

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MATEMATICKÉ MODELOVANIE MNOŽSTVA CO₂
V ZEMSKEJ ATMOSFÉRE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**MATEMATICKÉ MODELOVANIE MNOŽSTVA CO₂
V ZEMSKEJ ATMOSFÉRE**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr. Soňa Kilianová, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Kristína Halušťoková
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Matematické modelovanie množstva CO₂ v zemskej atmosfére
Mathematical modeling of atmospheric CO₂

Anotácia: Globálne otepľovanie je v súčasnosti vo svete rezonujúcou témou. Jedným z najdôležitejších faktorov, ovplyvňujúcich klimatické podmienky na Zemi, je množstvo oxidu uhličitého v atmosfére. Na jeho predpovedanie alebo modelovanie je možné použiť rôzne matematické či fyzikálne modely, počnúc štatistickými predikciami až po modelovanie pomocou jednoduchších či zložitejších dynamických systémov. V práci sa budeme venovať vybraným modelom.

Vedúci: Mgr. Soňa Kilianová, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Dátum zadania: 25.01.2017

Dátum schválenia: 27.01.2017

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Podakovanie

Na prvom mieste sa chcem poďakovať svojej výbornej školiteľke Mgr. Soni Kilianovej, PhD. za nesmiernu ochotu riešiť všetky problémy, ktoré sa počas písania práce vyskytli, za jej cenné rady, námety a pripomienky. Touto cestou by som sa rada poďakovala aj doc. RNDr. Martinovi Gerovi, PhD. za poskytnutie dát a rady pri riešení fyzikálnych aspektov tejto práce. Ďakujem aj doc. RNDr. Petrovi Gubovi, PhD. za konzultácie ohľadne numerickej schémy použitej v tejto práci. Ďalej by som sa chcela poďakovať doc. RNDr. Márii Trnovskej, PhD. za rady ohľadne riešenia sústavy lineárnych rovníc. V neposlednom rade sa chcem poďakovať aj prof. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, DrSc. za jeho cenné rady ohľadne numerickej schémy použitej v tejto práci. Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

HALUŠŤOKOVÁ, Kristína: Matematické modelovanie množstva CO₂ v zemskej atmosfére [diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Soňa Kilianová, PhD., Bratislava, 2018, 90 s.

V našej práci sa zaoberáme modelovaním koncentrácie oxidu uhličitého nad Európou. Uvádzame dva prístupy k modelovaniu – prvý je model založený na riešení advekčno-difúznej rovnice so zdrojovým členom, ktorý riešime v 3D priestore, pričom ako zdrojový člen nám poslúžia odhady množstva emisií oxidu uhličitého pomocou časových radov. Do modelu ďalej zahrnieme údaje o efekte lesov a vody na koncentráciu CO₂. Druhý model, ktorý v práci spomíname, je model založený na raste populácie, ktorý predpokladá, že veľkosť ľudskej populácie ovplyvňuje množstvo oxidu uhličitého v atmosfére. Pokúsime sa o čo najpresnejšie odhadnutie parametrov pre jednotlivé krajiny Európy. Tento základný model neskôr rozšírime o interakcie medzi krajinami, ktoré sme odhadli na základe reálnych dát vetra z roku 2017.

Kľúčové slová: modelovanie koncentrácie CO₂, globálne otepľovanie, metóda konečných objemov, ARIMA, dravec-korist

Abstract

HALUŠŤOKOVÁ, Kristína: Mathematical modeling of atmospheric CO₂ [master thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Soňa Kílianová, PhD., Bratislava, 2018, 90 p.

In this thesis we focus on modeling concentration of carbon dioxide above Europe. We use two approaches for modeling – first one is a model based on an advection-diffusion equation with a source term, which we solve in 3D space and for the source term we put predictions of the amount of carbon dioxide emissions using time series. Later we include into the model estimated effects of forests and water on overall concentration of carbon dioxide. Second model we describe in the thesis, is model based on a growth of human population. This model assumes that human population influence the amount of carbon dioxide in the atmosphere. We shall try to estimate parameters in the model for countries in Europe. Later we expand this basic model and add interactions between countries calculated using real data for wind from 2017.

Keywords: CO₂ concentration, global warming, finite volume method, ARIMA, predator-prey model

Obsah

Zoznam obrázkov	11
Zoznam tabuliek	14
Úvod	15
1 Antropogénne emisie CO₂ v európskych krajinách	17
1.1 Západná Európa	18
1.2 Severná Európa	22
1.3 Stredná Európa	23
1.4 Južná Európa	25
1.5 Východná Európa	27
2 Model šírenia pomocou advekčno-difúznej rovnice so zdrojovým členom	29
2.1 Advekcia	29
2.2 Difúzia	31
2.3 Numerické metódy riešenia advekčno-difúzných rovníc	32
2.3.1 Metóda konečných objemov v 3D pomocou TVD schémy	32
2.3.2 Metóda konečných objemov v 3D s časom	37
2.3.3 Okrajové podmienky	40
2.4 Popis priestorového modelu	41
2.4.1 Vytvorenie siete	41
2.4.2 Zdroje oxidu uhličitého v atmosfére	45
2.4.3 Transformácia dát vetra	48
2.4.4 Prístup k sférickým súradniciam a zbezrozmernenie	49
2.4.5 Počiatočná a okrajové podmienky	51
2.4.6 Ukážky výstupov a možných problémov	52
3 Model založený na raste populácie	55
3.1 Odhadnutie parametrov v modeli	58
3.1.1 Koncentrácia CO ₂	58

3.1.2	Ludská populácia	60
3.1.3	Lesná biomasa	61
3.1.4	Interakcie medzi štátmi	64
3.1.5	Efekt vody	69
3.2	Numerické experimenty a výsledky	72
3.2.1	Scenár bez interakcií medzi štátmi	73
3.2.2	Scenár s interakciami medzi štátmi	79
3.2.3	Porovnanie modelov s interakciami a bez interakcií	83
Záver		84
Zoznam použitej literatúry		86
Príloha		89

Zoznam obrázkov

1	Emisie vo Veľkej Británii.	18
2	Testovanie modelu.	19
3	Overenie stacionarity.	20
4	Predikcia pre Veľkú Britániu na rok 2017.	20
5	Emisie v západnej Európe časť 1.	21
6	Emisie v západnej Európe časť 2.	22
7	Emisie v severnej Európe.	23
8	Emisie v strednej Európe časť 1.	24
9	Emisie v strednej Európe časť 2.	24
10	Emisie v strednej Európe časť 3.	25
11	Emisie v južnej Európe časť 1.	26
12	Emisie v južnej Európe časť 2.	26
13	Emisie v južnej Európe časť 3.	27
14	Emisie v východnej Európe časť 1.	28
15	Emisie v východnej Európe časť 2.	28
16	Zobrazená jedna bunka. Obrázok je prevzatý z [26, str. 10].	30
17	Zobrazený prítok a odtok hmoty na hranici telesa. Obrázok je prevzatý z [26, str. 11].	30
18	Zobrazená jedna bunka mriežky v 3D. Obrázok je prevzatý z [26, str. 131].	33
19	Zrkadlenie bodu na okraji oblasti [26, str. 159].	41
20	Matica predstavujúca diskretizovanú mapu Európy.	42
21	Výpočet obsahu jedného dielika.	43
22	Koľko ton CO ₂ ročne je pohltených vplyvom lesov na 1 km ² v danej krajine Európy.	46
23	Porovnanie nadmorskej výšky dopočítanej pomocou barometrickej formuly (červenou) a údajov zo štandardnej atmosféry (modrou).	49
24	Hodnoty koncentrácie $c(x, y, z, t)$ vyobrazené v prvej vrstve pri zemskom povrchu v čase $t = 3,1 \times 10^{-7}$ dňa.	52

25	Hodnoty koncentrácie $c(x, y, z, t)$ vyobrazené v prvej vrstve pri zemskom povrchu pri konštantnom vetre.	54
26	Hodnoty koncentrácie $c(x, y, z, t)$ vyobrazené v prvej vrstve pri zemskom povrchu pri reálnom vetre.	54
27	Hranice štátov Európy.	64
28	Graficky znázornená lokalizačná matica M, ktorej prvky predstavujú index štátu podľa Tabuľky 10, ktorému patrí daná pozícia zemepisnej dĺžky a šírky.	65
29	Typy hraníc štátov Európy.	66
30	Pravidlá hľadania normály na rôzne typy hraníc.	66
31	Priemerný vietor v smere vonkajšej normály na hraniciach krajín a na pobreží.	67
32	Smerovanie vetra medzi krajinami.	68
33	Smerovanie vetra na pobreží.	70
34	Príklad fitu odhadnutých populácií.	73
35	Porovnanie koncentrácií CO_2 nad štátmi severnej Európy v priebehu 2 rokov.	74
36	Porovnanie koncentrácií CO_2 nad štátmi západnej Európy v priebehu 2 rokov.	74
37	Porovnanie koncentrácií CO_2 nad štátmi strednej Európy v priebehu 2 rokov.	75
38	Porovnanie koncentrácií CO_2 nad štátmi južnej Európy v priebehu 2 rokov.	75
39	Zobrazené funkcie populácie a lesnej biomasy v Turecku v priebehu 2 rokov.	76
40	Porovnanie koncentrácií CO_2 nad Talianskom a Cyprom v priebehu 2 rokov.	76
41	Zobrazené funkcie populácie a lesnej biomasy na Cypre v priebehu 2 rokov.	77
42	Zobrazené funkcie populácie a lesnej biomasy v Taliansku v priebehu 2 rokov.	77
43	Porovnanie koncentrácií CO_2 nad štátmi východnej Európy v priebehu 2 rokov.	78
44	Vývin lesnej biomasy v štátoch východnej Európy v priebehu 2 rokov.	78
45	Ukážka silných interakcií medzi krajinami.	79
46	Porovnanie koncentrácií CO_2 nad severnou Európou v priebehu 2 rokov v modeli s interakciami.	80
47	Porovnanie koncentrácií CO_2 nad západnou Európou v priebehu 2 rokov v modeli s interakciami.	81

48	Porovnanie koncentrácií CO ₂ nad strednou Európou v priebehu 2 rokov v modeli s interakciami.	82
49	Porovnanie koncentrácií CO ₂ nad južnou Európou v priebehu 2 rokov v modeli s interakciami.	82
50	Porovnanie koncentrácií CO ₂ nad východnou Európou v priebehu 2 rokov v modeli s interakciami.	83
51	Porovnanie koncentrácií CO ₂ z dvoch modelov.	83

Zoznam tabuliek

1	Výsledné emisie na km^2 v štátoch západnej Európy.	21
2	Výsledné emisie na km^2 v štátoch severnej Európy.	22
3	Výsledné emisie na km^2 v štátoch strednej Európy.	23
4	Výsledné emisie na km^2 v štátoch južnej Európy.	25
5	Výsledné emisie na km^2 v štátoch východnej Európy.	27
6	Tabuľka s rôznymi typmi limitujúcich funkcií [26].	34
7	Tabuľka koeficientov pre 3D TVD schému.	37
8	Porovnanie skutočnej rozlohy krajín a ich rozlohy v modeli.	44
9	Parametre v modeli.	56
10	Poradové čísla štátov Európy.	57
11	Miera emisií z antropogénnych zdrojov v štátoch Európy. Uvedené údaje sú v $\text{ppm}/(\text{človek hod})$	59
12	Koeficienty rastu ľudskej populácie s_i v štátoch Európy. Údaje označené * sú aproximované, nakoľko v časovom rade chýbala veľkosť populácie aspoň jeden rok. Chýbajúce údaje boli doplnené ako priemer zo susedných rokov.	60
13	Počiatočná podmienka $N_i(0)$ pre veľkosť populácie v jednotlivých štátoch Európy.	61
14	Plocha lesov v Európe v hektároch. Údaje označené * sú aproximované pomocou susedných štátov. Zdroj: [11, str. 262-263].	62
15	Počiatočná podmienka $F_i(0)$ pre množstvo biomasy v tonách v jednotlivých štátoch Európy.	63
16	Rozloha štátov Európy v km^2 . Rozloha Nórska je uvedená bez Svalbardu.	69
17	Údaje o dĺžke pobrežia, dĺžke hraníc a výsledné koeficienty α_i uvedené v $[1/\text{hod}]$	71
18	Hodnoty parametrov v modeli.	72
19	Sila priemerného vetra v km/hod	89
20	Letecké dĺžky hraníc vyjadrené v km	90
21	Odhady koeficientov β_{ij}	91

Úvod

Globálne otepľovanie je v súčasnosti vo svete páľčivou témou. Jedným z najdôležitejších faktorov, ovplyvňujúcich klimatické podmienky na Zemi je množstvo oxidu uhličitého v atmosfére. V literatúre nachádzame veľa rôznych prístupov k modelovaniu zmien v koncentrácii CO_2 . Prvý prístup, o ktorý sa v práci opierame, je popísaný v článkoch [16] a [23]. Ide o tzv. kompartmentový model (*angl. Compartmental Model*), teda model zložený z viacerých oddelených funkcií, ktoré popisujú 4 základné vnemy ovplyvňujúce tvorbu alebo zánik CO_2 . Konkrétne sú to: ľudská činnosť prostredníctvom spaľovania fosílnych palív, prirodzený cyklus uhlíka v prírode, horenie lesov a vplyv morí a oceánov. V oboch článkoch sa autori zamerali na koncentráciu CO_2 nad USA, my sa v našej práci zameriame na Európu.

Ďalší prístup bol opísaný v článkoch [18] a [19], kde autori uviedli viaceré zjednodušujúce predpoklady a model opísali troma diferenciálnymi rovnicami, ktoré vyjadrujú zmenu koncentrácie, zmenu ľudskej populácie a zmenu zalesnenia. Predpokladajú tu, že populácia aj zalesnenie sa riadia logistickým modelom rastu a medzi sebou majú vzťah typu predátor a korisť, pričom človek predstavuje predátora a les korisť. Zmena koncentrácie oxidu uhličitého závisí od veľkosti populácie – čím viac ľudí, tým viac sa ho emituje do ovzdušia. Ďalej do rovnice vstupuje odčerpávanie CO_2 vplyvom vody a fotosyntézy lesov.

My v našej práci budeme pre prvý model vychádzať najmä zo spomenutého kompartmentového modelu, ktorý použijeme ako zdrojový člen v priestorovom modeli v 3D a potom v ďalšej časti práce mierne modifikujeme druhý model z článkov [18] a [19].

Prvá kapitola obsahuje predikované hodnoty oxidu uhličitého emitovaného vplyvom ľudskej činnosti, ktorý je odbornejšie nazývaný antropogénny oxid uhličitý. Na predikciu sme používali teóriu časových radov a opierali sme sa primárne o [24].

V druhej kapitole sme popísali základný model atmosférického prúdenia, tzv. *advekčno-difúznou rovnicu*, pričom sme čerpali najmä z knihy [26]. Táto rovnica popisuje zmenu koncentrácie (hustoty) častíc vo vzduchu za čas t v dôsledku advekcie a difúzie. V našom prípade pôjde o častice oxidu uhličitého. Ďalej sa tu zaoberáme numerickými metódami na riešenie tejto advekčno-difúznej rovnice, pričom opäť vychádzame najmä z knihy [26]. Odporúčanou metódou riešenia a aj najčastejšie používanou pri modelovaní prúdenia kva-

palín je metóda konečných objemov (*angl. finite volume method*).

V ďalšej časti druhej kapitoly popisujeme priestorový model, ktorého cieľom je zachytiť a predikovať pohyb častí CO_2 nad Európou. Pohyb týchto častí je daný advekčno-difúznou rovnicou so zdrojovým členom, pričom ako zdrojový člen používame predikované množstvá emisií CO_2 z prvej kapitoly.

V poslednej kapitole sa venujeme modelu koncentrácie CO_2 pomocou veľkosti ľudskej populácie na základe článkov [18] a [19]. V našej práci sme tento model oproti pôvodnej verzii obohatili o regionalitu – pozerali sme sa na každý štát Európy zvlášť a do modelu sme zahrnuli aj interakcie medzi jednotlivými krajinami. Na odhadnutie interakcií sme použili reálne dáta vetra nad Európou za rok 2017.

1 Antropogénne emisie CO₂ v európskych krajinách

Antropogénny oxid uhličitý je ten, ktorý je do ovzdušia vylučováný vplyvom ľudskej činnosti. Hlavným zdrojom tohto oxidu uhličitého je spaľovanie fosílnych palív, čo podľa [9] tvorí takmer 80% všetkých emisií. V našom modeli sa pre jednoduchosť zameriavame iba na štáty Európy. Odhady množstva emisií nám budú slúžiť neskôr v Kapitole 2 v modeli (2.42). Na odhadovanie dát pre rok 2017 sme využili metódy modelovania pomocou časových radov opierajúc sa o [24]. Pre potreby tejto práce teraz zadefinujeme niekoľko pojmov, ktoré boli podrobne opísané a odvodené práve v [24], no pre našu prácu nie sú tieto odvodenia kľúčové.

Definícia 1.1 *Stacionárnym procesom nazveme proces x_t , ktorý spĺňa nasledujúce vlastnosti:*

- (1) $E[x_t] = \mu \quad \forall t$,
 - (2) $Cov[x_t, x_s] = \gamma(|t - s|) \quad \forall t, s$,
- pričom z (2) vyplýva: $Var[x_t] = const. \quad \forall t$.*

Definícia 1.2 *Biely šum u_t je dôležitým príkladom stacionárneho procesu s vlastnosťami:*

- (1) $E[u_t] = 0 \quad \forall t$,
- (2) $Var[u_t] = \sigma^2 \quad \forall t$,
- (3) $cov(u_t, u_s) = 0 \quad \forall t \neq s$.

Je to základný náhodný proces, pomocou ktorého budeme definovať ďalšie procesy.

Definícia 1.3 *Pod pojmom autoregresný proces p -teho rádu $AR(p)$ budeme rozumieť proces v tvare:*

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + u_t,$$

kde u_t je biely šum.

Definícia 1.4 *Pod pojmom moving average proces q -teho rádu $MA(q)$ budeme rozumieť proces v tvare:*

$$x_t = \mu + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \beta_2 u_{t-2} - \dots - \beta_q u_{t-q},$$

kde $u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-q}$ je biely šum.

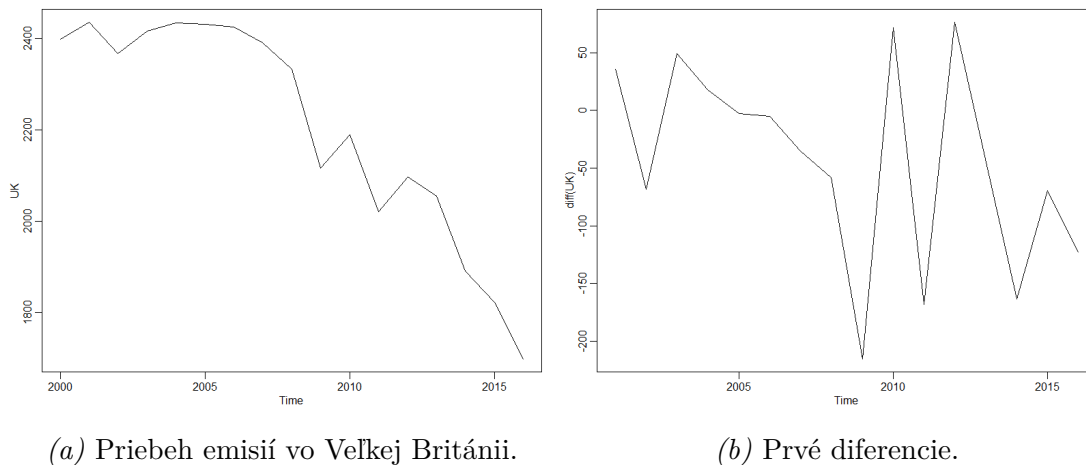
Definícia 1.5 Ak treba proces k -krát diferencovať, aby sme dosiahli stacionaritu, nazýva sa integrovaný proces k -teho rádu $I(k)$.

Definícia 1.6 Kombináciou predošlých procesov dostaneme proces $ARIMA(p, k, q)$.

Ďalšou metódou, ktorú budeme používať pri modelovaní trendov je Holt-Wintersova metóda popísaná v [24]. Ďalej v kapitole nasledujú konkrétne odhady modelov pre emisie v jednotlivých krajinách Európy. Dáta o emisiách sme čerpali z [7] a z [13] a zdrojové kódy prikladáme na CD na zadnej strane práce.

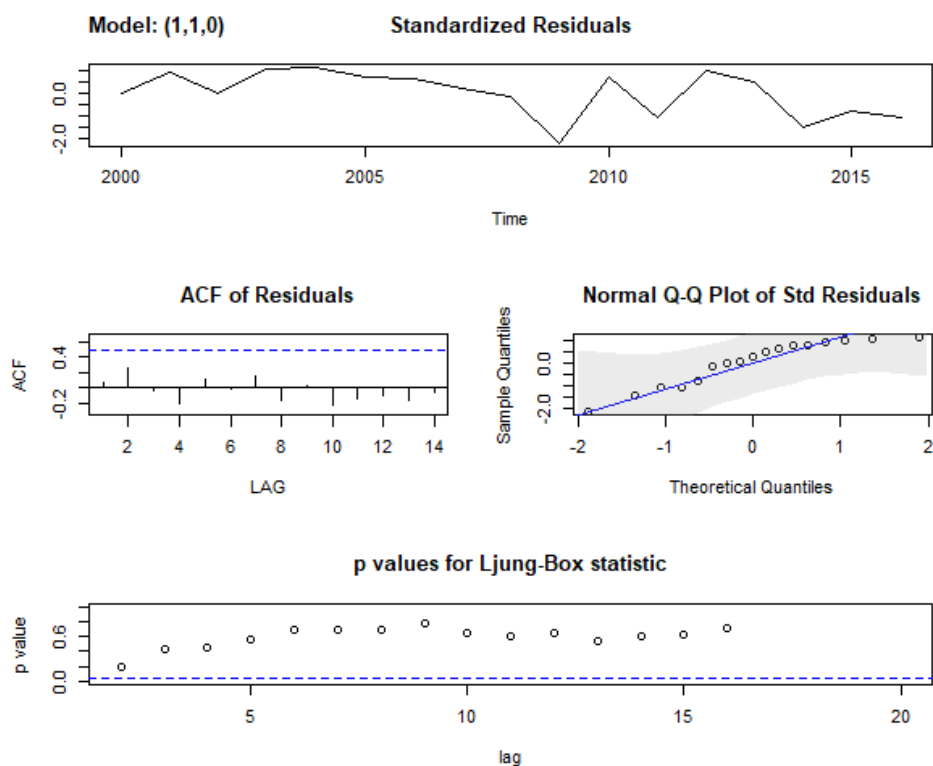
1.1 Západná Európa

Do západnej Európy sme zaradili krajiny Írsko, Veľká Británia, Belgicko, Holandsko, Francúzsko, Luxembursko, Portugalsko a Španielsko. V tejto podkapitole ukážeme ako sme pristupovali k dátam a vo zvyšných budeme používať rovnaký postup a kroky už nebudeme duplicitne popisovať. Zoberme si napríklad Veľkú Britániu. Ako vidíme na Obrázku 1a dáta emisií vykazujú trend, preto na modelovanie použijeme ich prvé diferencie zobrazené na Obrázku 1b.



Obr. 1: Emisie vo Veľkej Británii.

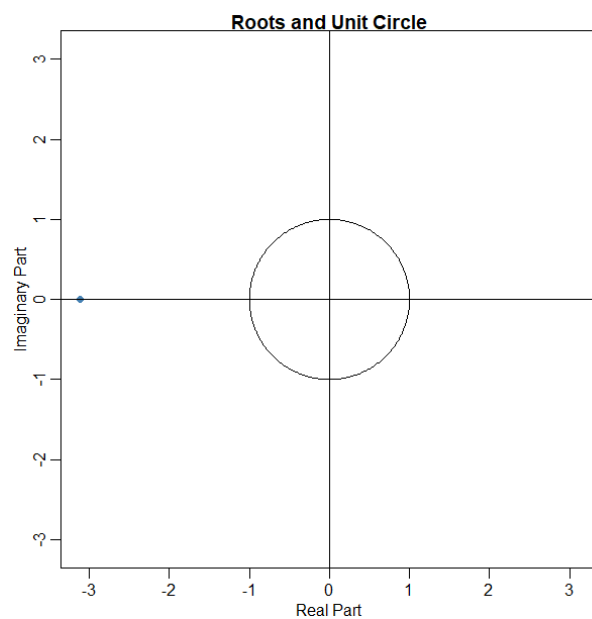
Ako vhodný model vyberieme model **ARIMA(1,1,0)**. Výstup pre tento model z Rka je zobrazený na Obrázku 2.



Obr. 2: Testovanie modelu.

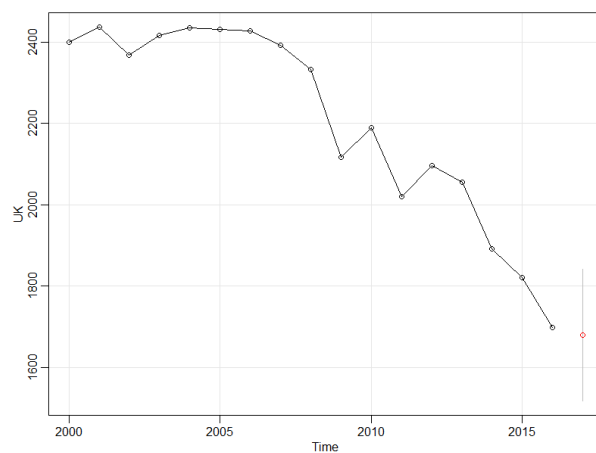
Na Obrázku 2 si vľavo v strede môžeme všimnúť autokorelačnú funkciu rezíduí daného modelu, pričom všetky jej hodnoty padli do 95% intervalu spoľahlivosti, čo značí, že hypotézu o tom, že jednotlivé korelácie sú 0 nezamietame. Rovnaký výsledok vyšiel aj v Ljung-Boxovom teste, kde všetky p hodnoty vyšli nad 5% hranicu. To znamená, že naše rezíduá sú dobrým kandidátom na biely šum.

Na záver skontrolujeme, či je proces skutočne stacionárny. Vidíme, že na Obrázku 3 vyšiel koreň mimo jednotkového kruhu, to značí, že daný proces je stacionárny.



Obr. 3: Overenie stacionarity.

Predikcia pomocou modelu **ARIMA(1,1,0)** je zobrazená na Obrázku 4.



Obr. 4: Predikcia pre Veľkú Britániu na rok 2017.

V Tabulke 1 sa nachádzajú údaje o emisiách pre západnú Európu, pričom červenou sú zvýraznené odhady.

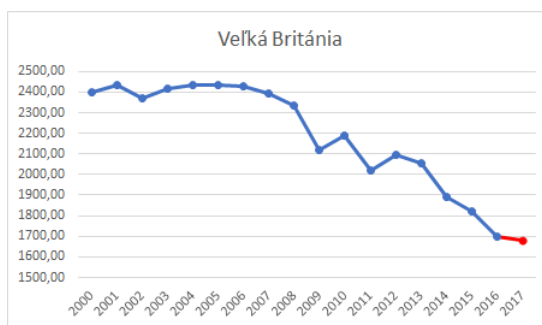
		Západná Európa																	
		2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
1	Belgicko	4 342	4 305	4 292	4 351	4 385	4 266	4 218	4 115	4 128	3 685	3 889	3 586	3 483	3 495	3 328	3 455	3 482	3 411
2	Francúzsko	785	786	780	793	798	805	785	769	757	721	739	693	693	692	637	647	658	635
3	Luxembursko	3 757	3 980	4 316	4 518	5 093	5 202	5 106	4 912	4 863	4 631	4 864	4 795	4 652	4 440	4 296	4 166	4 049	4 049
4	Holandsko	4 409	4 528	4 520	4 600	4 655	4 566	4 457	4 469	4 545	4 397	4 679	4 378	4 266	4 272	4 099	4 284	4 316	4 265
5	Veľká Británia	2 400	2 434	2 367	2 417	2 435	2 432	2 426	2 391	2 333	2 117	2 189	2 021	2 097	2 055	1 891	1 822	1 699	1 681
6	Írsko	670	709	689	682	688	720	718	721	714	631	626	570	568	558	554	583	617	651
7	Španielsko	645	649	688	698	734	766	750	766	702	622	595	599	589	534	538	574	550	530
8	Portugalsko	742	738	779	725	757	783	733	707	683	649	606	594	575	556	557	605	579	576

Tabuľka 1: Výsledné emisie na km² v štátoch západnej Európy.

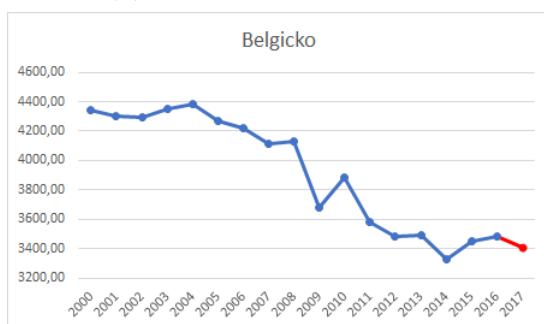
Pre krajiny Belgicko, Francúzsko, Írsko, Luxembursko a Portugalsko sme použili Holt-Wintersovu metódu zhladzovania. Pre Holandsko bol vhodný model ARIMA(4,1,0), Španielsko ARIMA(2,1,0) a pre Veľkú Britániu bol vhodný model ARIMA(1,0,0).



