu  $P_1(t)$  a  $P_2(t)$  a  $\gamma(t, \theta_1, \theta_2)$  je najväčšie vlastné číslo matice  $Q(t)$ . S takto volenými maticami a vlastnými hodnotami sa dá overiť, že vyšlo

$$\lambda(t, \theta_2) = \mu_1(-t, \theta_2), \quad (18)$$

pre  $\forall t \in R$ . Vidíme závislosť funkcií  $\gamma(t, \theta_1, \theta_2), \lambda(t, \theta_2)$  na tvare funkcie  $\mu(t, \theta_1)$ .

Nasledujúce tvrdenia naznačili, že v prípade zloženej hypotézy si vlastné číslo matice prechodu  $\gamma(t, \theta_1, \theta_2)$  vieme vyjadriť pomocou vlastných čísel matíc prechodu z jednoduchšej hypotézy, dokonca ho vieme vyjadriť len pomocou jednej premennej a to  $\mu(t, \theta_1)$ .

Vďaka tomu stačí overiť, či je derivácia funkcie  $\mu(t, \theta_1)$  v bode  $t = 0$  monotónna a bude zaručené, že pri hľadaní nenulového riešenia rovnice vo vete 2.15 budú dvojice  $(\theta_1, \theta_2)$  spĺňať buď nerovnosť  $\theta_1 < \theta_2$  alebo  $\theta_1 > \theta_2$ . Tieto výsledky zaručili, že následne je možné uvažovať len zjednodušené hypotézy v (16). Takže ak sú splnené predpoklady spomenuté nižšie, vieme aj zloženú hypotézu (15) riešiť za pomoci výsledkov uvedených v časti 2.2.

**Lema 2.14.** *Ak označíme  $\phi(t, \theta_2, \theta_1)$  ako najväčšie vlastné číslo matice  $Q^*(t)$ , ktorá je definovaná podobne ako  $Q(t)$  akurát s vymenenými hodnotami  $\theta_1, \theta_2$ . Potom  $\phi(t, \theta_2, \theta_1) = \gamma(-t, \theta_2, \theta_1)$ .*

Predchádzajúca lema naznačila, že znamienko pri  $t$  rozhodne medzi hypotézami  $(\theta_1, \theta_2)$  a  $(\theta_2, \theta_1)$ . A tiež, že ak  $t = t_0$  je koreň rovnice  $\gamma(t, \theta_1, \theta_2) = 1$ , tak potom  $t = -t_0$  je koreň rovnice  $\gamma(t, \theta_2, \theta_1) = 1$ . Preto jediná hodnota pri ktorej je  $\gamma(t, \theta, \theta) = 1$  je  $t = 0$ .

**Veta 2.15.** *Nech je  $t_0$  jediné nenulové riešenie rovnice*

$$\gamma(t, \theta_1, \theta_2) = 1.$$

*Potom pre každú dvojicu  $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta : t_0 \gamma'(0, \theta_1, \theta_2) < 0$ .*

**Veta 2.16.** *Nech je  $\mu(t, \theta)$  diferencovateľná vzhľadom na  $t$ , v  $t = 0$  pre  $\forall \theta$ . Uvažujeme také dvojice  $(\theta_1, \theta_2)$ , že  $\theta_1 < \theta_2$ . Potom nutná a postačujúca podmienka toho, že  $t_0$  má rovnaké znamienko pre všetky body  $(\theta_1, \theta_2)$  je, že  $\mu'(0, \theta)$  je monotónna v  $\theta$ .*

**Dôsledok 2.17.** *Nech  $\mu'(0, \theta)$  je monotónna v  $\theta$ . Nech  $\Theta = \{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta^* | L(t) = c\}$ , kde je  $L(t)$  operačná charakteristika,  $t = t(\theta_1, \theta_2)$  je jediné nenulové riešenie rovnice  $\gamma(t, \theta_1, \theta_2) = 1$  a  $c$  je konštanta. Potom dvojice  $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta$  spĺňajú len jednu nerovnosť a to buď  $\theta_1 > \theta_2$  alebo  $\theta_2 > \theta_1$ .*

### 3 Sekvenčné testovanie

V nasledujúcej kapitole sa budeme venovať aplikácií teórie zhrnutej v 2. kapitole. Najskôr si zostrojíme test, v ktorom uvažujeme jeden reťazec ako postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných premenných. Potom si uvedieme, čo je Bonus Malus model často používaný v poisťovniach na modelovanie nehodovosti poistencov. Ďalej uvedieme testy parametrov Markovovho reťazca, v ktorom uvažujeme jeden reťazec a aj test v prípade porovnávania dvoch parametrov v dvoch Markovových reťazcoch.

V tejto práci sme nepoužívali reálne dáta. Pozorovania sme získavali generovaním z príslušných rozdelení v Matlabe. Vzhľadom na to, že nás zaujímalo, ako sa testy správajú pri zadaných testovacích parametroch, bolo potrebné vedieť, aké sú skutočné parametre rozdelení. Takže v našom prípade nebolo nutné používať reálne dáta, keďže našim cieľom bolo skúmať priebeh testu a porovnávať výsledky a nie vyvodzovať závery pre počiatočné údaje.

#### 3.1 Sekvenčné testovanie parametra ak sú pozorovania nezávislé

V tejto časti si na jednoduchom príklade vyskúšame teóriu z druhej kapitoly konkrétne pre nezávislé pozorovania. Uvažujeme postupnosť  $X_1, X_2, \dots$  nezávislých, rovnako rozdelených náhodných premenných s Exponenciálnym rozdelením s parametrom  $\theta$ . Chceme testovať hypotézu:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad H_1 : \theta = \theta_1 \quad \theta_0 < \theta_1 \quad (19)$$

Vieme, že hustota exponenciálneho rozdelenia má tvar:  $f(\theta) = \theta e^{-\theta x}$ , pre  $x \geq 0$ , inak je  $f(\theta) = 0$ . Naším cieľom bude zostrojiť test na testovanie parametra a vypočítať operačnú charakteristiku  $L(\theta)$  pre viaceré hodnoty  $\theta$ . Zostrojíme si testovaciu štatistiku:

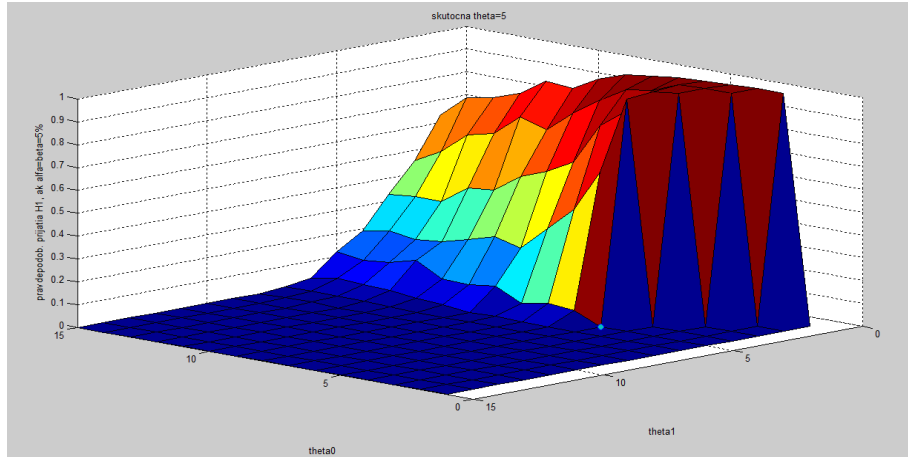
$$\sum_{i=1}^n Z_i = \ln \prod_{i=1}^n \frac{f(X_i, \theta_1)}{f(X_i, \theta_0)} = \ln \prod_{i=1}^n \frac{\theta_1 e^{-\theta_1 X_i}}{\theta_0 e^{-\theta_0 X_i}} = \sum_{i=1}^n \ln \frac{\theta_1}{\theta_0} e^{-X_i(\theta_1 - \theta_0)}.$$

Na základe výberu  $X_1, X_2, \dots, X_n$

- prijímame  $H_0$ , ak  $\sum_{i=1}^n \ln \frac{\theta_1}{\theta_0} - X_i(\theta_1 - \theta_0) \leq \ln \frac{\beta}{1-\alpha}$
- prijímame  $H_1$ , ak  $\sum_{i=1}^n \ln \frac{\theta_1}{\theta_0} - X_i(\theta_1 - \theta_0) \geq \ln \frac{1-\beta}{\alpha}$ ,
- inak pokračujeme vo výbere.

Pre takto zostrojený test si môžeme graficky znázorniť simulačne vypočítanú pravdepodobnosť prijímania  $H_1$  pri meniacich sa hodnotách nulovej a alternatívnej hypotézy,

ak skutočná hodnota parametra bude  $\theta = 5$  a pravdepodobnosti  $\alpha$  aj  $\beta$  sú 5 %.



**Obr. 1:** Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H1 pri  $\theta = 5$ , ak  $\alpha = \beta = 5\%$

Na obrázku 1. vidíme, že ak hodnota v nulovej hypotéze je blízka skutočnej hodnote 5, tak "test sa nevie dobre rozhodnúť", ktorú hypotézu prijať. Zatiaľ, čo keď nulová hypotéza obsahuje hodnoty parametra vzdialené od skutočnej hodnoty a pozrieme sa ako dopadol test napríklad pri testovaní hypotéz

$$H_0 : \theta = 5 \quad H_1 : \theta = 10,$$

tak test takmer iste príjme hypotézu  $H_0$ .

Ďalej bolo naším cieľom vypočítať hodnotu operačnej charakteristiky  $L(\theta)$ . Tento výpočet bolo možné vyrátať dvoma spôsobmi. V dostupnej literatúre sú odvodené vzorce na aproximáciu operačnej charakteristiky, alebo vieme hodnoty operačnej charakteristiky zrátať aj simulačne. Použili sme obidva spôsoby a graficky sme ich znázornili, aby sme vedeli porovnať výsledky.

Najskôr sme sa na to pozreli cez aproximáciu, ktorej tvar je možné nájsť v [2]. Potrebovali sme nájsť také  $t(\theta) \neq 0$  :  $E[e^{t(\theta)Z}; \theta] = 1$ ,

$$\text{pričom } Z = \ln \frac{f(X, \theta_1)}{f(X, \theta_0)} = \ln \frac{\theta_1 e^{-\theta_1 X}}{\theta_0 e^{-\theta_0 X}} = \ln \frac{\theta_1}{\theta_0} - X(\theta_1 - \theta_0).$$

$$\begin{aligned} E[e^{t(\theta)Z}; \theta] &= \int_0^\infty e^{t[\ln \frac{\theta_1}{\theta_0} - X(\theta_1 - \theta_0)]} \theta e^{-\theta X} dX = \int_0^\infty \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^t e^{-tX(\theta_1 - \theta_0)} \theta e^{-\theta X} dX = \\ &= \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^t \theta \left[ \frac{e^{-X[t(\theta_1 - \theta_0) + \theta]}}{-t(\theta_1 - \theta_0) - \theta} \right]_0^\infty = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^t \frac{\theta}{\theta + t(\theta_1 - \theta_0)} = 1. \end{aligned}$$

Hľadali sme nenulový koreň  $t(\theta)$  rovnice:  $\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^t \theta = \theta + t(\theta_1 - \theta_0)$ .

