

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



STABILITA PRÚDENIA V REAKTÍVNYCH
PÓROVITÝCH PROSTREDIACH

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2018

Bc. Daniela PELLEROVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**STABILITA PRÚDENIA V REAKTÍVNYCH
PÓROVITÝCH PROSTREDIACH**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Doc. RNDr. Peter Guba, PhD.

Bratislava 2018

Bc. Daniela PELLEROVÁ



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Daniela Pellerová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Stabilita prúdenia v reaktívnych pórovitých prostrediach.
Stability of flows in reactive porous media.

Cieľ: Pri prúdení kvapalnej fázy cez pórovité médium dochádza často k reakcii medzi kvapalinou a pevnou štruktúrou pórovitého média, ktorá má za následok zmenu permeability prostredia. Reaktívne prúdenie podlieha nestabilite, ktorá sa vyznačuje sústredením toku do relatívne úzkych kánalov. Takáto nestabilita často vzniká pri fázovej premene viacložkových zmesí. Cieľom práce je
(i) formulácia modelu propagujúceho frontu v reaktívnom pórovitom médiu so zahrnutím difúzie prímеси a lokálnych variácií v pórovitosti prostredia a
(ii) štúdium linearizovanej stability propagujúceho frontu v limite malých a veľkých vlnových čísel pri malých zmenách permeability pórovitého prostredia.

Vedúci: doc. RNDr. Peter Guba, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 26.01.2017

Dátum schválenia: 27.01.2017
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

PodĎakovanie Rada by som sa touto cestou poĎakovala svojmu vedúcemu diplomovej práce doc. RNDr. Petrovi Gubovi, PhD., za venovaný čas, pomoc, podnetné rady a pripomienky pri písaní práce. Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

PELLEROVÁ, Daniela: Stabilita prúdenia v reaktívnych pórovitých prostrediach, Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Doc. RNDr. Peter Guba, PhD., Bratislava, 2018, 49 strán.

V práci sa zaoberáme modelom reaktívneho frontu prúdiaceho pórovitým prostredím s rozpustnými minerálmi. Uvádzame systém diferenciálnych rovníc a okrajových podmienok popisujúci model, jeho riešenie pre základný stav a bezrozmernú formuláciu. Do systému zavádzame poruchové funkcie, pomocou ktorých analyzujeme lineárnu stabilitu odvodeného dvojbodového okrajového vlastnohodnotového problému.

Analýzu lineárnej stability uvádzame pre rôzne formy permeabilitného zákona v pórovitom prostredí. Aplikáciou spektrálnych numerických metód identifikujeme stabilné charakteristiky pórovitého systému v závislosti na kontrolných parametroch.

Kľúčové slová: pórovité prostredie, reaktívny front, lineárna stabilita

Abstract

PELLEROVÁ, Daniela: Stability of flows in reactive porous media, Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Doc. RNDr. Peter Guba, PhD., Bratislava, 2018, 49p.

In our thesis we study a model of reactive front propagating through porous media with dissoluble minerals. We introduce system of differential equations with corresponding boundary conditions, its solution for earlier defined base state and non-dimensionalized formulation.

Adding perturbations and linearizing about the base state we derive a two-point boundary eigenvalue problem. We analyze linear stability for various forms of permeability law in reactive porous media. Applying spectral numerical methods we identify the stability characteristics of the porous system as a function of underlying control parameters.

Keywords: Porous media, Reactive front, Linear stability

Obsah

Úvod	9
1 Riadiace rovnice	10
2 Základný stav	11
2.1 Základný stav: Rozmerný tvar	11
2.2 Základný stav: Bezrozmerný tvar	13
3 Linearizovaný poruchový systém	15
4 Numerické riešenie vlastnohodnotového problému	18
4.1 Výsledky pre permeabilitu $\kappa_1(w)$	18
4.2 Výsledky pre permeabilitu $\kappa_2(w)$	23
4.3 Výsledky pre permeabilitu $\kappa_3(w)$	27
Záver	31
Zoznam citovanej literatúry	32
Príloha A Čebyševova spektrálna diskretizačná metóda	33
Príloha B Zdrojové kódy	43

Úvod

Teória hydrodynamickej stability [1] predstavuje dôležitú súčasť matematického popisu dynamiky tekutín. Jej hlavnou snahou je určiť podmienky pre prechod laminárneho prúdenia k turbulencii. Laminárne prúdenie je z matematického hľadiska ponímané ako základný stav systému a jeho identifikácia je prvým krokom pri analýze hydrodynamickej stability. Zavedením perturbácií základného stavu získavame porušený systém. Analýza takéhoto porušeného systému je cieľom aj našej diplomovej práce. Laminárne prúdenie aj jeho perturbácie sú riadené systémom parciálnych diferenciálnych rovníc, ktoré reprezentujú zákony zachovania. V lineárnej teórii stability sa zameriavame na poruchové veličiny, ktorých veľkosť je menšia v porovnaní s veľkosťou základného stavu [1].

Prúdenie chemicky reaktívnej kvapaliny v pórovitom prostredí, t.j. kvapaliny obohatenej o kyselinu, je spojené s rozpúšťaním pevnej fázy pórovitého prostredia s následnou zmenou permeability (priepustnosti). Reaktívny front, t.j. rozhranie medzi neporušenou a čiastočne rozpustenou časťou pórovitého prostredia, často podlieha morfolologickej nestabilite tzv. *reactive infiltration instability* [3]. Takéto reakcie môžeme pozorovať napríklad pri uskladňovaní CO_2 v podzemných pórovitých rezervoároch (tzv. sekvestrácia; [6]).

Predchádzajúce práce boli založené na predpoklade (i) *tenkej* hrúbky reakčného frontu a (ii) relatívne slabej závislosti permeability na koncentračnom poli (pozri [8], [9]). Model predpokladá, že kvapalina obohatená o kyselinu, úplne vyplňuje pórovité prostredie a že povrch rozpustných minerálov je úmerný ich objemu [3].

Cieľom našej práce je analýza lineárnej infiltračnej stability pre (i) ľubovoľnú dĺžkovú škálu, a teda ľubovoľnú hrúbku reaktívneho infiltračného frontu, a (ii) pre komplexnejšie permeabilitné vzťahy vystupujúce v Darcyho rovnici. Najskôr sa budeme venovať identifikácii a analýze parametrickej závislosti základného stavu (kapitola 2). Odvodíme a vyriešime systém sebestobných diferenciálnych rovníc pre záujmové veličiny a zbezrozmernením pripravíme systém pre stabilitnú analýzu.

Zavedením poruchových funkcií do systému a linearizáciou na okolí základného stavu sa dostávame k formulácii okrajovej dvojbodovej vlastnohodnotovej úlohy pre poru-

chové funkcie resp. poruchové amplitúdy (kapitola 3). Tento systém budeme v kapitole 4 riešiť numericky Čebyševovou spektrálnou metódou [10] v systéme MATLAB, pričom budeme stavať na knižnici HYDROSTAB [12]. Uvedieme numerické výsledky a ich porovnanie pre špecifické voľby permeabilitných vzťahov a zvážime vplyv ďalších parametrov na stabilitu systému.

1 Riadiace rovnice

Nech $c(x, y, t)$ a $w(x, y, t)$ sú postupne koncentrácia kyseliny na jednotku objemu pórovitého prostredia a koncentrácia rozpustných minerálov na jednotku objemu pevného prostredia. Premennou $\mathbf{u}(x, y, t)$ budeme označovať objemový tok kyseliny na jednotku plochy pórovitého média a predpokladáme, že pórovitosť tohto prostredia (ozn. Φ) sa výrazne nemení. Rovnako predpokladáme, že permeabilita (priepustnosť) prostredia je závislá na koncentrácii w , ozn. $\kappa(w)$. Nakoniec predpokladáme, že chemická reakcia má rýchlostnú konštantu k a stechiometrický koeficient ν . Riadiace rovnice pre koncentrácie c a w majú tvar

$$\Phi \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}c) = -kwc, \quad (1.1)$$

$$\nu(1 - \Phi) \frac{\partial w}{\partial t} = -kwc. \quad (1.2)$$

Počiatočná hodnota koncentrácie kyseliny je c_0 a zodpovedá stavu, keď sú všetky minerály rozpustené, teda keď $w = 0$. Analogicky stavu, kedy žiadne z minerálov nie sú rozpustené zodpovedá hodnota koncentrácie rozpustných minerálov $w = w_0$ a hodnota koncentrácie kyseliny $c = 0$. Uvažujeme nekonečne rozľahlý systém v smere x , pričom $c \rightarrow c_0$ a $w \rightarrow 0$ pre $x \rightarrow -\infty$; analogicky $c \rightarrow 0$ a $w \rightarrow w_0$ pre $x \rightarrow +\infty$. Rýchlostné pole \mathbf{u} a tlak p sú riadené Darcyho rovnicou a lokálnym zákonom zachovania v tvare

$$\mathbf{u} = -\frac{\kappa(w)}{\mu} \nabla p, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.4)$$

kde premenná μ je viskozita kvapalnej fázy a $\kappa = \kappa(w)$ je permeabilita pórovitého prostredia. V zložkovom tvare majú rovnice (1.3) a (1.4) tvar

$$u = -\frac{\kappa(w)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.5)$$

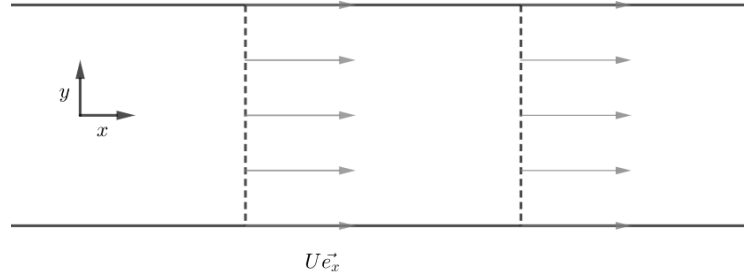
$$v = -\frac{\kappa(w)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1.7)$$

2 Základný stav

2.1 Základný stav: Rozmerný tvar

Pod základným stavom rozumieme riešenie pre polia c, w, \mathbf{u} a p , ktoré sú funkciou priestorovej premennej x a času t prostredníctvom novej nezávislej premennej $\xi = x - Vt$ (sebepodobná premenná), kde V je konštanta (rýchlosť frontu), ktorá je súčasťou riešenia. Polia c, w a p sú funkciou ξ a rýchlostné pole \mathbf{u} má tvar $\mathbf{u} = U\vec{e}_x$, kde U je predpísaná konštantná rýchlosť (streaming flow) a \vec{e}_x je jednotkový vektor v smere x -ovej osi.



Obr. 1: Rýchlostné pole $\mathbf{u} = U\vec{e}_x$.

Potom pre okrajové podmienky platí, že ak $x \rightarrow \infty$ tak aj $\xi \rightarrow \infty$ (rovnako keď $x \rightarrow -\infty$, tak $\xi \rightarrow -\infty$).

Rovnice (1.1) a (1.2) môžeme po zavedení sebepodobnej premennej $\xi = x - Vt$ prepísať ako

$$-\Phi V c' + U c' = -k w c, \quad (2.1)$$

$$-\nu(1 - \Phi)V w' = -k w c, \quad (2.2)$$

kde c' a w' postupne označujú $dc/d\xi$ a $dw/d\xi$ cez interval $(-\infty, \xi)$. Aplikáciou okrajových podmienok pre c a w pre $\xi \rightarrow -\infty$ z rovníc (2.1) a (2.2) dostávame

$$(U - \Phi V)(c - c_0) = -\nu(1 - \Phi)V w. \quad (2.3)$$

Analogicky, integráciou cez interval (ξ, ∞) a aplikáciou okrajových podmienok pri $\xi \rightarrow \infty$ dostávame

$$(U - \Phi V)c = -\nu(1 - \Phi)V(w - w_0). \quad (2.4)$$

Z rovníc (2.3) a (2.4) potom dostávame rovnicu

$$(U - \Phi V)c_0 = \nu(1 - \Phi)Vw_0, \quad (2.5)$$

ktorá určuje konštantnú rýchlosť frontu

$$V = \frac{U}{\Phi + \alpha^{-1}}, \quad (2.6)$$

kde $\alpha \equiv c_0/[\nu(1 - \Phi)w_0]$ je tzv. kapacitné číslo.

Z rovnice (2.1) potom pre w máme

$$w = \frac{(\Phi V - U)}{k} \frac{c'}{c}. \quad (2.7)$$

Pre neskoršie použitie vyjadríme aj w'

$$w' = \frac{(\Phi V - U)}{k} \left(\frac{c'}{c} \right)'. \quad (2.8)$$

Dosadením vzťahov (2.7) a (2.8) do rovnice (2.2) dostaneme nelineárnu obyčajnú diferenciálnu rovnicu pre c v tvare

$$c'(U - \Phi V) = -\frac{1}{k}\nu(1 - \Phi)V(\Phi V - U) \left(\frac{c'}{c} \right)', \quad (2.9)$$

$$c' = \frac{\nu(1 - \Phi)V}{k} \left(\frac{c'}{c} \right)'. \quad (2.10)$$

Separáciou premenných ξ a c získame riešenie v tvare

$$c(\xi) = c_0 \frac{1}{1 + e^{\beta\xi}}, \quad (2.11)$$

kde $\beta = U\nu(1 - \Phi)/[k(\Phi c_0 + \nu(1 - \Phi)w_0)]$.

Z rovnice (2.7) potom pre riešenie $w(\xi)$ máme

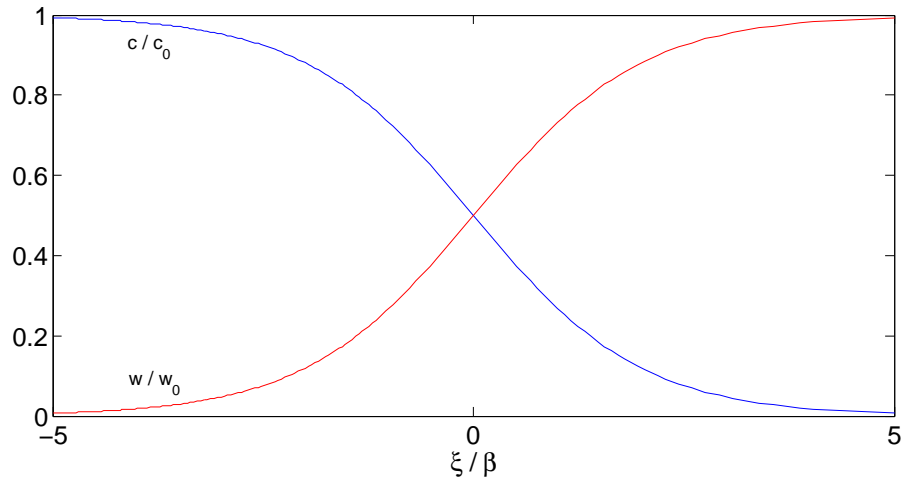
$$w(\xi) = w_0 \frac{e^{\beta\xi}}{1 + e^{\beta\xi}}, \quad (2.12)$$

kde sme využili vzťah (2.6) a definíciu pre koeficient $\alpha = c_0/[\nu(1 - \Phi)w_0]$. Uvedené vzťahy motivujú výber nasledujúcich rozmerných škál: c_0 pre c , w_0 pre w a $1/\beta$ pre ξ v kapitole 2.2. Graf už zbezrozmernencých koncentrácií c a w môžeme vidieť na obrázku 2.

