

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

SHORT RATE MODELY PRIPÚŠŤAJÚCE ZÁPORNÉ
ÚROKOVÉ MIERY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**



**SHORT RATE MODELY PRIPÚŠŤAJÚCE ZÁPORNÉ
ÚROKOVÉ MIERY**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Školiteľ: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Petra Húsková
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Short rate models pripúšťajúce záporné úrokové miery
Short rate models allowing negative interest rates

Anotácia:
Diplomová práca sa zaoberá aktuálnou situáciou - zápornými úrokovými mierami Euriboru. Porovnáva sa jednoduchý Vašíčkov model s dvojfaktorovým, v ktorom jeden faktor má tvar Vašíčkovho procesu, druhý má tvar Cox-Ingersoll-Rossovoho procesu a short rate je ich súčtom. Porovnanie sa týka pravdepodobnostných vlastností short rate, ako aj priebehu výnosových kriviek. Robí sa kalibrácia na reálnych dátach a porovnáva sa fitovanie, ako aj predikcie.

Vedúci: doc. RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Dátum zadania: 25.01.2017

Dátum schválenia: 27.01.2017
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie

Chcela by som sa poďakovať svojej vedúcej diplomovej práce, doc. RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD., za jej ochotu, pomoc a rady pri písaní tejto práce. Rovnako by som chcela poďakovať Bc. Marošovi Molekovi a rodičom za trpezlivosť a podporu nielen pri písaní práce, ale aj počas celého doterajšieho štúdia.

Abstrakt v štátnom jazyku

HÚSKOVÁ, Petra: Short rate modely pripúšťajúce záporné úrokové miery [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2018, 71s.

Naša diplomová práca sa zaoberá short rate modelmi pripúšťajúcimi záporné úrokové miery. V práci sa porovnáva jednofaktorový Vašíčkov model s dvojfaktorovým, v ktorom jeden faktor má Cox-Ingersoll-Rossov tvar a druhý faktor má Vašíčkov tvar a short rate je ich súčtom. Porovnávajú sa výnosové krivky a zaoberá sa pravdepodobnostným rozdelením modelov. Ďalej sa optimalizuje funkcia maximálnej vierohodnosti pre získanie konštanty posunu odhadnutých faktorov short rate od simulovaných, resp. reálnych faktorov.

Kľúčové slová: short rate, výnos, Vašíčkov model, CIR model, metóda maximálnej vierohodnosti

Abstract

HÚSKOVÁ, Petra: Short rate models allowing negative interest rates [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2018, 71p.

Our master thesis deals with short rate models allowing negative interest rates. One-factor Vašíček model is compared to two-factor model where one factor has Cox-Ingersoll-Ross form and the other has Vašíček form and short rate is the sum of them. In this work, yield curves are compared and probability distributions of models are dealt with. Later in our work, we optimize maximum likelihood estimation to get the constant of movement between estimated factors of short rate and simulated, or real factors of short rate.

Keywords: short rate, yield, Vašíček model, CIR model, maximum likelihood estimation

Obsah

Úvod	9
1 Základné pojmy	11
1.1 Dlhopisy, časová štruktúra úrokových mier a stochastický kalkulus . . .	11
1.2 Jednofaktorové modely úrokových mier	13
1.3 Odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu v jedno- faktorovom modeli	16
1.4 Riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu	17
1.4.1 Riešenie pre Vašíčkov model	18
1.4.2 Riešenie pre CIR model	19
1.5 Dvojfaktorové modely	19
1.6 Odvodenie PDR pre cenu dlhopisu v dvojfaktorovom modeli	20
1.7 Cena dlhopisu v dvojfaktorom short rate modeli s nekorelovanými faktormi	22
1.8 Časová štruktúra úrokových mier v dvojfaktorovom modeli	23
1.8.1 Porovnanie časových štruktúr úrokových mier	24
1.8.2 Limita časovej štruktúry úrokových mier	26
2 Pravdepodobnostné rozdelenia modelov	30
2.1 Pravdepodobnostné rozdelenie short rate vo Vašíčkovom modeli	30
2.2 Pravdepodobnostné rozdelenie short rate v CIR modeli	31
2.3 Porovnanie pravdepodobnostných rozdelení	32
3 Odhadovanie short rate a výnosových kriviek pre jednofaktorový a dvojfaktorový Vašíčkov model	35
3.1 Algoritmus kalibrácie jednofaktorového Vašíčkovho modelu	35
3.1.1 Použitie algoritmu na simulované dáta	36
3.1.2 Použitie algoritmu na reálne dáta	37
3.2 Algoritmus kalibrácie dvojfaktorového Vašíčkovho modelu	38
3.2.1 Aplikácia kalibrácie dvojfaktorového Vašíčkovho modelu na si- mulované dáta	39
3.3 Aplikácia kalibrácie dvojfaktorového Vašíčkovho modelu na reálne dáta	43

4	Odhad konštanty posunu metódou maximálnej vierohodnosti	46
4.1	Metóda maximálnej vierohodnosti	46
4.2	Odhad konštanty posunu pre simulované dáta	49
4.3	Odhad konštanty posunu pre reálne dáta	51
5	Fitovanie výnosových kriviek	55
5.1	Aplikácia algoritmu na simulované dáta	56
5.2	Aplikácia na reálne dáta	59
	Záver	69
	Zoznam použitej literatúry	71

Úvod

Pre obchodovanie s derivátmi úrokových mier na finančných trhoch je výhodné poznať nasledujúci vývoj úrokovej miery, ktorý je popísaný stochastickým procesom. Pre modelovanie úrokovej miery je dôležité zachytiť dynamiku okamžitej úrokovej miery, čo je teoretická veličina začiatku výnosovej krivky. Pre popísanie vývoja úrokovej miery poznáme niekoľko modelov. My sa v našej diplomovej práci budeme zaoberať najmä dvojfaktorovým modelom, v ktorom jeden faktor má tvar Vašíčkovho procesu, čo nám umožní modelovať aj záporné úrokové miery, a druhý faktor má tvar Cox-Ingersoll-Rossovoho procesu a okamžitá úroková miera - short rate je ich súčtom. Dvojfaktorový model budeme porovnávať s jednofaktorovým Vašíčkovým modelom. Použitie dvojfaktorového modelu umožňuje väčšiu flexibilitu pri modelovaní a množina prípustných tvarov výnosových kriviek bude bohatšia.

Hlavnou myšlienkou našej diplomovej práce je pokúsiť sa odhadnúť konštantu posunu pri faktoroch short rate, pretože aplikovaním algoritmu z článku [3] na simulované dáta vidíme, že odhadnuté faktory sú od simulovaných posunuté o rovnakú konštantu s opačným znamienkom. Odhad konštanty budeme robiť metódou maximálnej virohodnosti.

Práca je rozdelená na päť kapitol. V prvej kapitole si predstavíme základné pojmy z finančnej matematiky a stochastického kalkulu, modely okamžitej úrokovej miery a ceny jej derivátov. Porovnáme výnosové krivky pre Vašíčkov, Cox-Ingersoll-Ross model a dvojfaktorový model. V druhej kapitole sa budeme zaoberať pravdepodobnostným rozdelením okamžitej úrokovej miery vo Vašíčkovom modeli a v Cox-Ingersoll-Rossovom modeli. Keďže v štvrtej kapitole aproximujeme pravdepodobnostné rozdelenie Cox-Ingersoll-Rossovoho modelu normálnym rozdelením, tak v druhej kapitole nakoniec porovnáme hustoty normálneho rozdelenia a necentrálneho χ^2 . V tretej kapitole aplikujeme algoritmy pre jednofaktorový model z článku [2] a pre dvojfaktorový model z článku [3] na simulované a reálne dáta Euriboru pre rok 2017. V štvrtej kapitole sa pozrieme na funkciu maximálnej virohodnosti a pokúsime sa pomocou nej odhadnúť konštantu posunu reálnych výnosových kriviek a odhadnutých výnosových kriviek. V

piatej kapitole budeme fitovať výnosy na základe optimalizovaných parametrov a j s odhadnutou konštantou posunu zo štvrtej kapitoly.

1 Základné pojmy

1.1 Dlhopisy, časová štruktúra úrokových mier a stochastický kalkulus

V nasledujúcej časti čerpáme najmä z [6] a [7]. Dlhopis je základným derivátom úrokovej miery. Dlhopisy vieme rozdeliť na kupónové a bezkupónové, no pre naše potreby sa budeme zaoberať iba bezkupónovými dlhopismi, ktoré v čase splatnosti vyplatia svojmu vlastníkovi nominálnu hodnotu. Pomerom ceny dlhopisu a nominálnej hodnoty definujeme časovú štruktúru úrokových mier pre danú dobu splatnosti, ktorá teda vyjadruje závislosť úrokovej miery od maturity dlhopisu. Pokiaľ je nominálna hodnota dlhopisu rovná 1, jedná sa o diskontný dlhopis. Pri analýze dlhopisov je treba zohľadniť aj výnosovú krivku, ktorá popisuje časovú štruktúru úrokových mier pre jednotlivé maturity. Cena diskontného dlhopisu v čase t s maturitou v čase T je určená vzťahom $P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$, z ktorého vieme vyjadriť výnos pre danú maturitu $R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t}$.

Krátkodobá úroková miera, alebo tiež short rate, je úroková miera na nekonečne krátky čas. Je definovaná ako začiatok výnosovej krivky $r(t) = \lim_{T \rightarrow t+} R(t, T)$.

Krátkodobá úroková miera je však len teoretickou veličinou, pretože nie je na trhu pozorovateľná. V praxi sa short rate aproximuje výnosom s krátkou maturitou, napríklad 1 mesiac, čo však nie je konzistentné s definíciou short rate ako limity výnosov, kde sa maturita blíži k nule. Taktiež sa zvykne aproximovať overnight výnosom, to však nie je vždy vhodné, pretože pri overnight výnosoch môže dôjsť k rôznym nepredvídateľným situáciám na trhu.

Vývoj úrokových mier v čase nie je deterministický, má stochastický charakter. V nasledujúcej časti definujeme základné pojmy zo stochastického kalkulu, pričom čerpáme z [11].

Definícia 1.1. *Stochastický proces je t -parametrický systém náhodných premenných $\{X(t), t \in I\}$, kde I je interval alebo diskrétna množina.*

Stochastický proces, ktorý sa nachádza v diferenciálnych rovniciach opisujúcich

úrokové miery, sa nazýva Wienerov proces.

Definícia 1.2. Wienerov proces $\{w(t), t \geq 0\}$ je náhodný proces, ktorý splňa:

1. $w(0) = 0$,
2. prírastky $w(t + \Delta t) - w(t)$ majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a disperziou Δt ,
3. pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ sú prírastky $w(t_1) - w(t_0), w(t_2) - w(t_1), \dots, w(t_n) - w(t_{n-1})$ nezávislé,
4. trajektórie sú spojité.

Wienerov proces je Brownov pohyb $B_t = \mu t + \sigma W_t$ s parametrami $\mu = 0$ a $\sigma = 1$.

Keďže sa úroková miera modeluje stochastickou diferenciálnou rovnicou, je potrebný nástroj na prácu s náhodnými premennými, a tým je Itóova lema.

Lema 1.3. Nech $f(x, t)$ je C^2 hladká funkcia premenných x, t a nech proces $\{x(t), t \geq 0\}$ vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw,$$

kde w je Wienerov proces. Potom

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dw. \end{aligned}$$

Ďalším dôležitým nástrojom je Itóova izometria, ktorú vieme nájsť v [6].

Lema 1.4. Nech pre merateľnú funkciu $f : (0, t) \rightarrow \mathbb{R}$ platí $\int_0^t f^2(\tau) d\tau < \infty$. Potom existuje Itóov integrál $\int_0^t f(\tau) dw(\tau)$, ktorý predstavuje normálne rozdelenú náhodnú premennú s rozdelením $N(0, \sigma^2(t))$, kde $\sigma^2(t) = \int_0^t f(\tau)^2 d\tau$. To znamená, že platia identity:

$$\begin{aligned} E \left(\int_0^t f(\tau) dw(\tau) \right) &= 0, \\ E \left(\left(\int_0^t f(\tau) dw(\tau) \right)^2 \right) &= \int_0^t f(\tau)^2 d\tau. \end{aligned}$$

Posledná identita sa volá Itóova izometria.

1.2 Jednofaktorové modely úrokových mier

V tejto podkapitole čerpáme zo [7]. V prípade jednofaktorových short rate modelov je okamžitá úroková miera modelovaná stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw, \quad (1)$$

pričom $\mu(r, t)$ predstavuje trend (drift) vo vývoji úrokovej miery a $\sigma(r, t)$ zas volatilitu, teda náhodné fluktuácie úrokovej miery okolo deterministickej časti procesu. Jednou zo základných vlastností modelu úrokovej miery je tendencia návratu k strednej hodnote (mean reversion). Práve vďaka tejto vlastnosti sa obvykle driftová časť volí v tvare Ornstein-Uhlenbeckovho mean reverting procesu, teda $\mu(r, t) = \kappa(\theta - r)$, pričom κ a θ sú kladné konštanty. Stredná hodnota úrokovej miery je v prípade tohto tvaru driftovej časti priťahovaná k rovnovážnej hodnote θ a rýchlosť reverzie je κ . O tom sa vieme presvedčiť vyriešením diferenciálnej rovnice

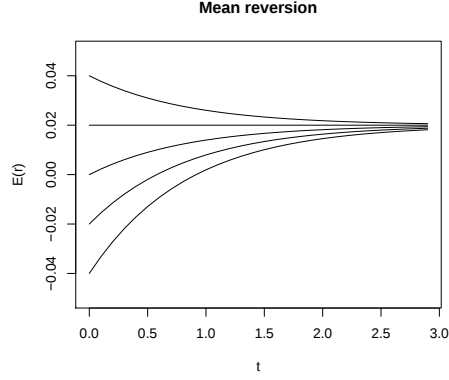
$$d(E(r_t)) = E(dr_t) = E(\kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dw) = \kappa(\theta - E(r_t))dt,$$

ktorej riešením je

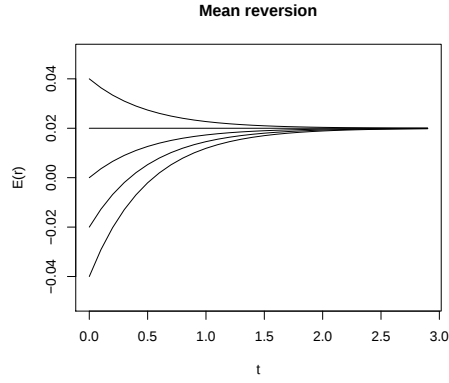
$$E(r_t) = r_0 e^{-\kappa t} + (1 - e^{-\kappa t})\theta.$$

Limitou riešenia tejto diferenciálnej rovnice je práve parameter θ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(r_t) = \theta.$$



Obr. 1: $\theta = 0.02, \kappa = 1.2$



Obr. 2: $\theta = 0.02, \kappa = 2$

Na obrázkoch 1 a 2 vidíme mean reverting proces pre hodnoty úrokovej miery $r_0 = (-0.04, -0.02, 0, 0.02, 0.04)$, pričom parameter θ je v oboch prípadoch rovnaký, teda $\theta = 0.02$ a parameter κ nadobúda hodnoty $\kappa = 1.2$ a $\kappa = 2$. Vidíme, že čím je parameter κ väčší, tým rýchlejšie ide stredná hodnota úrokovej miery k parametru θ .

V našej diplomovej práci sa zameriame na modely úrokovej miery, v ktorých je trend popísaný Ornstein-Uhlenbeckovým procesom, avšak líšiť sa budú vo volatilitě.

Vašíčkov model patrí medzi najstaršie a najjednoduchšie modely úrokovej miery. Uvažuje konštantnú volatilitu, teda $\sigma(r, t) = \sigma$. Stochastická diferenciálna rovnica má potom tvar

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw. \quad (2)$$

Jednou z vlastností Vašíčkovho modelu je fakt, že pripúšťa záporné úrokové miery,

pretože keďže je volatilita konštantná, tak proces vie nadobudnúť aj záporné hodnoty.

Ďalším zo známych short rate modelov je **Cox-Ingersoll-Ross model**, tiež označovaný ako **CIR model**. Dynamika short rate je v ňom popisovaná nasledujúcou stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw. \quad (3)$$

Vidíme, že drift tohto procesu je rovnaký ako pri Vašíčkovom modeli, ale volatilita už nie je konštantná. Práve vďaka tvaru volatility tento model nepripúšťa záporné úrokové miery. V prípade úrokovej miery blízkej nule bude volatilita taktiež blízka nule, resp. ak by úroková miera bola rovná nule, tak aj volatilita bude nulová. Ďalší vývoj závisí potom na drifte, ktorý je v prípade $r = 0$ kladný. Tým pádom sa úroková miera bude zvyšovať a opäť nadobudne kladnú hodnotu. Taktiež platí, že ak $2\kappa\theta \geq \sigma^2$, tak pravdepodobnosť dosiahnutia $r = 0$ je nulová.

Zovšeobecnenie Vašíčkovho a CIR modelu predstavuje tzv. **CKLS model**, ktorý navrhol Chan, Karolyi, Longstaff a Sanders. CKLS model má tvar

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw, \quad (4)$$

pričom $\gamma \geq 0$. Môžeme si všimnúť, že pre $\gamma = 0$ dostávame Vašíčkov model a pre $\gamma = 1/2$ CIR model. Ukazuje sa však, že v prípade Vašíčkovho a CIR modelu nie je dynamika short rate dostatočne popísaná, totižto je potrebné, aby funkcia volatility pružne reagovala na zmenu miery. Autori odhadli optimálnu hodnotu pre jednofaktrový model $\gamma = 1.5$. Avšak nevýhodou CKLS modelu je to, že pri použití modelov, kde $\gamma \neq 0$ a $\gamma \neq 1/2$ neexistujú analytické riešenia cien derivátov short rate.

V tabuľke 1 sú uvedené ďalšie modely, ktorých zovšeobecnením je CKLS model.