Následne bolo možné dosadiť do aproximácie pre operačnú charakteristiku:

$$L(\theta) \approx \frac{1 - e^{t(\theta)a}}{e^{t(\theta)b} - e^{t(\theta)a}}, \text{ kde } a = \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}, b = \ln \frac{\beta}{1 - \alpha}. \text{ Toto sme naprogramovali a výsledky}$$

zobrazujeme pre  $\alpha = \beta = 5\%$ . Na obrázku 2. sú zobrazené aproximované hodnoty operačnej charakteristiky  $L(\theta)$  pre  $\theta \in [0.25, 15.5]$  za predpokladu, že sa testujú hypotézy

$$H_0 : \theta = 5 \quad H_1 : \theta = 10. \quad (20)$$

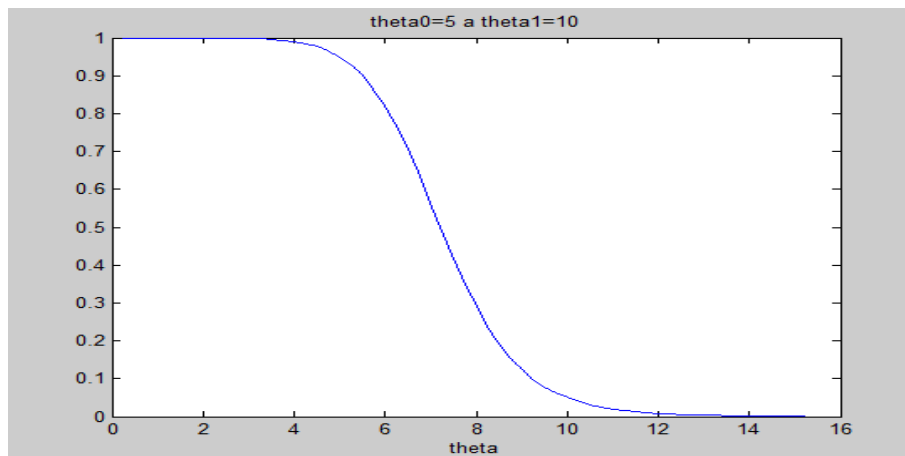
A na obrázku 4. sú zobrazené hodnoty operačnej charakteristiky  $L(\theta)$  pre  $\theta \in [0.25, 15.5]$  za predpokladu, že sa testujú hypotézy

$$H_0 : \theta = 1 \quad H_1 : \theta = 13. \quad (21)$$

Ako sme spomínali v druhej kapitole, operačná charakteristika vyjadruje pravdepodobnosť prijatia  $H_0$  pri danej hodnote  $\theta$ .

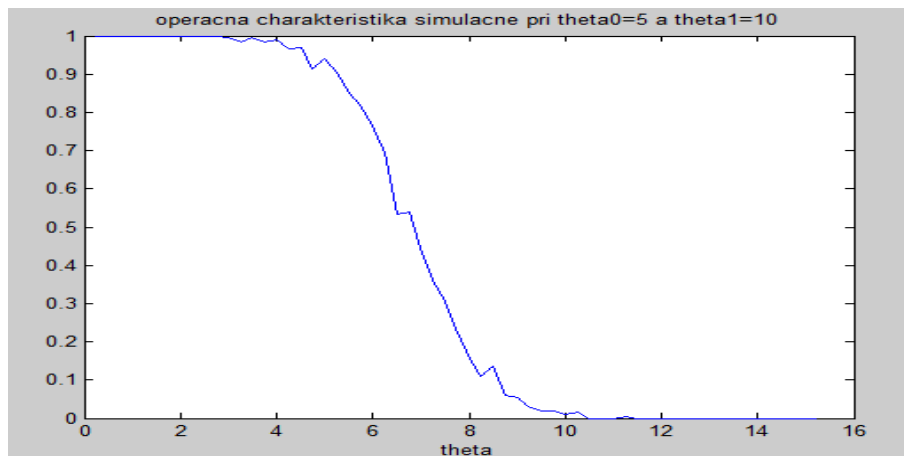
Druhou možnosťou bolo zrátať operačnú charakteristiku v rôznych hodnotách simulačne. To znamená, že sme pri rovnakých parametroch "zbehli" test 200 krát a pravdepodobnosť prijatia  $H_0$ , pri danej hodnote parametra  $\theta$  vieme vyjadriť ako (počet prijatí hypotézy  $H_0$ )/200. Na obrázku 3. sú zobrazené simulačne zrátané hodnoty operačnej charakteristiky  $L(\theta)$  pre  $\theta \in [0.25, 15.5]$  za predpokladu, že sa testujú hypotézy (20). A na obrázku 5. sú zobrazené opäť simulačne zrátané hodnoty operačnej charakteristiky  $L(\theta)$  pre  $\theta \in [0.25, 15.5]$  za predpokladu, že sa testujú hypotézy (21).

Môžeme vidieť, že výsledok cez aproximáciu a simuláciu je dosť podobný. Sklon aj

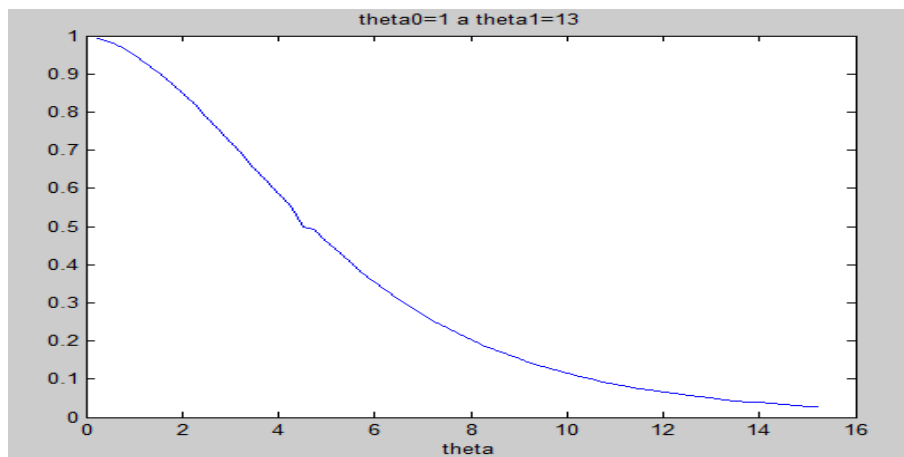


**Obr. 2:** Aproximovaná operačná charakteristika pri  $\theta_0 = 5, \theta_1 = 10$  ak  $\alpha = \beta = 5\%$

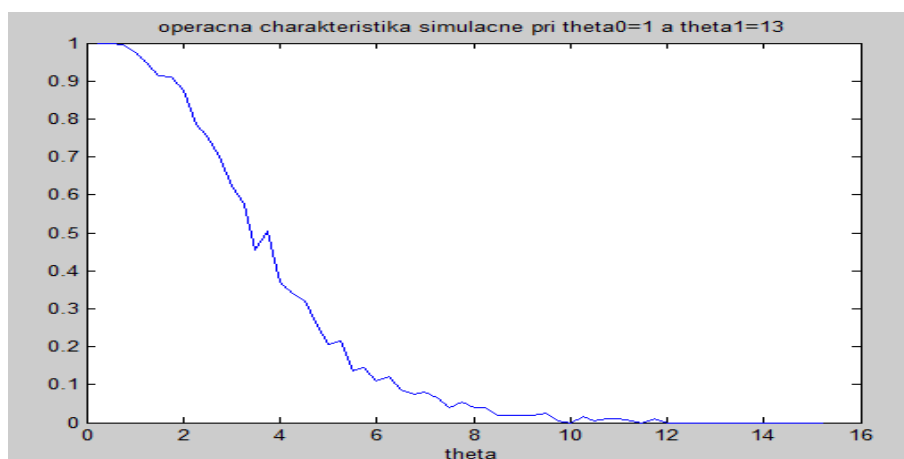
tvar krivky sú rovnaké, akurát aproximácia je hladká krivka, zatiaľ čo simulácia nie je. Hodnoty sa nachádzajú v rozmedzí 0-1, čo sú rozumné výsledky, keďže operačná charakteristika vyjadruje pravdepodobnosť. Takže s takýmto tvarom výsledných grafov sme boli spokojní.



**Obr. 3:** Simulácia operačnej charakteristiky pri  $\theta_0 = 5, \theta_1 = 10$  ak  $\alpha = \beta = 5\%$



**Obr. 4:** Aproximovaná operačná charakteristika pri  $\theta_0 = 1, \theta_1 = 13$  ak  $\alpha = \beta = 5\%$

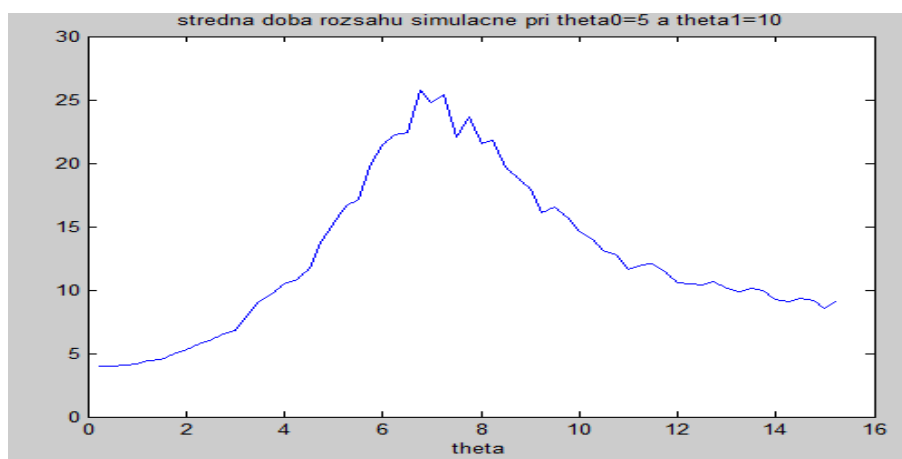


**Obr. 5:** Simulácia operačnej charakteristiky pri  $\theta_0 = 1, \theta_1 = 13$  ak  $\alpha = \beta = 5\%$

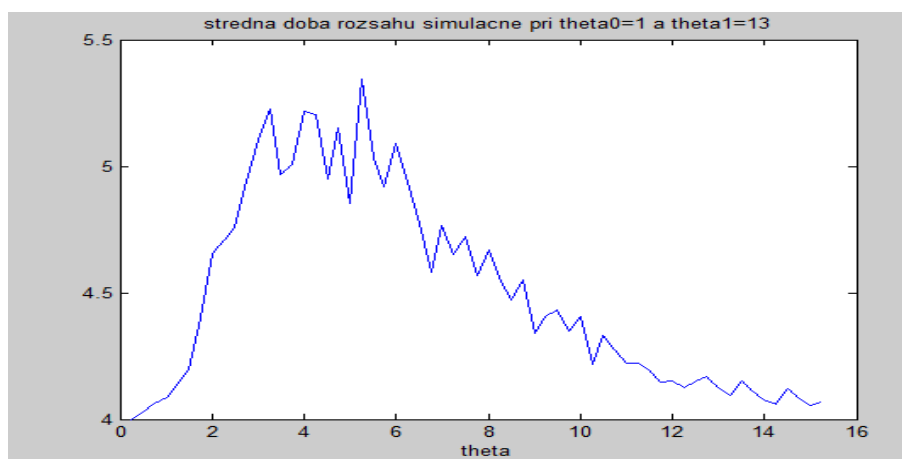
Ďalej sme si vedeli overiť, či je výsledný graf správny, pretože by malo platiť, že  $L(\theta_0) = 1 - \alpha$ . Takže na obrázkoch 2. a 3. sme očakávali, že operačná charakteristika pri

hodnote parametra  $\theta = 5$  sa mala nachádzať vo výške 0.95. Vidíme, že tieto očakávania sa naplnili a podobnú úvahu bolo možné zopakovať aj pri obrázkoch 4. a 5. avšak teraz pri hodnote parametra  $\theta = 1$ , kde to opäť ukázalo uspokojivé výsledky.

