

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ZDAŇOVANIE A PODNIKANIE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ZDAŇOVANIE A PODNIKANIE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Matej Silný
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Zdaňovanie a podnikanie.
Taxation and entrepreneurs.

Cieľ: Cieľom práce je porozumieť práce Pástora a Veronesiho a pokúsiť sa rozšíriť platnosť existencie rovnováhy v ich modeli.

Vedúci: prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 26.01.2017

Dátum schválenia: 27.01.2017
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Podakovanie Touto cestou by som sa rád poďakoval svojmu vedúcemu diplomovej práce prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc. za neoceniteľnú pomoc, odborné rady a vecné pripomienky, ktoré mi vo veľmi značnej miere pomohli pri písaní tejto práce, ako aj za zapožičanie literatúry využívanej v texte. Moja veľká vďaka patrí aj môjmu otcovi a priateľom za ich trpezlivosť a podporu v najťažších momentoch.

Abstrakt

SILNÝ, Matej: Zdaňovanie a podnikanie [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc., Bratislava, 2018, 60 s.

Základom tejto diplomovej práce je článok, ktorého autormi sú Luboš Pástor a Pietro Veronesi. Predstavujú v ňom model, ktorý za istých zjednodušujúcich podmienok skúma, ako závisí ochota jednotlivcov podnikat. Zdôvodňuje tiež nerovnosti príjmov v spoločnosti. Prvou časťou našej práce je skúmať model z matematického hľadiska a upraviť dôkazy tvrdení do formy, z ktorej je jednoduchšie vyvodiť matematické závery. Prínosom tejto diplomovej práce je dôkaz existencie ekvilibria nájdeného modelom na okolí špeciálneho prípadu, v ktorom majú všetci jednotlivci rovnakú averziu k riziku.

Kľúčové slová: zdaňovanie, podnikanie, nerovnosť príjmov, maximalizácia funkcie užitočnosti

Abstract

SILNÝ, Matej: Taxation and entrepreneurs [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc., Bratislava, 2018, 60 p.

This thesis is based on a research paper by Lubos Pastor and Pietro Veronesi. In the paper, they introduce a model which, under some simplifying conditions, explore individuals' willingness to run a business. It also explains income inequality in the society. First goal of our thesis is to examine the model from mathematical point of view and then modify proofs of propositions into forms, which are suitable for mathematical conclusions. Contribution of this master thesis is a proof of existence of an equilibrium found by the model in a neighbourhood of special case of common risk aversion across all individuals.

Keywords: taxation, entrepreneurship, inequality of income, maximization of utility function

Obsah

Úvod	15
1 Základný model	17
1.1 Základné charakteristiky modelu	17
1.2 Charakteristika typov agentov	19
1.2.1 Charakteristika podnikateľov	19
1.2.2 Charakteristika penzistov	20
1.3 Rozhodovací proces	20
1.3.1 Určenie SPD	22
1.3.2 Výpočet spotreby a užitočnosti penzistov	26
1.3.3 Výpočet spotreby a užitočnosti podnikateľov	26
1.3.4 Kritérium pri rozhodovaní	27
1.4 Zdroje nerovnosti príjmov	29
2 Alternatívne odvodenie podmienok rovnováhy	31
2.1 Úrovně rovnováhy v modeli	31
2.2 Pomocné odvodenia	32
2.3 Alternatívne odvodenie podmienky prvého rádu	34
2.4 Prevod medzi pôvodným a alternatívnym značením	38
2.5 Príklad výpočtu pre jednoduché rozdelenie	40
3 Existencia rovnováhy na okolí spoločnej averzie k riziku	45
3.1 Rovnováha trhu	45
3.2 Spoločenská rovnováha	54
Záver	57
Zoznam použitej literatúry	59

