

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



VPLYV KORELÁCIE MEDZI FAKTORMI NA CENY
DLHOPISOV V DVOJFAKTOROVÝCH SHORT RATE
MODELOCH

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**VPLYV KORELÁCIE MEDZI FAKTORMI NA CENY
DLHOPISOV V DVOJFAKTOROVÝCH SHORT RATE
MODELOCH**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Zuzana Girová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Vplyv korelácie medzi faktormi na ceny dlhopisov v dvojfaktorových short rate modeloch
Effect of correlation between factors on bond prices in two-factor short rate models

Anotácia: 1. Numericky a analyticky zistiť, aký vplyv má korelácia medzi faktormi v dvojfaktorovom short rate modeli na ceny dlhopisov a výnosové krivky - pre konkrétne modely a potom sa pokúsiť nájsť vlastnosti, ktoré platia vo všeobecnosti. 2. V niektorých prípadoch je vplyv korelácie malý, vtedy sa zrejme korelácia nedá dobre odhadovať z výnosových kriviek. V práci sa zoberie konkrétny model a navrhne sa metóda kalibrácie, vrátane kalibrácie korelácie.

Vedúci: doc. RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Dátum zadania: 25.01.2017

Dátum schválenia: 27.01.2017

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

PodĎakovanie. Touto cestou sa chcem poďakovať svojej vedúcej diplomovej práce doc. RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za ochotu a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďalej jej ďakujem za odbornú pomoc, poskytnutie vhodnej literatúry a v neposlednom rade za schopnosť motivácie k pravidelnej a priebežnej práci.

Abstrakt v štátnom jazyku

GIROVÁ, Zuzana: Vplyv korelácie medzi faktormi na ceny dlhopisov v dvojfaktorových short rate modeloch. [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiťel: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2018, 79 s.

V našej práci sa venujeme modelovaniu okamžitej úrokovej miery. Cieľom je numericky a analyticky zistiť, aký vplyv má korelácia medzi faktormi v dvojfaktorovom short rate modeli na ceny dlhopisov a výnosové krivky. Prácu môžeme rozdeliť na teoretickú a praktickú časť. V teoretickej časti uvádzame základné pojmy v modelovaní okamžitej úrokovej miery a najznámejších predstaviteľov jednofaktorových modelov. Ďalej sme triedu modelov rozšírili o dvojfaktorové modely, v ktorých nás zaujíma vplyv korelácie medzi faktormi modelu. Pozornosť sme upriamili na dvojfaktorový Vašíčkov model, dvojfaktorový Fong-Vašíčkov model a konvergenčný model CKLS typu a odvodili rád konvergenzie. Ukazuje sa, že rád konvergenzie sa v modeloch líši. Toto pozorovanie je motiváciou k nájdeniu všeobecnej vlastnosti. To je v práci vyriešené pre všeobecný dvojfaktorový model.

V praktickej časti predstavujeme kalibráciu konvergenčného modelu Vašíčkovho typu. Vychádzame z [8], kde je navrhnutá kalibrácia modelu pre jednofaktorový Vašíčkov model. V našej práci sme postup z [8] zovšeobecnil na dvojfaktorový model úrokovej miery. Kalibráciu konvergenčného modelu testujeme najprv na simulovaných dátach, potom spustíme algoritmus na reálne dáta.

Kľúčové slová: úroková miera, model okamžitej úrokovej miery, dvojfaktorový model, konvergenčný model, korelácia, kalibrácia

Abstract

GIROVÁ, Zuzana: Effect of correlation between factors on bond prices in two-factor short rate models. [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2018, 79 p.

In our thesis we devoted ourselves to modelling short rate. The purpose of the thesis is a numerical and analytical derivation of correlation impact between factors in a two-factor short rate model on bond prices and yield curve. The thesis consists of two parts, theoretical and practical. In the first part we introduced basic concepts in the short rate modelling and the most famous representatives of one-factor models. Furthermore, we extended the model class to two-factor models, in which we investigated the impact of correlation between factors. We focused on the two-factor Vašíček model, the two-factor Fong-Vašíček model and the convergence model of CKLS type and deduced a rate of convergence. It turns out that the rate of convergence varies in the models. This observation is a motivation to find a general feature. This is solved in the work for a general two-factor model.

In the practical part, we present the calibration of the convergence model of the Vašíček type. We are based on [8], where model calibration is proposed for the one-factor Vašíček model. In our work, we proceeded from [8] and generalized to a two-factor interest rate model. Firstly, we calibrate the convergence model on simulated data, then run the algorithm on real data.

Keywords: interest rate, short rate model, two-factor model, convergence model, correlation, calibration

Obsah

Úvod	9
1 Úvod do modelovania úrokovej miery	11
1.1 Základné pojmy	11
1.2 Stochastický kalkulus	15
1.3 Modely okamžitej úrokovej miery	17
1.3.1 Jednofaktorové rovnovážne modely	18
2 Dvojfaktorové rovnovážne modely úrokovej miery	22
2.1 Odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice	22
2.2 Dvojfaktorový Vašíčkov model	24
2.2.1 Vplyv korelácie vo Vašíčkovom modeli	28
2.3 Fong-Vašíčkov model so stochastickou volatilitou	32
2.3.1 Vplyv korelácie vo Fong-Vašíčkovom modeli	34
2.4 Konvergenčný model CKLS typu	39
2.4.1 Taylorov rozvoj ceny dlhopisu	41
2.4.2 Taylorov rozvoj logaritmu ceny dlhopisu a porovnanie	43
2.5 Všeobecný model okamžitej úrokovej miery	46
3 Metoda kalibrácie konvergenčného modelu	49
3.1 Formulácia optimalizačných úloh konvergenčného modelu	49
3.2 Algoritmus na odhad európskych parametrov	51
3.2.1 Simulované dáta	52
3.2.2 Reálne dáta	55
3.3 Algoritmus na odhad domácich parametrov	57
3.3.1 Simulované dáta	59
3.3.2 Reálne dáta	61
4 Metóda maximálnej vierohodnosti na odhad parametrov modelov úrokových mier	63
4.1 Odhad trhovej ceny rizika pre európsky dlhopis	63
4.2 Odhad trhovej ceny rizika pre domáci dlhopis	67
4.3 Odhad korelácie modelu	69

5	Ďalšie výsledky kalibrácie	70
5.1	Kalibrácia medzibankovej úrokovej miery pobaltských štátov	70
	Záver	75
	Literatúra	77

Úvod

Počiatky úrokovej miery siahajú do hlbkej histórie. V časoch, kedy sa človek prvýkrát stretáva s pôžičkou, sa objavuje aj úrok. Úrok predstavoval akúsi istotu pre veriteľa, že sa mu vráti aspoň taká čiastka akú požičal. V dnešnej dobe môžeme na finančnom trhu pozorovať aj záporné úrokové miery, napr. referenčná úroková miera Euribor. Záporná úroková miera je fenomén, ktorý znamená, že veriteľ platí úroky za úver dlžníkovi. V reálnej ekonomike bol takýto úverový vzťah donedávna nepredstaviteľný, no v posledných rokoch čoraz viac centrálnych bank zavádza záporné úrokové miery.

Ďalšou charakteristikou úrokovej miery, ktorá dlhé roky sprevádzala finančný trh je konštantnosť. Úroková miera bola považovaná za pomaly sa meniaci parameter, teda bola konštantná. V dnešnej dobe naopak vykazuje náhodný vývoj, a teda vznikla potreba modelovania úrokovej miery. Modely úrokovej miery popisujú úrokovú mieru pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice a ich cieľom je okrem iného modelovať aj jej ďalší vývoj. Zásadným bodom pri modelovaní okamžitej úrokovej miery je zachytenie tejto miery ako teoretického začiatku výnosovej krivky.

V práci sa zameriavame najmä na dvojfaktorové modely okamžitej úrokovej miery. V modeloch uvažujeme aj koreláciu medzi faktormi modelu, pričom pracujeme s konštantnou hodnotou korelácie. Naším prvým cieľom je analyticky a numericky odvodiť vplyv korelácie na ceny dlhopisov vo vybraných modeloch okamžitej úrokovej miery. Pozornosť upriamujeme na dvojfaktorový Vašíčkov model, dvojfaktorový Fong-Vašíčkov model, konvergenčný model CKLS typu a všeobecný dvojfaktorový model. V spomenutých modeloch odvodíme rád konvergenzie. Druhým cieľom je navrhnúť kalibráciu modelu. Zoberieme konkrétny model a odhadneme jeho parametre, vrátane odhadovania korelácie.

Práca pozostáva z piatich kapitol. Prvé dve kapitoly môžeme zaradiť do teoretickej časti práce. Prvá kapitola je venovaná základnej terminológii z oblasti modelovania úrokovej miery, ktorá sa využíva v ďalších kapitolách ako aj stochastický kalkulus. V závere prvej kapitoly, predkladáme čitateľovi prehľad jednofaktorových modelov úrokovej miery. Obsahom druhej kapitoly je analytické odvodenie ceny dlhopisu v konkrétnych dvojfaktorových modeloch a určenie vplyvu korelácie. Pri odvodzovaní parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu vychádzame z [16]. Nakoniec sa zoberie všeobecný dvojfaktorový model, odvodí sa aproximácia ceny dlhopisu a nájde sa

rád rozdielu cien. Úvodom do praktickej časti práce je tretia kapitola. V tretej kapitole odhadneme hodnoty parametrov konvergenčného modelu Vašíčkovho typu metódou najmenších štvorcov. Vychádzame z [8], kde je navrhnutá kalibrácia modelu pre jednofaktorový Vašíčkov model. V našej práci sme postup z [8] zovšeobecnil na dvojfaktorový model úrokovej miery. Kalibráciu modelu testujeme najprv na simulovaných dátach, následne algoritmus použijeme na reálne dáta. Pomocou kalibrácie overujeme presnosť modelu. Odhadovanie trhovej ceny rizika pre európsky a domáci dlhopis je obsahom štvrtej kapitoly. Na ich odhadovanie aplikujeme metódu maximálnej vierohodnosti. V závere kapitoly uvádzame aj odhad korelácie modelu. Posledná kapitola je venovaná kalibrácii modelu pre pobaltské štáty.

1 Úvod do modelovania úrokovej miery

Finančný trh je veľmi rozsiahly a delí sa na viacero segmentov. V zásade sa člení podľa viacerých hľadísk, ako napr. časové hľadisko, predmetné hľadisko alebo iné. Na to, aby jednotlivé časti finančného trhu mohli účinne fungovať využívajú v praxi finančné nástroje. Podľa [11] za nástroj finančného trhu možno označiť mechanizmus získavania peňažných prostriedkov, a ich využívanie v záujme efektívneho hospodárenia s peňažnými prostriedkami v prospech ich vlastníkov. Predmetom nášho záujmu budú dve skupiny finančných nástrojov. Prvou skupinou sú tzv. *podkladové aktíva*, medzi ktoré radíme najmä akcie, úrokovú mieru a iné. Druhou skupinou sú *finančné deriváty*, ktoré sú odvodené od podkladových aktív.

V súčasnosti sa do popredia dostávajú deriváty úrokovej miery. Úroková miera sa využíva pri diskontovaní, ale čoraz častejšie definuje výnos derivátov. Hodnota derivátov úrokovej miery závisí od hodnoty samotnej úrokovej miery, resp. úrovne, na ktorej sa nachádza. Pri konštrukcii modelu na oceňovanie derivátov úrokovej miery je nevyhnutné brať do úvahy stochastický vývoj úrokovej miery. V oblasti finančného modelovania zohráva významnú úlohu aj časová štruktúra úrokových mier. Jej dôležitosť sa prejaví pri zostavovaní modelu na oceňovanie derivátov tak, aby sa čo najlepšie pripodobnil realite.

Cieľom tejto kapitoly je uviesť a stručne vysvetliť základné pojmy. Svoju nezapustiteľnú úlohu majú aj nástroje stochastického kalkulu, ktoré využijeme pri oceňovaní derivátov úrokových mier.

1.1 Základné pojmy

Za najjednoduchšie deriváty úrokovej miery môžeme označiť dlhopisy. *Dlhopisy* (bonds) sú investičné nástroje obchodovateľné na burze. Firmy, ako aj vláda využívajú dlhopisu k navýšeniu kapitálu. Dlhopis predstavuje záväzok dlžníka (eminent) voči veriteľovi, v ktorom sa dlžník zaväzuje vyplácať úrok (kupón) veriteľovi počas doby platnosti dlhopisu. V čase splatnosti dlhopisu (*maturity*) T vyplatí dlžník nominálnu hodnotu dlhopisu F . Dlhopis s nominálnou hodnotou rovnú 1 sa nazýva *diskontný dlhopis*. V práci budeme ďalej pracovať s bezkupónovým diskontným dlhopisom. Medzi ďalšie

deriváty úrokovej miery môžeme zaradiť napríklad swapy, forwardy alebo opcie.

Cenu dlhopisu v čase t so splatnosťou v čase T , $t < T$, označme $P(t, T)$. Čas do splatnosti dlhopisu τ vyjadruje vzťah $T - t$. Z ceny dlhopisu [16] určenej vzťahom

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, \quad 0 < t < T,$$

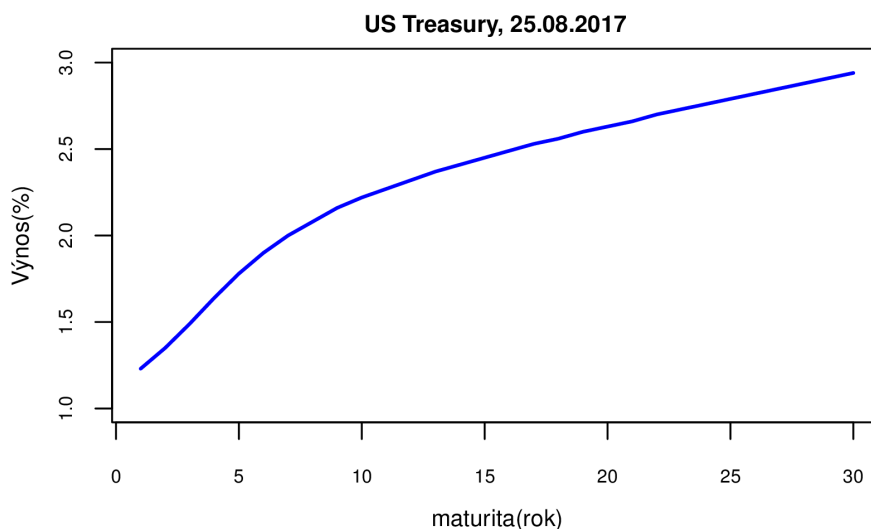
je odvodená časová štruktúra úrokových mier $R(t, T)$ ako funkcia

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}. \quad (1.1)$$

Časová štruktúra úrokových mier (term structure of interest rates) predstavuje závislosť úrokovej miery $R(t, T)$ od splatnosti dlhopisov T . Grafické vyjadrenie časovej štruktúry úrokových mier pre fixný čas t sa nazýva *výnosová krivka*. Výnosová krivka je zostavená z dlhopisov s podobnými charakteristikami, ale s rôznymi dobami splatnosti, väčšinou od troch mesiacov do tridsiatich rokov. Tvar tejto krivky nie je exaktne daný. V praxi sa ukazuje, že tvary výnosovej krivky môžu byť rôzne. Čitateľa ďalej oboznámime s tromi základnými tvarmi.

Je všeobecne známe, že výnos dlhopisu s dlhšou dobou splatnosti je vyšší ako výnos dlhopisu s kratšou dobou splatnosti. Vyšší výnos je dosiahnutý vďaka vyššiemu riziku, ktoré prináša dlhopis, ktorý je na trhu dlhšie. To nás vedie k *rastúcej výnosovej krivke*, ktorá je inak označovaná ako "normálna". Rastúca výnosová krivka je charakteristická pre trh, kedy sa neočakávajú výrazné zmeny, alebo ak trh očakáva rast úrokových mier. V súčasnosti veľké množstvo krajín zotrúva pri rastúcej výnosovej krivke, a tým očakáva, že bude ekonomicky prosperovať. Pomerne zriedkavo môžeme spozorovať na trhu klesajúcu výnosovú krivku. *Klesajúca výnosová krivka* je úzko spojená s očakávaním, že úrokové miery budú v najbližšom čase klesať. V takomto prípade dochádza k poklesu ekonomickej aktivity. Klesajúca výnosová krivka vzniká v dôsledku zvýšenia úrokových mier centrálnou bankou na nezvyčajne vysokú hodnotu. Táto situácia nastáva zväčša pri boji s infláciou. V prípade, že sa očakáva nárast úrokových mier v nasledujúcom čase a potom ich pokles, hovoríme o tzv. *"humped" výnosovej krivke*. Táto krivka sa v ekonomike vyskytuje vtedy, keď dlhopisy so strednedlhou dobou splatnosti majú najvyšší výnos.

Na Obr. 1.1 sme vykreslili rastúcu výnosovú krivku bezkupónových štátnych dlhopisov Spojených štátov amerických (US Treasury) na základe dát z [31].



Obr. 1.1: Rastúca výnosová krivka, zdroj dát [31].

V nasledujúcej tabuľke uvádzame číselné hodnoty výnosov štátnych dlhopisov zobrazených na Obr. 1.1. V prvom riadku sú maturity jednotlivých dlhopisov, v druhom riadku ich výnosy, ktoré sa pohybujú v rozmedzí od 1.23% do 2.94%.

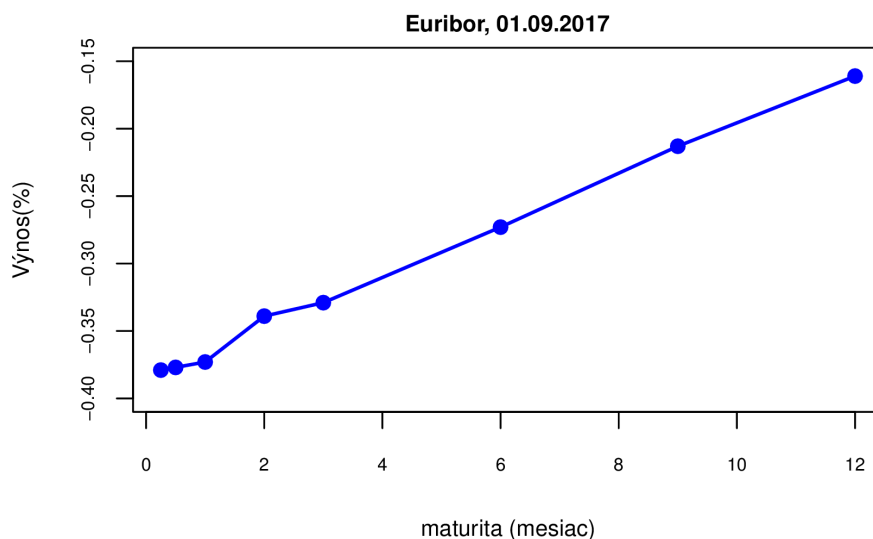
Maturita	1r.	2r.	5r.	10r.	15r.	20r.	25r.	30r.
Výnos(%)	1.23	1.35	1.78	2.22	2.45	2.63	2.79	2.94

Tabuľka 1.1: Výnosy US Treasury, zdroj dát [31] z dňa 25.08.2017.

V tabuľke 1.1 vystupujú len kladné hodnoty výnosu. V dnešnej dobe sa mnohé krajiny "tešia" zápornému výnosu zo štátnych dlhopisov. Medzi tieto krajiny patrí aj Slovensko. V praxi to znamená to, že investori platia vláde za to, aby jej požičali. Veľkú časť tejto zdanlivej iracionality podnecujú deflačné obavy a značná politika centrálnej banky zameraná na menovú politiku Európskej centrálnej banky (ECB) [28].

Európska centrálna banka je inštitúciou Európskej únie a je zároveň centrálnou bankou 19 krajín tohto spoločenstva. Okrem iného nastavuje referenčné sadzby - *Euribor*[®], *Euribid*[®], *Eonia*[®] [22], ktoré sú platné vo všetkých krajinách hospodárskej a menovej únie (HMÚ). *Euribor*[®] (Euro Interbank Offered Rate) je medzibanková referenčná úroková sadzba upravovaná na dennej báze. Táto sadzba bola zavedená v roku 1999 a je zverejňovaná denne o 11:00. Výpočet Euriboru je založený na priemer-ných úrokových sadzbách, za ktoré sú banky ochotné požičať euro termínové vklady na medzibankovom trhu. *Euribor*[®] a *Euribid*[®] sú vo vzťahu ako Ask a Bid. Podrobnejšie informácie sú na [21]. Na Obr.1.2 sme zobrazili časovú štruktúru európskej úrokovej

miery Euribor zo dňa 01.09.2017.



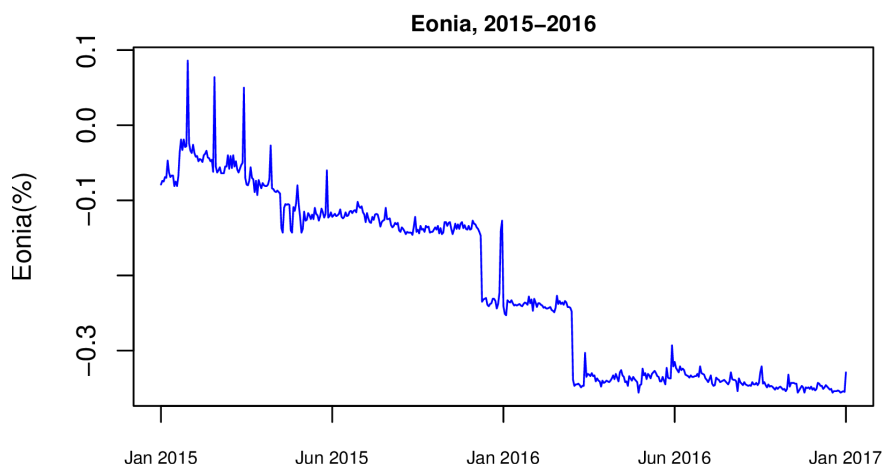
Obr. 1.2: Časová štruktúra úrokovej miery pre Euribor[®] [23].

Zavedením novej meny na Slovensku, eura, sme sa 1. januára 2009 stali súčasťou menovej únie, t. j. vstúpili sme do tretej fázy HMÚ. Navyiac, medzibankové trhy sa začali riadiť Euriborom, kým dovtedy bola slovenská referenčná úroková sadzba *Bribor*[®] (Bratislava Interbank Offered Rate) [27]. Krajiny, ktoré nepatria do HMÚ obchodujú so svojou úrokovou mierou. Ďalšími príkladmi úrokových mier na medzibankovom trhu sú: *Pribor* (Prague Interbank Offered Rate) [20], *Bubor* (Budapest Interbank Offered Rate) [26], *Shibor* (Shanghai Interbank Offered Rate) (zverejňovaná na [30]) alebo *Nibor* (Norwegian Interbank Offered Rate) (zverejňovaná na [29]). Azda najznámejšia z nich je *Libor* (London Interbank Offered Rate).

Na Obr. 1.3 predkladáme ukážku časového vývoja úrokovej miery *Eonia*[®] v priebehu dvoch rokov, 2015 a 2016. *Eonia*[®] (Euro OverNight Index Average) patrí do skupiny referenčných sadzieb na medzibankovom trhu v mene euro. Vzhľadom k tomu, že plní úlohu jednodňovej sadzby, za ktorú si banky medzi sebou požičiavajú, je označovaná aj ako tzv. *overnight*.

V teoretickej rovine sa často stretávame so *short rate* (okamžitá úroková miera). V praxi pristupujeme k aproximácii *okamžitej úrokovej miery* ako k úrokovej miere na krátky čas, ako napríklad tzv. *overnight* či mesačná úroková miera. Matematicky ju vyjadríme pomocou vzťahu

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T) = R(t, t). \quad (1.2)$$



Obr. 1.3: Časový vývoj úrokovej miery Eonia[®] v rokoch 2015-2016, zdroj dát [22].

Okamžitá úroková miera r_t predstavuje štartovací bod výnosovej krivky a podáva informáciu o jej ďalšom vývoji.

1.2 Stochastický kalkulus¹

Časový vývoj úrokovej miery je náhodný, t. j. stochastický, v čase ako referuje Obr. 1.3. Úrokovú mieru preto chápeme ako stochastický proces. *Stochastický proces* na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ je súbor náhodných premenných X_t , kde $t \in T \subset \mathbb{R}$ je parameter. V závislosti od voľby T rozlišujeme dva typy stochastických procesov. V prvom prípade, kedy T je vyjadrený ako interval, hovoríme o *stochastickom procese so spojitým časom*. V druhom prípade, kde T je daná množina $\{1, 2, 3, \dots\}$, myslíme *stochastický proces s diskretným časom*.

Vo finančnej matematike sa pomerne často stretávame s pojmom *Wienerov proces*, alebo jeho zovšeobecnením *Brownovým pohybom*. Oba procesy sú stochastické procesy Markovovského typu, t. j. budúca hodnota procesu závisí len od súčasnej hodnoty. Uvádzame presnú definíciu Wienerovho procesu.

Definícia 1.1. ([3], str. 27)

Wienerov proces je stochastický proces W_t , $t > 0$, ktorý spĺňa:

1. *Proces začína v počiatku sústavy, $W_0 = 0$,*
2. *Proces W_t má stacionárne, nezávislé prírastky,*
3. *Proces W_t je spojitý v čase t ,*

¹Spracované najmä na základe [3] a [16].

4. Prírastky $W_t - W_s$ sú normálne rozdelené so strednou hodnotou rovnou 0 a varianciou $|t - s|$, $W_t - W_s \sim N(0, |t - s|)$.

Malý prírastok Wienerovho procesu za malý časový úsek dt označíme dw a má nasledovné vlastnosti

$$dw \sim N(0, dt), \text{ t. j. } E[dw] = 0 \text{ a } Var[dw] = dt.$$

Prírastok Wienerovho procesu vystupuje aj v stochastickej diferenciálnej rovnici na modelovanie okamžitej úrokovej miery. Tento prírastok spôsobuje náhodnosť celej diferenciálnej rovnice

$$dr_t = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw.$$

V prípade dvoch a viacerých stochastických diferenciálnych rovníc zavádzame pojem *korelácia*. Koreláciu medzi procesmi môžeme zaviesť prostredníctvom korelácie medzi prírastkami Wienerových procesov dw_1, dw_2 , ktoré v ich stochastickej diferenciálnej rovnici vystupujú. Formálne zapísané

$$Cov(dw_1, dw_2) = \rho dt, \quad (1.3)$$

pričom predpokladáme, že ρ je konštanta z intervalu $[-1, 1]$. Hoci pojem korelácie, ako nástroja na meranie závislosti, prináša so sebou určité obmedzenia, v súčasnosti je predmetom rozsiahleho skúmania. Do popredia sa dostávajú stochastické korelačné modely. V našej práci budeme pracovať s konštantnou koreláciou.

V teórii oceňovania finančných derivátov nachádzame ako kľúčový nástroj *Itóovu formulu* (lemu). Itóova formula je odpoveďou na otázku, či je možné zostaviť stochastickú diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje vývoj akejkoľvek hladkej funkcie $f(x, t)$, zatiaľ čo premenná x je riešením zadanej stochastickej rovnice.