Model	Stochastická diferenciálna rovnica pre r
Vašíček	$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw$
Dothan	$dr = \sigma r dw$
Brennan-Schwarz	$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r dw$
Cox-Ingersoll-Ross	$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma \sqrt{r} dw$
Cox-Ross	$dr = \beta r dt + \sigma r^\gamma dw$

Tabuľka 1: Prehľad CKLS modelov

1.3 Odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu v jednofaktorovom modeli

Pri modelovaní úrokovej miery je dôležitá cena dlhopisu, ktorá je riešením parciálnej diferenciálnej rovnice. Preto túto parciálnu diferenciálnu rovnicu v nasledujúcej časti odvodíme pre prípad jednofaktorového modelu, pričom budeme postupovať ako v [7].

Stochastickú diferenciálnu rovnicu pre opis jednofaktorového modelu sme už uviedli v predchádzajúcej podkapitole,

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw.$$

Majme cenu dlhopisu P závislú od okamžitej úrokovej miery r , aktuálneho času t a maturity T , teda $P = P(r, t, T)$. Z Itóovej lemy potom dostávame

$$\begin{aligned} dP &= \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial P}{\partial r} dw \\ &= \mu_B(t, r)dt + \sigma_B(t, r)dw. \end{aligned} \tag{5}$$

Predpokladajme, že máme portfólio zložené z jedného dlhopisu s maturitou T_1 a z Δ dlhopisov s maturitou T_2 . Hodnota tohto portfólia je potom

$$\pi = P(r, t, T_1) + \Delta P(r, t, T_2). \tag{6}$$

Zmena hodnoty takéhoto portfólia je

$$\begin{aligned} d\pi &= dP(r, t, T_1) + \Delta dP(r, t, T_2) \\ &= \mu_B(r, t, T_1)dt + \sigma_B(r, t, T_1)dw + \Delta(\mu_B(r, t, T_2)dt + \sigma_B(r, t, T_2)dw) \\ &= (\mu_B(r, t, T_1) + \Delta\mu_B(r, t, T_2))dt + (\sigma_B(r, t, T_1) + \Delta\sigma_B(r, t, T_2))dw. \end{aligned} \tag{7}$$

Kvôli náhodnosti, ktorú chceme eliminovať, volíme parameter $\Delta = -\frac{\sigma_B(r,t,T_1)}{\sigma_B(r,t,T_2)}$. Zmena hodnoty portfólia potom vyzerá nasledovne:

$$d\pi = \left(\mu_B(r,t,T_1) - \frac{\sigma_B(r,t,T_1)}{\sigma_B(r,t,T_2)} \mu_B(r,t,T_2) \right) dt.$$

Aby sme vylúčili arbitráž, výnos takéhoto portfólia sa musí rovnať okamžitej bezrizikovej úrokovej miere r , teda $d\pi = r\pi dt$. Dosadením príslušných výrazov potom dostávame

$$\mu_B(r,t,T_1) - \frac{\sigma_B(r,t,T_1)}{\sigma_B(r,t,T_2)} \mu_B(r,t,T_2) = r \left(P(r,t,T_1) - \frac{\sigma_B(r,t,T_1)}{\sigma_B(r,t,T_2)} P(r,t,T_2) \right).$$

Po vhodných algebraických úpravách dostávame výraz

$$\frac{\mu_B(r,t,T_1) - rP(r,t,T_1)}{\sigma_B(r,t,T_1)} = \frac{\mu_B(r,t,T_2) - rP(r,t,T_2)}{\sigma_B(r,t,T_2)}.$$

Maturity T_1 a T_2 boli ľubovoľné, teda tento výraz nemôže od maturity závisieť, preto definujeme funkciu $\lambda(r,t)$ takú, že

$$\lambda(r,t) = \frac{\mu_B(r,t,T) - rP(r,t,T)}{\sigma_B(r,t,T)}, \forall T. \quad (8)$$

Funkcia $\lambda(r,t)$ sa nazýva trhovú mieru rizika, čo vyjadruje očakávaný nárast výnosu dlhopisu na jednotku rizika. Dosadením výrazov $\mu_B = \frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}$ a $\sigma_B = \sigma \frac{\partial P}{\partial r}$ do funkcie $\lambda(r,t)$ dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu(r,t) - \lambda(r,t)\sigma(r,t)) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2(r,t)}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad (9)$$

pre $\forall r, t \in \langle 0, T \rangle$. Koncová podmienka pre rovnicu (9) vyplýva z definície bezkupónového dlhopisu, teda

$$P(r, T, T) = 1, \forall r.$$

1.4 Riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu

V nasledujúcej podkapitole uvedieme stručný postup riešenia rovnice (9) pre cenu dlhopisu pre prípad Vašíčkovho modelu a keďže pre CIR model je postup podobný, v tomto prípade uvedieme len výsledok. Postupovať budeme opäť podobne ako v [7] a [11]. Cena dlhopisu bude závislá od hodnoty okamžitej úrokovej miery r a času do splatnosti dlhopisu $\tau = T - t$, teda $P = P(r, \tau)$.

1.4.1 Riešenie pre Vašíčkov model

Stochastická diferenciálna rovnica opisujúca dynamiku short rate vo Vašíčkovom modeli má tvar

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw, \quad (10)$$

a trhovacia miera rizika je konštantná, teda $\lambda(r, t) = \lambda$. Rovnicu (9) potom môžeme prepísať nasledovne:

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \text{ pre } \forall r, \quad (11)$$

so začiatočnou podmienkou

$$P(r, 0) = 1, \forall r. \quad (12)$$

Riešenie budeme hľadať v tvare

$$P(r, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r} \quad (13)$$

s počiatočnými podmienkami $A(0) = 1$ a $B(0) = 0$, ktoré sme dosiahli prihliadnutím na podmienku (12). Vypočítame si derivácie potrebné pre rovnicu (11).

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \tau} &= e^{-Br}(\dot{A} - A\dot{B}r), \\ \frac{\partial P}{\partial r} &= -ABe^{-Br}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} &= AB^2e^{-Br}. \end{aligned} \quad (14)$$

Dosadením derivácií (14) dostávame

$$\dot{A} - A\dot{B}r + \frac{\sigma^2}{2}AB^2 - (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma)AB - rA = 0.$$

Združením členov dostávame

$$rA(\dot{B} + \kappa B - 1) + (-\dot{A} + \frac{\sigma^2}{2}AB^2 - (\kappa\theta - \lambda\sigma)AB) = 0 \quad (15)$$

Aby sa rovnica (15) rovnala nule pre všetky r , musia sa členy v zátvorkách rovnať nule.

Tým dostávame dve diferenciálne rovnice:

$$\begin{aligned} \dot{B} + \kappa B - 1 &= 0 \\ -\dot{A} + \frac{\sigma^2}{2}AB^2 - (\kappa\theta - \lambda\sigma)AB &= 0. \end{aligned}$$

Po využití začiatkovej podmienky $B(0) = 0$ dostávame:

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}. \quad (16)$$

Pre funkciu $A(\tau)$ dostávame

$$\ln A = \int \frac{d\ln A}{d\tau} = \int \frac{\sigma^2}{2} B^2 - (\kappa\theta - \lambda\sigma) B d\tau. \quad (17)$$

Dosadením funkcie $B(\tau)$, zintegrovaním (17) a využitím začiatkovej podmienky $A(0) = 1$ dostávame

$$\ln A(\tau) = \left[\frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa\tau}) - \tau \right] R_\infty - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (1 - e^{-\kappa\tau})^2, \quad (18)$$

kde

$$R_\infty = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2},$$

čo predstavuje limitu časovej štruktúry úrokových mier pre $\tau \rightarrow \infty$.

1.4.2 Riešenie pre CIR model

Ako sme už na začiatku podkapitoly povedali, v prípade CIR modelu uvedieme len výsledok, ktorý vieme nájsť aj v [7], pričom tentokrát uvažujeme trhovú cenu rizika $\lambda(r, t) = \lambda\sqrt{r}$. Cenu dlhopisu opäť hľadáme v tvare

$$P(r, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r},$$

a funkcie $A(\tau)$ a $B(\tau)$ majú tvar

$$A(\tau) = \left(\frac{2\phi e^{(\phi+\psi)\tau/2}}{(\phi+\psi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \quad (19)$$

$$B(\tau) = \frac{2(e^{\phi\tau-1} - 1)}{(\phi+\psi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi}, \quad (20)$$

pričom

$$\psi = \kappa + \lambda\sigma,$$

$$\phi = \sqrt{\psi^2 + 2\sigma^2} = \sqrt{(\kappa + \lambda\sigma)^2 + 2\sigma^2}.$$

1.5 Dvojfaktorové modely

Motiváciou pre použitie viacfaktorových modelov úrokových mier je väčšia flexibilita v porovnaní s jednofaktorovými modelmi. V jednofaktorových modeloch je jedinou

stochastickou zložkou samotná okamžitá úroková miera, z čoho síce vyplývajú rôzne výhody ako napríklad jednoduchosť, no použitím viacfaktorových modelov vieme vygenerovať oveľa viac možných tvarov výnosových kriviek. Viac informácií nájdeme v [7].

Pri viacfaktorových modeloch úrokovej miery je okamžitá úroková miera funkciou viacerých faktorov, ktoré môžu, ale nemusia závisieť od seba navzájom. Poznáme niekoľko typov viacfaktorových modelov, napríklad:

- okamžitá úroková miera je súčtom jednotlivých faktorov,
- stochastická diferenciálna rovnica môže závisieť od iných veličín na trhu, napríklad úroková miera v európskom štáte závisí od celoeurópskej úrokovej miery (konvergenčný model),
- niektorý z parametrov z jednofaktorového modelu nie je konštantný, ale má stochastický charakter (Fong-Vašíčkov model so stochastickou volatilitou).

1.6 Odvodenie PDR pre cenu dlhopisu v dvojfaktorovom modeli

Ako sme už spomínali, v dvojfaktorovom modeli úrokovej miery je okamžitá úroková miera funkciou dvoch faktorov, teda $r = r(r_1, r_2)$. V našom texte sa zaoberáme prípadom, keď je okamžitá úroková miera súčtom týchto dvoch faktorov, $r = r_1 + r_2$. V tejto časti odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu $P(r_1, r_2, t)$. Postupujeme podobne ako v [7]. Všeobecný dvojfaktorový model vieme zapísať v tvare

$$\begin{aligned} dr_1 &= \mu_1(r_1, r_2)dt + \sigma_1(r_1, r_2)dw_1 \\ dr_2 &= \mu_2(r_1, r_2)dt + \sigma_2(r_1, r_2)dw_2 \\ \text{Cov}(dw_1, dw_2) &= \rho dt. \end{aligned} \tag{21}$$

Použitím Itóovej lemy na cenu dlhopisu $P(r_1, r_2, t)$ dostávame

$$dP = \mu dt + \sigma dw_1 + \tilde{\sigma} dw_2,$$

pričom

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_1 \frac{\partial P}{\partial r_1} + \mu_2 \frac{\partial P}{\partial r_2} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 P}{\partial r_1 \partial r_2}, \\ \sigma &= \sigma_1 \frac{\partial P}{\partial r_1}, \\ \tilde{\sigma} &= \sigma_2 \frac{\partial P}{\partial r_2}.\end{aligned}$$

Majme portfólio π zložené z troch dlhopisov s maturitami postupne T_1 , T_2 a T_3 , pričom množstvá jednotlivých dlhopisov sú V_1 , V_2 a V_3 . Hodnota daného portfólia je $\pi = P(T_1)V_1 + P(T_2)V_2 + P(T_3)V_3$. Zmenu hodnoty portfólia π je možné zapísať

$$\begin{aligned}d\pi &= V_1 dP(T_1) + V_2 dP(T_2) + V_3 dP(T_3) \\ &= (V_1 \mu(T_1) + V_2 \mu(T_2) + V_3 \mu(T_3)) dt \\ &\quad + (V_1 \sigma(T_1) + V_2 \sigma(T_2) + V_3 \sigma(T_3)) dw_1 \\ &\quad + (V_1 \tilde{\sigma}(T_1) + V_2 \tilde{\sigma}(T_2) + V_3 \tilde{\sigma}(T_3)) dw_2.\end{aligned}$$

Podobne ako pri jednofaktorovom modeli, tak aj v tomto prípade budeme potrebovať bezrizikovosť portfólia, ktorú dosiahneme odstránením náhodnosti

$$V_1 \sigma(T_1) + V_2 \sigma(T_2) + V_3 \sigma(T_3) = 0, \quad (22)$$

$$V_1 \tilde{\sigma}(T_1) + V_2 \tilde{\sigma}(T_2) + V_3 \tilde{\sigma}(T_3) = 0. \quad (23)$$

Okrem bezrizikovosti budeme požadovať aj vylúčenie arbitráže, teda výnos portfólia bude musieť byť rovný bezrizikovej úrokovej miere $d\pi = r\pi d\pi$.

$$V_1 \mu(T_1) + V_2 \mu(T_2) + V_3 \mu(T_3) = \pi r,$$

$$V_1(\mu(T_1) - rP(T_1)) + V_2(\mu(T_2) - rP(T_2)) + V_3(\mu(T_3) - rP(T_3)) = 0. \quad (24)$$

Sústava rovníc (22), (23) a (24) má jediné nenulové riešenie práve vtedy, keď platí

$$\mu(T_i) - rP(T_i) = \lambda_1 \sigma(T_i) + \lambda_2 \tilde{\sigma}(T_i), i = 1, 2, 3. \quad (25)$$

Funkcie $\lambda_1 = \lambda_1(r_1, r_2, t)$ a $\lambda_2 = \lambda_2(r_1, r_2, t)$ sú trhové ceny rizika jednotlivých faktorov a nezávisia od maturity. Dosadením μ , σ a $\tilde{\sigma}$ do rovnice (25) dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu pre dvojfaktorový model úrokovej miery

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_1 - \lambda_1 \sigma_1) \frac{\partial P}{\partial r_1} + (\mu_2 - \lambda_2 \sigma_2) \frac{\partial P}{\partial r_2} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} \\ + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 P}{\partial r_1 \partial r_2} - r(r_1, r_2)P = 0,\end{aligned} \quad (26)$$

s koncovou podmienkou

$$P(r_1, r_2, T) = 1, \forall r_1, r_2.$$

1.7 Cena dlhopisu v dvojfaktorom short rate modeli s nekorovanými faktormi

V našej diplomovej práci sa budeme zaoberať dvojfaktorovým short rate modelom, v ktorom jeden faktor má Vašíčkov tvar a druhý faktor má tvar Cox-Ingersol-Ross modelu s tým, že faktory budú nekorované. Použitím jedného faktora vo Vašíčkovom tvare sa zachová prípustnosť záporných úrokových mier. Model zapisujeme takto

$$\begin{aligned} dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1 dw_1 \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2 \sqrt{r_2} dw_2 \\ \text{Cov}(dw_1, dw_2) &= 0 \\ r &= r_1 + r_2. \end{aligned} \tag{27}$$

Parciálna diferenciálna rovnica (26) sa teda zmení nasledovne:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1 \sigma_1) \frac{\partial P}{\partial r_1} + (\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2 \sigma_2 \sqrt{r_2}) \frac{\partial P}{\partial r_2} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} \\ + \frac{1}{2} \sigma_2^2 r_2 \frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2} - (r_1 + r_2)P = 0, \end{aligned} \tag{28}$$

pričom τ je doba do splatnosti dlhopisu. Riešenie rovnice (28) sa hľadá v separovanom tvare

$$P(r_1, r_2, \tau) = P_1(r_1, \tau) P_2(r_2, \tau). \tag{29}$$

so začiatočnou podmienkou $P(r_1, r_2, 0) = 1$. Keďže faktory sú nezávislé, riešenie vôbec nie je náročné a je možné ho nájsť napríklad v [7], a preto uvádzame len výsledok. Cena dlhopisu v dvojfaktorovom modeli (27) je

$$P(r_1, r_2, \tau) = A_1(\tau) A_2(\tau) e^{-B_1(\tau)r_1 - B_2(\tau)r_2}, \tag{30}$$

pričom

$$\begin{aligned}
\ln A_1(\tau) &= \left[\frac{1}{\kappa_1} (1 - e^{-\kappa_1 \tau}) - \tau \right] R_\infty - \frac{\sigma_1^2}{4\kappa_1^3} (1 - e^{-\kappa_1 \tau})^2, \\
B_1(\tau) &= \frac{1 - e^{-\kappa_1 \tau}}{\kappa_1}, \\
R_\infty &= \theta_1 - \frac{\lambda_1 \sigma_1}{\kappa_1} - \frac{\sigma_1^2}{2\kappa_1^2}, \\
A_2(\tau) &= \left(\frac{2\phi e^{(\phi+\psi)\tau/2}}{(\phi+\psi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi} \right)^{\frac{2\kappa_2\theta_2}{\sigma_2^2}}, \\
B_2(\tau) &= \frac{2(e^{\phi\tau-1} - 1)}{(\phi+\psi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi}, \\
\psi &= \kappa_2 + \lambda_2 \sigma_2, \\
\phi &= \sqrt{\psi^2 + 2\sigma_2^2} = \sqrt{(\kappa_2 + \lambda_2 \sigma_2)^2 + 2\sigma_2^2}.
\end{aligned}$$

1.8 Časová štruktúra úrokových mier v dvojfaktorovom modeli

Pomocou ceny dlhopisu vieme vyjadriť časovú štruktúru úrokových mier, a to vzťahom

$$R(\tau) = -\frac{\ln P(\tau)}{\tau}. \quad (31)$$

Cenu dlhopisu v dvojfaktorovom modeli je vyjadrená vzťahom (30). Dosadením vzťahu (30) do (31) a jednoduchými úpravami dostávame

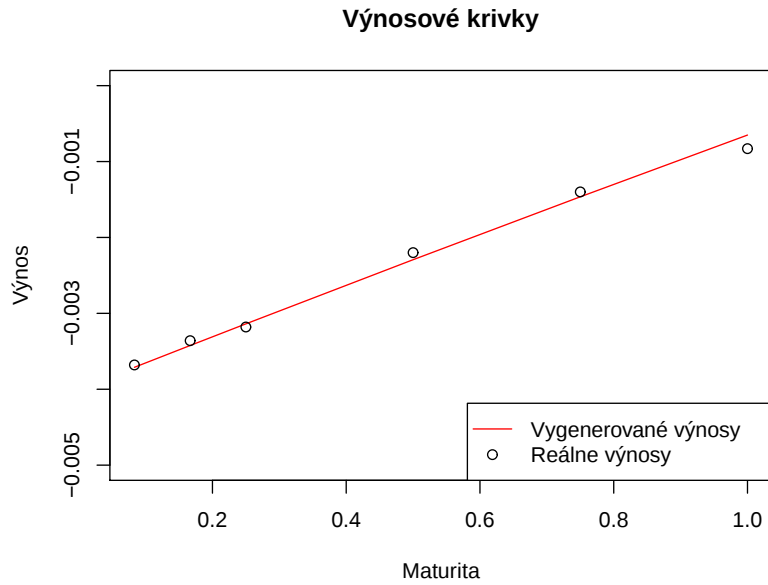
$$R(\tau) = \frac{-\ln A_1(\tau) - \ln A_2(\tau) + B_1(\tau)r_1 + B_2(\tau)r_2}{\tau}, \quad (32)$$

pričom výrazy $\ln A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$, $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$ boli vyjadrené už skôr.