Úvod

Základom tejto diplomovej práce je článok „Income Inequality and Asset Prices under Redistributive Taxation“ [8], ktorý napísali Ľuboš Pástor a Pietro Veronesi. Tento článok skúma, ako závisí ochota jednotlivcov podnikat' od ich osobnej úrovne podnikateľských schopností a averzie k riziku a ako tieto rozhodnutia ovplyvňujú nerovnosti príjmov v spoločnosti. Výsledky taktiež ovplyvňujú rôzne náhodné udalosti, jednak tie v živote jednotlivca, jednak také, ktoré ovplyvňujú celú spoločnosť. Model je výrazne zjednodušený oproti realite, keďže počíta len s dvoma druhmi jednotlivcov - podnikateľmi a penzistami. Spoločnosť s týmito vlastnosťami funguje nasledovne: podnikatelia investujú do svojich firiem aj do akcií ostatných firiem a tie na konci sledovaného obdobia vyprodukovávajú zisk vo forme peňažných jednotiek. Tento zisk je následne zdanený a rozdelený vo forme dividend medzi akcionárov spoločností. Príjem štátu z daní sa v plnej výške rovnomerne rozdelí medzi penzistov, pre ktorých je to jediný zdroj príjmu.

Na začiatku našej práce sa zaoberáme týmto základným modelom. Formulácie jednotlivých tvrdení a ich dôkazy, ktoré sa nachádzajú v internetovom dodatku k článku [9] sú však občas ťažko zrozumiteľné, alebo jedno na druhé nenadväzujúce. Ako príklad môžem uviesť dôkaz vety 2 ([9], str. 3 - 4), ktorý využíva závery a terminológiu zavedenú v dôkaze vety 4 ([9], str. 6 - 14). Hlavným cieľom prvej kapitoly je preto hlavné poznatky zo základného modelu spracovať do prehľadnejšej formy.

Pástor a Veronesi vo svojom texte definujú premenné, ktoré majú logickú a zrozumiteľnú ekonomickú interpretáciu. Občas to však prispieva k tomu, že vzorce odvodené v práci nie je jednoduché analyzovať z matematického hľadiska. V druhej kapitole preto urobíme alternatívne odvodenie niekoľkých najdôležitejších vzťahov do matematicky lepšie uchopiteľnej formy, ktorá však naopak nemá ekonomickú interpretáciu.

V [8] autori analyzujú niekoľko špeciálnych prípadov, v ktorých dokazujú existenciu rovnováhy. My v tretej kapitole využijeme ich poznatky pre prípad, v ktorom sú všetci podnikatelia rovnako averzní k riziku, majú teda tzv. spoločnú averziu k riziku. Vychádzajúc z týchto poznatkov, dokážeme existenciu rovnováhy na okolí spoločnej

averzie k riziku, t.j. pre také prípady, v ktorých sa averzia jednotlivých podnikateľov len málo líši od spoločnej averzie analyzovanej v [8].

1 Základný model

Pástor a Veronesi vo svojom článku [8] vytvorili model, ktorý predstavíme na nasledujúcich stranách. Cieľom tejto kapitoly je zosumarizovať hlavné teoretické poznatky z článku [8] a internetového dodatku [9] do jedného prehľadného textu, pri použití jednotného a matematicky korektného označenia.

1.1 Základné charakteristiky modelu

V základnom modeli uvažujeme abstraktnú množinu agentov $\mathcal{J}$. Na tejto množine máme mieru $m(\cdot)$, pre ktorú platí

- $m(\emptyset) = 0$,
- $m(\mathcal{J}) = 1$.

Autori [8] o tejto miere viac neuvádzajú, budeme preto predpokladať, že existuje. Mlčky tiež predpokladajú to, že táto miera je neatomická ([7], str. 443). Z toho vyplýva, že miera jednobodovej podmnožiny $\{i\} \subset \mathcal{J}$ je nulová, t.j. $m(\{i\}) = 0$. Vďaka tejto vlastnosti potom platí, že pre ľubovoľnú neprázdnu podmnožinu $\mathcal{N} \subset \mathcal{J}$ a bod $n \in \mathcal{N}$ platí

$$\int_{\mathcal{N}} x \, dm(i) = \int_{\mathcal{N} \setminus \{n\}} x \, dm(i). \quad (1.1)$$

Poznámka. V tejto práci budeme používať označenie $\int_{\mathcal{N}} x \, dm(i)$, ktoré je ekvivalentné s označením $\int_{\mathcal{N}} x \, di$ používaným v textoch [8] a [9], avšak obsahuje v sebe aj informáciu o miere, ktorú používame.