Nakoniec sme ešte simulačne vypočítali hodnoty strednej doby rozsahu, ktoré sú zobrazené na obrázkoch 6. a 7.



**Obr. 6:** Simulácia strednej doby rozsahu pri  $\theta_0 = 5, \theta_1 = 10$  ak  $\alpha = \beta = 5\%$



**Obr. 7:** Simulácia stredného rozsahu výberu pri  $\theta_0 = 1, \theta_1 = 13$  ak  $\alpha = \beta = 5\%$

Môžeme si všimnúť, že pri hypotézach na obrázku 6. bolo v priemere potrebných oveľa viac pozorovaní na prijatie jednej z hypotéz, zatiaľ čo na obrázku 7. vidno, že počet hypotéz, ktoré boli potrebné, nepresiahol ani číslo 10. Môžeme to pripísať tomu, že rozdiel medzi testovanými parametrami bol pri obrázku 7. viac ako dvakrát väčší v porovnaní s hypotézami na obrázku 6. Ďalej sme videli, že najviac pozorovaní bolo potrebných pri hodnote parametra  $\theta$  približne v strede medzi hodnotou z nulovej hy-

potézy a alternatívnej hypotézy, čo je tiež výsledok podľa očakávaní, pretože v tejto oblasti nie je zrejmé, ktorú hypotézu má test prijať. V tejto práci sme stredný rozsah výberu počítali iba simulačne, pretože do aproximovaného tvaru nebolo možné priamo dosadiť, pretože nebolo možné všetky premenné analyticky vyjadriť.

### 3.2 Ilustračný príklad na sekvenčné testovanie v prípade závislých pozorovaní

V článku [5] je vypracovaný konkrétny príklad na testovanie hypotéz s rovnosťou. My sme ho použili, avšak rozobrali podrobnejšie, aby bolo zrejmé, ktoré z liem uvedených v časti 2.2 sa tam použili a na akom mieste konkrétne. V článku bol príklad ukončený tak, že použili zjednodušený tvar rovnice  $\lambda_1(t) = 1$ . S touto aproximáciou tam ďalej pracovali a robili závery, aký tvar by mali parametre  $r, q$  ak by  $t$  nadobúdalo hodnoty  $0, 1, -1$ . My sme použili presný tvar rovnice  $\lambda_1(t) = 1$ . Výsledky sme dostali pre konkrétne hodnoty parametrov v hypotézach  $r_0, r_1, q_0, q_1$  a pre zvolené hodnoty  $r, q$  dopočítali aproximovanú operačnú charakteristiku.

Nasleduje príklad z článku [5]. Autori uvažovali Markovov reťazec s dvoma stavmi prechodu a dvoma parametrami  $r, q$ . Matica prechodu mala nasledovný tvar:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-r & r \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

Naším cieľom bolo testovať hypotézu:

$$H0 : r = r_0, q = q_0 \quad H1 : r = r_1, q = q_1 \quad (22)$$

V tomto príklade malo počiatkové rozdelenie pravdepodobnosti nasledujúci tvar:

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} \frac{q}{r+q} \\ \frac{r}{r+q} \end{bmatrix}$$

V článku zostavili sekvenčný Waldov test. Uvažovala sa postupnosť pozorovaní  $\mathbf{S} : x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ . Vierohodnosť pozorovaní mala tvar:

$$P_{in}(\mathbf{S}) = p(x_0, \theta_i) \prod_{j=1}^{n-1} p(x_j | x_{j-1}, \theta_i), \text{ pre } i = 0, 1,$$

kde  $\theta_i = (r_i, q_i)$  a  $p(x_j | x_{j-1}, \theta) = p_{ij}$  a je to pravdepodobnosť prechodu zo stavu  $T_i$  do stavu  $T_j$  pri parametri  $\theta$ . V testovaní sa pokračuje, pokiaľ je splnená nasledujúca nerovnosť:



$$\ln B < \ln P_{in}(\mathbf{S}) < \ln A,$$

kde

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{r=0}^{n-1} Z_r = \ln P_{in}(\mathbf{S}) = \ln \frac{p(x_1|x_0, \theta_1)}{p(x_1|x_0, \theta_0)} + \dots + \ln \frac{p(x_n|x_{n-1}, \theta_1)}{p(x_n|x_{n-1}, \theta_0)} = \\ &= n_{11} * \ln \frac{1-r_1}{1-r_0} + n_{12} * \ln \frac{r_1}{r_0} + n_{21} * \ln \frac{q_1}{q_0} + n_{22} * \ln \frac{1-q_1}{1-q_0}, \end{aligned}$$

pričom  $n_{ij}; i, j = 0, 1$  je počet prechodov zo stavu  $T_i$  do stavu  $T_j$ . Použili sme nasledujúce značenie:  $Z_r = h(X_{r-1}, X_r) = h_{ij}$ ,  $X_{r-1} = T_i$ ,  $X_r = T_j$ . Pre ďalšie výpočty bolo potrebné zostaviť upravenú maticu prechodu:

$$P(t) = (p_{ij} e^{th_{ij}})_{i,j=0,1} = \begin{bmatrix} (1-r)(\frac{1-r_1}{1-r_0})^t & r(\frac{r_1}{r_0})^t \\ (\frac{q_1}{q_0})^t & (1-q)(\frac{1-q_1}{1-q_0})^t \end{bmatrix}$$

Danej matici sme vedeli vypočítať vlastné hodnoty a vlastné vektory.

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}(t) &= \frac{1}{2}[(1-r)(\frac{1-r_1}{1-r_0})^t + (1-q)(\frac{1-q_1}{1-q_0})^t] \pm \sqrt{[(1-r)(\frac{1-r_1}{1-r_0})^t - (1-q)(\frac{1-q_1}{1-q_0})^t]^2 + 4rq(\frac{r_1q_1}{r_0q_0})^t} \\ \mathbf{t}_1(t) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2q}[(1-r)(\frac{1-r_1}{1-r_0})^t + (1-q)(\frac{1-q_1}{1-q_0})^t] + \sqrt{[(1-r)(\frac{1-r_1}{1-r_0})^t - (1-q)(\frac{1-q_1}{1-q_0})^t]^2 + 4rq(\frac{r_1q_1}{r_0q_0})^t} \\ (\frac{q_1}{q_0})^t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

V kapitole 2 bola uvedená rovnica (9), ktorá tvrdila  $\phi_N(t) = E(e^{tS_N}) = \mathbf{t}'_1(t)P^N(t)\mathbf{p}_0$ . Stačí nám však uvažovať výsledky aproximácie a teda  $\phi_N(t) \approx \lambda_1^N(t)\alpha_1(t)\psi_1(t)$ . Vieme, že  $\mathbf{t}'_1\mathbf{s}_1 = 1$  a  $\psi_1(t) = \mathbf{t}'_1(t)\mathbf{p}_0$  a tieto hodnoty sú známe, teda bolo možné do tejto aproximácie dosadiť. Cieľom bolo dopracovať sa k operačnej charakteristike. Na to bolo potrebné hľadať nenulový koreň rovnice  $\lambda_1(t) = 1$ . Existenciu nenulového riešenia sme vedeli zaručiť, len ak boli splnené predpoklady uvedené v Leme 2.9 a 2.12 ohľadom derivácií vlastnej hodnoty  $\lambda_1(t)$ . Predpokladali sme, že prvá aj druhá derivácia sú konečné a pozreli sme sa na priebeh  $\lambda_1''(t)$ . A ešte sme skontrolovali, či  $\lambda_1'(0) \neq 0$ . Všetky spomenuté predpoklady boli splnené. Potom podľa Lemy 2.12 takýto nenulový koreň existoval.

Následne sme pre konkrétne hodnoty parametrov našli nenulový koreň rovnice

$$\lambda_1(t) = 1$$

a následne dosadili do aproximovaného tvaru pre operačnú charakteristiku, čo je rovnica (13), za predpokladu, že sme testovali

$$H0: r_0 = 0.2, q_0 = 0.5 \quad H1: r_1 = 0.5, q_1 = 0.2,$$

**Tabuľka 1:** Aproximované hodnoty operačnej charakteristiky pri rôznych hodnotách parametrov  $(r,q)$ , ak  $H_0: r_0 = 0.2, q_0 = 0.5$ ,  $H_1: r_1 = 0.5, q_1 = 0.2$ , ak  $\alpha = 5\%$ .

| r   | q   | L(r,q) |
|-----|-----|--------|
| 0.2 | 0.5 | 0.95   |
| 0.2 | 0.9 | 1.00   |
| 0.2 | 0.8 | 0.99   |
| 0.5 | 0.2 | 0.05   |
| 0.5 | 0.7 | 0.96   |
| 0.5 | 0.8 | 0.99   |
| 0.7 | 0.5 | 0.04   |
| 0.7 | 0.7 | 0.52   |
| 0.7 | 0.8 | 0.93   |

pri viacerých kombináciách  $r, q$ . Výsledky sú zobrazené v Tabuľke 1. V tabuľke môžeme vidieť, že hodnoty operačnej charakteristiky vyšli podľa očakávaní. Overiť, že výsledky sú správne môžeme, ak sa pozrieme na hodnotu operačnej charakteristiky, ak za  $r, q$  dosadíme parametre z nulovej hypotézy. To vidíme, že má hodnotu 0.95, čo korešponduje s tým, že sme zvolili pravdepodobnosť chyby 1. druhu rovnú 5%.

Cieľom príkladu bolo podrobne uviesť výpočty, ktoré sú potrebné aby sme dostali apoximáciu operačnej charakteristiky. Preto nie sú v tomto príklade uvedené simulácie.

### 3.3 Bonus Malus model

V ďalších príkladoch budeme uvažovať Bonus Malus model používaný v poisťovniach. Často sa predpokladá, že počet poistných udalostí vodiča za pevné časové obdobie je náhodná premenná  $X$  s Poissonovým rozdelením. Poisťovňa poistencov každoročne prerozdeľuje do tried podľa predpokladanej nehodovosti. Poistenec platí buď základné poistné (trieda 2), zvýhodnené poistné (trieda 1) alebo zhoršené poistné (trieda 3). To, v akej triede sa za posledné roky nachádzal, tvorí postupnosť, ktorá je Markovov reťazec, pretože každý člen postupnosti závisí len od predchádzajúceho, lebo len počet poistných udalostí za minulý rok ovplyvní v akej triede sa poistenec nachádza tento rok. Za predpokladu, že počet poistných udalostí má Poissonovo rozdelenie, vieme, že  $P(X = k) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}$ ,  $E[X] = \theta$ ,  $D[X] = \theta$ . Takto vytvorenému Markovovmu reťazcu vieme napísať maticu prechodu (p.u.=poistná udalosť):

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0p.u. & 1p.u. & \geq 2p.u. \\ 0p.u. & 1/2p.u. & \geq 3p.u. \\ neprechod. & 0p.u. & \geq 1p.u. \end{pmatrix} \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} e^{-\theta_1} & e^{-\theta_1}\theta_1 & 1 - e^{-\theta_1} - e^{-\theta_1}\theta_1 \\ e^{-\theta_2} & e^{-\theta_2}\theta_2 + e^{-\theta_2}\frac{\theta_2^2}{2} & 1 - e^{-\theta_2} - e^{-\theta_2}\theta_2 - e^{-\theta_2}\frac{\theta_2^2}{2} \\ 0 & e^{-\theta_3} & 1 - e^{-\theta_3} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Takže napríklad, ak sa minulý rok nachádzal v triede 1 a mal 3 poistné udalosti, tak tento rok bude v triede 3.