Lema 1.1. (Itóova lema). ([16], str. 27)

Nech $f(x, t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw,$$

kde w je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt,$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dw.$$

Intuitívny dôkaz Itóovej lemy môže čitateľ nájsť napríklad v [16].

1.3 Modely okamžitej úrokovej miery

Na modelovanie úrokovej miery existujú rôzne prístupy. V závislosti od informácie o vývoji úrokovej miery, ktorú modely majú v sebe zahrnutú, rozlišujeme dve hlavné triedy modelov. Prvým prístupom sú *rovnovážne modely*. Ako už napovedá samotný názov, rovnovážne modely zdôrazňujú koncept rovnováhy. Ich hlavnou myšlienkou je nájsť rovnováhu medzi dopytom a ponukou po finančných derivátoch.

Najznámejšími príkladmi rovnovážnych modelov sú Vašíčekov model (1977, publikovaný v [17]), Cox-Ingersoll-Ross model (1985, publikovaný v [6]) a Fong-Vašíčekov model (1991, publikovaný v [7]). Tieto modely majú konštantné parametre, ktoré môžeme odhadnúť z historických dát. Jednou z hlavných nevýhod rovnovážnych modelov sa ukazuje možný vznik arbitráže. Arbitrážna príležitosť vzniká v dôsledku nepresnosti v modelovaní časovej štruktúry úrokových mier a tým pádom sa cena derivátu vypočítaná modelom nezhoduje s reálnou cenou.

Tento nedostatok sa snažia odstrániť *bezarbitrážne modely*. Táto trieda modelov sa vyznačuje okrem iného tým, že súčasná časová štruktúra je vstupom a zároveň startovacím bodom. Naopak, v rovnovážnych modeloch je výstupom. Medzi významné bezarbitrážne modely boli zaradené práca finančných akademikov Thomas Ho a Sang bin Lee (1986, uvedené prácou v [9]) a práca profesorov John C. Hull a Alan White (1990, uvedené prácou v [10]).

Od vzniku prvého modelu úrokovej miery (Vašíček, 1977) vzniklo mnoho modelov s cieľom čo najlepšie opísať časovú štruktúru úrokových mier. Časom sa však ukázalo, že nie všetky vzniknuté modely prinášajú užitočné a presné výsledky. Na jednej strane máme jednoduchšie modely, ktoré nedokážu presne zachytiť pohyb časovej štruktúry a na druhej strane sofistikovanejšie modely, ktoré svojou zložitou konštrukciou sú ťažko aplikovateľné. Predmetom nášho záujmu budú tzv. *short-rate modely*. Short-rate modely zachytávajú vývoj okamžitej úrokovej miery. V závislosti od tvaru koeficientov vystupujúcich v modeloch budeme rozlišovať jednotlivé modely úrokovej

miery.

V tejto práci sa budeme ďalej zaoberať triedou rovnovážnych modelov, ktoré modelujú okamitú úrokovú mieru. Oceňovanie dlhopisov pomocou konkrétnych rovnovážnych modelov špecifikujeme neskôr.

1.3.1 Jednofaktorové rovnovážne modely

Charakteristickou črtou jednofaktorových modelov je závislosť vývoja okamžitej úrokovej miery od jedného faktora. Týmto faktorom a zároveň zdrojom náhodnosti je samotná úroková miera r . Jej dynamiku zachytáva stochastická diferenciálna rovnica, ktorá môže mať vo všeobecnosti tvar

$$dr(t) = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw,$$

kde $r(t)$ je úroková miera v čase $t = 0$, $\mu(r, t)$ predstavuje trend (drift) vo vývoji okamžitej úrokovej miery (deterministická zložka) a $\sigma(r, t)$ je volatilita procesu (stochastická zložka). Volatilita procesu určuje charakter náhodných fluktuácií úrokovej miery v okolí deterministickej zložky. dw je prírastok Wienerovho procesu za malý časový interval dt . Poznamenávame, že trend a volatilita nemusia nutne závisieť od času t . Závislosť od t nie je v žiadnom z tých modelov, ktorými sa ďalej zaoberáte.

Trend $\mu(r, t)$ je funkcia od okamžitej úrokovej miery r a času t . Jej tvar je zvyčajne definovaný výrazom $\mu(r, t) = \kappa(\theta - r)$, kde κ, θ sú kladné konštanty. Parameter κ je definovaný ako rýchlosť návratu k limitnej úrokovej miere a parameter θ je limitná úroková miera. Model s takýmto tvarom trendu má *mean reversion* vlastnosť. Podstata tejto vlastnosti spočíva v tom, že stredná hodnota úrokovej miery $E(r)$ je priťahovaná k rovnovážnej hodnote θ silou danou parametrom κ . Stredná hodnota úrokovej miery rieši diferenciálnu rovnicu

$$E(dr) = dE(r) = \kappa(\theta - E(r))dt + E(\sigma(r, t)dw) = \kappa(\theta - E(r))dt.$$

Volatilita modelu môže mať tiež rôzne tvary, ale najčastejšie sa stretávame s tvarom $\sigma(r, t) = \sigma r^\gamma$, kde $\sigma > 0$ a $\gamma \geq 0$ chápeme ako konštantné parametre. V závislosti od tvaru funkcie volatility budeme rozlišovať nasledovné modely okamžitej úrokovej miery

Vašíčkov model. Vašíčkov model je jedným z prvých a najjednoduchších modelov okamžitej úrokovej miery s vlastnosťou mean reversion. Stochastická diferenciálna rovnica v jednofaktorovom Vašíčkovom modeli je v tvare

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dw. \quad (1.4)$$

Hlavnou nevýhodou tohto modelu je konštantná volatilita. Ak je úroková miera blízka nule, hodnota volatility sa nemení. Dôsledkom čoho sa môže proces s nenulovou pravdepodobnosťou dostať aj do záporných hodnôt. Tento nedostatok odstránil model, ktorý predstavili John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll a Stephen A. Ross ako CIR model. V dnešnej dobe, kedy na finančnom trhu sa objavujú záporné úrokové miery, nehovoríme už o nedostatku.



Obr. 1.4: Vývoj úrokovej miery. Parametre modelu: $\sigma = 0.015$, $\kappa = 0.1$, $\theta = 0.1$, $r_0 = 0.15$.

Na Obr.1.4 sme vykreslili jednu trajektóriu Vašíčkovho modelu, ktorá začína v bode $r_0 = 0.15$. Vodorovná prerušovaná čiara na Obr.(1.4) vyjadruje strednú hodnotu, t. j. hodnotu parametra θ , ku ktorej je priťahovaná úroková miera r_t .

Cox-Ingersoll-Ross (CIR) model. CIR model je ďalším rovnovážnym modelom, ktorý je rozšírením Vašíčkovho modelu. Tento model využíva na modelovanie okamžitej úrokovej miery stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r}dw.$$

Volatilita modelu $\sigma\sqrt{r}$ nepripúšťa záporné hodnoty. V prípade, že úroková miera sa rovná nule, potom je aj volatilita nulová a trend nadvihne úrokovú mieru do kladných

čísiel. Naviac, ak je splnená podmienka $2\kappa\theta > \sigma^2$ úroková miera nadobúda hodnotu nula s nulovou pravdepodobnosťou.

Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders (CKLS) model. CKLS model [4] bol navrhnutý v roku 1992 na modelovanie správania sa okamžitej úrokovej miery. Okamžitá úroková miera sa v tomto modeli riadi nasledovnou stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma r^\gamma(t)dw.$$

V závislosti od voľby parametra γ dostávame konkrétne modely. Voľbou parametra $\gamma = 0$ získame Vašíčekov model a pri voľbe $\gamma = \frac{1}{2}$ zase CIR model. CKLS model je označovaný aj ako zovšeobecnený model. Kým jednofaktorové modely, Vašíček a CIR model, vedú k analytickému riešeniu pre cenu dlhopisu, v CKLS modeli je možné odvodíť cenu dlhopisu len numericky.

Medzi ďalšie významné jednofaktorové modely patrí napríklad Dothanov model (1978), či Cox-Ross model. Prehľad spomenutých jednofaktorových modelov aj spolu s tvarom stochastickej diferenciálnej rovnice uvádzame v tabuľke 1.2.

Model	SDR pre r
Vašíček	$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw$
CIR	$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw$
CKLS	$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw$
Dothan	$dr = \alpha r dt + \sigma r dw$
Cox-Ross	$dr = \beta r dt + \sigma r^\gamma dw$

Tabuľka 1.2: Ďalšie jednofaktorové modely okamžitej úrokovej miery.

V jednofaktorovom modeli určuje tvar výnosovej krivky jej začiatok, teda okamžitá úroková miera, a parametre modelu. Ak špecifikujeme parametre modelu, potom je výnosová krivka jednoznačne daná hodnotou okamžitej úrokovej miery. Výhodou jednofaktorových modelov je ich jednoduchosť. Naopak, tieto modely vykazujú menšiu flexibilitu na modelovanie skutočného vývoja úrokovej miery. V reálnom svete môžeme v rôznych časových okamihoch pozorovať rôzne výnosové krivky začínajúce v tej istej

okamžitej úrokovej miere. K riešeniu tohto javu sa používajú dvoj- a viacfaktorové modely okamžitej úrokovej miery. V závislosti od počtu faktorov, sú modely formulované pomocou stochastických diferenciálnych rovníc, pričom počet faktorov zodpovedá počtu týchto rovníc a rovnako počtu prítomných Wienerových procesov. V tejto práci sa budeme ďalej venovať len dvojfaktorovým modelom.

2 Dvojfaktorové rovnovážne modely úrokovej miery

V tejto časti práce predstavíme dvojfaktorové modely krátkodobej úrokovej miery, s ktorými budeme ďalej pracovať. V kapitole podrobnejšie popíšeme Vašíčkov model, Fong-Vašíčkov model a konvergenčný model CKLS typu. V podkapitole 2.1. odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu ako derivátu okamžitej úrokovej miery pre všeobecný dvojfaktorový model. Následne túto parciálnu diferenciálnu rovnicu aplikujeme v konkrétnych modeloch a odvodíme cenu dlhopisu. Postupovať budeme podľa [16]. Po odvodení cien dlhopisov zistíme, aký je vplyv korelácie na faktory modelu v jednotlivých modeloch. Nakoniec pomocou aproximácie odvodíme vplyv korelácie pre všeobecný model krátkodobej úrokovej miery.

2.1 Odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice²

Okamžitú úrokovú mieru r_t vo všeobecnom dvojfaktorovom modeli chápeme ako funkciu dvoch faktorov x, y , čo môžeme formálne zapísať ako $r_t = r_t(x, y)$. Pri odvodzovaní parciálnej diferenciálnej rovnice dvojfaktorového modelu vychádzame z predpokladu, že faktory x, y sa riadia stochastickými diferenciálnymi rovnicami

$$\begin{aligned} dx &= \mu_x(x, y)dt + \sigma_x(x, y)dw_1, \\ dy &= \mu_y(x, y)dt + \sigma_y(x, y)dw_2, \end{aligned}$$

kde w_1 a w_2 sú Wienerove procesy. Keďže faktory x, y môžu od seba závisieť, budeme uvažovať koreláciu medzi prírastkami Wienerových procesov dw_1 a dw_2 . Konkrétne budeme pracovať s konštantnou koreláciou, t. j. $\text{cov}(dw_1, dw_2) = \rho dt$, $\rho \in (-1, 1)$.

Cena dlhopisu $P = P(x, y, t)$ je funkcia od faktorov x, y a času t . Stochastickú diferenciálnu rovnicu pre cenu P dostaneme z viacrozmernej Itóovej lemy ako

$$dP = \mu dt + \sigma dw_1 + \bar{\sigma} dw_2,$$

kde

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_x \frac{\partial P}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\sigma_y^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho \sigma_x \sigma_y \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}, \\ \sigma &= \sigma_x \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \bar{\sigma} &= \sigma_y \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned}$$

²Spracované na základe [16].

Poznamenávame, že funkcie μ , σ a $\bar{\sigma}$ tiež závisia od faktorov x , y a času t . Ďalším krokom je konštrukcia bezrizikového portfólia π . Portfólio π zostavíme z troch dlhopisov s rôznymi dobami splatnosti T_1 , T_2 a T_3 . Počty dlhopisov v portfóliu označíme V_1 , V_2 a V_3

$$\pi = V_1 P(T_1) + V_2 P(T_2) + V_3 P(T_3).$$

Zmenu hodnoty portfólia π potom vyjadríme ako súčet

$$\begin{aligned} d\pi &= V_1 dP(T_1) + V_2 dP(T_2) + V_3 dP(T_3) \\ &= [V_1 \mu(T_1) + V_2 \mu(T_2) + V_3 \mu(T_3)] dt \\ &\quad + [V_1 \sigma(T_1) + V_2 \sigma(T_2) + V_3 \sigma(T_3)] dw_1 \\ &\quad + [V_1 \bar{\sigma}(T_1) + V_2 \bar{\sigma}(T_2) + V_3 \bar{\sigma}(T_3)] dw_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Z vývoja ceny portfólia daného rovnicou (2.1) chceme vylúčiť náhodnosť. Rovnica má dva náhodné členy a teda koeficienty k nim prislúchajúce položíme rovné nule

$$\begin{aligned} [V_1 \sigma(T_1) + V_2 \sigma(T_2) + V_3 \sigma(T_3)] &= 0, \\ [V_1 \bar{\sigma}(T_1) + V_2 \bar{\sigma}(T_2) + V_3 \bar{\sigma}(T_3)] &= 0. \end{aligned}$$

Ďalej chceme dosiahnuť bezarbitrážnosť modelu. Bezarbitrážnosť modelu znamená to, že výnos z takto skonštruovaného portfólia sa musí rovnať bezrizikovej úrokovej miere r , t. j. $d\pi = r\pi dt$. Vylúčením možnosti arbitráže sa dopracujeme k tretej identite

$$[V_1 \mu(T_1) + V_2 \mu(T_2) + V_3 \mu(T_3)] = r\pi.$$

Z odvodených identít tak dostávame sústavu lineárnych rovníc pre množstva dlhopisov V_1 , V_2 , V_3

$$\begin{bmatrix} \sigma(T_1) & \sigma(T_2) & \sigma(T_3) \\ \bar{\sigma}(T_1) & \bar{\sigma}(T_2) & \bar{\sigma}(T_3) \\ \mu(T_1) - rP(T_1) & \mu(T_2) - rP(T_2) & \mu(T_3) - rP(T_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Hľadáme netriviálne riešenie uvedenej sústavy. Sústava rovníc v maticovom tvare má netriviálne riešenie práve vtedy, keď riadky matice sú lineárne závislé. Táto situácia nastáva v prípade sústavy (2.2) vtedy, keď tretí riadok je lineárnou kombináciou predchádzajúcich dvoch. Existujú teda také λ_1 a λ_2 , že platí

$$\mu(T_i) - rP(T_i) = \lambda_1 \sigma(T_i) + \lambda_2 \bar{\sigma}(T_i) \quad \forall i = 1, 2, 3. \tag{2.3}$$

Trhová cena rizika λ_i môže závisieť od času t a faktorov x, y , ale nemôže závisieť od maturity T . Keďže maturity T_i boli zvolené ľubovoľne, (2.3) musí platiť pre hocikaké T .

Napokon dosadíme $\mu, \sigma, \bar{\sigma}$ do (2.3) a dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_x - \lambda_1 \sigma_x) \frac{\partial P}{\partial x} + (\mu_y - \lambda_2 \sigma_y) \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\sigma_y^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \\ + \rho \sigma_x \sigma_y \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - r(x, y)P = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2 Dvojfaktorový Vašíčkov model

Dvojfaktorový Vašíčkov model, publikovaný v [1] patrí do triedy modelov s vlastnosťou *mean reversion*. Zároveň je špeciálnym prípadom Ornstein-Uhlenbeckovho procesu s konštantnou volatilitou. Vo Vašíčkovom modeli za faktory vezmeme úrokové miery r_1, r_2 . Ďalej predpokladáme, že okamžitá úroková miera r_t je súčtom týchto dvoch nezávislých faktorov.

V nasledujúcej časti práce odvodíme cenu dlhopisu ako derivátu okamžitej úrokovvej miery pre Vašíčkov model s korelovanými zložkami. Pri odvodzovaní ceny dlhopisu budeme postupovať podľa [16]. Cena dlhopisu P závisí od faktorov $r_1, r_2 \in (-\infty, \infty)$ a od doby do splatnosti (maturity) $\tau = T - t \in (0, \infty)$. Ako vstup budeme uvažovať sústavu rovníc

$$dr_1 = \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1 dw_1, \quad (2.5)$$

$$dr_2 = \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2 dw_2, \quad (2.6)$$

$$\text{Cov}(dw_1, dw_2) = \rho dt.$$

Parametre modelu $\kappa_1, \kappa_2, \theta_1$ a θ_2 sú kladné konštanty. Volatilita modelu je v rovniciach vyjadrená konštantami σ_1, σ_2 .

Za predpokladu, že trhové ceny rizika λ_1, λ_2 sú konštanty, cena dlhopisu $P(r_1, r_2, \tau)$ je riešením parciálnej diferenciálnej rovnice (2.4). Dosadením (2.5), (2.6) do (2.4) dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu v tvare

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + [\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1 \sigma_1] \frac{\partial P}{\partial r_1} + [\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2 \sigma_2] \frac{\partial P}{\partial r_2} \\ + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 P}{\partial r_1 \partial r_2} - (r_1 + r_2)P = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Na dourčenie ceny dlhopisu potrebujeme ďalšiu podmienku. Počiatočná podmienka je v tvare $P(r_1, r_2, 0) = 1$ pre $\forall r_1, r_2$. Pri konštantných hodnotách λ_1, λ_2 , hľadáme riešenie v separovanom tvare

$$P(r_1, r_2, \tau) = P_1(r_1, \tau)P_2(r_2, \tau).$$

Z pôvodnej počiatočnej podmienky môžeme odvodiť počiatočné podmienky pre separovaný tvar a teda pre funkcie P_1 a P_2 platí $P_1(r_1, 0) = 1, P_2(r_2, 0) = 1$. Rovnicu (2.7) môžeme zapísať nasledovne

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P_1}{\partial \tau}P_2 - \frac{\partial P_2}{\partial \tau}P_1 + [\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1]\frac{\partial P_1}{\partial r_1}P_2 + [\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2]\frac{\partial P_2}{\partial r_2}P_1 \\ + \frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2 P_1}{\partial r_1^2}P_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2 P_2}{\partial r_2^2}P_1 + \rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial P_1}{\partial r_1}\frac{\partial P_2}{\partial r_2} - (r_1 + r_2)P_1P_2 = 0. \end{aligned}$$

Funkciu P si podľa [16] vyjadríme v tvare

$$P(r_1, r_2, \tau) = A_1(\tau)A_2(\tau)e^{-B_1(\tau)r_1 - B_2(\tau)r_2},$$

kde $P_i(r_i, \tau) = A_i(\tau)e^{-B_i(\tau)r_i}$, $i = 1, 2$. Aby počiatočné podmienky zostali zachované, platí $A_i(0) = 1, B_i(0) = 0$. Potom pre jednotlivé parciálne derivácie dostávame

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_i}{\partial \tau} &= \dot{A}_i e^{-B_i r_i} - \dot{B}_i A_i r_i e^{-B_i r_i}, \\ \frac{\partial P_i}{\partial r_i} &= -A_i B_i e^{-B_i r_i}, \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial r_i^2} &= A_i B_i^2 e^{-B_i r_i}. \end{aligned}$$

Odvođené parciálne derivácie dosadíme do rovnice (2.7). V každom člene tejto rovnice máme nenulový výraz $e^{-B_1(\tau)r_1 - B_2(\tau)r_2}$, ktorým môžeme obe strany rovnice predeliť. Tým sa nám rovnica zjednoduší. Označme $A = A_1 A_2$. V ďalšom kroku združíme tie členy, ktoré obsahujú člen r_1 , potom člen r_2 a tie, ktoré neobsahujú r_1 , ani r_2 a po úprave dostávame

$$\begin{aligned} [-\dot{A} + (\lambda_1\sigma_1 - \kappa_1\theta_1)AB_1 + (\lambda_2\sigma_2 - \kappa_2\theta_2)AB_2 + \frac{\sigma_1^2}{2}AB_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{2}AB_2^2 + \rho\sigma_1\sigma_2AB_1B_2] \\ + [\dot{B}_1A + \kappa_1AB_1 - A]r_1 + [\dot{B}_2A + \kappa_2AB_2 - A]r_2 = 0. \end{aligned}$$

Identita musí byť splnená pre $\forall r_1, r_2$, preto všetky tri výrazy v zátvorkách musia byť identický rovné nule. Dostávame teda sústavu troch obyčajných diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} \dot{A} &= (\lambda_1\sigma_1 - \kappa_1\theta_1)AB_1 + (\lambda_2\sigma_2 - \kappa_2\theta_2)AB_2 + \frac{\sigma_1^2}{2}AB_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{2}AB_2^2 + \rho\sigma_1\sigma_2AB_1B_2, \\ \dot{B}_1 &= 1 - \kappa_1B_1, \\ \dot{B}_2 &= 1 - \kappa_2B_2, \end{aligned}$$

s počiatočnými podmienkami $A(0) = 1$, $B_i(0) = 0$, $i = 1, 2$. Budeme hľadať riešenie tohto systému.

Všimnime si, že obyčajné diferenciálne rovnice pre funkcie $B_i(\tau)$ sú lineárne. Preto ich riešenie vieme ľahko analyticky vypočítať a spolu s počiatočnou podmienkou dostávame explicitné riešenia

$$B_1(\tau) = \frac{1}{\kappa_1}(1 - e^{-\kappa_1\tau}), \quad (2.8)$$

$$B_2(\tau) = \frac{1}{\kappa_2}(1 - e^{-\kappa_2\tau}). \quad (2.9)$$

Hľadanie riešenia obyčajnej diferenciálnej rovnice pre funkciu $A(\tau)$ je o niečo náročnejšie. Explicitné riešenia pre $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$ nezávisia od funkcie $A(\tau)$ iba od premennej τ . S využitím počiatočnej podmienky $A(0) = 1$, separáciou premenných a zintegrovaním získavame riešenie pre funkciu $A(\tau)$ v tvare

$$\ln A(\tau) = \int_0^\tau [(\lambda_1\sigma_1 - \kappa_1\theta_1)B_1 + (\lambda_2\sigma_2 - \kappa_2\theta_2)B_2 + \frac{\sigma_1^2}{2}B_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{2}B_2^2 + \rho\sigma_1\sigma_2B_1B_2] ds.$$

Dosadíme získané riešenia $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$ a opäť využijeme počiatočnú podmienku $A(0) = 1$. Po krátkej úprave nakoniec dostaneme

$$\ln A(\tau) = \ln \tilde{A}_1 + \ln \tilde{A}_2 + \rho \frac{\sigma_1\sigma_2}{\kappa_1\kappa_2} \left[\tau - \frac{1}{\kappa_1}(1 - e^{-\kappa_1\tau}) - \frac{1}{\kappa_2}(1 - e^{-\kappa_2\tau}) + \frac{1 - e^{-(\kappa_1+\kappa_2)\tau}}{\kappa_1 + \kappa_2} \right], \quad (2.10)$$

pričom

$$\begin{aligned} \ln \tilde{A}_i &= \left[\frac{1}{\kappa_i}(1 - e^{-\kappa_i\tau}) - \tau \right] R_{\infty i} - \frac{\sigma_i^2}{4\kappa_i^3}(1 - e^{-\kappa_i\tau})^2, \quad i = 1, 2, \\ R_{\infty i} &= \theta_i - \frac{\lambda_i\sigma_i}{\kappa_i} - \frac{\sigma_i^2}{2\kappa_i^2}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Pre cenu dlhopisu v dvojfaktorovom Vašíčkovom modeli platí vzťah

$$\ln P(r_1, r_2, \tau, \rho) = \ln A(\tau) - B_1(\tau)r_1 - B_2(\tau)r_2, \quad (2.11)$$

kde $\ln A(\tau)$ je dané rovnicou (2.10) a explicitné riešenia $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$ sú dané výrazmi (2.8), (2.9). Časovú štruktúru úrokových mier môžeme potom vo Vašíčkovom modeli vyjadriť ako

$$R(r_1, r_2, t, t + \tau) = -\frac{\ln P(r_1, r_2, \tau)}{\tau} = -\frac{\ln A_1 A_2}{\tau} + \frac{B_1}{\tau} + \frac{B_2}{\tau}. \quad (2.12)$$

Pri odvodzovaní ceny dlhopisu pre dvojfaktorový Vašíčkov model sme predpokladali, že korelácia medzi faktormi r_1 a r_2 je rovná konštante ρ . Ak by sme zobrali Vašíčkov model s predpokladom nulovej korelácie, t. j. $\rho = 0$, postup odvodu ceny dlhopisu by obsahoval rovnaké kroky ako pri Vašíčkovom modeli s nenulovou koreláciou. Položme teda $\rho = 0$. Cena dlhopisu potom spĺňa nasledovnú parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + [\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1]\frac{\partial P}{\partial r_1} + [\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2]\frac{\partial P}{\partial r_2} + \frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2} - (r_1 + r_2)P = 0. \quad (2.13)$$

Opäť budeme hľadať riešenie v separovanom tvare

$$P(r_1, r_2, \tau) = A_1(\tau)A_2(\tau)e^{-B_1(\tau)r_1 - B_2(\tau)r_2}$$

pri počiatočných podmienkach $P_1(r_1, 0) = 1$, $P_2(r_2, 0) = 1$. Jednotlivé derivácie funkcie P sú rovnaké bez ohľadu na koreláciu. Derivácie funkcie P dosadíme do rovnice (2.13). Dostávame sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} \dot{A} &= (\lambda_1\sigma_1 - \kappa_1\theta_1)AB_1 + (\lambda_2\sigma_2 - \kappa_2\theta_2)AB_2 + \frac{\sigma_1^2}{2}AB_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{2}AB_2^2, \\ \dot{B}_1 &= 1 - \kappa_1B_1, \\ \dot{B}_2 &= 1 - \kappa_2B_2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Funkcie B_1 , B_2 majú explicitné vyjadrenie totožné s výrazmi (2.8), (2.9). Integrovaním rovnice (2.14) a využitím vlastností integrálu dostávame súčet takmer identických integrálov líšiacich sa v indexe

$$\ln \tilde{A} = \ln \tilde{A}_1 + \ln \tilde{A}_2 = \int_0^\tau (\lambda_1\sigma_1 - \kappa_1\theta_1)B_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}B_1^2 d\tau + \int_0^\tau (\lambda_2\sigma_2 - \kappa_2\theta_2)B_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}B_2^2 d\tau.$$

Do výrazu ďalej dosadíme riešenie funkcií $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$, vypočítame integrály a využitím počiatočnej podmienky $A(0) = 1$ dostaneme konečné riešenie integrálov

$$\ln \tilde{A}_i = \left[\frac{1}{\kappa_i}(1 - e^{-\kappa_i\tau}) - \tau \right] R_{\infty i} - \frac{\sigma_i^2}{4\kappa_i^3}(1 - e^{-\kappa_i\tau})^2, \quad i = 1, 2,$$

kde

$$R_{\infty i} = \theta_i - \frac{\lambda_i\sigma_i}{\kappa_i} - \frac{\sigma_i^2}{2\kappa_i^2}, \quad i = 1, 2.$$

Za predpokladu nulovej korelácie medzi faktormi modelu, pre cenu dlhopisu v dvojfaktorovom Vašíčkovom modeli platí vzťah

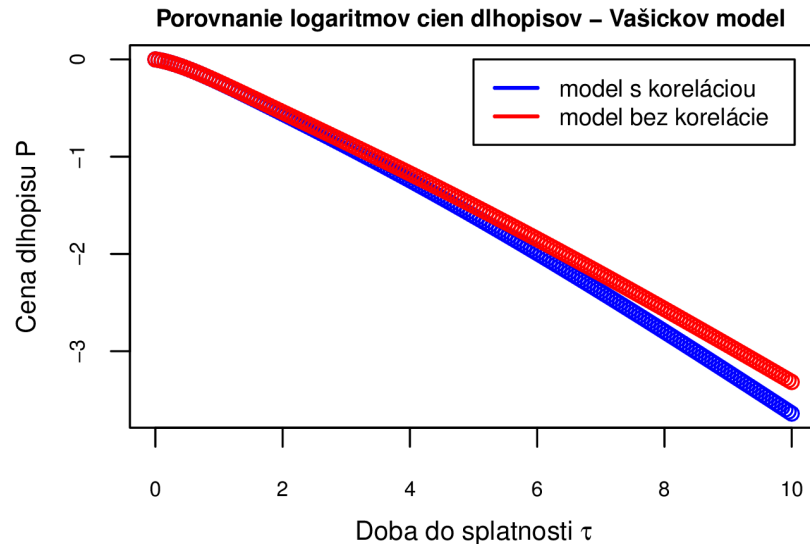
$$\ln P(r_1, r_2, \tau, 0) = \ln \tilde{A}(\tau) - B_1(\tau)r_1 - B_2(\tau)r_2, \quad (2.15)$$

kde $\ln \tilde{A}(\tau)$ a explicitné riešenia $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$ sme odvodili vyššie.