Poznámka. Vlastnosť (1.1) špeciálne platí aj pre množinu podnikateľov $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$, ktorú predstavíme neskôr. Namiesto označenia $\int_{\mathcal{I}} x \, di$, ktoré používajú autori [8] a [9], tak budeme v celej práci písať $\int_{\mathcal{I}} x \, dm(i)$.

Definícia 1.1. Pre každého agenta $i \in \mathcal{J}$ definujeme nasledovné charakteristiky:

- $\mu_i > 0$ - úroveň podnikateľských schopností,

- $\gamma_i > 0$ - koeficient averzie k riziku,
- $B^0 > 0$ - množstvo jednotiek kapitálu každého z agentov v čase 0.

Poznámka. V texte budeme rozlišovať medzi dvoma typmi indexov. V prípade, že sa jedná o index agenta alebo množiny agentov, napíšeme ho ako pravý dolný. Ak sa jedná o časový index, píšeme ho vpravo hore. Týmto zjednocujeme označenie z [8] a [9], v ktorých bolo toto rôzne značené.

Model počíta s dvoma základnými typmi agentov, a to podnikateľmi a penzistami. Agentov sledujeme počas časového obdobia $[0, T]$. V čase 0 sa každý z agentov $i \in \mathcal{J}$ rozhoduje, ktorým typom agenta sa stane na celé sledované obdobie až do času T . Základom pri tomto rozhodovaní bude maximalizácia užitočnosti.

Pre potreby nášho modelu budeme predpokladať, že celková spotreba ľubovoľného agenta v čase T bude rovná jeho čistým príjmom v čase T . Inak povedané, agent nemíňa viac ako zarobí, ale ani si neodkladá kapitál na neskôr. Do času T agent nemá žiadny príjem ani nespotrebuje žiadny kapitál.

Definícia 1.2. Nech spotreba agenta $i \in \mathcal{J}$ v čase T je C_i^T . Potom jeho funkciu užitočnosti definujeme ako

$$U(C_i^T) = \frac{(C_i^T)^{1-\gamma_i}}{1-\gamma_i}. \quad (1.2)$$

V práci budeme rozlišovať medzi dvoma druhmi strednej hodnoty. Analogicky ako v [8], budeme ich značiť odlišne, avšak použijeme označenie, ktoré lepšie odzrkadľuje charakter tej-ktorej strednej hodnoty.

1. Očakávaná hodnota náhodnej premennej v čase t - značíme $E^t[\cdot]$. V texte väčšinou $t = T$.
2. Stredná hodnota v rámci určitej množiny agentov, nazvime ju povedzme $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \subset \mathcal{J}$ - značíme $E_{\mathcal{J}}[\cdot \mid i \in \mathcal{M}]$. V texte väčšinou $\mathcal{M} = \mathcal{I}$.

S využitím tohto označenia a vzorca (1.2) napíšeme očakávanú užitočnosť agenta $i \in \mathcal{J}$ ako

$$E^T[U(C_i^T)] = \frac{1}{1-\gamma_i} E^T[(C_i^T)^{1-\gamma_i}]. \quad (1.3)$$

Úroveň zdanenia označíme písmenom $\tau \in (0, 1)$. Aby sme aspoň čiastočne verne modelovali skutočnú situáciu v spoločnosti, musíme počítať s náhodnými udalosťami, ktoré môžu ovplyvniť produkciu - či už pozitívne, alebo negatívne. Na to nám slúži nasledovná definícia.