Rovnice (1.5) a (1.6) sú predpokladom $\mathbf{u} = U\vec{e}_x$ a $p = p(\xi)$ splnené automaticky, zatiaľ čo rovnica (1.7) určuje tlakové pole v tvare

$$p(\xi) = p_0 - \mu U \int_{-\infty}^{\xi} \frac{1}{\kappa[w(\xi)]} d\xi, \quad (2.13)$$

pre ľubovoľnú predpísanú funkciu permeability $\kappa = \kappa(w)$ (viď nižšie).



Obr. 2: Graf bezrozmerných koncentrácií c/c_0 a w/w_0 ako funkcií ξ/β .

2.2 Základný stav: Bezrozmerný tvar

Pre bezrozmernú formuláciu zavádzame rozmerné škály c_0 pre c , w_0 pre w , V pre \mathbf{u} , $1/\beta$ pre x a y , $1/\beta V$ pre t a $\mu V/(\kappa_0 \beta)$ pre p .

Závislé a nezávislé bezrozmerné premenné definujeme v tvare

$$c^* = c/c_0, \quad (2.14)$$

$$w^* = w/w_0, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}/V, \quad (2.16)$$

$$p^* = p/(\mu V/\kappa_0 \beta), \quad (2.17)$$

$$\kappa^* = \kappa/\kappa_0 \quad (2.18)$$

a

$$x^* = x/(1/\beta), \quad (2.19)$$

$$y^* = y/(1/\beta), \quad (2.20)$$

$$t^* = t/(1/\beta V). \quad (2.21)$$

V ďalšej časti symbol $*$ nebudeme písať a všetky nezávislé a závislé premenné budeme chápať ako bezrozmerné.

Pozrieme sa postupne, čo sa stane s riadnicami rovnicami (1.1) a (1.2).

$$\Phi \frac{c_0}{1/\beta V} \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}c) V \beta c_0 c = -k w_0 w c_0 c, \quad (2.22)$$

$$\alpha \left(\Phi \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}c) \right) = -w c, \quad (2.23)$$

kde $\alpha \equiv c_0/(1/\beta V)$.

Analogicky zbezrozmerníme aj rovnice (1.2)–(1.4). Výsledný bezrozmerný systém má potom tvar

$$\alpha \left(\Phi \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}c) \right) = -w c, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -w c, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{u} = -\kappa(w) \nabla p, \quad (2.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.27)$$

Okrajové podmienky pre bezrozmerný systém majú tvar $c \rightarrow 1, w \rightarrow 0, p \rightarrow 1$ pri $x \rightarrow -\infty$ a $c \rightarrow 0, w \rightarrow 1, p \rightarrow 0$ pri $x \rightarrow \infty$. Bezrozmerné parametre v týchto rovniciach sú α, Φ a parametre v permeabilitnom zákone $\kappa = \kappa(w)$ uvedené v kapitole 4.

Využitím definícií (2.14)–(2.21) možno základný stav odvodený v 2.1 vyjadriť v nasledovnej kompletnej forme

$$c(\xi) = \frac{1}{1 + e^\xi}, \quad (2.28)$$

$$w(\xi) = \frac{e^\xi}{1 + e^\xi}, \quad (2.29)$$

$$p(\xi) = 1 - (\Phi + 1/\alpha) \int_{-\infty}^{\xi} \frac{1}{\kappa[w(\xi)]} d\xi, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{u} = (\Phi + 1/\alpha) \vec{e}_x, \quad (2.31)$$

kde \vec{e}_x je jednotkový vektor v smere osi x .

3 Linearizovaný poruchový systém

V tejto časti budeme analyzovať stabilitu základného stavu voči linearizovaným poruchám. Zavedieme poruchové funkcie $\hat{c}(\xi, y, t)$ v tvare normálnych módov (analogicky pre ostatné veličiny) v tvare:

$$c = \bar{c} + \epsilon \hat{c} = \frac{1}{1 + e^\xi} + \epsilon e^{\lambda t + i a y} \tilde{c}(\xi), \quad (3.1)$$

$$w = \bar{w} + \epsilon \hat{w} = \frac{e^\xi}{1 + e^\xi} + \epsilon e^{\lambda t + i a y} \tilde{w}(\xi), \quad (3.2)$$

$$u = \bar{u} + \epsilon \hat{u} = \Phi + \alpha^{-1} + \epsilon e^{\lambda t + i a y} \tilde{u}(\xi), \quad (3.3)$$

$$v = \bar{v} + \epsilon \hat{v} = 0 + \epsilon e^{\lambda t + i a y} \tilde{v}(\xi), \quad (3.4)$$

$$p = \bar{p} + \epsilon \hat{p} = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\Phi + \alpha^{-1}}{\kappa(w)} d\xi + \epsilon e^{\lambda t + i a y} \tilde{p}(\xi), \quad (3.5)$$

kde \bar{c} je koncentrácia kyseliny v základnom stave (analogicky pre ostatné veličiny) a ϵ je malý parameter, ktorý meria amplitúdu porúch. Poruchové veličiny sú úmerné $e^{\lambda t + i a y}$, pretože poruchový diferenciálny systém je separovateľný v premenných y a t .

Systém je stabilný voči linearizovaným poruchám, ak reálne časti všetkých vlastných čísel sú záporné. Ak aspoň jedno vlastné číslo má kladnú reálnu časť, systém je nestabilný. V prípade nulového vlastného čísla ide o neutrálnu stabilitu. Dosadením vzťahov (3.1) – (3.5) do rovnice (2.24) dostávame

$$\alpha \left(\Phi \frac{\partial}{\partial t} (\bar{c} + \epsilon \hat{c}) + \nabla \cdot ((\bar{\mathbf{u}} + \epsilon \hat{\mathbf{u}})(\bar{c} + \epsilon \hat{c})) \right) = -(\bar{w} + \epsilon \hat{w}) \quad (3.6)$$

$$(\bar{c} + \epsilon \hat{c}),$$

$$\alpha \left(\Phi \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \Phi \epsilon \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{c}) + \epsilon \nabla \cdot (\hat{\mathbf{u}} \bar{c} + \bar{\mathbf{u}} \hat{c}) + \epsilon^2 (\hat{\mathbf{u}} \hat{c}) \right) = -\bar{c} \bar{w} - \epsilon (\bar{c} \hat{w}) + \quad (3.7)$$

$$+ \epsilon (\hat{c} \bar{w}) - \epsilon^2 (\hat{\mathbf{u}} \hat{c}).$$

Využitím rovnice (2.24) pre základný stav a zanedbaním členov $O(\epsilon^2)$ máme rovnicu pre poruchovú funkciu koncentrácie kyseliny $\hat{c}(\xi, y, t)$

$$\alpha \Phi \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} + \alpha \nabla \cdot (\hat{\mathbf{u}} \bar{c} + \bar{\mathbf{u}} \hat{c}) = -(\bar{c} \hat{w} + \hat{c} \bar{w}). \quad (3.8)$$

Analogicky pre rovnicu (2.25) máme

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{w} + \epsilon \hat{w}) = -(\bar{w} + \epsilon \hat{w})(\bar{c} + \epsilon \hat{c}), \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} = -\bar{c} \bar{w} - \epsilon \bar{c} \hat{w} - \epsilon \hat{c} \bar{w} - \epsilon^2 \hat{\mathbf{u}} \hat{c}. \quad (3.10)$$

Použitím rovnice (2.25) dostávame rovnicu pre poruchovú funkciu $\hat{w}(\xi, y, t)$

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} = -(\bar{c}\hat{w} + \hat{c}\bar{w}). \quad (3.11)$$

Ďalšie poruchové rovnice získame z Darcyho rovnice (2.26) a lokálneho zákona zachovania (2.27). V zložkovom tvare máme

$$u = -\kappa(w) \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.12)$$

$$v = -\kappa(w) \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3.13)$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (3.14)$$

alebo

$$\bar{u} + \epsilon \hat{u} = -\kappa(\bar{w} + \epsilon \hat{w}) \frac{\partial(\bar{p} + \epsilon \hat{p})}{\partial x}, \quad (3.15)$$

$$\bar{v} + \epsilon \hat{v} = -\kappa(\bar{w} + \epsilon \hat{w}) \frac{\partial(\bar{p} + \epsilon \hat{p})}{\partial y}, \quad (3.16)$$

$$0 = \frac{\partial(\bar{u} + \epsilon \hat{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v} + \epsilon \hat{v})}{\partial y}. \quad (3.17)$$

Výraz $\kappa(\bar{w} + \epsilon \hat{w})$ rozvineme do Taylorovho rádu na okolí \bar{w} v tvare

$$\kappa(\bar{w} + \epsilon \hat{w}) = \kappa(\bar{w}) + \epsilon \kappa'(\bar{w}) \hat{w} + O(\epsilon^2); \quad (3.18)$$

členy $O(\epsilon^2)$ sa v linearizovanom prípade neprejavajú. Rovnice (3.15) – (3.17) možno potom zapísať v tvare

$$\bar{u} + \epsilon \hat{u} = -[\kappa(\bar{w}) + \epsilon \kappa'(\bar{w}) \hat{w} + O(\epsilon^2)] \frac{\partial(\bar{p} + \epsilon \hat{p})}{\partial x}, \quad (3.19)$$

$$\bar{v} + \epsilon \hat{v} = -[\kappa(\bar{w}) + \epsilon \kappa'(\bar{w}) \hat{w} + O(\epsilon^2)] \frac{\partial(\bar{p} + \epsilon \hat{p})}{\partial y}, \quad (3.20)$$

$$0 = \frac{\partial(\bar{u} + \epsilon \hat{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v} + \epsilon \hat{v})}{\partial y}. \quad (3.21)$$

Využitím rovníc (2.26) a (2.27) pre základný stav dostávame poruchové rovnice pre \hat{u} , \hat{v} a \hat{p} v tvare

$$\hat{u} = -\hat{w} \kappa'(\bar{w}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \kappa(\bar{w}) \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}, \quad (3.22)$$

$$\hat{v} = -\hat{w} \kappa'(\bar{w}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \kappa(\bar{w}) \frac{\partial \hat{p}}{\partial y}, \quad (3.23)$$

$$0 = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}. \quad (3.24)$$

Kedže pre tlak v základnom stave platí $\partial\bar{p}/\partial x = (\Phi + 1/\alpha)\kappa^{-1}(\bar{w})$ a $\partial\bar{p}/\partial y = 0$ rovnice (3.22) – (3.24) sa redukujú na tvar

$$\hat{u} = -\hat{w}\kappa'(\bar{w})(\Phi + 1/\alpha)\kappa^{-1}(\bar{w}) - \kappa(\bar{w})\frac{\partial\hat{p}}{\partial x}, \quad (3.25)$$

$$\hat{v} = -\kappa(\bar{w})\frac{\partial\hat{p}}{\partial y}, \quad (3.26)$$

$$0 = \frac{\partial\hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial\hat{v}}{\partial y}. \quad (3.27)$$

Zo systému rovníc (3.25) – (3.27) možno eliminovať tlakové pole \hat{p} . Derivovaním (3.26) a použitím rovnice (3.27) dostávame

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial x} = \kappa(\bar{w})\frac{\partial^2\hat{p}}{\partial y^2}, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2} = \kappa(\bar{w})\frac{\partial^3\hat{p}}{\partial y^2\partial x} + \kappa'(\bar{w})\bar{w}'\frac{\partial^2\hat{p}}{\partial y^2}, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2} = \kappa(\bar{w})\frac{\partial^3\hat{p}}{\partial y^2\partial x} + \kappa'(\bar{w})\bar{w}'\kappa^{-1}(\bar{w})\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}. \quad (3.30)$$

Podobne derivovaním (3.25) máme

$$\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2(\bar{w})}{\partial y^2}\kappa'(\bar{w})(\Phi + 1/\alpha)\kappa^{-1}(\bar{w}) - \kappa(\bar{w})\frac{\partial^3\hat{p}}{\partial x\partial y^2}. \quad (3.31)$$

Kombináciou (3.30) a (3.31) dostávame rovnicu pre poruchovú funkciu \hat{u}

$$\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2} - \kappa'(\bar{w})\bar{w}'\kappa^{-1}(\bar{w})\frac{\partial\hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial y^2} + \kappa'(\bar{w})\kappa^{-1}(\bar{w})(\Phi + 1/\alpha)\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial y^2} = 0. \quad (3.32)$$

Výsledný systém rovníc pre poruchové premenné \hat{c} , \hat{w} a \hat{u} má tvar:

$$\alpha\Phi\frac{\partial\hat{c}}{\partial t} + \alpha\nabla \cdot (\hat{u}\bar{c} + \bar{u}\hat{c}) + \bar{c}\hat{w} + \hat{c}\bar{w} = 0, \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial\hat{w}}{\partial t} + \bar{c}\hat{w} + \hat{c}\bar{w} = 0, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2} - \kappa'(\bar{w})\bar{w}'\kappa^{-1}(\bar{w})\frac{\partial\hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial y^2} + \kappa'(\bar{w})\kappa^{-1}(\bar{w})(\Phi + 1/\alpha)\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial y^2} = 0. \quad (3.35)$$

Separáciou poruchových funkcií v tvare normálnych módov možno odvodiť nasledujúci systém pre poruchové amplitúdy $\tilde{c}(\xi)$, $\tilde{w}(\xi)$ a $\tilde{u}(\xi)$:

$$\alpha[\Phi\lambda\tilde{c} + \bar{c}D_\xi\tilde{u} + i\alpha]\tilde{c}\tilde{u} + \bar{u}D_\xi\tilde{c} + \bar{c}\tilde{w} + \tilde{c}\bar{w} = 0, \quad (3.36)$$

$$\lambda\tilde{w} + \bar{c}\tilde{w} + \tilde{c}\bar{w} = 0, \quad (3.37)$$

$$D_\xi^2\tilde{u} - \kappa'(\bar{w})\bar{w}'\kappa^{-1}(\bar{w})D_\xi\tilde{u} - a^2\tilde{u} - a^2\kappa'(\bar{w})\kappa^{-1}(\bar{w})(\Phi + 1/\alpha)\tilde{w} = 0, \quad (3.38)$$

kde $D_\xi\tilde{c}$ označuje deriváciu $d\tilde{c}(\xi)/d\xi$ (rovnako pre ostatné poruchové amplitúdy). Navyše okrajové podmienky pre systém poruchových amplitúd majú tvar $\tilde{c} \rightarrow 0$, $\tilde{w} \rightarrow 0$ a $\tilde{u} \rightarrow 0$ pre $\xi \rightarrow \pm\infty$.