Na obrázku 3 je príklad výnosovej krivky, ktorá má podobný priebeh ako reálne dáta - Euribor - prvý kvartál roku 2017. V tabuľke 2 môžeme nájsť parametre, na základe ktorých sme danú výnosovú krivku generovali.

r_1	-0.005	r_2	0.001
κ_1	0.1	κ_2	0.05
θ_1	0.005	θ_2	0.10011
σ_1	$\sqrt{0.0004}$	σ_2	$\sqrt{0.0001}$
λ_1	-0.05	λ_2	-0.5

Tabuľka 2: Parametre vygenerovaných výnosových kriviek



Obr. 3: Výnosová krivka pre 1 deň

1.8.1 Porovnanie časových štruktúr úrokových mier

Na obrázku 4 vidíme priebehy výnosových kriviek dvojfaktorového modelu a jednofaktorového Vašíčkovho a CIR modelu pre parametre z tabuľky 3, pričom počiatočné r_0 sú nastavené tak, aby v prípade dvojfaktorového modelu dávali v súčte rovnakú hodnotu, presnejšie 0.09, r_0 sú postupne: $r_{0vaš} = 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08$ a $r_{0cir} = 0.05, 0.04, 0.03, 0.02, 0.01$. Pri generovaní jednofaktorového Vašíčkovho a CIR modelu boli použité počiatočné $r_0 = 0.09$. V tabuľke 4 nájdeme výnosy pre jednotlivé maturity postupne $\tau = 1$ mesiac, 2 mesiace, 3 mesiace, 6 mesiacov, 9 mesiacov, 12 mesiacov.

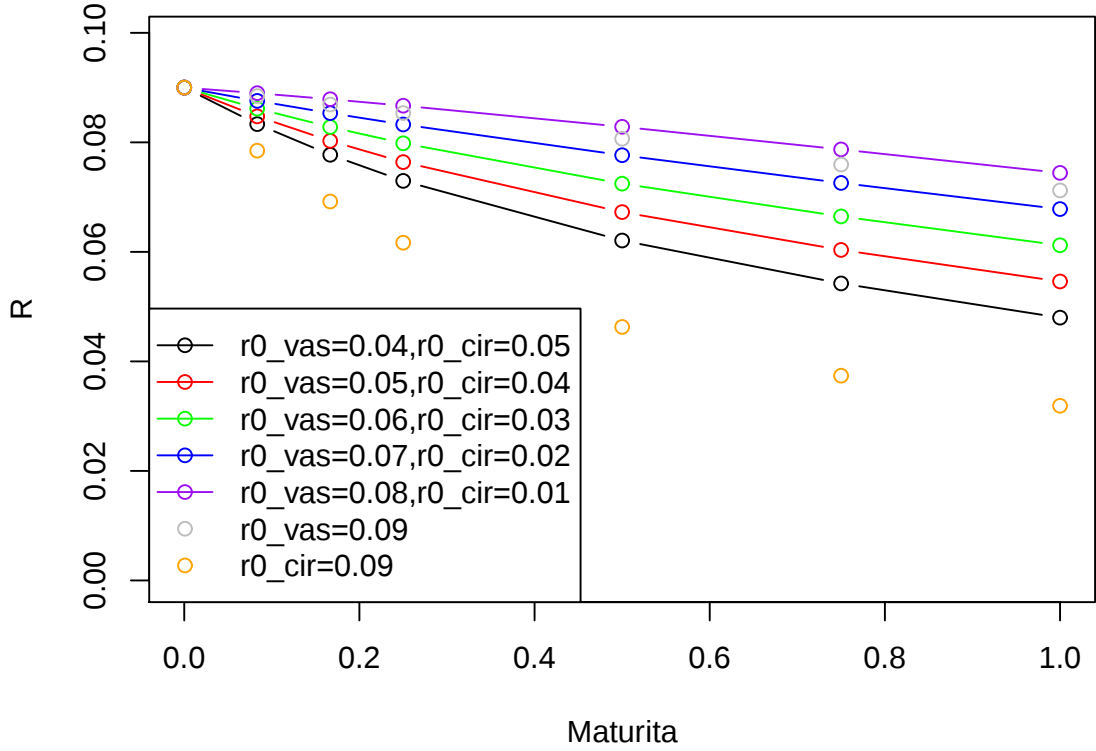
	Vašíček	CIR
κ	0.2	4
θ	-0.0001	0.013
σ	0.1	0.0001
λ	0.19	0.09

Tabuľka 3: Parametre použité pri porovnávaní výnosových kriviek

Počiatkové hodnoty r_0 / Maturita	1m	2m	3m	6m	9m	12m
$r_{0vas} = 0.04, r_{0cir} = 0.05$	0.083	0.078	0.073	0.062	0.054	0.048
$r_{0vas} = 0.05, r_{0cir} = 0.04$	0.085	0.08	0.076	0.067	0.06	0.055
$r_{0vas} = 0.06, r_{0cir} = 0.03$	0.086	0.083	0.08	0.072	0.066	0.061
$r_{0vas} = 0.07, r_{0cir} = 0.02$	0.088	0.085	0.083	0.078	0.073	0.068
$r_{0vas} = 0.08, r_{0cir} = 0.01$	0.089	0.088	0.087	0.083	0.079	0.074
$r_{0vas} = 0.09$	0.088	0.087	0.085	0.081	0.076	0.071
$r_{0cir} = 0.09$	0.078	0.069	0.062	0.046	0.037	0.032

Tabuľka 4: Výnosy pre rôzne maturity a rovnaké počiatkové r_0

Porovnanie výnosových kriviek



Obr. 4: Porovnanie časových štruktúr úrokových mier - pre rovnaké počiatočné r_0

1.8.2 Limita časovej štruktúry úrokových mier

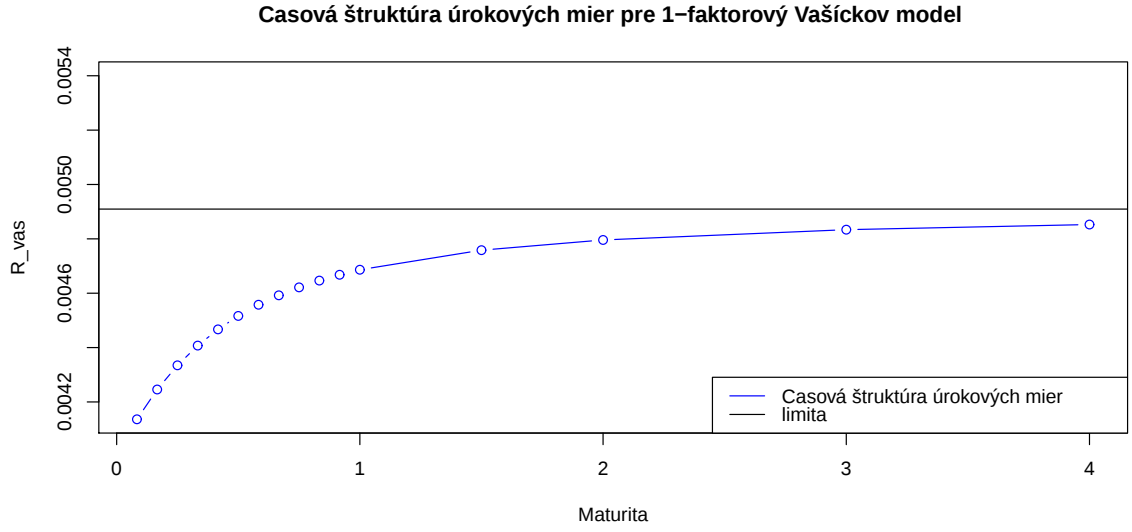
Limita časovej štruktúry úrokových mier pre jednofaktorový Vašíčkov model

V nasledujúcich riadkoch nájdeme limitu časovej štruktúry úrokových mier pre jednofaktorový Vašíčkov model, ktorá bola tiež odvodená v [7].

$$\begin{aligned}
 R(r, \tau) &= -\frac{\ln P(r, \tau)}{\tau} \\
 &= \left(1 - \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau}\right) R_\infty + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} \frac{(1 - e^{-\kappa\tau})^2}{\tau} \\
 &\quad + \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau} r.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Potom limita výrazu (33) je

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(r, \tau) = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} = R_\infty. \tag{34}$$



Obr. 5: Limita časovej štruktúry úrokových mier pre Vašíčkov model

Limita časovej štruktúry úrokových mier pre jednofaktorový CIR model

V nasledujúcich riadkoch nájdeme limitu časovej štruktúry úrokových mier pre jednofaktorový CIR model, ktorá bola tiež odvodená v [7].

$$\begin{aligned}
 R(r, \tau) &= -\frac{\ln P(r, \tau)}{\tau} \\
 &= -\frac{1}{\tau} \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \ln \left(\frac{2\phi e^{(\phi+\psi)\frac{\tau}{2}}}{(\phi+\psi)(e^{\phi\tau}-1) + 2\phi} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{\tau} \frac{2(e^{\phi\tau}-1)}{(\phi+\psi)(e^{\phi\tau}-1) + 2\phi} r.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Pričom

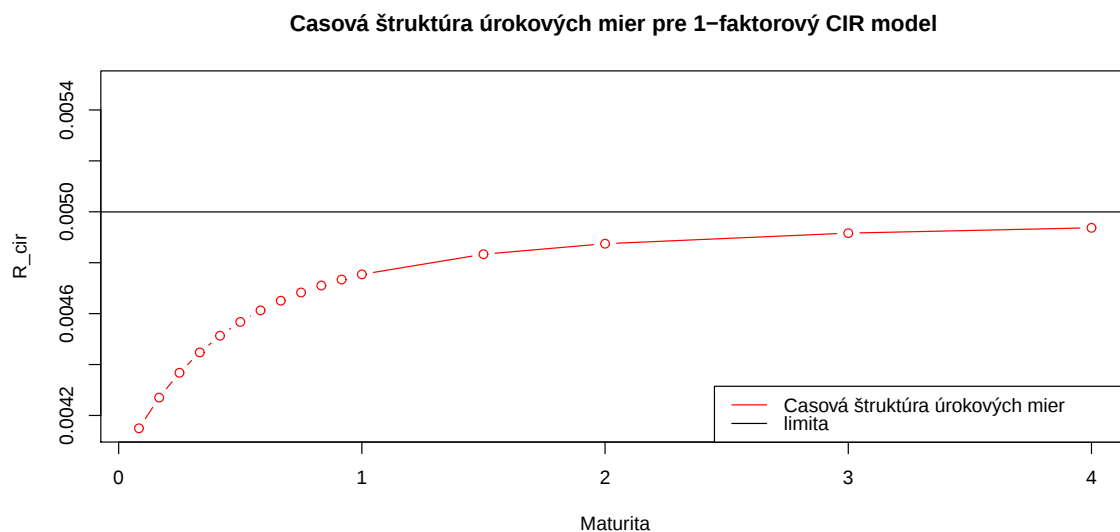
$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \frac{2(e^{\phi\tau}-1)}{(\phi+\psi)(e^{\phi\tau}-1) + 2\phi} r = 0,$$

a

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \ln \left(\frac{2\phi e^{(\phi+\psi)\frac{\tau}{2}}}{(\phi+\psi)(e^{\phi\tau}-1) + 2\phi} \right) = -\frac{\sigma^2}{\phi+\psi},$$

teda

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(r, \tau) = \frac{2\kappa}{\phi+\psi} \theta. \tag{36}$$



Obr. 6: Limita časovej štruktúry úrokových mier pre CIR model

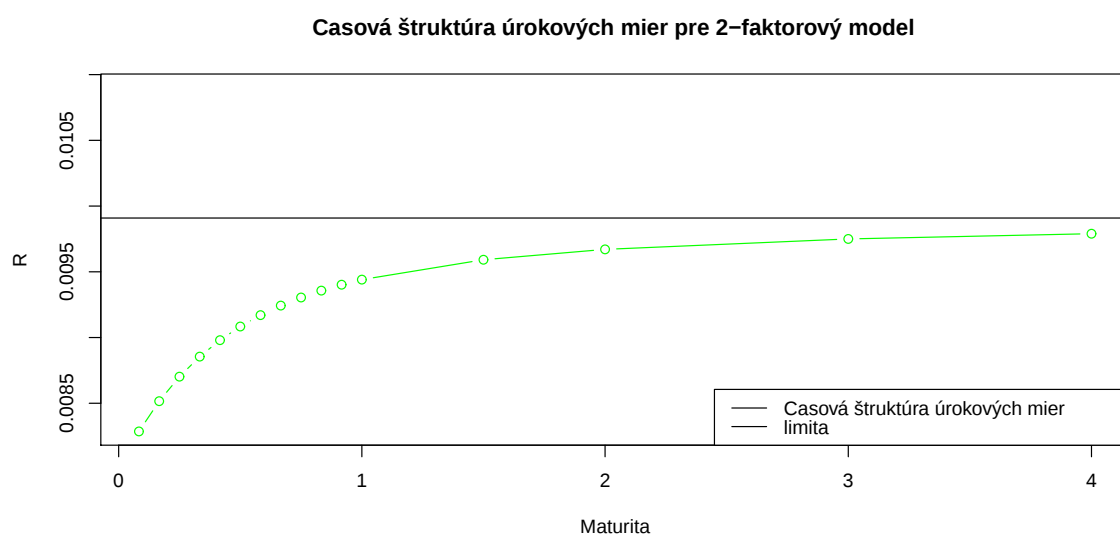
Limita časovej štruktúry úrokových mier pre dvojfaktorový model

Vieme, že platí

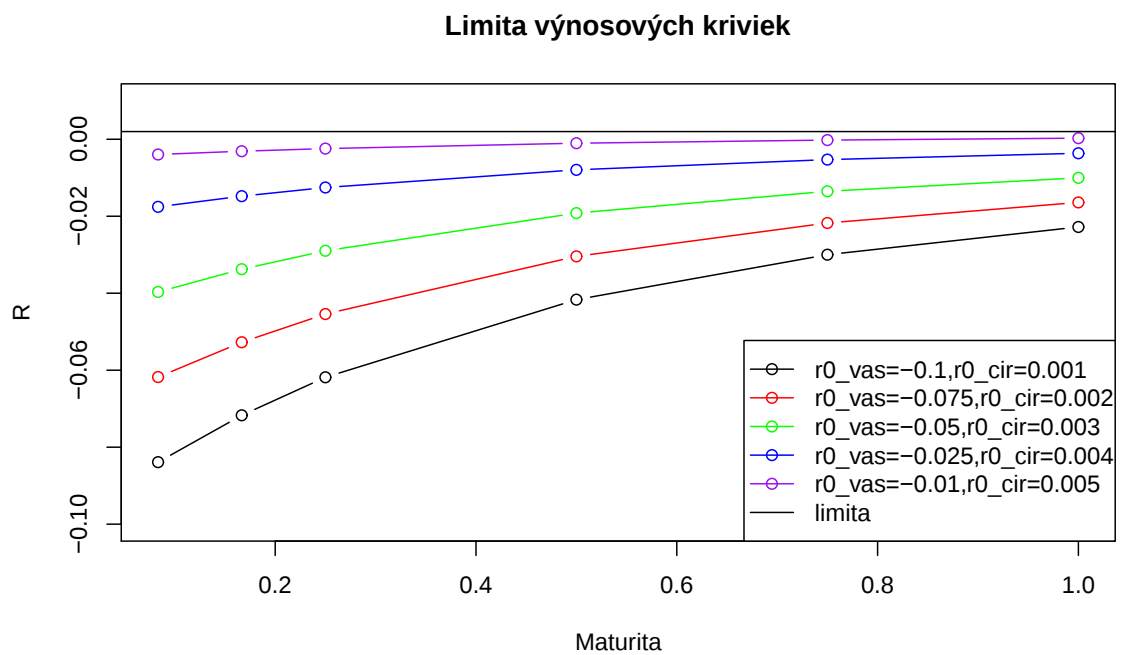
$$R = -\frac{\ln P}{\tau} = -\frac{\ln P_1}{\tau} - \frac{\ln P_2}{\tau} = R_1 + R_2. \quad (37)$$

Dosadením (34) a (36) do (38) dostávame

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R = R_{\infty} + \frac{2\kappa_2}{\phi + \psi} \theta_2. \quad (38)$$



Obr. 7: Limita časovej štruktúry úrokových mier pre dvojfaktorový model



Obr. 8: Limita časovej štruktúry úrokových mier pre dvojfaktorový model pre rôzne r_0

2 Pravdepodobnostné rozdelenia modelov

Pre našu diplomovú prácu sú potrebné pravdepodobnostné rozdelenia jednotlivých modelov short rate, preto sa v tejto kapitole budeme zaoberať pravdepodobnostným rozdelením Vašíčkovho a CIR modelu.