Definícia 1.3. Náhodné udalosti v spoločnosti modelujeme pomocou dvoch náhodných premenných:

- ε^T - agregátny šok. V tejto premennej sú zahrnuté náhodné zmeny, ktoré ovplyvňujú celú spoločnosť. Negatívnym príkladom by mohlo byť vypuknutie finančnej krízy alebo prírodná katastrofa, pozitívnym napríklad ukončenie finančnej krízy a prechod do obdobia ekonomického rastu.
- ε_i^T - idiosynkratický šok agenta i . V tejto premennej sú zahrnuté náhodné zmeny, ktoré ovplyvňujú len konkrétneho agenta. Ako príklad by mohlo slúžiť napríklad zranenie, ktoré spôsobí dočasnú práceneschopnosť.

Aby sme reflektovali skutočnosť, že šok môže byť aj pozitívny, aj negatívny, platí $E^T[\varepsilon^T] = E^T[\varepsilon_i^T] = 0$.

1.2 Charakteristika typov agentov

V nasledovnej sekcii popíšeme typy agentov. Táto charakteristika bude základom pre určenie, akého typu majú byť jednotliví agenti. Nech $\mathcal{I}$ je množina podnikateľov. Ako ju určiť, uvedieme neskôr. Keďže $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$, pre mieru tejto množiny platí $m(\mathcal{I}) \in (0, 1)$.

1.2.1 Charakteristika podnikateľov

V prípade, že sa agent rozhodne stať podnikateľom, založí si v čase 0 firmu. Následne môže predat podiel vo firme vo forme akcií ostatným podnikateľom a za zisk z tohto predaja nakúpiť akcie firiem ostatných podnikateľov alebo bezrizikové bezkupónové dlhopisy. Aby podnikateľ zostal aspoň čiastočným vlastníkom svojej firmy, je mu povolené predat maximálne $1 - \theta$ z celej hodnoty firmy, pričom $\theta \in [0, 1]$. Autori [9] na str. 7 zdôvodňujú, že nezávisle od toho, aké veľké je ohraničenie θ , agent vždy využije možnosť predaja akcií svojej firmy v maximálnej výške a zostane mu tak presne θ z celkovej hodnoty firmy.

Označme M_i^0 rovnovážnu trhovú hodnotu firmy i v čase 0. Agent po predaji akcií svojej firmy bude mať k dispozícii kapitál vo výške $(1 - \theta)M_i^0$. Rozpočtové ohraničenie ľubovoľného podnikateľa $i \in \mathcal{I}$ tak môžeme napísať vo forme

$$(1 - \theta)M_i^0 = \int_{\mathcal{I}} N_{i,j}^0 M_j^0 dm(j) + N_{i,0}^0, \quad (1.4)$$

kde

- $N_{i,j}^0$ sú akcie firmy j zakúpené podnikateľom i v čase 0, vyjadrené ako zlomok z celkovej hodnoty firmy. Platí teda $N_{i,j}^0 \in [0, 1]$. Akcie prinesú svojim majiteľom zisk vo forme dividend na konci sledovaného obdobia.
- $N_{i,0}^0$ je podiel podnikateľa i v bezrizikovom dlhopisovom fonde v čase 0. Tento podiel je vyjadrený formou množstva peňažných jednotiek a zachováva si stále rovnakú hodnotu, inak povedané $N_{i,0}^t = N_{i,0}^0 \quad \forall t \in [0, T]$. Táto investícia teda nezarába.

Firma agenta i na konci sledovanej periódy, teda v čase T , vyprodukuje B_i^T kapitálu. Veľkosť tohto kapitálu závisí od počiatočného kapitálu, podnikateľských schopností agenta a náhodných šokov, ktoré sme zadefinovali v sekcii 1.1.