4 Numerické riešenie vlastnohodnotového problému

Numerické riešenie úlohy (3.36) – (3.38) spektrálnou diskretizáciou sme naimplementovali v systéme MATLAB využitím knižnice spektrálnych diferenčných matic [12], [11]. Knižnica HYDROSTAB [12] je vhodná pre riešenie vlastnohodnotových diferenciálnych úloh, ktoré produkujú zovšeobecnené vlastnohodnotové lineárne systémy rovníc. Táto knižnica umožňuje numerické riešenie pre úlohy s viacerými oblasťami a konečným alebo nekonečným intervalom premennej x .

Spektrálna diskretizácia vlastnohodnotového problému (3.36) – (3.38) vedie k zovšeobecnenému vlastnohodnotovému systému $Au = \lambda Bu$, kde A, B sú matice typu $(N + 1) \times (N + 1)$ a u je vektor typu $(N + 1) \times 1$, ktorý reprezentuje neznáme hodnoty funkcií $\tilde{c}(\xi)$, $\tilde{w}(\xi)$ a $\tilde{u}(\xi)$ v Čebyševových uzlových bodoch.

Vzhľadom k tomu, že rovnica (3.38) neobsahuje časovú deriváciu, matica B nemá plnú hodnotu a preto sú niektoré vlastné hodnoty neohraničené. Tieto vlastné hodnoty sa v kontexte spektrálnych metód označujú ako falošné (spurious) a musíme ich odfiltrovať.

V nasledujúcich podkapitolách budeme študovať tri typy zákonov pre permeabilitnú funkciu:

$$\kappa_1(w) = e^{-\delta w}, \quad (4.1)$$

$$\kappa_2(w) = 1/(1 + \delta w), \quad (4.2)$$

$$\kappa_3(w) = \kappa_0 = \text{konštanta}. \quad (4.3)$$

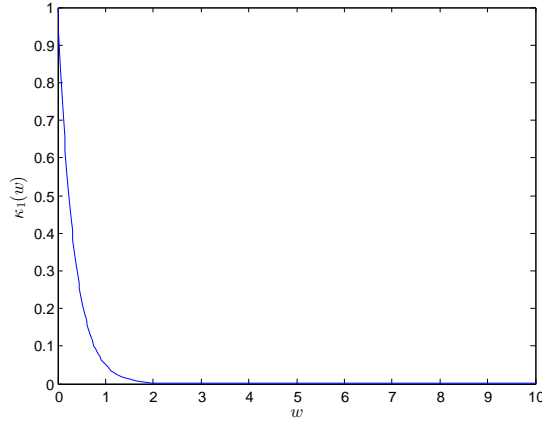
4.1 Výsledky pre permeabilitu $\kappa_1(w)$

Prvou voľbou permeabilitnej funkcie $\kappa(w)$ bude $\kappa_1(w) = e^{-\delta w}$ (obrázok 3).

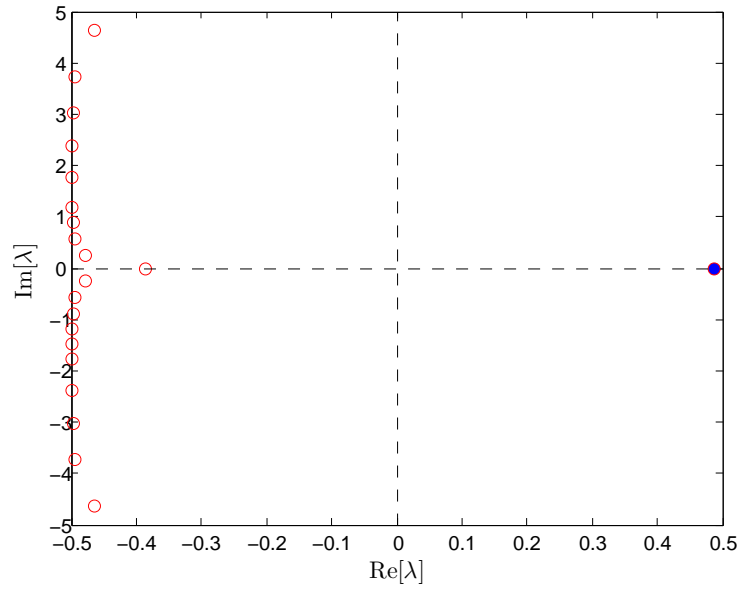
Na obrázku 4 je zobrazené spektrum úlohy (3.36) – (3.38) pre zvolené parametre α , Φ a a .

Závislosť vlastných hodnôt od vlnového čísla a je zobrazená na obrázkoch 5 a 6. Samostatne je zobrazená časť, ktorá reprezentuje rýchlosť rastu porúch a imaginárna časť, ktorá reprezentuje frekvenciu porúch.

Závislosť maximálnej rýchlosti rastu porúch, $\max \text{Re}(\lambda)$, od vlnového čísla a je uve-



Obr. 3: Profil permeability $\kappa_1(w) = e^{-\delta w}$ pre $\delta = 3$.



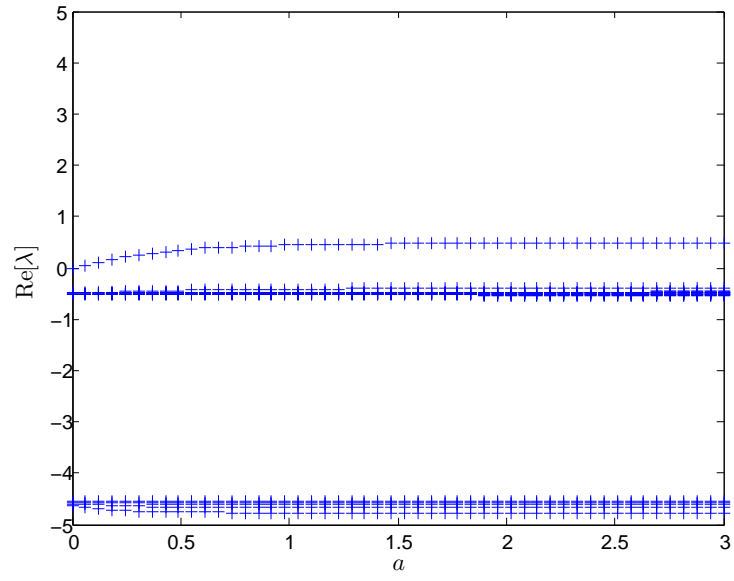
Obr. 4: Spektrum vlastných hodnôt zobrazené pre $\alpha = 1, \Phi = 0.11, \delta = 3, a = 3$ a spektrálne rozlíšenie $N = 2^5$.

dená na obrázku 7.

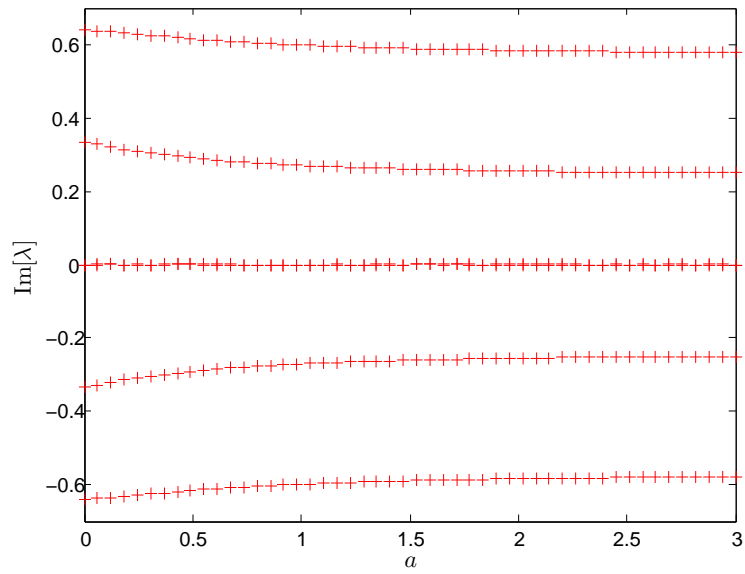
Z obrázku vidíme, že normálny mód s maximálnou rýchlosťou rastu je nestabilný, takže reaktívny front s profilmi koncentrácií $\tilde{c}(\xi)$ a $\tilde{w}(\xi)$ je nestabilný. Navyše, pre malé vlnové čísla a je rýchlosť rastu porúch lineárnou funkciou a , zatiaľ čo pre veľké a dochádza k saturácii $\text{Re}(\lambda)$ [3, asymptotická aproximácia pre $a \rightarrow 0$].

Na obrázku 8 sú zobrazené poruchové amplitúdy $\tilde{c}(\xi), \tilde{w}(\xi)$ a $\tilde{u}(\xi)$. Je zaujímavé poznamenať, že poruchové amplitúdy sú lokalizované v oblasti pred frontom ($\xi = 0$).

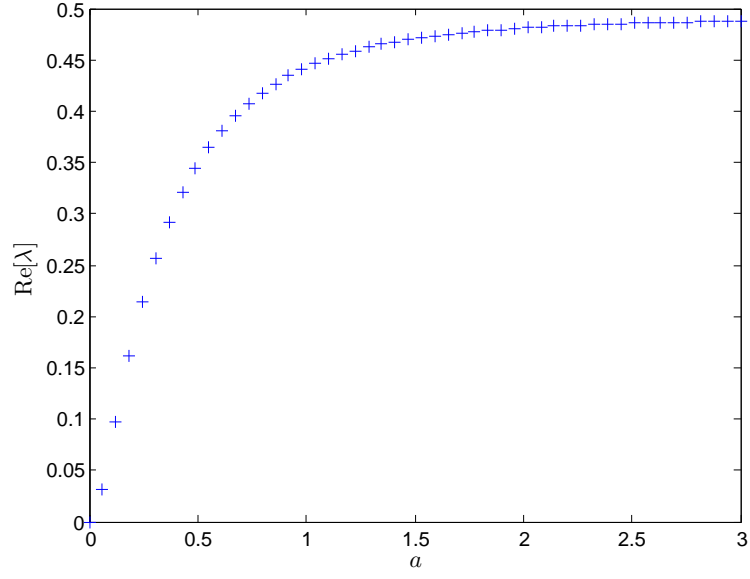
Celkové poruchové funkcie, t.j. $\text{Re}[e^{\lambda t + i a y} \tilde{c}(\xi)]$ a podobne pre $\tilde{w}(\xi, y, t)$ a $\tilde{u}(\xi, y, t)$ sú zobrazené na obrázkoch 9 – 14.



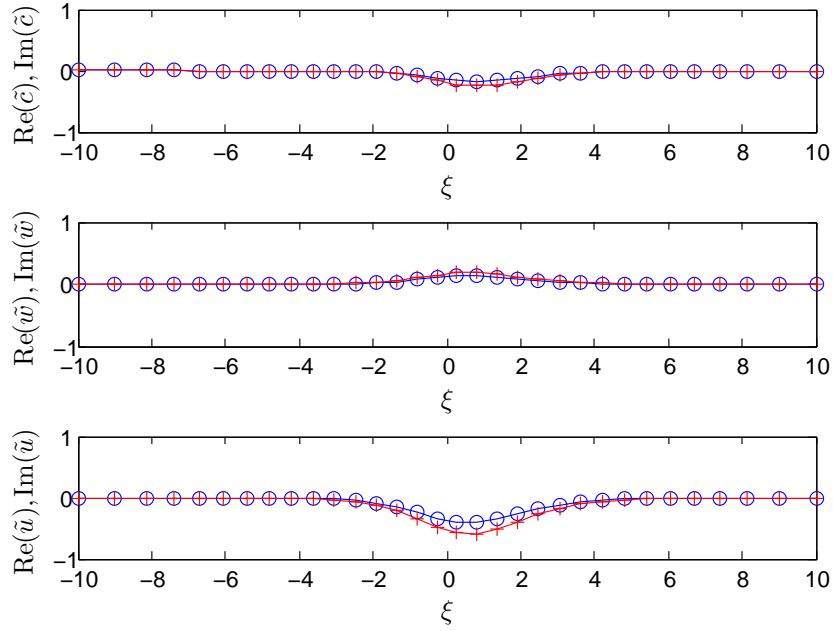
Obr. 5: Rýchlosť rastu porúch $\text{Re}(\lambda)$ ako funkcia vlnového čísla a .



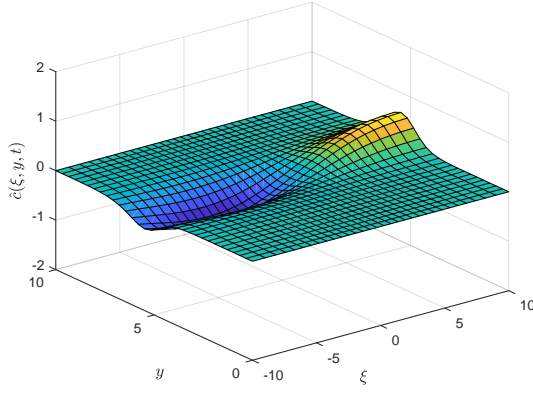
Obr. 6: Frekvencia porúch $\text{Im}(\lambda)$ ako funkcia vlnového čísla a .



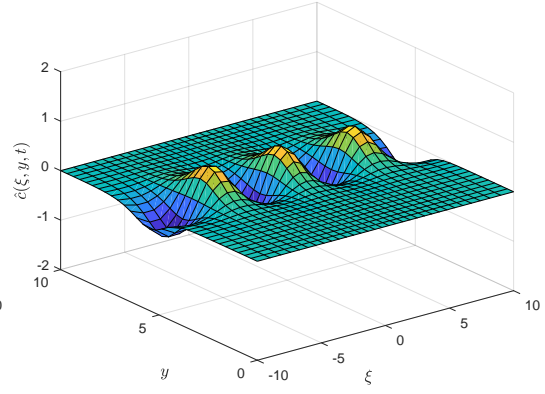
Obr. 7: Maximálna rýchlosť rastu $\text{Re}(\lambda)$ ako funkcia vlnového čísla a .