2.1 Pravdepodobnostné rozdelenie short rate vo Vašíčkovom modeli

V tejto podkapitole odvodíme parametre pravdepodobnostného rozdelenia short rate vo Vašíčkovom modeli. Postupujeme podobne ako v [7]. Stochastická diferenciálna rovnica opisujúca short rate má tvar

$$dr_s = \kappa(\theta - r)ds + \sigma dw_s. \quad (39)$$

Prenásobíme túto rovnicu výrazom $e^{\kappa s}$ a dostávame

$$e^{\kappa s} dr_s = e^{\kappa s} \kappa(\theta - r)ds + e^{\kappa s} \sigma dw_s. \quad (40)$$

Keďže sa v rovnici (40) nachádza náhodný člen, použijeme Itóovu lemu pre $f(r, s) = e^{\kappa s} r$. Po úpravách dostávame

$$d(e^{\kappa s} r_s) = e^{\kappa s} \kappa \theta ds + e^{\kappa s} \sigma dw_s. \quad (41)$$

Následnou integráciou od t po Δt

$$\begin{aligned} e^{\kappa(t+\Delta t)} r_{t+\Delta t} &= \theta(e^{\kappa(t+\Delta t)} - e^{\kappa t}) + \int_t^{t+\Delta t} \sigma e^{\kappa s} dw_s + e^{\kappa t} r_t \\ r_{t+\Delta t} &= \theta(1 - e^{-\kappa \Delta t}) + e^{-\kappa \Delta t} r_t + \sigma e^{-\kappa(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dw_s. \end{aligned}$$

Strednú hodnotu vypočítame

$$E(r_{t+\Delta t} | r_t) = \theta(1 - e^{-\kappa \Delta t}) + e^{-\kappa \Delta t} r_t. \quad (42)$$

Pre výpočet variancie budeme potrebovať nástroj stochastického kalkulu - Itóovu izometriu, ktorú nájdeme v prvej kapitole.

$$\begin{aligned}
Var(r_{t+\Delta t}|r_t) &= \sigma^2 e^{-2\kappa(t+\Delta t)} Var \int_t^{t+\Delta t} \sigma e^{\kappa s} dw_s \\
&= \sigma^2 e^{-2\kappa(t+\Delta t)} E \left(\left(\int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dw_s \right)^2 \right) \\
&= \sigma^2 e^{-2\kappa(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} e^{2\kappa s} ds \\
&= \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa\Delta t}).
\end{aligned} \tag{43}$$

Vieme, že pravdepodobnostné rozdelenie short rate vo Vašíčkovom modeli je normálne, a tak stredná hodnota (42) a variancia (43) sú parametrami tohto normálneho rozdelenia, teda

$$r_{t+\Delta t}|r_t \sim N \left(\theta(1 - e^{-\kappa\Delta t}) + e^{-\kappa\Delta t} r_t, \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa\Delta t}) \right). \tag{44}$$

2.2 Pravdepodobnostné rozdelenie short rate v CIR modeli

Stredná hodnota a variancia short rate v CIR modeli bola uvedená v [4]:

$$E(r_t|r_0) = \theta(1 - e^{-\kappa\Delta t}) + e^{-\kappa\Delta t} r_0, \tag{45}$$

$$Var(r_t|r_0) = r_0 \frac{\sigma^2}{\kappa} (e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}) + \frac{\theta\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa t})^2. \tag{46}$$

Short rate modelovaná CIR modelom už však nemá normálne rozdelenie tak, ako to bolo prípade Vašíčkovho modelu. Marginálna hustota rozdelenia má tvar

$$p(r_{t+\Delta t}; r_t, \kappa, \theta, \sigma) = c e^{-u-v} \left(\frac{v}{u} \right)^{\frac{q}{2}} I_q(2\sqrt{uv}), \tag{47}$$

pričom

$$c = \frac{2\kappa}{(1 - e^{-\kappa\Delta T})\sigma^2},$$

$$q = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} - 1,$$

$$u = c r_t e^{-\kappa\Delta t},$$

$$v = c r_{t+\Delta t}$$

a $I_q(2\sqrt{uv})$ je modifikovaná Besselova funkcia prvej triedy a rádu q .

Je však užitočnejšie pracovať s transformáciou $s_{t+\Delta t} = 2cr_{t+\Delta t}$. Tým dostávame nasledujúcu transformovanú hustotu

$$f(s_{t+\Delta t}|s_t, \kappa, \theta, \sigma) = f(2cr_{t+\Delta t}|s_t, \kappa, \theta, \sigma) = \frac{1}{2c}p(r_{t+\Delta t}; r_t, \kappa, \theta, \sigma), \quad (48)$$

čo je hustota necentrálneho χ^2 so stupňami voľnosti $2q + 2$ a parametrom necentrálnosti $2u$.

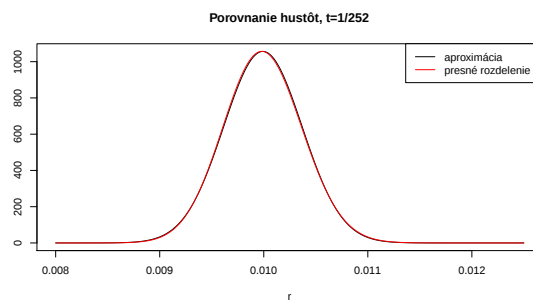
2.3 Porovnanie pravdepodobnostných rozdelení

Keďže v kapitole 4 aproximujeme pravdepodobnostné rozdelenie CIR modelu normálnym rozdelením, tak si v tejto podkapitole na grafoch porovnáme hustoty normálneho rozdelenia so strednou hodnotou a varianciou prislúchajúcou CIR modelu a hustotu necentrálneho χ^2 , pričom pre vykreslenie hustoty CIR modelu sme v programe *R Studio* použili balík *mixedsde*, presnejšie funkciu *dcCIR2* a pre vykreslenie hustoty normálneho rozdelenia, čo je rozdelenie Vašíčkovho modelu, používame strednú hodnotu a varianciu, ktorá bola uvedená už skôr v tejto kapitole. Pri vykresľovaní hustôt sme používali rovnaké parametre, teda $\kappa_{vašiček} = \kappa_{cir} = \kappa$, $\theta_{vašiček} = \theta_{cir} = \theta$, $\sigma_{vašiček} = \sigma_{cir} = \sigma$ a $r0_{vašiček} = r0_{cir} = r0$, aby sme ukázali rozdiely medzi normálnym rozdelením a rozdelením necentrálny χ^2 .

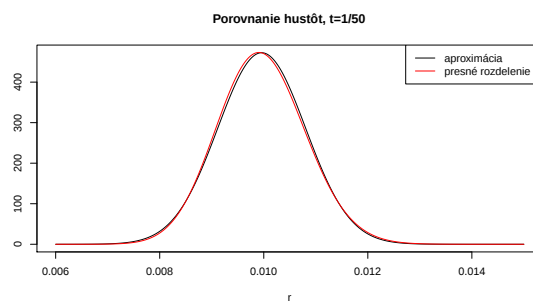
Jednotlivé hustoty sme vykresľovali na základe parametrov z tabuľky 5. Ďalej nasledujú obrázky 9, 10, 11, 12 a 13, na ktorých nájdeme porovnané hustoty postupne pre deň, týždeň, mesiac, polrok a rok.

κ	θ	σ	r0
0.4	0.005	0.06	0.01

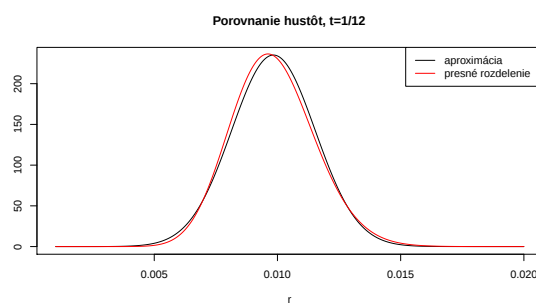
Tabuľka 5: Parametre použité pri vykresľovaní hustôt



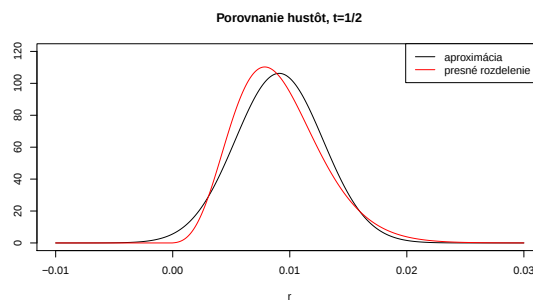
Obr. 9: Aproximácia hustoty - 1 deň



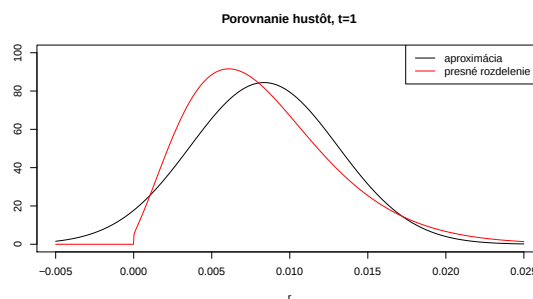
Obr. 10: Aproximácia hustoty - 1 týždeň



Obr. 11: Aproximácia hustoty - 1 mesiac



Obr. 12: Aproximácia hustoty - polrok



Obr. 13: Aproximácia hustoty - rok

Z obrázkov 9, 10, 11, 12 a 13 je vidieť, že aproximácia normálnym rozdelením nebola zlým riešením, najmä v prípade dňa, týždňa alebo mesiaca. Väčšie rozdiely môžeme spozorovať pri polroku alebo roku, ale to nie je problém, pretože my v našej práci zväčša uvažujeme prípad jedného dňa.

3 Odhadovanie short rate a výnosových kriviek pre jednofaktorový a dvojfaktorový Vašíčkov model

3.1 Algoritmus kalibrácie jednofaktorového Vašíčkovho modelu

Algoritmus kalibrácie jednofaktorového Vašíčkovho modelu vieme nájsť v článku [2].

Vieme, že vo Vašíčkovom modeli je short rate modelovaná stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw, \quad (49)$$

kde κ , θ a σ sú kladné parametre a w je Wienerov proces. Cena dlhopisu $P(\tau, r)$ vyhovuje parciálnej diferenciálnej rovnici

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad (50)$$

pre $\forall r, \tau > 0$, so začiatočnou podmienkou $P(0, r) = 1, \forall r$. Trhová miera rizika je pre Vašíčkov model konštantná, teda $\lambda(\tau, r) = \lambda$. Rovnica (50) má explicitné riešenie v tvare

$$\ln P(\tau, r) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}(R_\infty - r) - R_\infty\tau - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3}(1 - e^{-\kappa\tau})^2, \quad (51)$$

kde $R_\infty = \frac{\kappa\theta - \lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}$. Môžeme si všimnúť, že parametre θ a λ vstupujú do riešenia rovnice (50) cez vzťah $\kappa\theta - \lambda\sigma$. Je teda možné, aby sme tieto parametre zasubstituovali, a to nasledovne: $\alpha = \kappa\theta - \lambda\sigma$ a $\beta = -\kappa$. Tým pádom nám do ceny dlhopisu vstupujú len tri parametre α , β a σ^2 . Tiež sa nazývajú rizikovo neutrálne parametre.

Pre kalibráciu modelu sa používa časová štruktúra úrokových mier pozorovaná na trhu a následne sa odvádzajú parametre na základe kritéria, v ktorom minimalizujeme rozdiel teoretických výnosov vypočítaných Vašíčkovým modelom a výnosmi pozorovanými na trhu. Funkcia, ktorú minimalizujeme, má tvar

$$F(\alpha, \beta, \sigma^2, r) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij}(R(\tau_j, r_i) - R_{ij})^2, \quad (52)$$

kde $R(\tau_j, r_i)$ je výnos vypočítaný pomocou Vašíčkovho modelu s maturitou τ_j a short rate r_i realizovanou v i -ty deň a R_{ij} je výnos pozorovaný na trhu. Kľúčovým pozorovaním pre danú kalibráciu je fakt, že logaritmus ceny dlhopisu vo Vašíčkovom modeli

je lineárnou funkciou parametrov α , σ^2 a short rate r , teda

$$\ln P(\tau, r) = c_0(\tau)r + c_1(\tau)\alpha + c_2(\tau)\sigma^2,$$

kde

$$c_0 = \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta}, c_1 = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right], c_2 = \frac{1}{2\beta^2} \left[\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta\tau})^2}{2\beta} \right].$$

Detailný popis kalibrácie nájdeme v článku [2].

3.1.1 Použitie algoritmu na simulované dáta

V tejto časti použijeme algoritmus z [2] na simulované dáta. V tabuľke 6 sú uvedené parametre, ktoré používame pre simuláciu short rate. Pre simuláciu boli použité aj v článku [2].

κ	5
θ	0.02
σ	0.02
λ	-0.5

Tabuľka 6: Parametre použité na simuláciu short rate

Pre výnosy sú potrebné rizikovo neutrálne parametre, pre výpočet ktorých sa v tomto prípade používajú už uvedené vzťahy, a to $\alpha = \kappa\theta - \lambda\sigma$ a $\beta = -\kappa$. Tým pádom do výpočtu vstupujú parametre uvedené v tabuľke 7.

α	0.11
β	-5

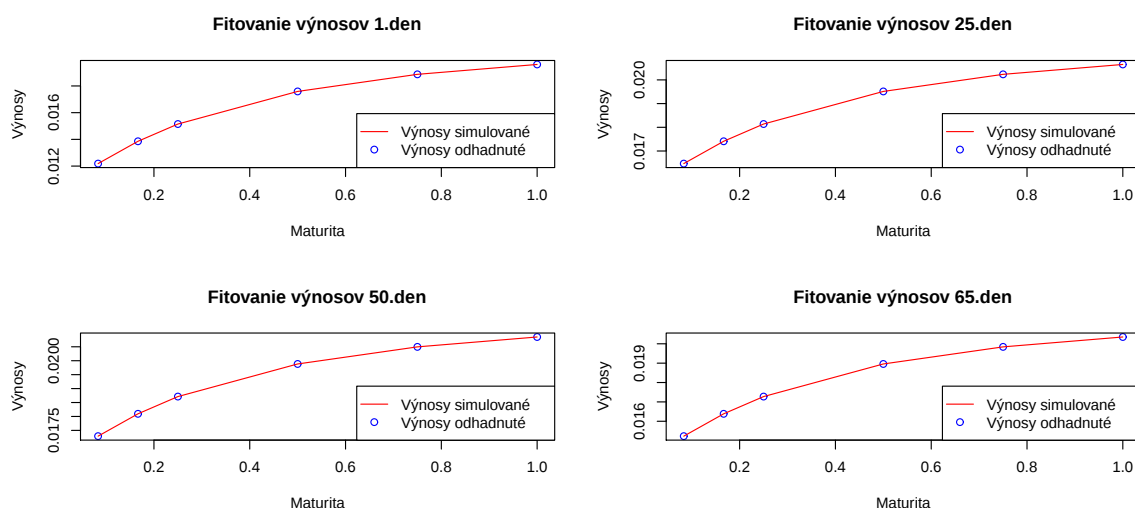
Tabuľka 7: Rizikovo neutrálne parametre

Použitím algoritmu z článku [2] dostávame odhadnuté parametre jednofaktorového modelu, ktoré sú uvedené v tabuľke 8.

Obrázok 14 ukazuje simulované a odhadnuté výnosy pre 1., 20., 35. a 65. deň.

α	β	σ^2
0.1100001677296	-5.000015917	0.0003982316301

Tabuľka 8: Odhadnuté parametre 1-faktorového Vašíčkovho modelu pre simulované dáta



Obr. 14: Odhadnuté verzus simulované výnosy

3.1.2 Použitie algoritmu na reálne dáta

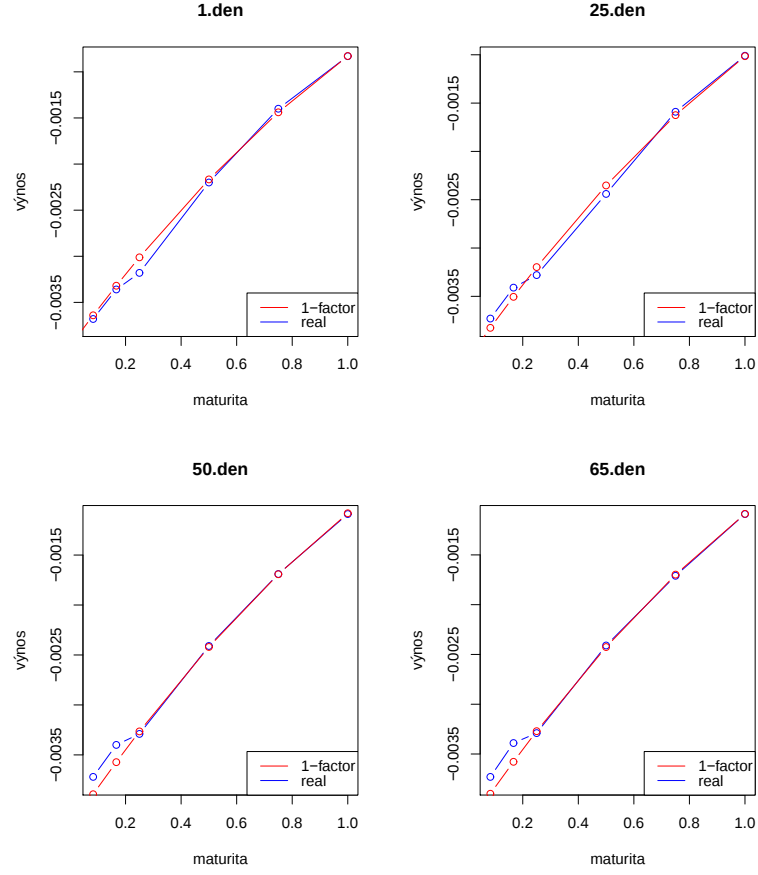
V nasledujúcej časti používame algoritmus na dáta Euriboru, prvý kvartál roku 2017.

α	β	σ^2
0.00817	-0.0002616067	0.005637

Tabuľka 9: Odhadnuté parametre 1-faktorového Vašíčkovho modelu

V tabuľke 9 sú odhadnuté parametre jednofaktorového Vašíčkovho modelu pre dané dáta.

Na obrázku 15 sú reálne a odhadnuté výnosové krivky pre 1., 25., 50. a 65. deň. Vidíme, že odhadnuté výnosové krivky fitujú reálne celkom dobre, teda môžeme konštatovať, že daná kalibrácia je vhodná aj pre naše dáta, ktoré sú na rozdiel od dát použitých v článku [2] záporné.