Definícia 1.4. Výšku kapitálu vyprodukovaného firmou i v čase T definujeme ako

$$B_i^T = B^0 e^{\mu_i T + \varepsilon^T + \varepsilon_i^T}. \quad (1.5)$$

Vyprodukovaný kapitál sa po zdanení v celej výške rozdelí ako dividendy medzi majiteľov firmy. Spotreba podnikateľa po zdanení je rovná

$$C_i^T = (1 - \tau) \left[\theta B_i^T + \int_{\mathcal{I}} N_{i,j}^0 B_j^T dm(j) \right] + N_{i,0}^0 \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad (1.6)$$

Ak na označenie kapitálu očisteného od dane použijeme označenie $D_i^T = (1 - \tau) B_i^T$, dostávame nasledovnú rovnicu:

$$C_i^T = \theta D_i^T + \int_{\mathcal{I}} N_{i,j}^0 D_j^T dm(j) + N_{i,0}^0 \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad (1.7)$$

1.2.2 Charakteristika penzistov

Jediným zdrojom príjmov penzistov je príjem, ktorý štát získa z daní podnikateľov a následne v plnej výške prerozdelení medzi penzistov. Označme celkovú produkciu podnikateľov v čase T symbolom $B^T = \int_{\mathcal{I}} B_i^T dm(i)$. Príjem z daní je rovný τB^T . Za predpokladu rovnomerného prerozdelenia daní spotrebu penzistu vieme určiť zo vzorca

$$C_i^T = \frac{\tau B^T}{1 - m(\mathcal{I})} = \frac{\tau}{1 - m(\mathcal{I})} \int_{\mathcal{I}} B_j^T dm(j) \quad \forall i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{I}. \quad (1.8)$$

1.3 Rozhodovací proces

Rozhodnutie, či sa agent stane podnikateľom alebo penzistom, závisí od toho, z ktorej alternatívy očakáva vyšší úžitok. Na určenie úžitku používame funkciu užitočnosti definovanú ako (1.2), resp. očakávanú užitočnosť (1.3).

Množinu podnikateľov tak prirodzene budú tvoriť tí agenti, ktorých očakávaná užitočnosť z toho, že sa stanú podnikateľmi, bude vyššia, než z toho, že sa stanú penzistami. Zapišeme

$$\mathcal{I} = \{i \in \mathcal{J} : E_{\mathcal{J}} [U(C_i^T) \mid i \in \mathcal{I}] > E_{\mathcal{J}} [U(C_i^T) \mid i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{I}]\} \quad (1.9)$$

Z výrazu (1.9) sa množina podnikateľov explicitne vyjadriť nedá, je potrebné preto vykonať určité výpočty, ktoré v konečnom dôsledku budú viesť k jej určeniu.

V prvej kapitole sa objaví pojem „state price density“, ktorý by sa do slovenčiny dal preložiť ako „hustota stavových cien“. My však pre jednoduchosť budeme používať skratku SPD odvodenú z anglického názvu. Označovať budeme π^T v súlade s [8].

V texte [8] nie je však veľmi vysvetlené, čo vlastne SPD predstavuje. Pokúsime sa o to preto pomocou nasledovného príkladu, ktorý je však (na rozdiel od našej veličiny π^T) len na konečnej množine.

Príklad 1.1. ([2], str. 136, upravené)

Majme konečný počet S tzv. Arrow-Debreu aktív ([2], str. 78) a tiež S stavov, do ktorých sa ekonomika môže dostať na konci sledovaného obdobia (v tomto príklade $T = 1$). Aktívum $s \in \{1, 2, \dots, S\}$ má vlastnosť, že vyplatí svojmu majiteľovi 1 peňažnú jednotku v prípade, že v čase 1 nastane stav s , a 0 peňažných jednotiek inak. Cenu aktíva s vyjadrenú v čase 0 označíme $\beta(s)$ a nazveme „stavovou cenou“. Vyššie popísaná situácia je znázornená aj na tabuľke 1.1.