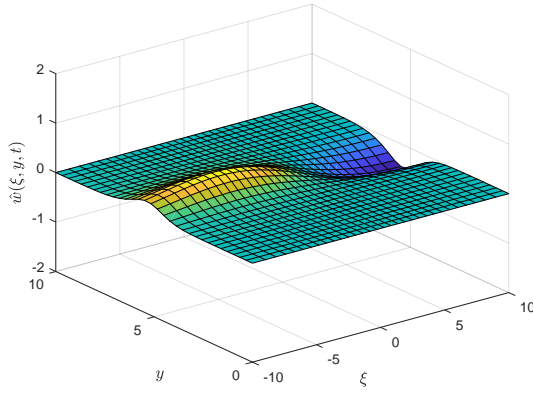
Obr. 8: Reálne (modré, symbol \circ) a imaginárne (červené, symbol $+$) zložky funkcií $\tilde{c}(\xi)$, $\tilde{w}(\xi)$ a $\tilde{u}(\xi)$ pre permeabilitu $\kappa_1 = e^{-\delta w}$.



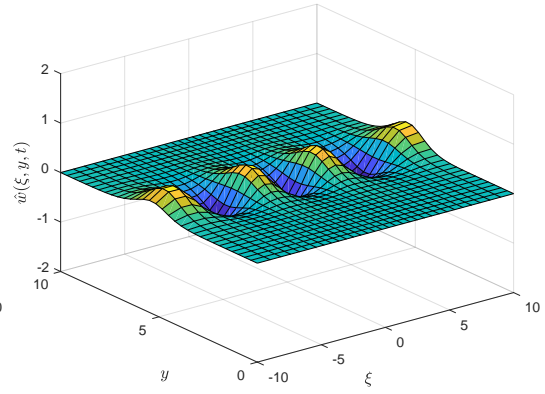
Obr. 9: Poruchová funkcia koncentrácie kyseliny \hat{c} v čase $t = 0$ pre vlnové číslo $a = 0.4$.



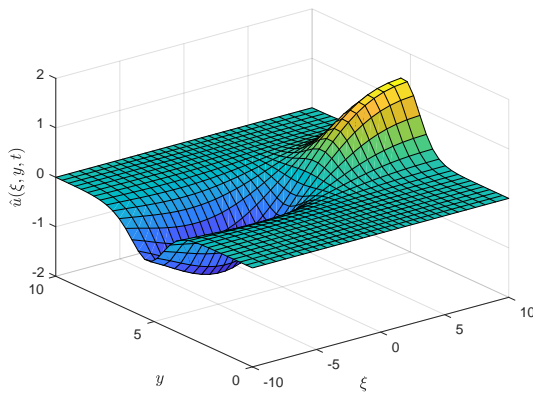
Obr. 10: Poruchová funkcia koncentrácie kyseliny \hat{c} v čase $t = 0$ pre vlnové číslo $a = 2$.



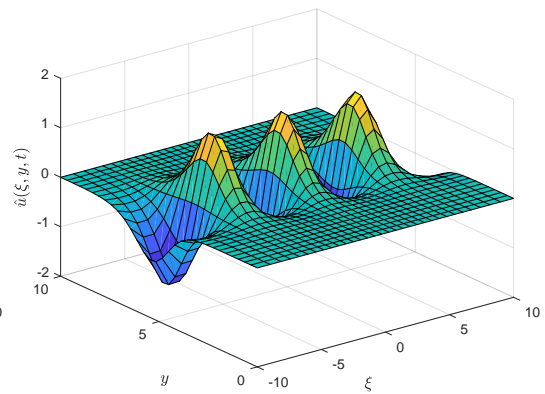
Obr. 11: Poruchová funkcia koncentrácie rozpustných minerálov \hat{w} v čase $t = 0$ pre vlnové číslo $a = 0.4$.



Obr. 12: Poruchová funkcia koncentrácie rozpustných minerálov \hat{w} v čase $t = 0$ pre vlnové číslo $a = 2$.



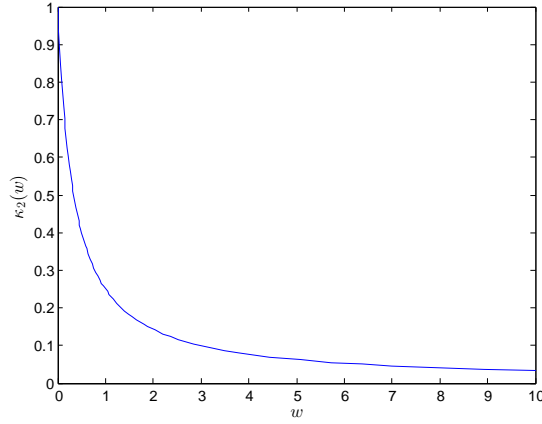
Obr. 13: Poruchová funkcia rýchlosti v smere x \hat{u} v čase $t = 0$ pre vlnové číslo $a = 0.4$.



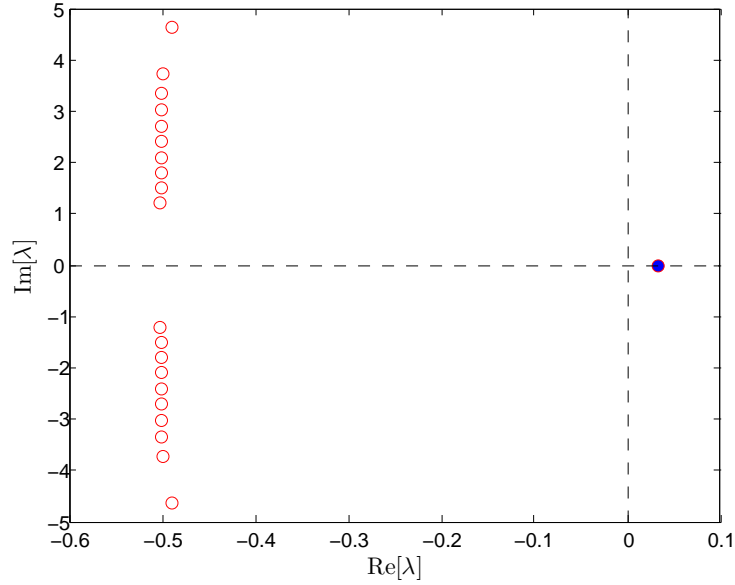
Obr. 14: Poruchová funkcia rýchlosti v smere x \hat{u} v čase $t = 0$ pre vlnové číslo $a = 2$.

4.2 Výsledky pre permeabilitu $\kappa_2(w)$

V tejto časti uvedieme výsledky pre permeabilitnú funkciu $\kappa_2(w) = 1/(1+\delta w)$ (obr. 15). Zobrazíme spektrum vlastných hodnôt vlastnej hodnoty (obrázok 17 a 18) a maximálnu rýchlosť rastu ako funkciu vlnového čísla a (obrázok 19).

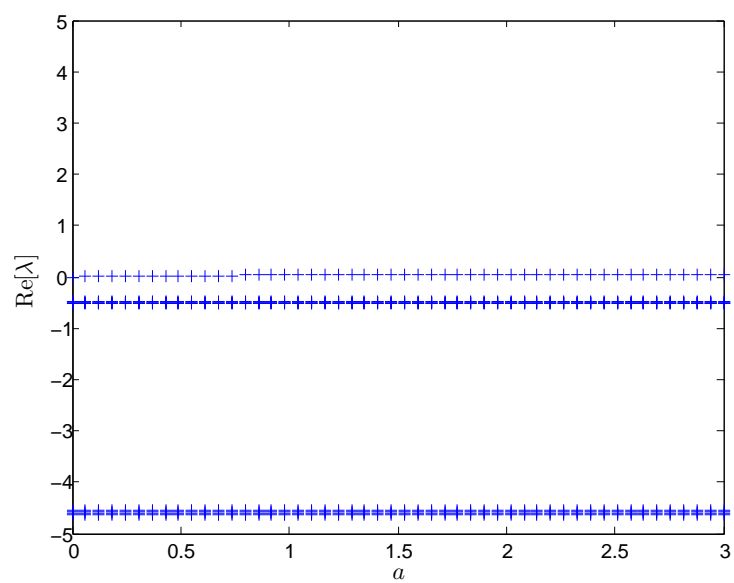


Obr. 15: Profil permeability $\kappa_2(\bar{w}) = 1/(1 + \delta w)$ pre $\delta = 3$.

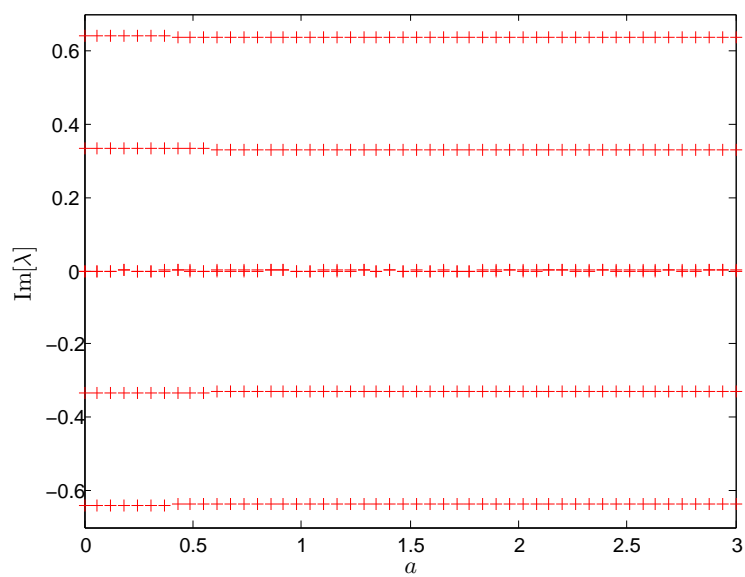


Obr. 16: Spektrum vlastných hodnôt zobrazené pre $\alpha = 1, \Phi = 0.11, \delta = 3, a = 3$ a spektrálne rozlíšenie $N = 2^5$.

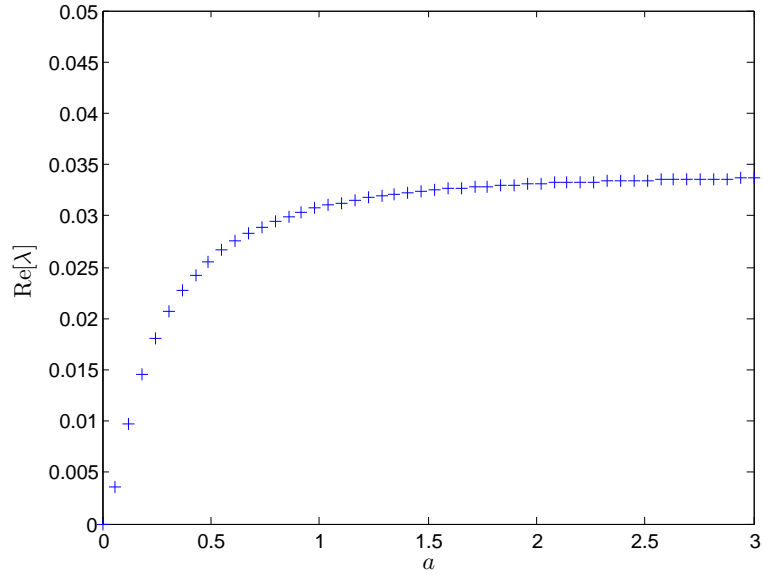
Poruchové amplitúdy $\tilde{c}(\xi), \tilde{w}(xi), \tilde{u}(\xi)$ pre $\kappa_2(w) = 1/(1 + \delta w)$ sú zobrazené na obrázku 20, a celkové poruchové funkcie $\hat{c}(\xi, y, t), \hat{w}(\xi, y, t)$ a $\hat{u}(\xi, y, t)$ na obrázkoch 21 – 26.



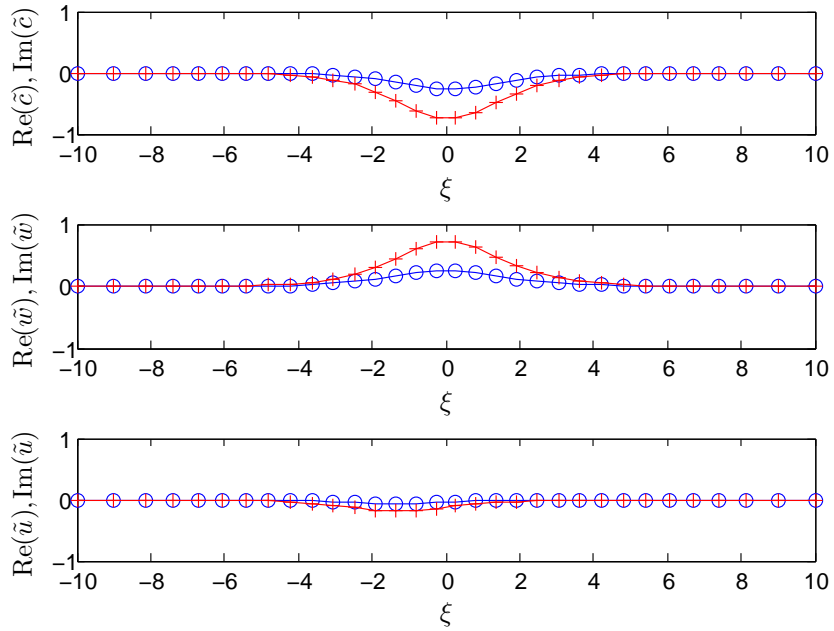
Obr. 17: Rýchlosť rastu porúch $\text{Re}(\lambda)$ ako funkcia vlnového čísla a .



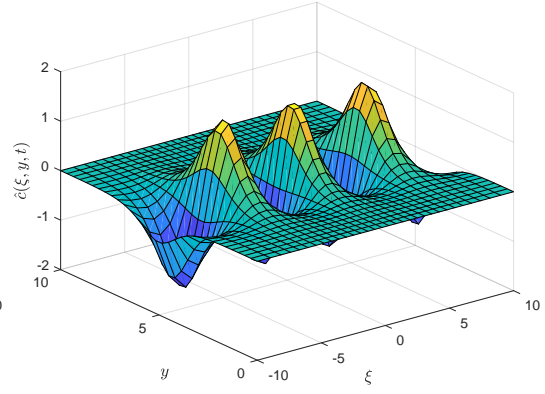
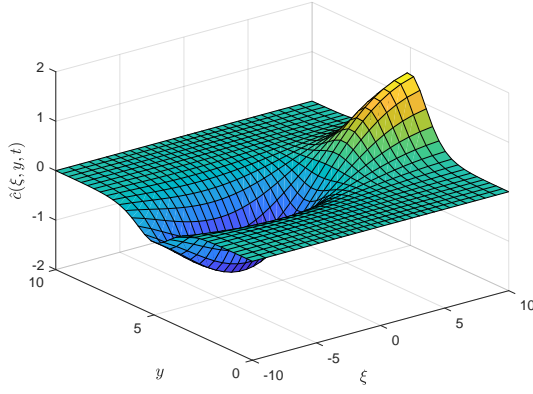
Obr. 18: Frekvencia porúch $\text{Im}(\lambda)$ ako funkcia vlnového čísla a .