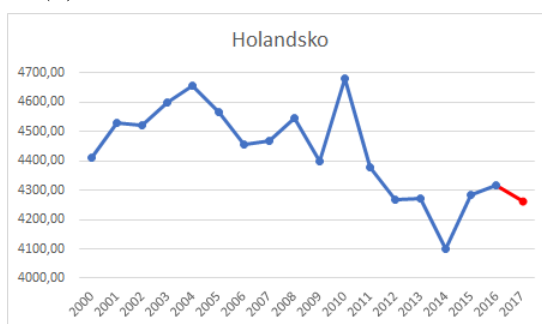
(a) Emisie na km² v Írsku.



(b) Emisie na km² vo Veľkej Británii.

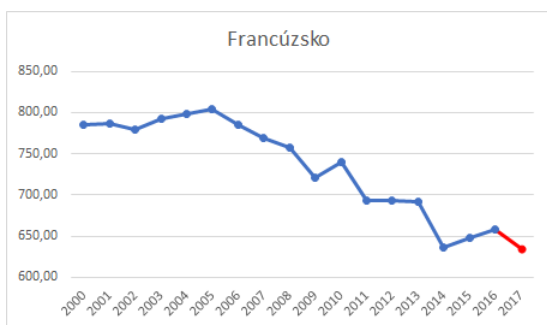


(c) Emisie na km² v Belgicku.

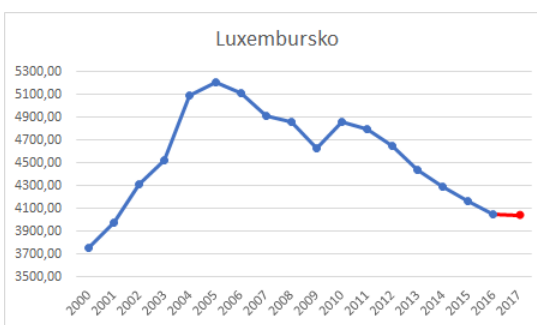


(d) Emisie na km² v Holandsku.

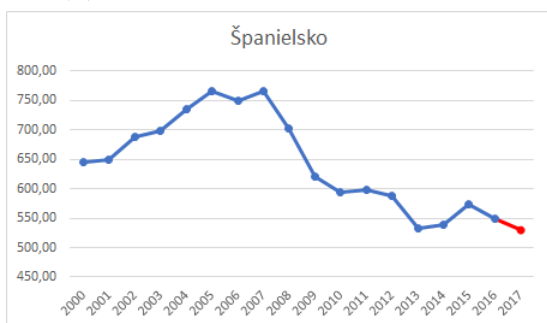
Obr. 5: Emisie v západnej Európe časť 1.



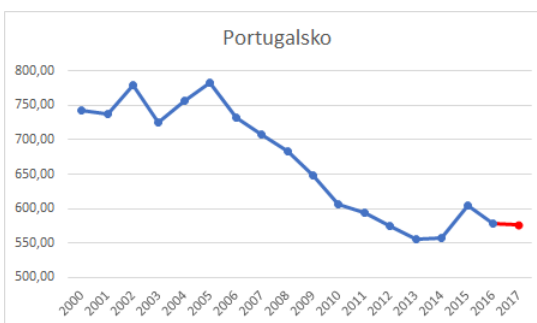
(a) Emisie na km² vo Francúzsku.



(b) Emisie na km² v Luxembursku.



(c) Emisie na km² v Španielsku.



(d) Emisie na km² v Portugalsku.

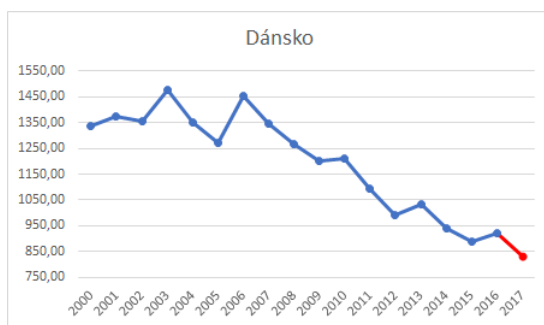
Obr. 6: Emisie v západnej Európe časť 2.

1.2 Severná Európa

Do severnej Európy sme zaradili štáty Švédsko, Nórsko, Fínsko a Dánsko. Pre Nórsko sme zvolili model ARIMA(2,1,0), Švédsko, Fínsko a Dánsko sme určili pomocou Holt-Wintersovho zhladzovania.

		Severná Európa																	
		2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
1	Dánsko	1 335	1 372	1 356	1 475	1 353	1 272	1 456	1 345	1 265	1 200	1 210	1 095	990	1 035	942	887	919	833
2	Fínsko	173	189	197	219	209	174	208	203	180	171	195	174	158	160	148	138	147	133
3	Nórsko	150	155	151	156	158	155	151	154	153	150	158	154	149	149	149	150	152	150
4	Švédsko	126	128	130	131	130	124	124	123	119	110	123	114	108	105	101	101	101	101

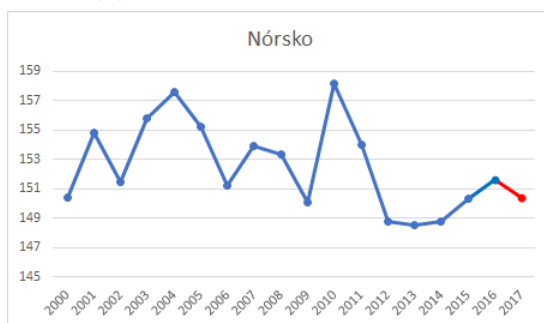
Tabuľka 2: Výsledné emisie na km² v štátoch severnej Európy.



(a) Emisie na km² v Dánsku.



(b) Emisie na km² vo Fínsku.



(c) Emisie na km² v Nórsku.



(d) Emisie na km² vo Švédsku.

Obr. 7: Emisie v severnej Európe.

1.3 Stredná Európa

Do strednej Európy sme zaradili Rakúsko, Česko, Nemecko, Maďarsko, Poľsko, Slovensko, Slovinsko a Švajčiarsko. V Tabuľke 3 uvádzame konkrétne dáta o emisiách, pričom červenou sú zvýraznené odhady. Pri Švajčiarsku sa nám podarilo získať iba údaje do roku 2015, preto sme odhadovali 2 roky.

		Stredná Európa																	
		2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
1	Rakúsko	809	857	877	943	950	967	936	906	903	827	887	861	830	831	787	819	823	805
2	Nemecko	2 572	2 616	2 570	2 574	2 536	2 488	2 524	2 452	2 460	2 276	2 398	2 339	2 357	2 410	2 294	2 286	2 296	2 274
3	Švajčiarsko	1 192	1 222	1 173	1 192	1 201	1 216	1 210	1 167	1 207	1 174	1 216	1 123	1 157	1 182	1 086	1 077	1 111	1 074
4	Maďarsko	638	655	644	673	658	660	653	639	627	565	570	551	510	478	480	509	514	507
5	Česko	1 635	1 631	1 592	1 639	1 651	1 623	1 641	1 660	1 596	1 496	1 514	1 486	1 441	1 395	1 339	1 352	1 323	1 295
6	Poľsko	1 017	1 006	981	1 021	1 035	1 032	1 074	1 074	1 053	1 010	1 067	1 066	1 042	1 028	990	1 000	1 016	1 012
7	Slovensko	833	879	842	852	863	864	860	827	838	760	779	765	728	719	676	684	678	665
8	Slovinsko	754	799	807	795	811	826	836	844	890	797	799	798	772	741	660	665	699	679

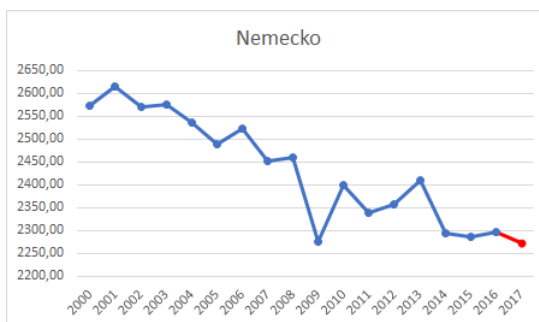
Tabuľka 3: Výsledné emisie na km² v štátoch strednej Európy.

V krajinách Rakúsko, Nemecko a Slovinsko sme použili Holt-Wintersovu metódu. Pre Česko sme zvolili ARIMA(2,1,0), pre Maďarsko ARIMA(1,1,0), pre Poľsko ARIMA(0,1,1),

pre Slovensko ARIMA(1,1,0) a pre Švajčiarsko ARIMA(2,1,0).



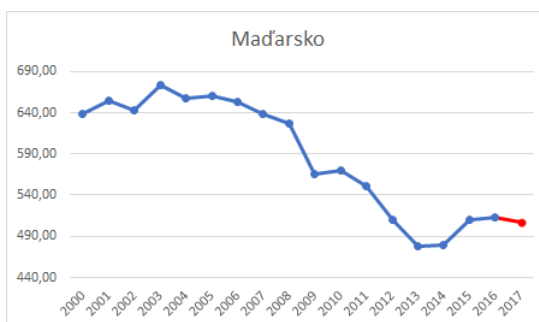
(a) Emisie na km² v Rakúsku.



(b) Emisie na km² v Nemecku.



(c) Emisie na km² vo Švajčiarsku.

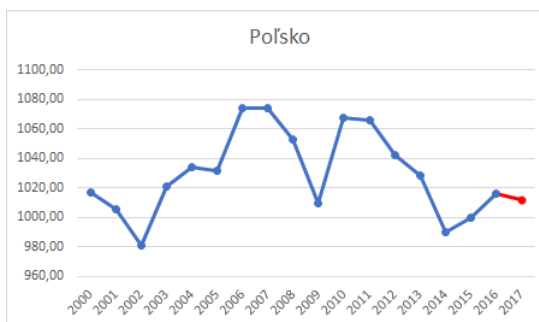


(d) Emisie na km² v Maďarsku.

Obr. 8: Emisie v strednej Európe časť 1.



(a) Emisie na km² v Česku.



(b) Emisie na km² v Poľsku.

Obr. 9: Emisie v strednej Európe časť 2.



(a) Emisie na km² na Slovensku.

(b) Emisie na km² v Slovinsku.

Obr. 10: Emisie v strednej Európe časť 3.

1.4 Južná Európa

V južnej Európe máme štáty Albánsko, Bosna a Hercegovina, Bulharsko, Chorvátsko, Grécko, Taliansko, Macedónsko, Čierna Hora, Rumunsko, Srbsko a Turecko.

		Južná Európa																	
		2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
1	Albánsko	107	114	132	152	147	146	145	149	147	132	144	153	149	155	170	176	184	189
2	Bulharsko	411	445	421	460	452	463	474	508	494	417	437	485	441	390	414	442	414	401
3	Bosna a Hercegovina	269	261	279	283	305	327	364	383	420	418	429	483	475	472	476	497	501	517
4	Chorvátsko	350	370	389	412	406	415	419	443	421	389	376	369	341	331	318	320	304	293
5	Grécko	797	814	811	848	852	881	871	888	862	809	755	735	709	636	616	588	569	544
6	Taliansko	1 573	1 594	1 598	1 647	1 662	1 660	1 648	1 622	1 580	1 409	1 441	1 401	1 325	1 234	1 182	1 217	1 222	1 201
7	Macedónsko	480	477	435	450	445	448	384	411	402	361	363	403	390	353	335	348	354	323
8	Čierna Hora	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	142	164	155	189	126	178	177	161	155	152	150	147	145
9	Rumunsko	392	415	415	434	429	419	431	448	434	363	347	373	362	325	326	333	317	308
10	Srbsko	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	612	595	590	523	521	558	499	509	427	454	436	419
11	Turecko	293	273	285	304	316	342	348	382	384	378	394	417	432	414	441	447	471	479

Tabuľka 4: Výsledné emisie na km² v štátoch južnej Európy.

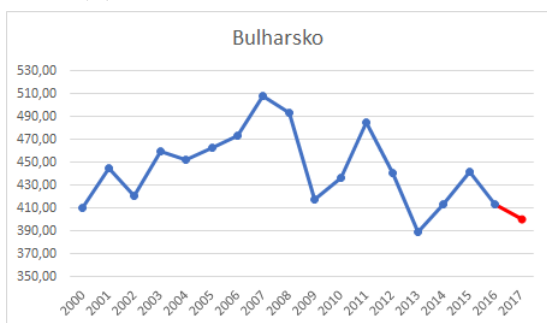
Na krajiny Chorvátsko, Grécko, Taliansko, Čierna Hora, Rumunsko a Srbsko sme použili Holt-Wintersovu metódu. Pre Albánsko bol vhodný model ARIMA(1,1,0), pre Bosnu a Hercegovinu ARIMA(2,1,0), pre Bulharsko ARIMA(3,1,0), pre Macedónsko ARIMA(4,1,0) a pre Turecko ARIMA(2,1,0).



(a) Emisie na km² v Albánsku.



(b) Emisie na km² v Bosne a Hercegovine.



(c) Emisie na km² v Bulharsku.

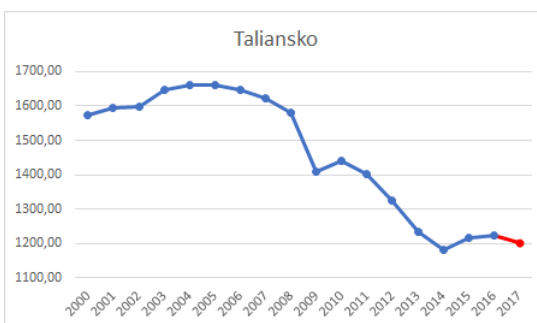


(d) Emisie na km² v Chorvátsku.

Obr. 11: Emisie v južnej Európe časť 1.



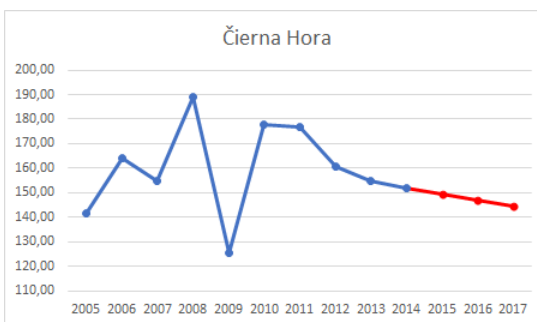
(a) Emisie na km² v Grécku.



(b) Emisie na km² v Taliansku.



(c) Emisie na km² v Macedónsku.



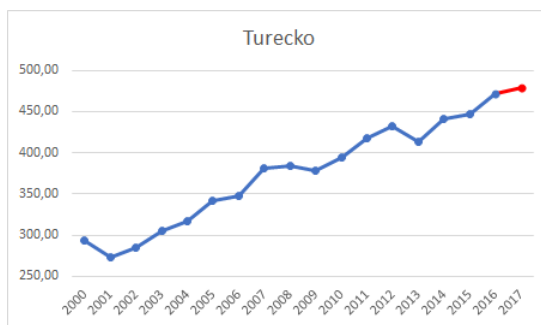
(d) Emisie na km² v Čiernej Hore.

Obr. 12: Emisie v južnej Európe časť 2.



(a) Emisie na km² v Rumunsku.

(b) Emisie na km² v Srbsku.



(c) Emisie na km² v Turecku.

Obr. 13: Emisie v južnej Európe časť 3.

1.5 Východná Európa

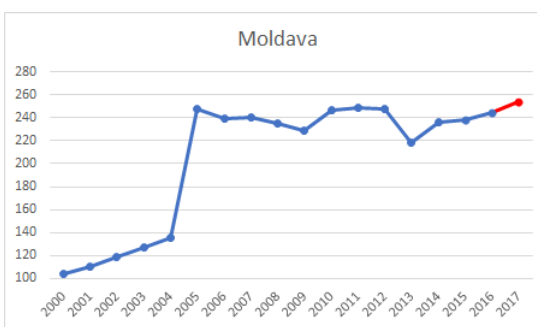
Poslednou časťou je východná Európa, kam sme zaradili Bielorusko, Estónsko, Lotyšsko, Litvu, Moldavu, Rusko a Ukrajinu. Pre Bielorusko sme zvolili model ARIMA(1,1,0), pre Estónsko ARIMA(3,1,0), pre Moldavu ARIMA(1,1,0) a pre Ukrajinu ARIMA(2,1,0). Na predikciu v Lotyšsku, Litve a Rusku sme použili Holt-Wintersovu metódu.

		Východná Európa																	
		2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
1	Bielorusko	259	254	253	258	280	306	328	311	325	314	340	318	322	324	322	288	302	302
2	Estónsko	340	347	337	378	383	381	364	445	395	324	421	423	398	436	419	352	378	411
3	Lotyšsko	111	117	117	121	121	123	131	137	131	120	137	126	122	119	116	117	112	110
4	Litva	182	193	194	194	203	218	223	244	234	198	212	218	219	204	201	205	191	187
5	Moldava	104	110	118	127	135	248	240	241	236	229	246	249	248	219	236	238	245	254
6	Rusko	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	422	431	432	429	403	423	442	444	440	422	418	409	406
7	Ukrajina	423	425	421	465	453	582	585	599	572	473	510	533	519	503	442	356	385	378

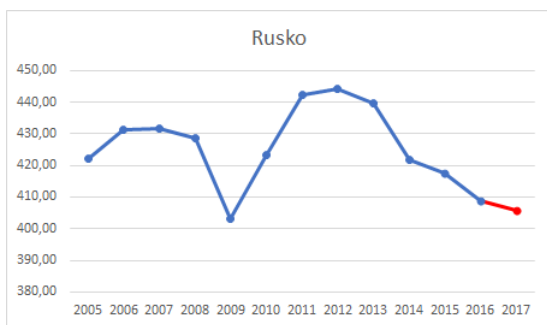
Tabuľka 5: Výsledné emisie na km² v štátoch východnej Európy.



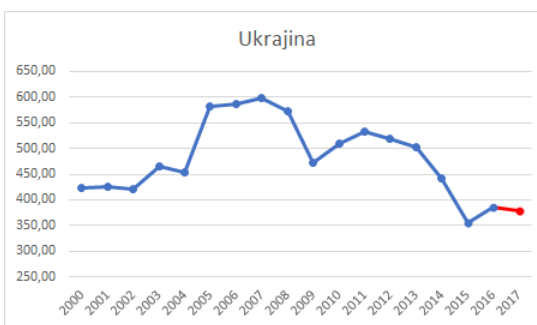
(a) Emisie na km² v Bielorusku.



(b) Emisie na km² v Moldave.



(c) Emisie na km² v Rusku.

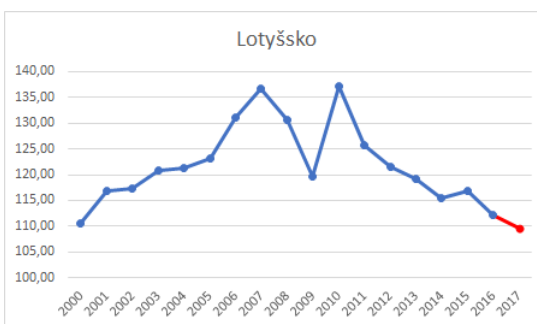


(d) Emisie na km² v Ukrajine.

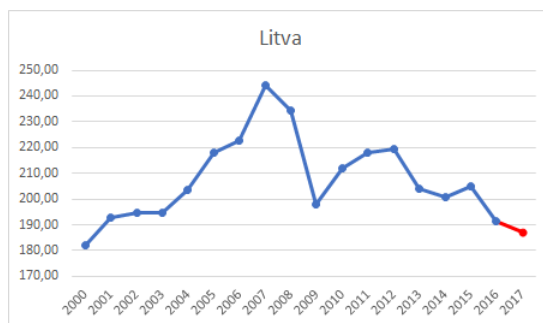
Obr. 14: Emisie v východnej Európe časť 1.



(a) Emisie na km² v Estónsku.



(b) Emisie na km² v Lotyšsku.



(c) Emisie na km² v Litve.

Obr. 15: Emisie v východnej Európe časť 2.

2 Model šírenia pomocou advekčno-difúznej rovnice so zdrojovým členom

Advekčno-difúzna rovnica popisuje zmenu koncentrácie (hustoty) častíc vo vzduchu za čas t v dôsledku dvoch samostatných procesov: advekcie a difúzie. Napríklad podľa [12] difúzia predstavuje samovoľné prenikanie častíc jednej látky medzi častice druhej látky rovnakého skupenstva. Advekcia je pohyb častíček spôsobený vplyvom prúdenia vzduchu. Zmena koncentrácie $c = c(x, y, z, t)$ meranej v $[\text{kg}/\text{m}^3]$ je podľa [26] daná ako

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla c) - \nabla \cdot (\vec{u}c) + S, \quad (2.1)$$

kde $\nabla \cdot$ predstavuje operátor divergencie, v knihe [26] definovaný ako $\nabla \cdot F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}$, ∇ predstavuje operátor gradient. Funkciu $D = D(x, y, z, t)$ nazývame difúzny koeficient s jednotkami $[\text{m}^2/\text{s}]$, $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t)$ je vektorové pole, popisujúce rýchlosť prúdenia vzduchu v $[\text{m}/\text{s}]$ a $S = S(x, y, z, t)$ predstavuje vonkajšie zdroje v $[\text{kg}/(\text{m}^3\text{s})]$. Operátor divergencie pridá v jednotkách do menovateľa $[\text{m}]$, a preto vo výsledku dostaneme zhodu medzi jednotkami nasledujúcim spôsobom:

$$\underbrace{\frac{1}{\text{s}}}_{\frac{\partial}{\partial t}} \cdot \underbrace{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}_c = \underbrace{\frac{1}{\cancel{\text{m}}}}_{\nabla \cdot} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\text{m}}^2}{\text{s}}}_D \cdot \underbrace{\frac{1}{\cancel{\text{m}}}}_{\nabla} \cdot \underbrace{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}_c - \underbrace{\frac{1}{\cancel{\text{m}}}}_{\nabla \cdot} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}}}_{\vec{u}} \cdot \underbrace{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}_c + \underbrace{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3\text{s}}}_R.$$

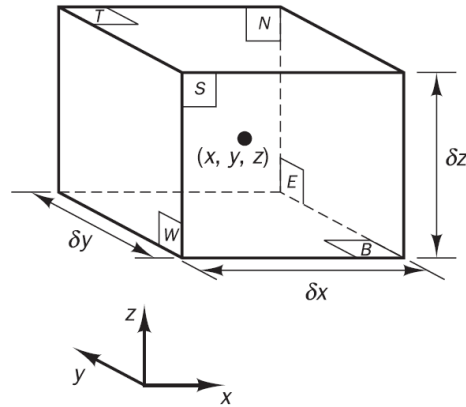
2.1 Advekcia

Advekcia je fyzikálne pomenovanie pre prenos vzduchovej hmoty prúdením. Uvažujme malú častočku kvapaliny v tvare pravidelného hranolu so stranami dĺžky δx , δy a δz a stredom v bode (x, y, z) . Podľa knihy [26] je miera nárastu hmoty za jednotku času v častočke kvapaliny daná vzťahom

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\delta x\delta y\delta z) = \frac{\partial c}{\partial t}\delta x\delta y\delta z, \quad (2.2)$$

kde funkcia c predstavuje koncentráciu (hustotu) a $\delta x\delta y\delta z$ je objem danej častočky.

Ďalej potrebujeme vziať do úvahy množstvo hmoty, ktoré vytečie alebo vtečie cez hranice telesa. Nech $\vec{u}$ predstavuje trojrozmerné vektorové pole, pričom $\vec{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})^T$, ktoré charakterizuje tento tok. Toto vektorové pole je obvykle funkciou priestorových premenných (x, y, z) .

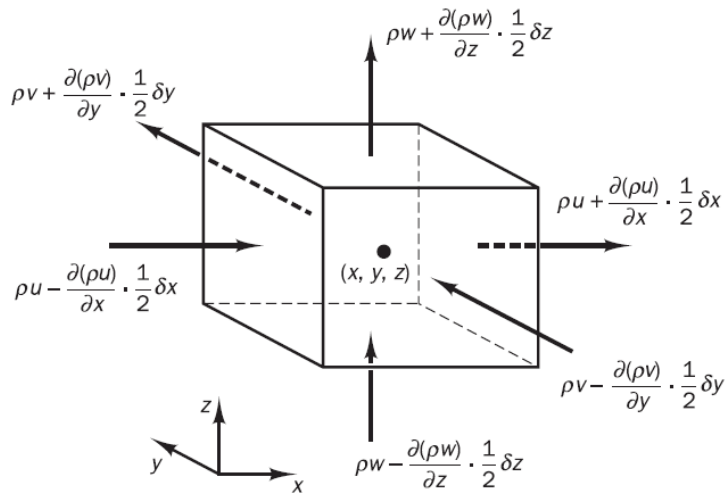


Obr. 16: Zobrazená jedna bunka. Obrázok je prevzaný z [26, str. 10].

Podľa [26] je čiastočka hmoty tak malá, že na aproximáciu vlastnosti kvapaliny nám postačia prvé dva členy Taylorovho rozvoja, konkrétne pre smer x

$$\begin{aligned}
 \mathbf{uc} \left(x + \frac{1}{2} \delta x, y, z, t \right) &= \mathbf{uc}(x, y, z, t) + \frac{\partial(\mathbf{uc})}{\partial x} \left(x + \frac{1}{2} \delta x - x, y, z, t \right) \\
 &= \mathbf{uc}(x, y, z, t) + \frac{\partial(\mathbf{uc})}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \delta x, \\
 \mathbf{uc} \left(x - \frac{1}{2} \delta x, y, z, t \right) &= \mathbf{uc}(x, y, z, t) + \frac{\partial(\mathbf{uc})}{\partial x} \left(x - x - \frac{1}{2} \delta x, y, z, t \right) \\
 &= \mathbf{uc}(x, y, z, t) - \frac{\partial(\mathbf{uc})}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \delta x.
 \end{aligned}$$

Analogicky takúto aproximáciu urobíme aj v smere y a v smere z , čím dostávame situáciu vyobrazenú na Obrázku 17.



Obr. 17: Zobrazený prítok a odtok hmoty na hranici telesa. Obrázok je prevzaný z [26, str. 11].

Z Obrázku 17 je vidno, že čistý tok do čiastočky cez hranice je daný ako

$$\begin{aligned} & \left(c\mathbf{u} - \frac{\partial(c\mathbf{u})}{\partial x} \cdot \frac{1}{2}\delta x \right) \delta y \delta z - \left(c\mathbf{u} + \frac{\partial(c\mathbf{u})}{\partial x} \cdot \frac{1}{2}\delta x \right) \delta y \delta z \\ & + \left(c\mathbf{v} - \frac{\partial(c\mathbf{v})}{\partial y} \cdot \frac{1}{2}\delta y \right) \delta x \delta z - \left(c\mathbf{v} + \frac{\partial(c\mathbf{v})}{\partial y} \cdot \frac{1}{2}\delta y \right) \delta x \delta z \\ & + \left(c\mathbf{w} - \frac{\partial(c\mathbf{w})}{\partial z} \cdot \frac{1}{2}\delta z \right) \delta x \delta y - \left(c\mathbf{w} + \frac{\partial(c\mathbf{w})}{\partial z} \cdot \frac{1}{2}\delta z \right) \delta x \delta y, \end{aligned} \quad (2.3)$$

pričom prítok má pozitívne znamienko a odtok zase naopak negatívne.

Podľa zákona zachovania hmoty [26], celková zmena hmoty vnútri telesa za čas sa rovná množstvu hmoty, ktoré vtečie mínus množstvo hmoty, ktoré odtečie cez hranicu telesa. Dostaneme tak rovnosť medzi výrazmi (2.2) a (2.3). Po predelení celkovým objemom telesa $\delta x \delta y \delta z$ dostávame rovnosť

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(c\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial(c\mathbf{v})}{\partial y} + \frac{\partial(c\mathbf{w})}{\partial z} = 0. \quad (2.4)$$

Táto rovnica sa dá prepísať do kompaktnejšieho tvaru použitím operátora divergencie $\nabla \cdot$ ako

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\vec{u}) = 0. \quad (2.5)$$

Takýmto spôsobom dostávame **advekčný člen** v advekčno-difúznej rovnici (2.1).

2.2 Difúzia

Ako bolo spomenuté vyššie, difúzia je proces samovoľného prestupovania častíc jednej látky medzi časticou druhej látky. Tento proces prebieha vo všetkých skupenstvách, najrýchlejšie však v plynch. To, s akou rýchlosťou budú častice prestupovať, je dané difúznym koeficientom $D(x, y, z, t)$, ktorý sa môže meniť vzhľadom na polohu a čas t . Funkcia koncentrácie c závisí od miesta $\vec{x} = (x, y, z)$ a času t . Odvodenie rovnice popisujúcej tento jav nájdeme v knihe [25] a výsledný tvar je

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla c). \quad (2.6)$$

V prípade, že difúzny koeficient D je rovnaký pre každý čas a polohu, vieme rovnicu prepísať do tvaru

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c. \quad (2.7)$$

Konkrétne pre CO_2 je podľa [17] difúzny koeficient vo vzduchu rovný $14 \text{ mm}^2/\text{s}$.