Čas	Stav	Aktívum 1	Aktívum 2	...	Aktívum s	...	Aktívum S
0	0	$-\beta(1)$	$-\beta(2)$	...	$-\beta(s)$	...	$-\beta(S)$
1	1	1	0	...	0	...	0
1	2	0	1	...	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
1	s	0	0	...	1	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
1	S	0	0	...	0	...	1

Tabuľka 1.1: Schéma Arrow-Debreu aktív a stavových cien popísaných v príklade 1.1 ([2], str. 136, Table 4.4.A, upravené)

Veličina π^T okrajovo využívaná v tejto práci je analógiou cien $\beta(s)$ z príkladu 1.1, avšak na nekonečnorozmernej spočítateľnej množine podnikateľov $\mathcal{I}$.

1.3.1 Určenie SPD

Nosnou časťou článku [8] je veta 4, v ktorej je využitá aj veličina SPD. V našom texte ju reprodukuje, nezachováme však postupnosť a štruktúru článku [8] a dodatku [9] z jednoduchého dôvodu - z ekonomického hľadiska táto postupnosť možno dávať zmysel, no dôkazy na seba nenadväzujú. Dôkazy viet 1 - 3 ([8], str. 7 - 10, resp. [9], str. 2 - 5) totiž poväčšinou vychádzajú z definícií a poznatkov dokázaných v dôkaze vety 4. Začneme preto touto vetou a k predošlým sa vrátíme v ďalších podkapitolách.

Cena cenného papiera, ktorý v čase T vyplatí e^{ε^T} , vyjadrená v čase 0, je

$$Z = \frac{E^T [\pi^T e^{\varepsilon^T}]}{E^T [\pi^T]}. \quad (1.10)$$

Veta 1.1. ([8], str. 12, Veta 4, upravené)

Nech platí tzv. podmienka vyprázdnenia trhu („market-clearing condition“ v [8])

$$1 - \theta = \int_{\mathcal{I}} N_{i,j}^0 dm(i). \quad (1.11)$$

Potom rovnovážna SPD je daná vzorcom

$$\pi^T = \int_{\mathcal{I}} \left[1 + \theta \left(\frac{e^{\varepsilon^T + \varepsilon_i^T}}{Z} - 1 \right) + (1 - \theta) \alpha(\gamma_i) \left(\frac{e^{\varepsilon^T}}{Z} - 1 \right) \right]^{-\gamma_i} dm(i), \quad (1.12)$$

kde $\alpha(\gamma_i)$ je argumentom tzv. podmienky prvého rádu (v texte [8] uvedenej ako „first-order condition“) na maximalizáciu úžitku:

$$0 = E^T \left[\left\{ Z + \theta \left(e^{\varepsilon^T + \varepsilon_i^T} - Z \right) + (1 - \theta) \alpha(\gamma_i) \left(e^{\varepsilon^T} - Z \right) \right\}^{-\gamma_i} \left(e^{\varepsilon^T} - Z \right) \right]. \quad (1.13)$$

Poznámka. Podmienka vyprázdnenia trhu (1.11) hovorí, že ak má prísť k úplnému vyprázdneniu trhu s akciami, musí sa celkový počet vypísaných akcií ľubovoľného agenta j rovnať celkovému počtu akcií tohto agenta, zakúpenému ostatnými agentmi.

Poznámka. Formulácia podmienky vyprázdnenia trhu (1.11) má iný tvar ako podmienka vyprázdnenia trhu vo formulácii vety 4 v texte [8]. Dôvodom sú vyššie uvedené nezrovnalosti v pôvodnom texte - na odvodenie tvaru použitého v [8] sa používajú vedomosti z dôkazu vety 2 ([9], str. 2 - 4), ktorý však vychádza z dôkazu vety 4, ktorý by sa po správnosti mal v texte nachádzať skôr.