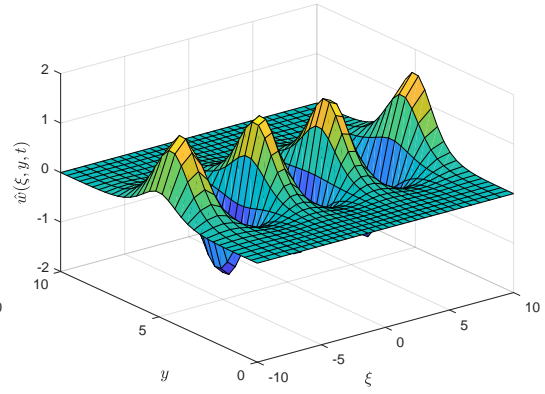
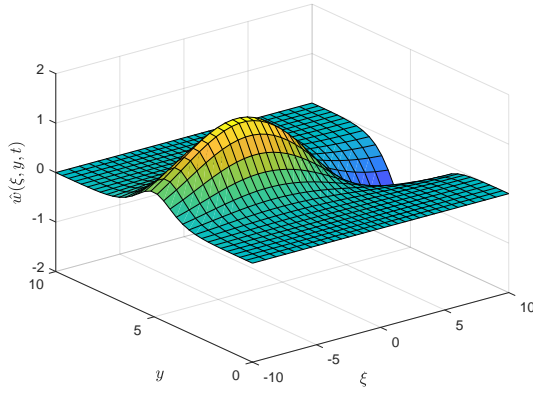
Obr. 19: Maximálna rýchlosť rastu $\text{Re}(\lambda)$ ako funkcia vlnového čísla a .



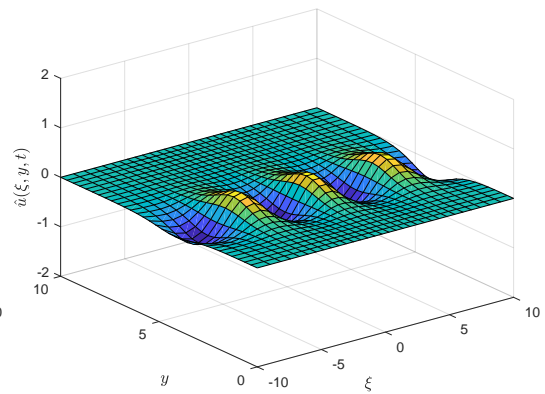
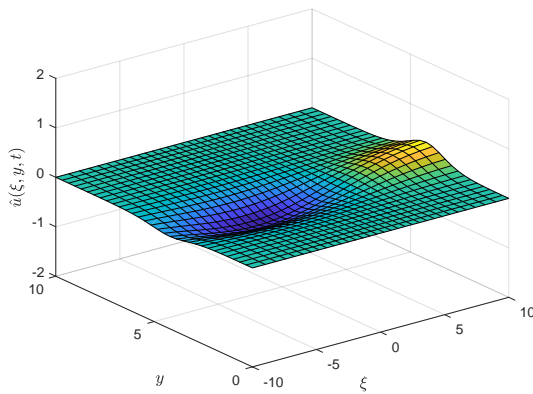
Obr. 20: Reálne (modré, symbol \circ) a imaginárne (červené, symbol $+$) zložky funkcií $\tilde{c}(\xi)$, $\tilde{w}(\xi)$ a $\tilde{u}(\xi)$ pre permeabilitu $\kappa_2(w) = 1/(1 + \delta w)$.



Obr. 21: Poruchová funkcia koncentrácie kyseliny \hat{c} v čase $t = 0$ pre vlnové číslo $a = 0.4$. Obr. 22: Poruchová funkcia koncentrácie kyseliny \hat{c} v čase $t = 0$ pre vlnové číslo $a = 2$.



Obr. 23: Poruchová funkcia koncentrácie rozpustných minerálov \hat{w} v čase $t = 0$ pre vlnové číslo $a = 0.4$. Obr. 24: Poruchová funkcia koncentrácie rozpustných minerálov \hat{w} v čase $t = 0$ pre vlnové číslo $a = 2$.



Obr. 25: Poruchová funkcia rýchlosti v smere x \hat{u} v čase $t = 0$ pre vlnové číslo $a = 0.4$. Obr. 26: Poruchová funkcia rýchlosti v smere x \hat{u} v čase $t = 0$ pre vlnové číslo $a = 2$.

4.3 Výsledky pre permeabilitu $\kappa_3(w)$

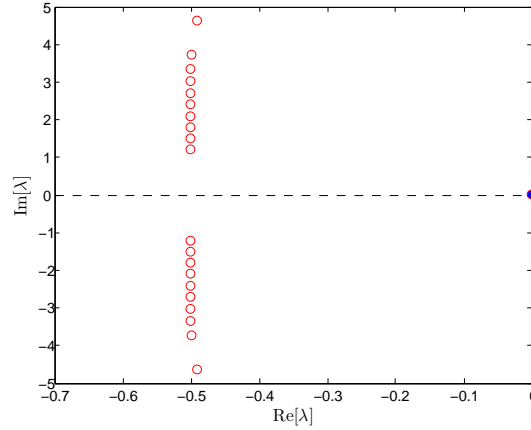
Tretím prípadom tvaru funkcie κ bude prípad, kedy je permeabilita nezávislá od koncentrácie rozpustných minerálov w , teda keď $\kappa_3(w) = \kappa_0$ je konštantnou funkciou. V tomto prípade sa systém (3.33) – (3.35) zjednoduší na

$$\alpha\Phi\frac{\partial\hat{c}}{\partial t} + \alpha\nabla \cdot (\hat{\mathbf{u}}\bar{c} + \bar{\mathbf{u}}\hat{c}) + \bar{c}\hat{w} + \hat{c}\bar{w} = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial\hat{w}}{\partial t} + \bar{c}\hat{w} + \hat{c}\bar{w} = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial y^2} = 0. \quad (4.6)$$

Na obrázkoch 27 – 30 je postupne zobrazené spektrum vlastných hodnôt, veľkosť rastu porúch, ich frekvencia a maximálna rýchlosť rastu porúch.

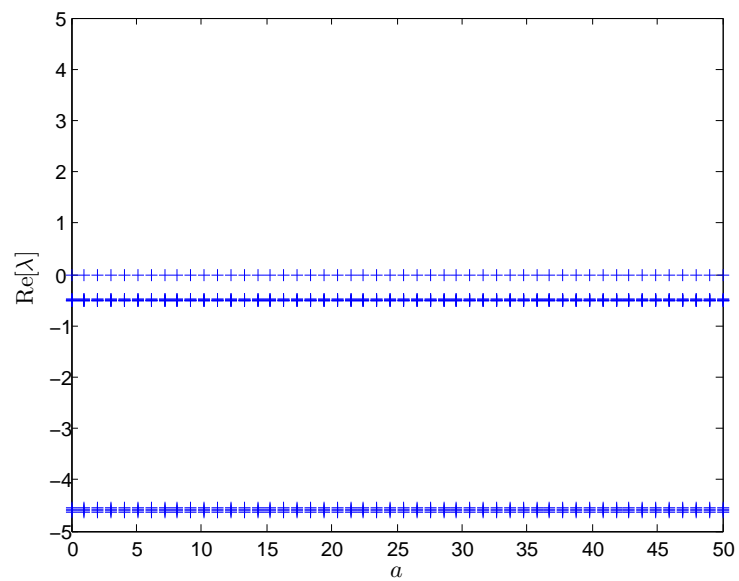


Obr. 27: Spektrum vlastných hodnôt zobrazené pre $\alpha = 1, \Phi = 0.11, \delta = 3, a = 3$ a spektrálne rozlíšenie $N = 2^5$.

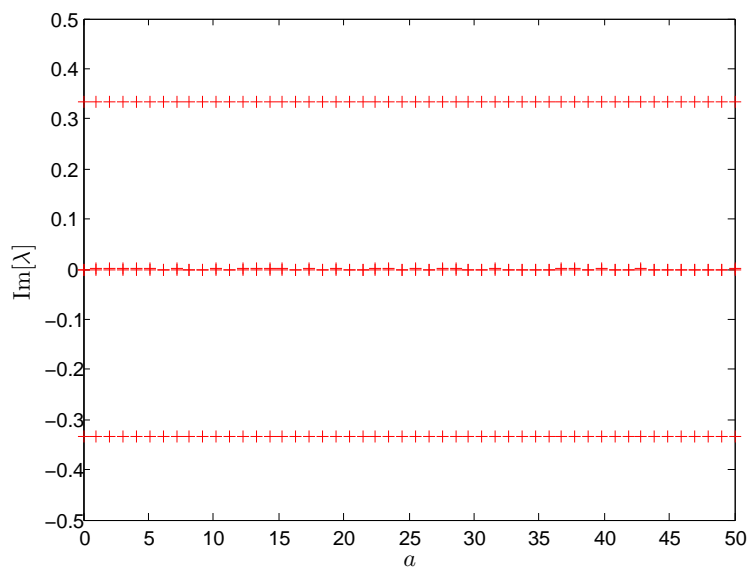
Vidíme, že pri voľbe konštantnej funkcie permeability, najväčšia reálna vlastná hodnota (obrázok 27) aj frekvencia porúch (obrázok 30) sú nulové a navyše frekvencia porúch nie je závislá od vlnového čísla a .

Poruchové amplitúdy $\tilde{c}(\xi)$, $\tilde{w}(\xi)$, $\tilde{u}(\xi)$ sú zobrazené na obrázku 31.

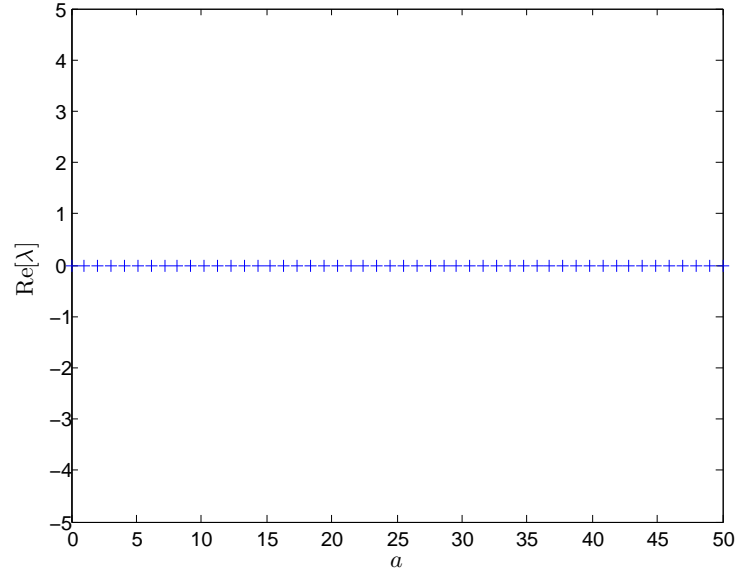
Keďže $\text{Re}(\lambda) \leq 0$ pre všetky vlastné hodnoty, s narastajúcim časom t bude člen $e^{\lambda t + i a y}$ klesať do nuly a teda môžeme usúdiť, že pre tento tvar permeabilitného zákona je reaktívny front stabilný pre všetky vlnové čísla a . Navyše, keďže najväčšia reálna vlastná hodnota je presne nulová, hovoríme o neutrálnej stabilite.



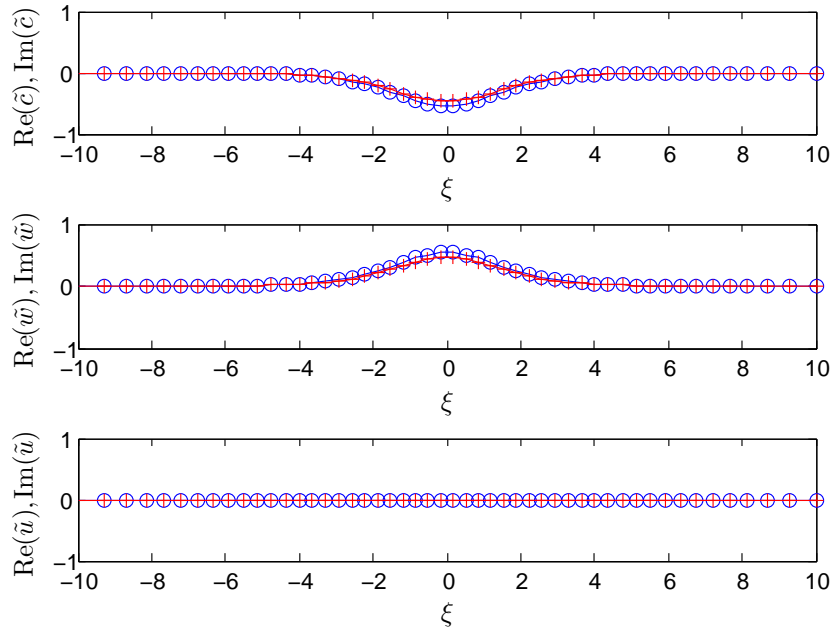
Obr. 28: Rýchlosť rastu porúch $\text{Re}(\lambda)$ ako funkcia vlnového čísla a .



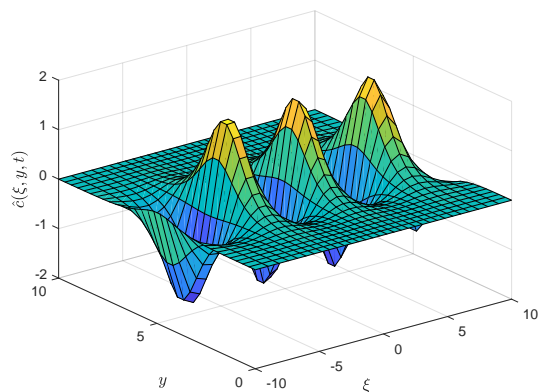
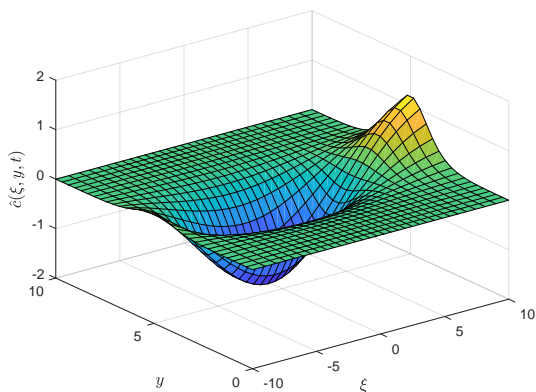
Obr. 29: Frekvencia porúch $\text{Im}(\lambda)$ ako funkcia vlnového čísla a .