2.2.1 Vplyv korelácie vo Vašíčkovom modeli

Prvým cieľom tejto práce je zistiť, aký je vplyv korelácie medzi faktormi modelu na ceny dlhopisov. V tejto časti práce zoberieme cenu dlhopisu s koreláciou a cenu dlhopisu bez korelácie a porovnáme ich. Rozdiel cien aproximujeme a odvodíme experimentálny rád konvergenzie. Na odvodenie rádu konvergenzie budeme počítať Taylorov rozvoj rozdielu cien.

Na ilustráciu odvodených výsledkov zvolíme nasledujúce parametre modelu: $\kappa_1 = 0.3, \theta_1 = 0.4, \sigma_1 = 0.03, \lambda_1 = 0, \kappa_2 = 0.8, \theta_2 = 0.5, \sigma_2 = 0.8, \lambda_2 = 0, \rho = -0.5$. Na Obr.2.1 si môžeme všimnúť, že ceny dlhopisov bez ohľadu na hodnotu korelácie majú rovnaký tvar. Líšia sa iba výškou ceny v jednotlivých časoch. Pre nízke splatnosti sú ceny pri zvolených parametroch takmer totožne. Pri vyšších splatnostiach je rozdiel signifikantnejší.



Obr. 2.1: Logaritmus cien dlhopisov vo Vašíčkovom modeli. Parametre modelu: $\kappa_1 = 0.3, \theta_1 = 0.4, \sigma_1 = 0.03, \lambda_1 = 0, \kappa_2 = 0.8, \theta_2 = 0.5, \sigma_2 = 0.8, \lambda_2 = 0, \rho = -0.5$.

V nasledujúcej sekcii analyticky vyjadríme vplyv korelácie medzi faktormi pre

všeobecné hodnoty parametrov modelu. Zoberme rozdiel logaritmov cien dlhopisov

$$\ln P(r_1, r_2, \tau, \rho) - \ln P(r_1, r_2, \tau, 0),$$

pričom vychádzame zo vzorcov (2.11), (2.15). Funkcie B_1 , B_2 sú pre obe ceny rovnaké, preto sa navzájom odčítajú. Funkcie $\ln A$ a $\ln \tilde{A}$ nie sú identické

$$\ln P(r_1, r_2, \tau, \rho) - \ln P(r_1, r_2, \tau, 0) = \ln A - \ln \tilde{A}. \quad (2.16)$$

Funkcia $\ln A$ obsahuje navyše člen s koreláciou a teda rozdiel (2.16) dáva výraz

$$\rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\kappa_1 \kappa_2} \left[\tau - \frac{1}{\kappa_1} (1 - e^{-\kappa_1 \tau}) - \frac{1}{\kappa_2} (1 - e^{-\kappa_2 \tau}) + \frac{1 - e^{-(\kappa_1 + \kappa_2) \tau}}{\kappa_1 + \kappa_2} \right]. \quad (2.17)$$

Rozdiel logaritmov cien (2.17) je explicitne daná funkcia. Túto funkciu aproximujeme Taylorovým rozvojom elementárnych funkcií. Z aproximácie neskôr vyčítame rád rozdielu cien. Keďže $\rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\kappa_1 \kappa_2}$ predstavuje konštantu pri známych parametroch, aproximovať budeme len výraz v hranatej zátvorke. Hranatú zátvorku v (2.17) označíme ako funkciu od τ

$$f(\tau) = \tau - \frac{1}{\kappa_1} (1 - e^{-\kappa_1 \tau}) - \frac{1}{\kappa_2} (1 - e^{-\kappa_2 \tau}) + \frac{1 - e^{-(\kappa_1 + \kappa_2) \tau}}{\kappa_1 + \kappa_2}.$$

Vypočítajme jednotlivé derivácie funkcie $f(\tau)$ v bode $\tau = 0$, ktoré potrebujeme na vyjadrenie Taylorovho rozvoja

$$f^{(1)}(\tau)|_{\tau=0} = 1 - e^{-\kappa_1 \tau} - e^{-\kappa_2 \tau} + e^{-(\kappa_1 + \kappa_2) \tau}|_{\tau=0} = 0,$$

$$f^{(2)}(\tau)|_{\tau=0} = \kappa_1 e^{-\kappa_1 \tau} + \kappa_2 e^{-\kappa_2 \tau} - (\kappa_1 + \kappa_2) e^{-(\kappa_1 + \kappa_2) \tau}|_{\tau=0} = 0,$$

$$f^{(3)}(\tau)|_{\tau=0} = -\kappa_1^2 e^{-\kappa_1 \tau} - \kappa_2^2 e^{-\kappa_2 \tau} + (\kappa_1 + \kappa_2)^2 e^{-(\kappa_1 + \kappa_2) \tau}|_{\tau=0} = 2\kappa_1 \kappa_2,$$

$$f^{(4)}(\tau)|_{\tau=0} = \kappa_1^3 e^{-\kappa_1 \tau} + \kappa_2^3 e^{-\kappa_2 \tau} - (\kappa_1 + \kappa_2)^3 e^{-(\kappa_1 + \kappa_2) \tau}|_{\tau=0} = -3(\kappa_1^2 \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2^2),$$

$$f^{(5)}(\tau)|_{\tau=0} = -\kappa_1^4 e^{-\kappa_1 \tau} - \kappa_2^4 e^{-\kappa_2 \tau} + (\kappa_1 + \kappa_2)^4 e^{-(\kappa_1 + \kappa_2) \tau}|_{\tau=0} = 4\kappa_1^3 \kappa_2 + 6\kappa_1^2 \kappa_2^2 + 4\kappa_1 \kappa_2^3$$

Prvé dve derivácie funkcie $f(\tau)$ sú nulové a teda vypadnú. Taylorov rozvoj uvažovanej funkcie $f(\tau)$ rozvineme do piateho rádu a dostávame

$$\begin{aligned} f &= f(0) + f^{(1)}(0)\tau + \frac{1}{2}f^{(2)}(0)\tau^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(0)\tau^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)\tau^4 + \frac{1}{5!}f^{(5)}(0)\tau^5 + \mathcal{O}(\tau^6) \\ &= \frac{1}{3}\kappa_1 \kappa_2 \tau^3 - \frac{1}{8}(\kappa_1^2 \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2^2)\tau^4 + \frac{1}{5!}(4\kappa_1^3 \kappa_2 + 6\kappa_1^2 \kappa_2^2 + 4\kappa_1 \kappa_2^3)\tau^5 + \mathcal{O}(\tau^6). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Nakoniec výraz (2.18) dosadíme do výrazu (2.17). Rozdiel zlogaritmovaných cien dlhopisov $\ln P(r_1, r_2, \tau, \rho) - \ln P(r_1, r_2, \tau, 0)$ môžeme aproximovať

$$\rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\kappa_1 \kappa_2} \left(\frac{1}{3} \kappa_1 \kappa_2 \tau^3 - \frac{1}{8} (\kappa_1^2 \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2^2) \tau^4 + \frac{1}{5!} (4 \kappa_1^3 \kappa_2 + 6 \kappa_1^2 \kappa_2^2 + 4 \kappa_1 \kappa_2^3) \tau^5 + \mathcal{O}(\tau^6) \right) \quad (2.19)$$

$$\approx \rho \sigma_1 \sigma_2 \left(\frac{1}{3} \tau^3 - \frac{1}{8} (\kappa_1 + \kappa_2) \tau^4 + \frac{2}{5!} (2 \kappa_1^2 + 3 \kappa_1 \kappa_2 + 2 \kappa_2^2) \tau^5 \right). \quad (2.20)$$

Experimentálny rád konverencie (EOC) [13] predstavuje aproximáciu exponentu α v rovnici

$$\ln P(., \tau, \rho) - \ln P(., \tau, 0) = \mathcal{O}(\tau^\alpha), \quad \tau \rightarrow 0^+.$$

Hodnotu exponentu α môžeme odvodiť použitím nasledovného vzťahu

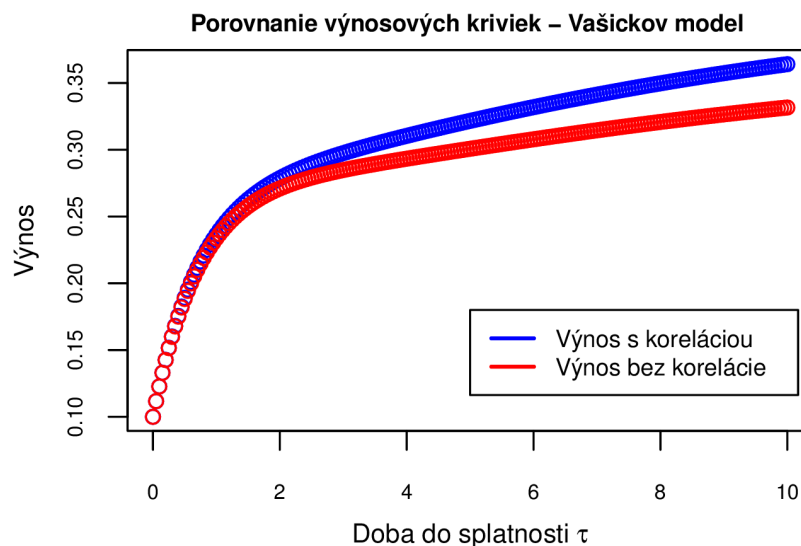
$$EOC_i = \frac{\ln(err_i) - \ln(err_{i+1})}{\ln(\tau_i) - \ln(\tau_{i+1})}, \quad \text{kde } err_i = |\ln P(., \tau_i, \rho) - \ln P(., \tau_i, 0)|. \quad (2.21)$$

Vybrané hodnoty EOC pre Vašíčkov model pri zvolených hodnotách parametrov uvádzame v tabuľke 2.1. Numericky, tabuľka 2.1, aj analyticky (2.19) sme odvodili rád konverencie, ktorého hodnota je 3.

τ	EOC
0.05	2.963908 ≈ 3
0.5	2.778990
1	2.609293
2.5	2.214168
5	1.816951

Tabuľka 2.1: Experimentálny rád konverencie - Vašíčkov model.

Na Obr. 2.2 sme zobrazili výnosovú krivku Vašíčkovho modelu s nenulovou koreláciou (modrá krivka) a výnosovú krivku Vašíčkovho modelu s nulovou koreláciou medzi faktormi modelu (červená krivka). Môžeme si všimnúť, že pri parametroch definovaných na začiatku tejto podkapitoly, dlhopis, ktorý uvažuje nenulovú koreláciu



Obr. 2.2: Porovnanie výnosových kriviek Vašickovho modelu.

medzi faktormi r_1 a r_2 , prináša vyšší výnos. Vyšší výnos značí, že výraz (2.17) je záporný, keďže výnos (2.12) má opačné znamienko ako logaritmus ceny, pre ktorý sme odvodili rozdiel (2.17).

V tabuľke 2.1 uvádzame niekoľko hodnôt výnosov dlhopisov s rôznymi dobami splatnosti. Výnos dlhopisu pre Vašickov model s nenulovou koreláciou označíme $R(\rho \neq 0)$, výnos dlhopisu v modeli bez korelácie označíme $R(\rho = 0)$. Tento krátky náhľad naznačuje rast rozdielu medzi výnosmi modelov vzhľadom na zvolené parametre na začiatku tejto podkapitoly, ktorý sme vykreslili aj na Obr. 2.2 pre všetky hodnoty maturity. Hodnoty výnosov vychádzajú z rovnakého bodu, t. j. $R_t = 0.1$. Pri takto zvolených parametroch môžeme pozorovať, že rozdiel medzi výnosmi rastie.

τ	Výnos $R(\rho \neq 0)$	Výnos $R(\rho = 0)$
0	0.1	0.1
0.5	0.1890894	0.1882713
1	0.2364150	0.2337050
5	0.3216153	0.3007283
10	0.3640868	0.3316262

Tabuľka 2.2: Výnosy dlhopisov.

2.3 Fong-Vašíčkov model so stochastickou volatilitou

Ďalším modelom triedy dvojfaktorových modelov je Fong-Vašíčkov model so stochastickou volatilitou. Tento model bol prvýkrát publikovaný v článku [7] v roku 1991. Model je pomenovaný po autoroch článku H. Gifford Fong a Oldrich A. Vašíček. Dvojfaktorový Fong-Vašíčkov model je založený na pozorovaní, že volatilita úrokovej miery nie je nutne konštantná. Prvý stochastický proces patrí okamžitej úrokovej miere r_t ako prvému faktorovi modelu. Tento proces, na rozdiel od Vašíčkovho modelu, závisí aj od druhého faktora. Druhým faktorom je stochastická volatilita y .

Vo Fong-Vašíčkovom modeli je zachytený vývoj oboch faktorov systémom stochastických diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} dr &= \kappa_1(\theta_1 - r)dt + \sqrt{y}dw_1, \\ dy &= \kappa_2(\theta_2 - y)dt + v\sqrt{y}dw_2. \end{aligned}$$

Ako v prípade Vašíčkovho modelu, najprv uvažujeme model s koreláciou, t. j. navyše predpokladáme $E(dw_1, dw_2) = \rho dt$. Trhovú mieru rizika v tomto modeli definujeme ako $\lambda_1\sqrt{y}$, resp. $\lambda_2\sqrt{y}$, kde λ_1, λ_2 sú konštanty. Následne dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu $P(r, y, \tau)$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + [\kappa_1(\theta_1 - r) - \lambda_1 y] \frac{\partial P}{\partial r} + [\kappa_2(\theta_2 - y) - \lambda_2 v y] \frac{\partial P}{\partial y} \\ + \frac{y}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{v^2 y}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho v y \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} - rP = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Počiatočná podmienka je v tvare $P(r, y, 0) = 1$.

V článku [14] je riešenie rovnice (2.22) definované v separovanom tvare

$$P(r, y, \tau) = A(\tau)e^{-B_1(\tau)r - B_2(\tau)y}. \quad (2.23)$$

Z počiatočnej podmienky $P(r, y, 0) = 1$ vyplýva, že pre funkcie A, B_1 a B_2 platí $A(0) = 1, B_1(0) = 0$ a $B_2(0) = 0$. Definovaná cena dlhopisu v tvare (2.23) je východiskom pre mnohé postupy hľadania časovej štruktúry úrokovej miery, ako napríklad [14]. V našej práci zvolíme postup uvedený v [16]. Z (2.23) odvodíme parciálne derivácie, ktoré vystupujú v rovnici (2.22). Následne spätne dosadíme odvodené parciálne derivácie do rovnice (2.22). V rovnici zlúčime výrazy, ktoré prislúchajú k faktorovi r a prislúchajúce k faktorovi y . Z platnosti identity (2.22) potom dostávame systém obyčaj-

ných diferenciálnych rovníc

$$\dot{A}(\tau) = -A(\tau)(\kappa_1\theta_1B_1(\tau) + \kappa_2\theta_2B_2(\tau)), \quad (2.24)$$

$$\dot{B}_1(\tau) = 1 - \kappa_1B_1(\tau), \quad (2.25)$$

$$\dot{B}_2(\tau) = -\lambda_1B_1(\tau) - \kappa_2B_2(\tau) - \lambda_2vB_2(\tau) - \frac{B_2^2(\tau)}{2} - \frac{v^2B_2^2(\tau)}{2} - v\rho B_1(\tau)B_2(\tau). \quad (2.26)$$

V nasledujúcej časti sa bližšie pozrieme na tento systém rovníc a uvedieme jeho riešenie. Obyčajná diferenciálna rovnica (2.25) pre $B_1(\tau)$ je lineárna a nezávisí od ostatných dvoch funkcií $A(\tau)$, $B_2(\tau)$. Hneď dostávame explicitné riešenie

$$B_1(\tau) = \frac{1}{\kappa_1}(1 - e^{-\kappa_1\tau}). \quad (2.27)$$

Rovnicu (2.26) pre funkciu $B_2(\tau)$ vieme riešiť numericky Runge-Kutta metódou. Najprv do rovnice

$$\dot{B}_2(\tau) = -\lambda_1B_1(\tau) - \frac{B_1^2(\tau)}{2} - [\kappa_2 + \lambda_2v + v\rho B_1(\tau)]B_2(\tau) - \frac{v^2B_2^2(\tau)}{2} \quad (2.28)$$

dosadíme nájdené riešenie funkcie $B_1(\tau)$ a potom aplikujeme explicitnú Runge-Kutta metódu. Nakoniec pristúpime k integrácii rovnice (2.24) pre funkciu $A(\tau)$. Do tejto rovnice dosadíme riešenia funkcií $B_1(\tau)$ a $B_2(\tau)$. Riešenie rovnice (2.24) uvádzame v tvare

$$\ln A(\tau) = -\theta_1\tau + \theta_1B_1(\tau) - \kappa_2\theta_2 \int_0^\tau B_2(s) ds. \quad (2.29)$$

Časová štruktúra úrokovej miery je potom vyjadrená

$$R(r, y, t) = -\frac{\ln A(\tau)}{\tau} + \frac{B_1(\tau)}{\tau}r + \frac{B_2(\tau)}{\tau}y.$$

Funkcie $\ln A(\tau)$, $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$ sú dané vzťahmi (2.29), (2.27) a integrovaním výrazu (2.28).

V prípade nulovej korelácie pracujeme s nasledovnými rovnicami

$$\dot{A}(\tau) = -A(\tau)(\kappa_1\theta_1B_1(\tau) + \kappa_2\theta_2B_2(\tau)), \quad (2.30)$$

$$\dot{B}_1(\tau) = 1 - \kappa_1B_1(\tau),$$

$$\dot{B}_2(\tau) = -\lambda_1B_1(\tau) - [\kappa_2 + \lambda_2v]B_2(\tau) - \frac{B_1^2(\tau)}{2} - \frac{v^2B_2^2(\tau)}{2},$$

ktorých riešenie dostávame v tvare

$$\ln P(r_1, r_2, \tau, 0) = \ln \tilde{A}(\tau) - B_1(\tau)r - \tilde{B}_2(\tau)y.$$

Funkcia B_1 je daná vzťahom (2.27), funkciu $\tilde{B}_2$ riešime numericky, opäť Runge-Kutta metódou. Nakoniec integrovaním rovnice (2.30) dostávame funkciu $\ln \tilde{A}$ v tvare

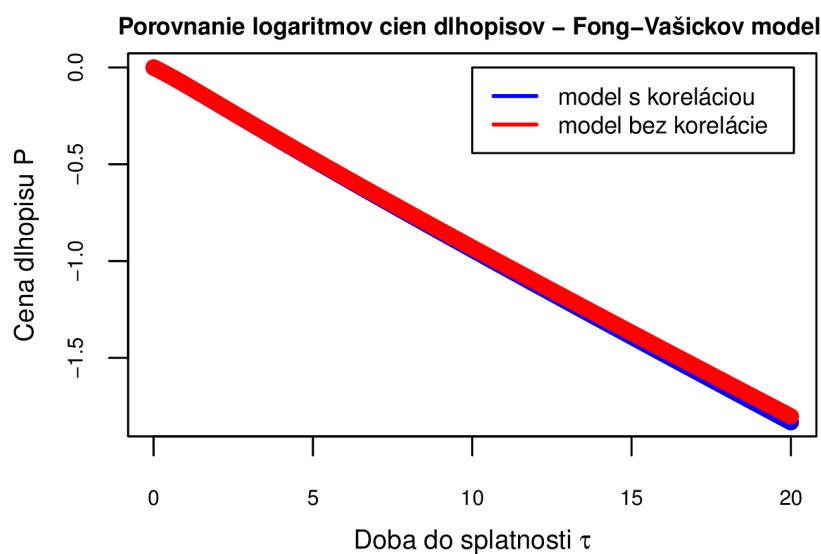
$$\ln \tilde{A}(\tau) = -\theta_1\tau + \theta_1 B_1(\tau) - \kappa_2\theta_2 \int_0^\tau \tilde{B}_2(s) ds.$$

2.3.1 Vplyv korelácie vo Fong-Vašíckovom modeli

V tejto časti určíte aproximáciu rozdielu logaritmov cien dvojfaktorového Fong-Vašíckovho modelu

$$\ln P(r_1, r_2, \tau, \rho) - \ln P(r_1, r_2, \tau, 0). \quad (2.31)$$

Pre lepšiu predstavu, ako sa správajú logaritmy cien dlhopisov $\ln P(r_1, r_2, \tau, \rho)$ a $\ln P(r_1, r_2, \tau, 0)$, predkladáme čitateľovi Obr.2.3. Na vykreslenie kriviek sme zvolili nasledujúce parametre modelu $\kappa_1 = 0.109, \theta_1 = 0.06522, \lambda_1 = -12, \kappa_2 = 1.482, \theta_2 = 0.000264, \lambda_2 = -5, v = 0.01934, \rho = -0.8$, ktorými budeme ďalej ilustrovať dosiahnuté výsledky. Ako obrázok referuje, hodnoty logaritmu ceny dlhopisu v modeli s koreláciou sú takmer totožné s hodnotami logaritmov cien bez korelácie pre dané hodnoty maturity.



Obr. 2.3: Porovnanie výnosových kriviek vo Fong-Vašíckovom modeli.

Tento nepatrný rozdiel cien môže byť spôsobený aj voľbou parametrov. Preto sa ďalej zameriame na analytické vyjadrenie rozdielu (2.31) pre všeobecne hodnoty parametrov. Využijeme vzťahy, ktoré sme odvodili vyššie

$$\begin{aligned}\ln P(r_1, r_2, \tau, \rho) &= \ln A(\tau) - B_1(\tau)r - B_2(\tau)y, \\ \ln P(r_1, r_2, \tau, 0) &= \ln \tilde{A}(\tau) - B_1(\tau)r - \tilde{B}_2(\tau)y.\end{aligned}$$

Ak si dobre všimneme, funkcia $B_1(\tau)$ daná vzťahom (2.27) nezávisí od korelácie ρ , ale funkcia $B_2(\tau)$ ako riešenie (2.28) už závisí. Vo výraze (2.29) vystupuje výraz $B_2(\tau)$, takže funkcia $A(\tau)$ tiež závisí od korelácie ρ .

Po zjednodušení rovnice (2.31) dostávame výraz

$$\ln P(r_1, r_2, \tau, \rho) - \ln P(r_1, r_2, \tau, 0) = \kappa_2 \theta_2 \int_0^\tau (\tilde{B}_2(s) - B_2(s)) ds + y(\tilde{B}_2(\tau) - B_2(\tau)). \quad (2.32)$$

S výrazom (2.32) budeme ďalej pracovať ako s funkciou od τ , t. j.

$$g(\tau) = \kappa_2 \theta_2 \int_0^\tau (\tilde{B}_2(s) - B_2(s)) ds + y(\tilde{B}_2(\tau) - B_2(\tau)). \quad (2.33)$$

Hodnota funkcie $g(\tau)$ v bode 0 je rovná 0, čo ľahko overíme dosadením hodnoty 0 do predpisu funkcie (2.33). Ďalej si vyjadríme derivácie funkcie $g(\tau)$ v bode nula. Ako notáciu derivácie si volíme horný index, v ktorom uvádzame rád derivácie.

Funkciu $g(\tau)$ derivujeme podľa premennej τ . Táto funkcia obsahuje integrál, kde premenná τ vystupuje na jeho hranici. Takisto obsahuje dve funkcie B_1, B_2 závislé od τ . Na derivovanie integrálu podľa jednej z jeho hranice využívame identitu, ktorá je v literatúre známa ako základná veta kalkulu [15]

Cieľom tabuľky 2.3 je prehľadnejšie vyjadrenie derivácií funkcie $B_i, \tilde{B}_i$, $i = 1, 2$, ktoré budeme ďalej dosadzovať do derivácii funkcie g . Následne tieto derivácie využijeme vo výpočte Taylorovho rozvoja. Taylorov rozvoj nám opäť poslúži na určenie rádu konvergencie. Jednotlivé derivácie funkcií $B_1, B_2, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2$ v bode 0 uvádzame v nasledujúcej tabuľke.

Derivácia	0	1	2	3	4
$B_1(\tau) _{\tau=0}$	0	1	$-\kappa_1$	κ_1^2	$-\kappa_1^3$
$\tilde{B}_1(\tau) _{\tau=0}$	0	1	$-\kappa_1$	κ_1^2	$-\kappa_1^3$
$B_2(\tau) _{\tau=0}$	0	0	$-\lambda_1$	$\lambda_1\kappa_1 + \lambda_1(\kappa_2 + \lambda_2v) - 1$	$-\lambda_1\kappa_1^2 - (\kappa_2 + \lambda_2v)B_2^{(3)}(0) + 3\kappa_1 + 3\rho v\lambda_1$
$\tilde{B}_2(\tau) _{\tau=0}$	0	0	$-\lambda_1$	$\lambda_1\kappa_1 + \lambda_1(\kappa_2 + \lambda_2v) - 1$	$-\lambda_1\kappa_1^2 - (\kappa_2 + \lambda_2v)B_2^{(3)}(0) + 3\kappa_1$

 Tabuľka 2.3: Derivácie funkcií B_1 , B_2 , $\tilde{B}_1$, $\tilde{B}_2$ do rádu 4.