### 3.4 Sekvenčné testovanie parametra Markovovho reťazca

Uvažujeme Markovov reťazec  $(X_r, r \geq 0)$  definovaný na priestore stavov  $S = (1, 2, \dots, s)$  s maticou prechodu  $\mathbf{P}$ . Budeme pracovať so zjednodušujúcim predpokladom, že matica prechodu je závislá len od jedného parametra  $\theta$ , vlastne že stredná hodnota počtu nehôd

v každej triede je rovnaká .

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} e^{-\theta} & e^{-\theta}\theta & 1 - e^{-\theta} - e^{-\theta}\theta \\ e^{-\theta} & e^{-\theta}\theta + e^{-\theta}\frac{\theta^2}{2} & 1 - e^{-\theta} - e^{-\theta}\theta - e^{-\theta}\frac{\theta^2}{2} \\ 0 & e^{-\theta} & 1 - e^{-\theta} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Naším cieľom je otestovať hypotézu

$$H0 : \theta = \theta_0 \quad H1 : \theta = \theta_1, \quad \theta_0 < \theta_1 \quad (24)$$

Tento Markovov reťazec je postupnosť  $(X_0, X_1, \dots)$  náhodných premenných s hustotou  $p(x, \theta)$ . Predpokladáme, že máme  $n + 1$  pozorovaní získaných sekvenčne. Potom rozhodovacie pravidlo testu  $S(b, a)$  je, že pokračujeme vo výbere, pokiaľ

$$b < S_{n+1} < a, \\ S_{n+1} = \sum_{r=0}^n Z_r, \quad a = \ln \frac{\beta}{1-\alpha}, b = \ln \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

Ak predpokladáme, že pozorovania sú z Poissonovho rozdelenia, potom môžeme využiť Bonus Malus model s maticou prechodu  $\mathbf{P}$  (23) a vykresliť si výsledky pri rôznych hodnotách skutočného parametra  $\theta$ . Najskôr si zostrojíme testovaciu štatistiku:

$$P_{in} = p(X_0|\theta_i) \prod_{j=1}^n p(X_j|X_{j-1}, \theta_i), \quad (i = 0, 1) \text{ a} \\ Z_r = \ln \frac{p(X_r|X_{r-1}, \theta_1)}{p(X_r|X_{r-1}, \theta_0)}, \text{ pre } (r \geq 1).$$

Testovacia štatistika  $\frac{P_{1n}}{P_{0n}} = \frac{p(X_0|\theta_1)}{p(X_0|\theta_0)} \left[ \frac{p_{1,1}|\theta_1}{p_{1,1}|\theta_0} \right]^{n_{11}} \left[ \frac{p_{121}|\theta_1}{p_{1,2}|\theta_0} \right]^{n_{12}} \dots \left[ \frac{p_{3,2}|\theta_1}{p_{3,2}|\theta_0} \right]^{n_{32}} \left[ \frac{p_{3,3}|\theta_1}{p_{3,3}|\theta_0} \right]^{n_{33}}.$

$$\ln \frac{P_{1n}}{P_{0n}} = n_{11} \ln \frac{e^{-\theta_1}}{e^{-\theta_0}} + n_{12} \ln \frac{e^{-\theta_1}\theta_1}{e^{-\theta_0}\theta_0} + \dots + n_{33} \ln \frac{1-e^{-\theta_1}}{1-e^{-\theta_0}},$$

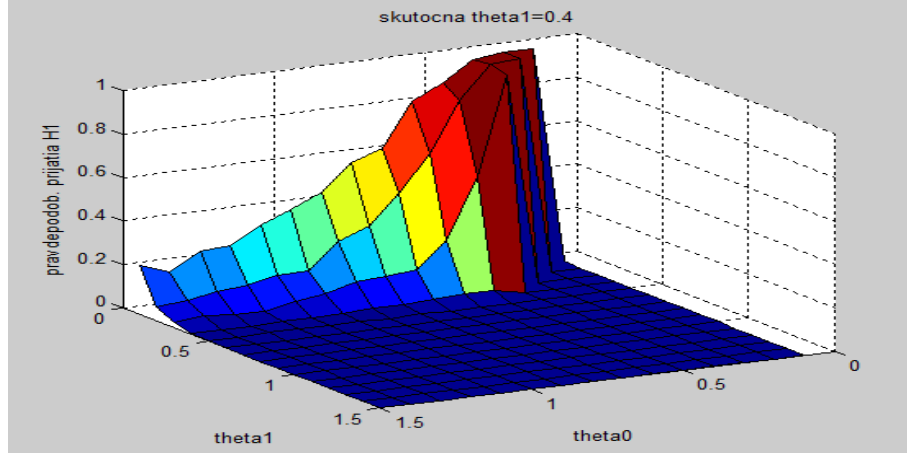
kde  $n_{ij}$  je počet prechodov zo stavu  $i$  do stavu  $j$ . Pokračujeme vo výbere kým

$$\ln B \leq \ln \frac{P_{1n}}{P_{0n}} \leq \ln A.$$

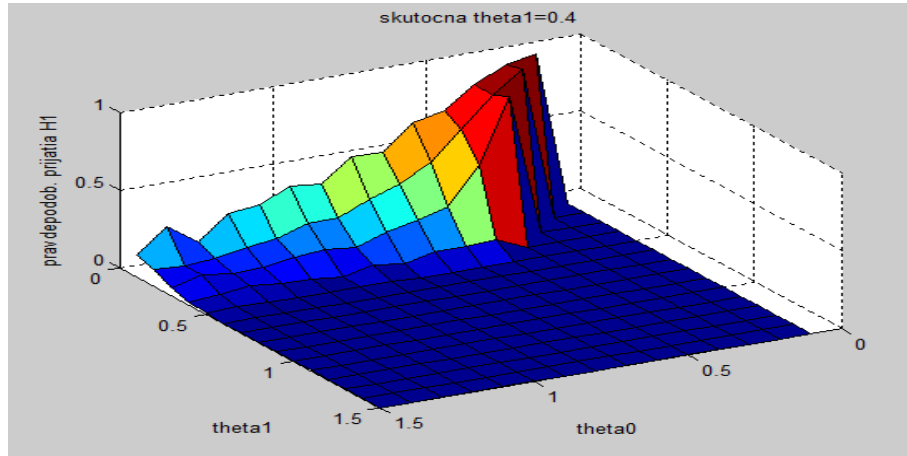
- Ak  $\sum_{r=0}^n Z_r \leq \ln B$ , tak prijímam  $H0$ ,
- ak  $\sum_{r=0}^n Z_r \geq \ln A$ , tak prijímame  $H1$ ,
- inak pokračujeme vo výbere.

S takto vytvoreným testom sme mohli ďalej pracovať. Pozreli sme sa na to ako prijíma hypotézu  $H1$  pri meniacej sa hodnote nulovej a alternatívnej hypotézy, ak sa skutočná hodnota  $\theta$  nemenila. Na nasledujúcich obrázkoch bude zobrazený výsledok simulácie, kedy sme test spustili vždy 200 krát pri zadaných parametroch. Výsledky sú zobrazené

pre skutočnú hodnotu parametra  $\theta = 0.4$ , pričom v nulovej a alternatívnej hypotéze sa menila theta v rozmedzí  $[0.1, 1.5]$  stále však tak, aby bol splnený predpoklad testu, že  $\theta_0 < \theta_1$ . Výpočty sa líšili len v rôznej hodnote  $\alpha$  a  $\beta$ .



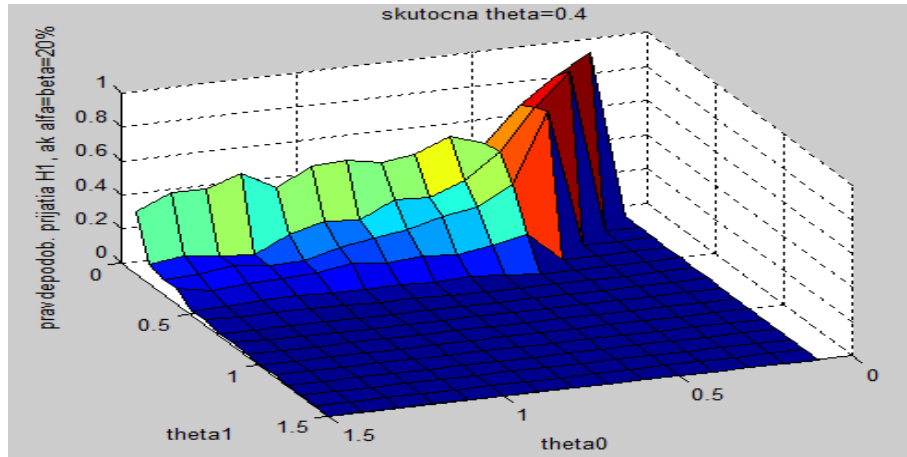
**Obr. 8:** Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H1 pri  $\theta = 0.4$ , ak  $\alpha=\beta=2.5\%$



**Obr. 9:** Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H1 pri  $\theta = 0.4$ , ak  $\alpha=\beta=10\%$

Potom sme zostrojili maticu  $P(t) = (p_{ij}e^{th_{ij}})$ , kde  $h_{ij} = \ln \frac{p_{ij}(\theta_1)}{p_{ij}(\theta_0)}$  a našli vlastné hodnoty matice  $P(t)$ , ktorá je závislá od  $t, \theta_0, \theta_1$ . Ďalej sme našli nenulový koreň rovnice  $\lambda_1(t) = 1$ , pričom  $\lambda_1(t)$  je najväčšia vlastná hodnota upravenej matice prechodu.