Obr. 15: Odhadnuté verzus reálne výnosy

3.2 Algoritmus kalibrácie dvojfaktorového Vašíčkovho modelu

Algoritmus kalibrácie dvojfaktorového Vašíčkovho modelu vieme nájsť v článku [3].

Dynamika short rate v dvojfaktorovom Vašíčkovom modeli je popísaná stochastickými diferenciálnymi rovnicami, pričom jednotlivé faktory sú v našom prípade nekorelované, teda

$$dr_1 = \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1 dw_1,$$

$$dr_2 = \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2 dw_2,$$

$$Cov(r_1, r_2) = 0.$$

Algoritmus z článku uvažuje prípad, kedy short rate je súčtom jednotlivých faktorov, teda $r = r_1 + r_2$.

Cena dlhopisu vyhovuje parciálnej diferenciálnej rovnici

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1)\frac{\partial P}{\partial r_1} + (\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2)\frac{\partial P}{\partial r_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2\frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} \\ + \frac{1}{2}\sigma_2^2\frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2} - (r_1 + r_2)P = 0, \end{aligned} \quad (53)$$

so začiatočnou podmienkou $P(0, r_1, r_2) = 1, \forall r_1, r_2$.

Aj v tomto prípade budeme uvažovať rizikovo neutrálne parametre, ktoré majú tvar $\alpha_k = \kappa_k\theta_k - \lambda_k\sigma_k$ a $\beta_k = -\kappa_k$, pre $k = 1, 2$.

Pri kalibrácii dvojfaktorového Vašíčkovho modelu sa používa rovnaký prístup ako pri kalibrácii jednofaktorového Vašíčkovho modelu, ktorý je založený na minimalizácii rozdielu teoretických výnosov vypočítaných Vašíčkovým modelom $R(\tau_j, r_{1j}, r_{2j})$ a výnosov pozorovaných na trhu R_{ij} pre i -ty deň a j -tu maturitu. Minimalizovaná funkcia má tvar

$$F(r_{1i}, r_{2i}, \alpha_i, \beta_i, \sigma_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} (R(\tau_j, r_{1i}, r_{2i}) - R_{ij})^2. \quad (54)$$

Dôležitou myšlienkou kalibrácie je, podobne ako pri kalibrácii jednofaktorového Vašíčkovho modelu, že logaritmus ceny dlhopisu je lineárnou funkciou parametrov $\alpha_1, \alpha_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ a faktorov short rate r_1 a r_2 , teda

$$\ln P(\tau, r_1, r_2) = c_{01}(\tau)r_1 + c_{02}(\tau)r_2 + c_{11}(\tau)\alpha_1 + c_{12}(\tau)\alpha_2 + c_{21}(\tau)\sigma_1^2 + c_{22}(\tau)\sigma_2^2,$$

kde pre $k = 1$ a $k = 2$

$$c_{0k} = \frac{1 - e^{\beta_k\tau}}{\beta_k}, c_{1k} = \frac{1}{\beta_k} \left[\frac{1 - e^{\beta_k\tau}}{\beta_k} + \tau \right], c_{2k} = \frac{1}{2\beta_k^2} \left[\frac{1 - e^{\beta_k\tau}}{\beta_k} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta_k\tau})^2}{2\beta_k} \right].$$

Detailnejší popis kalibrácie sa nachádza v článku [3].

3.2.1 Aplikácia kalibrácie dvojfaktorového Vašíčkovho modelu na simulované dáta

Pri simulovaní jednotlivých faktorov short rate sme použili parametre uvedené v tabuľke 10, pričom prvý faktor sme simulovali CIR modelom a druhý faktor Vašíčkovým modelom.

κ_{cir}	4	$\kappa_{vašiček}$	0.5
θ_{cir}	0.004	$\theta_{vašiček}$	-0.001
λ_{cir}	-0.05	$\lambda_{vašiček}$	-0.09
σ_{cir}	0.02	$\sigma_{vašiček}$	0.004

Tabuľka 10: Parametre použité pri simulovaní dát

Pre výpočet výnosov boli potrebné rizikovo neutrálne parametre, ktoré sme dostali na základe vzťahov

$$\alpha_{cir} = \kappa_{cir}\theta_{cir},$$

$$\beta_{cir} = -\kappa_{cir} - \lambda_{cir}\sigma_{cir},$$

$$\alpha_{vasicek} = \kappa_{vasicek}\theta_{vasicek} - \lambda_{vasicek}\sigma_{vasicek},$$

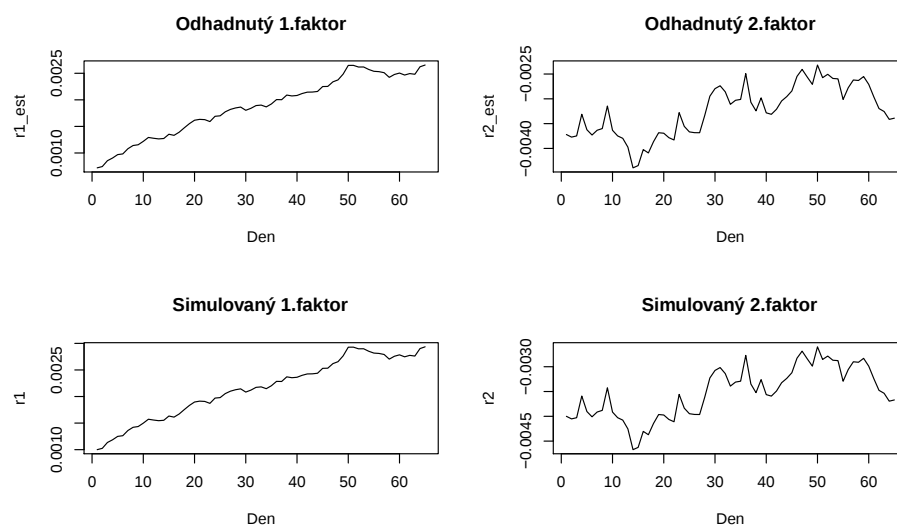
$$\beta_{vasicek} = -\kappa_{vasicek}.$$

Tým pádom dostávame tabuľku 11, v ktorej sa nachádzajú rizikovo neutrálne parametre.

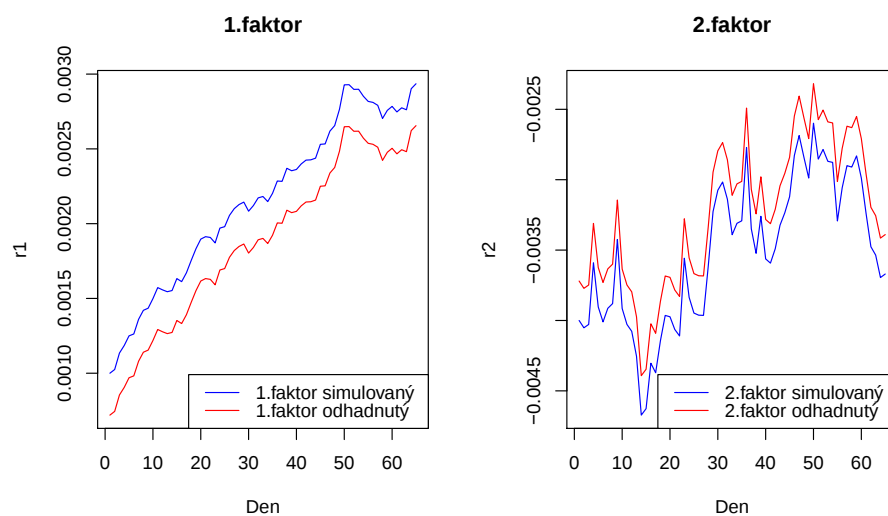
λ_{cir}	0.016	$\lambda_{vašiček}$	-0.00014
β_{cir}	-3.999	$\beta_{vašiček}$	-0.5

Tabuľka 11: Rizikovo neutrálne parametre

Na obrázku 16 vidíme simulované a odhadnuté faktory short rate, pričom si môžeme všimnúť, že faktory odhadnuté algoritmom pre dvojfaktorový model z článku [3] a simulované faktory sú od seba posunuté, čo môžeme lepšie pozorovať na obrázku 17.



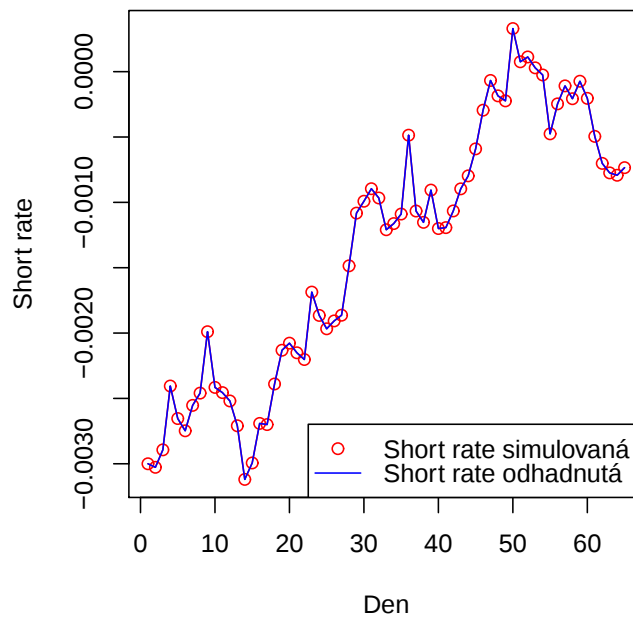
Obr. 16: Rozklad short rate na faktory



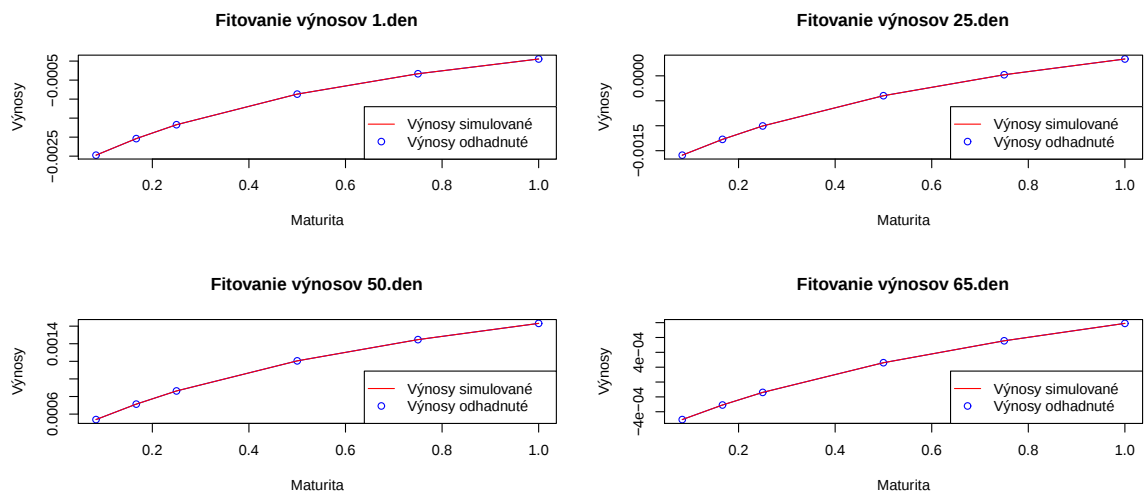
Obr. 17: Posun jednotlivých faktorov

Síce sú jednotlivé faktory posunuté, celková odhadnutá short rate fituje simulovanú short rate, ktorá je vypočítaná ako súčet jednotlivých faktorov, vcelku dobre, čo ukazuje graf 18. Na obrázku 19 je tiež vidno, že algoritmom odhadnuté výnosy fitujú tie simulované dobre.

Short rate simulovaná a odhadnutá



Obr. 18: Short rate odhadnutá a simulovaná



Obr. 19: Simulované a odhadnuté výnosy

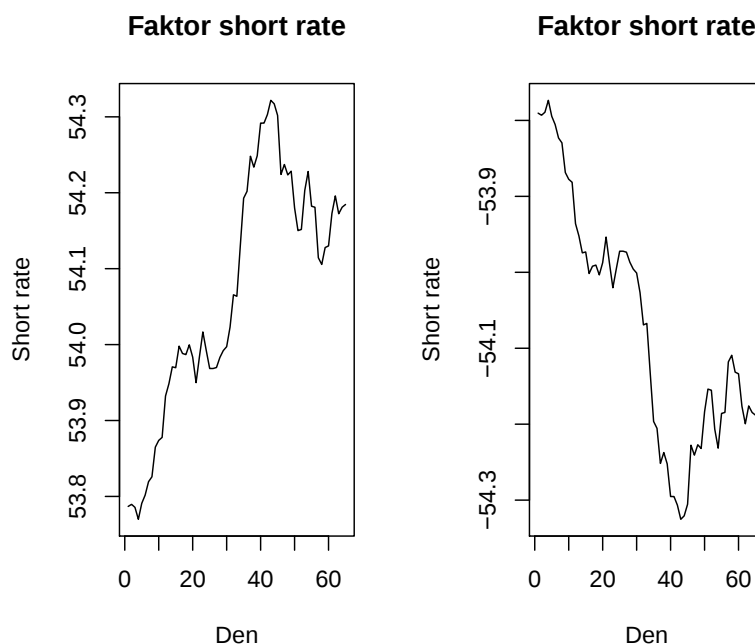
3.3 Aplikácia kalibrácie dvojfaktorového Vašíčkovho modelu na reálne dáta

V tejto podkapitole aplikujeme algoritmus z článku [3] na Euribor - prvý kvartál 2017. V nasledujúcej tabuľke 12 sa nachádza rozsah jednotlivých faktorov short rate po aplikácii algoritmu pre dvojfaktorový Vašíčkov model.

Faktor	min	max
r_1	53.76987	54.32174
r_2	-54.32525	-53.77356

Tabuľka 12: Rozsah faktorov short rate - reálne dáta

Na obrázku 20 vidíme faktorový rozklad short rate pre reálne dáta.



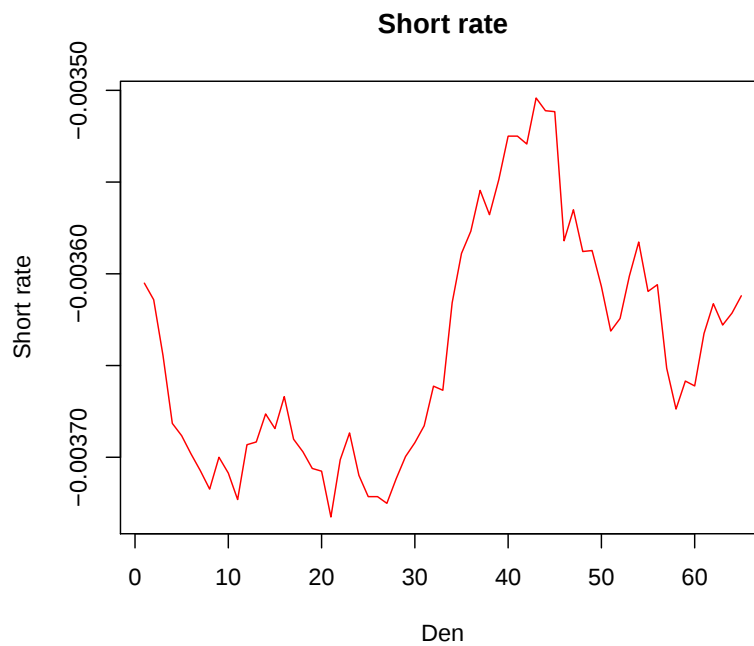
Obr. 20: Faktory short rate - reálne dáta

Aj keď faktory r_1 a r_2 majú rozmedzie také, že v reálnom svete by okamžitá úroková miera takých hodnôt nemohla existovať, ich súčet dáva okamžitú úrokovú mieru takú, ktorá už reálna je. Tabuľka 13 ukazuje rozmedzie short rate po aplikácii algoritmu a

	min	max
r	-0.003732548	-0.003504181

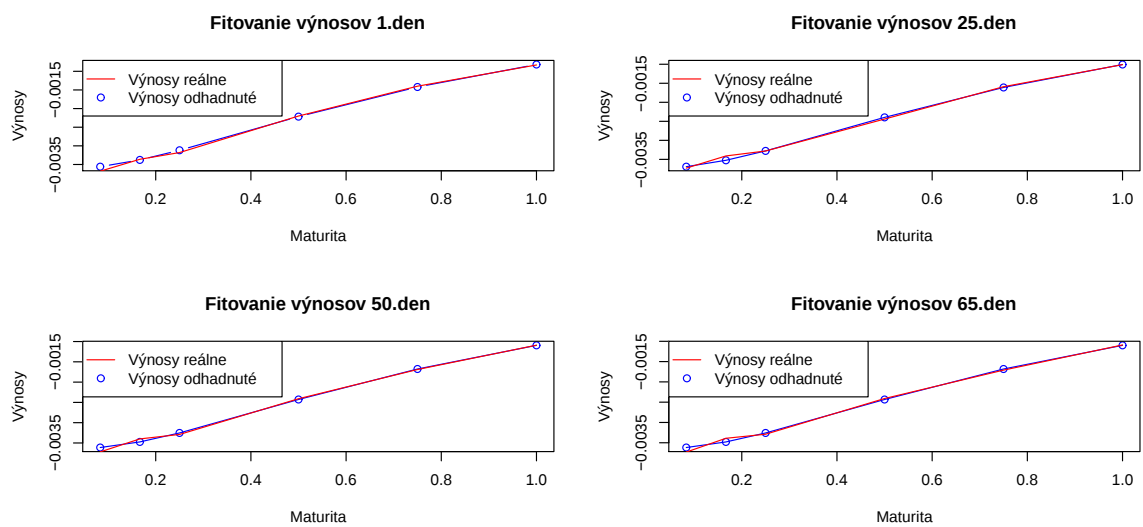
Tabuľka 13: Rozsah short rate - reálne dáta

na obrázku 21 vidíme jej graf.



Obr. 21: Short rate - reálne dáta

V tomto prípade nevieme posúdiť, či je short rate fitovaná správne tak, ako to bolo v prípade simulovaných dát, no vieme zistiť, či sú správne fitované výnosy, čo nám ukazuje obrázok 22.