Teraz pristúpime k samotným deriváciám v bode 0.

- Prvá derivácia funkcie $g(\tau)$

$$\begin{aligned}
 g^{(1)}(\tau)|_{\tau=0} &= \kappa_2\theta_2 \frac{d}{d\tau} \left[\int_0^\tau (\tilde{B}_2(s) - B_2(s) ds) \right] + y (\tilde{B}_2^{(1)}(\tau) - B_2^{(1)}(\tau))|_{\tau=0} \\
 &= \kappa_2\theta_2 (\tilde{B}_2(\tau) - B_2(\tau)) + y (\tilde{B}_2^{(1)}(\tau) - B_2^{(1)}(\tau))|_{\tau=0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

- Druhá derivácia funkcie $g(\tau)$

$$\begin{aligned}
 g^{(2)}(\tau)|_{\tau=0} &= \kappa_2\theta_2 (\tilde{B}_2^{(1)}(\tau) - B_2^{(1)}(\tau)) + y (\tilde{B}_2^{(2)}(\tau) - B_2^{(2)}(\tau))|_{\tau=0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

- Tretia derivácia funkcie $g(\tau)$

$$\begin{aligned}
 g^{(3)}(\tau)|_{\tau=0} &= \kappa_2\theta_2 (\tilde{B}_2^{(2)}(\tau) - B_2^{(2)}(\tau)) + y (\tilde{B}_2^{(3)}(\tau) - B_2^{(3)}(\tau))|_{\tau=0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

- Štvrtá derivácia funkcie $g(\tau)$

$$g^{(4)}(\tau)|_{\tau=0} = \kappa_2\theta_2 (\tilde{B}_2^{(3)}(\tau) - B_2^{(3)}(\tau)) + y (\tilde{B}_2^{(4)}(\tau) - B_2^{(4)}(\tau))|_{\tau=0}$$

Rozdiel $(\tilde{B}_2^{(4)}(\tau) - B_2^{(4)}(\tau))$, ktorý vystupuje v 4. derivácii, je nenulový. Dostávame teda

$$g^{(4)}(\tau)|_{\tau=0} = -3\rho v\lambda_1 y.$$

- Piata derivácia funkcie $g(\tau)$

$$g^{(5)}(\tau)|_{\tau=0} = \kappa_2 \theta_2 \left(\tilde{B}_2^{(4)}(\tau) - B_2^{(4)}(\tau) \right) + y \left(\tilde{B}_2^{(5)}(\tau) - B_2^{(5)}(\tau) \right) |_{\tau=0}$$

Pre deriváciu 5. rádu uvažujme rozdiel

$$\left(\tilde{B}_2^{(5)}(0) - B_2^{(5)}(0) \right) = -\rho v (10\kappa_1 \lambda_1 + 4\lambda_1(\kappa_2 + \lambda_2 v) - 4).$$

Dosadením výrazu do predpisu funkcie $g^{(5)}(\tau)|_{\tau=0}$ získavame

$$g^{(5)}(\tau)|_{\tau=0} = -\rho v (3\lambda_1 \kappa_2 \theta_2 + 10\lambda_1 \kappa_1 + 4\lambda_1(\kappa_1 + \lambda_2 v) - 4) y.$$

Rovnakým postupom by sme sa dopracovali k deriváciám vyššieho rádu.

Taylorov rozvoj rozviníme do 5. rádu a teda funkciu $g(\tau)$ vyjadríme nasledovne

$$g(\tau) = -\frac{3}{4!} \rho v \lambda_1 y \tau^4 - \frac{1}{5!} \rho v (3\lambda_1 \kappa_2 \theta_2 + 10\lambda_1 \kappa_1 + 4\lambda_1(\kappa_1 + \lambda_2 v) - 4) y + \mathcal{O}(\tau^6).$$

Nakoniec dostávame aproximáciu rozdielu (2.31) v tvare

$$\begin{aligned} \ln P(\rho \neq 0) - \ln P(\rho = 0) &= -\frac{3\rho v \lambda_1 y}{4!} \tau^4 - \frac{\rho v (3\lambda_1 \kappa_2 \theta_2 + 10\lambda_1 \kappa_1 + 4\lambda_1(\kappa_1 + \lambda_2 v) - 4) y}{5!} \tau^5 \\ &\quad + \mathcal{O}(\tau^6) \\ &\approx -\frac{3\rho v \lambda_1 y}{4!} \tau^4 - \frac{\rho v (3\lambda_1 \kappa_2 \theta_2 + 10\lambda_1 \kappa_1 + 4\lambda_1(\kappa_1 + \lambda_2 v) - 4) y}{5!} \tau^5. \end{aligned}$$

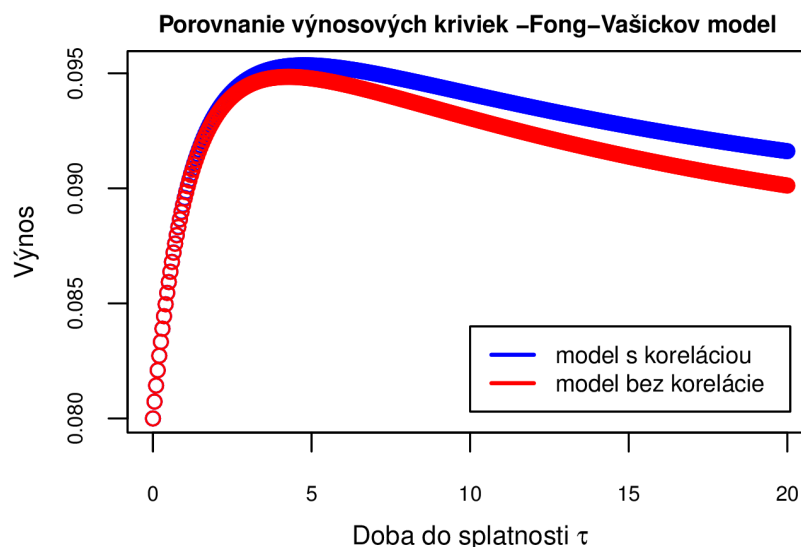
Ako v prípade dvojfaktorového Vašíčkovho modelu, pre zvolené parametre uvádzame vybrané hodnoty EOC, definovaného ako (2.21). V nasledujúcej tabuľke si môžeme všimnúť, že pre veľmi malé maturity, t. j. $\tau \rightarrow 0^+$, dostávame hodnotu exponentu α rovnú 4.

τ	EOC
0.05	3.912510 ≈ 4
0.5	3.620817
1	3.336838
2.5	2.703289
5	2.127923

Tabuľka 2.4: Experimentálny rád konverencie - Fong-Vašíčkov model.

Na Obr. 2.4 sme zobrazili výnosovú krivku Fong-Vašíčkovho modelu s nenulovou koreláciou (modrá krivka) a výnosovú krivku Fong-Vašíčkovho modelu s nulovou

koreláciou medzi faktormi modelu (červená krivka). Zvolili sme rovnaké parametre modelu ako pre Obr. 2.3. Výnosové krivky vykazujú tvar "humped". Táto krivka sa v ekonomike vyskytuje vtedy, keď dlhopisy so strednedlhou dobou splatnosti majú najvyšší výnos. Hodnoty výnosu najprv rastu a v okolí hodnoty maturity 5 nadobudnú svoju najvyššiu hodnotu a začnú pozvoľna klesať.



Obr. 2.4: Porovnanie výnosových kriviek vo Fong-Vašíckovom modeli.

V tabuľke 2.5 uvádzame vybrané hodnoty výnosov dlhopisov s rôznymi dobami splatnosti. Výnos dlhopisu pre dvojfaktorový Fong-Vašíckov model s koreláciou označíme $R(\rho \neq 0)$, výnos dlhopisu v modeli bez korelácie označíme $R(\rho = 0)$. Hodnoty výnosov začínajú v $\tau = 0$, kde je hodnota výnosu $R_t = 0.8$. Pri takto zvolených parametroch modelu môžeme pozorovať, že rozdiel medzi výnosmi aj v tomto prípade rastie.

τ	Výnos $R(\rho \neq 0)$	Výnos $R(\rho = 0)$
0	0.08	0.08
0.5	0.08593009	0.08592467
1	0.08958380	0.08955235
5	0.09534267	0.09477398
10	0.09410566	0.09305177

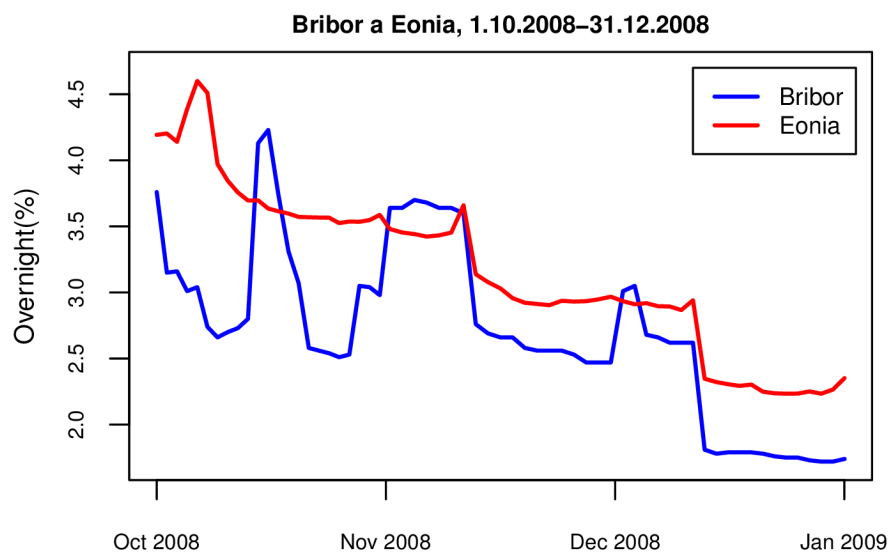
Tabuľka 2.5: Výnos dlhopisov vo Fong-Vašíckov modeli.

Rád rozdielu cien pre Fong-Vašíckov model je vyšší ako v prípade Vašíckovho modelu. Tento rozdiel je motiváciou k skúmaniu, čo je príčinou a od čoho rád rozdielu

závisí. Svoju pozornosť neskôr upriamime na všeobecný dvojfaktorový model, v ktorom je cena dlhopisu daná ako riešenie parabolickej parciálnej diferenciálnej rovnice.

2.4 Konvergenčný model CKLS typu

Do skupiny dvojfaktorových modelov zaraďujeme aj konvergenčné modely. Konvergenčný model modeluje správanie sa úrokovej miery pri vstupe pozorovanej krajiny do menovej únie. Prvý konvergenčný model bol publikovaný v roku 2000 v článku [5]. Corzo a Schwartz v tomto článku predstavili konvergenčný model, ktorý vychádza z Vašíčkovho modelu.



Obr. 2.5: Vývoj Briboru a Eonie pred vstupom do menovej únie, posledný štvrtrok 2008.

Faktor r_d modeluje úrokovú mieru domácej krajiny, v našom prípade Slovenska. Faktor r_e predstavuje úrokovú mieru spoločenstva krajín, t. j. Európskej únie. Dynamika v konvergenčnom modeli je teda v reálnej miere zachytená dvomi stochastickými diferenciálnymi rovnicami a to pre domácu a Európsku okamžitú úrokovú mieru

$$dr_d = (\alpha + \beta(r_e - r_d))dt + \sigma_d r_d^{\gamma_d} dw_d, \quad (2.34)$$

$$dr_e = \kappa(\theta - r_e)dt + \sigma_e r_e^{\gamma_e} dw_e, \quad (2.35)$$

$$\text{Cov}(dw_d, dw_e) = \rho dt.$$

Domáca úroková miera pred vstupom do menovej únie je ovplyvňovaná úrokovou mierou Európskej únie, t. j. mierou v menovej únii. Preto drift v rovnici (2.34) vyjadruje lineárnu funkciu premenných r_e , r_d . Koeficient $\beta > 0$ predstavuje silu, ktorou je priťahovaná domáca okamžitá úroková miera k európskej. V koeficiente α je

obsiahnuté možné vychýlenie. V rovnici (2.35) vystupuje jednofaktorový CKLS model, v ktorom je vývoj európskej okamžitej úrokovej miery priťahovaný k limitnej hodnote θ rýchlosťou $\kappa > 0$. Volatility jednotlivých rovníc sú vyjadrené v tvare $\sigma_d r_d^{\gamma_d}$, $\sigma_e r_e^{\gamma_e}$, pričom $\sigma_d, \sigma_e > 0$ a $\gamma_d, \gamma_e \geq 0$ sú dané konštanty. Koreláciu medzi prírastkami Wienerovho procesu dw_d, dw_e predstavuje konštanta $\rho \in (-1, 1)$.

Pri odvodzovaní ceny dlhopisu požadujeme vylúčenie arbitráže na trhu. Neexistencia arbitráže na trhu matematicky znamená to, že existuje rizikovo neutrálna miera. Podľa práce [18] modely krátkodobej úrokovej miery môžeme formulovať pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice v reálnej miere a trhovej ceny rizika $\lambda(r, t)$ alebo pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice v rizikovo neutrálnej miere. Volatility v oboch mierach sa zachovávajú, mení sa len driftová časť. Od driftu v reálnej miere odpočítame súčin trhovej miery rizika a volatility a dostaneme drift v rizikovo neutrálnej miere.

V prípade konvergenčného modelu CKLS typu je vývoj domácej a európskej úrokovej miery v rizikovo neutrálnej miere formulovaný systémom

$$dr_d = (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e)dt + \sigma_d r_d^{\gamma_d} dw_d, \quad (2.36)$$

$$dr_e = (b_1 + b_2 r_e)dt + \sigma_e r_e^{\gamma_e} dw_e, \quad (2.37)$$

kde w_d, w_e sú Wienerove procesy v rizikovo neutrálnej miere. Pôvodný systém (2.34)-(2.35) zodpovedá systému (2.36)-(2.37), ak $a_1 = \alpha - \lambda_d \sigma_d$, $a_2 = -\beta$, $a_3 = \beta$, $b_1 = \kappa \theta - \lambda_e \sigma_e$, $b_2 = -\kappa$.

Cena domáceho dlhopisu $P(r_d, r_e, \tau)$ so splatnosťou τ potom spĺňa nasledovnú parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) \frac{\partial P}{\partial r_d} + (b_1 + b_2 r_e) \frac{\partial P}{\partial r_e} + \frac{\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} + \frac{\sigma_e^2 r_e^{2\gamma_e}}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} \\ + \rho \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e r_e^{\gamma_e} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d \partial r_e} - r_d P = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

s počiatočnou podmienkou $P(r_d, r_e, 0) = 1$. Okamžité úrokové miery r_d, r_e nadobúdajú kladné hodnoty. Riešenie rovnice (2.38) budeme hľadať v tvare

$$P(r_d, r_e, \tau) = e^{A(\tau) - D(\tau)r_d - U(\tau)r_e}. \quad (2.39)$$

Počiatočne podmienky pre funkcie A, D, U vyplývajú z počiatočnej podmienky pre cenu domáceho dlhopisu: $A(0) = D(0) = U(0) = 0$. Parciálne derivácie funkcie (2.39) sú v tvare

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P}{\partial \tau} &= P(\dot{A} - \dot{D}r_d - \dot{U}r_e), & \frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} &= PD^2, \\
 \frac{\partial P}{\partial r_d} &= -PD, & \frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} &= PU^2, \\
 \frac{\partial P}{\partial r_e} &= -PU, & \frac{\partial^2 P}{\partial r_d \partial r_e} &= PDU.
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Dosadením tvaru riešenia (2.39) a jeho parciálnych diferenciálnych rovníc (2.40) do rovnice (2.38) dostávame

$$\begin{aligned}
 -\dot{A} + \dot{D}r_d + \dot{U}r_e - (a_1 + a_2r_d + a_3r_e)D - (b_1 + b_2r_e)U + \frac{\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}}{2}D^2 + \frac{\sigma_e^2 r_e^{2\gamma_e}}{2}U^2 \\
 + \rho\sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e r_e^{\gamma_e} \frac{\partial^2}{\partial D^2}U - r_d = 0.
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

V prípade konvergenčného modelu Vašíčkovho typu ($\gamma_d = \gamma_e = 0$) a pri predpoklade riešenia v separovanom tvare (2.39) dostávame z rovnice (2.41) sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc, ktorú vieme explicitne riešiť. V prípade konvergenčného modelu CIR typu ($\gamma_d = \gamma_e = \frac{1}{2}$), opäť pri predpoklade separácie premenných pre riešenie rovnice, vieme riešiť rovnicu (2.41), ale len v prípade nulovej korelácie. Explicitné riešenie týchto modelov možno nájsť napríklad v [18]. Teraz sa bližšie pozrime na konvergenčný model CKLS typu. Tu je situácia iná ako v predchádzajúcich modeloch. Nemáme ani explicitné riešenie, ani sa nedá separovať a transformovať na sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc. Rovnica (2.41) nie je splnená pre všetky r_d, r_e ani ak $\rho \neq 0$, ani ak $\rho = 0$.

2.4.1 Taylorov rozvoj ceny dlhopisu

V predchádzajúcej časti práce sme ukázali, že konvergenčný model CKLS typu nemá explicitné riešenie pre cenu dlhopisu v separovanom tvare. V tejto sekcii vyjadríme cenu dlhopisu v tvare Taylorovho rozvoja a určíme jeho koeficienty. Pripomeňme, že cena dlhopisu $P(r_d, r_e, \tau)$ spĺňa parciálnu diferenciálnu rovnicu (2.38). Zavedme nasledovne označenie

$$\begin{aligned}
 \mu_d &= (a_1 + a_2r_d + a_3r_e), & \tilde{\sigma}_d &= \sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}, & \tilde{\rho} &= \rho\sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e r_e^{\gamma_e}. \\
 \mu_e &= (b_1 + b_2r_e), & \tilde{\sigma}_e &= \sigma_e^2 r_e^{2\gamma_e},
 \end{aligned}$$

Potom rovnica (2.38) je totožná s rovnicou

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + \mu_d \frac{\partial P}{\partial r_d} + \mu_e \frac{\partial P}{\partial r_e} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_d \frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_e \frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} + \tilde{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d \partial r_e} - r_d P = 0 \quad (2.42)$$

$$P(r_d, r_e, 0) = 1, \quad \tau \in (0, T),$$

a teda cena dlhopisu $P(r_d, r_e, \tau)$ ju tiež spĺňa. Taylorov rozvoj funkcie $P(r_d, r_e, \tau)$ v okolí bodu $\tau = 0$ je v tvare

$$P(r_d, r_e, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(r_d, r_e) \tau^j. \quad (2.43)$$

Z počiatočnej podmienky $P(r_d, r_e, 0) = 1$ hneď dostávame hodnotu prvého koeficientu $c_0(r_d, r_e) = 1$ pre $\forall r_d, r_e > 0$. Na dourčenie ďalších koeficientov odvodíme rekurentný vzťah.

Parciálnu deriváciu funkcie $c_j(r_d, r_e)$ podľa premennej r_d budeme v nasledujúcej časti textu označovať ako $\dot{c}_{jr_d}(r_d, r_e)$, kde bodka značí deriváciu funkcie a dolný index, v tomto prípade r_d , vyjadruje premennú, podľa ktorej funkciu derivujeme. Druhú deriváciu označíme dvomi bodkami a do indexu opäť vložíme informáciu, podľa ktorej premennej derivujeme. V prvom kroku do rovnice (2.42) dosadíme cenu dlhopisu v tvare (2.43).

$$\begin{aligned} & - \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k(r_d, r_e) k \tau^{k-1} \right] + \mu_d \left[\sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_{kr_d}(r_d, r_e) \tau^k \right] + \mu_e \left[\sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_{kr_e}(r_d, r_e) \tau^k \right] \\ & + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_d \left[\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{c}_{kr_d^2}(r_d, r_e) \tau^k \right] + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_e \left[\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{c}_{kr_e^2}(r_d, r_e) \tau^k \right] \\ & + \tilde{\rho} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{c}_{kr_d r_e}(r_d, r_e) \tau^k \right] - r_d \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k(r_d, r_e) \tau^k \right] = 0. \end{aligned}$$

Rovnicu ďalej upravíme takto. Členy v zátvorkách rovnice rozpíšeme. Združíme členy prisluchajúce k $\tau^0, \tau^1, \tau^2 \dots$ a dostaneme

$$\begin{aligned} & \tau^0 \left[-c_1 + \mu_d \dot{c}_{0r_d} + \mu_e \dot{c}_{0r_e} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_d \ddot{c}_{0r_d^2} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_e \ddot{c}_{0r_e^2} + \tilde{\rho} \ddot{c}_{0r_d r_e} - r_d c_0 \right] \\ & + \tau^1 \left[-2c_2 + \mu_d \dot{c}_{1r_d} + \mu_e \dot{c}_{1r_e} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_d \ddot{c}_{1r_d^2} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_e \ddot{c}_{1r_e^2} + \tilde{\rho} \ddot{c}_{1r_d r_e} - r_d c_1 \right] \\ & + \dots = 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Identita (2.44) je splnená pre $\forall \tau$ a teda výrazy v zátvorkách sú rovné nule. Nakoniec

vyjadrením funkcie c_{k+1} z k -teho výrazu dostávame rekurentný vzťah

$$c_{k+1} = \frac{1}{(k+1)} \left[\mu_d \dot{c}_{kr_d} + \mu_e \dot{c}_{kr_e} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_d \ddot{c}_{kr_d^2} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_e \ddot{c}_{kr_e^2} + \tilde{\rho} \ddot{c}_{kr_d r_e} - r_d c_k \right] \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.45)$$

s počiatočnou podmienkou $c_0 = 1$.

Dopočítaním koeficientov Taylovho rozvoja $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ pomocou vzťahu (2.45) a vynechaním posledných členov dostávame aproximáciu riešenia

$$P(r_d, r_e, \tau) \approx \sum_{j=0}^n c_j(r_d, r_e) \tau^j.$$

2.4.2 Taylorov rozvoj logaritmu ceny dlhopisu a porovnanie

Vplyv korelácie budeme opäť pozorovať vzhľadom na logaritmus ceny dlhopisu. Pri odvodení logaritmu ceny dlhopisu budeme postupovať rovnako ako v predchádzajúcej časti práce. Označme logaritmus ceny dlhopisu ako

$$f(r_d, r_e, \tau, \rho) = \ln P(r_d, r_e, \tau, \rho). \quad (2.46)$$

Pôvodnú parciálnu diferenciálnu rovnicu (2.42) jednoduchou transformáciou prevedieme na rovnicu

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f}{\partial \tau} + \mu_d \frac{\partial f}{\partial r_d} + \mu_e \frac{\partial f}{\partial r_e} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_d \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r_d^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial r_d} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_e \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r_e^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial r_e} \right)^2 \right] \\ + \tilde{\rho} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r_d \partial r_e} + \frac{\partial f}{\partial r_d} \frac{\partial f}{\partial r_e} \right] - r_d = 0, \end{aligned} \quad (2.47)$$

ktorú spĺňa funkcia (2.46) pri počiatočnej podmienke $f(r_d, r_e, 0) = 0, \quad \tau \in (0, T)$.