Cieľom bolo opäť pozrieť sa na výpočet operačnej charakteristiky. Opäť to bolo možné dvoma spôsobmi a to cez aproximovaný tvar a simulácie. Nasledujúce grafy sú zobrazené pre nemeniace hodnoty nulovej ( $\theta_0 = 0.9$ ) a alternatívnej ( $\theta_1 = 1.5$ ) hypotézy. Najskôr sme vyjadrili aproximovanú operačnú charakteristiku pre  $\theta$  z intervalu



**Obr. 10:** Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H1 pri  $\theta = 0.4$ , ak  $\alpha = \beta = 20\%$

[0.1, 2.2]. Nasledujúci aproximovaný tvar bol uvedený v kapitole 2.2.

$$L(\theta) \approx \frac{A^{t(\theta)} - 1}{A^{t(\theta)} - B^{t(\theta)}} = P[\text{prijat } H_0; \theta] \quad (25)$$

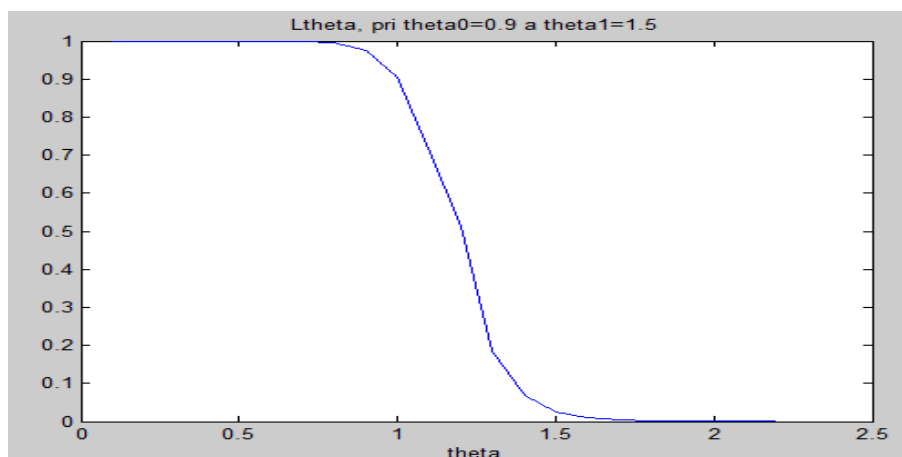
Ďalším prístupom bolo vyjadriť hodnoty operačnej charakteristiky simulačne. To značí, že pri daných parametroch spustíme test, v našom prípade aspoň 200 krát, a vyjadríme koľkokrát sa z tých 200 krát prijala hypotéza  $H_0$ , čo korešponduje s významom operačnej charakteristiky. Na obrázkoch 11. a 13. vidíme zobrazené aproximované hodnoty operačnej charakteristiky za platnosti hypotéz:

$$H_0 : \theta = 0.9 \quad H_1 : \theta = 1.5 \quad (26)$$

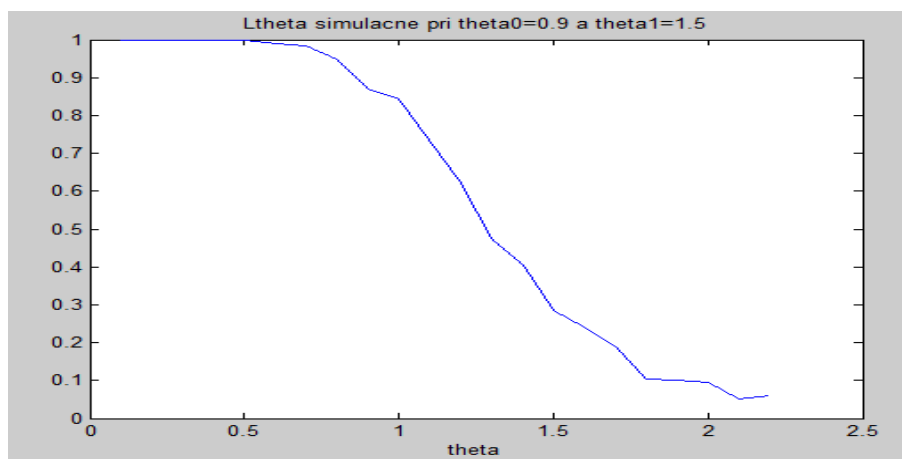
ak  $\alpha = \beta = 2.5\%$  a v druhom prípade zas ak  $\alpha = \beta = 20\%$ . Na obrázkoch 12. a 14. je zas uvedený výpočet pre rovnaké hodnoty parametrov nulovej a alternatívnej hypotézy tentokrát však získaný simulačne.

V tomto prípade sme spokojní s výslednými grafmi, pretože opäť výstup simulácie aj aproximácie má rovnaký sklon a tvar, líši sa len v tom, že simulácia nie je taká hladká funkcia ako v aproximovanom prípade. Výpočty sme robili pre rôzne hodnoty pravdepodobnosti chyby 1. a 2. druhu a je vidieť, že tieto hodnoty ovplyvnili sklon výsledných grafov.

Aj v prípade tohto testu bolo možné overiť si výsledky, ak sme sa pozreli na operačnú charakteristiku v hodnote parametra z nulovej hypotézy. Na obrázkoch 11. a 12. sme očakávali hodnotu  $L(0.9) \approx 0.975$  a na obrázkoch 13. a 14.  $L(0.9) \approx 0.8$ , čo sme opäť



**Obr. 11:** Aproximované hodnoty operačnej charakteristiky pre  $\theta$  z intervalu  $[0.1, 2.2]$ , ak  $\alpha = \beta = 2.5\%$



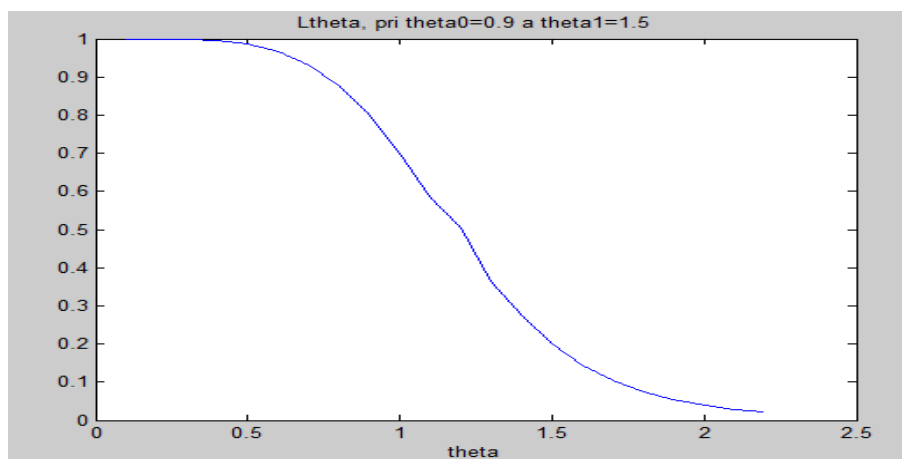
**Obr. 12:** Simulácia operačnej charakteristiky pre  $\theta$  z intervalu  $[0.1, 2.2]$ , ak  $\alpha = \beta = 2.5\%$

videli, že sedí s predpokladmi.

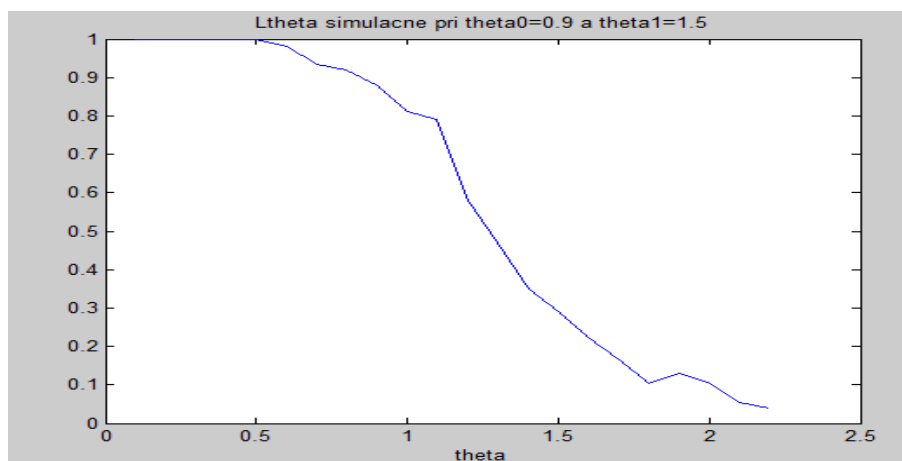
Ešte sme sa pozreli na tvar simulácie stredného rozsahu výberu.

Ak si porovnáme obrázky 15. a 16. je vidieť, že na druhom obrázku bolo potrebných v priemere menej pozorovaní na prijatie hypotézy, pretože sme s väčšou pravdepodobnosťou povolili prijatie nesprávnej hypotézy. Ďalej sme videli, že najviac pozorovaní bolo potrebných pri hodnote parametra  $\theta$  približne v strede medzi hodnotou z nulovej hypotézy a alternatívnej hypotézy, čo je tiež výsledok podľa očakávaní, pretože v tejto oblasti nie je zjavné, ktorú hypotézu má test prijať.

K tomuto príkladu je možné nájsť aj kódy z Matlabu a to v prílohe A. Je tam kód naprogramovaného sekvenčného testu, aproximácie aj simulácie operačnej charakteris-



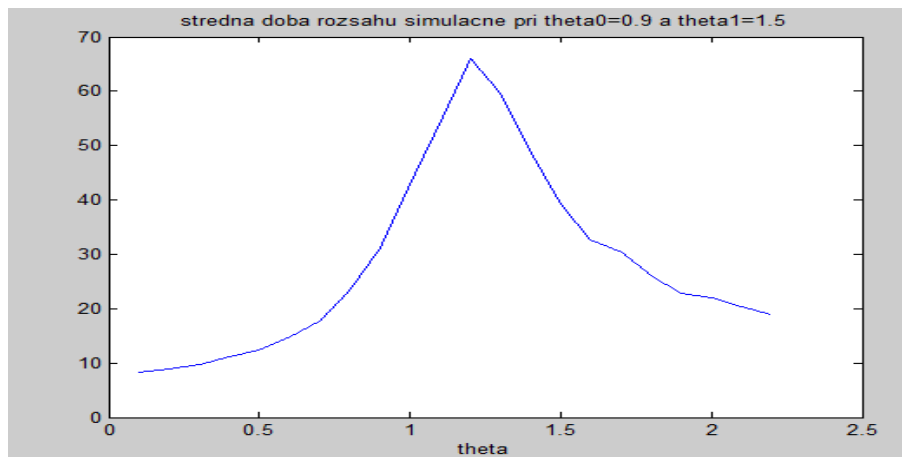
**Obr. 13:** Aproximované hodnoty operačnej charakteristiky pre  $\theta$  z intervalu  $[0.1, 2.2]$ , ak  $\alpha=\beta=20\%$



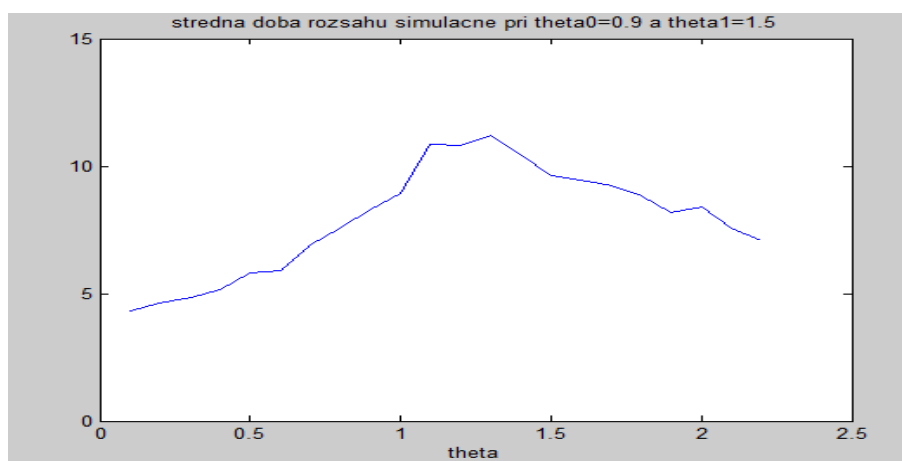
**Obr. 14:** Simulácia operačnej charakteristiky pre  $\theta$  z intervalu  $[0.1, 2.2]$ , ak  $\alpha=\beta=20\%$

tiky a vykresľovanie grafov pri rôznych hodnotách  $\theta$ .