2.3 Numerické metódy riešenia advekčno-difúzných rovníc

Na riešenie advekčno-difúzných rovníc existuje viacero metód, napríklad metóda konečných diferencií alebo metóda konečných prvkov. Podľa knihy [26] je najvhodnejšou metódou na numerické riešenie pohybov plynov metóda konečných objemov (*angl. finite volume method*). Toto riešenie je definované vo vnútorných uzloch (centrách) každej bunky na diskretizovanej mriežke v 3D priestore. Ako prvý krok zintegrujeme rovnicu (2.1) cez všetky konečné objemy (*angl. finite control volumes*). Následne integrál nadiskretizujeme do algebraického systému.

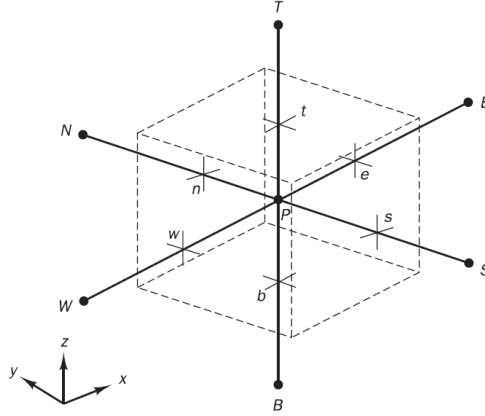
V závislosti od spôsobu diskretizácie dostávame rôzne numerické schémy: napríklad schéma využívajúca centrálnu diferenciu, upwind schéma alebo metóda zmenšujúcej sa totálnej variácie (*angl. total variation diminishing - TVD*). Podľa knihy [26] by mala diskretizačná schéma spĺňať nasledujúce vlastnosti:

- konzervatívnosť (*angl. conservativeness*)
- ohraničenosť (*angl. boundedness*)
- transportívnosť (*angl. transportiveness*)

Zo spomenutých metód má na základe [26] všetky tieto tri vlastnosti práve TVD schéma, preto ju budeme ďalej využívať v numerike.

2.3.1 Metóda konečných objemov v 3D pomocou TVD schémy

Ako bolo spomenuté vyššie, advekčno-difúznú rovnicu budeme riešiť pomocou metódy konečných objemov. Potrebujeme teda vytvoriť 3D sieť, ktorá bude obsahovať malé elementy – bunky. Bunka má stred (uzol) v bode P a šesť susedných uzlov W, E, S, N, B, T (*west* – západ, *east* – východ, *south* – juh, *north* – sever, *bottom* – spodok, *top* – vrch). Malé písmená w, e, s, n, b, t označujú prislúchajúce steny bunky, tak ako je zobrazené na Obrázku 18. Dĺžku hrany bunky v smere x označíme δx , v smere y je to δy a v smere z je to δz . Schéma sa dá vytvoriť aj pre rôzne veľké bunky (popísané napríklad v [26]), t.j. meniace sa δx , δy aj δz , my pre zjednodušenie berieme δx , δy aj δz rovnaké pre všetky bunky.



Obr. 18: Zobrazená jedna bunka mriežky v 3D. Obrázok je prevzaný z [26, str. 131].

Pre ľahšie pochopenie odvodenia schémy pre rovnicu začneme sledovaním [26] so stacionárnou advekčno-difúznou rovnicou v tvare

$$\nabla \cdot (D \nabla c) = \nabla \cdot (\vec{u}c), \quad (2.8)$$

pričom vektorové pole je $\vec{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})^T$, parameter D predstavuje difúzny koeficient, operátor $\nabla \cdot$ je operátor divergencie a funkcia c reprezentuje koncentráciu.

Rovnicu (2.8) zintegrujeme cez objem jednej bunky (tzv. *control volume*), ktorý označíme ΔV a dostaneme rovnicu v tvare

$$\iiint_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial c}{\partial z} \right) dV = \iiint_{\Delta V} \nabla \cdot (\vec{u}c) dV, \quad (2.9)$$

a teda

$$\begin{aligned} D \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)_e - D \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)_w + D \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_n - D \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_s + D \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right)_t - D \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right)_b = \\ = (u_e c_e - u_w c_w) + (v_n c_n - v_s c_s) + (w_t c_t - w_b c_b). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Aproximáciou derivácie v difúznom člene pomocou centrálnej diferencie dostaneme z (2.10) rovnicu v tvare

$$\begin{aligned} \left[D \frac{(c_E - c_P)}{\delta x} - D \frac{(c_P - c_W)}{\delta x} \right] + \left[D \frac{(c_N - c_P)}{\delta y} - D \frac{(c_P - c_S)}{\delta y} \right] + \\ + \left[D \frac{(c_T - c_P)}{\delta z} - D \frac{(c_P - c_B)}{\delta z} \right] = (u_e c_e - u_w c_w) + (v_n c_n - v_s c_s) + (w_t c_t - w_b c_b), \end{aligned} \quad (2.11)$$

pričom c_P predstavuje koncentráciu v bode P a obdobne s ostatnými bodmi.

Na advekčný člen použijeme TVD schému. Pre tok v pozitívnom x -ovom smere $\mathbf{u} > 0$, pozitívnom y -ovom smere $\mathbf{v} > 0$ a pozitívnom z -tovom smere $\mathbf{w} > 0$ definujeme, podobne ako v jednorozmernom prípade (viď. [26]), koncentrácie na stenách bunky pomocou TVD schémy ako

$$c_e = c_P + \frac{1}{2}\psi(r_e^+)(c_E - c_P), \quad (2.12)$$

$$c_w = c_W + \frac{1}{2}\psi(r_w^+)(c_P - c_W), \quad (2.13)$$

$$c_n = c_P + \frac{1}{2}\psi(r_n^+)(c_N - c_P), \quad (2.14)$$

$$c_s = c_S + \frac{1}{2}\psi(r_s^+)(c_P - c_S), \quad (2.15)$$

$$c_t = c_P + \frac{1}{2}\psi(r_t^+)(c_T - c_P), \quad (2.16)$$

$$c_b = c_B + \frac{1}{2}\psi(r_b^+)(c_P - c_B), \quad (2.17)$$

kde $r_e^+ = \frac{c_P - c_W}{c_E - c_P}$, $r_w^+ = \frac{c_W - c_{WW}}{c_P - c_W}$, $r_n^+ = \frac{c_P - c_S}{c_N - c_P}$, $r_s^+ = \frac{c_S - c_{SS}}{c_P - c_S}$, $r_t^+ = \frac{c_P - c_B}{c_T - c_P}$ a $r_b^+ = \frac{c_B - c_{BB}}{c_P - c_B}$.

Funkcia ψ predstavuje tzv. limitujúcu funkciu (*angl. limiter function*), ktorá môže byť podľa [26] jednou z funkcií z Tabuľky 6.

Názov	Limitujúca funkcia
Van Leer	$\psi(r) = \frac{r+ r }{1+r}$
Van Albada	$\psi(r) = \frac{r+r^2}{1+r^2}$
Min-Mod	$\psi(r) = \begin{cases} \min\{r, 1\} & \text{ak } r > 0 \\ 0 & \text{ak } r \leq 0 \end{cases}$
SUPERBEE	$\psi(r) = \max\{0, \min(2r, 1), \min(r, 2)\}$
Sweby	$\psi(r) = \max\{0, \min(\beta r, 1), \min(r, \beta)\}$
QUICK	$\psi(r) = \max\{0, \min(2r, \frac{3+r}{4}, 2)\}$
UMIST	$\psi(r) = \max\{0, \min(2r, \frac{1+3r}{4}, \frac{3+r}{4}, 2)\}$

Tabuľka 6: Tabuľka s rôznymi typmi limitujúcich funkcií [26].

Dosadením výrazov (2.12)–(2.17) do rovnice (2.11) dostaneme rovnicu

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{D}{\delta x} (c_E - c_P) - \frac{D}{\delta x} (c_P - c_W) \right] + \left[\frac{D}{\delta y} (c_N - c_P) - \frac{D}{\delta y} (c_P - c_S) \right] + \\
& + \left[\frac{D}{\delta z} (c_T - c_P) - \frac{D}{\delta z} (c_P - c_B) \right] = \\
& + \mathbf{u}_e \left[c_P + \frac{1}{2} \psi(r_e^+) (c_E - c_P) \right] - \mathbf{u}_w \left[c_W + \frac{1}{2} \psi(r_w^+) (c_P - c_W) \right] \\
& + \mathbf{v}_n \left[c_P + \frac{1}{2} \psi(r_n^+) (c_N - c_P) \right] - \mathbf{v}_s \left[c_S + \frac{1}{2} \psi(r_s^+) (c_P - c_S) \right] \\
& + \mathbf{w}_t \left[c_P + \frac{1}{2} \psi(r_t^+) (c_T - c_P) \right] - \mathbf{w}_b \left[c_B + \frac{1}{2} \psi(r_b^+) (c_P - c_B) \right].
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Preusporiadaním rovnice (2.18) dostávame schému

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{2D}{\delta x} + \frac{2D}{\delta y} + \frac{2D}{\delta z} + \mathbf{u}_e + \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_t \right] c_P = \frac{D}{\delta x} c_E + \left[\frac{D}{\delta x} + \mathbf{u}_w \right] c_W + \frac{D}{\delta y} c_N + \left[\frac{D}{\delta y} + \mathbf{v}_s \right] c_S \\
& + \frac{D}{\delta z} c_T + \left[\frac{D}{\delta z} + \mathbf{w}_b \right] c_B - \mathbf{u}_e \left[\frac{1}{2} \psi(r_e^+) (c_E - c_P) \right] + \mathbf{u}_w \left[\frac{1}{2} \psi(r_w^+) (c_P - c_W) \right] \\
& - \mathbf{v}_n \left[\frac{1}{2} \psi(r_n^+) (c_N - c_P) \right] + \mathbf{v}_s \left[\frac{1}{2} \psi(r_s^+) (c_P - c_S) \right] \\
& - \mathbf{w}_t \left[\frac{1}{2} \psi(r_t^+) (c_T - c_P) \right] + \mathbf{w}_b \left[\frac{1}{2} \psi(r_b^+) (c_P - c_B) \right].
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Analogicky pre tok v negatívnom x -ovom smere $\mathbf{u} < 0$, negatívnom y -ovom smere $\mathbf{v} < 0$ a negatívnom z -tovom smere $\mathbf{w} < 0$ definujeme, podobne ako v jednorozmernom prípade (viď. [26]), koncentrácie na stenách bunky pomocou TVD schémy ako

$$c_e = c_E + \frac{1}{2} \psi(r_e^-) (c_P - c_E), \tag{2.20}$$

$$c_w = c_P + \frac{1}{2} \psi(r_w^-) (c_W - c_P), \tag{2.21}$$

$$c_n = c_N + \frac{1}{2} \psi(r_n^-) (c_P - c_N), \tag{2.22}$$

$$c_s = c_P + \frac{1}{2} \psi(r_s^-) (c_S - c_P), \tag{2.23}$$

$$c_t = c_T + \frac{1}{2} \psi(r_t^-) (c_P - c_T), \tag{2.24}$$

$$c_b = c_P + \frac{1}{2} \psi(r_b^-) (c_B - c_P), \tag{2.25}$$

kde $r_e^- = \frac{c_{EE} - c_E}{c_E - c_P}$, $r_w^- = \frac{c_{EW} - c_P}{c_P - c_W}$, $r_n^- = \frac{c_{NN} - c_N}{c_N - c_P}$, $r_s^- = \frac{c_{SS} - c_P}{c_P - c_S}$, $r_t^- = \frac{c_{TT} - c_T}{c_T - c_P}$ a $r_b^- = \frac{c_{TB} - c_P}{c_P - c_B}$.

Podobne ako v prípade pozitívnych smerov dosadíme výrazy (2.20)–(2.25) do rovnice

(2.11) a dostaneme výsledok v tvare

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{D}{\delta x} (c_E - c_P) - \frac{D}{\delta x} (c_P - c_W) \right] + \left[\frac{D}{\delta y} (c_N - c_P) - \frac{D}{\delta y} (c_P - c_S) \right] + \\
& + \left[\frac{D}{\delta z} (c_T - c_P) - \frac{D}{\delta z} (c_P - c_B) \right] = \\
& + \mathbf{u}_e \left[c_E + \frac{1}{2} \psi(r_e^-) (c_P - c_E) \right] - \mathbf{u}_w \left[c_P + \frac{1}{2} \psi(r_w^-) (c_W - c_P) \right] \\
& + \mathbf{v}_n \left[c_N + \frac{1}{2} \psi(r_n^-) (c_P - c_N) \right] - \mathbf{v}_s \left[c_P + \frac{1}{2} \psi(r_s^-) (c_S - c_P) \right] \\
& + \mathbf{w}_t \left[c_T + \frac{1}{2} \psi(r_t^-) (c_P - c_T) \right] - \mathbf{w}_b \left[c_P + \frac{1}{2} \psi(r_b^-) (c_B - c_P) \right].
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Rovnicu (2.26) preusporiadame a dostaneme

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{2D}{\delta x} + \frac{2D}{\delta y} + \frac{2D}{\delta z} - \mathbf{u}_w - \mathbf{v}_s - \mathbf{w}_b \right] c_P = \left[\frac{D}{\delta x} - \mathbf{u}_e \right] c_E + \frac{D}{\delta x} c_W + \left[\frac{D}{\delta y} - \mathbf{v}_n \right] c_N + \frac{D}{\delta y} c_S \\
& + \left[\frac{D}{\delta z} - \mathbf{w}_t \right] c_T + \frac{D}{\delta z} c_B - \mathbf{u}_e \left[\frac{1}{2} \psi(r_e^-) (c_P - c_E) \right] + \mathbf{u}_w \left[\frac{1}{2} \psi(r_w^-) (c_W - c_P) \right] \\
& - \mathbf{v}_n \left[\frac{1}{2} \psi(r_n^-) (c_P - c_N) \right] + \mathbf{v}_s \left[\frac{1}{2} \psi(r_s^-) (c_S - c_P) \right] \\
& - \mathbf{w}_t \left[\frac{1}{2} \psi(r_t^-) (c_P - c_T) \right] + \mathbf{w}_b \left[\frac{1}{2} \psi(r_b^-) (c_B - c_P) \right].
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Vo výsledku tak dostaneme schému

$$\boxed{a_P c_P = a_E c_E + a_W c_W + a_N c_N + a_S c_S + a_T c_T + a_B c_B + S_u^{DC}} \tag{2.28}$$

s koeficientom

$$\boxed{a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B + (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_w) + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) + (\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_b)}$$

Ostatné koeficienty TVD schémy a výraz korekcie sú zadané v Tabuľke 7.

	TVD koeficienty	
a_E	$\frac{D}{\delta x} + \max(0, -\mathbf{u}_e)$	
a_W	$\frac{D}{\delta x} + \max(0, \mathbf{u}_w)$	
a_N	$\frac{D}{\delta y} + \max(0, -\mathbf{v}_n)$	
a_S	$\frac{D}{\delta y} + \max(0, \mathbf{v}_s)$	
a_T	$\frac{D}{\delta z} + \max(0, -\mathbf{w}_t)$	
a_B	$\frac{D}{\delta z} + \max(0, \mathbf{w}_b)$	
	Korekcia	
S_u^{DC}	$\frac{1}{2}\mathbf{u}_e [(1 - \alpha_e)\psi(r_e^-) - \alpha_e\psi(r_e^+)] \cdot (c_E - c_P)$ $+\frac{1}{2}\mathbf{u}_w [(1 - \alpha_w)\psi(r_w^-) - \alpha_w\psi(r_w^+)] \cdot (c_W - c_P)$ $+\frac{1}{2}\mathbf{v}_n [(1 - \alpha_n)\psi(r_n^-) - \alpha_n\psi(r_n^+)] \cdot (c_N - c_P)$ $+\frac{1}{2}\mathbf{v}_s [(1 - \alpha_s)\psi(r_s^-) - \alpha_s\psi(r_s^+)] \cdot (c_S - c_P)$ $+\frac{1}{2}\mathbf{w}_t [(1 - \alpha_t)\psi(r_t^-) - \alpha_t\psi(r_t^+)] \cdot (c_T - c_P)$ $+\frac{1}{2}\mathbf{w}_b [(1 - \alpha_b)\psi(r_b^-) - \alpha_b\psi(r_b^+)] \cdot (c_B - c_P)$	$\alpha_e = 1$ pre $\mathbf{u}_e > 0$, $\alpha_e = 0$ pre $\mathbf{u}_e < 0$ $\alpha_w = 1$ pre $\mathbf{u}_w > 0$, $\alpha_w = 0$ pre $\mathbf{u}_w < 0$ $\alpha_n = 1$ pre $\mathbf{v}_n > 0$, $\alpha_n = 0$ pre $\mathbf{v}_n < 0$ $\alpha_s = 1$ pre $\mathbf{v}_s > 0$, $\alpha_s = 0$ pre $\mathbf{v}_s < 0$ $\alpha_t = 1$ pre $\mathbf{w}_t > 0$, $\alpha_t = 0$ pre $\mathbf{w}_t < 0$ $\alpha_b = 1$ pre $\mathbf{w}_b > 0$, $\alpha_b = 0$ pre $\mathbf{w}_b < 0$

Tabuľka 7: Tabuľka koeficientov pre 3D TVD schému.

2.3.2 Metóda konečných objemov v 3D s časom

V tejto podkapitole sa budeme venovať numerickému riešeniu transportnej advekčno-difúznej rovnice v tvare

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla c) - \nabla \cdot (\vec{u}c) + S, \quad (2.29)$$

pričom si podľa vzoru [26, str. 243] pomôžeme schémou odvodenou pri stacionárnom tvare.

Dostávame tak rovnicu

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \left(\iiint_{CV} \frac{\partial c}{\partial t} dV \right) dt &= \int_t^{t+\Delta t} \left(\iiint_{CV} \nabla \cdot (D \nabla c) dV \right) dt \\ &\quad - \int_t^{t+\Delta t} \left(\iiint_{CV} \nabla \cdot (\vec{u}c) dV \right) dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\iiint_{CV} S dV \right) dt. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Z nej po použití výsledkov v stacionárnóm odvodení rovnice dostaneme tvar

$$\begin{aligned}
& \iiint_{CV} \left(\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial c}{\partial t} dt \right) dV = \\
& = \int_t^{t+\Delta t} \left[D \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)_e - D \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)_w + D \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_n - D \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_s + D \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right)_t - D \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right)_b \right] dt \\
& \quad - \int_t^{t+\Delta t} [(u_e c_e - u_w c_w) + (v_n c_n - v_s c_s) + (w_t c_t - w_b c_b)] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta V dt, \quad (2.31)
\end{aligned}$$

kde $\bar{S}$ predstavuje priemernú hodnotu funkcie S na oblasti kontrolného objemu CV . Ľavá strana z (2.31) sa dá prepísať do tvaru

$$\iiint_{CV} \left(\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial c}{\partial t} dt \right) dV = \iiint_{CV} [c]_t^{t+\Delta t} dV = \iiint_{CV} (c^{t+\Delta t} - c^t) dV = (c^{t+\Delta t} - c^t) \Delta V. \quad (2.32)$$

Po použití centrálnéj diferencie na difúzny člen dostaneme z (2.32) rovnicu

$$\begin{aligned}
(c^{t+\Delta t} - c^t) \Delta V &= \int_t^{t+\Delta t} \left[D \frac{(c_E - c_P)}{\delta x} - D \frac{(c_P - c_W)}{\delta x} \right] \\
&+ \left[D \frac{(c_N - c_P)}{\delta y} - D \frac{(c_P - c_S)}{\delta y} \right] + \left[D \frac{(c_T - c_P)}{\delta z} - D \frac{(c_P - c_B)}{\delta z} \right] dt \\
&- \int_t^{t+\Delta t} (u_e c_e - u_w c_w) + (v_n c_n - v_s c_s) + (w_t c_t - w_b c_b) dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta V dt. \quad (2.33)
\end{aligned}$$

Z rovnice vieme ďalej odvodiť implicitnú, explicitnú alebo kombinovanú schému podľa voľby aproximácie časového integrálu. Pre naše riešenie rovnice sme zvolili implicitnú schému, preto integrál vyčíslime v bode $t + \Delta t$. Dostávame

$$\begin{aligned}
(c^{t+\Delta t} - c^t) \Delta V &= \left[D \frac{(c_E^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t})}{\delta x} - D \frac{(c_P^{t+\Delta t} - c_W^{t+\Delta t})}{\delta x} \right] \Delta t \\
&+ \left[D \frac{(c_N^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t})}{\delta y} - D \frac{(c_P^{t+\Delta t} - c_S^{t+\Delta t})}{\delta y} \right] \Delta t \\
&+ \left[D \frac{(c_T^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t})}{\delta z} - D \frac{(c_P^{t+\Delta t} - c_B^{t+\Delta t})}{\delta z} \right] \Delta t \\
&- \int_t^{t+\Delta t} (u_e c_e - u_w c_w) + (v_n c_n - v_s c_s) + (w_t c_t - w_b c_b) dt + \bar{S} \Delta V \Delta t. \quad (2.34)
\end{aligned}$$

Podobne ako v stacionárnom prípade dostaneme pre toky v pozitívnom smere rovnicu

$$\begin{aligned}
\frac{(c_P^{t+\Delta t} - c_P^t)}{\Delta t} \Delta V &= \bar{S} \Delta V + \left[\frac{D}{\delta x} (c_E^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t}) - \frac{D}{\delta x} (c_P^{t+\Delta t} - c_W^{t+\Delta t}) \right] \\
&+ \left[\frac{D}{\delta y} (c_N^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t}) - \frac{D}{\delta y} (c_P^{t+\Delta t} - c_S^{t+\Delta t}) \right] \\
&+ \left[\frac{D}{\delta z} (c_T^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t}) - \frac{D}{\delta z} (c_P^{t+\Delta t} - c_B^{t+\Delta t}) \right] \\
&- \mathbf{u}_e \left[c_P^{t+\Delta t} + \frac{1}{2} \psi(r_e^+) (c_E^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t}) \right] + \mathbf{u}_w \left[c_W^{t+\Delta t} + \frac{1}{2} \psi(r_w^+) (c_P^{t+\Delta t} - c_W^{t+\Delta t}) \right] \\
&- \mathbf{v}_n \left[c_P^{t+\Delta t} + \frac{1}{2} \psi(r_n^+) (c_N^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t}) \right] + \mathbf{v}_s \left[c_S^{t+\Delta t} + \frac{1}{2} \psi(r_s^+) (c_P^{t+\Delta t} - c_S^{t+\Delta t}) \right] \\
&- \mathbf{w}_t \left[c_P^{t+\Delta t} + \frac{1}{2} \psi(r_t^+) (c_T^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t}) \right] + \mathbf{w}_b \left[c_B^{t+\Delta t} + \frac{1}{2} \psi(r_b^+) (c_P^{t+\Delta t} - c_B^{t+\Delta t}) \right]
\end{aligned} \tag{2.35}$$

a pre toky v negatívnom smere zase

$$\begin{aligned}
\frac{(c_P^{t+\Delta t} - c_P^t)}{\Delta t} \Delta V &= \bar{S} \Delta V + \left[\frac{D}{\delta x} (c_E^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t}) - \frac{D}{\delta x} (c_P^{t+\Delta t} - c_W^{t+\Delta t}) \right] \\
&+ \left[\frac{D}{\delta y} (c_N^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t}) - \frac{D}{\delta y} (c_P^{t+\Delta t} - c_S^{t+\Delta t}) \right] \\
&+ \left[\frac{D}{\delta z} (c_T^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t}) - \frac{D}{\delta z} (c_P^{t+\Delta t} - c_B^{t+\Delta t}) \right] \\
&- \mathbf{u}_e \left[c_E^{t+\Delta t} + \frac{1}{2} \psi(r_e^-) (c_P^{t+\Delta t} - c_E^{t+\Delta t}) \right] + \mathbf{u}_w \left[c_P^{t+\Delta t} + \frac{1}{2} \psi(r_w^-) (c_W^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t}) \right] \\
&- \mathbf{v}_n \left[c_N^{t+\Delta t} + \frac{1}{2} \psi(r_n^-) (c_P^{t+\Delta t} - c_N^{t+\Delta t}) \right] + \mathbf{v}_s \left[c_P^{t+\Delta t} + \frac{1}{2} \psi(r_s^-) (c_S^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t}) \right] \\
&- \mathbf{w}_t \left[c_T^{t+\Delta t} + \frac{1}{2} \psi(r_t^-) (c_P^{t+\Delta t} - c_T^{t+\Delta t}) \right] + \mathbf{w}_b \left[c_P^{t+\Delta t} + \frac{1}{2} \psi(r_b^-) (c_B^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t}) \right].
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Preusporiadaním rovnice (2.35) dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{(c_P^{t+\Delta t} - c_P^t)}{\Delta t} \Delta V &+ \left[\frac{2D}{\delta x} + \frac{2D}{\delta y} + \frac{2D}{\delta z} + \mathbf{u}_e + \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_t \right] c_P^{t+\Delta t} = \bar{S} \Delta V \\
&+ \frac{D}{\delta x} c_E^{t+\Delta t} + \left[\frac{D}{\delta x} + \mathbf{u}_w \right] c_W^{t+\Delta t} + \frac{D}{\delta y} c_N^{t+\Delta t} + \left[\frac{D}{\delta y} + \mathbf{v}_s \right] c_S^{t+\Delta t} + \frac{D}{\delta z} c_T^{t+\Delta t} + \left[\frac{D}{\delta z} + \mathbf{w}_b \right] c_B^{t+\Delta t} \\
&- \mathbf{u}_e \left[\frac{1}{2} \psi(r_e^+) (c_E^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t}) \right] + \mathbf{u}_w \left[\frac{1}{2} \psi(r_w^+) (c_P^{t+\Delta t} - c_W^{t+\Delta t}) \right] \\
&- \mathbf{v}_n \left[\frac{1}{2} \psi(r_n^+) (c_N^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t}) \right] + \mathbf{v}_s \left[\frac{1}{2} \psi(r_s^+) (c_P^{t+\Delta t} - c_S^{t+\Delta t}) \right] \\
&- \mathbf{w}_t \left[\frac{1}{2} \psi(r_t^+) (c_T^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t}) \right] + \mathbf{w}_b \left[\frac{1}{2} \psi(r_b^+) (c_P^{t+\Delta t} - c_B^{t+\Delta t}) \right].
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Preusporiadaním (2.36) dostávame rovnicu

$$\begin{aligned}
& \frac{(c_P^{t+\Delta t} - c_P^t)}{\Delta t} \Delta V + \left[\frac{2D}{\delta x} + \frac{2D}{\delta y} + \frac{2D}{\delta z} - \mathbf{u}_w - \mathbf{v}_s - \mathbf{w}_b \right] c_P^{t+\Delta t} = \bar{S} \Delta V \\
& + \left[\frac{D}{\delta x} - \mathbf{u}_e \right] c_E^{t+\Delta t} + \frac{D}{\delta x} c_W^{t+\Delta t} + \left[\frac{D}{\delta y} - \mathbf{v}_n \right] c_N^{t+\Delta t} + \frac{D}{\delta y} c_S^{t+\Delta t} + \left[\frac{D}{\delta z} - \mathbf{w}_t \right] c_T^{t+\Delta t} + \frac{D}{\delta z} c_B^{t+\Delta t} \\
& - \mathbf{u}_e \left[\frac{1}{2} \psi(r_e^-) (c_P^{t+\Delta t} - c_E^{t+\Delta t}) \right] + \mathbf{u}_w \left[\frac{1}{2} \psi(r_w^-) (c_W^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t}) \right] \\
& - \mathbf{v}_n \left[\frac{1}{2} \psi(r_n^-) (c_P^{t+\Delta t} - c_N^{t+\Delta t}) \right] + \mathbf{v}_s \left[\frac{1}{2} \psi(r_s^-) (c_S^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t}) \right] \\
& - \mathbf{w}_t \left[\frac{1}{2} \psi(r_t^-) (c_P^{t+\Delta t} - c_T^{t+\Delta t}) \right] + \mathbf{w}_b \left[\frac{1}{2} \psi(r_b^-) (c_B^{t+\Delta t} - c_P^{t+\Delta t}) \right].
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Vo výsledku tak dostaneme schému

$$\boxed{
\begin{aligned}
& \frac{(c_P^{t+\Delta t} - c_P^t)}{\Delta t} \Delta V + a_P c_P^{t+\Delta t} = \bar{S} \Delta V \\
& a_E c_E^{t+\Delta t} + a_W c_W^{t+\Delta t} + a_N c_N^{t+\Delta t} + a_S c_S^{t+\Delta t} + a_T c_T^{t+\Delta t} + a_B c_B^{t+\Delta t} + S_u^{DC},
\end{aligned}
} \tag{2.39}$$

s koeficientom

$$\boxed{a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B + (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_w) + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) + (\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_b),}$$

pričom koeficienty $a_P, a_E, a_W, a_N, a_S, a_T, a_B$ a S_u^{DC} sú rovnaké ako v Tabuľke 7 pre $c_P^{t+\Delta t}$.