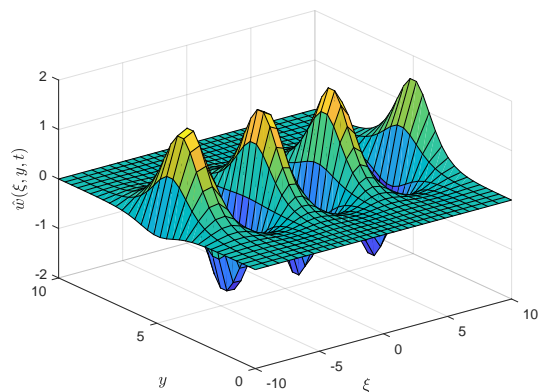
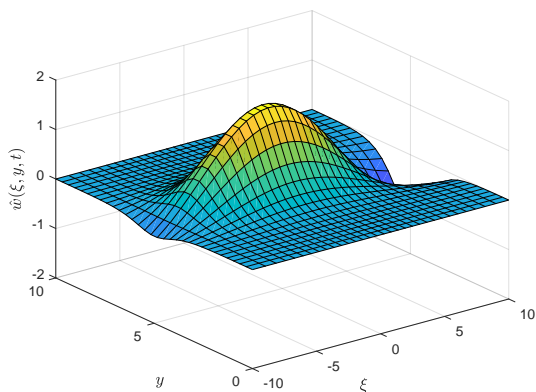
Obr. 30: Maximálna rýchlosť rastu $\text{Re}(\lambda)$ ako funkcia vlnového čísla a .



Obr. 31: Reálne (modré, symbol o) a imaginárne (červené, symbol $+$) zložky funkcií $\tilde{c}(\xi)$, $\tilde{w}(\xi)$ a $\tilde{u}(\xi)$ pre permeabilitu $\kappa_3(w) = \kappa_0 = \text{konštanta}$.



Obr. 32: Poruchová funkcia koncentrácie ky- Obr. 33: Poruchová funkcia koncentrácie ky-
seliny \hat{c} v čase $t = 0$ pre vlnové číslo $a = 0.4$. seliny \hat{c} v čase $t = 0$ pre vlnové číslo $a = 2$.



Obr. 34: Poruchová funkcia koncentrácie roz- Obr. 35: Poruchová funkcia koncentrácie roz-
pustných minerálov \hat{w} v čase $t = 0$ pre vlnové pustných minerálov \hat{w} v čase $t = 0$ pre vlnové
číslo $a = 0.4$. číslo $a = 2$.

Záver

Cieľom diplomovej práce bola analýza stability reaktívneho frontu, ktorý propaguje pórovitým prostredím s permeabilitou (priepustnosťou) závislou od koncentrácie rozpustných minerálov.

V prvej kapitole sme uviedli matematickú formuláciu modelu reaktívneho pórovitého prostredia a okrajových podmienok. Transformáciou modelových rovníc do pohybujúcej sa sústavy sme získali systém nelineárnych obyčajných diferenciálnych rovníc pre základný stav problému. Separáciou premenných sme získali riešenie pre základný stav. Základný stav je tiež zdrojom typických škál, pomocou ktorých sme modelové rovnice previedli do bezrozmerného tvaru. Do systému sme zaviedli poruchové funkcie, resp. poruchové amplitúdy, násobené faktormi normálnych modov, a získali systém lineárnych diferenciálnych rovníc pre poruchy.

Využitím [10] sme derivácie nahradili diferenčnými maticami, ktoré zodpovedajú Čebyševovým diskretizačným uzlov, čím sme vlastnohodnotový problém na neohraničenom intervale transformovali na vlastnohodnotový problém na intervale $[-1, 1]$ a riešili pomocou knžnice [12].

Numerické výsledky sme získali pre tri typické permeabilitné vzťahy. V prvých dvoch prípadoch (pre permeabilitu $\kappa_1(w) = e^{-\delta w}$ a $\kappa_2(w) = 1/(1 + \delta w)$, kde w je koncentrácia rozpustných minerálov v pórovitom prostredí a δ je zvolená konštanta) konštatujeme nestabilitu, pozri obrázky 7 a 19. Jej dôvodom je, že maximálne reálne časti vlastných čísel, ktoré sú zodpovedné za rýchlosť rastu porúch, sú kladné pre uvažované vlnové čísla. Naopak, v prípade konštantnej permeability sme nenašli žiadnu vlastnú hodnotu s kladnou reálnou časťou. S narastajúcim časom pre túto voľbu permeabilitného zákona je teda náš systém stabilný.

Zoznam citovanej literatúry

- [1] Drazin, P. G., Reid, W. H., (2004), *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] Gheorgiu, C. I., (2007), *Spectral Methods for Differential Problems*, Institute of Numerical Analysis, Cluj-Napoca.
- [3] Hinch, E. J., Bhatt, B. S. (1990), Stability of an acid front moving through porous rock, *J. Fluid Mech.* 212, 279–288.
- [4] Hurtiš, R., (2017), *Využitie systému CHEBFUN/MATLAB na riešenie diferenciálnych úloh*, Bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava.
- [5] Papranec, L., (2017), *Stabilita laminárnych kvapalných jetov*, Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava.
- [6] Sood, A., Vyas, S., (2017), *Carbon Capture and Sequestration—A Review*, IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 83, 12–24.
- [7] Sherwood, J. D. (1987), *Stability of a plane reaction front in a porous medium*, Chemical Engineering Science, 42, 1823 – 1829.
- [8] Szymczak, P., Ladd, A. J. C. (2013), *Interacting length scales in the reactive-infiltration instability*, GEOPHYSICAL RESEARCH LETTERS, 40, 3036–3041.
- [9] Szymczak, P., Ladd, A. J. C. (2014), *Reactive-infiltration instabilities in rocks. Part 2. Dissolution of a porous matrix* J. Fluid Mech., 738, 591–630.
- [10] Trefethen, L. N. (1996), *Spectral Methods in MATLAB*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [11] Weideman, J. A. C., Reddy, S. C. (2000), *A MATLAB Differentiation Matrix Suite*, ACM Transactions on Mathematical Software, 26, 465–519.
- [12] Ye, Han-Yu, Yang, Li-jun, Fu, Qing-fei (2016), *HYDROSTAB: A universal code for solving hydrodynamic stability problems*, Beihang University, Beijing.

Čebyševova spektrálna diskretizačná metóda

V tejto časti predstavíme myšlienku Čebyševovej spektrálnej diskretizačnej metódy podľa [10]. Najskôr definujeme pojem Čebyševových polynómov a aproximácie derivácie pomocou diferenčných matíc. Na základe toho budeme môcť uviesť myšlienku Čebyševových diferenčných matíc podobne ako [4] ilustrovať ich využitie a presnosť aproximácie na niekoľkých príkladoch.

Čebyševove polynómy

Pri numerických riešeníach využívajúcich spektrálne metódy sme potrebovali interval, na ktorom pracujeme, rozdeliť pomocou deliacich uzlov. Jedným z prístupov je voľba uzlov pomocou Čebyševových polynómov, ktorých myšlienku a základné vlastnosti uvádzame nižšie (podrobnejšie v [2]).

Definícia A.1 Polynómy $T_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ definované ako

$$T_n(x) := \cos(n \arccos(x)), \quad x \in [-1, 1], \quad (\text{A.7})$$

nazývame Čebyševovými polynómami.

Pre lepšiu predstavu o tvare Čebyševových polynómov uvedieme aj vzťah pomocou algebraických polynómov. Z goniometrickej identity

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n, \quad (\text{A.8})$$

$$= \cos^n(\theta) + i \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \sin \theta + i^2 \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \dots \quad (\text{A.9})$$

a zo vzťahu

$$\sin^{2m} \theta = (1 - \cos^2 \theta)^m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.10})$$

dostávame potom

$$T_n(\cos \theta) := \cos(n\theta), \quad (\text{A.11})$$

kde $T_n(x) := \cos(n \arccos(x)) = \alpha_0^{(n)} + \alpha_1^{(n)}x + \alpha_2^{(n)}x^2 \dots \alpha_n^{(n)}x^n$. Potom Čebyševove polynómy stupňov 0, 1, 2 a 3 majú tvar

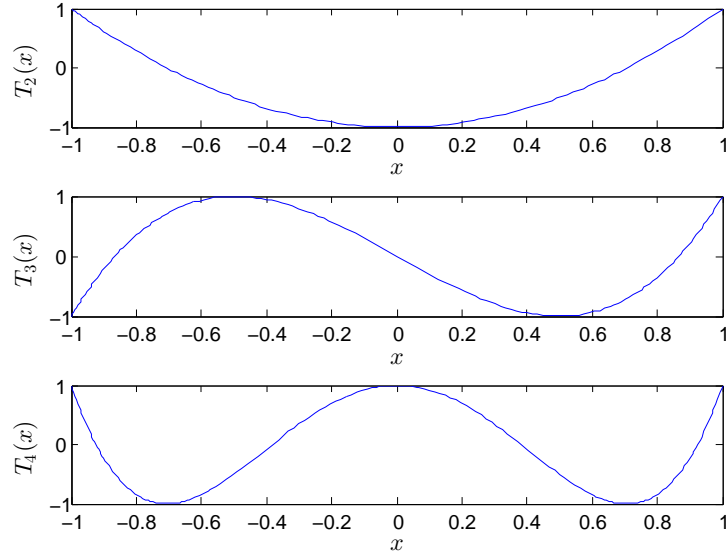
$$T_0(x) = 1, \quad (\text{A.12})$$

$$T_1(x) = x, \quad (\text{A.13})$$

$$T_2(x) = x^2 - 1, \quad (\text{A.14})$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad (\text{A.15})$$

a môžeme ich vidieť na obrázku 36. Ako priame dôsledky definície uvádzame tri vlast-



Obr. 36: Čebyševove polynómy stupňa 2, 3 a 4.

nosti Čebyševových polynómov – ortogonalitu, rekurentný vzťah a ohraničenosť [2].

Veta A.1 Čebyševove polynómy T_n a T_m sú ortogonálne, teda platí

$$(T_n, T_m)_{(0, \omega)} = \frac{\pi}{2} c_n \delta_{n,m}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.16})$$

kde $\delta_{n,m}$ je Kroneckerov delta symbol, koeficienty c_n sú definované ako

$$c_n := \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 2, & n = 0, \\ 1, & n > 0 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

a vážený skalárny súčin $(u, v)_\omega$ je definovaný ako

$$(u, v)_\omega := \int_{-1}^1 u(x)v(x)\omega(x)dx, \quad (\text{A.18})$$

kde $\omega : I = [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ je váhová funkcia v tvare

$$\omega(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (\text{A.19})$$

Veta A.2 Pre Čebyševove polynómy platí rekurentný vzťah

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k > 0, \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x. \quad (\text{A.20})$$

Veta A.3 Pre Čebyševove polynómy $T_k(x)$ platí

$$|T_k(x)| \leq 1, \quad |x| \leq 1, \quad T_k(\pm 1) = (\pm 1)^k, \quad (\text{A.21})$$

$$|T'_k(x)| \leq k^2, \quad |x| \leq 1, \quad T'_k(\pm 1) = (\pm 1)^k k^2. \quad (\text{A.22})$$

Diferenčné matice

Definujme na množine uzlov x_0, x_1, \dots, x_N , kde $x_i \neq x_j$ pre $i \neq j$, množinu zodpovedajúcich funkčných hodnôt $\{v(x_j)\}_{j=0}^N$. Nech p je interpolačný polynóm stupňa N pre tieto body, teda $p(x_j) = v_j$ pre $0 \leq j \leq N$ a w je jeho derivácia v uzlových bodoch x_j , t.j. platí $w_j = p'(x_j)$. Potom vektory v a w spĺňajú vzťah

$$w = Dv, \quad (\text{A.23})$$

kde maticu D nazývame diferenčnou maticou typu $(N+1) \times (N+1)$.

Na odvodenie tvaru jednotlivých zložiek diferenčnej matice pomocou definovaných interpolačných uzlov využijeme Lagrangeov tvar interpolačného polynómu

$$p(x) = \sum_{k=0}^N v_k L_k(x), \quad (\text{A.24})$$

kde

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad (\text{A.25})$$

je k -ty Lagrangeov kardinálny polynóm, ktorý nadobúda hodnotu 0 pre x_j a 1 pre $x_k, k \neq j$.

Diferenčné matice D pre $N = 1$ a $N = 2$ teraz vypočítame v príkladoch a následne uvedieme tvar explicitného vzorca.

Nech $N = 1$. Lagrangeov tvar interpolačného polynómu podľa (A.24) potom splňa

$$p(x) = v_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + v_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad (\text{A.26})$$

kde v_0, v_1 sú funkčné hodnoty v interpolačných uzloch x_0, x_1 . Derivácia tohto polynómu má tvar

$$p'(x) = \frac{v_0}{x_0 - x_1} + \frac{v_1}{x_1 - x_0}. \quad (\text{A.27})$$

Keďže vzťah (A.27) je vzhľadom na x konštantnou funkciou, diferenčná matica D má zhodné zložky a má tvar

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_0 - x_1} & \frac{1}{x_0 - x_1} \\ \frac{1}{x_0 - x_1} & \frac{1}{x_0 - x_1} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.28})$$

Nech $N = 2$. Pomocou interpolačných uzlov x_0, x_1 a x_2 vyjadríme tvar interpolačného (kvadratického) polynómu a jeho derivácie (lineárneho polynómu) ako

$$p(x) = v_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} + v_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + v_2 \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad (\text{A.29})$$

$$p'(x) = v_0 \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + v_1 \frac{2x - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + v_2 \frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \quad (\text{A.30})$$

Potom diferenčná matica je typu (3×3) a má tvar

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_0 - x_2} & \frac{x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} & \frac{x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ \frac{x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} & \frac{1}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_1 - x_2} & \frac{x_1 - x_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ \frac{x_2 - x_1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} & \frac{x_2 - x_0}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} & \frac{1}{x_2 - x_0} + \frac{1}{x_2 - x_1} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

Pre všeobecný tvar diferenčnej matice D potom formulujeme vo vete spolu s dôkazom podľa [10].