**Obr. 15:** Simulácia stredného rozsahu výberu pre  $\theta$  z intervalu  $[0.1, 2.2]$ , pri  $\theta_0 = 0.9, \theta_1 = 1.5$  ak  $\alpha = \beta = 2.5\%$



**Obr. 16:** Simulácia stredného rozsahu výberu pre  $\theta$  z intervalu  $[0.1, 2.2]$ , pri  $\theta_0 = 0.9, \theta_1 = 1.5$  ak  $\alpha = \beta = 20\%$

### 3.4.1 Nesequenčné testovanie parametra Markovovho reťazca

Ak sme chceli výsledky z časti 3.4 porovnať s nesequenčným prístupom, bolo potrebné uvažovať hypotézu:

$$H_0: p_{ij}(\theta) = p_{ij}^0(0.9).$$

Na ňu bolo možné aplikovať teóriu z kapitoly 1.3 o chí kvadrát teste. Potom sa dali porovnať výsledky tohto testu so sekvenčným testom z 3.4 z hľadiska stredného rozsahu výberu a pravdepodobností chýb prvého a druhého druhu, pretože testy boli zostavené pri rovnakých parametroch. Opäť sme uvažovali Markovov reťazec s 3 stavmi a jeho matica prechodu je uvedená v (23). Pre takýto test bola testovacia štatistika

$$U = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 d_i^* \frac{(p_{ij} - p_{ij}^0)^2}{p_{ij}^0} \sim \chi_{3(3-1)}^2,$$

kde  $d_{ij}$  predstavuje počet, koľkokrát z  $n$  pevných pozorovaní prešiel reťazec zo stavu  $T_i$  do stavu  $T_j$ . Druhá premenná  $d_i^*$  predstavuje počet prechodov zo stavu  $T_i$  do ľubovoľného zo stavov  $T_1, T_2, T_3$ . Takýto test nebol problém naprogramovať v Matlabe. Utvorili sme program, ktorý pri zvolenej pravdepodobnosti chyby 1. druhu menil počet pozorovaní, až kým sme nedostali želanú pravdepodobnosť chyby 2. druhu. Nakoniec sme urobili porovnanie so sekvenčným testom. Pre zvolenú pravdepodobnosť chyby 1. druhu  $\alpha$  sú v tabuľke 2 zobrazené hodnoty pravdepodobnosti chyby 2. druhu  $\beta$  a priemerný počet pozorovaní, ktorý bol potrebný na to aby test prijal alebo zamietol nulovú hypotézu. Vidíme, že nesequenčný test potreboval viacej pozorovaní, aby vyvodil rovnaké závery ako test robený sekvenčne. To sme aj očakávali, keďže sekvenčný test má byť efektívnejší z hľadiska nákladov na pozorovania a minimalizovať ich stredný počet, potrebný na prijatie hypotéz s predpísanou pravdepodobnosťou chyby 1. druhu. Ak sme volili  $\alpha = 2.5\%$  nepodarilo sa presne trafiť hodnotu  $\beta = 0.025$  ale vidíme, že približne 40 pozorovaní bolo potrebných, aby  $\beta$  bola menšia ako 2.5%.

**Tabuľka 2:** Porovnanie výsledkov sekvenčného a nesequenčného testu pre Markovov reťazec s jedným parametrom

| sekvenčný test            | nesequenčný test     |                     |
|---------------------------|----------------------|---------------------|
| $\alpha = 0.20$           | $\alpha = 0.20$      | $\alpha = 0.20$     |
| $\beta = 0.20$            | $\beta = 0.23$       | $\beta = 0.185$     |
| $\hat{E}(N, \theta) = 8$  | $E(n, \theta) = 39$  | $E(n, \theta) = 40$ |
| $\alpha = 0.025$          | $\alpha = 0.025$     |                     |
| $\beta = 0.025$           | $\beta = 0.025$      |                     |
| $\hat{E}(N, \theta) = 31$ | $E(n, \theta) = 133$ |                     |

### 3.5 Prechod k jednoduchšej hypotéze pri sekvenčnom porovnaní 2 Markovových reťazcov

V tejto časti bolo cieľom na konkrétnom príklade ukázať, aké predpoklady treba splniť, aby stačilo namiesto testovania (27) testovať hypotézy v (28), ak chceme reťazec sekvenčne porovnať.

$$H0 : \theta_1 < \theta_2 \quad H1 : \theta_1 > \theta_2, \quad (27)$$

za predpokladu, že  $\theta_1 < \theta_2$ .

$$H0^* : \theta_1 = \theta_1^0, \theta_2 = \theta_2^0 \quad H1^* : \theta_1 = \theta_1^0, \theta_2 = \theta_1^0. \quad (28)$$

Uvažovali sme 2 nezávislé Markovove reťazce  $\{X_r^i, r \geq 0\}, i = 1, 2$  definované na rovnakom priestore stavov  $S = \{1, 2\}$ . Majú rovnaký tvar matice prechodu, líši sa len v hodnote parametra  $\theta$ .

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} e^{-\theta} & 1 - e^{-\theta} \\ e^{-\theta} + \theta e^{-\theta} & 1 - e^{-\theta} - \theta e^{-\theta} \end{bmatrix}$$

Ďalej bolo potrebné zostaviť upravenú maticu prechodu pre každý reťazec  $P(t, \theta) = (p_{ij} e^{th_{ij}})_{i,j=0,1}$ , kde  $p_{ij}$  predstavuje pravdepodobnosť prechodu reťazca so stavu  $i$  do stavu  $j$  a  $h_{ij} = Z_r$ , pričom  $Z_r = \ln \frac{p_{ij}(\theta_2)}{p_{ij}(\theta_1)}$ . Takže opäť aj táto matica mala rovnaký tvar pre oba reťazce, rozdiel bol len v hodnote parametra  $\theta$ .

$$P(t, \theta) = \begin{bmatrix} e^{-\theta} \left( \frac{e^{-\theta_2^0}}{e^{-\theta_1^0}} \right)^t & (1 - e^{-\theta}) \left( \frac{1 - e^{-\theta_2^0}}{1 - e^{-\theta_1^0}} \right)^t \\ (e^{-\theta} + \theta e^{-\theta}) \left( \frac{e^{-\theta_2^0} + \theta e^{-\theta_2^0}}{e^{-\theta_1^0} + \theta e^{-\theta_1^0}} \right)^t & (1 - e^{-\theta} - \theta e^{-\theta}) \left( \frac{1 - e^{-\theta_2^0} - \theta e^{-\theta_2^0}}{1 - e^{-\theta_1^0} - \theta e^{-\theta_1^0}} \right)^t \end{bmatrix}$$

$P_1 = P(t, \theta_1)$ ,  $P_2 = P(t, \theta_2)$ . Označili sme  $Q(t) = P_2 \otimes P_1$ . Vo vzťahu (17) bolo uvedené, že stačí vynásobiť vlastné čísla matíc  $P_1, P_2$ , aby sme dostali vlastné číslo matice  $Q(t)$ . Vlastné číslo  $\mu(t, \theta_1)$  má tvar:

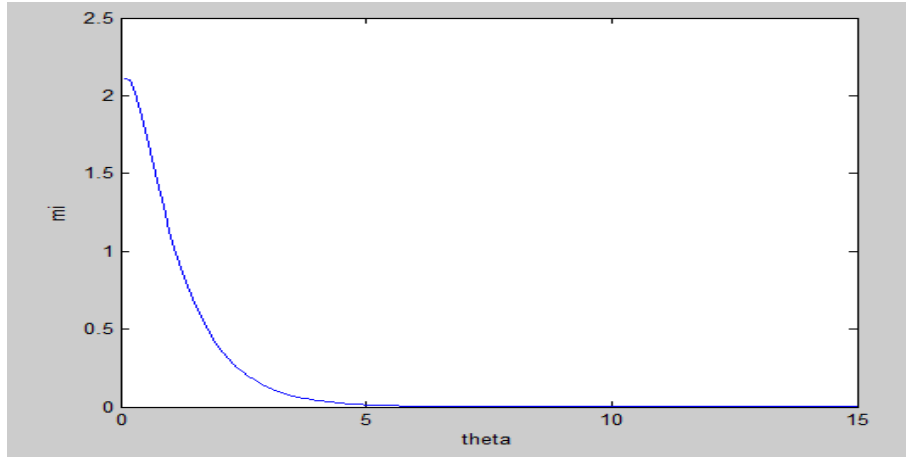
$$\begin{aligned} \mu(t, \theta_1) = & e^{-\theta_1} \left( \frac{e^{-\theta_2^0}}{e^{-\theta_1^0}} \right)^t + (1 - e^{-\theta_1} - \theta e^{-\theta_1}) \left( \frac{1 - e^{-\theta_2^0} - \theta e^{-\theta_2^0}}{1 - e^{-\theta_1^0} - \theta e^{-\theta_1^0}} \right)^t + \\ & [(e^{-\theta_1} \left( \frac{e^{-\theta_2^0}}{e^{-\theta_1^0}} \right)^t + (1 - e^{-\theta_1} - \theta e^{-\theta_1}) \left( \frac{1 - e^{-\theta_2^0} - \theta e^{-\theta_2^0}}{1 - e^{-\theta_1^0} - \theta e^{-\theta_1^0}} \right)^t)^2 - \\ & 4((e^{-\theta_1} \left( \frac{e^{-\theta_2^0}}{e^{-\theta_1^0}} \right)^t)((1 - e^{-\theta_1} - \theta e^{-\theta_1}) \left( \frac{1 - e^{-\theta_2^0} - \theta e^{-\theta_2^0}}{1 - e^{-\theta_1^0} - \theta e^{-\theta_1^0}} \right)^t) - (1 - e^{-\theta}) \left( \frac{1 - e^{-\theta_2^0}}{1 - e^{-\theta_1^0}} \right)^t) \\ & (e^{-\theta_1} + \theta_1 e^{-\theta_1}) \left( \frac{e^{-\theta_2^0} + \theta e^{-\theta_2^0}}{e^{-\theta_1^0} + \theta e^{-\theta_1^0}} \right)^t]^{1/2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Vďaka rovnici (18) sme vedeli, že platí vzťah  $\lambda(t, \theta_2) = \mu(-t, \theta_2)$ . Vďaka tomu platili aj výsledky z Lemy 2.14. Keďže vlastné čísla matíc  $P_1$  a  $P_2$  sú závislé, v teoretickej časti bolo uvedené, že vo Vete 2.16 a v Dôsledku 2.17 stačilo overiť, či je  $\mu'(0, \theta)$  monotónna funkcia. To bola nutná a postačujúca podmienka, že nenulové riešenie  $t$  má rovnaké znamienko pre každú dvojicu  $(\theta_1, \theta_2)$ . Následne stačilo uvažovať jednoduchú hypotézu (28). Tento príklad sme zakončili tak, že sme overili, či je derivácia vlastného čísla v bode  $t = 0$  naozaj monotónna. Po úpravách vyzerala rovnica nasledovne.

$$\mu'(0, \theta) = e^{-\theta} + \theta e^{-\theta} + \frac{2(1 - \theta e^{-\theta})[-e^{-\theta} + \theta e^{-\theta}] - 4[-e^{-\theta} - 2\theta e^{-2\theta} + \theta e^{-\theta}]}{2\sqrt{(-\theta e^{-\theta})^2 - 4[e^{-\theta}(1 - \theta e^{-\theta} - e^{-\theta}) - (1 - e^{-\theta})(e^{-\theta} + \theta e^{-\theta})]}} \quad (30)$$

Celé to bolo ešte predelené dvojkou, ale to monotónnosť neovplyvnilo, takže sme uviedli len tento tvar. Funkcia (30) závisí len od parametra  $\theta$  a keďže sme tento príklad stavali na teórii s Poissonovým rozdelením, kde parameter nadobúda len nezáporné hodnoty, vykreslili sme tvar funkcie na intervale  $\theta \in [0.1; 15]$ .