2.3.3 Okrajové podmienky

Vezmime si všeobecnú okrajovú podmienku v tvare

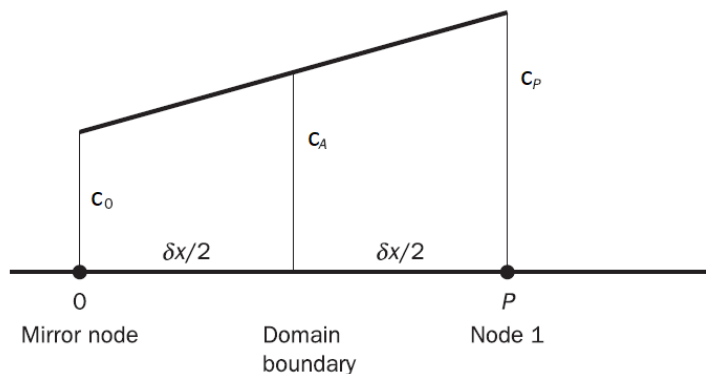
$$a_1 \frac{\partial c}{\partial x} + a_2 c = a_3. \tag{2.40}$$

Situáciu demonštrujeme na jednorozmernom príklade. Nech bod A označuje ľavý okraj úsečky, na ktorej riešime danú advekčno-difúznú rovnicu, to znamená, že podmienka (2.40) musí byť splnená pre hodnotu funkcie c v bode A , ozn. c_A .

Keďže numerickú schému máme v centrách buniek a nie v okrajových bodoch, potrebujeme túto hodnotu aproximovať pomocou okolitých centier buniek. Na nájdenie hodnoty tzv. *ghost* uzla, ozn. ako c_0 , ktorý predstavuje centrum bunky susediacej s našou oblasťou, použijeme tak ako aj v [26] tzv. Leonardovu zrkadlovú extrapoláciu uzlu (*angl. Leonard mirror node extrapolation*), danú vzťahom

$$c_0 = 2c_A - c_P. \tag{2.41}$$

Táto hodnota c_0 nám v numerickej schéme nahradí hodnotu c_W .



Obr. 19: Zrkadlenie bodu na okraji oblasti [26, str. 159].

2.4 Popis priestorového modelu

V tejto podkapitole predstavíme finálnu verziu priestorového modelu pre šírenie CO_2 . Pre značné zjednodušenie modelu sme sa rozhodli zaoberať modelovaním oxidu uhličitého iba nad povrchom Európy. Vo vnútri oblasti budeme riešiť advekčno-difúznú rovnicu spomínanú vyššie v tvare

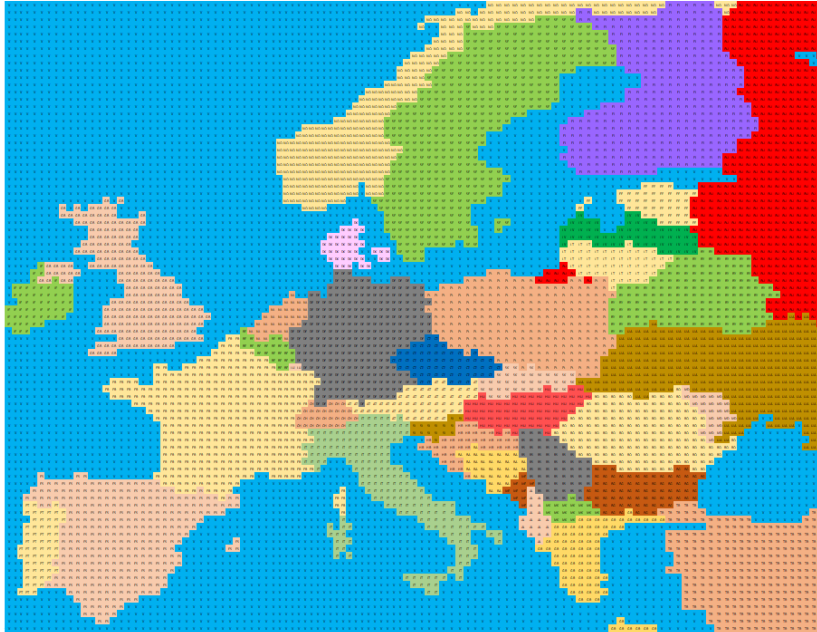
$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla c) - \nabla \cdot (\vec{u}c) + S, \quad (2.42)$$

pričom difúzny koeficient D stanovíme na základe článku [17] ako konštantnú hodnotu $14 \text{ mm}^2/\text{s} = 14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Vektorové pole $\vec{u}$ máme dané na základe rýchlosti a smeru vetra, údaje o ktorých nám v 6-hodinových intervaloch za rok 2017 poskytol doc. RNDr. Martin Gera, PhD. z Katedry astronómie, fyziky Zeme a meteorológie, FMFI UK. Funkcia S predstavuje zdroje oxidu uhličitého, o ktorých si viac povieme neskôr v kapitole. Neznámu funkciou je teda funkcia koncentrácie $c = c(x, y, z, t)$, ktorá sa mení v závislosti od miesta a času. Rovnicu (2.42) budeme riešiť aproximáciou v karteziánskych súradniciach, no dala by sa použiť aj sférická súradnicová sústava.

2.4.1 Vytvorenie siete

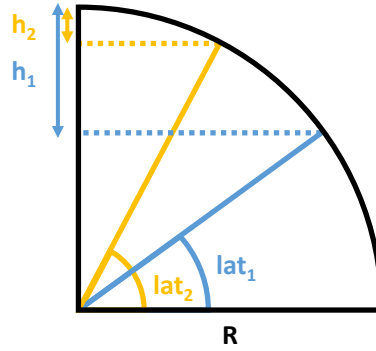
Ako prvé sme si vytvorili maticu, predstavujúcu jednotlivé štáty a vodu v Európe. Jeden dielik predstavuje $0,4^\circ$ zemepisnej šírky $\times$ $0,4^\circ$ zemepisnej dĺžky, pričom sme spracovali

územie v rozsahu od -10° po $34,8^\circ$ z.d. a od 35° po $69,8^\circ$ z.š. Matica reprezentujúca toto územie má teda rozmery 87×112 a je znázornená na Obrázku 20. Pre ľahšiu orientáciu sme jednotlivé štáty odlíšili farebne a samotná matica, s ktorou budeme ďalej pracovať, obsahuje dvojpísmenové kódy, tzv. ISO kódy krajín (*angl. ISO country codes*), prevzaté zo stránky [8] a písmeno V pre vodnú plochu.



Obr. 20: Matica predstavujúca diskretizovanú mapu Európy.

Keďže Zem je približne guľa, bolo potrebné túto informáciu nejakým spôsobom zahrnúť aj do tejto mriežky. Smerom k severnému pólu sa poludníky k sebe približujú a plocha ohraničená dvoma poludníkmi a dvoma rovnobežkami sa zmenšuje. Chceme vypočítať plochu jedného dielika v mriežke. Zvoľme si dve rôzne zemepisné výšky, to znamená dva rôzne uhly lat_1 a lat_2 a dva rôzne uhly zemepisnej šírky lon_1 a lon_2 . Polomer Zeme označíme ako $R = 6378$ km.



Obr. 21: Výpočet obsahu jedného dielika.

Premenné h_1 a h_2 predstavujú výšku guľového odseku, tak ako to je znázornené na Obrázku 21. Vieme, že plocha hornej časti guľového odseku sa vypočíta ako $S = 2\pi hR$, konkrétne v našom prípade

$$\begin{aligned} S_1 &= 2\pi R h_1 = 2\pi R(R - R \sin(lat_1)) \\ S_2 &= 2\pi R h_2 = 2\pi R(R - R \sin(lat_2)). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Plochu jedného dieliku v obdĺžnikovej mriežke diskkrétnej mapy dostaneme odčítaním plôch týchto dvoch guľových odsekov a predelením na jeden diel v smere zemepisnej šírky nasledujúcim spôsobom:

$$|S_1 - S_2| = 2\pi R^2 |\sin(lat_2) - \sin(lat_1)| \cdot \frac{|lon_1 - lon_2|}{360}. \quad (2.44)$$

Pomocou vzorca (2.44) sme vyrátali rozlohy štátov v modeli a dostali celkom presné výsledky zobrazené v Tabuľke 8. Rusko, Nórsko, Ukrajina a Turecko majú pomerne veľké odchýlky, avšak v našom modeli nevystupujú celé, takže je to v poriadku.

	Kód	Krajina	Rozloha [km ²]	Rozloha v modeli [km ²]	Rozdiel
1	AL	Albánsko	28 748	28 314	-434
2	AT	Rakúsko	83 858	84 118	260
3	BY	Bielorusko	207 600	207 464	-136
4	BE	Belgicko	30 510	30 223	-287
5	BA	Bosna a Hercegovina	51 129	51 253	124
6	BG	Bulharsko	110 910	110 513	-397
7	HR	Chorvátsko	56 542	57 147	605
8	CZ	Česko	78 866	78 000	-866
9	DK	Dánsko	43 094	43 063	-31
10	EE	Estónsko	45 226	45 401	175
11	FI	Fínsko	336 593	336 533	-60
12	FR	Francúzsko	547 030	546 619	-411
13	DE	Nemecko	357 021	357 145	124
14	GR	Grécko	131 940	132 299	359
15	HU	Maďarsko	93 030	92 903	-127
16	IE	Írsko	70 280	70 196	-84
17	IT	Taliansko	301 230	301 455	225
18	LV	Lotyšsko	64 589	64 949	360
19	LT	Litva	65 200	65 317	117
20	LU	Luxembursko	2 586	2 570	-16
21	MK	Macedónsko	25 333	25 158	-175
22	MD	Moldava	33 843	33 705	-138
23	ME	Čierna Hora	13 812	14 537	725
24	NL	Holandsko	41 526	41 248	-278
25	NO	Nórsko	324 220	286 587	-37 633
26	PL	Poľsko	312 685	312 549	-136
27	PT	Portugalsko	91 568	91 456	-112
28	RO	Rumunsko	238 391	238 416	25
29	RU	Rusko	3 960 000	528 585	-3 431 415
30	RS	Srbsko	88 361	88 227	-134
31	SK	Slovensko	48 845	49 624	779
32	SI	Slovinsko	20 273	20 569	296
33	ES	Španielsko	498 506	499 287	781
34	SE	Švédsko	449 964	449 368	-596
35	CH	Švajčiarsko	41 290	40 634	-656
36	TR	Turecko	783 356	476 900	-306 456
37	UA	Ukrajina	603 700	436 528	-167 172
38	GB	Veľká Británia	244 820	244 918	98

Tabuľka 8: Porovnanie skutočnej rozlohy krajín a ich rozlohy v modeli.

2.4.2 Zdroje oxidu uhličitého v atmosfére

Na celkovú koncentráciu CO_2 v ovzduší má vplyv viacero faktorov: jednak sú to emisie do ovzdušia zo spaľovania, t.j. ľudská činnosť, lesné požiare a rozklad lesov, moria a oceány a flóra v danej oblasti. Celková koncentrácia v čase t pre oblasť popísanú v súradnicovom systéme $[x, y]$, kde x a y predstavujú zemepisnú šírku a dĺžku, sa dá podľa [16] vyjadriť rovnicou

$$S(x, y, t) = F_e(x, y, t) - F_{oce}(x, y) + F_{bio}(x, y, t), \quad (2.45)$$

pričom funkcia S tvorí zdrojový člen v rovnici (2.42) v najnižšej vrstve pri Zemi.

Funkcia $F_e(x, y, t)$ predstavuje **množstvo emisií** vplyvom ľudskej činnosti, inak nazývané aj antropogénny oxid uhličitý. Ako hodnoty tejto funkcie použijeme odhady z Kapitoly 1, pričom súradnice $[x, y]$ určujú, v ktorom štáte sa nachádzame. V tejto kapitole sme odhadovali emisie na rok 2017 v jednotkách ton/km^2 a keďže potrebujeme zdrojový člen s jednotkami ton/km^3 , prisúdime emisiám jednotkovú výšku a dostaneme tak ton/km^3 . Nakoniec ešte z týchto predikcií odčítame letecké emisie, nakoľko pre zjednodušenie predpokladáme zdrojový člen iba v najnižšej vrstve pri Zemi.

Vzťah medzi ppm a hustotou je podľa [15] daný ako

$$1 \text{ ppm} = \frac{1 \text{ objem plynu}}{10^6 \text{ objemov vzduchu}}. \quad (2.46)$$

To znamená, že jeden microliter (μL) plynu na jeden liter vzduchu je rovný práve 1 ppm.

$$1 \text{ ppm} = \frac{V_m}{M} \frac{1 \mu\text{g plynu}}{1 \text{ L vzduchu}}, \quad (2.47)$$

kde $V_m = 22,71108$ predstavuje molárny objem ideálneho plynu meraný v $[\text{L}/\text{mol}]$ a M označuje molekulárnu hmotnosť plynu, ktorá je v prípade CO_2 rovná $44,01 [\text{g}/\text{mol}]$.

$$1[\text{ppm}] = \frac{22,71108}{44,01} \left[\frac{\text{L}/\text{mol}}{\text{g}/\text{mol}} \right] \cdot 1 \left[\frac{\mu\text{g}}{\text{L}} \right] = 0,51604 \left[\frac{\text{L}/\text{mol}}{\text{g}/\text{mol}} \right] \cdot \frac{0,001}{0,001} \left[\frac{\text{mg}}{\text{m}^3} \right] \quad (2.48)$$

Takýmto spôsobom dostaneme vzťah na prevod CO_2 z ppm do $\text{mg}/\text{m}^3 = \text{ton}/\text{km}^3$:

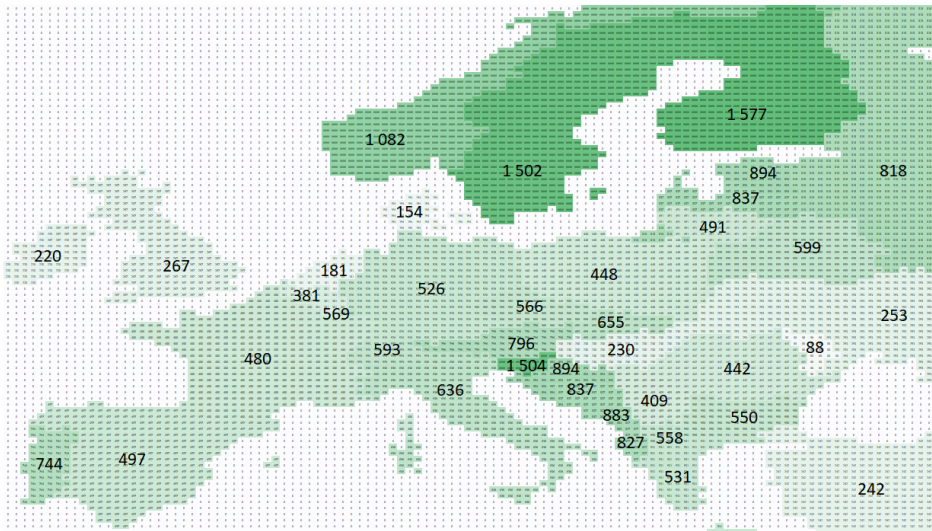
$$\text{Koncentrácia} [\text{ppm}] = 0,51604 \cdot \text{Koncentrácia} [\text{ton}/\text{km}^3]. \quad (2.49)$$

Funkcia $F_{bio}(x, y, t)$ predstavuje koncentráciu previazanú s **prírodným cyklom** uhlíka. Intuitívne vieme povedať, že koncentrácia bude oscilovať na základe toho, či sa nachádzame v letnom alebo zimnom období roka, nakoľko rastliny prevažne rastú a kvitnú na

jar alebo v lete, kedy odoberajú CO₂ prostredníctvom fotosyntézy. Na jeseň a v zime im opadajú listy, ktoré sa rozložia na zemi a CO₂ sa uvoľní naspäť do atmosféry. Na základe článku [16] hľadáme funkciu F_{bio} tak, aby spĺňala jednoduchú rovnicu kmitania danú vzťahom

$$\frac{d^2 F_{bio}(t)}{dt^2} = -k F_{bio}(t). \quad (2.50)$$

Pre zjednodušenie predpokladáme, že lesný porast sa s časom nemení, teda nemáme tu efekt vyklčovania lesov. Jeden strom ročne pohltí približne 48 libier, čo je v prepočte asi 21,77 kg oxidu uhličitého. Dáta o zalesnenej ploche v krajinách Európy sme čerpali z článku [11]. Pri vyčíslení efektu lesov musíme brať do úvahy nielen podiel krajiny, ktorý je pokrytý lesmi, ale aj hustotu rastúcich stromov. Pozreli sme sa teda ešte aj na odhad množstva stromov pre jednotlivé krajiny Európy, ktorý sme našli v článku [3] a ďalej lepšie spracovaný v článku [20]. Označme rozlohu krajiny i v modeli ako A_i , počet stromov v danej krajine N_i a množinu bodov (x, y) , ktoré patria do krajiny i ako K_i . Opierajúc sa o údaje z [2] jeden priemerný strom ročne absorbuje 21,77 kg oxidu uhličitého. Efekt všetkých stromov ročne na 1 km² v krajine i vieme vyčísliť ako $\frac{N_i \cdot 21,77}{A_i}$, pričom po prevedení do ton dostaneme $Efekt_i = \frac{N_i \cdot 21,77}{A_i \cdot 1000}$ [ton/km²]. Takýmto spôsobom vyčíslime efekt na 1 km² ročne pre všetky krajiny a dostaneme maticu vyobrazenú na Obrázku 22.



Obr. 22: Koľko ton CO₂ ročne je pohltitých vplyvom lesov na 1 km² v danej krajine Európy.

Pre zjednodušenie predpokladáme, že lesy sú v rámci krajín rozmiestnené rovnomerne

po celej krajine, a teda maticu obsahujúcu efekt na 1 km² iba prenásobíme rozlohami jednotlivých polí a dostaneme celkový ročný efekt. Keďže časovou jednotkou v tomto modeli je deň, výsledný efekt odčerpávania lesa F_{les} je

$$F_{les}(x, y) = -\frac{N_i}{A_i} 5,964 \times 10^{-5} \quad x, y \in K_i. \quad (2.51)$$

Aby sme do modelu zahrnuli aj istú sezónnosť, použijeme rovnicu kmitania struny (2.50). Riešením tejto diferenciálnej rovnice je

$$F_{bio}(t) = a \sin(\omega t + \phi_0) = a \sin(\sqrt{k}t + \phi_0), \quad (2.52)$$

kde a predstavuje amplitúdu, ϕ_0 je fázový posun a k je kladná konštanta úmernosti. Podľa článku [16] osciluje CO₂ ročne o ± 3 ppm, čo je po prevedení pomocou (2.49) $\pm 5,81$ kg/km³. To znamená, že amplitúda $a = 5,81$. Čas jedného kmitu – perióda, je v tomto prípade 365 dní. Frekvencia je $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{365}$ a uhlová frekvencia $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{365}$. Poslednou neznámou, ktorú nám ostáva určiť je fázový posun ϕ_0 . Keďže časové obdobie, ktoré sa snažíme v modeli zachytiť je rok 2017, to znamená, že v čase $t = 0$ sme na začiatku januára, teda približne v $\frac{1}{3}$ zimy. Funkcia F_{bio} dosahuje svoje maximum v polovici zimy, teda v polovici januára, preto položíme $\phi_0 = \frac{2\pi 15}{365}$. Na záver ešte celú rovnicu posunieme o efekt lesa a dostaneme výslednú

$$F_{bio}(x, y, t) = \begin{cases} F_{les}(x, y) + 5,81 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t + 15)\right) & (x, y) \in \text{pevnina}, \\ 0 & (x, y) \notin \text{pevnina}. \end{cases} \quad (2.53)$$

Ďalšou funkciou popísanou v článku [16] je funkcia $F_{oce}(x, y, t)$ a predstavuje **efekt oceánu**. Voda sa v prírode chová ako rozpúšťač oxidu uhličitého, teda redukuje jeho koncentráciu v atmosfére. Tento faktor je významný najmä v prímorských regiónoch. V oceánoch je rozpustené veľké množstvo uhlíka, omnoho viac ako v celej atmosfére. Niektoré časti oceánov uvoľňujú oxid uhličitý do atmosféry, závisí to od teploty vody – čím je voda studenšia, tým zriedkavejšie sa CO₂ uvoľní do atmosféry. Pre náš model budeme uvažovať, že efekt rozpúšťania je výraznejší ako efekt uvoľňovania, čo potvrdzujú aj údaje z [22], podľa ktorých oceány ročne emitujú 88 gigaton uhlíka a rozpustia 90 gigaton uhlíka, teda ročný pokles je o 2 gigatony = 2×10^9 tony. Celková vodná plocha na Zemi predstavuje 361 000 000 km². To znamená, že na jeden km² sa ročne odčerpá $\frac{2 \cdot 10^9}{361 \cdot 10^6} = \frac{2 \cdot 10^3}{361} = 5,54$

tony CO₂. Po vyčíslení na dni dostaneme konečný efekt oceánov ako

$$F_{oce}(x, y) = \begin{cases} 0,015178 \left[\frac{\text{ton}}{\text{km}^2 \text{ deň}} \right] & (x, y) \notin \text{pevnina}, \\ 0 & (x, y) \in \text{pevnina}. \end{cases} \quad (2.54)$$

2.4.3 Transformácia dát vetra

Ako sme spomenuli vyššie, podarilo sa nám získať dáta vetra v bodoch našej siete v 6 hodinových intervaloch za rok 2017. Rýchlosť vetra bola v smere zemepisnej dĺžky (x) a šírky (y) v [m/s] a v smere nadmorskej výšky (z) v jednotkách [Pa/s]. Tak isto aj samotná nadmorská výška bola daná v úrovniach tlaku v Pa. Keďže tlak klesá so stúpajúcou nadmorskou výškou, bolo potrebné celé dáta otočiť a previesť údaje o tlakovej vrstve v Pa na zodpovedajúcu nadmorskú výšku v km. Najvyššia vrstva tlaku zodpovedá približne 12 km, to znamená, že sa nachádzame v Troposfére. Na tento prevod sme použili Barometrickú formulu pre Troposféru (0 - 11 km) uvedenú v [21], pričom premenná h označuje nadmorskú výšku v metroch a P tlak v pascaloch:

$$P = P_b \left(\frac{T_b + L_b h - L_b h_b}{T_b} \right)^{-\frac{g_0 M}{R^* L_b}}, \quad (2.55)$$

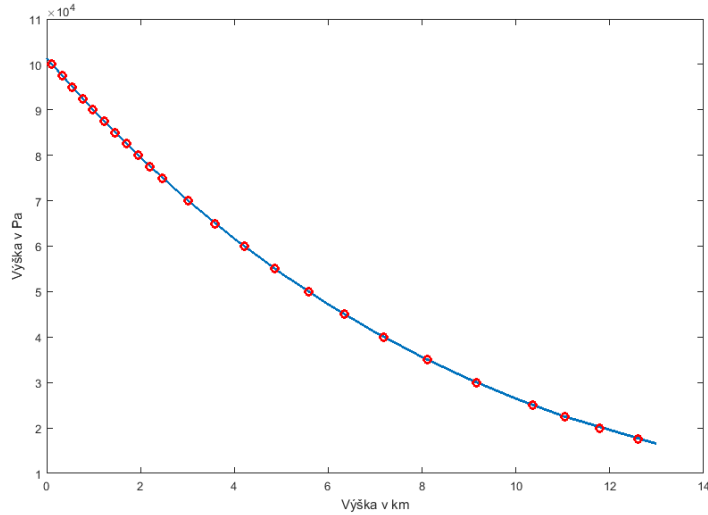
kde $g_0 = 9,80665 \text{ m/s}^2$ je gravitačné zrýchlenie, $M = 0,0289644 \text{ kg/mol}$ je molárna hmotnosť zemského vzduchu a $R^* = 8,3144598 \text{ J/(mol K)}$ je univerzálna konštanta plynu. Index b charakterizuje v ktorej vrstve atmosféry sa nachádzame, v našom prípade bude $b = 0$, keďže výpočty robíme pre vrstvu 0 - 11 km. Parameter $P_b = 101\,325 \text{ Pa}$ je tlak pri zemskom povrchu, $T_b = 288,15 \text{ K}$ je štandardná teplota, $L_b = -0,00649 \text{ K/m}$ predstavuje mieru poklesu teploty s narastajúcou nadmorskou výškou (*angl. standard temperature lapse rate*) a h_b je výška na spodnej hranici vrstvy s indexom b , teda v našom prípade $h_0 = 0$. Vyčíslime teraz mocninu

$$-\frac{g_0 M}{R^* L_b} \left[\frac{\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{\frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot \frac{\text{K}}{\text{m}}} \right] = -\frac{9,80665 \cdot 0,0289644}{8,3144598 \cdot -0,00649} \left[\frac{\text{m kg m mol}}{\text{s}^2 \text{mol J}} \right] = 5,256 \left[\frac{\text{m}^2 \text{ kg}}{\text{s}^2 \text{ J}} \right], \quad (2.56)$$

a keďže $\text{J} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$, bude táto mocnina bez jednotiek. Po vyčíslení všetkých parametrov dostávame vzťah medzi tlakom v Pa a nadmorskou výškou v m

$$P = 101325 \left(\frac{288,15 - 0,00649h}{288,15} \right)^{5,256}, \quad (2.57)$$

ktorý použijeme pri transformácii osi z . Na záver ešte výšky v metroch prevedieme na kilometre. Výsledné hodnoty porovnáme s hodnotami z modelu Medzinárodnej štandardnej atmosféry [5] (*angl. International Standard Atmosphere (ISA)*) na Obrázku 23.



Obr. 23: Porovnanie nadmorskej výšky dopočítanej pomocou barometrickej formule (červenou) a údajov zo štandardnej atmosféry (modrou).

Druhou úlohou pri predpríprave dát vetra je premeniť silu vetra v smere z v $[\text{Pa/s}]$ na $[\text{m/s}]$. Na tento úkon sme ¹ použili rovnicu adiabatického deja, bližšie popísanú napríklad v [12]

$$\frac{dz}{dt} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] = -\frac{1}{\rho g_0} \left(\frac{P_0}{P} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \frac{dP}{dt} \left[\frac{\text{s}^2 \text{ m}^3 \text{ Pa}}{\text{m kg s}} \right], \quad (2.58)$$

kde $g_0 = 9,80665 \text{ [m/s}^2\text{]}$ je tak ako predtým gravitačné zrýchlenie, $\rho = 1,225 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ je hustota vzduchu, $\kappa = \frac{1}{0,71}$ je Poissonova konštanta, bližšie popísaná v [12, str. 191], $P_0 = 101\,325 \text{ Pa}$ je tlak pri zemskom povrchu a ako P dosadíme jednotlivé tlakové vrstvy z dát. Keďže platí vzťah $\text{Pa} = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m s}^2} \right]$ výslednou jednotkou pravej strany rovnice (2.58) je $[\text{m/s}]$. Poslednou úpravou dát vetra, bola premena všetkých údajov do $[\text{km/deň}]$.

2.4.4 Prístup k sférickým súradniciam a zbezrozmernenie

V nasledujúcej podkapitole je vysvetlený vzťah medzi sférickými a karteziánskymi súradnicami v priestorovom modeli a na záver je úloha (2.42) prevedená na bezrozmernú

¹na odporúčanie doc. RNDr. Martina Geru, PhD.

verziu².

Vymedzme oblasť nad Európou v sférických súradniciach ako množinu $O_s = \{(r, \theta, \phi) \mid (r, \theta, \phi) \text{ spĺňajú (2.59)}\}$.

$$\begin{aligned} R_m \leq r \leq R_M \quad R_m &= 6378 \text{ km}, R_M = 6378 + 12,5948 \text{ km}, \\ \theta_m \leq \theta \leq \theta_M \quad \theta_m &= -10^\circ, \theta_M = 34,8^\circ \text{ z.d.}, \\ \phi_m \leq \phi \leq \phi_M \quad \phi_m &= 35^\circ, \phi_M = 69,8^\circ \text{ z.š.} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Vzťah medzi globálnou karteziánskou sústavou $[\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z]$ a sférickou sústavou $[\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi]$ je podľa [27] daný rovnicami

$$x = r \cos \phi \cos \theta, \quad (2.60)$$

$$y = r \cos \phi \sin \theta, \quad (2.61)$$

$$z = r \sin \phi. \quad (2.62)$$

Aproximujme výsek z gule v tzv. lokálnom karteziánskom systéme, pričom počiatok tohto lokálneho systému je charakterizovaný referenčným bodom (R_m, θ_m, ϕ_m) . Dá sa ľahko ukázať, že vzťah medzi lokálnou karteziánskou sústavou (x, y, z) a sférickými súradnicami (r, θ, ϕ) je potom daný ako

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{180} R_m (\cos \phi_m) (\theta - \theta_m), \\ y &= \frac{\pi}{180} R_m (\phi - \phi_m), \\ z &= r - R_m. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Oblasť nad Európou v týchto lokálnych karteziánskych súradniciach bude charakterizovaná množinou $O = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \text{ spĺňajú (2.63)} \wedge (r, \theta, \phi) \in O_s\}$. Dá sa ukázať, že v rovnici (2.42) v sférických súradniciach (r, θ, ϕ) má efekt zakrivenia na uvažovanej oblasti len veľmi slabý vplyv, preto je možné ho zanedbať.