Ďalej rozviníme funkciu f do tvaru

$$f(r_d, r_e, \tau, \rho) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(r_d, r_e) \tau^j. \quad (2.48)$$

Tento tvar funkcie f dosadíme do rovnice (2.47) a dostávame

$$\begin{aligned} - \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k(r_d, r_e) k \tau^{k-1} \right] + \mu_d \left[\sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_{kr_d}(r_d, r_e) \tau^k \right] + \mu_e \left[\sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_{kr_e}(r_d, r_e) \tau^k \right] \\ + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_d \left[\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{c}_{kr_d^2}(r_d, r_e) \tau^k + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_{kr_d}(r_d, r_e) \tau^k \right)^2 \right] \\ + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_e \left[\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{c}_{kr_e^2}(r_d, r_e) \tau^k + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_{kr_e}(r_d, r_e) \tau^k \right)^2 \right] \\ + \tilde{\rho} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{c}_{kr_d r_e}(r_d, r_e) \tau^k + \sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_{kr_d}(r_d, r_e) \tau^k \sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_{kr_e}(r_d, r_e) \tau^k \right] - r_d = 0. \end{aligned}$$

Rovnakým postupom ako v časti 2.4.1 sa dopracujeme k rekurentnému vzťahu pre koeficienty vzťahu (2.48). Prvý koeficient $c_0(r_d, r_e) = 0$ vieme jednoducho získať z počiatočnej podmienky $f(r_d, r_e, 0) = 0$. Združením členov s koeficientom τ^0 dostávame rovnicu pre koeficient $c_1(r_d, r_e)$

$$c_1 = \mu_d \dot{c}_{0r_d} + \mu_e \dot{c}_{0r_e} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_d \left(\ddot{c}_{0r_d^2} + \dot{c}_{0r_d}^2 \right) + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_e \left(\ddot{c}_{0r_e^2} + \dot{c}_{0r_e}^2 \right) + \tilde{\rho} \left(\ddot{c}_{0r_d r_e} + \dot{c}_{0r_d} \dot{c}_{0r_e} \right) - r_d,$$

ktorej riešením sa dopracujeme ku koeficientu $c_1(r_d, r_e) = -r_d$. Ďalšie koeficienty z riešenia (2.48) dostaneme zo vzťahu

$$\begin{aligned} c_{k+1} = & \frac{1}{(k+1)} \left[\mu_d \dot{c}_{kr_d} + \mu_e \dot{c}_{kr_e} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_d \left(\ddot{c}_{kr_d^2} + \sum_{i=0}^k \dot{c}_{ir_d} \dot{c}_{k-ir_d} \right) \right] \\ & + \frac{1}{(k+1)} \left[\frac{1}{2} \tilde{\sigma}_e \left(\ddot{c}_{kr_e^2} + \sum_{i=0}^k \dot{c}_{ir_e} \dot{c}_{k-ir_e} \right) + \tilde{\rho} \left(\ddot{c}_{kr_d r_e} + \sum_{i=0}^k \dot{c}_{ir_d} \dot{c}_{k-ir_e} \right) \right], \quad \forall k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.49)$$

Nakoniec dostávame aproximáciu logaritmu ceny dlhopisu v konvergenčnom modeli CKLS typu v prípade nenulovej korelácie v tvare

$$\ln P(r_d, r_e, \tau, \rho) \approx c_1(r_d, r_e)\tau + c_2(r_d, r_e)\tau^2 + c_3(r_d, r_e)\tau^3 + c_4(r_d, r_e)\tau^4, \quad (2.50)$$

kde

$$\begin{aligned} c_1(r_d, r_e) &= -r_d, \\ c_2(r_d, r_e) &= -\frac{1}{2}(a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e), \\ c_3(r_d, r_e) &= \frac{1}{6} [\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d} - a_2(a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) - a_3(b_1 + b_2 r_e)], \\ c_4(r_d, r_e) &= \frac{1}{8} \left[a_3 \rho \sigma_d \sigma_e r_d^{\gamma_d} r_e^{\gamma_e} + \sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d} \left(\frac{1}{3} \gamma_d (2\gamma_d - 1) \sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d-2} + a_2 \right) \right] \\ &+ \frac{1}{12} \left[\left(\gamma_d \sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d-1} - \frac{1}{2} a_2^2 \right) (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) \right] \\ &- \frac{1}{24} [(a_3 b_2 + a_2 a_3)(b_1 + b_2 r_e)]. \end{aligned}$$

Uvažujme teraz konvergenčný model s nulovou koreláciou, t. j. $\rho = 0$. Logaritmus ceny dlhopisu v tomto modeli budeme hľadať opäť v tvare (2.46). Vychádzať budeme z rovnice (2.48), pričom člen pri $\hat{\rho}$ vypadne. Vyjadrenie prvý koeficientu b_0

dostávame z počiatočnej podmienky. Združením členov pri koeficiente τ^0 dostávame

$$b_1 = \mu_d \dot{b}_{0r_d} + \mu_e \dot{b}_{0r_e} + \frac{1}{2} \ddot{\sigma}_d (\ddot{b}_{0r_d^2} + \dot{b}_{0r_d}^2) + \frac{1}{2} \ddot{\sigma}_e (\ddot{b}_{0r_e^2} + \dot{b}_{0r_e}^2) - r_d,$$

ktorej riešením je $b_1(r_d, r_e) = -r_d$. Analogicky, porovnaním koeficientov $\tau^2, \tau^3, \dots$ vyjadríme rekurentný vzťah

$$\begin{aligned} b_{k+1} = & \frac{1}{(k+1)} \left[\mu_d \dot{b}_{kr_d} + \mu_e \dot{b}_{kr_e} + \frac{1}{2} \ddot{\sigma}_d \left(\ddot{b}_{kr_d^2} + \sum_{i=0}^k \dot{b}_{ir_d} \dot{b}_{k-ir_d} \right) \right] \\ & + \frac{1}{(k+1)} \left[\frac{1}{2} \ddot{\sigma}_e \left(\ddot{b}_{kr_e^2} + \sum_{i=0}^k \dot{b}_{ir_e} \dot{b}_{k-ir_e} \right) \right], \quad \forall k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.51)$$

Postupne zo vzťahu (2.51) dostaneme koeficienty $b_2, b_3, \dots$. Aproximáciu logaritmu ceny dlhopisu v konvergenčnom modeli CKLS typu v prípade nulovej korelácie následne vyjadríme v tvare

$$\ln P(r_d, r_e, \tau, 0) \approx b_1(r_d, r_e)\tau + b_2(r_d, r_e)\tau^2 + b_3(r_d, r_e)\tau^3 + b_4(r_d, r_e)\tau^4, \quad (2.52)$$

kde

$$\begin{aligned} b_1(r_d, r_e) &= -r_d, \\ b_2(r_d, r_e) &= -\frac{1}{2}(a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e), \\ b_3(r_d, r_e) &= \frac{1}{6} [\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d} - a_2(a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) - a_3(b_1 + b_2 r_e)], \\ b_4(r_d, r_e) &= \frac{1}{8} \left[\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d} \left(\frac{1}{3} \gamma_d (2\gamma_d - 1) \sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d-2} + a_2 \right) \right] \\ &+ \frac{1}{12} \left[\left(\gamma_d \sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d-1} - \frac{1}{2} a_2^2 \right) (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) \right] \\ &- \frac{1}{24} [(a_3 b_2 + a_2 a_3)(b_1 + b_2 r_e)]. \end{aligned}$$

Teraz vyjadríme vplyv korelácie v konvergenčnom modeli ako rozdiel cien (2.50) a (2.52),

$$\begin{aligned} \ln P(r_d, r_e, \tau, \rho) - \ln P(r_d, r_e, \tau, 0) &\approx c_1(r_d, r_e)\tau + c_2(r_d, r_e)\tau^2 + c_3(r_d, r_e)\tau^3 + c_4(r_d, r_e)\tau^4 \\ &- b_1(r_d, r_e)\tau + b_2(r_d, r_e)\tau^2 + b_3(r_d, r_e)\tau^3 + b_4(r_d, r_e)\tau^4. \end{aligned}$$

Koeficienty c_1, c_2, c_3 sa zhodujú s koeficientmi b_1, b_2, b_3 . Preto z uvedeného rozdielu cien dostávame výsledok

$$\ln P(r_d, r_e, \tau, \rho) - \ln P(r_d, r_e, \tau, 0) \approx \frac{1}{8} a_3 \rho \sigma_d \sigma_e r_d^{\gamma_d} r_e^{\gamma_e} \tau^4.$$

2.5 Všeobecný model okamžitej úrokovej miery

V poslednej časti kapitoly o dvojfaktorových modeloch okamžitej úrokovej miery budeme skúmať vplyv korelácie vo všeobecnom modeli. Všeobecný dvojfaktorový model okamžitej miery je popísaný dvoma stochastickými diferenciálnymi rovnicami

$$\begin{aligned} dr_1 &= (a_1 + a_2 r_1 + a_3 r_2)dt + \sigma_1 r_1^{\gamma_1} dw_1, \\ dr_2 &= (b_1 + b_2 r_1 + b_3 r_2)dt + \sigma_2 r_2^{\gamma_2} dw_2, \\ \text{Cov}(dw_1, dw_2) &= \rho dt. \end{aligned}$$

Drift v oboch rovniciach je vyjadrený v rizikovo neutrálnej miere Q ako lineárna funkcia príslušnej úrokovej miery r_i , $i = 1, 2$, kde $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ sú konštantné koeficienty modelu. Volatility modelu sú v známom tvare $\sigma_i r_i^{\gamma_i}$, $i = 1, 2$.

Uvažujme logaritmus ceny dlhopisu formulovaný v tvare (2.48). Okamžitá úroková miera r je pomocou r_1 a r_2 daná ako $r = g(r_1, r_2)$. Potom cena (2.48) spĺňa rovnicu

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f}{\partial \tau} + \mu_1 \frac{\partial f}{\partial r_1} + \mu_2 \frac{\partial f}{\partial r_2} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_1 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r_1^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial r_1} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r_2^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial r_2} \right)^2 \right] \\ + \tilde{\rho} \left[\frac{\partial^2 P}{\partial r_1 \partial r_2} + \frac{\partial f}{\partial r_1} \frac{\partial f}{\partial r_2} \right] - g(r_1, r_2) = 0, \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$f(r_1, r_2, 0, \rho) = 0, \quad \tau > 0,$$

kde sme zaviedli označenie

$$\begin{aligned} \mu_1 &= a_1 + a_2 r_1 + a_3 r_2, & \tilde{\sigma}_1 &= \sigma_1^2 r_1^{2\gamma_1}, \\ \mu_2 &= b_1 + b_2 r_1 + b_3 r_2, & \tilde{\sigma}_2 &= \sigma_2^2 r_2^{2\gamma_2}, \\ & & \tilde{\rho} &= \rho \sigma_1 r_1^{\gamma_1} \sigma_2 r_2^{\gamma_2}. \end{aligned}$$

Analogickým postupom ako v predchádzajúcich podkapitolách odvodíme rekurentný vzťah. Pre prvý koeficient (2.48) platí $c_0(r_1, r_2) = 0$. Z (2.53) ďalej dostávame platnosť

$$\begin{aligned} c_1 &= \mu_1 \dot{c}_{0r_1} + \mu_2 \dot{c}_{0r_2} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_1 \left(\ddot{c}_{0r_1^2} + \dot{c}_{0r_1}^2 \right) + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_2 \left(\ddot{c}_{0r_2^2} + \dot{c}_{0r_2}^2 \right) \\ &+ \tilde{\rho} \left(\ddot{c}_{0r_1 r_2} + \dot{c}_{0r_1} \dot{c}_{0r_2} \right) - g(r_1, r_2), \end{aligned}$$

Pri odvodení koeficientov pre $k = 1, 2, \dots$ vychádzame zo vzťahu (2.49), ktorý je uplatniteľný aj vo všeobecnom dvojfaktorovom modeli.

Nakoniec dostávame aproximáciu logaritmu ceny dlhopisu vo všeobecnom modeli v prípade nenulovej korelácie ρ v tvare

$$\ln P(r_1, r_2, \tau, \rho) \approx c_1(r_1, r_2)\tau + c_2(r_1, r_2)\tau^2, \quad (2.54)$$

kde

$$\begin{aligned} c_1(r_1, r_2) &= -g(r_1, r_2), \\ c_2(r_1, r_2) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(-\sigma_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r_2^2} r_2^{2\gamma_2} - 2\rho\sigma_1 r_1^{\gamma_1} \sigma_2 r_2^{\gamma_2} \frac{\partial^2 g}{\partial r_1 \partial r_2} - \sigma_1^2 r_1^{2\gamma_1} \frac{\partial^2 g}{\partial r_1^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - (b_1 + b_2 r_1 + b_3 r_2) \frac{\partial g}{\partial r_2} - (a_1 + a_2 r_1 + a_3 r_2) \frac{\partial g}{\partial r_1} \right]. \end{aligned}$$

V prípade všeobecného modelu okamžitej úrokovej miery s nulovou koreláciou opäť vychádzame z rekurentného vzťahu (2.49), kde za $\tilde{\rho}$ dosadíme hodnotu 0. Prvé dva koeficienty c_0, c_1 nezávisia od parametra ρ , preto budú identické aj pre model s nulovou koreláciou. Aproximácia logaritmu ceny dlhopisu v tomto modeli je definovaná ako

$$\ln P(r_1, r_2, \tau, 0) \approx b_1(r_1, r_2)\tau + b_2(r_1, r_2)\tau^2, \quad (2.55)$$

kde

$$\begin{aligned} b_1(r_1, r_2) &= -g(r_1, r_2), \\ b_2(r_1, r_2) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(-\sigma_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r_2^2} r_2^{2\gamma_2} - \sigma_1^2 r_1^{2\gamma_1} \frac{\partial^2 g}{\partial r_1^2} \right) - \frac{\partial g}{\partial r_2} (b_1 + b_2 r_1 + b_3 r_2) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[(a_1 + a_2 r_1 + a_3 r_2) \frac{\partial g}{\partial r_1} \right]. \end{aligned}$$

Odčítaním cien (2.54), (2.55) sa ľahko dopracujeme k výsledku

$$\ln P(r_1, r_2, \tau, \rho) - \ln P(r_1, r_2, \tau, 0) \approx \frac{1}{2} \rho \sigma_1 r_1^{\gamma_1} \sigma_2 r_2^{\gamma_2} \frac{\partial^2 g}{\partial r_1 \partial r_2} \tau^2 \quad (2.56)$$

Tvary členov $c_3, c_4, c_5, b_3, b_4, b_5, \dots$ sú už komplikovanejšie a rozsiahle. Pre účely tejto práce uvedieme rozdiel (2.56) osobitne pre ďalší člen. Odčítaním členov $c_3 - b_3$ dostávame koeficient pri τ^3 v tvare

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{12}\sigma_2^2r_2^{2\gamma_2}\left(\rho\sigma_1r_1^{\gamma_1}\sigma_2r_2^{\gamma_2}\frac{\partial^4g}{\partial r_1\partial r_2^3}+2\gamma_2\rho\sigma_1r_1^{\gamma_1}\sigma_2r_2^{\gamma_2-1}\frac{\partial^3g}{\partial r_1\partial r_2^2}\right. \\
 & \left. +(\gamma_2-1)\gamma_2\rho\sigma_1r_1^{\gamma_1}\sigma_2r_2^{\gamma_2-2}\frac{\partial^2g}{\partial r_1\partial r_2}\right) \\
 & +\frac{1}{6}\rho\sigma_1\sigma_2r_1^{\gamma_1}r_2^{\gamma_2}\left(-\gamma_2\sigma_2^2r_2^{2\gamma_2-1}\frac{\partial^3g}{\partial r_1\partial r_2^2}-\frac{1}{2}\sigma_2^2r_2^{2\gamma_2}\frac{\partial^4g}{\partial r_1\partial r_2^3}-\rho\sigma_1r_1^{\gamma_1}\sigma_2r_2^{\gamma_2}\frac{\partial^4g}{\partial r_1^2\partial r_2^2}\right. \\
 & -\gamma_1\rho\sigma_1r_1^{\gamma_1-1}\sigma_2r_2^{\gamma_2}\frac{\partial^3g}{\partial r_1\partial r_2^2}-\gamma_2\rho\sigma_1r_1^{\gamma_1}\sigma_2r_2^{\gamma_2-1}\frac{\partial^3g}{\partial r_1^2\partial r_2}-\gamma_1\gamma_2\rho\sigma_1r_1^{\gamma_1-1}\sigma_2r_2^{\gamma_2-1}\frac{\partial^2g}{\partial r_1\partial r_2} \\
 & -\frac{1}{2}\sigma_1^2r_1^{2\gamma_1}\frac{\partial^4g}{\partial r_1^3\partial r_2}-\gamma_1\sigma_1^2r_1^{2\gamma_1-1}\frac{\partial^3g}{\partial r_1^2\partial r_2}-(b_1+b_2r_1+b_3r_2)\frac{\partial^3g}{\partial r_1\partial r_2^2} \\
 & -(a_1+a_2r_1+a_3r_2)\frac{\partial^3g}{\partial r_1^2\partial r_2}-b_2\frac{\partial^2g}{\partial r_2^2}-a_3\frac{\partial^2g}{\partial r_1^2}-b_3\frac{\partial^2g}{\partial r_1\partial r_2}-a_2\frac{\partial^2g}{\partial r_1\partial r_2}+\mathbf{2\frac{\partial g}{\partial r_1}\frac{\partial g}{\partial r_2}} \\
 & -\frac{1}{12}\sigma_1^2r_1^{2\gamma_1}\left(\rho\sigma_1r_1^{\gamma_1}\sigma_2r_2^{\gamma_2}\frac{\partial^4g}{\partial r_1^3\partial r_2}+2\gamma_1\rho\sigma_1r_1^{\gamma_1-1}\sigma_2r_2^{\gamma_2}\frac{\partial^3g}{\partial r_1^2\partial r_2}\right. \\
 & \left. +(\gamma_1-1)\gamma_1\rho\sigma_1r_1^{\gamma_1-2}\sigma_2r_2^{\gamma_2}\frac{\partial^2g}{\partial r_1\partial r_2}\right) \\
 & -\frac{1}{6}(b_1+b_2r_1+b_3r_2)\left(\rho\sigma_1r_1^{\gamma_1}\sigma_2r_2^{\gamma_2}\frac{\partial^3g}{\partial r_1\partial r_2^2}+\gamma_2\rho\sigma_1r_1^{\gamma_1}\sigma_2r_2^{\gamma_2-1}\frac{\partial^2g}{\partial r_1\partial r_2}\right) \\
 & -\frac{1}{6}(a_1+a_2r_1+a_3r_2)\left(\rho\sigma_1r_1^{\gamma_1}\sigma_2r_2^{\gamma_2}\frac{\partial^3g}{\partial r_1^2\partial r_2}+\gamma_1\rho\sigma_1r_1^{\gamma_1-1}\sigma_2r_2^{\gamma_2}\frac{\partial^2g}{\partial r_1\partial r_2}\right)
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Treba poznamenať, že v prípade, ak je jeden z faktorov okamžitá úroková miera, ale druhý faktor predstavuje inú úrokovú mieru alebo volatilitu, modrý člen v (2.57) tak vypadne. Túto situáciu možno spozorovať napríklad pri Fong-Vašíčkovom modeli, kde jeden faktor je okamžitá úroková miera a druhý faktor predstavuje volatilitu. V tomto modeli člen c_3 je nulový a teda rád rozdielu logaritmov dosahuje vyššiu hodnotu. Iná situácia nastáva, ak je okamžitá úroková miera súčtom faktorov r_1, r_2 . V tomto prípade modrý člen v (2.57) nadobudne nenulovú hodnotu. Ako príklad uvádzame Vašíčkov model, kde $g = r_1 + r_2$ a teda prvé derivácie podľa jednotlivých faktorov sú rovné jednej. Potom už ľahko vidieť, že dostávame výsledok odvodený v časti 2.2.1.

3 Metoda kalibrácie konvergenčného modelu

V tejto kapitole sa zameriame na aplikáciu modelov okamžitej úrokovej miery. Model aplikujeme na reálne dáta, t. j. z reálnych dát určíme hodnoty parametrov modelu - *kalibrácia modelu*. Pojem *kalibrácia* je v mnohých ohľadoch chápaný ako dôležitý, ale nie nutný krok k validácii modelu. Najznámejšími a najpoužívanějšími prístupmi na odhadovanie hodnoty parametrov sú *metóda najmenších štvorcov* (least squares method) a *metóda maximálnej vierohodnosti* (maximum likelihood estimation). V našej práci sa budeme najprv zaoberať prvým zo spomínaných prístupov - metódou najmenších štvorcov. Neskôr aplikujeme aj metódu maximálnej vierohodnosti.

Hlavnou myšlienkou metódy najmenších štvorcov je nájsť neznáme parametre regresného modelu tak, aby suma štvorcov rozdielu medzi reálnymi hodnotami a hodnotami modelu bola čo najmenšia. Táto metóda predstavuje teda minimalizačný problém. Uvažujme nasledujúce značenie. Okamžitú úrokovú mieru definujeme ako vektor $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)'$, kde r_i je hodnota okamžitej úrokovej miery realizovaná v i -tý deň. Nech R_{ij} predstavuje výnos pozorovaný na trhu v i -tý deň pre maturitu τ_j . Pre výnos, ktorý sme získali pomocou modelu s maturitou τ_j a okamžitou úrokovou mierou r_i zavedieme značenie $R(r_i, \tau_j)$. Váhu danú pre i -tý deň a j -tú maturitu označíme ako w_{ij} . Počet pozorovaní za dané obdobie označíme n a počet maturít m pozorovaných v jednotlivých dňoch. V súlade s uvedeným značením, účelová funkcia optimalizačného problému vyzerá nasledovne

$$F = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} (R(r_i, \tau_j) - R_{ij})^2, \quad (3.1)$$

$$F = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (\ln P(r_i, \tau_j) + \tau_j R_{ij})^2. \quad (3.2)$$

3.1 Formulácia optimalizačných úloh konvergenčného modelu

Naším prvým cieľom je odhadnúť parametre konvergenčného modelu Vašíčkovho typu, ktorý uvažujeme v rizikovo neutrálnej miere s nulovou koreláciou. Model sa riadi dvomi stochastickými diferenciálnymi rovnicami, jednou pre domácu úrokovú mieru a druhou

popisuje vývoj európskej úrokovej miery. Model uvažujeme v tvare

$$dr_d = (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e)dt + \sigma_d dw_d, \quad (3.3)$$

$$dr_e = (b_1 + b_2 r_e)dt + \sigma_e dw_e, \quad (3.4)$$

$$\text{Cov}(dw_d, dw_e) = \rho dt,$$

kde $\rho = 0$.

Kalibráciu modelu rozdelíme na dve časti. Odhad rizikovo neutrálnych parametrov európskej úrokovej miery b_1 , b_2 , σ_e a odhad európskej okamžitej úrokovej miery r_e budeme riešiť ako samostatný problém, ktorý je prvým krokom v odhadovaní modelu. Odhad parametrov domácej úrokovej miery a_1 , a_2 , a_3 , σ_d a odhad domácej okamžitej úrokovej miery r_d bude ďalším krokom. Dôvodom takto zvoleného postupu je to, že závislosť medzi európskou a domácou úrokovou mierou nie je vzájomné ovplyvňovanie sa dvoch premenných. Európska úroková miera sa vyvíja samostatne podľa určitého modelu a nemôže byť závislá od výberu štátu, pre ktorý budeme uvažovať konvergenčný model a od domácich úrokových mier v tomto štáte. Odhadovanie parametrov procesu pre domácu úrokovú mieru závisí od odhadnutých európskych parametrov a samotnej európskej okamžitej úrokovej miery.

Skôr ako sformulujeme optimalizačnú úlohu, zavedieme ďalšie značenie vzhľadom na model (3.3)-(3.4). Aproximáciu ceny, t. j. cenu vypočítanú modelom, domácich dlhopisov označme P_d , európskych dlhopisov P_e . Nech R_{ij}^d , R_{ij}^e predstavujú skutočné výnosové krivky pozorovateľné na trhu v i -tý deň pre maturity $(\tau_d)_j$, $(\tau_e)_j$. Váhy w_d , w_e definujeme ako funkcie $(w_d)_{ij} = (\tau_d)_j^2$, $(w_e)_{ij} = (\tau_e)_j^2$.

Teraz pristúpime k formulácii optimalizačných úloh.

1. *Odhad európskych parametrov*

Optimalizačný problém rieši minimalizáciu účelovej funkcie

$$F_e(b_1, b_2, \sigma_e, \mathbf{r}_e) = \frac{1}{m_e n_e} \sum_{i=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{m_e} \frac{(w_e)_{ij}}{(\tau_e)_j^2} [\ln P_e((r_e)_i, (\tau_e)_j) + (\tau_e)_j (R_e)_{ij}]^2. \quad (3.5)$$

2. *Odhad domácich parametrov*

Optimalizačný problém rieši minimalizáciu účelovej funkcie

$$F_d(a_1, a_2, a_3, \sigma_d, \rho, \mathbf{r}_d) = \frac{1}{m_d n_d} \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=1}^{m_d} \frac{(w_d)_{ij}}{(\tau_d)_j^2} [\ln P_d((r_e)_i, (r_d)_i, (\tau_d)_j) + (\tau_d)_j (R_d)_{ij}]^2. \quad (3.6)$$

Pri odhadovaní parametrov konvergenčného modelu (3.3)-(3.4) budeme vychádzať z článku [8]. Tu je odhad parametrov riešený pre jednofaktorový Vašíčkov model. Podobnú myšlienku sa pokúsime aplikovať aj na uvažovaný dvojfaktorový model. V našej práci aplikujeme publikovaný postup [8] najprv na odhadovanie európskych parametrov, čo predstavuje jednofaktorový Vašíčkov model. Následne odhadneme domáce parametre z dvojfaktorového modelu postupom, ktorý bude sledovať kroky v [8], kde boli použité pre jednofaktorový model.

3.2 Algoritmus na odhad európskych parametrov

Európska úroková miera r_e sa riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou (3.4). Táto rovnica predstavuje jednofaktorový Vašíčkov model uvedený v rizikovo neutrálnej miere. V prvej kapitole sme definovali jednofaktorový Vašíčkov model v rizikovej miere (1.4). Tvar model (1.4) obsahuje konštantné parametre κ, θ, σ_e a v parciálnej diferenciálnej rovnici v rizikovej miere vystupuje navyše trhovú cenu rizika λ_e ako ďalší parameter modelu. Pripomeňme, že vo Vašíčkovom modeli sa uvažuje konštantná trhovú cenu rizika, $\lambda_e(r_e, \tau) = \lambda_e$. Jednoduchou transformáciou parametrov dostávame z modelu (1.4) model v tvare (3.4).

Výhodou Vašíčkovho modelu je jednoduchosť a existencia explicitného riešenia. Toto explicitné riešenie môžeme podľa [8] zapísať v nasledujúcom tvare

$$\ln P_e(\mathbf{r}_e, \tau_e) = c_0(\tau_e, b_2)\mathbf{r}_e + c_1(\tau_e, b_2)b_1 + c_2(\tau_e, b_2)\sigma_e^2, \quad (3.7)$$

kde

$$\begin{aligned} c_0(\tau_e, b_2) &= \frac{1 - e^{b_2\tau_e}}{b_2}, \\ c_1(\tau_e, b_2) &= \frac{1}{b_2} \left[\frac{1 - e^{b_2\tau_e}}{b_2} + \tau_e \right], \\ c_2(\tau_e, b_2) &= \frac{1}{2b_2^2} \left[\frac{1 - e^{b_2\tau_e}}{b_2} + \tau_e + \frac{(1 - e^{b_2\tau_e})^2}{2b_2} \right]. \end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že účelová funkcia (3.5) je pri danej hodnote b_2 kvadratickou funkciou $b_1, \sigma_e^2, \mathbf{r}_e$ kvadratickou funkciou. Pri pevne zvolenom parametri b_2 dostávame v (3.7) lineárnu regresiu. Výsledkom lineárnej regresie (3.7) sú odhadnuté parametre $b_1, \sigma_e, \mathbf{r}_e$. Hodnotu parametra b_2 získame riešením jednorozmerného optimačného problému.

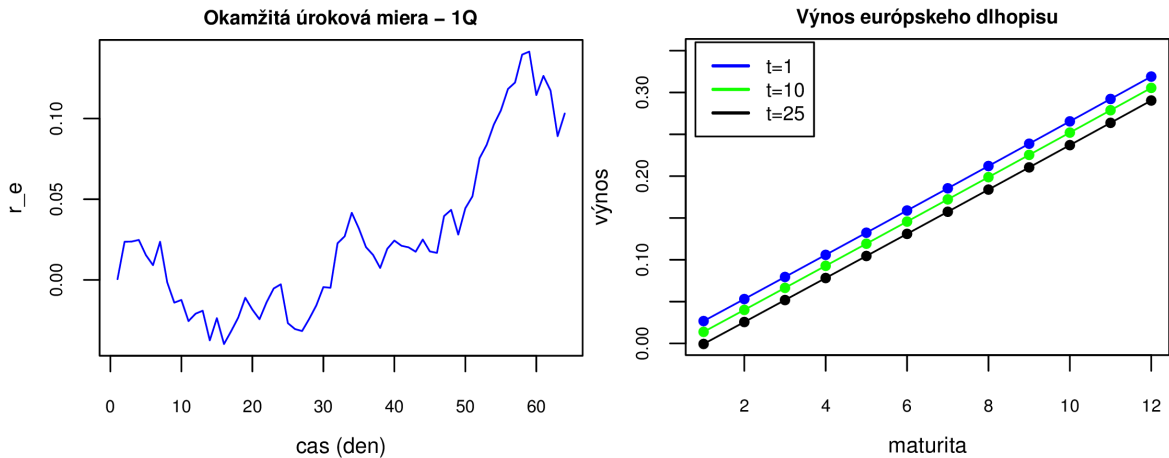
3.2.1 Simulované dáta

Jednoduchosť určitých modelov so sebou prináša aj to, že vieme analyticky oceňovať dlhopisy riešením systému obyčajných diferenciálnych rovníc, a teda aj presné výnosové krivky. Môžeme preto generovať dáta a sledovať presnosť našej kalibrácie. Testovaním algoritmu na simulovaných dátach ukážeme, že odhadované hodnoty okamžitej úrokovej miery konvergujú k skutočným.

Parametre modelu (3.4) zvolíme nasledovne

$$b_1 = 0.63, b_2 = 0.1, \sigma_e = 0.2. \quad (3.8)$$

Pre túto simuláciu náhodne vygenerujeme počiatočnú hodnotu $r_0 = 0.0004431583$, ktorá predstavuje začiatok vývoja európskej úrokovej miery. Vzhľadom na hodnotu r_0 a zvolené parametre (3.8) generujeme európsku okamžitú úrokovú mieru r_e pre časový úsek $n_e = 64$ (dní), t. j. 3 mesiace a časový krok $dt = \frac{1}{252}$. Pribeh simulovanej okamžitej úrokovej miery pre európsky dlhopis je zachytený na Obr.3.1 (vľavo).