Obr. 22: Fitovanie výnosov - reálne dáta

4 Odhad konštanty posunu metódou maximálnej vierohodnosti

V kapitole 3 na obrázkoch 16 a 17 sme si mohli všimnúť, že použitím algoritmu z článku [3] na simulované dáta sú jednotlivé faktory posunuté o rovnakú konštantu, v jednom prípade s kladným a v druhom prípade so záporným znamienkom. V tejto kapitole sa pokúsime odhadnúť danú konštantu pomocou metódy maximálnej vierohodnosti.

4.1 Metóda maximálnej vierohodnosti

V tejto časti čerpáme z [8]. Metóda maximálnej vierohodnosti je jednou z metód matematickej štatistiky pre odhad dát. Majme pozorované dáta, v našom prípade krátkodobú úrokovú mieru $r_1, \dots, r_n$, s hustotou $f(r, \theta)$. Podmienená hustota dát má tvar $f(r|\theta) = f(r_2|r_1, \theta) \dots f(r_n|r_{n-1}, \theta) = \prod_{i=2}^n f(r_i|r_{i-1}, \theta)$. Potom pri odhadovaní parametra θ dostávame

$$L(\theta) = f(r_2|r_1, \theta) \dots f(r_n|r_{n-1}, \theta) = \prod_{i=2}^n f(r_i|r_{i-1}, \theta). \quad (55)$$

V praxi sa však častejšie používa logaritmus funkcie (55), teda

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=2}^n \ln f(r_i|r_{i-1}, \theta). \quad (56)$$

V našej diplomovej práci sa zaoberáme dvojfaktorovým short rate modelom, v ktorom jeden faktor má CIR tvar a druhý faktor má Vašíčkov tvar, pričom jednotlivé faktory sú nezávislé a short rate je ich súčtom, teda

$$\begin{aligned} r_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1\sqrt{r_1}dw_1, \\ r_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2dw_2, \\ \text{Cov}(r_1, r_2) &= 0, \\ r &= r_1 + r_2. \end{aligned} \quad (57)$$

Ako sme už spomínali v úvode tejto kapitoly, jednotlivé odhadnuté faktory v kapitole (3) sú posunuté o konštantu. V nasledujúcich riadkoch budeme používať značenie: r_1, r_2 pre skutočné faktory short rate, $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2$ pre odhadnuté faktory short rate a K bude konštanta posunu. Aj keď sú síce odhadnuté faktory short rate posunuté o konštantu,

ich súčet fituje skutočnú short rate veľmi dobre, čo je vidieť na obrázku 18 v kapitole 3. Platí teda:

$$\begin{aligned}r_1 &= \tilde{r}_1 + K, \\r_2 &= \tilde{r}_2 - K, \\r &= r_1 + r_2 = \tilde{r}_1 + K + \tilde{r}_2 - K = \tilde{r}_1 + \tilde{r}_2 = \tilde{r}.\end{aligned}$$

Pre použitie metódy maximálnej vierohodnosti budeme potrebovať pravdepodobnostné rozdelenie jednotlivých modelov, ktoré sú už spomenuté v kapitole 2. Ako pravdepodobnostné rozdelenie faktora korešpondujúceho CIR modelu však v našej diplomovej práci nebudeme používať necentrálny χ^2 , ale aproximujeme ho normálnym rozdelením.

Máme teda $r_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $r_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Je známe, že súčet dvoch normálnych rozdelení má normálne rozdelenie. V našom prípade sú potom parametre tohto normálneho rozdelenia nasledovné:

$$r = r_1 + r_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2),$$

pričom

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \theta_1(1 - e^{-\kappa_1 t}) + e^{-\kappa_1 t}(\tilde{r}_1 + K), \\ \sigma_1^2 &= (\tilde{r}_1 + K) \frac{\sigma_1^2}{\kappa_1} (e^{-\kappa_1 t} - e^{-2\kappa_1 t}) + \frac{\theta_1 \sigma_1^2}{2\kappa_1} (1 - e^{-\kappa_1 t})^2, \\ \mu_2 &= \theta_2(1 - e^{-\kappa_2 t}) + e^{-\kappa_2 t}(\tilde{r}_2 - K), \\ \sigma_2^2 &= \frac{\sigma_2^2}{2\kappa_2} (1 - e^{-2\kappa_2 t}).\end{aligned}$$

Vierohodnostná funkcia potom vyzerá nasledovne:

$$L = \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_{1i}^2 + \sigma_{2i}^2)}} e^{\frac{(\tilde{r}_i - (\mu_{1i} + \mu_{2i}))^2}{\sqrt{2\pi(\sigma_{1i}^2 + \sigma_{2i}^2)}}}. \quad (58)$$

My v našej diplomovej práci používame logaritmus vierohodnostnej funkcie, teda

$$l = \sum_{i=2}^n -\ln(\sqrt{2\pi(\sigma_{1i}^2 + \sigma_{2i}^2)} - \frac{(\tilde{r}_i - (\mu_{1i} + \mu_{2i}))}{\sqrt{2\pi(\sigma_{1i}^2 + \sigma_{2i}^2)}}). \quad (59)$$

V ďalšom kroku odhadujeme konštantu K . Z odhadnutých dát $\tilde{r}_1$ a $\tilde{r}_2$ budeme potrebovať získať prvotný odhad parametrov κ_1 , θ_1 , σ_1 , κ_2 , θ_2 a σ_2 . Parametre pre CIR model odhadneme postupom uvedeným v diplomovej práci [9] a parametre pre Vašíčkov model postupom z knihy [1].

CIR model v [9] je popísaný stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dw_t.$$

Zavádza sa symbolika

$$a = \frac{\alpha}{\beta}(e^\beta - 1), b = e^\beta, s^2 = \sigma^2 \frac{e^{2\beta} - 1}{2\beta}.$$

Odhady jednotlivých parametrov sa získajú zo vzorca

$$\begin{aligned} (\hat{a}, \hat{b}) &= (X^\top \Omega^{-1} X)^{-1} X^\top \Omega^{-1} y, \\ \hat{s}^2 &= \frac{1}{N-2} \sum_{t=2}^N \hat{\epsilon}_t^2, \end{aligned}$$

kde

$$X = \begin{pmatrix} 1 & r_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & r_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \text{diag}(r_1, \dots, r_{N-1}), \hat{\epsilon}_t = r_t - \hat{a} - \hat{b}r_{t-1}.$$

V našej diplomovej práci používame ako predpis CIR modelu rovnicu

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw,$$

takže po vypočítaní parametrov $(\hat{a}, \hat{b})$ použijeme transformáciu $\kappa = -\beta$ a $\theta = -\frac{\alpha}{\beta}$.

Vašíčkov model v [1] je popísaný rovnicou

$$dr_t = (b - ar_t)dt + \sigma dw_t.$$

Používa sa symbolika

$$\beta = \frac{b}{a}, \alpha = e^{-at}, V^2 = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}).$$

Parametre α , β a V^2 sú potom odvodené nasledovne

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \frac{n \sum_{i=1}^n r_i r_{i-1} - \sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_{i-1}}{n \sum_{i=1}^n r_{i-1}^2 - (\sum_{i=1}^n r_{i-1})^2}, \\ \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^n [r_i - \hat{\alpha} r_{i-1}]}{n(1 - \hat{\alpha})}, \\ \hat{V}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [r_i - \hat{\alpha} r_{i-1} - \hat{\beta}(1 - \hat{\alpha})]^2.\end{aligned}$$

Keďže v našej diplomovej práci používame ako predpis pre Vašíčkov model rovnicu

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw,$$

tak zavádzame ešte transformáciu $\kappa = a$ a $\theta = \frac{b}{a}$.

4.2 Odhad konštanty posunu pre simulované dáta

V tabuľke 10 v kapitole 3 nájdeme parametre, na základe ktorých sme simulovali dáta. Prvý faktor sme simulovali CIR modelom a druhý Vašíčkovým modelom. Jednotlivé faktory vyšli v rozsahu

Faktor	min	max
r_1	0.001	0.002935
r_2	-0.004672	-0.002599

Tabuľka 14: Rozsah simulovaných faktorov

Po aplikácii algoritmu z článku [3] vyšli odhadnuté faktory nasledovne

Faktor	min	max
$\tilde{r}_1$	0.0007198	0.002655
$\tilde{r}_2$	-0.004392	-0.002318

Tabuľka 15: Rozsah faktorov použitím algoritmu

Dôležité je sa taktiež pozrieť na to, či algoritmus z článku [3] faktory nevymenil. Zistiť to pri simulovaných dátach je jednoduché, stačí sa pozrieť na obrázok 17 a

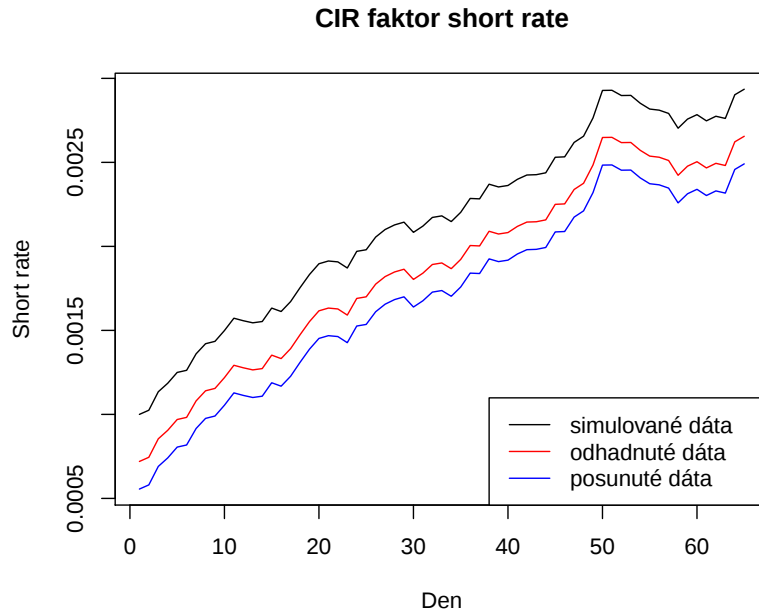
vidíme, že v tomto prípade faktory vymenené nie sú. Priemerné hodnoty rozdielov medzi simulovanými a odhadnutými faktormi sú $\tilde{r}_1 - r_1 = -0.0002801595$ a $\tilde{r}_2 - r_2 = 0.0002801593$. Pri odhadovaní konštanty je dôležité myslieť aj na to, že prvý faktor modelujeme CIR modelom, a teda jeho rozsah nesmie klesnúť do záporných hodnôt.

Aplikovaním metódy maximálnej vierohodnosti pre odhad konštanty na simulované dáta dostávame konštantu posunu -0.0001642755 a hodnota vierohodnostnej funkcie je -441.2916 . Tým sa nám posunuté faktory dostávajú do rozsahu uvedeného v tabuľke 16.

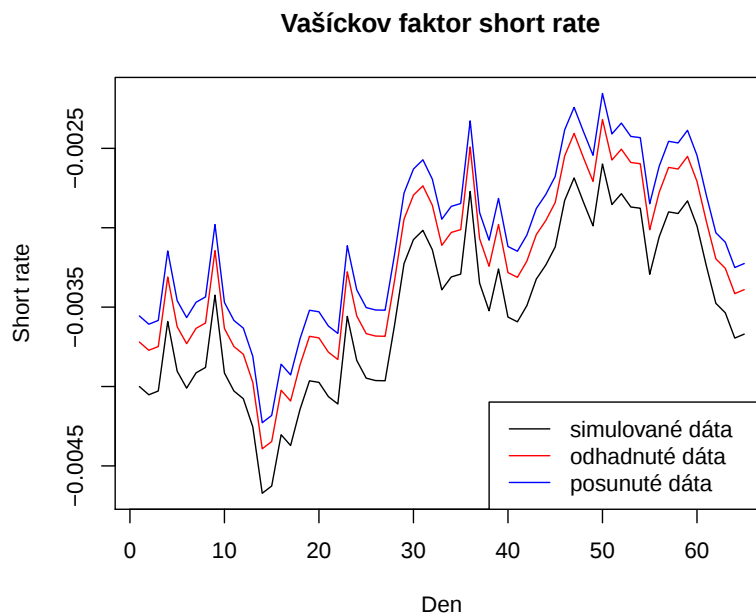
Faktor	min	max
$\tilde{r}_1 + K$	0.0005556	0.0024910
$\tilde{r}_2 - K$	-0.004228	-0.002154

Tabuľka 16: Rozsah faktorov upravených o konštantu posunu

Na obrázkoch 23 a 24 vidíme grafy jednotlivých faktorov short rate.



Obr. 23: CIR faktor short rate pre simulované dáta



Obr. 24: Vašíčkov faktor short rate pre simulované dáta

4.3 Odhad konštanty posunu pre reálne dáta

V kapitole 3 sme použili algoritmus z článku [3]. Z obrázka 20 môžeme predpokladať, že tak, ako to bolo aj v prípade simulovaných dát, tak aj v tomto prípade sú faktory posunuté o konštantu. V tomto prípade je však situácia komplikovanejšia, pretože nevieme urobiť prvotný odhad konštanty posunu. Konštantu posunu sme sa pokúsili odhadnúť pre niekoľko dátových sád, presnejšie EURIBOR - 1.kvartál 2017, 3.kvartál 2017, 1.polrok 2017, 2.polrok 2017 a celý rok 2017. V nasledujúcej časti uvádzame tabuľky rozsahov jednotlivých short rate a ich faktorových rozkladov a tabuľky s odhadnutými konštantami. Nesmieme zabudnúť aj na možnosť, že algoritmus môže jednotlivé faktory vymeniť, čiže po uvážení obidvoch možností vyberieme možnosť, kde je vierohodnostná funkcia maximálnejšia. Výmena faktorov v našom prípade znamená to, že my ako prvý faktor vo vierohodnostnej funkcii chápeme faktor modelovaný CIR modelom a druhý modelovaný Vašíčkovým modelom. Na záver v tabuľke 27 uvádzame hodnotu funkcie (54).

2017	min	max
$\tilde{r}_1$	21 248.16786	21 248.18092
$\tilde{r}_2$	-21 248.18455	-21 248.17133
$\tilde{r}$	-0.0038038041	-0.003446335

Tabuľka 17: Rozsah faktorov pre rok 2017

2017	faktory nevymenené	faktory vymenené
Odhad konštanty	-21 248.15943	-21 248.15786
Hodnota funkcie l	388.5600123	389.0569102

Tabuľka 18: Odhad konštanty pre rok 2017

1.kvartál 2017	min	max
$\tilde{r}_1$	53.73987395	54.32174365
$\tilde{r}_2$	-54.32524784	-53.77355549
$\tilde{r}$	-0.003732548	-0.003504181

Tabuľka 19: Rozsah faktorov pre 1.kvartál 2017

1.kvartál 2017	faktory nevymenené	faktory vymenené
Odhad konštanty	-53.76768974	-53.76925289
Hodnota funkcie l	-591.8421847	-500.1808696

Tabuľka 20: Odhad konštanty pre 1.kvartál 2017

3.kvartál 2017	min	max
$\tilde{r}_1$	0.007163483	0.007236525
$\tilde{r}_2$	-0.01090377	-0.01083338
$\tilde{r}$	-0.003669899	-0.003667250

Tabuľka 21: Rozsah faktorov pre 3.kvartál 2017

3.kvartál 2017	faktory nevymenené	faktory vymenené
Odhad konštanty	-0.007403334101	-0.007403334101
Hodnota funkcie l	-943.3081161	-943.5521671

Tabuľka 22: Odhad konštanty pre 3.kvartál 2017

1.polrok 2017	min	max
$\tilde{r}_1$	-1 034.801	-1 033.914
$\tilde{r}_2$	1 033.910	1 034.797
$\tilde{r}$	-0.003800616	-0.003565050

Tabuľka 23: Rozsah faktorov pre 1.polrok 2017

1.polrok 2017	faktory nevymenené	faktory vymenené
Odhad konštanty	1 034.80157	1 034.801903
Hodnota funkcie l	360.233	372.377

Tabuľka 24: Odhad konštanty pre 1.polrok 2017

2.polrok 2017	min	max
$\tilde{r}_1$	-0.03806649	-0.03774834
$\tilde{r}_2$	0.03406620	0.03438914
$\tilde{r}$	-0.003682135	-0.03677348

Tabuľka 25: Rozsah faktorov pre 2.polrok 2017

2.polrok 2017	faktory nevymenené	faktory vymenené
Odhad konštanty	0.038066502	0.039066492
Hodnota funkcie l	-1 760.129301	-1 761.211976

Tabuľka 26: Odhad konštanty pre 2.polrok 2017

2017	2.33059891x10 ⁻⁹
1.kvartál 2017	3.315250478x10 ⁻⁹
3.kvartál 2017	3.869790611x10 ⁻⁹
1.polrok 2017	3.186393847x10 ⁻⁹
2.polrok 2017	3.450502487x10 ⁻⁹

Tabuľka 27: Hodnota účelovej funkcie F

5 Fitovanie výnosových kriviek

V tejto kapitole vychádzame z [10].