Zvoľme charakteristickú dĺžku ako $Z = R_M - R_m$, charakteristický čas ako T a referenčnú hodnotu koncentrácie ako c_{ref} . Samotnú rýchlosť vetra nezavádzame ako samostatnú charakteristickú veličinu U a na zbezrozmernenie $\vec{u}$ použijeme T a Z . Akúkoľvek

²Ďakujeme doc. RNDr. Petrovi Gubovi, PhD. za konzultácie k problematike advekčno-difúzných rovníc.

bezrozmernú premennú budeme označovať so znakom $*$. Vzťahy medzi rozmernými a bezrozmernými premennými sú dané ako

$$\begin{aligned} x &= Zx^*, & t &= Tt^*, & \nabla \cdot &= \frac{1}{Z} \nabla^* \cdot, \\ y &= Zy^*, & \alpha^* &= \frac{1}{Pe} = \frac{TD}{Z^2}, & \nabla &= \frac{1}{Z} \nabla^*, \\ z &= Zz^*, & \vec{u} &= \frac{Z}{T} \vec{u}^*, & c &= c_{ref} c^*. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Koeficient $Pe = \frac{Z^2}{TD}$ predstavuje globálne Pécletovo číslo, ktoré podľa [14] pre prenos hmoty charakterizuje pomer medzi rýchlosťou advekcie a difúzie. V literatúre sa uvádza aj vo verzii $Pe = \frac{Zu}{D}$. Okrem tohto existuje aj tzv. "lokálne" Pécletovo číslo, popísané napríklad v [26, str. 144], ktoré hovorí viac o stabilite v rámci danej bunky v numerickej schéme a je definované v jednorozmernom prípade ako $Pe = \frac{u\delta x}{D}$.

Po dosadení výrazov z (2.64) do rovnice (2.42) dostaneme

$$\frac{\partial(c_{ref}c^*)}{\partial(Tt^*)} = \frac{1}{Z} \nabla^* \cdot \left(\frac{Z^2}{T} \frac{1}{Pe} \nabla^* \frac{1}{Z} (c_{ref}c^*) \right) - \frac{1}{Z} \nabla^* \cdot \left(\frac{Z}{T} \vec{u}^* c_{ref}c^* \right), \quad (2.65)$$

čo po úpravách dá rovnicu

$$\boxed{\frac{\partial c^*}{\partial t^*} = \nabla^* \cdot \left(\frac{1}{Pe} \nabla^* c^* \right) - \nabla^* \cdot (\vec{u}^* c^*)}. \quad (2.66)$$

2.4.5 Počiatočná a okrajové podmienky

Ako počiatočnú podmienku položíme vo všetkých bodoch 3D mriežky koncentráciu v roku 2016 z údajov na [4], ktorá bola na úrovni 404,42 ppm, čo po prevedení pomocou vzorca (2.49) dá hodnotu $c(x, y, z, 0) = 783,6989 \text{ t/km}^3$ pre všetky $(x, y, z) \in O$.

Okrajové podmienky sme zvolili tak, aby na hraniciach nič nepritekalo dovnútra, ale množstvo CO_2 , ktoré chcelo opustiť priestor, mohlo prejsť. Výnimkou je iba spodná podmienka, ktorá predstavuje nepriepustnú Zem. Okrajové podmienky budú vyzeráť:

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad x = x_{right} \quad \vee \quad x = x_{left}, \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = 0 \quad y = y_{bottom} \quad \vee \quad y = y_{top}, \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad z = z_{front}, \quad (2.69)$$

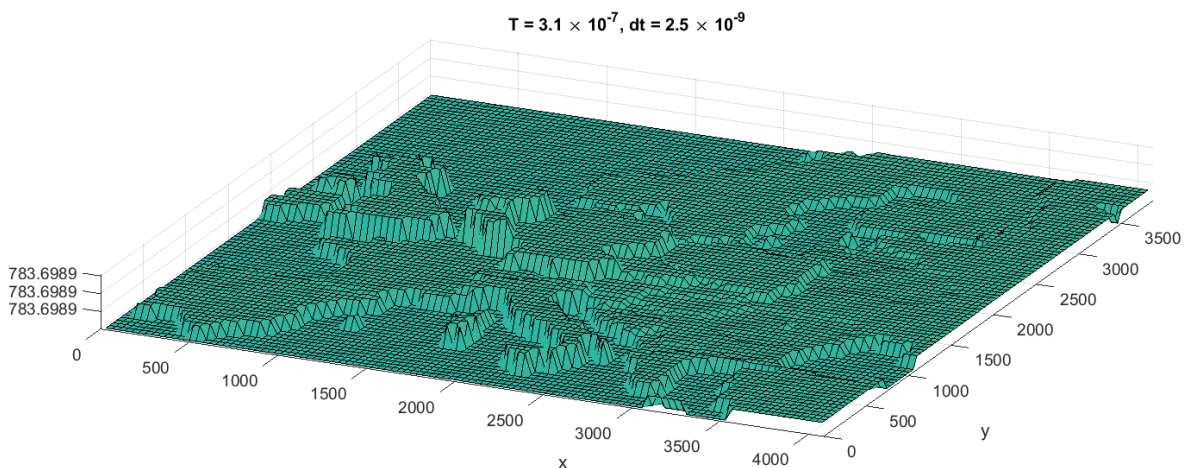
$$-D \frac{\partial c}{\partial z} + \mathbf{w}c = 0 \quad z = z_{back}. \quad (2.70)$$

2.4.6 Ukážky výstupov a možných problémov

V tejto podkapitole ukážeme pár príkladov s rôznymi typmi vetra pre rôzne časové obdobia. Ako prvé je vhodné uviesť si, že úloha, ktorú riešime je vlastne systém lineárnych rovníc so štvorcovou maticou s počtom riadkov $114 \times 89 \times 25$, to znamená $253\,650 \times 253\,650$ prvkov. Keďže úlohu riešime implicitne, bolo potrebné k tejto matici hľadať inverznú maticu, čo je výpočtovo pomerne náročná úloha. Na aproximáciu inverznej matice sme použili zabudovanú Matlabovskú funkciu `gmres`, Na numerické riešenie rovnice (2.42) sme použili voľne dostupný program od Ali Akbar Eftekhari [1], pričom jeho algoritmus sme mierne modifikovali, napríklad o už spomínanú funkciu `gmres`, na zefektívnenie hľadania inverznej matice sme použili Matlabovskú funkciu `ilu` na výpočet prekondicionéra a tiež sme upravili výpočet advekčného člena rovnice. Zdrojový kód aj s malými ukážkami prikladáme na CD na zadnej strane.

Príklad s konštantným západným vetrom

Ako prvý príklad uvádzame jednoduchšiu verziu problému a to s konštantným západným vetrom (vietor, ktorý fúka zo západu na východ). Tento smer vetra považujeme za tradičný, na základe údajov z [6]. Úlohu sme najprv vyriešili pre čas $T = 3,1 \times 10^{-7}$ dňa, s časovým krokom $dt = 2,5 \times 10^{-9}$. Výsledná koncentrácia v prvej vrstve nadmorskej výšky je zobrazená na Obrázku 24.



Obr. 24: Hodnoty koncentrácie $c(x, y, z, t)$ vyobrazené v prvej vrstve pri zemskom povrchu v čase $t = 3,1 \times 10^{-7}$ dňa.

Vidíme, že v prípade takéhoto jednoduchého vetra sa vo výsledku veľmi pekne odzrkadľuje zdrojový člen rovnice (2.42).

Príklad s reálnym vetrom

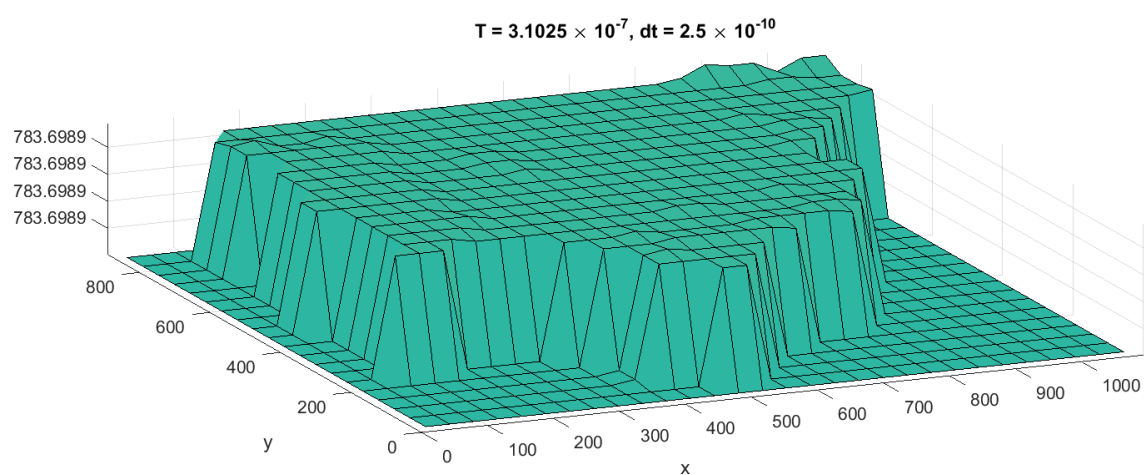
Mapu Európy sme tvorili s priestorovým krokom $0,4^\circ$ v smere x aj v smere y . Po prevedení na km pomocou (2.63) dostaneme $\Delta x \approx 45$ km, rovnako aj $\Delta y \approx 45$ km. Koeficient difúzie pre CO_2 je daný $D = 14 \text{ mm}^2/\text{s} = 14 \times 10^{-12} \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ km}^2/\text{deň} = 1,2096 \times 10^{-6} \text{ km}^2/\text{deň}$. Lokálne Pécletovo číslo pre x -ový smer bude vyzerat

$$Pe = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t D} = \frac{45^2}{1,2096 \times 10^{-6} \Delta t} = \frac{1,674 \times 10^9}{\Delta t}. \quad (2.71)$$

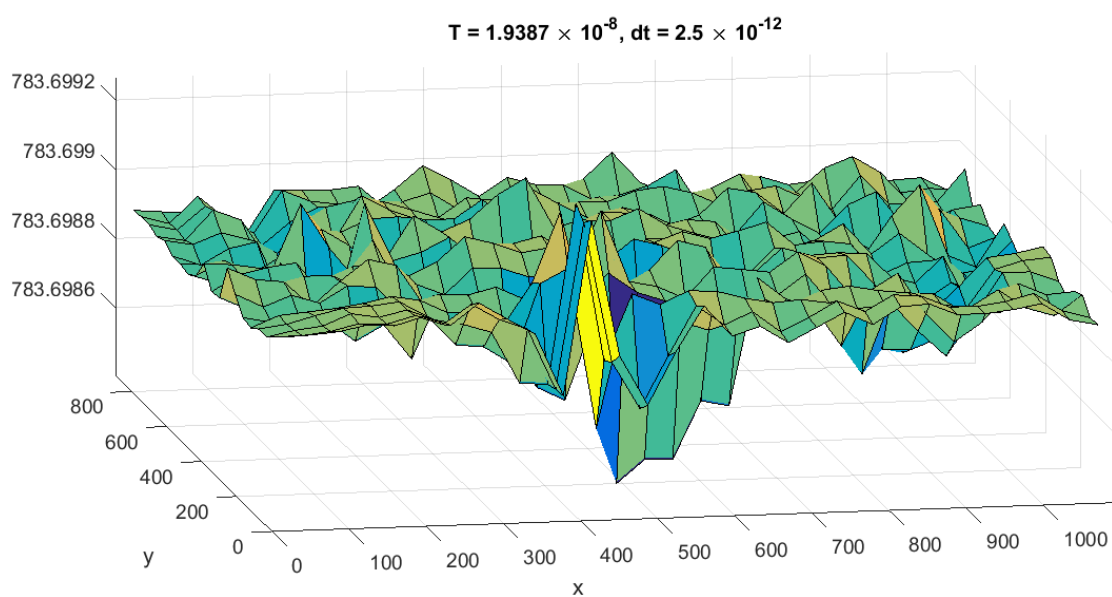
To značí, že jeho prevrátená hodnota $\frac{1}{Pe}$ bude zanedbateľne malá, preto v modeli (2.42) prakticky nebudeme mať efekt difúzie. Podľa [26] je vhodné rozmedzie pre Pécletovo číslo interval $[1, 10]$. Pri príliš veľkých hodnotách totižto môže prichádzať k nestabilite numerickej schémy.

To sa ukázalo ako problém aj v našom prípade. Na Obrázku 25 vidíme porovnaný prípad s konštantným vetrom, na ktorom je pekne zreteľne vidieť oblasť Portugalska a Španielska a na Obrázku 26 máme tú istú oblasť avšak s reálnym vetrom, kde je zrejmé, že dochádza k značnej nestabilite. Zároveň k tomu ešte môže prispievať aj fakt, že pôvodné dáta vetra sme uvažovali v diskretných bodoch mriežky s krokom zodpovedajúcim kroku mriežky oblasti, čo mohlo spôsobovať isté kolízie v smerovaní vetra. Tento problém sme sa pokúšali vyriešiť aj zhladzovaním dát vetra pomocou rôznych filtrov, avšak bez lepších výsledkov.

Možným riešením tohto problému by mohlo byť napríklad umelé zvýšenie difúzie, keďže koeficient D vstupuje v (2.71) do menovateľa, avšak v našom prípade je koeficient jasne daný vlastnosťami plynu CO_2 .



Obr. 25: Hodnoty koncentrácie $c(x, y, z, t)$ vyobrazené v prvej vrstve pri zemskom povrchu pri konštantnom vetre.



Obr. 26: Hodnoty koncentrácie $c(x, y, z, t)$ vyobrazené v prvej vrstve pri zemskom povrchu pri reálnom vetre.

3 Model založený na raste populácie

Jedným z modelov venujúcim sa problematike koncentrácie CO_2 v atmosfére je dynamický model popísaný v článku [18]. Autori článku vychádzajú z toho, že koncentrácia CO_2 v atmosfére rastie vplyvom prirodzených procesov a aj ľudskej činnosti. Ľudská populácia a lesná biomasa sú dva hlavné faktory, ktoré vedú ku zmenám množstva CO_2 . Koncentráciu CO_2 meranú v ppm (z angl. *parts per million*) v čase t predstavuje v modeli funkcia $X(t)$, ľudskú populáciu popisuje funkcia $N(t)$ a množstvo lesnej biomasy predstavuje funkcia $F(t)$.

Autori článku predpokladajú, že existuje konštantná hladina Q_0 koncentrácie CO_2 , ktorú zapríčiňuje **prirodzený cyklus** oxidu uhličitého (t.j. respirácia rastlín a zvierat, sopečná činnosť). **Emisie z ľudskej činnosti**, alebo inak nazývaný aj antropogénny (angl. *anthropogenic*) CO_2 , závisia od veľkosti ľudskej populácie, pričom koeficient λ predstavuje mieru rastu koncentrácie vplyvom populácie. Koeficient α označuje mieru odčerpávania CO_2 vplyvom iných pohlcovačov než lesov (napríklad **oceánmi a moriami**). Ako bolo spomenuté v druhej kapitole, oceány v prírode fungujú ako pohlcovač uhlíku (angl. *carbon sink*), to znamená, že na celkovú koncentráciu CO_2 v atmosfére budú mať negatívny vplyv. Ďalší faktor, ktorý sa významne podieľa na znižovaní koncentrácie, je proces fotosyntézy. V našom modeli je **množstvo biomasy** popísané funkciou $F(t)$ a príslušný koeficient odčerpávania je ω .

Autori článku [18] ďalej vychádzajú z predpokladu, že aj ľudská populácia aj množstvo lesov sa riadia logistickým modelom rastu, pričom koeficient rastu ľudskej populácie označíme s a koeficient rastu lesnej biomasy ako u . Medzi sebou majú vzťah typu predátor-korist, pričom les predstavuje korisť a človek predátora, nakoľko intuitívne platí vzťah, že čím viac ľudí na planéte, tým viac vyklčovaných lesov.

Mieru deforestácie popisuje koeficient ϕ . Rastliny rastú lepšie pri vyššej koncentrácii CO_2 , čo v modeli popisuje koeficient γ . Koeficient π predstavuje nárast ľudskej populácie vplyvom lesnej biomasy a parameter θ mieru znižovania ľudskej populácie vplyvom CO_2 .

V pôvodnom modeli je časová jednotka rok, avšak pre potreby našej práce zvolíme časovú jednotku hodinu, kvôli pridaniu interakcií medzi krajinami neskôr v tejto kapitole.

Všetky parametre aj s ich jednotkami nájdeme prehľadnejšie popísané v Tabuľke 9.

Parameter	Popis	Jednotky
Q_0	Konštantná miera emisií z prirodzených zdrojov	[ppm/hod]
λ	Miera emisií z antropogénnych zdrojov	[ppm/(človek hod)]
α	Prirodzená miera odčerpávania CO ₂ vplyvom morí a oceánov	[(hod) ⁻¹]
ω	Prirodzená miera odčerpávania CO ₂ vplyvom lesov	[(tona hod) ⁻¹]
s	Koeficient rastu ľudskej populácie	[(hod) ⁻¹]
L	Maximálna udržateľná veľkosť populácie	[človek]
u	Koeficient rastu lesnej biomasy	[(hod) ⁻¹]
M	Maximálna udržateľná veľkosť lesnej biomasy	[tona]
θ	Miera zmenšovania ľudskej populácie vplyvom CO ₂	[(ppm hod) ⁻¹]
π	Nárast ľudskej populácie vplyvom lesnej biomasy	[človek/tona]
ϕ	Miera deforestácie	[(človek hod) ⁻¹]
γ	Nárast lesnej biomasy vplyvom CO ₂	[tona/ppm]

Tabuľka 9: Parametre v modeli.

Zmenu v koncentrácii $X(t)$, v ľudskej populácii $N(t)$ a lesnej biomase $F(t)$ vieme potom popísať na základe článku [18, str. 8596] troma diferenciálnymi rovnicami

$$\begin{aligned}
\frac{dX(t)}{dt} &= Q_0 + \lambda N(t) - \alpha X(t) - \omega X(t)F(t), \\
\frac{dN(t)}{dt} &= sN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{L}\right) - \theta X(t)N(t) + \pi \phi N(t)F(t), \\
\frac{dF(t)}{dt} &= uF(t) \left(1 - \frac{F(t)}{M}\right) - \phi N(t)F(t) + \gamma \omega X(t)F(t).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Tieto rovnice popisujú globálne zmeny v rámci celej zemegule. My sa však chceme sústreďiť iba na oblasť Európy a zaujíma nás vývoj koncentrácie pre každý jej štát osobitne. Vytvoríme teda celý systém diferenciálnych rovníc – pre každý i -ty zo 43 štátov Európy budeme sledovať vývoj v koncentrácii $X_i(t)$, populácii $N_i(t)$ a biomasy $F_i(t)$. Jednotlivé štáty sme očíslovali v abecednom poradí podľa Tabuľky 10. Vynechali sme štáty **Monako** a **San Maríno** kvôli ich malej veľkosti, keďže ďalej v kapitole sa budeme venovať interakciám medzi jednotlivými krajinami, ktoré odhadujeme na základe pohybov vetra z dát, ktoré nám pre účely tejto diplomovej práce poskytol doc. RNDr. Martin Gera, PhD. z Katedry astronómie, fyziky Zeme a meteorológie, FMFI UK a v nich máme relatívne

hrubú mriežku, takže nám chýbajú relevantné dáta o týchto dvoch krajinách.

1	Albania (Albánsko)	15	Germany (Nemecko)	30	Norway (Nórsko)
2	Andorra (Andorra)	16	Greece (Grécko)	31	Poland (Poľsko)
3	Austria (Rakúsko)	17	Hungary (Maďarsko)	32	Portugal (Portugalsko)
4	Belarus (Bielorusko)	18	Iceland (Island)	33	Romania (Rumunsko)
5	Belgium (Belgicko)	19	Ireland (Írsko)	34	Russia (Rusko)
6	Bosnia and Herzegovina (Bosna a Hercegovina)	20	Italy (Taliansko)	35	Serbia (Srbsko)
7	Bulgaria (Bulharsko)	21	Latvia (Lotyšsko)	36	Slovakia (Slovensko)
8	Croatia (Chorvátsko)	22	Liechtenstein (Lichtenštajnsko)	37	Slovenia (Slovinsko)
9	Cyprus (Cyprus)	23	Lithuania (Litva)	38	Spain (Španielsko)
10	Czech Republic (Česko)	24	Luxembourg (Luxembursko)	39	Sweden (Švédsko)
11	Denmark (Dánsko)	25	Macedonia (Macedónsko)	40	Switzerland (Švajčiarsko)
12	Estonia (Estónsko)	26	Malta (Malta)	41	Turkey (Turecko)
13	Finland (Fínsko)	27	Moldova (Moldava)	42	Ukraine (Ukrajina)
14	France (Francúzsko)	28	Montenegro (Čierna hora)	43	United Kingdom (Veľká Británia)
		29	Netherlands (Holandsko)		

Tabuľka 10: Poradové čísla štátov Európy.

Dáta o pohyboch vetra použijeme aj v tomto modeli, a to nasledujúcim spôsobom: do rovnice koncentrácie v každom i -tom štáte pridáme interakciu β_{ij} s koncentráciou z j -teho susedného štátu. Koeficient β_{ij} v sebe zahŕňa priemerný vietor na hraniciach medzi dvoma susednými štátmi a má jednotku 1/hod. Napríklad Slovensko s číslom 36 má 5 susedov: Rakúsko (3), Česko (10), Maďarsko (17), Poľsko (31) a Ukrajinu (42), takže v prípade, ak vietor fúka do Slovenska zo všetkých susedných štátov, diferenciálna rovnica pre koncentráciu $X_{36}(t)$ by v tomto prípade vyzerala

$$\begin{aligned} \frac{dX_{36}(t)}{dt} = & Q_0 + \lambda_{36}N_{36}(t) - \alpha_{36}X_{36}(t) - \omega X_{36}(t)F_{36}(t) + \beta_{36,3}X_3(t) \\ & + \beta_{36,10}X_{10}(t) + \beta_{36,17}X_{17}(t) + \beta_{36,31}X_{31}(t) + \beta_{36,42}X_{42}(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Druhou úpravou, ktorú v modeli vykonáme oproti jeho pôvodnej verzii z článku [18], bude zmena miery odčerpávania CO₂ vplyvom morí a oceánov α_i pre $i = 1, \dots, 43$. V modeli máme aj vnútrozemské štáty, pre tie zvolíme $\alpha_i = 0$ a pre prímorské štáty odhadneme parameter na základe ich dĺžky pobrežia a sily vetra. Podrobnejšie tieto odhady popíšeme nižšie.

Výsledný model pre i -ty štát bude vyzerat nasledovne:

$$\begin{aligned}
\frac{dX_i(t)}{dt} &= Q_0 + \lambda_i N_i(t) - \omega X_i(t) F_i(t) - \alpha_i X_i(t) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i, \\ j: \beta_{ij} > 0}}^{43} \beta_{ij} X_j(t) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i, \\ j: \beta_{ij} < 0}}^{43} \beta_{ij} X_i(t), \\
\frac{dN_i(t)}{dt} &= s_i N_i(t) \left(1 - \frac{N_i(t)}{L_i}\right) - \theta X_i(t) N_i(t) + \pi \phi N_i(t) F_i(t), \\
\frac{dF_i(t)}{dt} &= u F_i(t) \left(1 - \frac{F_i(t)}{M_i}\right) - \phi N_i(t) F_i(t) + \gamma \omega X_i(t) F_i(t),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

pričom popisu jeho vzniku a odhadu parametrov $Q_0, \lambda_i, \alpha_i, \omega, s_i, L_i, \theta, \pi, \phi, u, M_i, \gamma, \beta_{ij}$ pre $i, j = 1, \dots, 43$ a $i \neq j$ sa budeme venovat v ďalšej podkapitole.

3.1 Odhadnutie parametrov v modeli

V tejto podkapitole sa venujeme odhadovaniu parametrov vstupujúcich do modelu založenom na raste ľudskej populácie. Tieto parametre odhadujeme na základe údajov z článkov o lesnej biomase [10] a [11] a tiež dát o množstve ľudí žijúcich v krajinách Európy k 1. januáru príslušného kalendárneho roka zo stránky pre európske štatistiky [9]. Ďalej sme použili odhadnuté údaje z článku [19] a množstvo ppm CO₂ v atmosfére sme určili na základe [4].

3.1.1 Koncentrácia CO₂

V decembri roku 2016 bola koncentrácia CO₂ v atmosfére na základe [4] 404,42 ppm. Keďže koncentrácia sa meria globálne pre celý svet na niekoľkých meteorologických staniaciach, nebudeme v tomto prípade rozlišovať jednotlivé štáty Európy. Tento údaj nám bude slúžiť ako východisková hodnota, teda položíme počiatočnú koncentráciu $X_i(0) = 404,42$ ppm pre $i = 1, \dots, 43$.

Na základe článku [19, str. 11] určíme mieru odčerpávania CO₂ vplyvom lesov $\omega = 4,8 \times 10^{-9} \cdot (365 \cdot 24)^{-1} = 5,48 \times 10^{-13}$ (tona hod)⁻¹ a mieru emisií z prirodzených zdrojov $Q_0 = 5 \cdot (365 \cdot 24)^{-1} = \frac{1}{1752}$ ppm/hod. Posledný parameter spätý s koncentráciou CO₂, ktorý nám ostáva určiť, je miera emisií z antropogénnych zdrojov λ meraná v ppm/(človek hod). Tento parameter bol v článku [19, str. 11] aproximovaný číslom $0,576 \times 10^{-3}$ ppm/(človek rok) = $6,58 \times 10^{-8}$ ppm/(človek hod). V našom modeli máme 43 rôznych krajín, každú s inou úrovňou produkcie emisií, to znamená, že budeme mať rôzne koeficienty $\lambda_i, i =$

1, ..., 43. Odhadneme ich pomocou dát o množstve emisií vyprodukovaných ročne, ktoré sa nám podarilo získať z [7] udávaných v tonách, ktoré následne prepočítame na jeden km² rozlohy štátu. Tieto údaje potrebujeme ďalej previesť na ppm a keďže poznáme vzťah (2.49) medzi tona/km³ a ppm, pridáme do množstva emisií jednotkovú výšku a dostaneme tak výsledok v tona/(km³ rok), ktorý už ľahko premeníme na ppm/rok. Potom sa v jednotlivých rokoch pozrieme na veľkosť ľudskej populácie z [9] a množstvá emisií predelíme týmto údajom – vždy s korešpondujúcim rokom. Takýmto spôsobom dostaneme výsledok v ppm/(človek rok) za obdobie 2006 – 2016. Ako odhad parametra λ_i následne zvolíme priemer z týchto údajov a prevedieme na ppm/(človek hod). Výsledné hodnoty uvádzame v Tabuľke 11.

	Štát	λ_i		Štát	λ_i
1	Albánsko	$3,01 \times 10^{-9}$	22	Lichtenštajnsko	$529,68 \times 10^{-9}$
2	Andorra	$0,81 \times 10^{-9}$	23	Litva	$4,09 \times 10^{-9}$
3	Rakúsko	$6,01 \times 10^{-9}$	24	Luxembursko	$471,97 \times 10^{-9}$
4	Bielorusko	$1,96 \times 10^{-9}$	25	Macedónsko	$10,46 \times 10^{-9}$
5	Belgicko	$19,86 \times 10^{-9}$	26	Malta	$1079,83 \times 10^{-9}$
6	Bosna a Hercegovina	$6,93 \times 10^{-9}$	27	Moldava	$3,93 \times 10^{-9}$
7	Bulharsko	$3,55 \times 10^{-9}$	28	Čierna hora	$15,96 \times 10^{-9}$
8	Chorvátsko	$5,09 \times 10^{-9}$	29	Holandsko	$15,40 \times 10^{-9}$
9	Cyprus	$56,54 \times 10^{-9}$	30	Nórsko	$1,61 \times 10^{-9}$
10	Česko	$8,25 \times 10^{-9}$	31	Poľsko	$1,61 \times 10^{-9}$
11	Dánsko	$11,92 \times 10^{-9}$	32	Portugalsko	$3,47 \times 10^{-9}$
12	Estónsko	$17,61 \times 10^{-9}$	33	Rumunsko	$1,07 \times 10^{-9}$
13	Fínsko	$1,87 \times 10^{-9}$	34	Rusko	$0,04 \times 10^{-9}$
14	Francúzsko	$0,64 \times 10^{-9}$	35	Srbsko	$3,31 \times 10^{-9}$
15	Nemecko	$1,72 \times 10^{-9}$	36	Slovensko	$8,35 \times 10^{-9}$
16	Grécko	$3,91 \times 10^{-9}$	37	Slovinsko	$22,65 \times 10^{-9}$
17	Maďarsko	$3,27 \times 10^{-9}$	38	Španielsko	$0,78 \times 10^{-9}$
18	Island	$6,57 \times 10^{-9}$	39	Švédsko	$0,70 \times 10^{-9}$
19	Írsko	$8,12 \times 10^{-9}$	40	Švajčiarsko	$8,53 \times 10^{-9}$
20	Taliansko	$1,38 \times 10^{-9}$	41	Turecko	$0,33 \times 10^{-9}$
21	Lotyšsko	$3,51 \times 10^{-9}$	42	Ukrajina	$0,65 \times 10^{-9}$
			43	Veľká Británia	$1,98 \times 10^{-9}$

Tabuľka 11: Miera emisií z antropogénnych zdrojov v štátoch Európy. Uvedené údaje sú v ppm/(človek hod).