Obr. 3.1: Vývoj okamžitej úrokovej miery v priebehu 3 mesiacov pre európsky dlhopis (vľavo), výnosové krivky európskeho dlhopisu pre $t = 1, t = 10, t = 25$ (vpravo).

Na základe známej okamžitej úrokovej miery r_e , ktorá predstavuje vektor dĺžky n_e , vieme vypočítať európske výnosové krivky pre každú jej zložku. Európske výnosy uvažujeme pre maturity $\tau_e = (\frac{1}{2}, \frac{2}{12}, \dots, \frac{12}{12})$, $m_e = 12$. Na výpočet výnosu európskeho dlhopisu s maturitou $(\tau_e)_j$ v i -tý deň budeme vychádzať z definície (1.1) uvedenej v prvej kapitole. Týmto postupom sme každému pozorovanému dňu i priradili m_e hodnôt predstavujúcich výnosy $(R_e)_{ij}$. Na Obr.3.1 (vpravo) môže čitateľ vidieť priebeh výnosových kriviek pre tri konkrétne dni: $t = 1, t = 10, t = 25$.

Vstupom do algoritmu na odhadnutie parametrov modelu sú výnosy. Získanie výnosov sme popísali v predchádzajúcom odseku. Po spustení kalibračného algoritmu na nasimulované dáta získame výsledky zaznamenané v tabuľke 3.1. Tabuľka 3.1 obsahuje presné hodnoty parametrov modelu a ich odhadnuté hodnoty. Všetky odhady vykazujú vysokú presnosť a tomu zodpovedá aj hodnota účelovej funkcie. Hodnota účelovej funkcie pri zvolených parametroch a generovanej okamžitej úrokovej miere r_e je $F = 2.001739e^{-13}$.

	b_1	b_2	σ_e
presné	0.63	0.1	0.2
odhadnuté	0.6299986	0.1000095	0.2000132

Tabuľka 3.1: Presné a odhadnuté parametre jednofaktorového Vašíčkovho modelu.

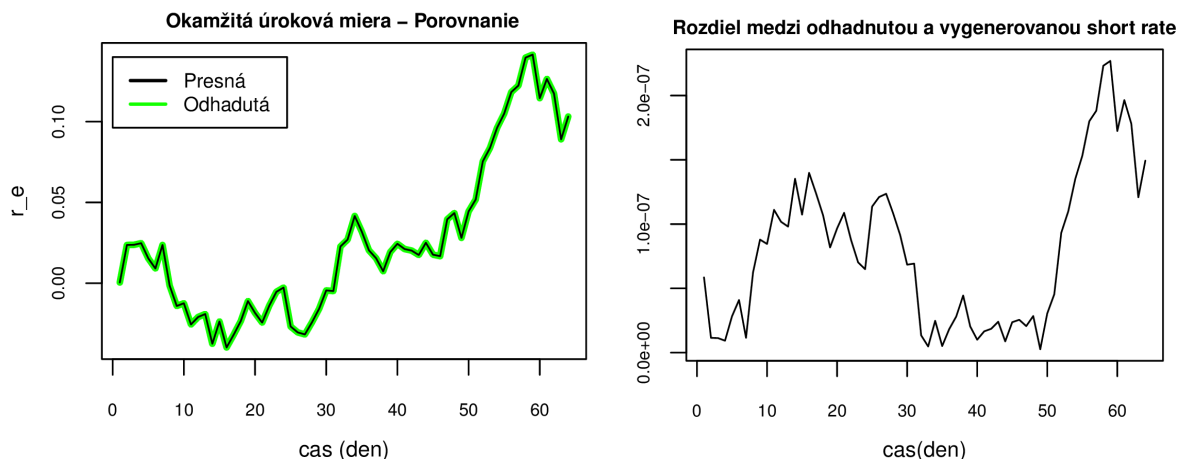
Ako už vieme vývoj okamžitej úrokovej miery je náhodný. Túto náhodnosť spôsobuje prírastok Wienerovho procesu dw v stochastickej diferenciálnej rovnici. Model s rovnakými vstupnými parametrami ako sú uvedené v tabuľke 3.1 a s počiatočnou hodnotou okamžitej úrokovej miery r_0 generuje po každom opakovaní rôzne vývoje. Bezohľadu na to, aké simulované dáta sme použili ako vstup do modelu, chceme, aby algoritmus odhadol parametre modelu, čo najpresnejšie. Rovnako hodnota účelovej funkcie odráža presnosť kalibrácie. Pomocou základných štatistík sme v tabuľke 3.2 zdokumentovali a vymedzili hodnoty účelovej funkcie pre sto opakovaní kalibrácie na totožnom súbore parametrov.

minimum	maximum	priemer	štandardná odchýlka
$2.765263e^{-15}$	$1.879705e^{-11}$	$2.754215e^{-12}$	$3.656056e^{-12}$

Tabuľka 3.2: Štatistika hodnoty účelovej funkcie pre jednofaktorový Vašíčkov model.

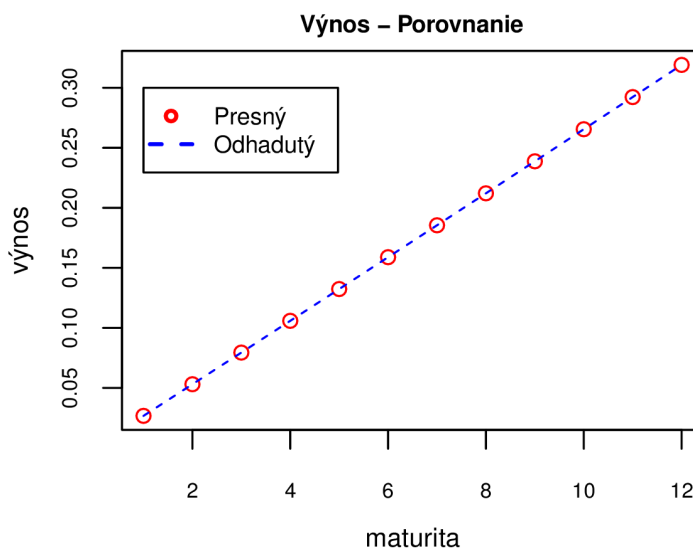
Na Obr. 3.2 (vľavo) čitateľovi predkladáme grafické porovnanie presnej európskej okamžitej úrokovej miery a odhadnutej. Krivky sú takmer totožné. Rozdiely týchto dvoch úrokových mier dosahujú radovo 10^{-7} . Denné rozdiely sú znázornené na Obr. 3.2 (vpravo).

Z navrhutej kalibrácie modelu (3.4) okrem odhadnutých parametrov a okamžitej úrokovej miery sme dostali fitované hodnoty, t. j. logaritmus ceny dlhopisu (3.7). Hodnoty ceny dlhopisu (3.7) využijeme na výpočet výnosu európskeho dlhopisu podľa



Obr. 3.2: Porovnanie presnej short rate a odhadnutej (vľavo), rozdiel medzi presnou a odhadnutou short rate (vpravo) pre jednofaktorový Vašíčkov model.

vzorca (1.1). Na Obr.3.3 sú odhadnuté výnosy pre rôzne splatnosti porovnané s presnou výnosovou krivkou. Vyobrazili sme výnos pre prvý deň, t. j. $t = 1$, pre čas do splatnosti 1 mesiac až 12 mesiacov.



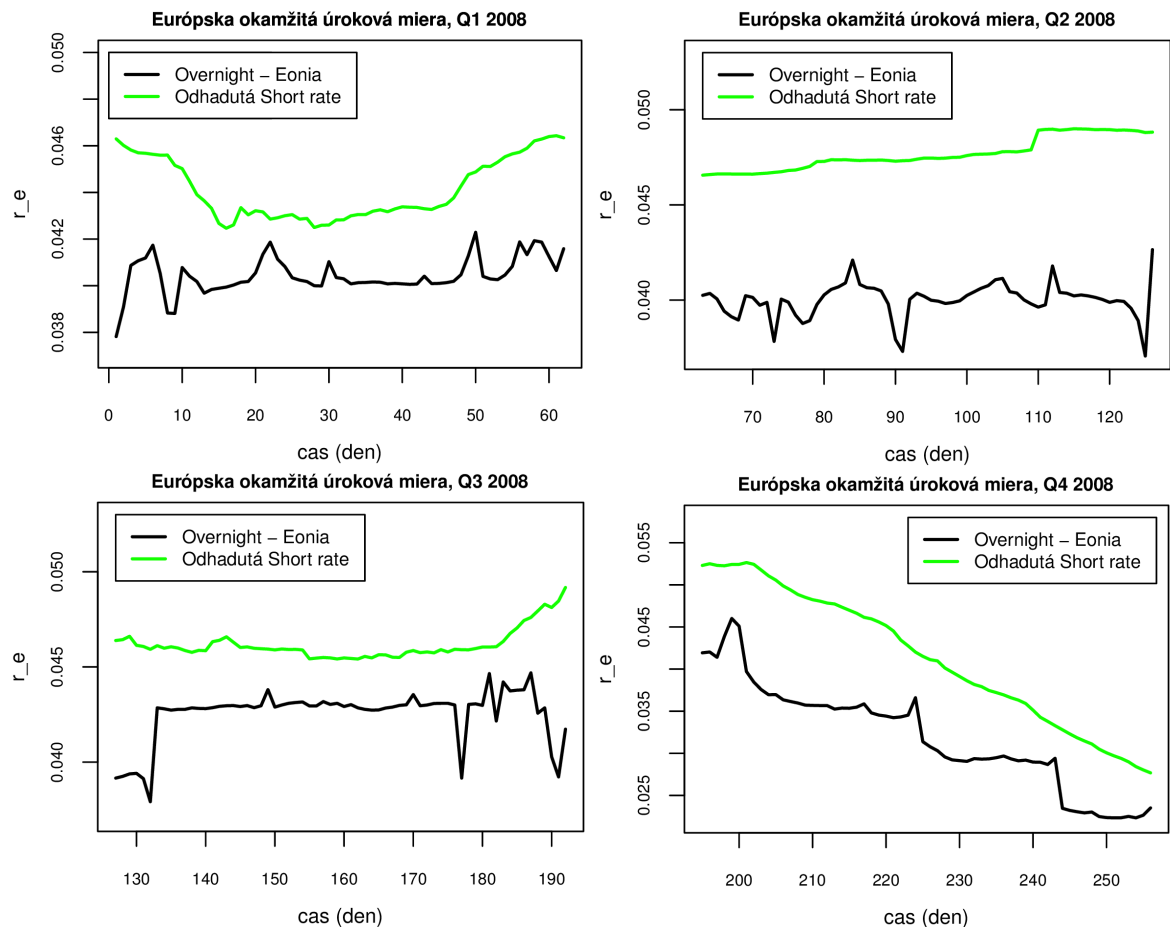
Obr. 3.3: Porovnanie presnej výnosovej krivky a odhadnutej.

Vysoká presnosť kalibrácie je dôsledkom toho, že pri simulovaných dátach sa neočakávajú numerické problémy. Na ilustračnom príklade sme čitateľovi ukázali, že navrhnutý algoritmus z [8] je aplikovateľný na odhadovanie európskych parametrov, keďže európska okamžitá úroková miera sa riadi jednofaktorovým Vašíčkovým modelom.

3.2.2 Reálne dáta

V predchádzajúcej časti práce sme testovali navrhnutú kalibráciu na simulovaných dátach. Odhady parametrov pre generované dáta vykazujú vysokú presnosť a hodnota účelovej funkcie sa blíži k nule. Cieľom nasledujúcej časti kapitoly je na základe reálnych dát pozorovateľných na trhu, odhadnúť okamžitú úrokovú mieru r_e a parametre jednofaktorového Vašíčkovho modelu pre európsky dlhopis b_1, b_2, σ_e^2 . Zvolíme rovnaký prístup ako pri simulovaných dátach. Tento prístup je založený na minimalizácii účelovej funkcie (3.5) podľa parametrov modelu b_1, b_2, σ_e^2 a okamžitej úrokovej miery r_e .

Uvažujme denné dáta európskej úrokovej miery Euribor za obdobie jedného roka. Hodnoty úrokovej miery Euribor sme zvolili za rok 2008. Každý deň zachytáva hodnotu Euribor pre rôzne maturity, $\tau_1 = 1, \tau_2 = 2, \dots, \tau_{12} = 12$, t. j. maturita vyjadrená v mesiacoch. Vstupom do algoritmu na odhad parametrov je teda matica výnosov rozmeru $(n_e \times \tau_e)$.



Obr. 3.4: Porovnanie pozorovaných dát a odhadnutých dát pre každý kvartál roku 2008.

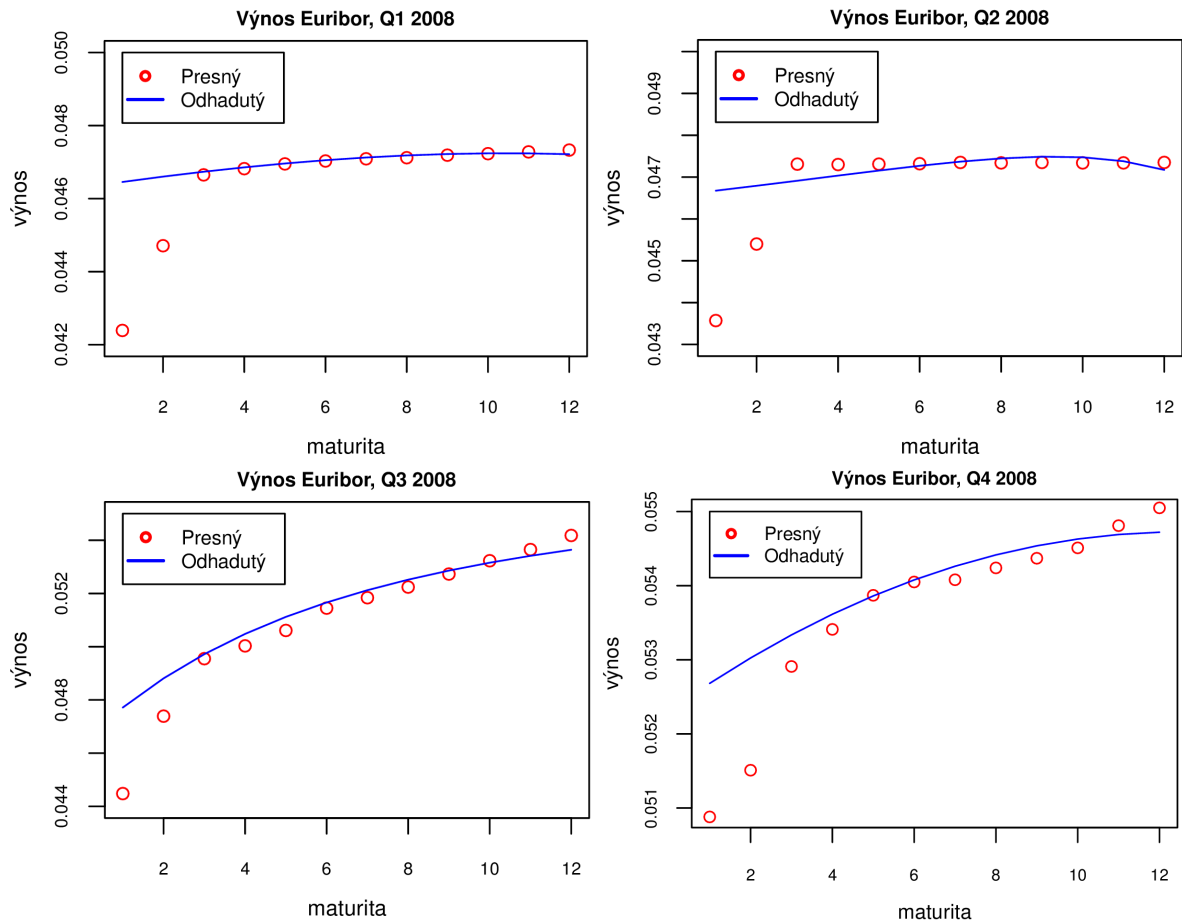
Na Obr.3.4 sme vykreslili porovnanie odhadnutej okamžitej úrokovej miery

r_e a hodnoty okamžitej úrokovej miery pre Euribor, teda Eoniu, pre každý kvartál roka 2008. Môžeme si všimnúť, že odhad okamžitej úrokovej miery má podobný vývoj ako Eonia. Avšak hodnoty Eonie sú vyššie a vykazuje väčšiu volatilitu ako odhadnutá úroková miera pre Euribor. V tabuľke 3.3 ponúkame prehľad odhadnutých parametrov jednofaktorového Vašíčkovho modelu použitého na reálne dáta. V riadkoch tabuľky sú uvedené odhadnuté parametre pre pozorované časti roka 2008. V poslednom stĺpci je vyčíslená optimálna účelová funkcia optimalizácie. Hodnoty účelovej funkcie sú rádovo 10^{-6} až 10^{-5} , čo naznačuje, že zhoda odhadovaných a pozorovaných výnosových kriviek je veľmi dobrá.

	b_1	b_2	σ_e	účelová funkcia
Q1	-0.009339233	0.2870541	0.07782932	5.854697e-06
Q2	-0.0854339	1.89104	0.0487707	1.529073e-05
Q3	0.1216387	-1.866487	0.2433384	1.989518e-05
Q4	0.01101458	-0.03105497	0.1170952	6.137703e-06

Tabuľka 3.3: Odhadnuté parametre európskej úrokovej miery Euribor a optimálna účelová funkcia.

Pre lepšiu predstavu sme na Obr. 3.5 vykreslili porovnanie výnosových kriviek pre každý štvrťrok. Body predstavujú presné hodnoty výnosu, ktoré sme získali z pozorovaných dát. Odhadnuté výnosy sme zobrazili modrou čiarou. Ako si môžeme všimnúť, pri nízkej maturite sa výnosy líšia výraznejšie. Čím vyššia maturita, tým lepšie je výnosová krivka odhadnutá. Jedným z dôvodov nepresnosti odhadu krátkodobých výnosov je voľba váh v účelovej funkcii, t. j. $w_{ij} = \tau_j^2$. Voľbou takejto váhy sme dosiahli väčší dôraz na presnosť výnosovej krivky pre dlhšie splatnosti. Ďalším dôvodom môže byť to, že jednofaktorový model pre tieto dáta nestačí, ale bol by lepší viacfaktorový. V tomto prípade by ani zmena váh nezlepšila celkový "dojem" z fitovania.



Obr. 3.5: Výnosová krivka pre $t = 1$. Porovnanie pozorovaných dát a odhadnutých dát pre každý kvartál roku 2008.

3.3 Algoritmus na odhad domácich parametrov

Domáca úroková miera sa riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou (3.3) v rizikovo neutrálnej miere. Drift tejto rovnice je vyjadrený ako lineárna funkcia premenných r_e , r_d . Kým jednofaktorový model pre európsku úrokovú mieru závisel výlučne od vývoja európskej okamžitej úrokovej miery, tu vstupujú do modelu obe okamžité úrokové miery, európska aj domáca. Kvôli malému vplyvu korelácie, budeme model odhadovať pre $\rho = 0$. Volatilita modelu zodpovedá konštante σ_d .

Logaritmus ceny dlhopisu daný modelom (3.3) vieme vyjadriť nasledovne

$$\ln P = A(\tau) - D(\tau)r_d - U(\tau)r_e, \quad (3.9)$$

kde

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \int_0^\tau -a_1 D(s) - b_1 U(s) + \frac{\sigma_d^2 D^2(s)}{2} + \frac{\sigma_e^2 U^2(s)}{2} ds, \\ D(\tau) &= \frac{e^{a_2 \tau} - 1}{a_2}, \\ U(\tau) &= \frac{a_3(a_2 - a_2 e^{b_2 \tau} + b_2(e^{a_2 \tau} - 1))}{a_2 b_2(a_2 - b_2)} = a_3 \tilde{U}(\tau, a_2). \end{aligned}$$

Model pre domácu úrokovú mieru budeme kalibrovať rovnakou metódou, akú sme použili v predchádzajúcej časti pre jednofaktorový Vašíčkov model. V tomto prípade budeme minimalizovať účelovú funkciu v tvare (3.6) cez parametre modelu a_1 , a_2 , a_3 , σ_d a domácu okamžitú úrokovú mieru r_d . Európske parametre modelu b_1 , b_2 , σ_e a európsku okamžitú úrokovú mieru r_e sme odhadli v predchádzajúcej časti kapitoly.

Ceny dlhopisu (3.9) prepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} \ln P_d(\mathbf{r}_d, \mathbf{r}_e, \tau_d) &= -D(\tau_d)r_d - a_3 \tilde{U}(\tau_d)r_e - a_1 \int_0^{\tau_d} D(s) ds - b_1 \int_0^{\tau_d} a_3 \tilde{U}(s) ds \\ &\quad + \frac{\sigma_d^2}{2} \int_0^{\tau_d} D^2(s) ds + \frac{\sigma_e^2}{2} \int_0^{\tau_d} U^2(s) ds \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$= g_1(\tau_d, a_2)r_d + g_2(\tau_d, a_2)a_1 + g_3(\tau_d, a_2)\sigma_d^2 + g_4(\tau_d, a_2, a_3) \quad (3.11)$$

Funkcie $g_i(\tau, a_2)$, $i = 1, 2, 3$ a $g_4(\tau, a_2, a_3)$ vyjadríme nasledovne

$$\begin{aligned} g_1(\tau, a_2) &= -D(\tau, a_2), \\ g_2(\tau, a_2) &= -\int_0^\tau D(s) ds, \\ g_3(\tau, a_2) &= \frac{1}{2} \int_0^\tau D^2(s) ds, \\ g_4(\tau, a_2, a_3) &= \left[\frac{\sigma_e^2}{2} \int_0^\tau \tilde{U}^2(s) ds \right] a_3^2 - \left[b_1 \int_0^\tau \tilde{U}(s) ds + \tilde{U}(\tau, a_2)r_e \right] a_3. \end{aligned}$$

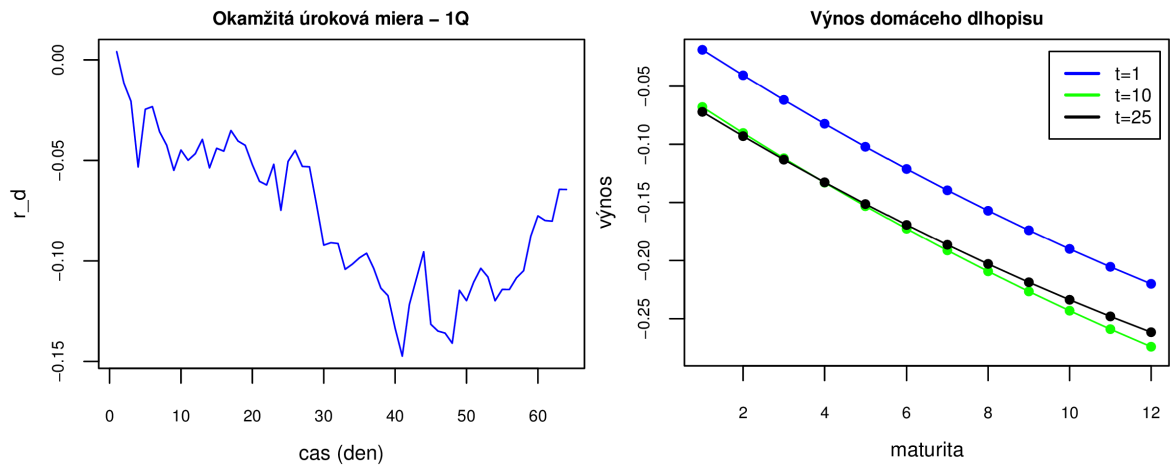
Účelová funkcia (3.6) pri daných hodnotách a_2, a_3 je kvadratickou funkciou $a_1, \sigma_d^2, \mathbf{r}_d$. Pri pevne zvolených parametroch a_2, a_3 dostávame lineárnu regresiu. Výsledkom lineárnej regresie sú odhadnuté parametre $a_1, \sigma_d^2, \mathbf{r}_d$. Následne získame hodnoty zvyšných dvoch parametrov a_2, a_3 ako riešenie dvojrozmerného optimalizačného problému.

3.3.1 Simulované dáta

Kalibráciu definovaného modelu (3.3) testujeme najprv na simulovaných dátach. V rovnici (3.3) zvolíme parametre nasledovne

$$a_1 = -0.55, a_2 = -0.07, a_3 = 0.5, \sigma_d = 0.2.$$

Európske parametre preberieme z časti 3.2.1 okrem počiatočnej hodnoty európskej úrokovej miery r_0^e . V prvom kroku vygenerujeme počiatočnú hodnotu pre európsku úrokovú mieru $r_0^e = -0.006691683$ a následne celý vývoj na základe zvolených parametrov. Pre túto simuláciu náhodne vygenerujeme počiatočnú hodnotu domácej úrokovej miery $r_0^d = 0.004102332$, ktorá predstavuje začiatok vývoja domácej úrokovej miery. Ďalej generujeme vývoj domácej okamžitej úrokovej miery r_d pre časový úsek $n_d = 64$ (dní), t. j. 3 mesiace a časový krok $dt = \frac{1}{252}$. Pribeh simulovanej okamžitej úrokovej miery pre domáci dlhopis je zobrazený na Obr.3.6 (vľavo) a výnos (vpravo).



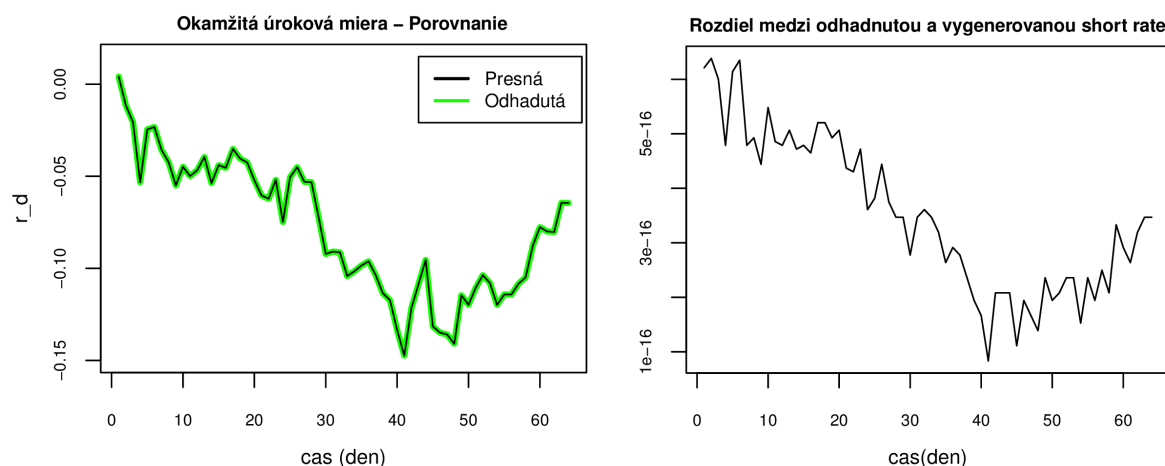
Obr. 3.6: Vývoj okamžitej úrokovej miery v priebehu 3 mesiacov pre domáci dlhopis (vľavo), výnosové krivky domáceho dlhopisu pre $t = 1, t = 10, t = 25$ (vpravo).