Opäť budeme minimalizovať účelovú funkciu

$$F = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} (R(\tau_j, r_i) - R_{ij})^2 \quad (60)$$

podľa parametrov $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \sigma_1^2$ a σ_2^2 . V článku [10] bola navrhnutá aproximácia ceny dlhopisu $\ln P_{ap}(\tau, r)$ pre jednofaktorový model, my sme si aproximáciu upravili pre dvojfaktorový model, a to nasledovne:

$$\begin{aligned} \ln P^{ap}(\tau, r) = & c_{01}(\tau, r_1) + c_{02}(\tau, r_2) + c_{11}(\tau, r_1)\alpha_1 + \\ & c_{12}(\tau, r_2)\alpha_2 + c_{21}(\tau, r_1)\sigma_1^2 + c_{22}(\tau, r_2)\sigma_2^2, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} c_{01} &= \frac{1 - e^{\beta_1 \tau}}{\beta_1} r_1, \\ c_{02} &= \frac{1 - e^{\beta_2 \tau}}{\beta_2} r_2, \\ c_{11} &= \frac{1}{\beta_1} \left(\frac{1 - e^{\beta_1 \tau}}{\beta_1} + \tau \right), \\ c_{12} &= \frac{1}{\beta_2} \left(\frac{1 - e^{\beta_2 \tau}}{\beta_2} + \tau \right), \\ c_{21} &= \frac{r_1^{2\gamma_1}}{2\beta_1^2} \left(\frac{1 - e^{\beta_1 \tau}}{\beta_1} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta_1 \tau})^2}{2\beta_1} \right), \\ c_{22} &= \frac{r_2^{2\gamma_2}}{2\beta_2^2} \left(\frac{1 - e^{\beta_2 \tau}}{\beta_2} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta_2 \tau})^2}{2\beta_2} \right), \end{aligned}$$

Derivovaním funkcie (60) podľa parametrov $\alpha_1, \alpha_2, \sigma_1^2$ a σ_2^2 a dosadením β_1 a β_2 dostávame hodnoty vyššie spomenutých parametrov, ktoré sú riešením systému lineárnych rovníc:

$$Ax = b,$$

pričom

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_{11}^2 & \sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_{21} c_{11} & \sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_{12} c_{11} & \sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_{22} c_{11} \\ \sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_{11} c_{21} & \sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_{21}^2 & \sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_{11} c_{21} & \sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_{22} c_{21} \\ \sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_{11} c_{12} & \sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_{21} c_{12} & \sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_{12}^2 & \sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_{22} c_{12} \\ \sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_{11} c_{22} & \sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_{21} c_{22} & \sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_{12} c_{22} & \sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_{22}^2 \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \sigma_1^2 \\ \alpha_2 \\ \sigma_2^2 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} -\sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (c_{01} + c_{02} + \tau_j R_{ij}) c_{11} \\ -\sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (c_{01} + c_{02} + \tau_j R_{ij}) c_{21} \\ -\sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (c_{01} + c_{02} + \tau_j R_{ij}) c_{12} \\ -\sum_{ij} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (c_{01} + c_{02} + \tau_j R_{ij}) c_{22} \end{bmatrix}.$$

Ako vstupné dáta algoritmu sa používajú faktory short rate z kapitoly 3 a odhad konštanty posunu z kapitoly 4, resp. pri simulovaných dátach používame ako počiatočnú hodnotu konštanty priemerný rozdiel medzi simulovanými a odhadnutými dátami. Ako počiatočné β_1 a β_2 sa berú také parametre, ktoré čo najlepšie minimalizujú účelovú funkciu (60), resp. pri simulovaných dátach sú to tie β_1 a β_2 , na základe ktorých sme simulovali dáta. Potom sa účelová funkcia (60) optimalizuje a na základe zoptimalizovaných parametrov β_1 a β_2 sa dopočítajú parametre α_1 , α_2 , σ_1^2 a σ_2^2 . Nakoniec sa dopočítajú výnosy a porovná sa fitovanie s reálnymi, resp. simulovanými výnosmi.

5.1 Aplikácia algoritmu na simulované dáta

V tabuľke 28 nájdeme parametre po dosadení počiatočných hodnôt $\beta_{1exact} = -3.999$ a $\beta_{2exact} = -0.5$ a $k.odhad = -0.0002801595$ a príslušnú účelovú funkciu a v tabuľke 29 nájdeme parametre po optimalizácii spolu s účelovou funkciou.

α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
1.376x10 ⁻⁰²	1.4x10 ⁻⁰⁴	1.1007x10 ⁻⁰⁴	1.5719x10 ⁻⁰⁵	4.9242x10 ⁻¹⁹

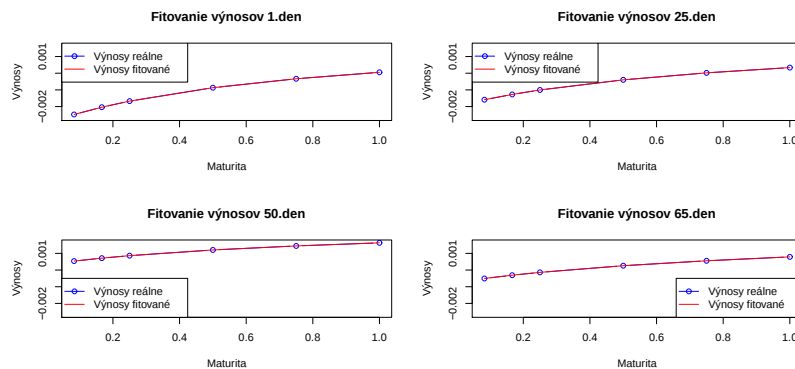
Tabuľka 28: Parametre a účelová funkcia

α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
1.376x10 ⁻⁰²	1.4x10 ⁻⁰⁴	1.1007x10 ⁻⁰⁴	1.5719x10 ⁻⁰⁵	4.9242x10 ⁻¹⁹

Tabuľka 29: Parametre a účelová funkcia po optimalizácii

Z tabuľky 29 vidíme, že parametre po optimalizácii sa vôbec nezmenili, dokonca hodnoty β_1 a β_2 ostali taktiež rovnaké.

Na grafe 25 vidíme fitovanie výnosov za použitia optimalizovaných parametrov.



Obr. 25: Fitovanie výnosov pre simulované dáta

Aplikácia algoritmu s optimalizáciou konštanty posunu

V tejto časti okrem optimalizácie parametrov β_1 a β_2 optimalizujeme aj konštantu posunu. Pri optimalizácii je však pravidlo, aby faktor short rate prezentujúci CIR model neklesol do záporných hodnôt.

V tabuľke 30 nájdeme jednotlivé parametre a hodnotu účelovej funkcie po dosadení počiatočných hodnôt, pričom k nim pribudla aj konštanta, ktorej počiatočná hodnota je, podobne ako v predchádzajúcom prípade, priemerným rozdielom medzi simulovanými a odhadnutými dátami. Teda ako počiatočné hodnoty sme použili $\beta_{1exact} =$

-3.999 , $\beta_{2exact} = -0.5$ a $K = -0.0002801595$.

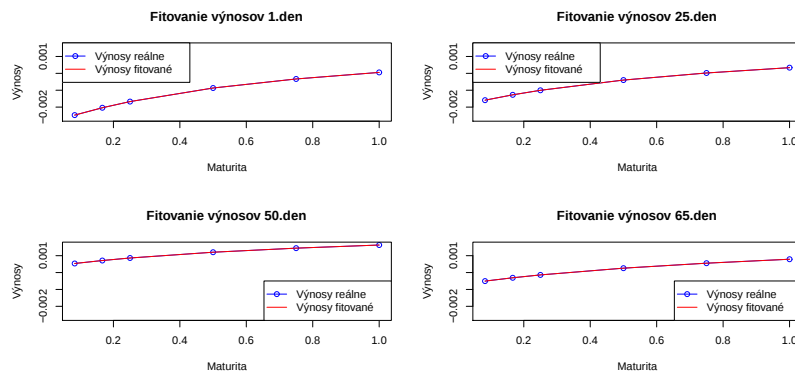
α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
1.376x10 ⁻⁰²	1.4x10 ⁻⁰⁴	1.1007x10 ⁻⁰⁴	1.5719x10 ⁻⁰⁵	4.9242x10 ⁻¹⁹

Tabuľka 30: Parametre a účelová funkcia

V tabuľke 31 sa nachádzajú parametre a účelová funkcia po optimalizovaní, pričom sú taktiež rovnaké ako pri použití počiatočných hodnôt β_1 , β_2 a K .

α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
1.376x10 ⁻⁰²	1.4x10 ⁻⁰⁴	1.1007x10 ⁻⁰⁴	1.5719x10 ⁻⁰⁵	4.9242x10 ⁻¹⁹

Tabuľka 31: Parametre a účelová funkcia po optimalizácii



Obr. 26: Fitovanie výnosov pre simulované dáta s optimalizovanou konštantou

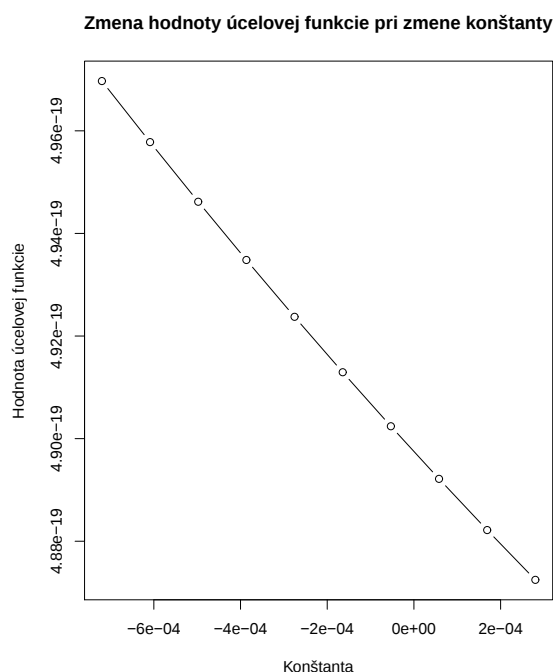
Na grafe 27 vidíme závislosť účelovej funkcie od hodnoty konštanty pre simulované dáta a v tabuľke 32 sú vypísané jednotlivé konštanty a príslušné hodnoty účelovej funkcie. Vidíme, že so zvyšujúcou hodnotou konštanty posunu hodnota účelovej funkcie (60) klesá.

Hodnota konštanty	-7.20x10 ⁻⁰⁴	-6.09x10 ⁻⁰⁴	-4.98x10 ⁻⁰⁴	-3.86x10 ⁻⁰⁴
Hodnota účelovej funkcie	4.97x10 ⁻¹⁹	4.96x10 ⁻¹⁹	4.95x10 ⁻¹⁹	4.93x10 ⁻¹⁹

Hodnota konštanty	-2.75x10 ⁻⁰⁴	-1.64x10 ⁻⁰⁴	-5.32x10 ⁻⁰⁵
Hodnota účelovej funkcie	4.92x10 ⁻¹⁹	4.91x10 ⁻¹⁹	4.90x10 ⁻¹⁹

Hodnota konštanty	-5.79x10 ⁻⁰⁵	1.69x10 ⁻⁰⁴	2.80x10 ⁻⁰⁴
Hodnota účelovej funkcie	4.89x10 ⁻¹⁹	4.88x10 ⁻¹⁹	4.87x10 ⁻¹⁹

Tabuľka 32: Tabuľka hodnôt účelových funkcií v závislosti od hodnoty konštanty



Obr. 27: Závislosť účelovej funkcie od hodnoty konštanty posunu

5.2 Aplikácia na reálne dáta

Výnosy sme fitovali aj na reálne dáta, presnejšie pre Euribor - 1.kvartál 2017, 3.kvartál 2017, 1.polrok 2017, 2.polrok 2017 a celý rok 2017. Najprv sme ich fitovali bez optimalizácie konštanty, teda odhad konštanty bol fixovaný, získaný v kapitole 4.

Pre každú vzorku dát postupne uvádzame počiatočné β_1 , β_2 a konštantu K , tabuľku parametrov α_1 , α_2 , σ_1^2 , σ_2^2 a hodnotu účelovej funkcie F po dosadení počiatočných

hodnôt β_1 , β_2 a konštanty K , následne optimalizované hodnoty β_1 a β_2 a tabuľku parametrov po ich dosadení spolu s účelovou funkciou a nakoniec uvádzame graf fitovaných výnosov.

Potom optimalizujeme funkciu na základe parametrov β_1 , β_2 a konštanty K , pričom počiatočné hodnoty sú vždy rovnaké ako tie, ktoré sme použili pre danú sadu dát bez optimalizácie konštanty, teda keď bola konštanta fixovaná. Následne uvádzame optimalizované parametre β_1 , β_2 , K a tabuľku parametrov po ich dosadení a graf fitovaných výnosov.

1.KVARTÁL 2017

- Počiatočné parametre: $\beta_1 = -5$, $\beta_2 = -4$
- Fixovaná konštanta: $K = -53.7692$

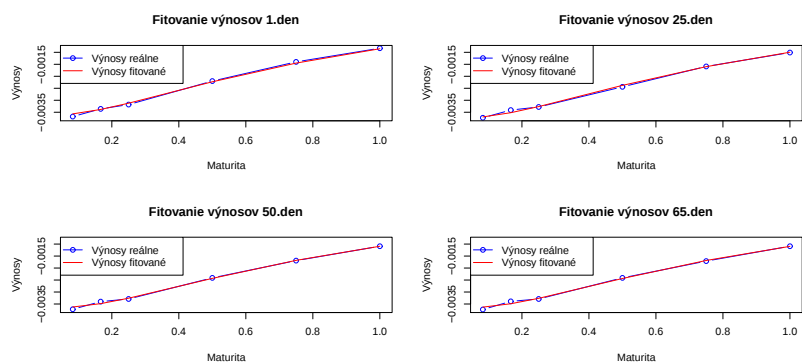
α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
0.8389	-0.5622	-3.95	1.5709	2.1903x10 ⁻⁰⁵

Tabuľka 33: Parametre a účelová funkcia pre počiatočné hodnoty - 1.kvarál 2017

- Optimalizované parametre: $\beta_1 = -3.3037$, $\beta_2 = -3.3$

α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
-6.2974	6.2838	0.0126	-0.0828	3.1614x10 ⁻⁰⁹

Tabuľka 34: Parametre a účelová funkcia po dosadení optimalizovaných parametrov - 1.kvartál 2017



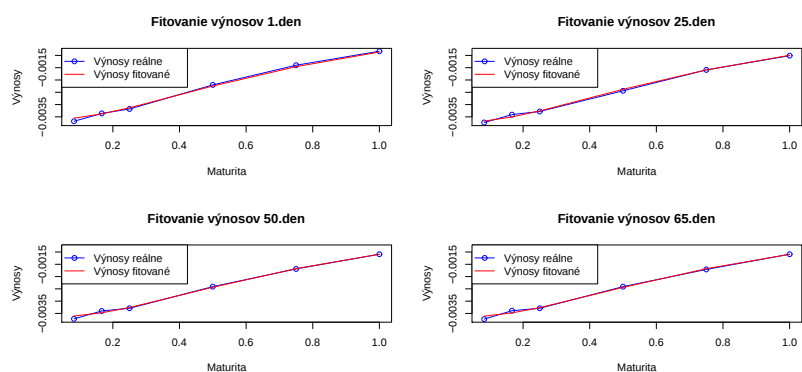
Obr. 28: Fitované výnosy bez optimalizácie konštanty - reálne dáta - 1.kvartál 2017

1.KVARTÁL 2017 - optimalizácia konštanty

- Počiatočné parametre: $\beta_1 = -5$, $\beta_2 = -4$, $K = -53.7692$
- Optimalizované parametre: $\beta_1 = -4.504$, $\beta_2 = -4.5009$, $K = -53.769$

α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
-44.8481	44.8313	0.0264	0.0708	3.4897x10 ⁻⁰⁹

Tabuľka 35: Parametre a účelová funkcia pre optimalizované parametre - 1.kvartál 2017



Obr. 29: Fitované výnosy s optimalizovanou konštantou - reálne dáta - 1.kvartál 2017

3.KVARTÁL 2017

- Počiatočné parametre: $\beta_1 = 2.5$, $\beta_2 = 2$

- Fixovaná konštanta: $K = -0.0072$

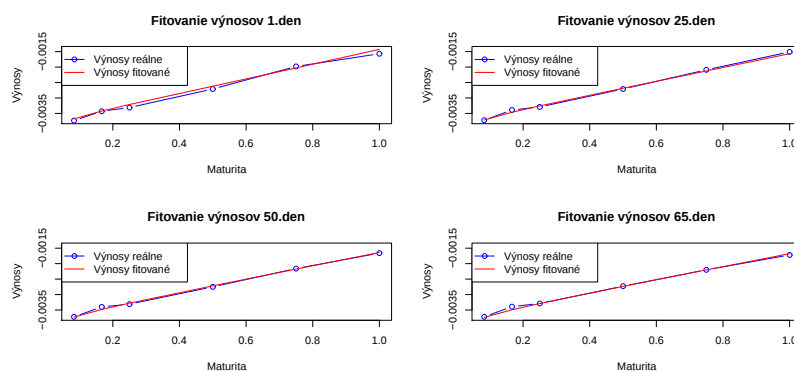
α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
0.0029	0.0073	-1.3143	0.0019	5.9854x10 ⁻⁰⁹

Tabuľka 36: Parametre a účelová funkcia pre počiatočné hodnoty - 3.kvartál 2017

- Optimalizované parametre: $\beta_1 = -0.0633$, $\beta_2 = -61.5969$

α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
0.0043	-0.3341	-15.665	-12.4641	1.9205x10 ⁻⁰⁹

Tabuľka 37: Parametre a účelová funkcia po dosadení optimalizovaných parametrov - 3.kvartál 2017



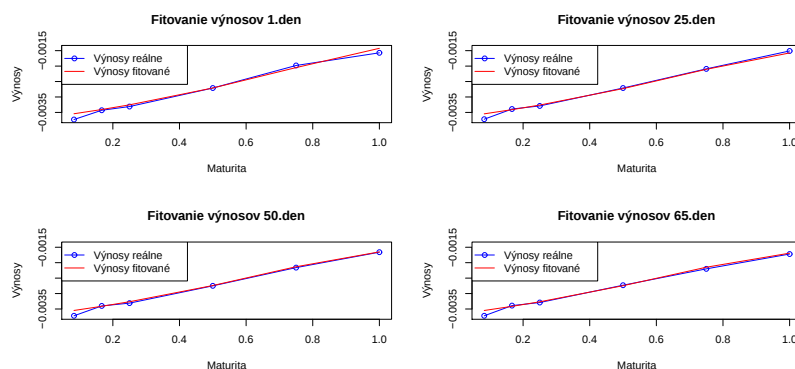
Obr. 30: Fitované výnosy bez optimalizovanej konštanty - reálne dáta - 3.kvartál 2017

3.KVARTÁL 2017 - optimalizácia konštanty

- Počiatočné parametre: $\beta_1 = 2.5$, $\beta_2 = 2$, $K = -0.0072$
- Optimalizované parametre: $\beta_1 = -4.504$, $\beta_2 = 1.9999$, $K = -0.0072$