Je zrejmé, že funkcia je monotónna a teda sú splnené predpoklady, aby stačilo uvažovať jednoduchšiu hypotézu. Cieľom tohoto príkladu však bolo len si konkrétne ukázať, ako overíme splnenie podmienok, takže sme sa riešením jednoduchej hypotézy v tomto prípade nezaoberali.



Obr. 17: Priebeh funkcie  $\mu'(0, \theta)$ , pre  $\theta \in [0.1; 15]$

### 3.6 Sekvenčné testovanie pre porovnanie parametrov 2 Markovových reťazcov

V článku [6] je uvedený sekvenčný test na porovnanie parametrov 2 reťazcov. Predpokladáme dva nezávislé Markovove reťazce  $(X_r^1, X_r^2, r \geq 0)$  definované na rovnakom priestore stavov  $S = (1, 2, \dots, s)$ . Nech má každý reťazec rovnaký tvar matice prechodu  $\mathbf{P}$  závislej od parametra  $\theta$ , líšiť sa budú len v parametri. Dvojzložkový reťazec  $\pi = (X_r^1, X_r^2, r \geq 0)$  je Markovov reťazec s množinou stavov  $S^* = S \times S$  a jeho matica prechodu je  $Q = [q_{ij}(\theta_1, \theta_2)]$  a vznikla ako priamy súčin  $P_2 \otimes P_1$ , čo je súčin matice prechodu druhého a prvého reťazca. V článku sa uvádza, že reťazec  $\pi$  je regulárny pre  $\forall \theta_k \in \Theta$ . Uvažuje sa prípad  $\theta_1^0, \theta_2^0 \in \Theta, \theta_1^0 < \theta_2^0$ . Nech je počiatočné rozdelenie  $\pi_k$ ,  $k = 1, 2$  aj stacionárne rozdelenie. Potom môžeme uvažovať sekvenčný test o sile  $(\alpha, \beta)$ , kde  $0 < \alpha < 1 - \beta$  na testovanie hypotéz:

$$H0 : \theta_1 = \theta_1^0, \theta_2 = \theta_2^0 \quad H1 : \theta_1 = \theta_2^0, \theta_2 = \theta_1^0 \quad (31)$$

Predpokladáme, že  $(x_r^1, x_r^2), r = 0, 1, \dots, n$  je  $n + 1$  pozorovaní vykonaných sekvenčne na reťazcoch  $X^1, X^2$ , ktorých matice prechodu závisia od parametrov  $\theta_1, \theta_2$ . Potom rozhodovacie pravidlo testu  $S(b, a)$  je, že pokračujeme vo výbere pokiaľ  $b < S_{n+1} < a$ , kde  $S_{n+1} = \sum_{r=0}^n Z_r$ , pričom

$$Z_0 = \ln \frac{p(x_0^1; \theta_2^0) p(x_0^2; \theta_1^0)}{p(x_0^1; \theta_1^0) p(x_0^2; \theta_2^0)} \quad Z_r = \ln \frac{p(x_{r-1}^1, x_r^1; \theta_2^0) p(x_{r-1}^2, x_r^2; \theta_1^0)}{p(x_{r-1}^1, x_r^1; \theta_1^0) p(x_{r-1}^2, x_r^2; \theta_2^0)}, r \geq 0,$$

kde  $p(x_{r-1}^1, x_r^1; \theta_2^0)$  je pravdepodobnosť prechodu zo stavu  $x_{r-1}^1$  do stavu  $x_r^1$  pri parametri  $\theta_2^0$ .

Teraz budeme uvažovať dva Bonus Malus modely uvedené v časti 3.3. Opäť budeme pracovať so zjednodušujúcim predpokladom, že matica prechodu je závislá len od jedného parametra  $\theta$ , vlastne že stredná hodnota počtu nehôd v každej triede je rovnaké číslo. Zložky reťazcov  $X^1, X^2$  hovoria, v akej triede sa daný poistenec nachádzal v rokoch  $r = 0, \dots, n$ . Získali sme sekvenčne  $n + 1$  dvojíc pozorovaní  $(x_r^1, x_r^2), r = 0, 1, \dots, n$  reťazcov  $X^1$  s maticou prechodu  $\mathbf{P}_1$ ,  $X^2$  s maticou prechodu  $\mathbf{P}_2$  a to tak, že sme generovali v Matlabe z Poissonovho rozdelenia. Tieto čísla predstavovali počet nehôd v roku  $r - 1$ , následne sme  $X_r^1$  a  $X_r^2$  priradili hodnoty od 1 po 3, čo vyjadrovalo, v ktorom stave je reťazec v čase  $r$  na základe počtu nehôd v čase  $r - 1$ . Teraz chceme testovať hypotézy (31), pričom  $\theta_1$  a  $\theta_2$  sú skutočné hodnoty parametrov, ktoré poznáme, keďže sme pozorovania získali generovaním v Matlabe. Použijeme rozhodovacie pravidlo testu  $S(b, a)$ , kde napríklad

$$Z_4 = \ln \frac{p(x_3^1, x_4^1; \theta_1^0) p(x_3^2, x_4^2; \theta_1^0)}{p(x_3^1, x_4^1; \theta_2^0) p(x_3^2, x_4^2; \theta_2^0)}$$

a ak sa 1. aj 2. poistenec v čase 3 nachádzal v triede 1 a v čase 4 sa 1. poistenec nachádzal v triede 2 a 2. poistenec v triede 3, tak príslušné pravdepodobnosti prechodu budú mať tvar:

$$p(x_3^1, x_4^1; \theta) = e^{-\theta} \theta \quad p(x_3^2, x_4^2; \theta) = 1 - e^{-\theta} - e^{-\theta} \theta$$

Takto si vieme dopočítať testovaciu štatistiku  $S_{n+1}$ . Na základe pravdepodobnosti prijatia  $H_0$  pri rôznych hodnotách parametrov sme chceli rozhodnúť, či má test požadovanú kvalitu. Zvolili sme si dve rôzne dvojice nulovej a alternatívnej hypotézy a nasimulovali výpočet pravdepodobnosti prijatia  $H_0$  pre viaceré hodnoty  $\theta_1$  a  $\theta_2$ . Overiť, že sme dostali logické výsledky bolo možné, ak sme sa pozreli na operačnú charakteristiku v bodoch z nulovej hypotézy, teda očakávali sme nasledovné:

$$L(\theta_1, \theta_2) \approx 0.95,$$

keďže sme zvolili požadovanú pravdepodobnosť chyby 1. druhu  $\alpha = 0.05$ . V tabuľke 3 aj v tabuľke 4 vidíme, že pravdepodobnosť chyby 1 druhu je menšia ako 5%, keďže hodnota operačnej charakteristiky v bodoch z nulovej hypotézy je 0.985. V tabuľkách je pre konkrétne hodnoty parametrov uvedená hodnota operačnej charakteristiky a

stredného rozsahu výberu. Pre tento príklad sme uviedli len simulácie, pretože odvo-  
denie aproximovaného tvaru nebolo možné explicitne vyjadriť kvôli dvom parametrom  
v hypotéze. V tabuľke 3 sú uvedené výsledky, ak sme testovali:

$$H_0: \theta_1 = 0.4, \theta_2 = 1.1 \quad H_1: \theta_1 = 1.1, \theta_2 = 0.4,$$

zatiaľ čo v tabuľke 4 sú uvedené výsledky, ak sme testovali nasledujúce hypotézy.

$$H_0: \theta_1 = 0.1, \theta_2 = 1.4 \quad H_1: \theta_1 = 1.4, \theta_2 = 0.1$$

Hodnoty operačnej charakteristiky boli také, ako sme očakávali, pretože ak sú pa-  
rametre v blízkosti parametrov z nulovej hypotézy, tak operačná charakteristiky na-  
dobúda vysoké hodnoty a ak sú parametre bližšie pri alternatívnej hypotéze, hodnoty  
operačnej charakteristiky sú nízke. Ak sa pozrieme na stredný rozsah výberu vidno,  
že v druhom prípade bolo priemerne potrebných oveľa menej pozorovaní na to, aby sa  
test rozhodol pre jednu z hypotéz. Môžeme to pripísať tomu, že hodnoty parametrov  
v nulovej hypotéze sú od seba vzdialené viacej ako pri hypotézach, ktorých výsledky  
sú v tabuľke 3. Najviac pozorovaní bolo potrebných pri testovaní s dvojicami  $(\theta_1, \theta_2)$ ,  
ktoré boli buď v strede medzi nulovou a alternatívnou hypotézou alebo ak boli oba  
parametra podobné čísla, teda napríklad ako v tabuľke 3 aj v tabuľke 4, pri dvojici  
 $(\theta_1, \theta_2) = (0.1, 0.2)$ .

**Tabuľka 3:** Simulácia operačnej charakteristiky a stredného rozsahu výberu pre hypotézu  $H_0: \theta_1 = 0.4, \theta_2 = 1.1$  a  $H_1: \theta_1 = 1.1, \theta_2 = 0.4$

| $\theta_1$ | $\theta_2$ | $L(\theta_1, \theta_2)$ | $\hat{E}(N, \theta_1, \theta_2)$ |
|------------|------------|-------------------------|----------------------------------|
| 0.1        | 0.2        | 0.900                   | 26.61                            |
| 0.1        | 0.8        | 1.000                   | 7.42                             |
| 0.1        | 1.5        | 1.000                   | 4.89                             |
| 0.4        | 0.6        | 0.800                   | 13.29                            |
| 0.4        | 1.1        | 0.970                   | 8.01                             |
| 0.4        | 1.5        | 0.985                   | 6.01                             |
| 0.7        | 0.7        | 0.450                   | 12.30                            |
| 1.1        | 0.4        | 0.015                   | 7.97                             |
| 1.1        | 0.7        | 0.180                   | 9.55                             |
| 1.1        | 1.5        | 0.785                   | 9.90                             |
| 1.5        | 1.5        | 0.490                   | 9.98                             |

V tejto práci sme na rôznych testoch porovnali hodnoty aproximácií s výsledkami simulácií. Môžeme skonštatovať, že aproximované tvary boli takmer totožné so simuláciami a teda sa dá očakávať, že tieto odhady nie sú ďaleko od skutočných hodnôt. Vzhľadom na to, že sme si správnosť získaných odhadov vedeli overiť dosadením parametrov z nulovej hypotézy, dá sa predpokladať, že získané výsledky odrážajú skutočnosť.



**Tabuľka 4:** Simulácia operačnej charakteristiky pre hypotézu  $H_0: \theta_1 = 0.1, \theta_2 = 1.4$  a  $H_1: \theta_1 = 1.4, \theta_2 = 0.1$

| $\theta_1$ | $\theta_2$ | $L(\theta_1, \theta_2)$ | $\hat{E}(N, \theta_1, \theta_2)$ |
|------------|------------|-------------------------|----------------------------------|
| 0.1        | 0.2        | 0.770                   | 11.17                            |
| 0.1        | 0.8        | 0.965                   | 4.26                             |
| 0.1        | 1.4        | 0.985                   | 3.43                             |
| 0.6        | 0.1        | 0.045                   | 5.01                             |
| 0.6        | 1.0        | 0.695                   | 3.89                             |
| 0.6        | 1.5        | 0.885                   | 3.64                             |
| 0.8        | 0.8        | 0.500                   | 3.98                             |
| 1.1        | 0.1        | 0.040                   | 3.73                             |
| 1.1        | 0.7        | 0.285                   | 3.75                             |
| 1.1        | 1.4        | 0.665                   | 3.77                             |
| 1.4        | 1.4        | 0.525                   | 3.77                             |

## Záver

Rozšírenie sekvenčného testovania na dáta, ktoré vzniknú z pozorovania Markovovho reťazca vedie ku komplikovanejším vzťahom pre aproximácie operačných charakteristík a stredného rozsahu výberu takýchto testov. Tieto postupy sme uviedli a aplikovali na príkladoch, pričom sme uskutočnili aj simulácie, ktoré umožňujú overovať kvalitu takýchto aproximácií.