Tabuľka 3.4 predstavuje výsledky kalibrácie modelu (3.3). V prvom riadku uvádzame presné hodnoty parametrov modelu (3.3), ktoré sme definovali vyššie. V druhom riadku sú uvedené odhadnuté hodnoty modelu pre domácu úrokovú mieru. Všetky odhady vykazujú vysokú presnosť a tomu zodpovedá aj hodnota účelovej funkcie. Hodnota účelovej funkcie pri zvolených parametroch a generovanej okamžitej úrokovej miere r_d je $F = 3.658004e^{-29}$.

	a_1	a_2	a_3	σ_d
presné	-0.55	-0.07	0.5	0.2
odhadnuté	-0.55	-0.07	0.5	0.2

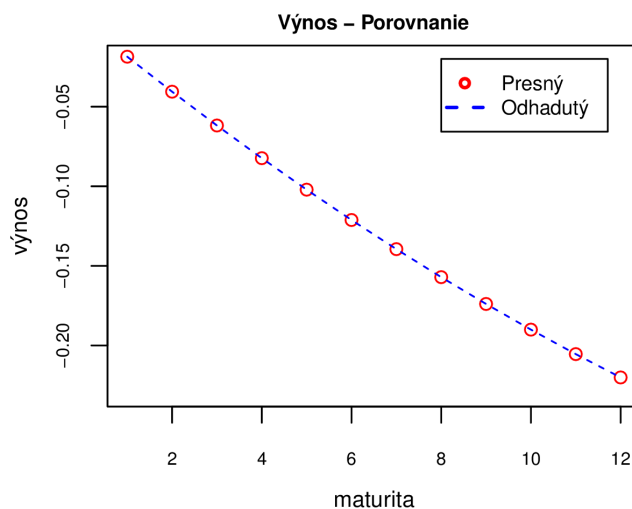
Tabuľka 3.4: Presné a odhadnuté parametre modelu pre domácu úrokovú mieru.

Na obrázku 3.7 (vľavo) čitateľovi predkladáme grafické porovnanie presnej domácej okamžitej úrokovej miery a odhadnutej. Rozdiely týchto dvoch úrokových mier dosahujú rádovo 10^{-16} . Denné rozdiely sú znázornené na obrázku 3.7 (vpravo).



Obr. 3.7: Porovnanie presnej short rate a odhadnutej (vľavo), rozdiel medzi presnou a odhadnutou short rate (vpravo) pre domáci dlhopis.

Na Obr.3.8 sú odhadnuté výnosy pre rôzne splatnosti porovnané s presnou výnosovou krivkou. Vyobrazili sme výnos pre prvý deň, t. j. $t = 1$, pre čas do splatnosti 1 mesiac až 12 mesiacov.



Obr. 3.8: Porovnanie presnej výnosovej krivky a odhadnutej.

3.3.2 Reálne dáta

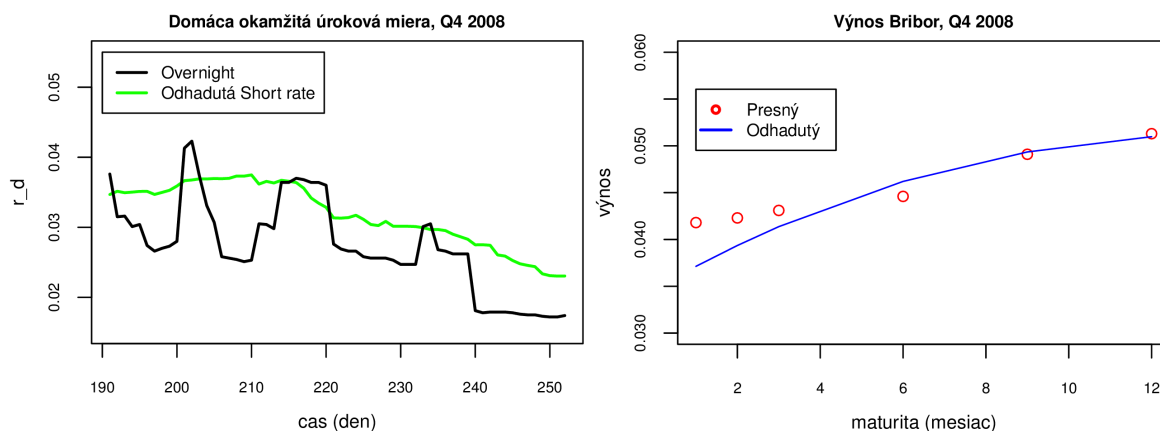
Na simulovaných dátach sme v predchádzajúcej časti práce testovali presnosť kalibrácie modelu pre domácu úrokovú mieru. Výsledky kalibrácie boli uspokojivé a dosť presné. Cieľom tejto podkapitoly je odhadnúť parametre modelu na základe algoritmu použitého na simulovaných dáta v časti 3.3.1. Ako vstup vezmeme reálne dáta. Reálne dáta predstavujú referenčnú mieru Bribor ako domácu úrokovú mieru.

Uvažujme denné dáta domácej úrokovej miery Bribor za obdobie 3 mesiacov. Hodnoty úrokovej miery Bribor sme zvolili za rok 2008, posledný štvrtrok. Každý deň zachytáva hodnotu Bribor pre rôzne maturity, $\tau_1 = 1, \tau_2 = 2, \tau_3 = 3, \tau_4 = 6, \tau_5 = 9, \tau_6 = 12$. Na zvolených dátach sme spustili algoritmus popísaný v predošlej časti práce. Hodnoty odhadovaných parametrov modelu uvádzame v tabuľke 3.5. V poslednom stĺpci je hodnota účelovej funkcie, ktorá je rádovo 10^{-6} .

	a_1	a_2	a_3	σ_d	účelová funkcia
Q4	0.03219346	-0.1813698	0.6801811	0.3062408	3.820745e-05

Tabuľka 3.5: Odhadnuté parametre domácej úrokovej miery Bribor a optimálna účelová funkcia.

Na Obr.3.9 (vľavo) sme vykreslili porovnanie odhadnutej okamžitej úrokovej miery r_d a hodnoty overnight úrokovej miery pre Bribor za zvolené obdobie roka. Overnight úroková miera, ktorú sme si zvolili ako aproximáciu okamžitej úrokovej miery, má väčšiu volatilitu ako odhadnutá okamžitá úroková miera. Ďalej si môžeme všimnúť, že vývoj overnight sa snaží zachytiť aj klesanie, ktoré okamžitá úroková miera vykazuje.



Obr. 3.9: Porovnanie pozorovaných dát a odhadnutých dát pre posledný kvartál roku 2008.

Porovnanie výnosov, presného a odhadnutého výnosu, domácej úrokovej miery sme

vyobrazili na Obr. 3.9 (vpravo). Aj v tomto prípade sa kladie dôraz na presnosť vyšších maturít.

Cieľom tejto časti bolo odhadnúť parameter konvergenčného modelu Vašíčkovho typu. Dôraz sa kládol najmä na veľkosť účelovej funkcie a presnosť výnosových kriviek. Menšiu presnosť kalibrácie pozorujeme pri odhade európskych parametrov a európskej okamžitej úrokovej miery. Tie sú vstupným bodom pri hľadaní odhadu domácich parametrov a domácej úrokovej miery. Vyššiu presnosť kalibrácie môžeme dosiahnuť napríklad tým, že zlepšíme odhad európskych parametrov voľbou iného modelu. Tým by sa mohol dosiahnuť aj presnejší odhad domácich výnosových kriviek.

4 Metóda maximálnej vierohodnosti na odhad parametrov modelov úrokových mier

Ďalšou metódou na odhadovanie parametrov modelu je metóda maximálnej vierohodnosti. Tento prístup je pomerne často používaný a jeho odhady majú dobré výsledky v porovnaní s inými metódami. Na to, aby sme mohli aplikovať metódu maximálnej vierohodnosti na dáta, potrebujeme poznať rozdelenie hodnôt procesu.

Nech $x_1, x_2, \dots, x_n$ je časový rad z rozdelenia s hustotou $f(x_i|\theta)$ pre každé x_i . Potom *funkciu vierohodnosti* L ako funkciu parametra θ definujeme pomocou hustoty nasledovne

$$L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

Neznámy vektor parametrov $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)^T$ patrí do známej množiny $\Theta \subset R^m$. Cieľom metódy maximálnej vierohodnosti je nájsť také hodnoty parametra θ , aby daná realizácia dát bola čo najpravdepodobnejšia. Za odhad parametra θ vezmeme hodnotu $\hat{\theta}$, ktorá je riešením optimalizačnej úlohy

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \ln L(\theta).$$

4.1 Odhad trhovej ceny rizika pre európsky dlhopis

Metódou maximálnej vierohodnosti odhadneme v nasledujúcej časti trhovú cenu rizika $\lambda_e(r, t)$ pre európsky dlhopis. Predpokladajme, že trhovú cenu rizika je lineárna funkcia v tvare $\lambda_e(t) = c r_e(t) + d$, kde c, d sú neznáme konštanty, ktoré budeme odhadovať. Ďalej uvažujme Vašíčkov model v tvare (1.4). Neznáme parametre v rovnici (1.4) κ, θ dopočítame pomocou známych hodnôt koeficientov b_1, b_2 . Prevodové vzťahy vyzerajú nasledovne

$$\begin{aligned} b_1 &= \kappa\theta + d\sigma_e, \\ b_2 &= -\kappa + c\sigma_e. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Generovanie odhadu trhovej ceny rizika λ_e bude teda pozostávať z dvoch krokov. V prvom kroku odhadneme parametre θ, κ modelu v reálnej miere (1.4). Odhadnuté parametre $\hat{\theta}, \hat{\kappa}$ dosadíme do prevodových vzťahov (4.1). Ďalej vo vzťahoch (4.1) vystupujú

jediné neznáme koeficienty c , resp. d . Neznáme koeficienty c , resp. d vyjadríme z (4.1) jednoduchými operáciami.

Podľa [12] má Vašíčkov model normálne rozdelenie s nasledujúcimi charakteristikami

- **Podmienená stredná hodnota**

$$E(r_e(t + \Delta t)|r_e(t)) = e^{-\kappa\Delta t}r_e(t) + \theta(1 - e^{-\kappa\Delta t}) \quad (4.2)$$

- **Podmienená variancia**

$$Var(r_e(t + \Delta t)|r_e(t)) = \frac{\sigma_e^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t}) \quad (4.3)$$

Majme časový rad $r_1, r_2, \dots, r_n$ hodnôt európskej úrokovej miery, o ktorej predpokladáme, že jej dynamika je charakterizovaná rovnicou (1.4). Zavedieme nové značenie

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_e^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t}), \quad s = e^{-\kappa\Delta t}.$$

Explicitné vyjadrenie hustoty normálneho rozdelenia v tomto prípade je v tvare

$$f(r_{i+1}|r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{[r_{i+1} - r_i s - \theta(1 - s)]^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Funkciu vierohodnosti L môžeme napísať ako súčin hustôt náhodných premenných s normálnym rozdelením

$$L = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{[r_{i+1} - r_i s - \theta(1 - s)]^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Logaritmická funkcia vierohodnosti má potom tvar

$$l = \ln L = -\frac{n-1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} [r_{i+1} - r_i s - \theta(1 - s)]^2. \quad (4.4)$$

Optimálnu hodnotu parametra θ získame maximalizovaním funkcie (4.4) pri danom parametri κ . V prípade existencie parciálnych derivácií získame optimálnu hodnotu $\hat{\theta}$ riešením tzv. vierohodnostnej rovnice. Pod vierohodnostnou rovnicou rozumieme parciálnu deriváciu, ktorú položíme rovné nule

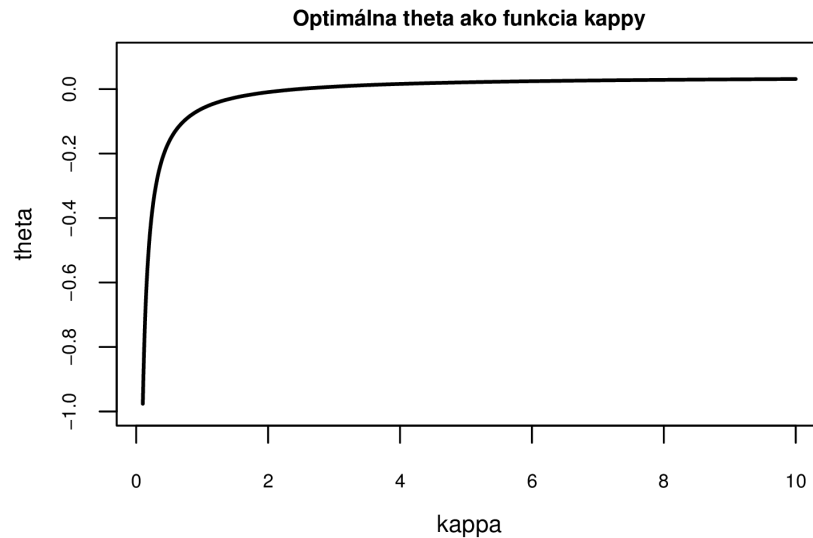
$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{(1-s)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} [r_{i+1} - r_i s - \theta(1 - s)] = 0.$$

Riešením vierohodnostnej rovnice je optimálna $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (r_{i+1} - r_i e^{-\kappa \Delta t})}{(n-1)(1 - e^{-\kappa \Delta t})}. \quad (4.5)$$

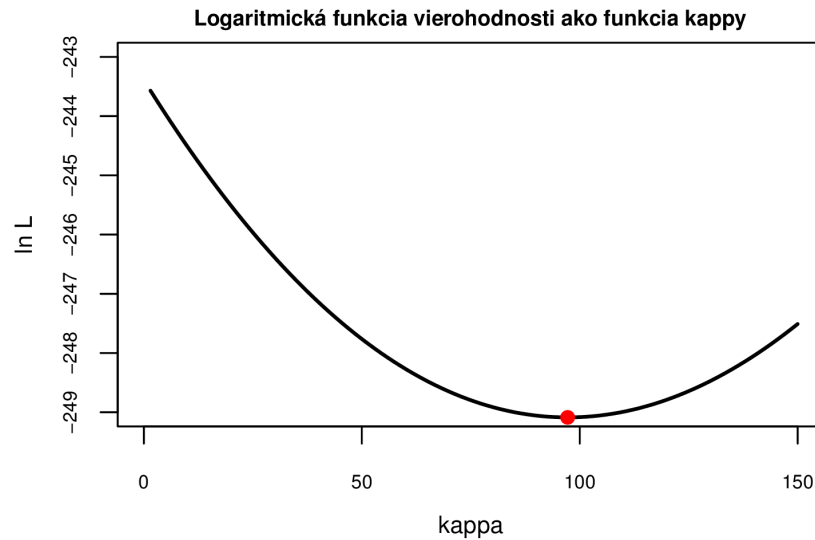
Dosadením optimálnej $\hat{\theta}$ (4.5) do funkcie (4.4) a optimalizovaním vzhľadom na κ dostávame optimálne $\hat{\kappa}$.

V nasledujúcej časti práce uvidíme odhad parametrov θ, κ pre reálne dáta. Vstupom budú dáta európskej úrokovej miery Euribor za posledný kvartál roku 2008. Všimnime si, že parameter θ môžeme definovať aj ako funkciu parametra κ , keďže výraz (4.5) uvažuje κ ako neznámy parameter. Závislosť optimálnej $\hat{\theta}$ od parametra κ sme vykreslili na Obr.4.1.



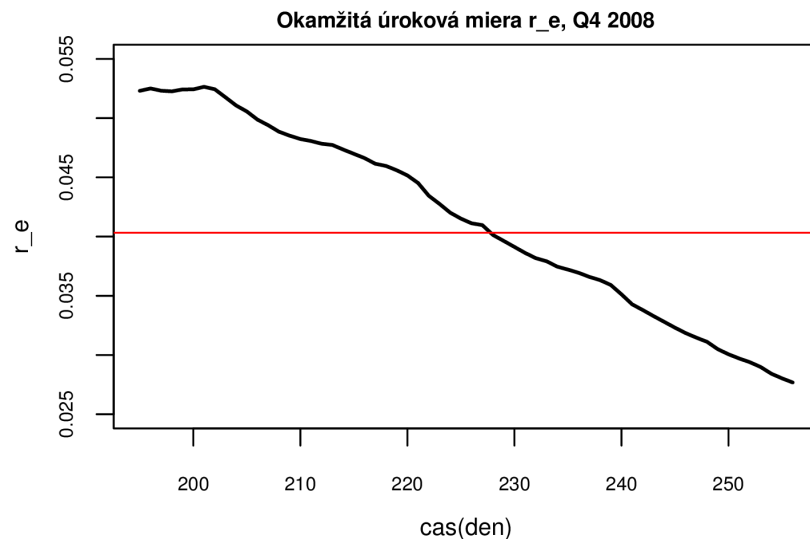
Obr. 4.1: Optimálna hodnota θ ako funkcie κ .

Od parametra κ nezávisí len parameter θ ale aj logaritmická funkcia vierohodnosti definovaná ako (4.4). Preto prvým nájdeným optimálnym parametrom modelu (1.4) bude parameter κ . Optimálny parameter $\hat{\kappa}$ následne dosadíme do predpisu optimálneho $\hat{\theta}$ (4.5). Priebeh logaritmickkej funkcie vierohodnosti (4.4) pre hodnoty κ z intervalu $[0,150]$ sme zachytili na Obr.4.2. Optimálna hodnota $\hat{\kappa}$ je rovná 97.21898 a predstavuje červený bod na Obr.4.2. Optimálna hodnota parametra $\hat{\theta}$ je potom rovná 0.04032142.



Obr. 4.2: Logaritmická funkcia vierohodnosti ako funkcia κ a optimálna κ .

Na Obr.4.3 si môžeme všimnúť, že vývoj odhadnutej okamžitej úrokovej miery r_e nevykazuje zreteľnú mean reversion vlastnosť, ktorou samotný predpis použitého modelu (1.4) disponuje. Priebeh úrokovej miery r_e na Obr.4.3 je klesajúci a teda sa nevracia k parametru θ ako model očakáva. Parameter θ, κ , ktoré sme odhadli v tejto časti sú generované pre mean reversion proces, preto odhady nemusia dávať úplne rozumné výsledky pre vývoj r_e .



Obr. 4.3: Európska okamžitá úroková miera a odhadnutou θ .

Nakoniec v poslednom kroku dostávame hodnoty koeficientov parametra λ_e . Ako sme spomenuli v úvode tejto podkapitoly, hodnoty c , resp. d sme získali dosadením optimálnych hodnôt θ, κ do vzťahov (4.1). Hodnoty uvádzame v tabuľke 4.1.

Q4	c	d
Euribor 2008	829.9905	-33.38303

Tabuľka 4.1: Odhadnuté parametre c , d - Q4 2008.

4.2 Odhad trhovej ceny rizika pre domáci dlhopis

V predchádzajúcej podkapitole sme odhadli trhovú cenu rizika pre európsky dlhopis. Podobným postupom teraz odhadneme trhovú cenu rizika $\lambda_d(r, t)$ pre domáci dlhopis. Predpokladajme, že trhovú cenu rizika pre domáci dlhopis je lineárna funkcia úrokových mier r_d, r_e posunutá o konštantu w , čo môžeme formálne zapísať ako $\lambda_d(t) = kr_e(t) + qr_d(t) + w$. V predpise funkcie λ_d vystupujú konštantné koeficienty k, q, w , ktoré budeme tiež odhadovať. Ďalej uvažujme model domácej úrokovej miery v tvare

$$dr_d = [a + b(r_e - r_d)] dt + \sigma_d dw_d. \quad (4.6)$$

Model (4.6) je v rizikovej miere. Nasledujúcou transformáciou premenných

$$\begin{aligned} a_1 &= a - w\sigma_d, \\ a_2 &= b - k\sigma_d, \\ a_3 &= -(b + q\sigma_d) \end{aligned} \quad (4.7)$$

dostávame model v rizikovo neutrálnej miere (3.3). Odhady parametrov a_1, a_2, a_3, σ_d sú uvedené v tabuľke 3.5. Ako prvé odhadneme parametre a, b . Z prevodových vzťahov (4.7) následne dostávame hodnoty koeficientov k, q, w .

Model domácej úrokovej miery (4.6) má normálne rozdelenie s nasledujúcimi charakteristikami

- **Podmienená stredná hodnota**

$$\begin{aligned} \mu_d(a, b) \equiv E(r_d(t + \Delta t) | r_d(t), r_e(t)) &= e^{-b\Delta t} r_d(t) + \left(\frac{a}{b} + \theta \right) (1 - e^{-b\Delta t}), \\ &+ \frac{b(r_e(t) - \theta)}{b - \kappa} (e^{-\kappa\Delta t} - e^{-b\Delta t}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

- **Podmienená variancia**

$$v_d \equiv Var(r_d(t + \Delta t) | r_d(t), r_e(t)) = \frac{\sigma_e^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa\Delta t}) (1 - e^{-b\Delta t})^2 + \frac{\sigma_d^2}{2b} (1 - e^{-2b\Delta t}). \quad (4.9)$$

Logaritmická funkcia vierohodnosti má potom tvar

$$l = \ln L = -\frac{n-1}{2} \ln(2\pi v_d^2) - \frac{1}{2v_d^2} \sum_{i=1}^{n-1} [r_{i+1} - \mu_d(a, b)]^2. \quad (4.10)$$

Optimálnu hodnotu parametra a získame maximalizovaním funkcie (4.10) pri danom parametre b . V prípade existencie parciálnych derivácií získame optimálnu hodnotu $\hat{a}$ riešením

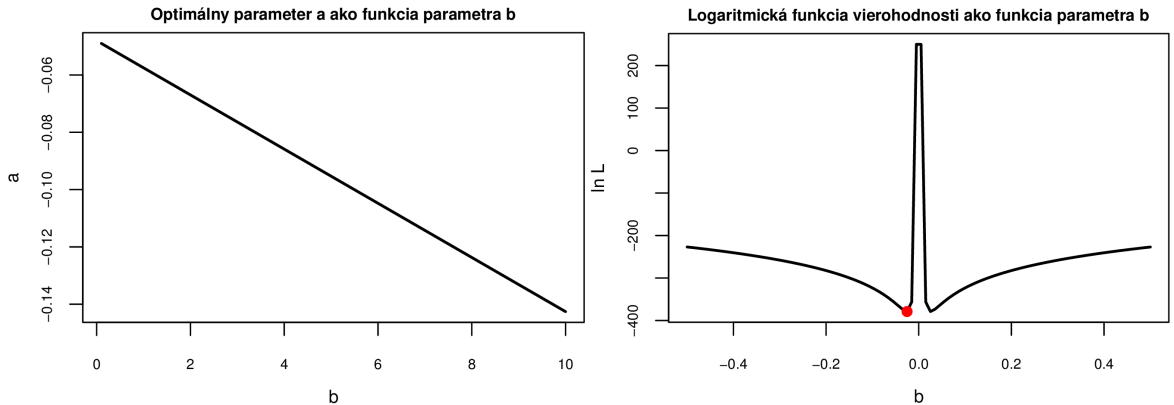
$$\frac{\partial l}{\partial a} = \frac{1}{v_d^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} [r_{i+1} - \mu_d(a, b)] \right) \frac{\partial \mu_d(a, b)}{\partial a} = 0. \quad (4.11)$$

Riešením vierohodnostnej rovnice (4.11) je optimálne $\hat{a}$

$$\hat{a} = \frac{b \sum_{i=1}^{n-1} (r_{i+1} - \mu_d)}{(n-1)(1 - e^{-b\Delta t})}. \quad (4.12)$$

Dosadením optimálnej $\hat{a}$ (4.12) do funkcie (4.10) a optimalizovaním vzhľadom na b dostávame optimálne $\hat{b}$.

Uvedený postup odhadovania parametrov modelu (4.6) ilustrujeme na reálnych dátach domácej úrokovej miery Bribor za posledný kvartál roku 2008. Parameter a môžeme aj v tomto prípade uvažovať ako funkciu od druhého parametra, ktorým je b . Na Obr. 4.4 (vľavo) sme zachytili závislosť optimálneho parametra $\hat{a}$ od parametra b , na druhom (vpravo) môžeme vidieť logaritmickú funkciu vierohodnosti ako funkcie parametra b . Táto funkcia nie je definovaná pre $b = 0$.



Obr. 4.4: Optimálna hodnota a ako funkcie b (vľavo), logaritmická funkcia vierohodnosti ako funkcia b a optimálna b (vpravo).

Optimálne hodnoty $\hat{a} = -0.04780768$, $\hat{b} = -0.025187$ v poslednom kroku dosadíme do vzťahov (4.7). Vyjadríme zatiaľ neznáme koeficienty k, q, w . Hodnoty koeficientov k, q, w uvádzame v tabuľke 4.2.

Q4	k	q	w
Bribor 2008	1.665356	-2.138821	-0.2612361

Tabuľka 4.2: Odhadnuté parametre k, q, w - Q4 2008.

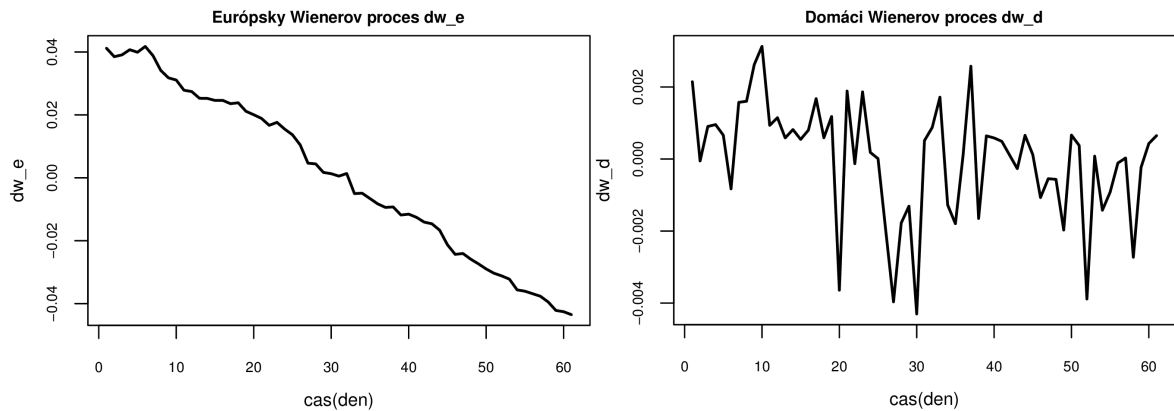
4.3 Odhad korelácie modelu

Jedným zo základných predpokladov, ktorý sme definovali v prvej kapitole bol predpoklad konštantnosti korelácie ρ . Pri odhadovaní korelácie ρ budeme vychádzať z definície (1.3). Potom korelácia ρ medzi prírastkami Wienerovho procesu dw_e a dw_d je odhad $\hat{\rho}$. Prírastky Wienerovho procesu počítame nasledovne

$$dw_e = \frac{dr_e - \kappa(\theta - r_e)dt}{\sigma_e},$$

$$dw_d = \frac{dr_d - (a + b(r_e - r_d))dt}{\sigma_d}.$$

Na Obr.4.5 sme zobrazili priebeh európskeho Wienerovho procesu dw_e a domáceho Wienerovho procesu dw_d .