3.1.2 Ľudská populácia

Ako prvé sme získali dáta o populácii z [9] a [28] za roky 2006 – 2016. Koeficient rastu ľudskej populácie s sme určili ako priemer medziročných rastov populácie v 43 štátoch Európy v období 2006 – 2016. Výsledky nájdeme v Tabuľke 12. Ako počiatočnú veľkosť ľudskej populácie $N_i(0)$ sme zvolili množstvo ľudí v i -tom štáte Európy v roku 2016. Konkrétne hodnoty nájdeme v Tabuľke 13. Maximálna udržateľná veľkosť populácie je maximálny počet organizmov, ktorý dokáže v danom prostredí prežiť bez toho, aby mu chýbali zdroje jedla, vody a iných životupotrebných látok. V článku [19, str. 11] je táto veličina rovná približne $3,25 \times N(0)$, preto zvolíme $L_i = 3,25 \times N_i(0)$.

1	Albánsko	-0,00000096*	22	Lichtenštajnsko	0,00000086
2	Andorra	-0,00000098*	23	Litva	-0,00000147
3	Rakúsko	0,00000060	24	Luxembursko	0,00000237
4	Bielorusko	-0,00000030	25	Macedónsko	0,00000018
5	Belgicko	0,00000084	26	Malta	0,00000122
6	Bosna a Hercegovina	-0,00000097	27	Moldava	-0,00000012
7	Bulharsko	-0,00000073	28	Čierna hora	0,00000017
8	Chorvátsko	-0,00000033	29	Holandsko	0,00000044
9	Cyprus	0,00000152	30	Nórsko	0,00000134
10	Česko	0,00000036	31	Poľsko	-0,00000006
11	Dánsko	0,00000058	32	Portugalsko	-0,00000019
12	Estónsko	-0,00000030	33	Rumunsko	-0,00000083
13	Fínsko	0,00000049	34	Rusko	0,00000010*
14	Francúzsko	0,00000062	35	Srbsko	-0,00000083
15	Nemecko	-0,00000003	36	Slovensko	0,00000011
16	Grécko	-0,00000023	37	Slovinsko	0,00000034
17	Maďarsko	-0,00000028	38	Španielsko	0,00000062
18	Island	0,00000119	39	Švédsko	0,00000098
19	Írsko	0,00000134	40	Švajčiarsko	0,00000126
20	Taliansko	0,00000050	41	Turecko	0,00000154
21	Lotyšsko	-0,00000140	42	Ukrajina	-0,00000104*
			43	Veľká Británia	0,00000087

Tabuľka 12: Koeficienty rastu ľudskej populácie s_i v štátoch Európy. Údaje označené * sú aproximované, nakoľko v časovom rade chýbala veľkosť populácie aspoň jeden rok. Chýbajúce údaje boli doplnené ako priemer zo susedných rokov.

1	Albánsko	2 886 026	22	Lichtenštajnsko	37 622
2	Andorra	71 732	23	Litva	2 888 558
3	Rakúsko	8 700 471	24	Luxembursko	576 249
4	Bielorusko	9 498 364	25	Macedónsko	2 071 278
5	Belgicko	11 311 117	26	Malta	450 415
6	Bosna a Hercegovina	3 515 982	27	Moldava	3 553 056
7	Bulharsko	7 153 784	28	Čierna Hora	622 218
8	Chorvátsko	4 190 669	29	Holandsko	16 979 120
9	Cyprus	848 319	30	Nórsko	5 213 985
10	Česko	10 553 843	31	Poľsko	37 967 209
11	Dánsko	5 707 251	32	Portugalsko	10 341 330
12	Estónsko	1 315 944	33	Rumunsko	19 760 314
13	Fínsko	5 487 308	34	Rusko	143 964 513
14	Francúzsko	66 730 453	35	Srbsko	8 847 976
15	Nemecko	82 175 684	36	Slovensko	5 426 252
16	Grécko	10 783 748	37	Slovinsko	2 064 188
17	Maďarsko	9 830 485	38	Španielsko	46 440 099
18	Island	332 529	39	Švédsko	9 851 017
19	Írsko	4 726 286	40	Švajčiarsko	8 327 126
20	Taliansko	60 665 551	41	Turecko	78 741 053
21	Lotyšsko	1 968 957	42	Ukrajina	42 590 879
			43	Veľká Británia	65 382 556

Tabuľka 13: Počiatočná podmienka $N_i(0)$ pre veľkosť populácie v jednotlivých štátoch Európy.

Koeficient nárastu ľudskej populácie vplyvom lesa π bol v článku [19, str. 11] určený ako 0,00004 človek/tona. Miera zmenšovania ľudskej populácie vplyvom CO_2 označená ako θ bola v článku [19, str. 11] určená ako $0,000001 \text{ (ppm rok)}^{-1}$, teda po prevedení na hodiny dostaneme výsledok $\theta = 1,14 \times 10^{-10} \text{ (ppm hod)}^{-1}$.

3.1.3 Lesná biomasa

Podľa článku [10, str. 41] sa lesná biomasa udáva vo forme váhy všetkých živých organizmov a je dôležitým ukazovateľom úlohy lesov v uhlíkovom cykle. V roku 2010 bolo v Európe zaznamenaných spolu 90 602 miliónov ton lesnej biomasy, čo predstavuje 90,2 ton na jeden hektár lesa. Celková zalesnená plocha v roku 2010 v Európe bola 1 005 001 000 hektárov. Odumreté drevo predstavovalo 15 790 miliónov ton, teda približne 15,7

ton na jeden hektár. Lesná biomasa je významným úložiskom uhlíka – podľa [10] bolo v roku 2010 v biomase, odumretom dreve a pôde uskladnených až 162 583 miliónov ton uhlíka, čo predstavuje 161,8 ton na jeden hektár, pričom od roku 1990 má toto množstvo v Európe rastúci trend. Keďže najnovšie dáta sa nám podarilo nájsť z roku 2010, budeme predpokladať, že sa les za 6 rokov nezmenil a použijeme tieto údaje ako počiatočný stav aj v roku 2016. V našom modeli sa zaoberáme iba lesnou biomasou, preto by sme ako globálnu počiatočnú podmienku pre celú Európu zobrali údaj 90 602 miliónov ton. Toto množstvo potrebujeme ešte rozdeliť medzi jednotlivé krajiny Európy. V Tabuľke 14 je uvedená plocha lesov v hektároch v jednotlivých štátoch Európy v roku 2010 na základe článku [11, str. 262-263].

1	Albánsko	776 000	22	Lichtenštajnsko	7 000
2	Andorra	16 000	23	Litva	2 165 000
3	Rakúsko	3 857 000	24	Luxembursko	87 000
4	Bielorusko	8 600 000	25	Macedónsko	998 000
5	Belgicko	678 000	26	Malta	2*
6	Bosna a Hercegovina	2 472 000	27	Moldava	386 000
7	Bulharsko	3 927 000	28	Čierna Hora	467 000
8	Chorvátsko	1 920 000	29	Holandsko	365 000
9	Cyprus	173 000	30	Nórsko	10 250 000
10	Česko	2 657 000	31	Poľsko	9 319 000
11	Dánsko	587 000	32	Portugalsko	3 456 000
12	Estónsko	2 203 000	33	Rumunsko	6 573 000
13	Fínsko	22 084 000	34	Rusko	809 090 000
14	Francúzsko	15 954 000	35	Srbsko	2 713 000
15	Nemecko	11 076 000	36	Slovensko	1 938 000
16	Grécko	3 903 000	37	Slovinsko	1 253 000
17	Maďarsko	2 039 000	38	Španielsko	18 173 000
18	Island	30 000	39	Švédsko	28 605 000
19	Írsko	737 000	40	Švajčiarsko	1 240 000
20	Taliano	9 149 000	41	Turecko	11 334 000
21	Lotyšsko	3 354 000	42	Ukrajina	9 705 000
			43	Veľká Británia	2 881 000

Tabuľka 14: Plocha lesov v Európe v hektároch. Údaje označené * sú aproximované pomocou susedných štátov. Zdroj: [11, str. 262-263].

Kedže sa nám nepodarilo nájsť údaje o tom, koľko presne ton biomasy lesa sa nachádza v jednotlivých štátoch, tieto údaje si dopočítame ako plochu lesa v hektároch v danom štáte pre násobenú 90,2 tonami na jeden hektár lesa. Takýmto spôsobom dostaneme počiatočné podmienky v čase $t = 0$ pre funkciu $F_i(t)$ pre $i = 1, \dots, 43$ a uvádzame ich v Tabuľke 15.

1	Albánsko	69 995 200	22	Lichtenštajnsko	631 400
2	Andorra	1 443 200	23	Litva	195 283 000
3	Rakúsko	347 901 400	24	Luxembursko	7 847 400
4	Bielorusko	775 720 000	25	Macedónsko	90 019 600
5	Belgicko	61 155 600	26	Malta	148*
6	Bosna a Hercegovina	222 974 400	27	Moldava	34 817 200
7	Bulharsko	354 215 400	28	Čierna Hora	42 123 400
8	Chorvátsko	173 184 000	29	Holandsko	32 923 000
9	Cyprus	15 604 600	30	Nórsko	924 550 000
10	Česko	239 661 400	31	Poľsko	840 573 800
11	Dánsko	52 947 400	32	Portugalsko	311 731 200
12	Estónsko	198 710 600	33	Rumunsko	592 884 600
13	Fínsko	1 991 976 800	34	Rusko	72 979 918 000
14	Francúzsko	1 439 050 800	35	Srbsko	244 712 600
15	Nemecko	999 055 200	36	Slovensko	174 807 600
16	Grécko	352 050 600	37	Slovinsko	113 020 600
17	Maďarsko	183 917 800	38	Španielsko	1 639 204 600
18	Island	2 706 000	39	Švédsko	2 580 171 000
19	Írsko	66 477 400	40	Švajčiarsko	111 848 000
20	Taliansko	825 239 800	41	Turecko	1 022 326 800
21	Lotyšsko	302 530 800	42	Ukrajina	875 391 000
			43	Veľká Británia	259 866 200

Tabuľka 15: Počiatočná podmienka $F_i(0)$ pre množstvo biomasy v tonách v jednotlivých štátoch Európy.

Maximálna udržateľná veľkosť lesnej biomasy M bola v článku [19, str. 11] určená ako $\frac{75}{64}$ počiatočnej podmienky, preto takto položíme $M_i = \frac{75}{64}F_i(0)$ aj v našom modeli pre $i = 1, \dots, 43$. Koeficient rastu lesnej biomasy u bol v článku [19, str. 11] rovný 0,013 za rok, teda v našom modeli ho položíme $u = 1,48 \times 10^{-6} \frac{1}{\text{hod}}$. Miera deforestácie ϕ bola v tom istom článku odhadnutá na $0,71 \times 10^{-6}$ na človeka za rok, teda po prevedení na hodiny dostaneme $\phi = 8,11 \times 10^{-11} \frac{1}{\text{človek hod}}$.

3.1.4 Interakcie medzi štátmi

Označme leteckú dĺžku hranice medzi štátom i a j meranú v km ako l_{ij} . Dĺžka hranice medzi krajinami je symetrická veličina, takže parameter l_{ji} predstavuje to isté. Predpokladajme, že za jednu hodinu cez hranicu pribudne do štátu i zo susedného štátu j množstvo $\xi_{ij} |\vec{u}_{ij}| \cdot l_{ij} \cdot X_j(t)$ v jednotkách $\left[\frac{\text{km}}{\text{hod}} \cdot \frac{\text{tona}}{\text{km}^3} \cdot \text{km} \right]$, kde $\vec{u}_{ij}$ predstavuje vektor priemerného vetra, ktorý prúdi medzi štátmi i a j . Smer vetra je daný koeficientom ξ_{ij} , ktorý je kladný, ak fúka smerom do krajiny i a záporný, ak fúka do krajiny j . V prípade prítoku do krajiny i potrebujeme toto množstvo ešte rozdeliť na celú plochu štátu i , ktorú označíme R_i , teda vo výsledku dostaneme

$$\xi_{ij} \frac{1}{R_i} |\vec{u}_{ij}| l_{ij} X_j(t) \quad \xi_{ij} > 0. \quad (3.4)$$

V prípade, že fúka opačným smerom, to znamená z krajiny i , musíme odchádzajúce množstvo taktiež rozložiť na celú plochu štátu i . Vo výsledku tak dostaneme odtok

$$\xi_{ij} \frac{1}{R_i} |\vec{u}_{ij}| l_{ij} X_i(t) \quad \xi_{ij} < 0. \quad (3.5)$$

Koeficient β_{ij} teda položíme rovný

$$\beta_{ij} = \xi_{ij} \frac{1}{R_i} \cdot |\vec{u}_{ij}| l_{ij}, \quad (3.6)$$

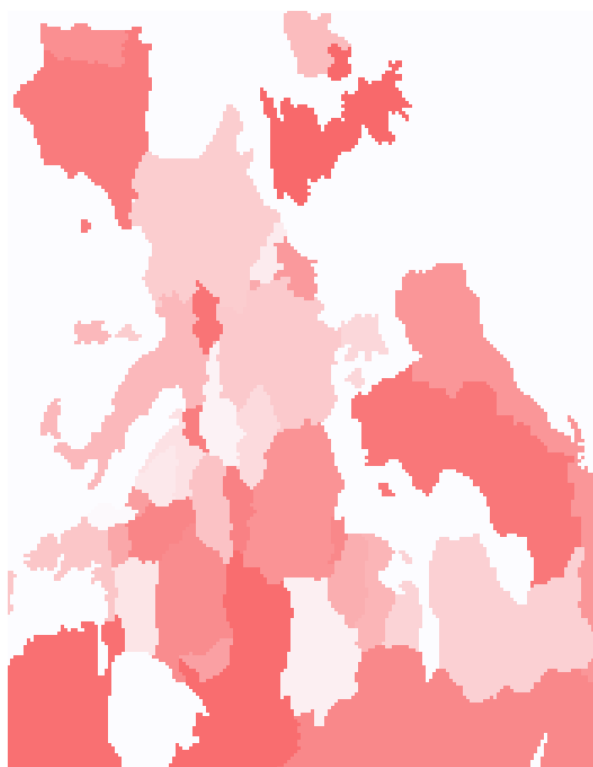
s jednotkami $\left[\xi_{ij} \frac{1}{R_i} \cdot |\vec{u}_{ij}| l_{ij} \right] = \frac{\text{km} \cdot \text{km}}{\text{km}^2 \cdot \text{hod}} = \frac{1}{\text{hod}}$, čo je presne požadovaná jednotka pre β_{ij} .

Pri aproximácii priemerného vetra $\vec{u}_{ij}$, ktorého veľkosť vstupuje do koeficientov β_{ij} , sme sa pozreli na hranice medzi štátmi, zobrazené na Obrázku 27 žltou farbou.



Obr. 27: Hranice štátov Európy.

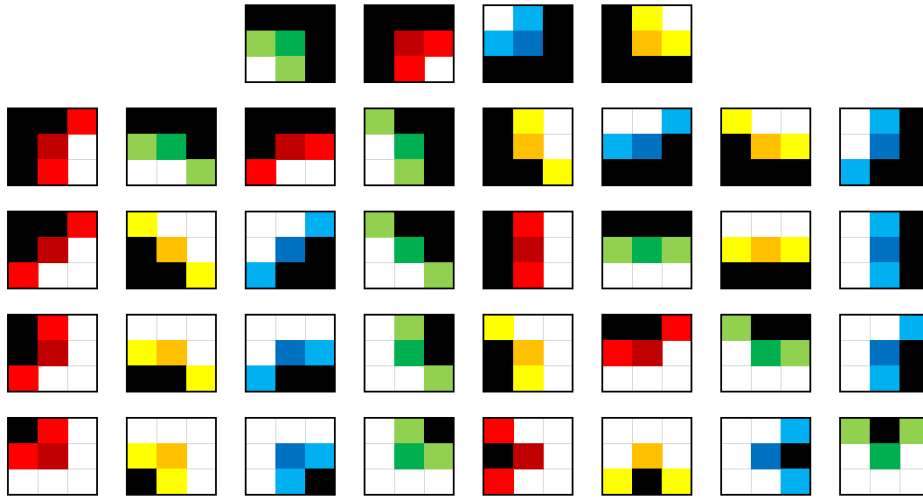
Vytvorili sme lokalizačnú maticu M , ktorá predstavuje mapu Európy zrotovanú o 90° v smere hodinových ručičiek. To znamená, že riadky tejto matice predstavujú zemepisné dĺžky a stĺpce tejto matice zase zemepisné šírky. Mapu sme potrebovali zrotovať kvôli dátam vetra - tie majú taktiež v riadkoch zemepisné dĺžky a v stĺpcoch zemepisné šírky. Prvkami matice sú indexy jednotlivých krajín z Tabuľky 10, pričom index je určený na základe toho, ktorej krajine patrí daná pozícia zemepisnej dĺžky a šírky. Matica M je zobrazená na Obrázku 28.



Obr. 28: Graficky znázornená lokalizačná matica M , ktorej prvky predstavujú index štátu podľa Tabuľky 10, ktorému patrí daná pozícia zemepisnej dĺžky a šírky.

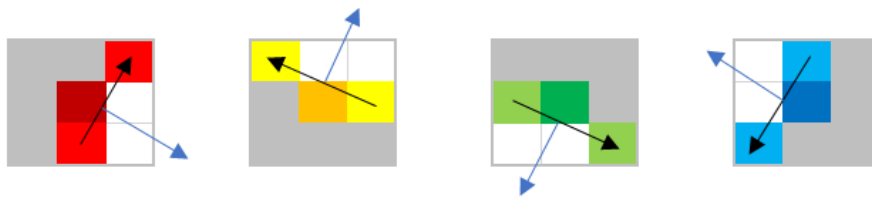
Keďže hranice v Európe sú dosť nepravidelné a kľukaté, hľadali sme vždy vietor v smere vonkajšej normály, aby sme tak mali istú informáciu o tom, čo fúka von a čo dnu. Prvým krokom k nájdeniu normály je aproximácia hranice pomocou susedných bodov. Nech bod so súradnicami $[r, s]$ je bod, v ktorom hľadáme príslušnú normálu, pričom r označuje riadok v matici M a s je označenie pre stĺpec. Číslovanie riadkov a stĺpcov začína prirodzeným spôsobom v ľavom hornom rohu matice. Na Obrázku 29 je tento bod $[r, s]$ vyobrazený tmavšou farbou a dva susedné body použité na aproximáciu hranice sú zobrazené bledšou farbou. Čiernou je zvýraznené pokračovanie štátu a bielou farbou je

naznačený susedný štát.



Obr. 29: Typy hraníc štátov Európy.

Jednotlivé farby modrá, červená, zelená a žltá znázorňujú, v ktorom kvadrante sa nachádzame a pre každý z nich platia trochu iné pravidlá pri určovaní smerového vektoru. Tieto pravidlá sú znázornené na Obrázku 30, pričom čiernou farbou je zakreslený smerový vektor hranice a modrou normálový vektor na hranicu. Použitím týchto pravidiel máme zaručené, že normálový vektor bude vždy v smere von z krajiny a nie naopak. Priemerné vetry na hraniciach štátov budeme určovať ako ich priemety na vonkajšiu normálu hranice štátu.



Obr. 30: Pravidlá hľadania normály na rôzne typy hraníc.

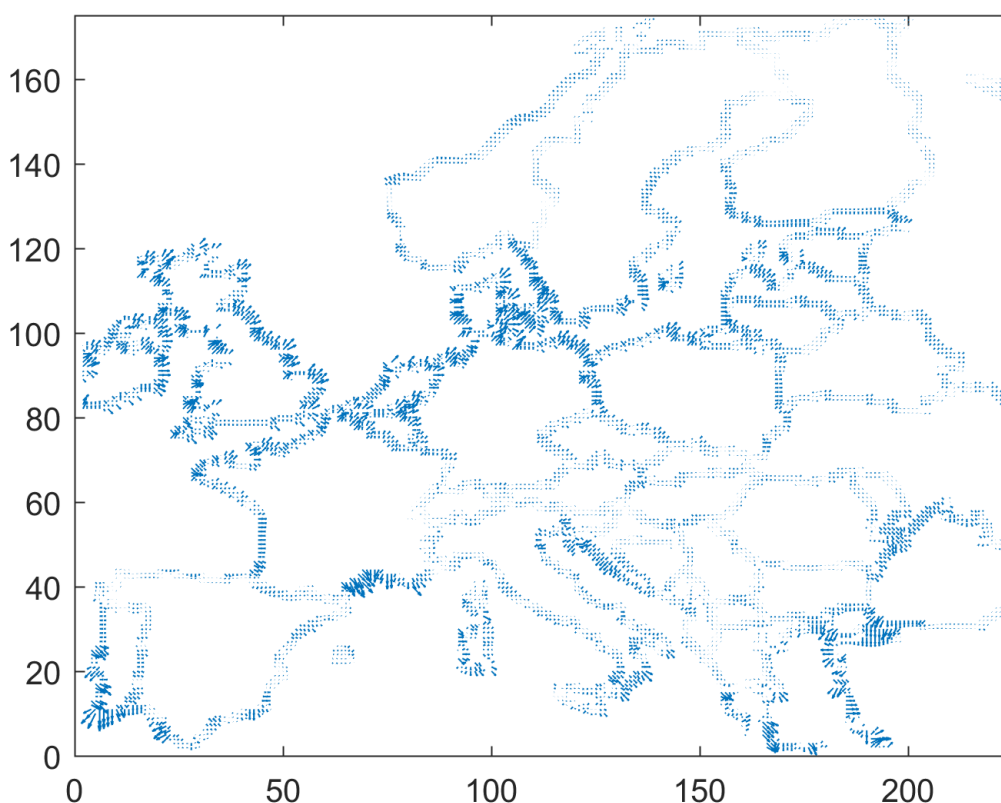
Vezmime si napríklad situáciu v prvom červenom políčku na Obrázku 29. Susedné body sú v tomto prípade body so súradnicami $[r + 1, s]$ a $[r, s + 1]$. Smerový vektor hranice v bode $[r, s]$ je potom podľa Obrázku 30 rovný $\vec{s} = (r - (r + 1), s + 1 - s)^T = (-1, 1)^T$ a normálový vektor $\vec{n} = (s + 1 - s, -r + r + 1)^T = (1, 1)^T$.

Ako sme už spomenuli interakcie medzi štátmi β_{ij} sme sa rozhodli aproximovať pomocou vetra, vyjadreného v smere vonkajšej normály ku hranici daného štátu. Aby sme

mali konzistentné interakcie, hľadáme vždy normálu jednotkovej dĺžky. Tieto normály $\vec{n}$ nájdeme podľa postupu vysvetlenom vyššie a príslušný vektor $\vec{u}$ na túto normálu sprojekujeme pomocou projekčnej matice

$$P = \frac{\vec{n}\vec{n}^T}{\vec{n}^T\vec{n}}.$$

Takto dostaneme sprojektovaný vektor $proj_{\vec{n}}(\vec{u}) = P\vec{u}$ v smere vonkajšej normály pre všetky body hranice štátu a pre každý čas. Následne nájdeme priemer zo všetkých časov a výsledok zobrazíme na Obrázku 31.



Obr. 31: Priemerný vektor v smere vonkajšej normály na hraniciach krajín a na pobreží.

Ako druhý krok sme našli priestorový priemer $\bar{\vec{u}}$ pre každú hranicu medzi dvoma susednými štátmi. Výsledný smer vetra sme zakreslili do Obrázku 32. Šípka má len informatívny charakter a smer, či vektor prúdi z alebo do štátu, veľkosť šípky nepredstavuje jeho silu.



Obr. 32: Smerovanie vetra medzi krajinami.

Výslednú silu vetra, zrátanú ako veľkosť priemerného vetra $\bar{u}$, ktorú použijeme do koeficientov β_{ij} uvádzame v Tabuľke 19 v Prílohe.

Na aproximáciu koeficientov β_{ij} sme ďalej potrebovali poznať rozlohy jednotlivých štátov v Európe. Dáta sme našli na stránke [13] a uvádzame ich v Tabuľke 16. V Nórsku sme pre zjednodušenie nezobrali do úvahy rozlohu ostrovu Svalbard, ktorý je však z veľkej časti pokrytý ľadom a divokou prírodou a žije tam len okolo 2 600 ľudí, teda nie je tu veľká produkcia CO_2 .

	Štát	Rozloha R_i		Štát	Rozloha R_i
1	Albánsko	28 748	22	Lichtenštajnsko	160
2	Andorra	468	23	Litva	65 300
3	Rakúsko	83 871	24	Luxembursko	2 586
4	Bielorusko	207 600	25	Macedónsko	25 713
5	Belgicko	30 528	26	Malta	316
6	Bosna a Hercegovina	51 197	27	Moldava	33 851
7	Bulharsko	110 879	28	Čierna Hora	13 812
8	Chorvátsko	56 594	29	Holandsko	41 543
9	Cyprus	9 251	30	Nórsko	323 802
10	Česko	78 867	31	Poľsko	312 685
11	Dánsko	43 094	32	Portugalsko	92 090
12	Estónsko	45 228	33	Rumunsko	238 391
13	Fínsko	338 145	34	Rusko	17 098 242
14	Francúzsko	551 500	35	Srbsko	88 361
15	Nemecko	357 022	36	Slovensko	49 035
16	Grécko	131 957	37	Slovinsko	20 273
17	Maďarsko	93 028	38	Španielsko	505 370
18	Island	103 000	39	Švédsko	450 295
19	Írsko	70 273	40	Švajčiarsko	41 277
20	Taliansko	301 340	41	Turecko	783 562
21	Lotyšsko	64 589	42	Ukrajina	603 550
			43	Veľká Británia	243 610

Tabuľka 16: Rozloha štátov Európy v km². Rozloha Nórska je uvedená bez Svalbardu.

Posledné údaje, ktoré sú potrebné na odhadnutie koeficientov β_{ij} , sú údaje o leteckých dĺžkach hraníc medzi štátmi, ktoré kvôli rozsahu uvádzame v Prílohe v Tabuľke 20. Výsledné koeficienty β_{ij} , vypočítané podľa (3.6), uvádzame v Prílohe v Tabuľke 21.

3.1.5 Efekt vody

V pôvodnom modeli v článku [18, str. 11] bol koeficient miery odčerpávania CO₂ vplyvom morí a oceánov α odhadnutý na 0,016 za rok, teda $1,83 \times 10^{-6}$ za hodinu. V našom modeli chceme vziať do úvahy, či sa daná krajina nachádza pri mori a ak áno, či fúka smerom od alebo do mora. Na Obrázku 33 sú šípkami zakreslené smery vetra medzi vodou a pevninou, ktoré sme získali rovnakým postupom ako pri interakciách medzi krajinami.

Opäť ako pri interakciách majú smer a veľkosť šípiek iba informatívny charakter.



Obr. 33: Smerovanie vetra na pobreží.

Podľa [22] sa ročne na celom svete odčerpá vplyvom vody spolu 2 gigatony CO_2 . Celková vodná plocha na Zemi predstavuje $361\,000\,000\text{ km}^2$. To znamená, že na jeden km^2 sa ročne odčerpá $\frac{2 \cdot 10^9}{361 \cdot 10^6} = \frac{2 \cdot 10^3}{361} = 5,54$ tony CO_2 . Zvyšok rovníc máme v jednotkách hodín, premeníme toto číslo na $6,32 \times 10^{-4}$ tona/ $(\text{km}^2 \text{ hod})$. Keďže CO_2 zo vzduchu neodčerpáva iba tenká vrstva vody na povrchu, ale celý objem, pre potreby aproximácie koeficientu α_i budeme brať do úvahy jednotkovú hĺbku a vznikne nám tak číslo $6,32 \times 10^{-4}$ tona/ $(\text{km}^3 \text{ hod})$. V prípade, že fúka z krajiny do mora, bude voda odčerpávať časť z koncentrácie v i -tom štáte $X_i(t)$. V prípade, že fúka opačne budeme predpokladať, že voda nemá na koncentráciu v i -tom štáte vplyv. To znamená, že predpokladáme, že z vody nebude do Európy prifúkavať žiadne nové CO_2 a výsledky z modelu budú zachytávať pohyb CO_2 , ktoré vzniklo na území Európy.