α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
0.0029	0.0073	-1.3143	0.0019	5.9852x10 ⁻⁰⁹

Tabuľka 38: Parametre a účelová funkcia po dosadení optimalizovaných parametrov - 3.kvartál 2017



Obr. 31: Fitované výnosy s optimalizovanou konštantou - reálne dáta - 3.kvartál 2017

1.POLROK 2017

- Počiatočné parametre: $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -1$
- Fixovaná konštanta: $K = 1034.802$

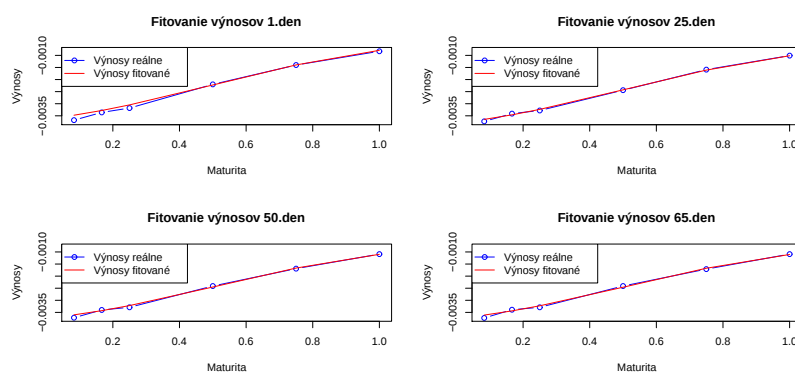
α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
3.1797	-4.0654	3.0726	8.8574	0.00208

Tabuľka 39: Parametre a účelová funkcia po dosadení počiatočných parametrov - 1.polrok 2017

- Optimalizované parametre: $\beta_1 = -0.0432$, $\beta_2 = -0.0461$

α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
-4.3361x10 ⁺⁰²	4.3361x10 ⁺⁰²	2.438x10 ⁻⁰³	-1.2853	4.6514x10 ⁻⁰⁹

Tabuľka 40: Parametre a účelová funkcia po dosadení optimalizovaných parametrov - 1.polrok 2017

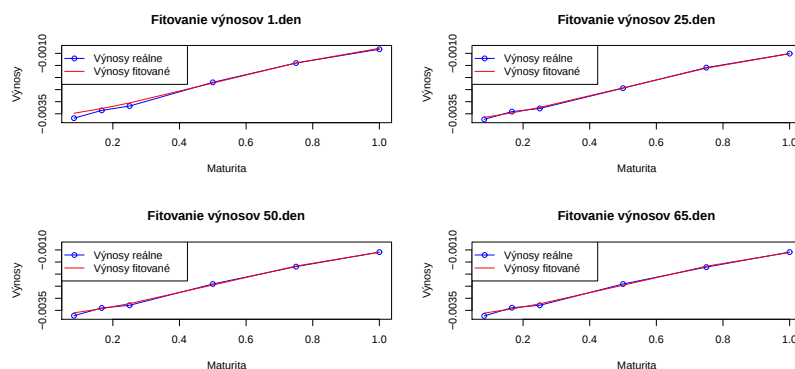


Obr. 32: Fitované výnosy bez optimalizácie konštanty - reálne dáta - 1.polrok 2017

1.POLROK 2017 - optimalizácia konštanty

- Počiatočné parametre: $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -1$, $K = 1034.802$
- Optimalizované parametre: $\beta_1 = -0.0562$, $\beta_2 = -0.059$ a $K = 1034.801$

α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
-3.5908x10 ⁺⁰²	3.5908x10 ⁺⁰²	2.065x10 ⁻⁰³	-1.0321	4.6246x10 ⁻⁰⁹



Obr. 33: Fitované výnosy - reálne dáta - 1.polrok 2017

2.polrok 2017

- Počiatočné parametre: $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = -3$
- Fixovaná konštanta: $K = 0.0381$

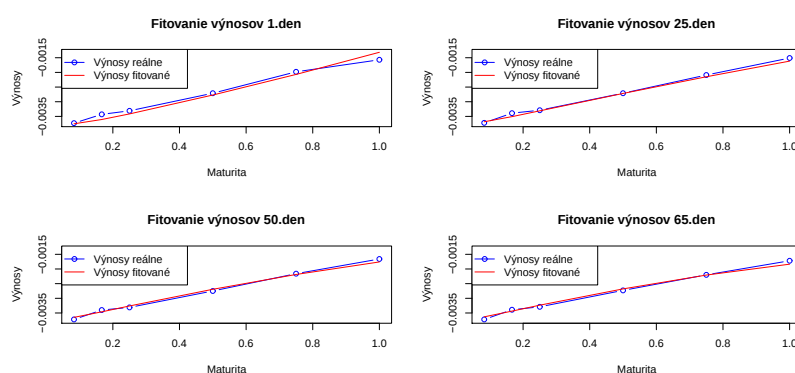
α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
0.0019	-0.0121	4.7908	-0.0177	7.1094x10 ⁻⁰⁹

Tabuľka 41: Parametre a účelová funkcia po dosadení počiatočných parametrov - 2.polrok 2017

- Optimalizované parametre: $\beta_1 = 0.3987$, $\beta_2 = -15.4932$

α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
0.0048	-0.071	13.3161	-0.2478	4.5192x10 ⁻⁰⁹

Tabuľka 42: Parametre a účelová funkcia po dosadení optimalizovaných parametrov - 2.polrok 2017



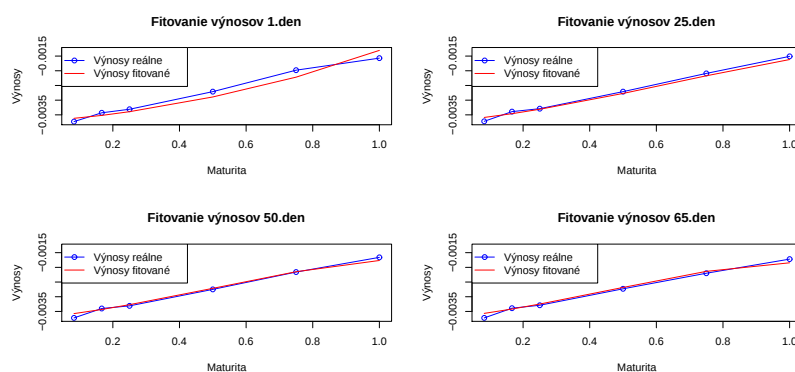
Obr. 34: Fitované výnosy bez optimalizovanej konštanty - reálne dáta - 2.polrok 2017

2.POLROK 2017 - optimalizácia konštanty

- Počiatočné parametre: $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = -3$, $K = 0.0381$

- Optimalizované parametre: $\beta_1 = 1.9999$, $\beta_2 = -3$, $K = 0.03807$

α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
0.0019	-0.0121	4.7907	-0.0175	7.1174×10^{-09}



Obr. 35: Fitované výnosy s optimalizovanou konštantou - reálne dáta - 2.polrok 2017

ROK 2017

- Počiatočné parametre: $\beta_1 = -3$, $\beta_2 = -4$
- Fixovaná konštanta: $K = -21248.1579$

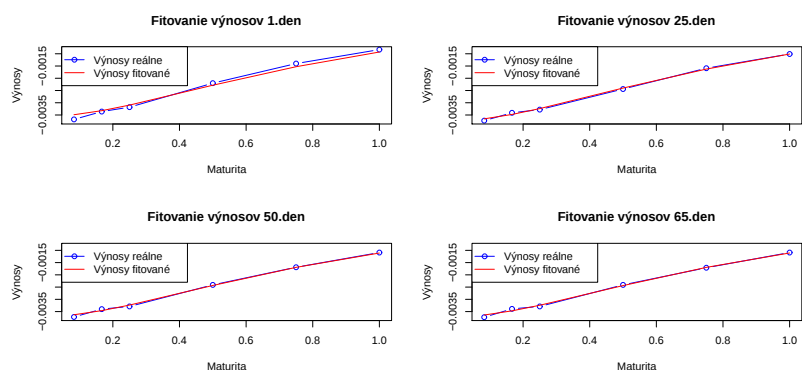
α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
0.0707	-0.0931	0.0591	-0.0208	2.7779×10^{-08}

Tabuľka 43: Parametre a účelová funkcia po dosadení počiatočných parametrov - 2017

- Optimalizované parametre: $\beta_1 = -1.972$, $\beta_2 = -2.0454$

α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
-0.3491	0.3407	-1.5622	-0.0772	5.3151×10^{-09}

Tabuľka 44: Parametre a účelová funkcia po dosadení optimalizovaných parametrov - 2017



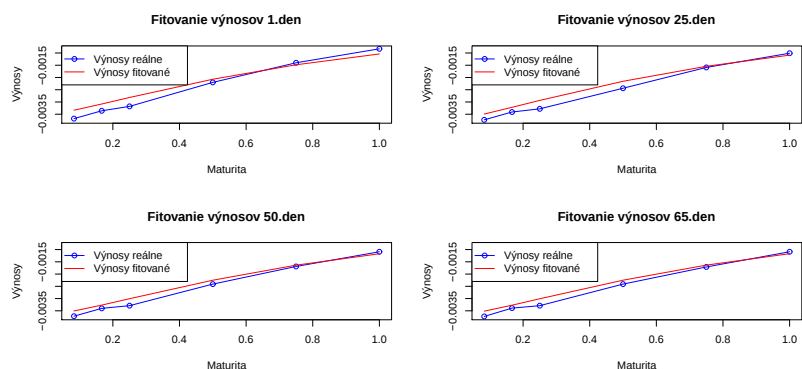
Obr. 36: Fitované výnosy bez optimalizácie konštanty - reálne dáta - 2017

ROK 2017 - optimalizácia konštanty

- Počiatočné parametre: $\beta_1 = -3$, $\beta_2 = -4$, $K = -21248.1579$
- Optimalizované parametre: $\beta_1 = -3.000000045$, $\beta_2 = -3.999999958$, $K = -21248.1679$

α_1	α_2	σ_1^2	σ_2^2	F
0.0707	-0.0931	0.0591	-0.0209	2.7779×10^{-08}

Tabuľka 45: Parametre a účelová funkcia po dosadení optimalizovaných parametrov - 2017



Obr. 37: Fitované výnosy s optimalizovanou konštantou - reálne dáta - 2017

Je dôležité, aby parametre σ_1^2 a σ_2^2 vyšli po optimalizácii kladné. V tabuľke 46 nájdeme zhrnutie prípustných a neprípustných výsledkov pre jednotlivé dáta.

Dáta	σ_1^2	σ_2^2	Záver
simulované dáta	prípustné	prípustné	prípustné
1.kvartál 2017	prípustné	neprípustné	neprípustné
1.kvartál 2017 - optimalizácia konštanty	prípustné	prípustné	prípustné
3.kvartál 2017	neprípustné	neprípustné	neprípustné
3.kvartál 2017 - optimalizácia konštanty	prípustné	neprípustné	neprípustné
1.polrok 2017	prípustné	neprípustné	neprípustné
1.polrok 2017 - optimalizácia konštanty	prípustné	neprípustné	neprípustné
2.polrok 2017	prípustné	neprípustné	neprípustné
2.polrok 2017 - optimalizácia konštanty	prípustné	neprípustné	neprípustné
rok 2017	neprípustné	neprípustné	neprípustné
rok 2017 - optimalizácia konštanty	prípustné	neprípustné	neprípustné

Tabuľka 46: Zhrnutie výsledkov optimalizácie

Ako vidíme z tabuľky 46, jediné prípustné hodnoty σ_1^2 a σ_2^2 boli pri simulovaných dátach a v prípade dát 1.kvartálu 2017 pričom sa optimalizovala aj konštanta posunu. Pre odstránenie tohto problému by bolo vhodné použiť pri optimalizovaní parametrov viazanú optimalizáciu namiesto voľnej optimalizácie.

Záver

V našej diplomovej práci sme sa zaoberali dvojfaktorovým modelom okamžitej úrokovej miery, v ktorom jeden faktor má Vašíčkov tvar a druhý faktor má tvar Cox-Ingersoll-Rossovho procesu. Hlavným cieľom bolo pokúsiť sa odhadnúť konštantu posunu faktorov pri použití algoritmu z článku [3], čo sme sa snažili docieľiť použitím metódy maximálnej vierhodnosti. Ďalším cieľom bolo porovnať dvojfaktorový model s jednofaktorovým Vašíčkovým modelom, čo sa týkalo najmä výnosových kriviek.

V prvej kapitole sme sa venovali základným pojmom finančných derivátov a stochastického kalkulu. Na konci kapitoly sme porovnali výnosové krivky jednofaktorového Vašíčkovho modelu a dvojfaktorového modelu a ukázali sme limity výnosových kriviek pri maturite idúcej do nekonečna.

V druhej kapitole sme rozoberali pravdepodobnostné rozdelenie Vašíčkovho modelu a Cox-Ingersoll-Rossovho modelu. Keďže sme neskôr kvôli zložitosti aproximovali rozdelenie Cox-Ingersoll-Rossovho modelu normálnym rozdelením, tak sme na základe grafov porovnali hustotu normálneho rozdelenia so strednou hodnotou a varianciou korešpondujúcou s Cox-Ingersoll-Rossovým modelom a hustotu necentrálneho χ^2 . Z grafov bolo vidieť, že pri daných parametroch boli hustoty približne rovnaké, teda aproximáciu vo štvrtnej kapitole bolo možné uskutočniť.

V tretej kapitole sme na simulované a reálne dáta použili algoritmus pre jednofaktorový Vašíčkov model z článku [2] a algoritmus pre dvojfaktorový model z článku [3] a pomocou nich sme odhadli short rate a nafitovali výnosové krivky. Pri dvojfaktorovom modeli a simulovaných dátach bolo jasne vidno, že odhadnuté faktory sú od simulovaných posunuté o konštantu, v jednom prípade s kladným a v druhom prípade so záporným znamienkom, hoci v súčte bola short rate odhadnutá dobre, takisto aj výnosy boli nafitované správne. Pri reálnych dátach sme to nemali s čím porovnať, no z hodnôt jednotlivých faktorov bolo jasné, že taká hodnota short rate nie je možná, čo však nie je problém, pretože vo formulácii modelu sú faktory short rate r_1 a r_2 len pomocné procesy, ktoré spolu definujú short rate, ale nemajú konkrétnu interpretáciu,

a opäť v súčte faktorov short rate vyzerala byť reálna.

V štvrtej kapitole sme sa pokúsili odhadnúť konštantu posunu pre simulované a reálne dáta. Pre odhad sme používali metódu maximálnej vierohodnosti, pričom sme pravepodobnostné rozdelenie Cox-Ingersoll-Rossovoho modelu aproximovali normálnym rozdelením. Pre simulované dáta sme vedeli overiť, či konštantu odhadlo správne. Bohužiaľ, neodhadlo ju úplne presne, no rozdiel medzi skutočnou konštantou a odhadnutou nebol veľký. Keďže sme uvažovali dvojfaktorový model, z ktorého jeden faktor mal tvar Cox-Ingersoll-Rossovoho procesu, bolo dôležité, aby po odrátaní, resp. prirátaní konštanty k faktoru, ktorý predstavoval Cox-Ingersoll-Rossov proces, neklesli hodnoty v danom faktore do záporných čísel.

V piatej kapitole sme fitovali výnosové krivky na základe parametrov, ktoré najlepšie minimalizovali účelovú funkciu F , teda súčet štvorcov rozdielov skutočných a odhadnutých výnosov. Pri jednotlivých súboroch dát sme najprv uvažovali konštantu posunu fixovanú a potom sme sa ju pokúsili zoptimalizovať. Vyskytol sa tu však problém, a to taký, že parametre σ_1^2 a σ_2^2 vo väčšine prípadov vyšli záporné, čo je však neprípustné. Takisto, keď sme sa pokúsili zoptimalizovať aj konštantu, stávalo sa, že výnosy boli nafitované horšie ako v prípade, keď bola konštanta fixovaná.

V budúcnosti by bolo vhodné použiť pri metóde maximálnej vierohodnosti presné rozdelenie Cox-Ingersoll-Rossovoho procesu, teda necentrálny χ^2 a pokúsiť sa odhad konštanty zautomatizovať. Pri fitovaní výnosov z piatej kapitoly by bolo potrebné používať viazanú optimalizáciu namiesto voľnej, aby sa zamedzil výskyt neprípustných hodnôt parametrov.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Brigo, D., Mercurio, F.: *Interest Rate Models - Theory and Practice*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Heidelberg, 2007.
- [2] Bučková Z., Halgašová J., Stehlíková B.: *Estimating the Short Rate from the Term Structures in the Vasicek Model*, Tatra Mountains Mathematical Publications 61, 87-104, 2014.
- [3] Bučková Z., Halgašová J., Stehlíková B.: *Short rate as a sum of two CKLS-type processes*, Numerical Analysis and Its Applications, 243 - 251, 2017.
- [4] Cox, J. C., Ingersoll Jr., J. E., Ross, S. A.: *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica, Vol. 53, No. 2, 385 - 407, 1985.
- [5] Halgašová J.: *Aproximácia cien dlhopisov v dvojfaktorových modeloch*, diplomová práca, FMFI UK, 2011.
- [6] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, EPOS, Bratislava, 2005, ISBN: 80-8057-651-3.
- [7] Mikula, K., Stehlíková, B., Ševčovič, D.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Nakladateľstvo STU, Bratislava, 2009, ISBN: 978-80-227-3014-3.
- [8] Janková, K., Pázman, A.: *Pravdepodobnosť a štatistika*, Vydavateľstvo UK, Bratislava, 2012, ISBN: 978-80-223-2931-6.
- [9] Mlynárik, M.: *Kalibrácia jednofaktorových modelov úrokových mier pomocou analytickej aproximácie cien dlhopisov*, diplomová práca, FMFI UK, 2009.
- [10] Stehlíková, B.: *A simple analytic approximation formula for the bond price in the Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders model*, International journal of numerical analysis and modeling, Volume 4, Number 3, 224 - 234, 2013.
- [11] Stehlíková, B.: *Finančné deriváty*, prednášky, FMFI UK, Bratislava, 2017.