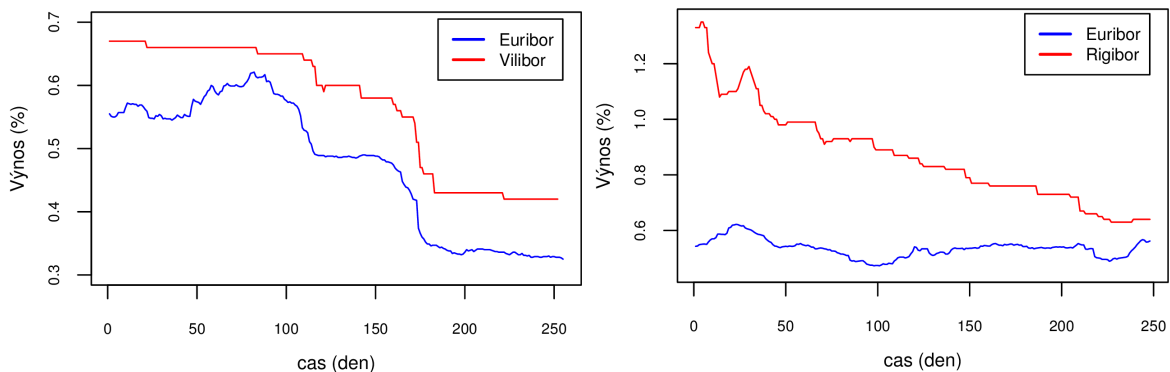
Obr. 4.5: Wienerov proces dw_e, dw_d , Q4 2008.

Odhad korelácie medzi Wienerovými procesmi dw_e a dw_d pre posledný kvartál roku 2008 nadobúda hodnotu $\rho = 0.3593471$.

5 Ďalšie výsledky kalibrácie

V kapitole 3 sme uviedli postup kalibrácie konvergenčného modelu Vašíčkovho typu. Súčasťou kapitoly bolo testovanie zvolenej kalibrácie na simulovaných dátach, následne na reálnych dátach. Keďže navrhnutá kalibrácia na simulovaných dátach odhadla parametre modelu dostatočne presne, algoritmus sme zbehli aj na reálnych dátach. Za domácu úrokovú mieru sme zobrali slovenskú medzibankovú úrokovú mieru - Bribor.

V tejto kapitole uvádzame výsledky kalibrácie pre ďalšie krajiny. Vstupnými krajinami sú pobaltské štáty Litva, ktorá vstúpila do eurozóny v 01.01.2015 a Lotyšsko so vstupom 01.01.2014. Vzhľadom k tomu, že krajiny po vstupe do eurozóny sa riadia referenčnou sadzbou Euribor, úrokové miery by sa mali teoreticky približovať s časom blížiacim sa k vstupu do eurozóny a po vstupe by mali splynúť. Tento teoretický poznatok sme zaznamenali na Obr. 5.1, kde uvádzame priebeh medzibankových úrokových miery Litvy (Vilbor [25]) a Lotyšska (Rigibor [24]). Tieto úrokové miery porovnávame s priebehom medzibankovej úrokovej miery eurozóny - Euribor. Časové rady zachytávajú obdobie jedného roka pred vstupom krajiny do eurozóny. Úrokové miery síce pri vstupe do eurozóny nesplynuli, ale na druhej strane môžeme jasne vidieť, že sa približujú.



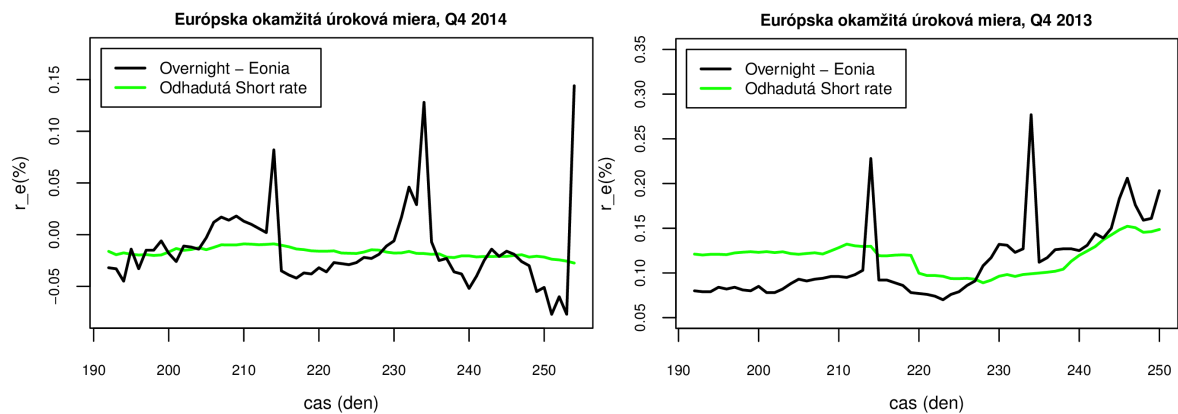
Obr. 5.1: Jednoročný vývoj úrokovej miery pobaltských krajín a eurozóny.

5.1 Kalibrácia medzibankovej úrokovej miery pobaltských štátov

V tejto časti práce pristúpime k samotnej kalibrácii modelu. Ako vstup kalibrácie vezmeme dáta za posledný štvrťrok, teda výnosy od začiatku októbra do konca decembra,

roku 2014 pre Litvu a pre Lotyšsko uvažujeme rok 2013. Prvým krokom kalibrácie modelu je odhadnúť európske parametre modelu b_1, b_2, σ_e a európsku okamžitú úrokovú mieru r_e . Hodnoty týchto parametrov budú neskôr vstupovať do kalibrácie modelu pre úrokovú mieru Vilibor, resp. Rigibor.

Koncom roka 2013 (1. november) sa počet hodnôt maturít pre Euribor znížil z počtu 15 na 8. Od tohto dátumu je Euribor zverejňovaný pre nasledujúce doby do splatnosti: 1, 2 týždne, 1, 2, 3, 6, 9, 12 mesiacov. Pre naše účely vezmeme mesačnú dobu do splatnosti. Ďalej teda budeme pracovať s vektorom $\tau_e = (\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{6}{12}, \frac{9}{12}, 1)$, ktorého zložky sú vyjadrené ako časti roka. Na Obr. 5.2 sme vykreslili dosiahnuté výsledky odhadovania európskych parametrov. Výstupom kalibrácie je zelená krivka, ktorá predstavuje odhadnutú okamžitú úrokovú mieru. Priebeh európskej úrokovej miery Eonia sme pre porovnanie zobrazili čiernou farbou.



Obr. 5.2: Porovnanie pozorovaných dát a odhadnutých dát pre posledný kvartál roku 2014, resp. 2013.

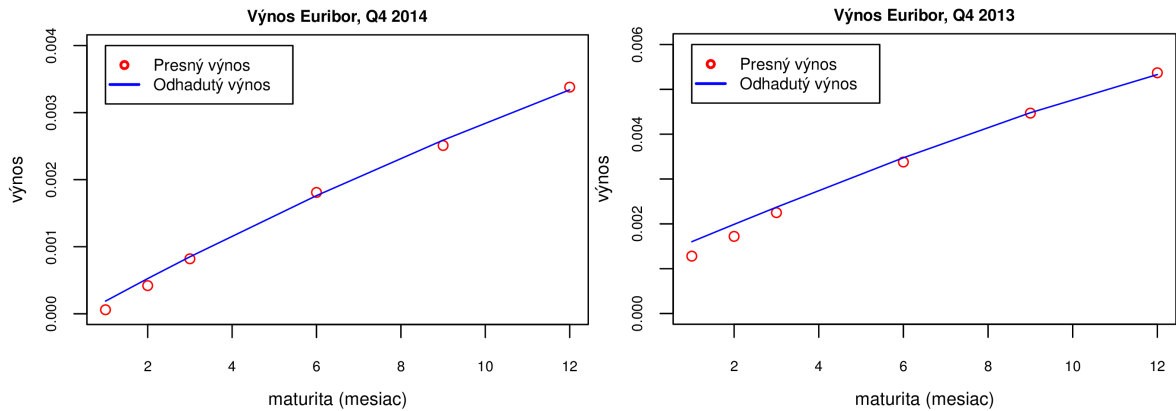
Číselné vyjadrenie odhadnutých parametrov pre Euribor uvádzame v tabuľke 5.1. Hodnota účelovej funkcie v tabuľke 5.1 a Obr. 5.2 nás privádza k záveru, že ide o celkom presný odhad.

Q4	b_1	b_2	σ_e	účelová funkcia
Euribor 2014	0.008446903	-0.3543634	0.04741382	1.306302e-07
Euribor 2013	0.008801483	0.5153406	0.0779363	4.602412e-07

Tabuľka 5.1: Odhadnuté parametre pre Euribor a optimálna účelová funkcia - Q4 2014,2013.

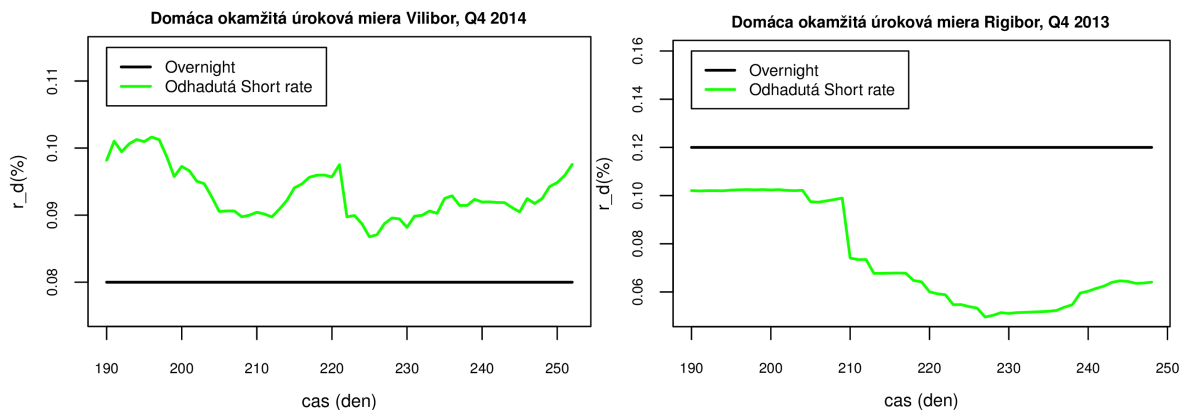
Porovnanie presných výnosov s odhadnutými tiež vykazuje presnosť. Môžeme pozorovať iba mierne odchýlky pri krátkych splatnostiach, čo aj v tomto prípade môže

byť dôsledok voľby váh v algoritme kalibrácie. Toto porovnanie sme zachytili pre prvý deň uvažovaných dát, 1.október 2014 pre Vilibor a 1.október 2013 pre Rigibor na Obr. 5.3.



Obr. 5.3: Porovnanie presnej výnosovej krivky a odhadnutej.

Druhým krokom kalibrácie je odhadovanie parametrov pre domácu medzibankovú úrokovú mieru Vilibor, resp. Rigibor. Súbor dát pre Vilibor obsahuje výnosy za obdobie troch mesiacov s dobami do splatnosti 1, 3, 6, 12 mesiacov, t. j. $\tau_d = (\frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{6}{12}, 1)$. Pre posledný štvrtrok bola hodnota úrokovej miery Vilibor s maturitou overnight pozorovateľnej na trhu na konštantnej úrovni 0.008.



Obr. 5.4: Porovnanie pozorovaných a odhadnutých dát pre posledný kvartál roku 2014, 2013.

Odhadnutá short rate nejaví prudký nárast drží sa pomerne v úzkom rozpätí hodnôt. Referenčnú sadzbu Rigibor tiež uvažujeme s maturitou $\tau_d = (\frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{6}{12}, 1)$. V poslednom kvartáli roku 2013 bola hodnota overnight Rigibor rovná 0.12. Ako si môžeme všimnúť na Obr. 5.4 (vpravo), približne v prvej tretine kvartálu odhadnutá short rate kopírovala pozorovanú overnight, ale potom prudko klesla a vyvíjala sa pomerne pokojne.

Algoritmus na odhadnutie domácich parametrov odhadol parametre modelu s presnosťou rádovo 10^{-8} a 10^{-7} . Hodnoty domácich parametrov uvádzame v tabuľke 5.2.

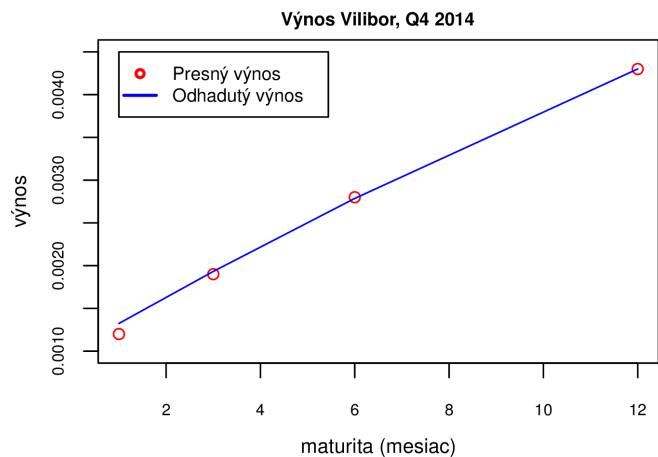
Q4	a_1	a_2	a_3	σ_d	účelová funkcia
Vilibor	0.008190951	-0.1427985	2.242862	0.145097	2.707216e-08
Rigibor	0.01395159	1.363052	-0.3554072	0.09895747	2.5591e-07

Tabuľka 5.2: Odhadnuté parametre domácej úrokovej miery a optimálna účelová funkcia.

Odhadovaný výnos aj v tomto prípade sa približuje k presnému výnosu. V tabuľke 5.3 uvádzame hodnoty výnosov pre Vilibor, na Obr. 5.5 grafické porovnanie. Výnosy sme porovnávali pre 1. október 2014. Hodnoty výnosov pre referenčnú sadzbu Rigibor sú uvedené v tabuľke 5.4 a vyobrazené na Obr. 5.6. Výnosy sme porovnávali pre 1. október 2013.

τ	R(presný)	R(odhad)
1	0.0012	0.001296641
3	0.0019	0.001911710
6	0.0028	0.002774636
12	0.0043	0.004305114

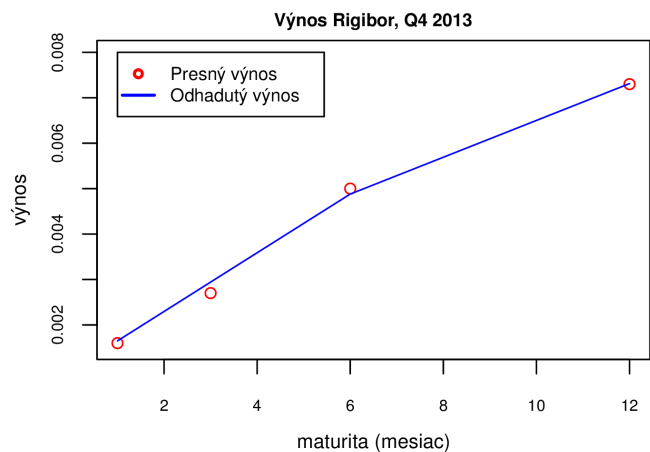
Tabuľka 5.3: Hodnoty výnosov pre 1.október 2014



Obr. 5.5: Porovnanie výnosových kriviek - Vilibor.

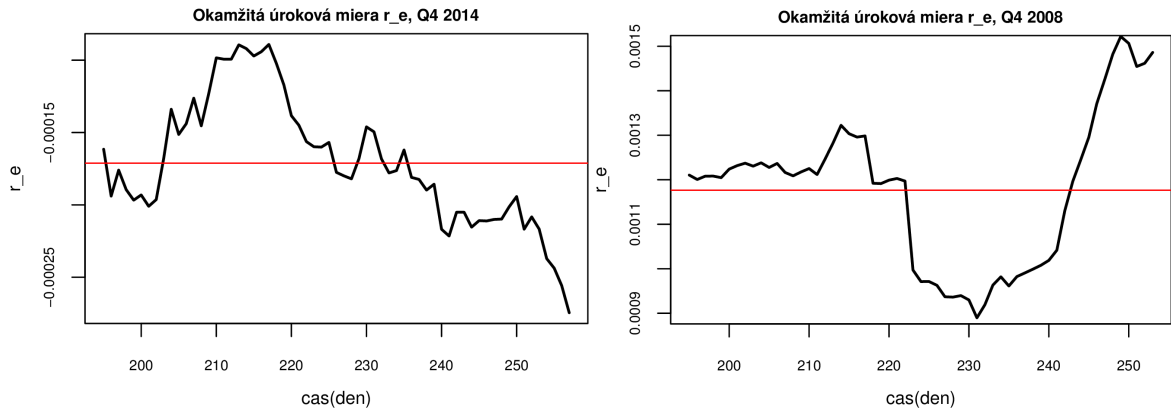
τ	R(presný)	R(odhad)
1	0.0016	0.00164852
3	0.0027	0.002942521
6	0.0050	0.004880466
12	0.0073	0.007311445

Tabuľka 5.4: Hodnoty výnosov pre 1.október 2013



Obr. 5.6: Porovnanie výnosových kriviek - Rigibor.

V tejto časti práce v krátkosti uvádzame výsledky odhadovania trhovej ceny rizika λ_e . Ako prvé odhadneme parametre θ, κ . Optimálnu hodnotu $\hat{\theta}$ aj spolu s priebehom Euribor pre dáta posledný štvrtrok roku 2013, resp. 2014 sme vykreslili na Obr.5.7 a hodnoty parametrov uvádzame v tabuľke 5.5.



Obr. 5.7: Optimálna hodnota $\hat{\theta}, \hat{\kappa}$, Q4 2013/2014.

Q4	θ	κ	c	d
Euribor 2014	-0.0001711814	30489.62	643046.1	110.257
Euribor 2013	0.001176485	27832.2	357121.4	-420.0272

Tabuľka 5.5: Odhadnuté parametre modelu pre európsku úrokovú mieru, Q4 2013/2014.

Výsledky odhadnutých parametrov modelu pre domácu úrokovú mieru (4.6) pre úrokové miery Vilibor a Rigibor uvádzame v tabuľke 5.6.

Q4	a	b	k	q	w
Vilibor 2013	-2.705571e-05	-0.002074049	6.684255	-15.44339	-0.05663804
Rigibor 2014	-0.001653653	0.005749561	-138.6051	3.533414	-0.1576964

Tabuľka 5.6: Odhadnuté parametre modelu pre domácu úrokovú mieru, Q4 2013/2014.

Na záver prikladáme odhad korelácie konvergenčného modelu. V tabuľke 5.7.

Q4	ρ
Vilibor 2013	0.008658818
Rigibor 2014	-0.03193127

Tabuľka 5.7: Odhadnuté parametre modelu pre domácu úrokovú mieru, Q4 2013/2014.

Záver

V tejto diplomovej práci sme sa zaoberali modelovaním okamžitej úrokovej miery pomocou dvoch stochastických diferenciálnych rovníc. Prvým cieľom tejto práce bolo numericky a analyticky odvodiť vplyv korelácie medzi faktormi na ceny dlhopisov v dvojfaktorových modeloch úrokovej miery, konkrétne rád rozdielu logaritmov cien pre malé maturity. V druhej kapitole sme zobrali konkrétne dvojfaktorové modely a odvodili sme rád rozdielu cien (2.31). V celej práci sme vychádzali z predpokladu, že korelácia medzi faktormi je konštantná.

Ako prvý model sme uvažovali dvojfaktorový Vašíčkov model. V tomto modeli okamžitá úroková miera r vystupuje ako súčet faktorov modelu r_1, r_2 . Riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu je dané explicitne. V časti 2.2.1 sme rozdiel logaritmov cien aproximovali Taylorovým rozvojom elementárnych funkcií, čo nás priviedlo k výsledku, že rád konvergenzie Vašíčkovho modelu je 3. Ďalším modelom bol Fong-Vašíčkov model so stochastickou volatilitou. V tomto modeli je riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu dané systémom obyčajných diferenciálnych rovníc. V časti 2.3.1 sme odvodili rád konvergenzie veľkosti 4 pre Fong-Vašíčkov model. Rovnaký rád konvergenzie sme dostali v prípade konvergenčného modelu CKLS typu. Rády rozdielu logaritmov cien vyšli rôzne. Tento rozdiel rádov je motiváciou k ďalšiemu skúmaniu, čo je príčinou rozdielu a od čoho závisí rád rozdielu cien v modeli. Odpoveď na otázku rozdielnosti rádov modelov sme hľadali vo všeobecnom dvojfaktorovom modeli. Výsledok je zaujímavý. Rozdielnosť rádov v modeloch spočíval v súčine dvoch derivácií prvého rádu funkcie g podľa faktorov modelu vo výraze (2.57). Jedine v prípade Vašíčkovho modelu vyšiel člen c_3 nenulový.

V druhej časti sa navrhuje algoritmus na odhadovanie parametrov konvergenčného modelu Vašíčkovho typu spolu s priebehom okamžitej úrokovej miery, ktorý pracuje s modelom bez korelácie na základe výsledkov z prvej časti práce. Tým sa zlepšili výsledky z článku [19], kde okamžitá úroková miera bola vstupom do modelu. V práci sme používali dva prístupy, metódu najmenších štvorcov a metódu maximálnej vierohodnosti. Model pre európsku úrokovú mieru nie je ovplyvňovaný domácou úrokovou mierou, preto môžeme kalibráciu modelu rozdeliť do dvoch krokov. V prvom kroku sme aplikovali publikovaný postup [8] najprv na odhadovanie európskych parametrov modelu a európskej okamžitej úrokovej miery. Následne sme odhadli domáce parametre

a domácu okamžitú úrokovú mieru z dvojfaktorového modelu. Postup sledoval kroky v [8], kde boli použité pre jednofaktorový model. Metódu maximálnej vierohodnosti sme využili na odhad európskej a domácej trhovej ceny riziká. V práci sme predpokladali, že európska trhovú cenu rizika je lineárna funkcia r_e a domáca trhovú cenu rizika je lineárna funkcia r_e, r_d . Nakoniec sme odhadli koreláciu na základe vzťahu (1.3).

Zoznam použitej literatúry

- [1] BRIGO, D., MERCURIO, F.: *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit*, Springer, 2007.
- [2] CAIRNS, A. J. G.: *Interest Rate Models: An Introduction*, Princeton University, Princeton, 2004.
- [3] CALIN, O.: *An Introduction to Stochastic Calculus and Applications to Finance*, Department of Mathematics, Eastern Michigan University, 2012.
- [4] CHAN, K. C., KAROLYI, G. A., LONGSTAFF, F. A., SANDERS, A. B.: *The volatility of short-term interest rates: an empirical comparison of alternative models of the term structures of interest rates*, Journal of Finance 47, 1992, pp. 1209-1227.
- [5] CORZO, T., SCHWARTZ, E.S.: *Convergence within the European Union: Evidence from interest rates*, Econom. Notes 29 (2000), pp. 243–268.
- [6] COX, J., INGERSOLL, J., ROSS, S.: *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica 53, 1985, pp. 385-408.
- [7] FONG, H.G., VASICEK, O.A.: *Fixed-income volatility management*, Journal of Portfolio Management, 1991, pp. 41-56.
- [8] HALGAŠOVÁ, J., STEHLÍKOVÁ, B., BUČKOVÁ, Z.: *Estimating the short rate from the term structure in the Vasicek model*, Tatra Mountains Mathematical Publications 61 (2014), pp. 87-104.
- [9] HO, T.S.Y., LEE, S.B.: *Term structure movements and pricing interest rate contingent claims*, Journal of Finance 41, 1986, pp. 1011-1029.
- [10] HULL, J., WHITE A.: *Pricing interest-rate derivative securities*, The Review of Financial Studies, Vol 3, No. 4 (1990) pp. 573–592.
- [11] JANIG, K.: *Právna úprava nástrojov finančného trhu*, Bankovní institut vysoká škola Praha, 2009, pp. 25.
- [12] KWOK, Y.K.: *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer, second edition, 2008

- [13] LEVEQUE, R. J.: *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007, pp. 255.
- [14] SELBY, M., STRICKLAND, C.: *Computing the Fong and Vasicek Pure Discount Bond Price Formula*, Journal of Fixed Income, 1995.
- [15] STRANG G.: *Calculus*, Massachusetts Institute of Technology, 1991.
- [16] ŠEVČOVIČ, D., STEHLÍKOVÁ, B., MIKULA, K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2009.
- [17] VASICEK, O.A.: *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Financial Economics 5, 1977, pp. 177-188.
- [18] ZÍKOVÁ, Z.: *Konvergenčné modely úrokových mier*, diplomová práca, 2011
- [19] ZÍKOVÁ, Z and STEHLÍKOVÁ, B.: Convergence model of interest rates of CKLS type. Kybernetika 48 (3), 2012, 567-586
- [20] Česká Národní Banka, PRIBOR, dostupné na internete (30.4.2018):
http://www.cnb.cz/cs/financni_trhy/penezni_trh/pribor/denni.jsp
- [21] EURIBOR, dostupné na internete (30.4.2018):
<http://www.euribor-rates.eu/>
- [22] European Money Market Institute, EONIA data, dostupné na internete (30.4.2018):
<https://www.emmi-benchmarks.eu/euribor-eonia-org/eonia-rates.html>
- [23] European Money Market Institute, EURIBOR data, 01.09.2017:
<https://www.emmi-benchmarks.eu/euribor-org/euribor-rates.html>
- [24] Latvijas Banka RIGIBOR, dostupné na internete (30.4.2018):
<https://www.bank.lv/statistika/dati-statistika/naudas-tirgus-index/rigibid-rigibor-vesturiskie-dati>

- [25] Lietuvos Bankas, VILIBOR, dostupné na internete (30.4.2018):
<http://www.lb.lt/statistics/statbrowser.aspx?group=7222&lang=en&orient=horz>
- [26] Magyar Nemzeti Banks, BUBOR, dostupné na internete (30.4.2018):
<https://www.mnb.hu/>
- [27] Národná Banka Slovenska, BRIBOR, dostupné na internete (30.4.2018):
<https://www.nbs.sk/sk/statisticke-udaje/financne-trhy/urokove-sadzby/urokove-sadzby-nbs/bribor-bribid-za-mesiac-po-dnoch>
- [28] Národná Banka Slovenska: Záporné úrokové sadzby a ich implikácie, dostupné na internete (6.5.2018):
https://www.nbs.sk/_img/Documents/_PUBLIK_NBS_FSR/Biatec/Rok2013/03-2013/01_biatec13-3_kostelny.pdf
- [29] Oslo Børs, NIBOR, dostupné na internete (30.4.2018):
https://www.oslobors.no/ob_eng/markedsaktivitet/#/list/nibor/quotelist
- [30] SHIBOR, dostupné na internete (30.4.2018):
<http://www.shibor.org/>
- [31] US Treasury Zero Coupon Yield Curve, 25.08.2017:
<https://www.quandl.com/data/FED>