Ešte zohľadníme, aká dĺžka hraníc štátu leží pri mori – výsledné číslo pre násobíme pomerom dĺžky pobrežia ku celkovej dĺžke všetkých hraníc danej krajiny. Výsledný koeficient α_i sa bude rovnáť

$$\alpha_i = \begin{cases} \xi_i \cdot \frac{6,32 \times 10^{-4} \left[\frac{\text{tona}}{\text{km}^3 \text{ hod}} \right]}{X_i(t) \left[\frac{\text{tona}}{\text{km}^3} \right]} \cdot \frac{d_{im}}{d_i} & \xi_i > 0, \\ 0 & \xi_i < 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

kde d_{im} predstavuje dĺžku hranice i -teho štátu s morom v km, d_i je celková dĺžka hraníc štátu i v km a premenná ξ_i nadobúda hodnotu +1, ak vietor smeruje do mora, hodnotu -1, ak vietor smeruje do štátu i a hodnotu 0, ak daná krajina nemá more. Po dosadení do rovnice (3.3) vypadne koncentrácia $X_i(t)$ pre $\xi_i > 0$:

$$-\alpha_i X_i(t) = -\xi_i \cdot \frac{6,32 \times 10^{-4}}{X_i(t)} \cdot \frac{d_{im}}{d_i} \cdot X_i(t) = -\xi_i \cdot 6,32 \times 10^{-4} \cdot \frac{d_{im}}{d_i}. \quad (3.8)$$

Na stránke [13] sme našli údaje o dĺžkach hraníc jednotlivých štátov a uvádzame ich spolu s ďalšími parametrami vstupujúcimi do koeficientu α_i v Tabuľke 17.

	Štát	d_{im}	d_i	Pomer $\frac{d_{im}}{d_i}$	ξ	Koeficient $\alpha_i X_i(t)$
1	Albánsko	362	1 053	0,344	1	0,000217269
2	Andorra	0	118	0	0	0
3	Rakúsko	0	2 524	0	0	0
4	Bielorusko	0	3 642	0	0	0
5	Belgicko	67	1 364	0,049	-1	0
6	Bosna a Hercegovina	20	1 563	0,013	1	0,000008087
7	Bulharsko	354	2 160	0,164	1	0,000103578
8	Chorvátsko	5 835	8 053	0,725	1	0,000457931
9	Cyprus	648	648	1	1	0,000632000
10	Česko	0	2 143	0	0	0
11	Dánsko	7 314	7 454	0,981	1	0,000620130
12	Estónsko	3 794	4 451	0,852	1	0,000538712
13	Fínsko	1 250	3 813	0,328	-1	0
14	Francúzsko	3 427	6 172	0,555	1	0,000350918
15	Nemecko	2 389	6 103	0,391	1	0,000247394
16	Grécko	13 676	14 786	0,925	1	0,000584555
17	Maďarsko	0	2 106	0	0	0
18	Island	4 970	4 970	1	1	0,000632000
19	Írsko	1 448	1 891	0,766	1	0,000483943
20	Taliano	7 600	9 396	0,809	1	0,000511196
21	Lotyšsko	498	1 868	0,267	1	0,000168488
22	Lichtenštajnsko	0	75	0	0	0
23	Litva	90	1 639	0,055	-1	0
24	Luxembursko	0	327	0	0	0
25	Macedónsko	0	838	0	0	0
26	Malta	197	197	1	1	0,000632000
27	Moldava	0	1 885	0	0	0
28	Čierna hora	294	955	0,307	1	0,000194334
29	Holandsko	451	1 504	0,300	-1	0
30	Nórsko	25 148	27 714	0,907	1	0,000573484
31	Polsko	440	3 511	0,125	1	0,000079200
32	Portugalsko	1 793	3 017	0,594	1	0,000375597
33	Rumunsko	225	3 069	0,073	1	0,000046334
34	Rusko	37 653	60 061	0,627	1	0,000396209
35	Srbsko	0	2 304	0	0	0
36	Slovensko	0	1 611	0	0	0
37	Slovinsko	47	1 258	0,037	1	0,000023419
38	Španielsko	4 964	6 897	0,720	1	0,000454871
39	Švédsko	3 218	5 429	0,593	1	0,000374613
40	Švajčiarsko	0	1 770	0	0	0
41	Turecko	7 200	10 016	0,719	-1	0
42	Ukrajina	2 782	8 400	0,331	1	0,000209312
43	Veľká Británia	12 429	12 872	0,966	1	0,000610249

Tabuľka 17: Údaje o dĺžke pobrežia, dĺžke hraníc a výsledné koeficienty α_i uvedené v [1/hod].

3.2 Numerické experimenty a výsledky

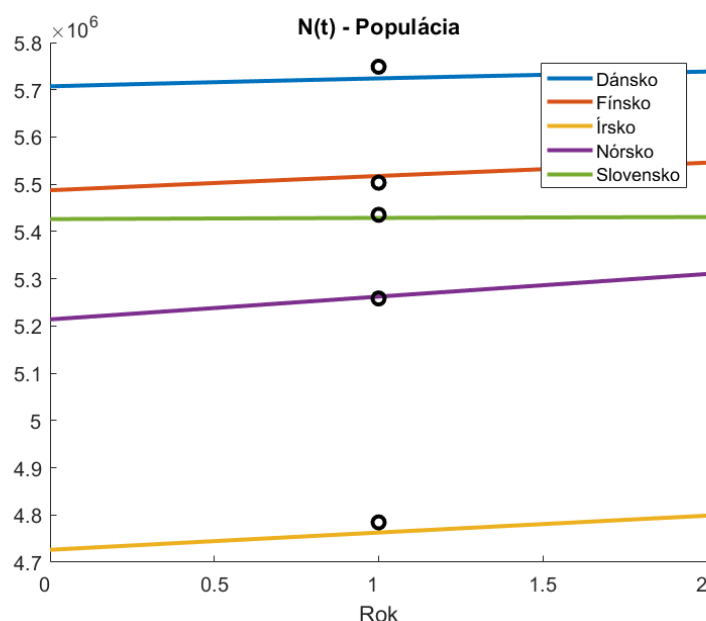
V tejto kapitole sa budeme venovať výsledkom z modelu (3.3). Porovnáme dva scenáre: prvý popisuje situáciu, kedy nefúka žiaden vietor, to znamená, že nemáme interakcie medzi štátmi a druhý scenár je už po zapojení interakcií do modelu. Naším cieľom je zistiť, aký veľký vplyv majú interakcie na jednotlivé koncentrácie CO₂ v krajinách. Na numerické riešenie modelu sme použili zabudovanú Matlabovskú funkciu `ode45`.

Pre lepšiu prehľadnosť ešte uvádzame zoznam všetkých parametrov v Tabuľke 18. V prípade, že sme daný parameter aproximovali pre každú krajinu zvlášť, uvádzame celý rozsah.

Parameter	Odhad z článku [19]	V modeli	Jednotky
Q_0	$5 \cdot (365 \cdot 24)^{-1}$	$5 \cdot (365 \cdot 24)^{-1}$	[ppm/hod]
λ	$0,576 \times 10^{-3} \cdot (365 \cdot 24)^{-1} = 6,58 \times 10^{-8}$	$[4 \times 10^{-11}; 1,94 \times 10^{-6}]$	[ppm/(človek hod)]
α	$0,016 \cdot (365 \cdot 24)^{-1} = 1,83 \times 10^{-6}$	$[0; 6,32 \times 10^{-4}]$	[(hod) ⁻¹]
ω	$4,8 \times 10^{-9} \cdot (365 \cdot 24)^{-1} = 5,48 \times 10^{-13}$	$5,48 \times 10^{-13}$	[(tona hod) ⁻¹]
s	$0,032 \cdot (365 \cdot 24)^{-1} = 3,653 \times 10^{-6}$	$[-1,47; 2,37] \times 10^{-6}$	[(hod) ⁻¹]
L	10 000 000 000	[122 000; 467 880 000]	[človek]
u	$0,013 \cdot (365 \cdot 24)^{-1} = 1,48 \times 10^{-6}$	$2,97 \times 10^{-6}$	[(hod) ⁻¹]
M	750 000 000 000	[173,44; 85 523 000 000]	[tona]
θ	$0,000001 \cdot (365 \cdot 24)^{-1} = 1,14 \times 10^{-10}$	$1,14 \times 10^{-10}$	[(ppm hod) ⁻¹]
π	0,00004	0,00004	[človek/tona]
ϕ	$0,71 \times 10^{-6} \cdot (365 \cdot 24)^{-1} = 8,11 \times 10^{-11}$	$4,0525 \times 10^{-12}$	[(človek hod) ⁻¹]
γ	-	0,25	[tona/ppm]

Tabuľka 18: Hodnoty parametrov v modeli.

Parametre z pôvodného článku sme ešte trochu prispôbili, tak aby model čo najlepšie fitoval reálne dáta o populácii v roku 2017. Prispôbili sme dokopy 3 parametre: u , ϕ a γ . Keďže v Európe je podľa [10] rastúci trend v zalesnení, chceli sme aby to odzrkadľoval aj náš model, preto sme mieru rastu lesnej biomasy u zdvojnásobili oproti údajom z článku [19] a taktiež sme znížili mieru deforestácie ϕ na $4,0525 \times 10^{-12}$. Parameter γ sme nastavili podľa najlepšie vyhovujúcich veľkostí populácie. Výsledné funkcie $N(t)$ z modelu pre vybranú množinu krajín sme zobrazili na Obrázku 34, pričom čiernou kružnicou je naznačená reálna veľkosť populácie v roku 2017.



Obr. 34: Príklad fitu odhadnutých populácií.

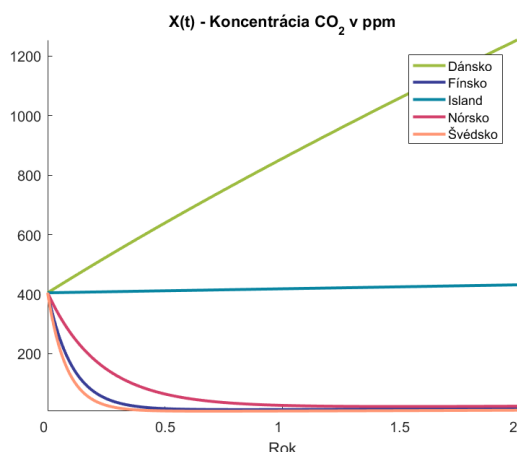
3.2.1 Scenár bez interakcií medzi štátmi

Ako prvé sme spočítali výsledky pre model bez interakcií medzi štátmi, teda v sústave rovníc 3.3 položíme $\beta_{ij} = 0$ pre $i, j = 1, \dots, 43, i \neq j$.

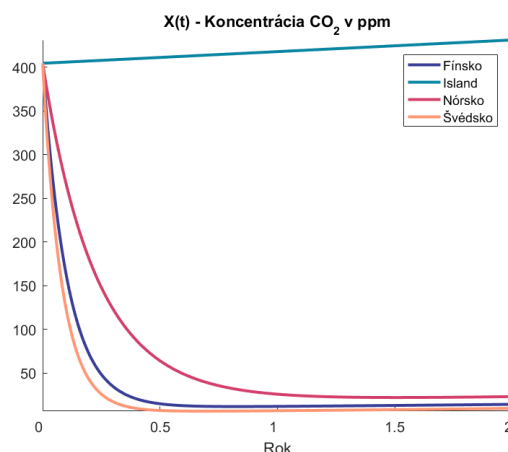
Výsledky sme rozdelili do 5 podkapitol podľa prirodzeného regionálneho členenia Európy na východnú, severnú, západnú, strednú a južnú.

Severná Európa

Do časti severnej Európy sme zaradili všetky škandinávské krajiny – Dánsko (11), Fínsko (13), Island (18), Nórsko (30) a Švédsko (39). Keďže tieto krajiny sú charakteristické malou hustotou obyvateľstva a veľkými lesnými plochami (s výnimkou Dánska, ktoré je rozlohou najmenšie), neočakávame príliš veľké koncentrácie CO₂. Tieto domnienky sa potvrdia aj vo výsledkoch na Obrázku 35, kde vidíme, že koncentrácia CO₂ v Nórsku, Švédsku a Fínsku rýchlo klesá. Naopak Dánsko je silným producentom emisií a je tu omnoho menší efekt lesnej biomasy, preto je tu koncentrácia CO₂ výrazne najvyššia spomedzi všetkých severných krajín.



(a) Všetky severné krajiny.

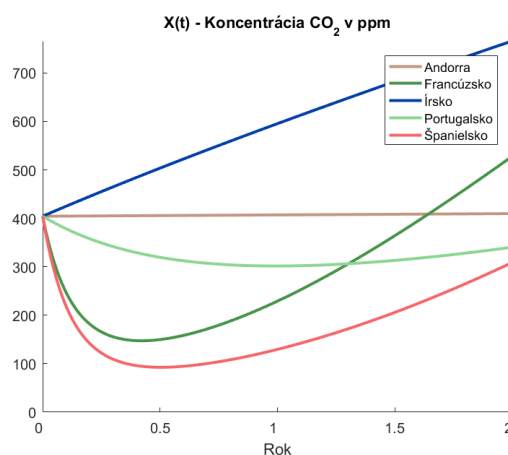
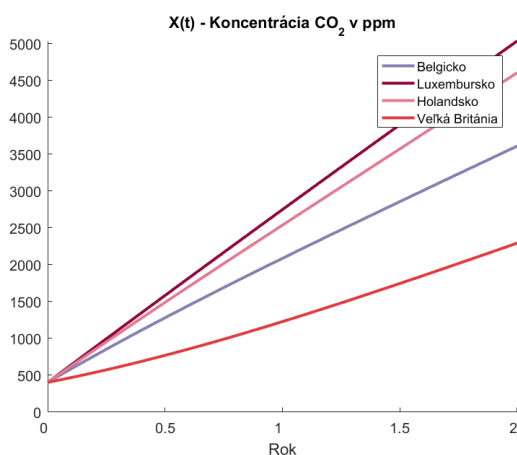


(b) Po vylúčení Dánska.

Obr. 35: Porovnanie koncentrácií CO₂ nad štátmi severnej Európy v priebehu 2 rokov.

Západná Európa

Sem sme zaradili krajiny Andorra (2), Belgicko (5), Francúzsko (14), Írsko (19), Luxembursko (24), Holandsko (29), Portugalsko (32), Španielsko (38) a Veľkú Britániu (43). Krajiny západu Belgicko, Luxembursko, Holandsko a Veľká Británia, napriek ich ekonomickej vyspelosti, patria na popredné priečky znečisťujúcich krajín v porovnaní s ostatnými časťami Európy.



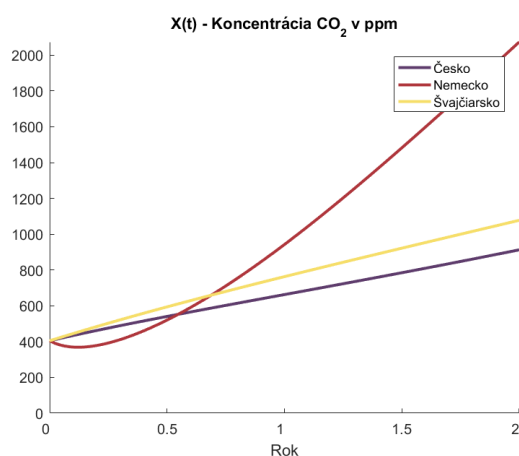
(a) Západné krajiny s vyššou produkciou CO₂. (b) Západné krajiny s menšou produkciou CO₂.

Obr. 36: Porovnanie koncentrácií CO₂ nad štátmi západnej Európy v priebehu 2 rokov.

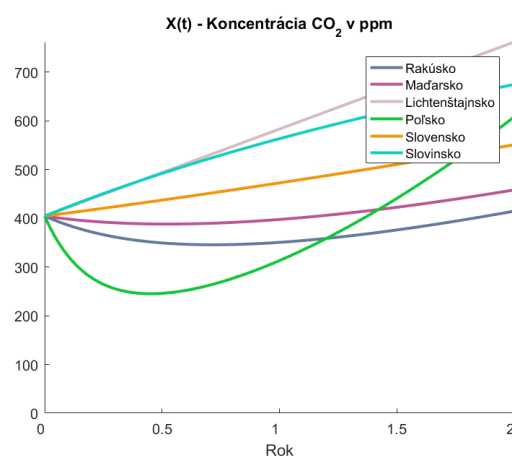
Stredná Európa

Do strednej Európy sme zaradili krajiny Rakúsko (3), Česko (10), Nemecko (15), Maďarsko (17), Lichtenštajnsko (22), Poľsko (31), Slovensko (36), Slovinsko (37) a Švajčiarsko (40).

Ako si môžeme všimnúť na Obrázku 37, výrazne v popredí v tvorbe emisií je Nemecko.



(a) Centrálné krajiny časť 1.

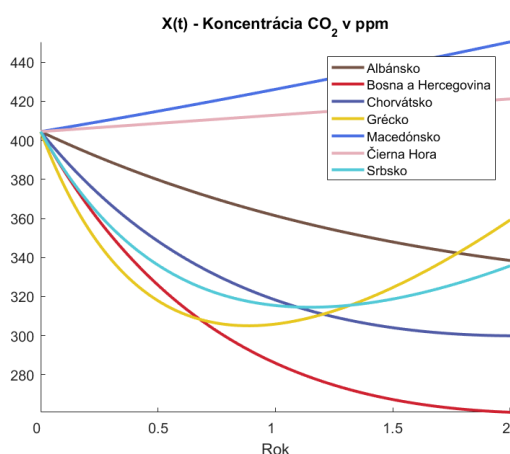


(b) Centrálné krajiny časť 2.

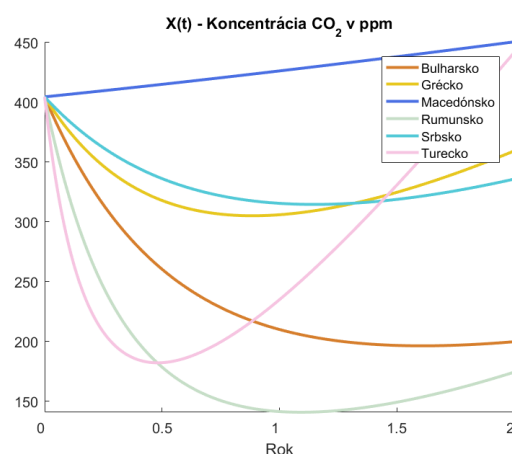
Obr. 37: Porovnanie koncentrácií CO₂ nad štátmi strednej Európy v priebehu 2 rokov.

Južná Európa

Južná časť Európy predstavuje najpočetnejšiu skupinu, zaradili sme do nej spolu nasledujúcich 12 štátov: Albánsko (1), Bosna a Hercegovina (6), Bulharsko (7), Chorvátsko (8), Cyprus (9), Grécko (16), Taliansko (20), Macedónsko (25), Čierna Hora (28), Rumunsko (33), Srbsko (35) a Turecko (41).



(a) Južné krajiny časť 1.

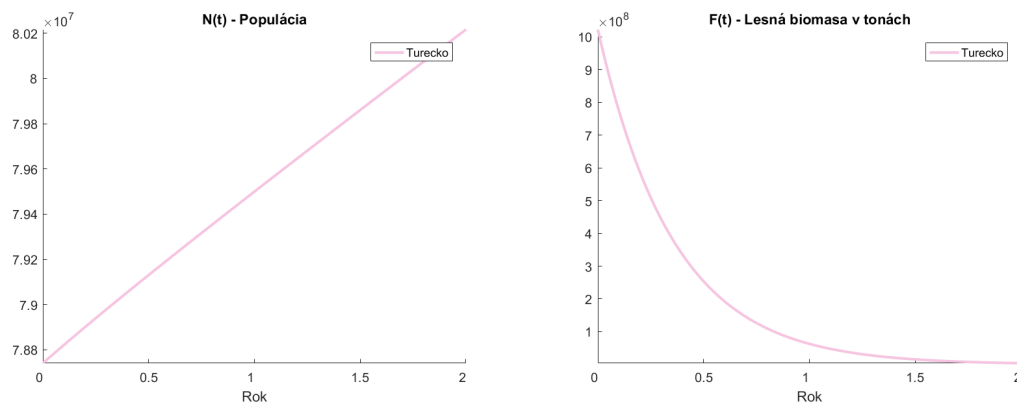


(b) Južné krajiny časť 2.

Obr. 38: Porovnanie koncentrácií CO₂ nad štátmi južnej Európy v priebehu 2 rokov.

Zaujímavá zmenu môžeme pozorovať na Obrázku 38 v Turecku – najprv tu koncentrácia výrazne klesá a následne začne prudko rásť. Ako si môžeme všimnúť na Obrázku

39 je to spôsobené výrazným poklesom lesnej biomasy, ktorá už nebude stíhať odčerpávať CO_2 .

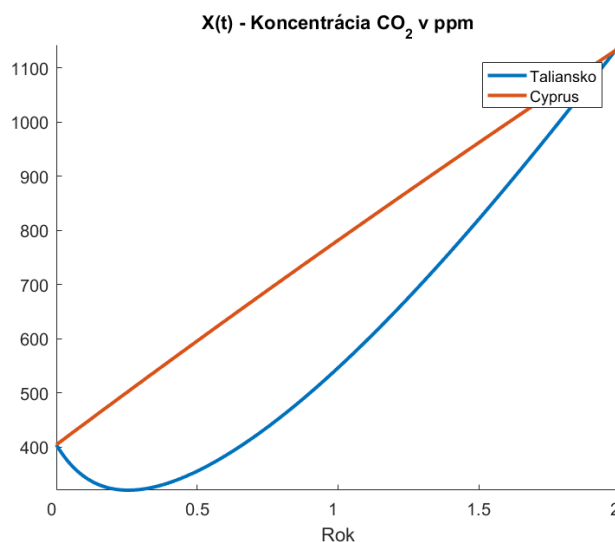


(a) Turecko: Pribeh zmeny populácie.

(b) Turecko: Lesná biomasa.

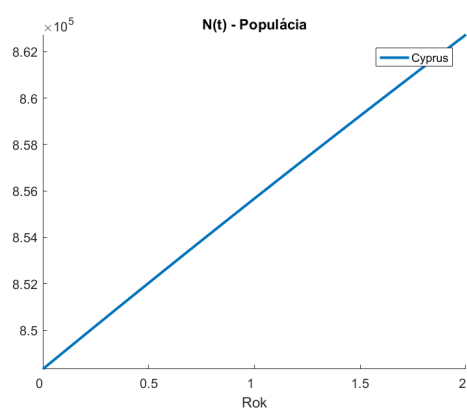
Obr. 39: Zobrazené funkcie populácie a lesnej biomasy v Turecku v priebehu 2 rokov.

Chýbajúce dve krajiny v južnej Európe na Obrázku 38 sú Taliansko a Cyprus. Po dvoch rokoch vyšla koncentrácia v týchto dvoch krajinách takmer identická, ako môžeme vidieť na Obrázku 40. Je to však z dosť rozdielnych dôvodov.

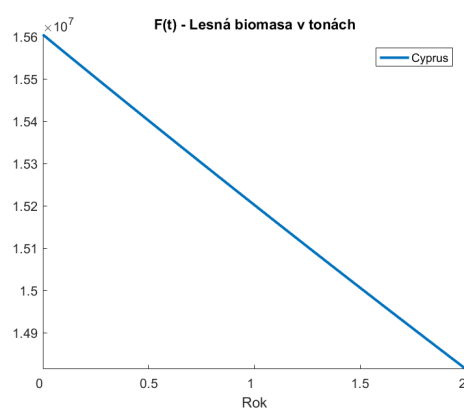


Obr. 40: Porovnanie koncentrácií CO_2 nad Talianskom a Cyprom v priebehu 2 rokov.

Cyprus je rozlohou malá krajina s malou plochou lesnej biomasy, ktorá podľa modelu navyše poklesne ako môžeme vidieť na Obrázku 41, čo ešte umocní efekt emisií, nakoľko efekt fotosyntézy sa oslabí. Populácia sa v priebehu dvoch rokov jemne zvýši.



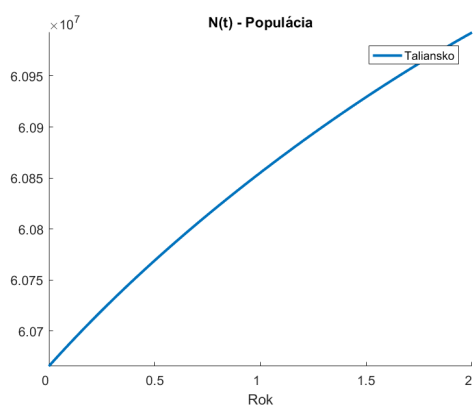
(a) Cyprus: Priebeh zmeny populácie.



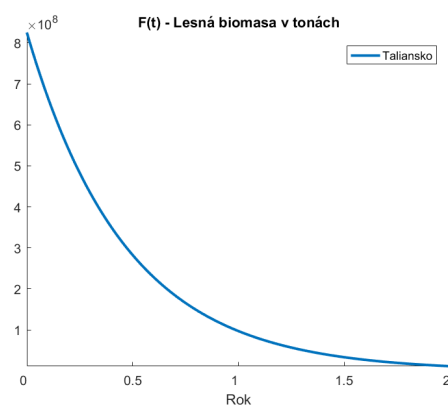
(b) Cyprus: Lesná biomasa.

Obr. 41: Zobrazené funkcie populácie a lesnej biomasy na Cypre v priebehu 2 rokov.

Miera nárastu CO_2 vplyvom ľudskej populácie je na Cypre $\lambda_9 = 56,54 \times 10^{-9}$. Na porovnanie v Taliansku je iba $\lambda_{20} = 1,38 \times 10^{-9}$, napriek tomu sa koncentrácie týchto dvoch krajín po čase vyrovnajú. V Taliansku zapríčiňuje nárast koncentrácie CO_2 postupné vymiznutie lesnej biomasy, čo môžeme pozorovať na Obrázku 42. Je to zapríčinené rádovo väčšou populáciou v Taliansku ako na Cypre a tým pádom člen $-\phi N_{20}(t)F_{20}(t)$ stiahne lesnú biomasu postupne k 0 pre vysoké hodnoty populácie. Ako možnú modifikáciu modelu teda navrhujeme rozdeliť štáty do viacerých pásiem podľa veľkosti populácií a parameter ϕ nastaviť pre každú skupinu zvlášť, aby sa presne ako v tomto prípade nestalo, že vyhynie celý les.



(a) Taliansko: Priebeh zmeny populácie.

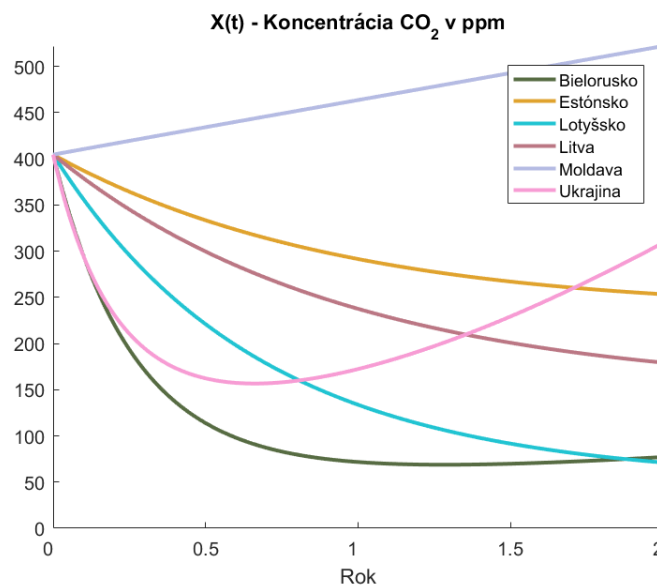


(b) Taliansko: Lesná biomasa.

Obr. 42: Zobrazené funkcie populácie a lesnej biomasy v Taliansku v priebehu 2 rokov.

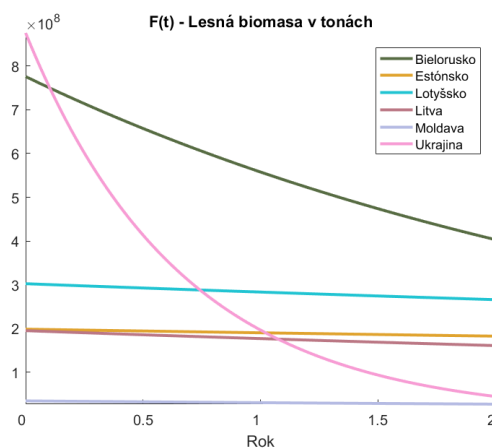
Východná Európa

Ako poslednú skupinu uvádzame 7 krajín vo východnej časti Európy: Bielorusko (4), Estónsko (12), Lotyšsko (21), Litva (23), Moldava (27), Rusko (34) a Ukrajina (42). Keďže do Európy spadá len malá časť Ruska a nemáme v modeli zakomponované ani dáta o všetkých jeho hraniciach, z výsledkov ho vylúčime, nakoľko môžu byť výrazne skreslené. Na Obrázku 43 vidíme výsledné hodnoty koncentrácie.



Obr. 43: Porovnanie koncentrácií CO₂ nad štátmi východnej Európy v priebehu 2 rokov.