Veta A.4 Pre $N \geq 1$ označme riadky a stĺpce $(N + 1) \times (N + 1)$ diferenčnej matice od 0 po N . Jej prvky potom môžeme vyjadriť v tvare

$$D_{jj} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N (x_j - x_k)^{-1}, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (\text{A.32})$$

$$D_{ij} = \frac{1}{a_j} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i, j}}^N (x_i - x_k) = \frac{a_i}{a_j(x_i - x_j)}, \quad i \neq j, \quad i, j = 0, 1, \dots, N, \quad (\text{A.33})$$

kde

$$a_j = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N (x_j - x_k). \quad (\text{A.34})$$

Dôkaz: Vzťahom (A.23) sú jednotlivé zložky diferenčnej matice D definované ako derivácie j -teho Lagrangeovho kardinálneho polynómu v i -tom uzle, teda

$$D_{ij} = L'_j(x_i), \quad i, j = 0, 1, \dots, N. \quad (\text{A.35})$$

Deriváciu Lagrangeovho kardinálneho polynómu vyjadríme pomocou (A.25) a prirodzeného logaritmu ako

$$\begin{aligned} L'_j(x) &= \left[\exp \left(\ln \left(\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right) \right) \right) \right]' = \left[\exp \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N \ln \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right) \right) \right]' \\ &= \left[\exp \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N \ln \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right) \right) \right] \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N (x - x_k)^{-1} = L_j(x) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N (x - x_k)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Diagonálne zložky diferenčnej matice D potom majú tvar

$$D_{jj} = L'_j(x_j) = L_j(x_j) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N (x_j - x_k)^{-1}, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (\text{A.37})$$

Z definície Lagrangeovho kardinálneho polynómu máme $L_j(x_j) = 1$, teda výsledný tvar diagonálnych zložiek je

$$D_{jj} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N (x_j - x_k)^{-1}, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (\text{A.38})$$

čo zodpovedá vzťahu (A.32).

Pre nediagonálne zložky máme

$$D_{ij} = L_j(x_i) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N (x_j - x_k)^{-1} = L_j(x_i) \frac{\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^N \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j, l}}^N (x_i - x_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N (x_i - x_k)}. \quad (\text{A.39})$$

Využitím definície Lagrangeovho kardinálneho polynómu (A.25) a úpravou výrazu (A.39) dostávame pre nediagonálne prvky vzťah

$$D_{ij} = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i, j}}^N (x_i - x_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N (x_j - x_k)} = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^N (x_i - x_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N (x_j - x_k)(x_i - x_j)}, \quad i \neq j, \quad i, j = 0, 1, \dots, N, \quad (\text{A.40})$$

ktorý je ekvivalentný vzťahu (A.33). \square

Čebyševove diferenčné matice

V nasledujúcej časti sa budeme venovať typu diferenčných matic, ktoré vzniknú špecifickou voľbou uzlových bodov. Nech $\{v_i\}_{i=0}^N$ sú funkčné hodnoty definované na Čebyševových uzloch x_0, x_1, \dots, x_N , teda $x_j = \cos(j\Pi/N)$ pre $0 \leq j \leq N$. Rovnako ako v predchádzajúcej časti definujme interpolačný polynóm p stupňa N taký, že $p(x_j) = v_j$ pre $0 \leq j \leq N$ a jeho deriváciu $w_j = p'(x_j)$ pre každý uzlový bod x_j . Potom vektory v a w spĺňajú vzťah

$$w = D_N v, \quad (\text{A.41})$$

kde maticu D_N nazývame Čebyševovou diferenčnou maticou typu $(N+1) \times (N+1)$.

Pred uvedením všeobecného vzťahu pre zložky Čebyševovej diferenčnej matice na jednoduchých príkladoch ilustrujeme jej tvar pre $N = 1$ a $N = 2$ na intervale $[-1, 1]$.

Nech $N = 1$. Pomocou Čebyševových interpolačných uzlov $x_0 = -1$ a $x_1 = 1$ využitím vzorca (A.28) vyjadríme prvky matice ako

$$D_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.42})$$

Analogicky pre $N = 2$ a Čebyševove interpolačné uzly $x_0 = -1, x_1 = 0$ a $x_2 = 1$ má Čebyševova diferenčná matica podľa (A.31) tvar

$$D_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.43})$$

Všeobecný tvar zložiek Čebyševovej diferenčnej matice uvádzame podľa [10] v nasledujúcom tvrdení.

Nech $N \geq 1$. Označme riadky a stĺpce $(N+1) \times (N+1)$ diferenčnej Čebyševovej matice D_N od 0 po N . Jej zložky potom môžeme vyjadriť v tvare

$$(D_N)_{00} = \frac{2N^2 + 1}{6}, \quad (D_N)_{NN} = -\frac{2N^2 + 1}{6}, \quad (\text{A.44})$$

$$(D_N)_{jj} = \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)}, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (\text{A.45})$$

$$(D_N)_{ij} = \frac{c_i (-1)^{i+j}}{c_j x_i - x_j}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N-1, \quad (\text{A.46})$$

kde

$$c_i = \begin{cases} 1, & i = 0, 1 \\ 2, & \text{inak.} \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

Schematicky zobrazujeme maticu D_N na obrázku 37

$$D_N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{2N^2 + 1}{6} & 2 \frac{(-1)^j}{1 - x_j} & \frac{1}{2}(-1)^N \\ \hline -\frac{1}{2} \frac{(-1)^i}{1 - x_i} & \begin{array}{c} \frac{(-1)^{i+j}}{x_i - x_j} \\ \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)} \\ \frac{(-1)^{i+j}}{x_i - x_j} \end{array} & \frac{1}{2} \frac{(-1)^{N+i}}{1 + x_i} \\ \hline -\frac{1}{2}(-1)^N & -2 \frac{(-1)^{N+j}}{1 + x_j} & -\frac{2N^2 + 1}{6} \\ \hline \end{array}$$

Obr. 37: Jednotlivé zložky Čebyševovej diferenčnej matice [10].

Čebyševove diferenčné matice konštruujeme v systéme matlab pomocou programu `cheb.m` [10]. Tento program na výpočet matice používa iba vzorec (A.46). Diagonálne

zložky sa potom vypočítajú ako

$$(D_N)_{ij} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N (D_N)_{ij}, \quad (\text{A.48})$$

čo zodpovedá riešeniu lineárneho systému pre neznáme diagonálne prvky.

Presnosť Čebyševovej spektrálnej derivácie

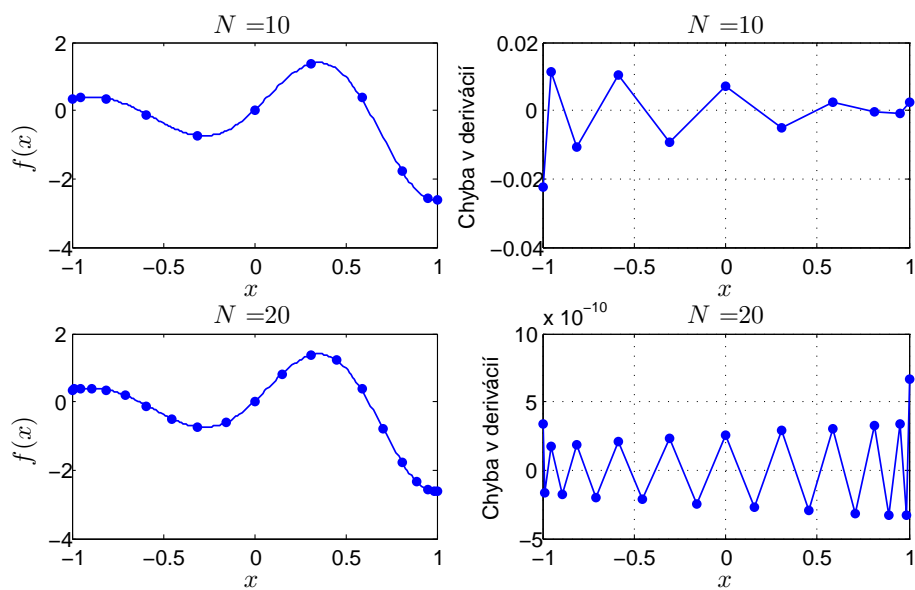
V nasledujúcej časti budeme Čebyševove diferenčné matice používať na numerickú aproximáciu derivácií funkcie. Presnosť porovnáme pre rôzne funkcie a rôzne počty Čebyševových uzlov.

Nech N je počet Čebyševových uzlov, v ktorých vyčíslime hodnotu zvolenej funkcie $f(x)$. Tieto uložíme do vektora v . Potom vieme deriváciu v uzlových bodoch vyjadriť ako súčin $D_N v$, ktorý porovnáme s explicitne vyjadrenou deriváciu zvolenej funkcie.

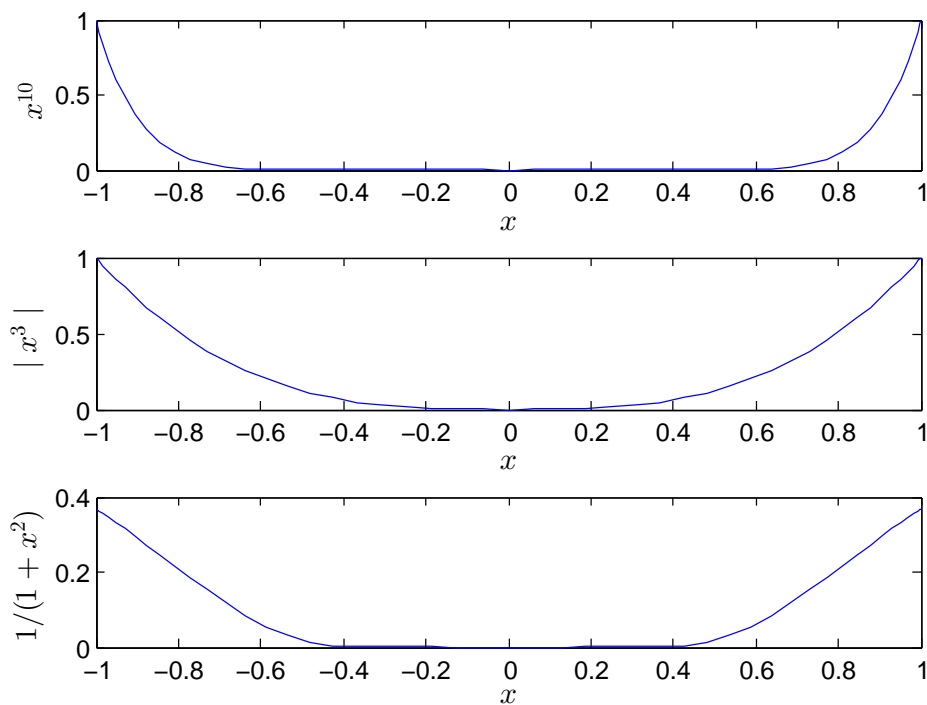
Na obrázku 38 môžeme vidieť presnosť derivácie pomocou Čebyševovej spektrálnej metódy pri počte uzlov $N = 10$ a $N = 20$ pre hladkú neperiodickú funkciu $f(x) = e^x \sin(5x)$. Zatiaľ čo pri 10 Čebyševových uzloch je absolútna chyba rádu 10^{-2} , pri väčšom počte ($N = 20$) je chyba výrazne nižšia (rádu 10^{-10}). Dôvodom je, že presnosť aproximácie derivácie pomocou diferenčnej matice závisí od presnosti aproximácie interpolačným polynómom, a tá sa pre rastúci počet uzlov zväčšuje.

Ďalej zobrazíme rôzne funkcie $f(x)$ na intervale $[-1, 1]$ (obrázok 39) a porovnáme pre ne závislosť najväčšej chyby a počtu Čebyševových uzlov N (obrázok 40).

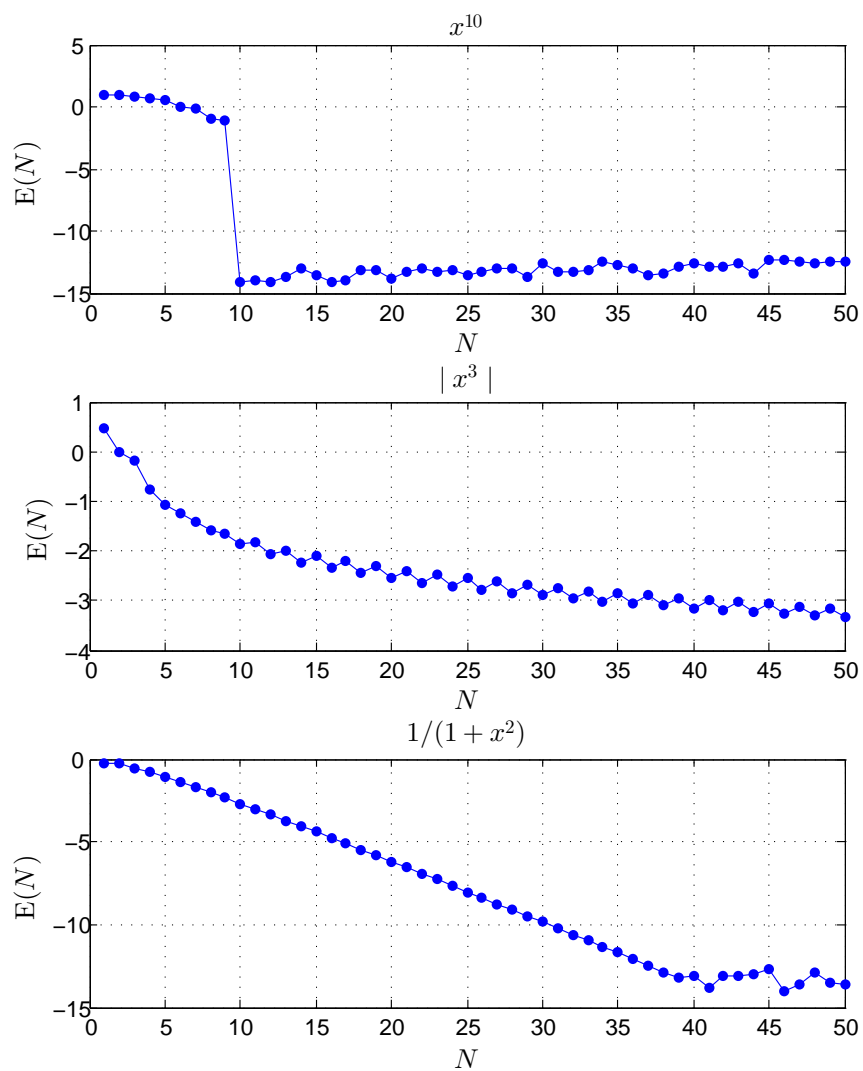
Pre polynomiálnu funkciu $f(x) = x^{10}$ vidíme konvergenciu od počtu Čebyševových uzlov $N = 10$, pretože ide o polynóm stupňa 10. Najpomalšiu konvergenciu môžeme vidieť pri funkcii $|x^3|$.



Obr. 38: Chyba derivácie pre funkciu $f(x) = e^x \sin(5x)$ pre $N = 10$ a $N = 20$ Čebyševových uzlov na intervale $[-1, 1]$.



Obr. 39: Funkcie x^{10} , $|x^3|$ a $1/(1+x^2)$ na intervale $[-1, 1]$.