Teóriu sme čerpali hlavne zo zdrojov [2], [5] a [6]. Uviedli sme detailnejšie odvodenie aproximácií operačnej charakteristiky ako bolo v zdrojoch, aby to bolo zrozumiteľnejšie pre čitateľa. V poslednej kapitole sme sa venovali aplikácii sekvenčnej analýzy na rôznych príkladoch. Hlavne sme sa venovali porovnaniu výsledkov aproximácií a simulácií, aby sme overili, že odvodené aproximácie sú spoľahlivé a odrážajú skutočnosť. Naše očakávania sa splnili a mohli sme vidieť, že aproximovaná operačná charakteristika bola takmer totožná so simuláciou, hlavne ak sme porovnávali sklon a tvar krivky. Najskôr sme v časti 3.1 uviedli testovanie s nezávislými premennými a ďalej v častiach 3.4, 3.5 a 3.6 sme sa venovali testovaniu parametrov v Markovových reťazcoch. V časti 3.6, ktorá sa zaoberala porovnávaním dvoch parametrov v dvoch Markovových reťazcoch nebolo možné explicitne vyjadriť vlastné číslo upravenej matice prechodu, preto sme sa obmedzili len na simulácie. Takmer v každom príklade uvádzame výsledok odhadu stredného rozsahu výberu. V časti 3.4 sme ukázali aj porovnanie výsledkov sekvenčného a klasického testu z hľadiska stredného rozsahu výberu a pravdepodobnosti chyby 2. druhu pri zvolenej pravdepodobnosti chyby 1. druhu.

Sekvenčné testovanie bolo zaujímavé hlavne z hľadiska využiteľnosti tejto teórie v rôznych odvetviach. Všetky sekvenčné testy, aproximácie aj simulácie bolo potrebné naprogramovať v Matlabe. Prínosom pre autorku bolo ponoriť sa do problematiky testovania hypotéz z iného pohľadu ako ponúka väčšina štatistických predmetov na našej fakulte.

Videli sme ako sa testy správajú pri ich simulačnom použití a aké výsledky vieme dosiahnuť pri použití aproximácií. Zvolený Bonus Malus model uvedený v časti 3.3 je veľmi používaný, avšak práca s jeho maticou prechodu bola zdĺhavá, napríklad pri výpočte operačnej charakteristiky, keďže tento postup vyžadoval najskôr zrátať vlastné hodnoty a nasledovali ďalšie kroky, takže to záviselo od veľa parametrov.

Bežne používaným testom v súvislosti s Markovovými reťazcami sú chí kvadrát testy, ktoré boli uvedené v 1.3. Tieto by sa dali pri vhodnom preformulovaní použiť na testovanie úloh, ktoré boli v tejto práci uvedené. Tiež by sa dali formulovať optimalizačné úlohy v súvislosti so zohľadnením nákladov na pokračovanie vo výbere a požiadavkami na chyby testu. Práca by sa dala rozšíriť, ak by sme uvažovali reťazce, kde by pozorovania vykazovali oveľa zložitejšiu závislosť ako len po sebe nasledujúce. Tam by sa naskytol celý rad otázok, ktoré by bolo treba zodpovedať.

## Literatúra

- [1] Anderson, T. W., and Leo A. Goodman. “Statistical Inference about Markov Chains.” *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 28, no. 1, 1957, pp. 89–110. JSTOR, [www.jstor.org/stable/2237025](http://www.jstor.org/stable/2237025).
- [2] Hušková, M.: “Sekvenční analýze”, MFF UK Praha, dostupné na internete (04.01.2017): [http://www.karlin.mff.cuni.cz/~huskova/huskova\\_seq.pdf](http://www.karlin.mff.cuni.cz/~huskova/huskova_seq.pdf)
- [3] Janková, K., Kilianová, S., Brunovský, P., Bokes, P. “Markovove reťazce a ich aplikácie”, Epos, 2014.
- [4] Janková, K. Pázman, A. “Pravdepodobnosť a štatistika”, Univerzita Komenského v Bratislave, 2013.
- [5] Phatarfod, R. M. “Sequential Analysis of Dependent Observations. I.” *Biometrika*, vol. 52, no. 1/2, 1965, pp. 157–165. JSTOR, [www.jstor.org/stable/2333821](http://www.jstor.org/stable/2333821).
- [6] Swamy, R. J. R. “Sequential Comparison of Two Markov Chains.” *Biometrika*, vol. 70, no. 1, 1983, pp. 293–296. JSTOR, [www.jstor.org/stable/2335971](http://www.jstor.org/stable/2335971).
- [7] Wald, A. “Sequential Analysis.”, New York: Wiley, 1947.

## Príloha A

```
function [p,N] = testovanie1parametra(theta_gen1,theta1,theta2 )
p=0;
N=0;
clearvars -except p N theta_gen1 theta1 theta2
for (m=1:200)
n=3;
alfa=@(k,theta)exp(-theta)*(theta^k)/factorial(k); %pocet poistnych udalosti ma Poiss
P=@(theta) [alfa(0,theta) alfa(1,theta) 1-alfa(0,theta)-alfa(1,theta);...
            alfa(0,theta) alfa(1,theta)+alfa(2,theta) 1-alfa(0,theta)-alfa(1,theta)-alfa(2,theta);...
            0 alfa(0,theta) 1-alfa(0,theta)]; %matica prechodu
xtheta(1:n)=random('Poisson',theta_gen1,n,1);
a=2;
b=2;
Z=0;
if (xtheta(1)==0) a=1;
elseif (xtheta(1)>2) a=3;
else a=2;
end;
P1=P(theta1);
P2=P(theta2);
Z(1)=log(P2(2,a)/P1(2,a));
aa=0;
bb=0;
A=log(0.8/0.2); %zmena pravdepodobnosti chyby 1. a 2. druhu
B=log(0.2/0.8);

while ((sum(Z)<A)&(sum(Z)>B))
    for (i=2:n)

        if ((a==1)&&(xtheta(i)==1)) aa=2;
        end
        if ((a==1)&&(xtheta(i)>1)) aa=3;
        end
        if ((a==1)&&(xtheta(i)==0)) aa=a;
        end;

        if ((a==2)&&(xtheta(i)==0)) aa=1;
        end
        if ((a==2)&&(xtheta(i)==1)) aa=2;
        end
        if ((a==2)&&(xtheta(i)==2)) aa=2;
        end
        if ((a==2)&&(xtheta(i)>2)) aa=3;
        end;

        if ((a==3)&&(xtheta(i)==0)) aa=2;
        end
        if((a==3)&&(xtheta(i)>0)) aa=3;
        end;

        Z(i)=log(P2(a,aa)/(P1(a,aa)));
        a=aa;
        b=bb;
        [a b];
    end
    Z(find(isnan(Z)))=[];
    n=n+1;
    xtheta(n+1)=random('Poisson',theta_gen1,1,1);|
```

```

end

if sum(Z)<B f='prijimam H0';
end
if sum(Z)>A
    f='prijimam H1';
    p=p+1;
end
N=N+n;
end
end

```

Aproximácia operacnej charakteristiky:

```

th0=0.9;
th1=1.5;
riesenie=zeros(1,22);
x0=[15*ones(1,12) -2*ones(1,10)]
r=1;

for th=0.1:0.1:2.2
A=(exp(-th1)/exp(-th0));
B=th*exp(-th)+exp(-th)*(th^2)/2;
C=(th1*exp(-th1)+exp(-th1)*(th1^2)/2)/(th0*exp(-th0)+exp(-th0)*(th0^2)/2);
D=1-exp(-th);
E=(1-exp(-th1))/(1-exp(-th0));
F=exp(-2*th)*(1-exp(-th)-th*exp(-th));
G=exp(-th1)/exp(-th0);
H=(1-exp(-th1)-th1*exp(-th1))/(1-exp(-th0)-th0*exp(-th0));
I=exp(-th)*exp(-th)*th;
J=(exp(-th1)/exp(-th0))*((th1*exp(-th1))/(th0*exp(-th0)));
K=exp(-th)*(1-exp(-th)-th*exp(-th)-exp(-th)*th^2/2);
L=((1-exp(-th1)-th1*exp(-th1)-exp(-th1)*th1^2/2)/(1-exp(-th0)-th0*exp(-th0)-exp(-th0)*th0^2/2))*(exp(-th1)/exp(-th0));

eqn=@(t)(exp(-th)*A^t-1)*((B)*(C)^t-1)*(D*(E)^t-1)+F*(G)^(2*t)*(H)^t-I*(J)^t*(D*(E)^t-1)-(exp(-th)*A^t-1)*K*(L^t)
riesenie(r)=fsolve(eqn,x0(r));
    r=r+1;
end
riesenie
    alfa=0.2;
    beta=0.2;
    a=log((1-beta)/alfa);
    b=log(beta/(1-alfa));
    Aa=(1-beta)/alfa;
    Bb=beta/(1-alfa);

for i=1:22
Ltheta(i)=(Aa^riesenie(i)-1)/(Aa^riesenie(i)-Bb^riesenie(i))
end
Ltheta
plot(0.1:0.1:2.2,Ltheta)
title('Ltheta, pri theta0=0.9 a theta1=1.5')
xlabel('theta')
toc

```

Simulácia operacnej charakteristiky

```
tic
th0=0.9;
th1=1.5;
    alfa=0.2;
    beta=0.2;
    a=log((1-beta)/alfa);
    b=log(beta/(1-alfa));
    theta=-100*ones(22,1);
    operacna_char=-100*ones(22,1);
    rozsah=-100*ones(22,1);
for i=1:22
    theta(i)=i/10;
    [f1, f2]=testovanielparametra(theta(i),th0,th1 );
    operacna_char(i)=(200-f1)/200;
    rozsah(i)=f2;
end
theta
operacna_char
plot(0.1:0.1:2.2,operacna_char)
title('Ltheta simulacne pri theta0=0.9 a theta1=1.5')
xlabel('theta')
toc

plot(0.1:0.1:2.2,rozsah)
title('stredna doba rozsahu simulacne pri theta0=0.9 a theta1=1.5')
xlabel('theta')
ylim([0,15])
```

Graf pre rôzne thety

```
tic
q=-1;
theta_gen1=0.4;
riesenie=zeros(15,15);
for v=1:15
    for w=(v+1):15
        q=testovanielparametra(theta_gen1,v/10,w/10);
        riesenie(v,w)=q;
    end
end
riesenie
toc
surf((1:15)/10,(1:15)/10,riesenie/200)
xlabel('theta0')
ylabel('theta1')
zlabel('pravdepodob. prijatia H1, ak alfa=beta=20%')
title('skutocna theta=0.4')
hold on
scatter3(0.4,0.4,riesenie(4,4)/200,'MarkerFaceColor',[0 .75 .75])
```