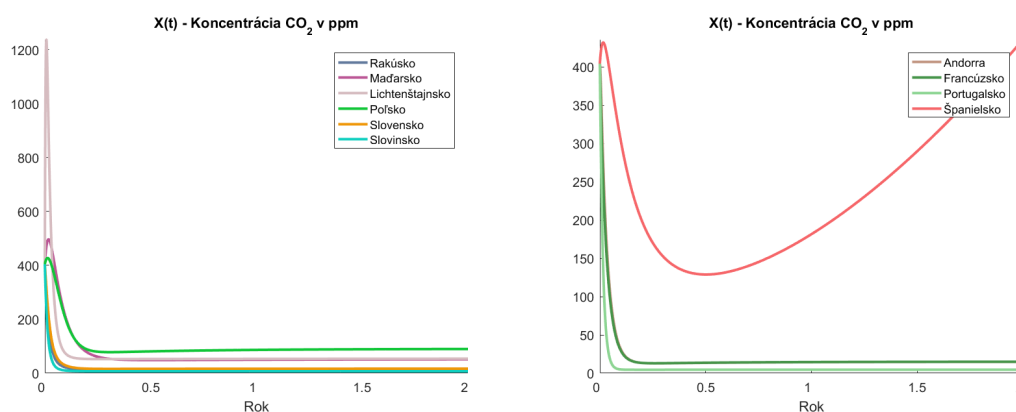
Ako si môžeme všimnúť na Obrázku 43 výrazný nárast v koncentrácii CO₂ začal v Ukrajine na úrovni $\frac{1}{2}$ roka. Je to spôsobené masívnym úhynom lesnej biomasy vid. Obrázok 44, ktorá dané CO₂ už prestane stíhať odčerpávať a CO₂ teda prirodzene narastie.



Obr. 44: Vývin lesnej biomasy v štátoch východnej Európy v priebehu 2 rokov.

3.2.2 Scenár s interakciami medzi štátmi

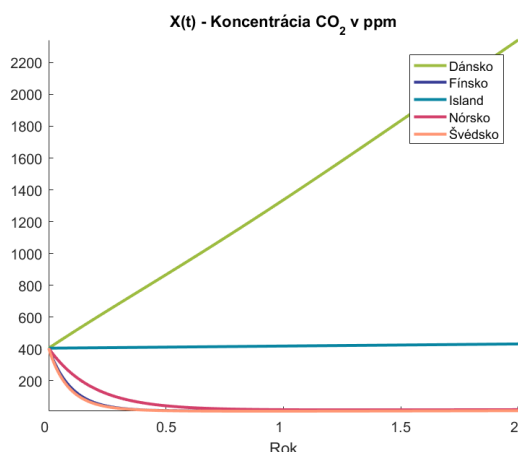
V ďalšom kroku sme do modelu zapojili interakciu β_{ij} , ktorých hodnoty sa nachádzajú v Tabuľke 21. Na Obrázku 45 vidíme príklad modelu s interakciami v strednej Európe. Ako si môžeme všimnúť, interakcie majú až prehnane veľký vplyv v modeli oproti ostatným parametrom, nakoľko v Lichtenštajnsku sa za malú chvíľu nahromadí obrovské množstvo koncentrácie z ostatných krajín. Takáto situácia nastáva aj pri ostatných častiach Európy, preto sme sa rozhodli výsledný efekt β_{ij} ešte zjemniť a prenásobiť ho $\frac{1}{10}$.



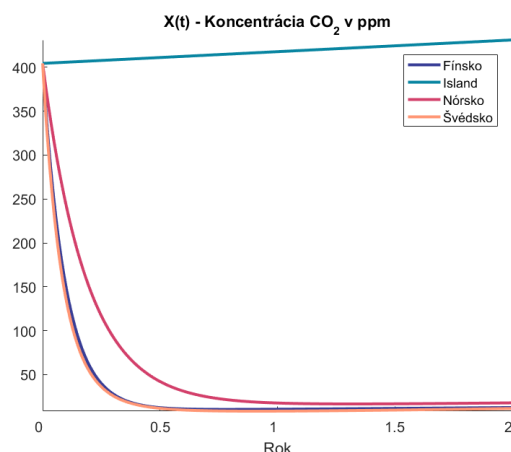
Obr. 45: Ukážka silných interakcií medzi krajinami.

Severná Európa

V tomto prípade sa najväčší efekt prejaví na Dánsku, viď. Obrázok 46a, nakoľko už predtým v modeli bez interakcií malo veľkú mieru emisií λ_{11} , navyše teraz doň fúka množstvo emisií aj z Nemecka, čo sa javí ako jeden z najväčších producentov CO₂ v strednej Európe viď. Obrázok 37. Zvyšné krajiny sa príliš nezmenia oproti verzii bez interakcií, nakoľko vietor tu prúdi v cykle z Nórska do Švédska, zo Švédska do Fínska a z Fínska ide časť do Ruska a časť naspäť do Nórska severnou hranicou. Island ostáva úplne rovnaký, nakoľko je to ostrov s nulovými interakciami so susedmi.



(a) Všetky severné krajiny.

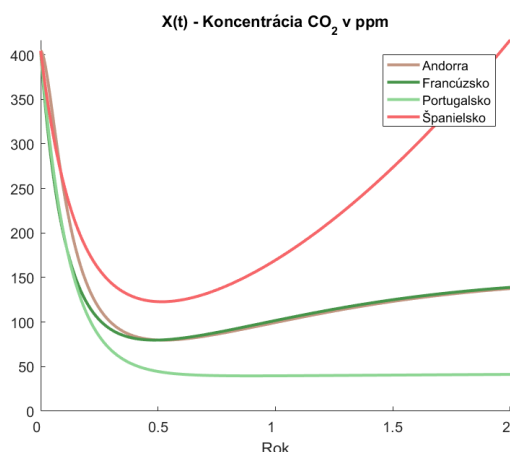


(b) Po vylúčení Dánska.

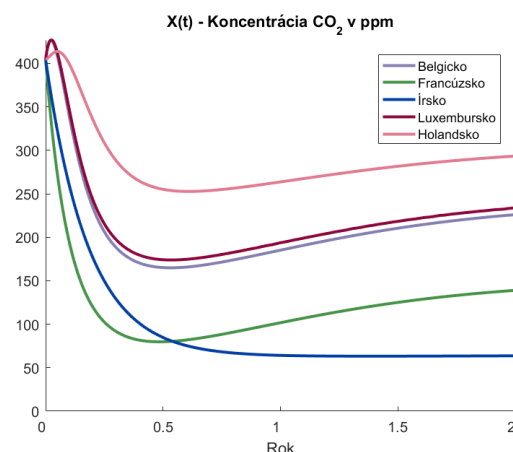
Obr. 46: Porovnanie koncentrácií CO₂ nad severnou Európou v priebehu 2 rokov v modeli s interakciami.

Západná Európa

V západnej časti Európy je zaujímavé pozorovať, že akonáhle sa do modelu zapojí vietor, nadmernú produkciu z krajín Holandsko, Belgicko a Luxembursko, ktorú sme mohli pozorovať na Obrázku 36, prevažne odfúkne smerom do Nemecka, takže vo výsledku bude v týchto krajinách nižšia koncentrácia ako na počiatku vid. Obrázok 47. V prípade Andorry, Francúzska a Portugalska vietor smeruje von z týchto krajín a keďže v modeli nám žiadne nové CO₂ neprichádza od mora, postupne jeho koncentrácia v týchto krajinách klesá. Ako vidno na Obrázku 47 v Španielsku začne koncentrácia po čase znovu stúpať. Je to z rovnakého dôvodu ako tomu bolo v predošlej podkapitole v Taliansku – biomasa tu vymizne a tým pádom sa stratí efekt odčerpávania CO₂ vplyvom fotosyntézy.



(a) Západné krajiny časť 1.

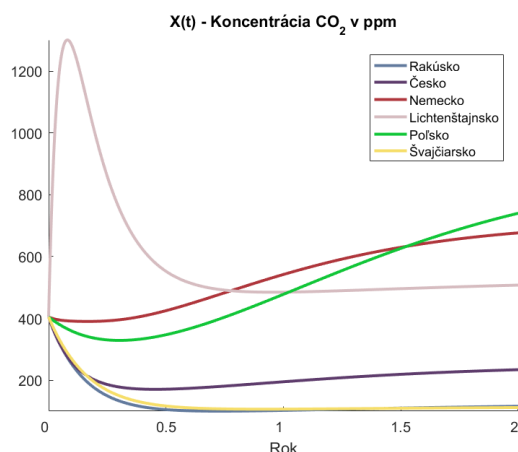


(b) Západné krajiny časť 2.

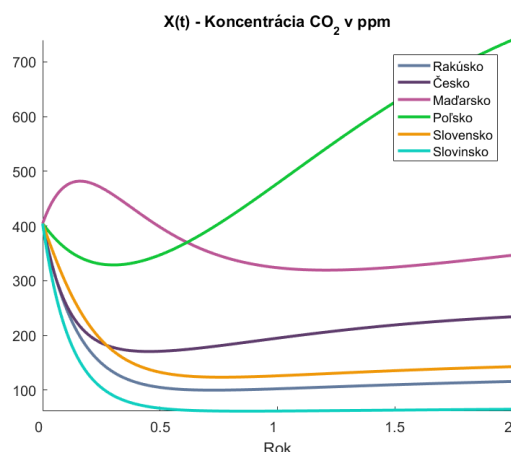
Obr. 47: Porovnanie koncentrácií CO_2 nad západnou Európou v priebehu 2 rokov v modeli s interakciami.

Stredná Európa

Na Obrázku 48 si môžeme všimnúť, že najväčší výkyv spomedzi krajín strednej Európy zaznamenalo Lichtenštajnsko. Ako je vidno na Obrázku 32 väčšinou sa vietor pohybuje smerom na východ, to znamená, že do Lichtenštajnska prúdi CO_2 z Francúzska cez Švajčiarsko. Ako sme vysvetlili vyššie, koncentrácia CO_2 vo Francúzsku postupne klesá, keďže v modeli máme predpoklad, že od mora nám neprúdi žiadne nové CO_2 . Z tohto dôvodu nám postupne zdroj CO_2 vo Francúzsku vyhasne, čo je pekne vidieť aj na prípade Lichtenštajnska – spočiatku zaznamenáme veľký nárast v koncentrácii a potom nasleduje pád, lebo vo Francúzsku sa už minie CO_2 a nemá čo nové prichádzať. V Lichtenštajnsku je tento efekt ešte umocnený tým, že je to rozlohou veľmi malá krajina s malým množstvom lesnej biomasy. Vo východnej časti strednej Európy plynie väčšina CO_2 do Poľska vid. Obrázok 48.



(a) Centrálné krajiny časť 1.

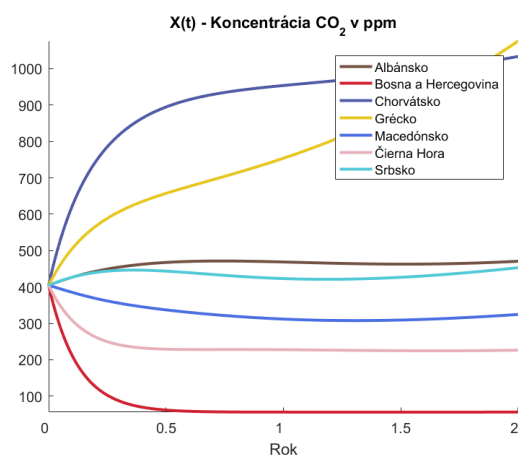


(b) Centrálné krajiny časť 2.

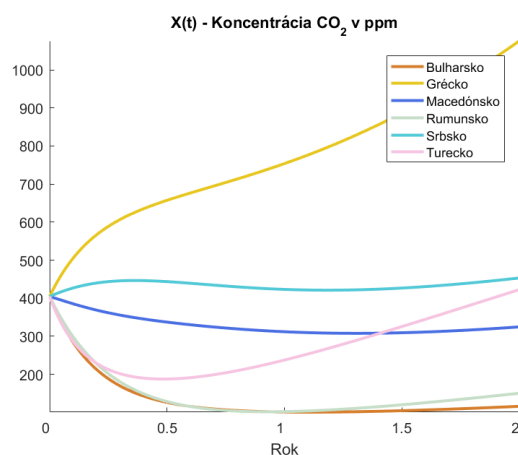
Obr. 48: Porovnanie koncentrácií CO_2 nad strednou Európou v priebehu 2 rokov v modeli s interakciami.

Južná Európa

Najväčší rozdiel v južnej Európe po zapojení interakcií do modelu pozorujeme v Grécku a Chorvátsku na Obrázku 49. Do Chorvátska prúdi nové CO_2 prevažne z krajín strednej Európy a do Grécka zase z takmer všetkých ostatných južných krajín, čo potvrdzuje aj znížená koncentrácia v Macedónsku, Srbsku, Bosne a Hercegovine, Bulharsku a Rumunsku oproti situácii na Obrázku 38.



(a) Južné krajiny časť 1.

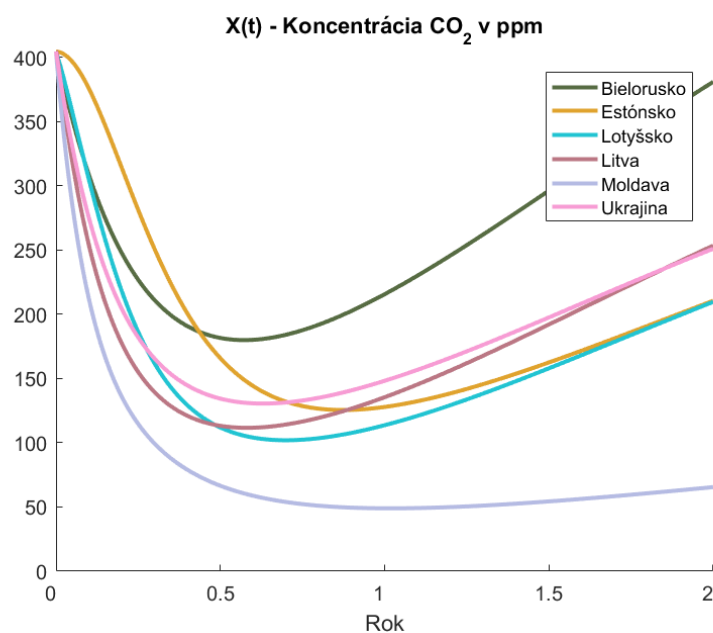


(b) Južné krajiny časť 2.

Obr. 49: Porovnanie koncentrácií CO_2 nad južnou Európou v priebehu 2 rokov v modeli s interakciami.

Východná Európa

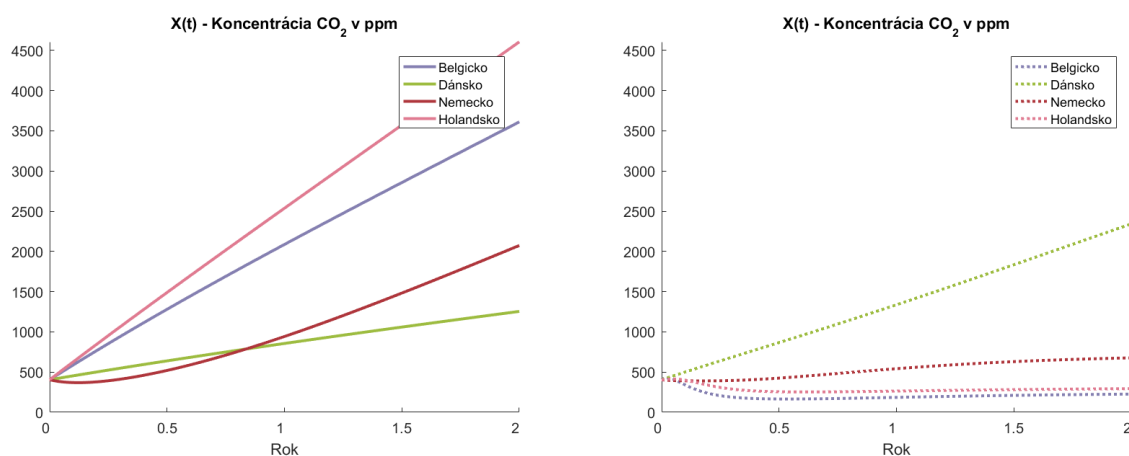
Vo východnej Európe koncentrácie výrazne klesajú z dôvodu, že CO_2 prevažne odteká do Ruska viď. Obrázok 50.



Obr. 50: Porovnanie koncentrácií CO₂ nad východnou Európou v priebehu 2 rokov v modeli s interakciami.

3.2.3 Porovnanie modelov s interakciami a bez interakcií

V tejto krátkej podkapitole sme vybrali štáty v Európe s výraznou produkciou CO₂ a pozreli sme sa na výsledky z modelu s interakciami a bez interakcií. Na Obrázku 51 vidíme, že najväčšími producentmi sú Belgicko a Holandsko, pričom po pridaní interakcií do modelu väčšina ich koncentrácie CO₂ odtečie do okolitých krajín, takže vo výsledku sa ich koncentrácia bude znižovať.



(a) Koncentrácia CO₂ v modeli bez interakcií. (b) Koncentrácia CO₂ v modeli s interakciami.

Obr. 51: Porovnanie koncentrácií CO₂ z dvoch modelov.

Záver

V práci sme sa venovali trom prístupom k modelom koncentrácie oxidu uhličitého v ovzduší nad Európou. Zaujímalo nás najmä, ktoré štáty ho najviac znečisťujú a ako sa celkové množstvo oxidu uhličitého hýbe vplyvom vetra.

V prvej kapitole sme sa venovali predikciám množstva oxidu uhličitého na základe voľne dostupných dát z [7] a [13] o emisiách v jednotlivých krajinách Európy. Na predikcie sme používali časové rady popísané napr. v [24]. Tieto predikcie sme neskôr použili v druhej kapitole.

V ďalšej kapitole sme predstavili priestorový model prúdenia oxidu uhličitého popísaný advekčno-difúznou rovnicou so zdrojovým členom. V prvej časti kapitoly sme, opierajúc sa o [26], odvodili 3-rozmernú numerickú schému na riešenie takéhoto typu rovníc. Následne sme sa venovali vytvoreniu priestorovej mriežky Európy a odhadom efektov lesa, vody a emisií, ktoré vstupujú do zdrojového člena rovnice. Ďalej sme sa vysporiadali s úpravou dát vetra a transformáciou medzi karteziánskou a sférickou súradnicovou sústavou. V poslednej časti kapitoly sme uviedli ukážky výstupov a možné problémy pri výpočte, s ktorými sme sa pri tvorbe modelu potýkali. Najväčším problémom bola výpočtová zložitosť a nestabilita riešenia, vplyvom malého difúzneho koeficientu, ktorý je však pre oxid uhličitý presne daný z jeho vlastností.

V tretej kapitole sme sa venovali modelu založenom na raste ľudskej populácie vychádzajúc z článkov [18] a [19]. Ako prvé sme tento základný model, ktorý popisoval situáciu pre celý svet, rozšírili o regionalitu a odhady parametrov sme vypočítali pre jednotlivé štáty Európy zvlášť na základe dát o populácii, množstve emisií oxidu uhličitého a zalesnenia. Inak sme sa rozhodli pristúpiť aj k efektu vody – odhadli sme ho pomocou reálnych dát vetra z roku 2017 a zohľadnili aj dĺžku pobrežia danej krajiny. Následne sme model ešte obohatili o interakcie medzi jednotlivými štátmi Európy, ktoré sme podobne ako efekt vody, odhadovali na základe reálnych dát vetra. Naším cieľom bolo jednak zistiť, v ktorých krajinách Európy sa vyprodukuje najviac emisií, čo sme mohli vidieť najmä z výsledkov z modelu bez interakcií. Druhou kľúčovou otázkou bolo, ktoré krajiny napriek tomu, že majú veľmi vysokú produkciu emisií, v skutočnosti len odovzdávajú tento oxid uhličitý okolitým krajinám – to znamená, že susedné krajiny sú nimi negatívne ovplyv-

nené. Tento jav sme odsledovali práve v modeli po zapojení interakcií. Ako sme mohli vidieť v časti výsledkov, takýmito krajinami sú najmä Holandsko a Belgicko, kde napriek ich veľkej produkcii oxidu uhličitého, ostáva jeho koncentrácia v týchto dvoch krajinách relatívne nízka – to značí, že veľkú časť z vyprodukovaného oxidu uhličitého odovzdajú svojim susedom.

Do modelu sme zahrnuli predpoklad, že z vody nám do Európy neprúdi žiaden nový oxid uhličitý, takže vo výsledkoch sledujeme pohyb iba CO_2 , ktoré v Európe vzniklo. Model by sa dal ešte v budúcnosti rozšíriť aj o tento oxid uhličitý a viac sa tak priblížiť k realite.

Náročnosť tejto práce spočívala najmä v naštudovaní problematiky modelovania oxidu uhličitého, pochopení numerickej schémy pre advekčno-difúznú rovnicu a v spracovaní dát vetra.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Ali Akbar Eftekhari: A Simple Finite Volume Solver for Matlab, version 2.0, dostupné na internete (1.2.2018): <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/46637-a-simple-finite-volume-solver-for-matlab>
- [2] Arbor Environmental Alliance, dostupné na internete (1.3.2018): <http://www.arborencenvironmentalalliance.com/carbon-tree-facts.asp>
- [3] Crowther, T. W. et al: Mapping tree density at a global scale, Nature, Volume 525 (2015), 201-205
- [4] Earth's CO₂, dostupné na internete (1.2.2018): <https://www.co2.earth/>
- [5] The Engineering ToolBox / Resources, Tools and Basic Information for Engineering and Design of Technical Applications, dostupné na internete (5.5.2018): https://www.engineeringtoolbox.com/international-standard-atmosphere-d_985.html
- [6] Earth: A global map of wind, weather and ocean conditions, dostupné na internete (1.5.2018): <https://earth.nullschool.net/>
- [7] European Environment Agency (EEA), dostupné na internete (14.3.2018): <https://www.eea.europa.eu/>
- [8] Europe ISO Code, Continent Code, & ccTLDs, Country Calling Codes, dostupné na internete (7.1.2017): <https://www.countrycallingcodes.com/iso-country-codes/europe-codes.php>
- [9] Eurostat: Your key to European statistics, dostupné na internete (2.4.2018): <http://ec.europa.eu/eurostat/web/products-datasets/-/tps00001>
- [10] Food and Agriculture Organization of the United Nations (FAO): Global Forest Resources Assessment 2010, Rome, 2010
- [11] Forest Europe Liaison Unit Oslo, the United Nations Economic Commission for Europe (UNECE), Food and Agriculture Organization of the United Nations (FAO):

State of Europe's Forests 2011 - Status and Trends in Sustainable Forest Management in Europe, Forest Europe Liaison Unit Oslo, Norway, 2011

- [12] Hockicko, P., Kúdelčík, J.: Základy Fyziky, Žilinská univerzita, Žilina, 2011
- [13] IndexMundi - Country Facts, dostupné na internete (22.4.2018): <https://www.indexmundi.com/>
- [14] Jenkins, W.,J.: Tracers of Ocean Mixing, Treatise on Geochemistry, Volume 6, (2003), 223-246, dostupné na internete (5.5.2018): <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B0080437516061107>
- [15] Lenntech - Water Treatment and Purification, dostupné na internete (1.4.2018): <https://www.lenntech.com/calculators/ppm/converter-parts-per-million.htm>
- [16] Long, W. E.: Modeling Atmospheric Carbon Dioxide over the United States, SIAM Undergraduate Research Online (SIURO), Volume 6, (2013)
- [17] Massman, W., J.: A review of the molecular diffusivities of H₂O, CO₂, CH₄, CO, O₃, SO₂, NH₃, N₂O, NO and NO₂ in air, O₂ and N₂ near stp, Atmospheric Environment, Volume 32, (1998), 1111-1127
- [18] Misra, A. K., Verma, M.: A mathematical model to study the dynamics of carbon dioxide gas in the atmosphere, Applied Mathematics and Computation, Volume 219 (2013), 8 595 - 8 609, dostupné na internete (1.2.2018): <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0096300313001963>
- [19] Misra, A. K., Verma, M., Venturino, E.: Modeling the control of atmospheric carbon dioxide through reforestation: effect of time delay, Modeling Earth Systems and Environment, Volume 1 (2015), 24 – 40, dostupné na internete (1.2.2018): <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2Fs40808-015-0028-z.pdf>
- [20] Mooney, C.: The world's 3 trillion trees, mapped, The Washington Post, 2015, dostupné na internete (24.2.2018): <https://www.washingtonpost.com/news/energy-environment/wp/2015/09/16/>

the-countries-of-the-world-ranked-by-their-tree-wealth/?utm_term=.b5f32064020e

- [21] National Aeronautics and Space Administration (NASA): Earth Atmosphere Model, dostupné na internete (3.5.2018): <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/atmosmet.html>
- [22] National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA): Earth System Research Laboratory – Serving Society through Science, dostupné na internete (5.5.2018): <https://www.esrl.noaa.gov/research/themes/carbon/>
- [23] Peters, W.: An atmospheric perspective on North American carbon dioxide exchange: CarbonTracker, dostupné na internete (15.1.2018): <http://www.pnas.org/content/104/48/18925.full.pdf>
- [24] Stehlíková, B.: Prednášky a cvičenia z časových radov, zimný semester 2015/2016, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, dostupné na internete (30.4.2018): <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/cr16.html>
- [25] Ševčovič, D.: Parciálne diferenciálne rovnice a ich aplikácie, IRIS s.r.o., Bratislava, Slovensko, 2008
- [26] Versteeg, H. K., Malalasekera, W.: An Introduction to Computational Fluid Dynamics, Pearson Education Limited, Harlow, UK, 2007
- [27] Weisstein, E. W.: Spherical Coordinates, MathWorld–A Wolfram Web Resource, dostupné na internete (9.5.2018): <http://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html>
- [28] Worldometers - real time world statistics, dostupné na internete (23.4.2018): <http://www.worldometers.info/world-population/russia-population/>

Príloha

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43		
1	Albania	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0933	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0657	0	-0.8546	0	0	0	0	0	0	0.0227	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	Andorra	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0407	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.6146	0	0	0	0	0	0	
3	Armenia	0	0	0	0	0	0	0	0.0645	0	0	0	0	-0.4066	0	-1.6249	0	-1.6249	0	4.3605	0	0.1767	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.7883	-1.3050	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	Austria	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.9129	0	-0.8355	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.1154	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0498	0
5	Belgium	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.7534	-3.2810	0	0	0	0	0	-0.9129	0	-1.3255	0	0	0	0	-2.2718	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	Bosnia & Herzegovina	0	0	0	0	0	0	-0.9244	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5256	0	0	0	0	0	0	0	-0.4381	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	Bulgaria	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.1525	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.4636	0	0	0	0	0	0	0	0.4397	0.3173	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.6878	0
8	Chad	0	0	0	0	0.5924	0	0	0	0	0	0	0	0.6330	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.3124	0	0.1390	0	0	0	0	0	0	0	0		
9	Cyprus	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
10	Czech Republic	0	0	-0.0615	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.7399	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	Denmark	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.2117	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.4865	0	0	-0.7193	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
12	Estonia	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	Finland	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.0715	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.6187	0	0	0	0							

Tabuľka 19: Sila priemerného vetra v km/hod.

[illegible]

[illegible]

```

function vystup = ModelPopulacie(t,y)
% PARAMETRE:
Q0 = 5/(365*24); % miera emisii z prirodzenych zdrojov [ppm/hod]
lambda = load('Parametre_hod/lambda.txt'); % [ppm/(clovek hod)]
alfa = load('Parametre_hod/alfal.txt'); % efekt vody [1/hod]
s = load('Parametre_hod/s.txt'); % koeficient rastu ludskej populacie [1/hod]
beta_kladne = load('Parametre_hod/Beta_kladne.txt'); % kladne interakcie [1/hod]
beta_zaporne = load('Parametre_hod/Beta_zaporne.txt'); % zaporne interakcie [1/hod]

omega = (4.8 * 10^(-9))/(365*24); % prirodzena miera odcerpavania vplyvom lesov [(tona hod)^-1]
u = 2*0.013/(365*24); % koeficient rastu lesnej biomasy [1/hod]
phi = (0.71 * 10^(-6))/(365*24)/20; % miera deforestacie [(clovek hod)^-1]
ppi = 0.00004; % koeficient narastu ludskej populacie vplyvom lesa [clovek/tona]
theta = 0.000001/(365*24); % miera zmensovania ludskej populacie vplyvom CO2 [(ppm hod)^-1]
gamma = 0.25; % narast lesnej biomasy vplyvom CO2 [tona/ppm]

ps = 43; % pocet statov
i1 = 1:ps; % index X(t)
i2 = ps+1:2*ps; % index N(t)
i3 = 2*ps+1:3*ps; % index F(t)

% POCIATOCNE PODMIENKY
POC = zeros(3*ps, 1);
POC(i1,1)=404.42; % X(0) [ppm]
POC(i2,1)=load('Parametre_hod/pociatocna_N.txt'); % N(0) [clovek]
POC(i3,1)=load('Parametre_hod/pociatocna_F.txt'); % F(0) [t]

% MAXIMALNE UDRZATELNE KAPACITY
L = 3.25 * POC(i2,1);
M = 75/64 * POC(i3,1);

vystup = [Q0 + lambda.*y(i2) - alfa - (omega.*y(i3)).*y(i1) + (1/10)*beta_kladne*y(i1) + (1/10)*sum(diag(y(i1)))*beta_zaporne,2);
s.*y(i2).*(1 - y(i2)./L) - (theta.*y(i2)).*y(i1) + (ppi.*y(i3)).*(phi.*y(i2));
u.*y(i3).*(1 - y(i3)./M) - (phi.*y(i3)).*y(i2) + (gamma.*y(i1)).*(omega.*y(i3))];
end

```