Obr. 40: Funkcia $E(N)$, ktorá vyjadruje maximálnu odchýlku aproximovanej derivácie od analytickej derivácie pre jednotlivé počty Čebyševových uzlov.

Zdrojové kódy

V tejto časti uvidíme zdrojové kódy, ktoré sme používali v predchádzajúcich častiach. Vo všetkých zdrojových kódach používame knižnicu HYDROSTAB [12] v systéme MATLAB. Rôzne označovanie premenných v knižnici HYDROSTAB a v našej práci vedie k nasledovnému preznačeniu pre zdrojové kódy:

$$\xi_{\text{naša práca}} = y_{\text{kód}},$$

$$y_{\text{naša práca}} = x_{\text{kód}},$$

$$a_{\text{naša práca}} = k_{\text{kód}}.$$

Tiež pre normálny mód v zdrojovom kóde platí:

$$(e^{\lambda t + i a y})_{\text{naša práca}} = (e^{i k x - i \omega t})_{\text{kód}},$$

čím pre vlastné čísla dostávame vzťah

$$\lambda_{\text{naša práca}} = -i \omega_{\text{kód}}.$$

```

%%% Zobrazenie spektra vlastných hodnôt systému

clear all
close all

%Nastavenie hodnôt bezrozmerných parametrov
alpha=1;    % kapacitné číslo
phi=0.11;   % pórovitosť
delta=3;    % parameter v permeabilitnom zákone kappa
param_vec = [alpha,phi,delta];

% Vytvorenie hydrodynamického objektu s jednou oblasťou
hs=hydrostab(1);
% Nastavenie veľkosti intervalu a počtu uzlov
hs=set_interval(hs,1,-Inf,Inf,32);
% Nastavenie vzdialenosti medzi prvým a posledným uzlom
hs=setscale(hs,1,10);
% vektor vlnových čísel
n=50;
kmin=0;kmax=3;
arrk=linspace(kmin,kmax,n);

% Funkcie v základnom stave nezávislé na parametroch
cbar=func('1/(1+exp(y))');
wbar=func('exp(y)/(1+exp(y))');
ubar=phi+1/alpha;
dcbar=func('-exp(y)/((1+exp(y))^2)');
dwbar=func('exp(y)/((1+exp(y))^2)');

% Funkcie v základnom stave závislé na parametroch
kappa=func(@kappa_fun,param_vec);
kappainv=func(@kappainv_fun,param_vec);
dkappadw=func(@dkappadw_fun,param_vec);

hs=setk(hs,arrk(end));

% Premenné závislé od (x,y,t) a systém pre poruchové funkcie
hs=addvar(hs,1,'chat','what','uhat');
hs=addeq(hs,alpha*phi*dt(chat)-alpha*phi*dy(chat)+alpha*ubar*dy(chat)...
+alpha*uhat*dcbar+chat*wbar+what*cbar==0);
hs=addeq(hs,dt(what)-dy(what)+chat*wbar+what*cbar==0);
hs=addeq(hs,dy2(uhat)-kappainv*dkappadw*dwbar*dy(uhat)+dx2(uhat)...
-(phi+1/alpha)*kappainv*dkappadw*dx2(what)==0);
% Výpočet vlastných hodnôt systému
hs=compute(hs);

% Zobrazenie spektra vlastných hodnôt
eige=eigenvalue(hs,1e8);

% Usporiadanie vl. hodnôt podľa imaginárnej časti
[eig_sorted,eig_label,beta]=sort_eigs(eige);
nshow=21;    % nastavenie počtu vl. hodnôt na zobrazenie
disp('Top eigenvalues (with largest imaginary parts):');format long
eig_sorted(1:nshow);format short

% Vlastné hodnoty systému
if real(eig_sorted(1))==0;    % vedúca vlastná hodnota - modrá
plot(imag(eig_sorted(1)),-real(eig_sorted(1)),'bo','MarkerFaceColor','b');
hold on;
plot(imag(eig_sorted(2:nshow)),-real(eig_sorted(2:nshow)),'ro');

```

Obr. 41: Zobrazenie spektra systému pre poruchové funkcie.

```

else
plot(imag(eig_sorted(1)), -real(eig_sorted(1)), 'ro', 'MarkerFaceColor', 'b');
hold on;
plot(imag(eig_sorted(2:nshow)), -real(eig_sorted(2:nshow)), 'ro');
end

% súradnicové osi (0,0)
xlim = get(gca, 'xlim');      % rozsah v smere x-ovej osi
ylim = get(gca, 'ylim');      % rozsah v smere y-ovej osi

% súradnicové osi (0,0)
plot([xlim(1), xlim(2)], [0, 0], '--k');
plot([0, 0], [ylim(1), ylim(2)], '--k');
axis([xlim(1), xlim(2), ylim(1), ylim(2)]);
xlabel('Re[$\lambda$]', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', 12);
ylabel('Im[$\lambda$]', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', 12);
return

```

Obr. 42: Pokračovanie: Zobrazenie spektra systému pre poruchové funkcie.

```

%% Zobrazenie frekvencie a rýchlosti porúch v závislosti od vlnového čísla

clear all
close all

% Nastavenie hodnôt bezrozmerných parametrov
alpha=1; % kapacitné číslo
phi=0.11; % pórovitosť
delta=3; % 1; % parameter v permeabilitnom zákone kappa
param_vec = [alpha,phi,delta];

% Vytvorenie hydrodynamického objektu s jednou oblasťou
hs=hydrostab(1);
% Nastavenie veľkosti intervalu a počtu uzlov
hs=set_interval(hs,1,-Inf,Inf,32);
% Nastavenie vzdialenosti medzi prvým a posledným uzlom
hs=setscale(hs,1,10);
% vektor vlnových čísel
n=50; kmin=0;kmax=3;
arrk=linspace(kmin,kmax,n);

% Funkcie v základnom stave nezávislé na parametroch
cbar=func('1/(1+exp(y))');
wbar=func('exp(y)/(1+exp(y))');
ubar=phi+1/alpha;
dcbar=func('-exp(y)/((1+exp(y))^2)');
dwbar=func('exp(y)/((1+exp(y))^2)');
% Funkcie v základnom stave závislé na parametroch
kappa=func(@kappa_fun,param_vec);
kappainv=func(@kappainv_fun,param_vec);
dkappadw=func(@dkappadw_fun,param_vec);

hs=setk(hs,arrk(end));
% Premenné závislé od (x,y,t) a systém pre poruchové funkcie
hs=addvar(hs,1,'chat','what','uhat');
hs=addeq(hs,alpha*phi*dt(chat)-alpha*phi*dy(chat)+alpha*ubar*dy(chat)...
+alpha*uhat*dcbar+chat*wbar+what*cbar==0);
hs=addeq(hs,dt(what)-dy(what)+chat*wbar+what*cbar==0);
hs=addeq(hs,dy2(uhat)-kappainv*dkappadw*dwbar*dy(uhat)+dx2(uhat)...
-(phi+1/alpha)*kappainv*dkappadw*dx2(what)==0);
% Výpočet vlastných hodnôt systému
hs=compute(hs);

% Zobrazenie spektra vlastných hodnôt
eige=eigenvalue(hs,1e8);
% Usporiadanie vl. hodnôt podľa imaginárnej časti
[eig_sorted,eig_label,beta]=sort_eigs(eige);
nshow=21; % nastavenie počtu vl. hodnôt na zobrazenie
disp('Top eigenvalues (with largest imaginary parts):');
format long
eig_sorted(1:nshow);
format short

eige_top=zeros(1,length(arrk));
for i=1:n % cyklus pre vlnové čísla
    % výpočet vl. hodnôt pre konkrétnu voľbu vlnového čísla
    hs=setk(hs,arrk(i));

    hs=addvar(hs,1,'chat','what','uhat');
    hs=addeq(hs,alpha*phi*dt(chat)-alpha*phi*dy(chat)+...

```

Obr. 43: Frekvencia a rýchlosť rastu porúch ako funkcie vlnového čísla.

```

        alpha*ubar*dy(chat)+alpha*uhat*dcbar+chat*wbar+what*cbar==0);
hs=addeq(hs,dt(what)-dy(what)+chat*wbar+what*cbar==0);
hs=addeq(hs,dy2(uhat)-kappainv*dkappadw*dwbar*dy(uhat)+dx2(uhat)...
        -(phi+1/alpha)*kappainv*dkappadw*dx2(what)==0);
hs=compute(hs);
eige=eigenvalue(hs,1e8);
[eig_sorted,eig_label,beta]=sort_eigs(eige);
% Pre každé k uložíme vl. číslo s najväčšou reálnou časťou:
eige_top(1,i)=eig_sorted(1);
% Rýchlosť rastu porúch ako funkcia vlnového čísla
figure(1)
plot(arrk(i)*ones(length(eige),1),imag(eige),'b+');
axis([0 kmax -10 10]);
xlabel('$a$', 'interpreter','latex','FontSize',12);
ylabel('$\mathrm{Re}[\lambda]$', 'interpreter','latex','FontSize',12);
hold on
% Frekvencia porúch ako funkcia vlnového čísla
figure(2)
plot(arrk(i)*ones(length(eige),1),-real(eige),'r+');
axis([0 kmax -15 15]);
xlabel('$a$', 'interpreter','latex','FontSize',12);
ylabel('$\mathrm{Im}[\lambda]$', 'interpreter','latex','FontSize',12);
hold on
end

% Maximálna rýchlosť rastu ako funkcia vlnového čísla
figure(3)
plot(arrk,imag(eige_top),'b+');
axis([0 kmax 0 0.5]);
xlabel('$a$', 'interpreter','latex','FontSize',12);
ylabel('$\mathrm{Re}[\lambda]$', 'interpreter','latex','FontSize',12);
return

```

Obr. 44: Pokračovanie: Frekvencia a rýchlosť rastu porúch ako funkcie vlnového čísla.

```

%% Zobrazenie poruchových amplitúd a poruchových funkcií

clear all
close all
% Nastavenie pociatocných parametrov a zdefinovanie hydrodynamickeho
% objektu rovnako ako v predchádzajúcom prípade
alpha=1; phi=0.11; delta=3;
param_vec = [alpha,phi,delta];
hs=hydrostab(1);
hs=set_interval(hs,1,-Inf,Inf,32);
hs=setscale(hs,1,10);

n=50; kmin=0; kmax=3;
arrk=linspace(kmin,kmax,n);
xmax=10; a=2;
arrx=linspace(0,xmax,32);
cbar=func('1/(1+exp(y))');
wbar=func('exp(y)/(1+exp(y))');
ubar=phi+1/alpha;
dcbar=func('-exp(y)/((1+exp(y))^2)');
dwbar=func('exp(y)/((1+exp(y))^2)');
kappa=func(@kappa_fun,param_vec);
kappainv=func(@kappainv_fun,param_vec);
dkappadw=func(@dkappadw_fun,param_vec);
hs=setk(hs,arrk(end));
hs=addvar(hs,1,'chat','what','uhat');
hs=addeq(hs,alpha*phi*dt(chat)-alpha*phi*dy(chat)+alpha*ubar*dy(chat)...
+alpha*uhat*dcbar+chat*wbar+what*cbar==0);
hs=addeq(hs,dt(what)-dy(what)+chat*wbar+what*cbar==0);
hs=addeq(hs,dy2(uhat)-kappainv*dkappadw*dwbar*dy(uhat)+dx2(uhat)...
-(phi+1/alpha)*kappainv*dkappadw*dx2(what)==0);
hs=compute(hs);
eige=eigenvalue(hs,1e8);

% Vlastná hodnota s kladnou rýchlosťou rastu
index=find(imag(eige)>0);
% prouchové amplitúdy
[c_vec,array]=retrieve(hs,chat,eige(index));
[w_vec,array]=retrieve(hs,what,eige(index));
[u_vec,array]=retrieve(hs,uhat,eige(index));
% Zobrazenie poruchových amplitúd
figure(1)
subplot(3,1,1);
plot(array,real(c_vec),'b-o');hold on;
plot(array,imag(c_vec),'r-+');
ylabel('$\mathrm{Re}(\tilde{c})$, $\mathrm{Im}(\tilde{c})$',...
'interpreter','latex','FontSize',12);
xlabel('$\xi$', 'interpreter','latex','FontSize',12);
axis([-10 10 -1 1]);
subplot(3,1,2);
plot(array,real(w_vec),'b-o');hold on;
plot(array,imag(w_vec),'r-+');
ylabel('$\mathrm{Re}(\tilde{w})$, $\mathrm{Im}(\tilde{w})$',...
'interpreter','latex','FontSize',12);
xlabel('$\xi$', 'interpreter','latex','FontSize',12);
axis([-10 10 -1 1]);
subplot(3,1,3);
plot(array,real(u_vec),'b-o');hold on;
plot(array,imag(u_vec),'r-+');hold on;
ylabel('$\mathrm{Re}(\tilde{u})$, $\mathrm{Im}(\tilde{u})$',...

```

Obr. 45: Zobrazenie poruchových funkcií $\hat{c}(\xi, y, t)$, $\hat{w}(\xi, y, t)$ a $\hat{u}(\xi, y, t)$.


```

        'interpreter','latex','FontSize',12);
xlabel('$\xi$', 'interpreter','latex','FontSize',12);
axis([-10 10 -1 1]);

arrx=arrx';
% Normálny mód a poruchové funkcie
norm_mod = cos(a*arrx) + j*sin(a*arrx);
c_pert2=c_vec*norm_mod';
w_pert=w_vec*norm_mod';
u_pert=u_vec*norm_mod';

% Zobrazenie poruchových funkcií pre koncentrácie a rýchlostné pole
figure(2)
surf(array, arrx, 2*real(c_pert2));
xlabel('$\xi$', 'interpreter','latex','FontSize',12);
ylabel('$y$', 'interpreter','latex','FontSize',12);
zlabel('$\hat{c}(x,y,t)$', 'interpreter','latex','FontSize',12);
axis([-10 10 0 xmax -2 2]);

figure(3)
surf(array, arrx, 2*real(w_pert));
xlabel('$\xi$', 'interpreter','latex','FontSize',12);
ylabel('$y$', 'interpreter','latex','FontSize',12);
zlabel('$\hat{w}(x,y,t)$', 'interpreter','latex','FontSize',12);
axis([-10 10 0 xmax -2 2]);

figure(4)
surf(array, arrx, 2*real(u_pert));
xlabel('$\xi$', 'interpreter','latex','FontSize',12);
ylabel('$y$', 'interpreter','latex','FontSize',12);
zlabel('$\hat{u}(x,y,t)$', 'interpreter','latex','FontSize',12);
axis([-10 10 0 xmax -2 2]);

```

Obr. 46: Pokračovanie: Zobrazenie poruchových funkcií $\hat{c}(\xi, y, t)$, $\hat{w}(\xi, y, t)$ a $\hat{u}(\xi, y, t)$.