Poznámka. Rovnako ako v prípade $N_{i,j}^0$, aj pre $N_{i,0}^0$ platí, že musí prísť k vyprázdneniu trhu. Budeme preto rovnako ako autori [8] na str. 8 požadovať, aby boli dlhopisy v tzv. „zero-net supply“, t.j.

$$\int_{\mathcal{I}} N_{i,0}^0 dm(i) = 0. \quad (1.14)$$

Dôkaz. Pri dôkaze budeme vychádzať z rovnice, ktorá pomocou SPD prepája hodnotu nejakého cenného papiera V v dvoch rôznych časových okamihoch t a T , $t < T$. Označme tieto hodnoty $V(t)$ a $V(T)$. Potom môžeme písať ([10], str. 106, upravené)

$$V(t) = E^t \left[\frac{\pi^T}{\pi^t} V(T) \right].$$

Keď položíme $t = 0$ a za $V(0)$, $V(T)$ dosadíme M_i^0 a D_i^T , dostávame

$$M_i^0 = E^0 \left[\frac{\pi^T}{\pi^0} D_i^T \right].$$

Za predpokladu, že SPD je martingál, t.j. platí $E^T [\pi^T] = \pi^0$, vieme predošlú rovnicu prepísať do tvaru

$$E^T [\pi^T D_i^T] = E^T [\pi^T] M_i^0, \quad (1.15)$$

ktorý autori [9] na str. 12 - 13 označujú aj ako tzv. „standard pricing equation“.

Očakávanú funkciu užitočnosti podnikateľa $i \in \mathcal{I}$ vieme použitím (1.3) a (1.7) napísať ako

$$\begin{aligned} E^T [U(C_i^T)] &= \frac{1}{1 - \gamma_i} E^T \left[(C_i^T)^{1 - \gamma_i} \right] \\ &= \frac{1}{1 - \gamma_i} E^T \left[\left(\theta D_i^T + \int_{\mathcal{I}} N_{i,j}^0 D_j^T dm(j) + N_{i,0}^0 \right)^{1 - \gamma_i} \right], \end{aligned}$$

resp. po dosadení za $N_{i,0}^0$ z rozpočtového ohraničenia (1.4)

$$E^T [U(C_i^T)] = \frac{1}{1 - \gamma_i} E^T \left[\left(M_i^0 + \theta (D_i^T - M_i^0) + \int_{\mathcal{I}} N_{i,j}^0 (D_j^T - M_j^0) dm(j) \right)^{1 - \gamma_i} \right].$$

Podmienka prvého rádu na maximalizáciu užitočnosti vzhľadom na $N_{i,j}^0$ je

$$0 = E^T \left[\left(M_i^0 + \theta (D_i^T - M_i^0) + \int_{\mathcal{I}} N_{i,j}^0 (D_j^T - M_j^0) dm(j) \right)^{-\gamma_i} (D_j^T - M_j^0) \right], \quad (1.16)$$

resp. po úprave a integrovaní cez $i \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned} &E^T \left[\int_{\mathcal{I}} \left(M_i^0 + \theta (D_i^T - M_i^0) + \int_{\mathcal{I}} N_{i,j}^0 (D_j^T - M_j^0) dm(j) \right)^{-\gamma_i} dm(i) D_j^T \right] \\ &= E^T \left[\int_{\mathcal{I}} \left(M_i^0 + \theta (D_i^T - M_i^0) + \int_{\mathcal{I}} N_{i,j}^0 (D_j^T - M_j^0) dm(j) \right)^{-\gamma_i} dm(i) \right] M_j^0. \end{aligned}$$

Toto už však vyzerá ako (1.15), a teda môžeme tvrdiť, že

$$\pi^T = \int_{\mathcal{I}} \left(M_i^0 + \theta (D_i^T - M_i^0) + \int_{\mathcal{I}} N_{i,j}^0 (D_j^T - M_j^0) dm(j) \right)^{-\gamma_i} dm(i). \quad (1.17)$$

Vo formulácii vety je však SPD uvedená v úplne inom tvare. Na to, aby sme sa k nemu dostali, zdefinujeme si najprv niekoľko veličín a uvedieme niekoľko odvození.

Autori [9] na str. 6 predpokladajú, že SPD závisí len od agregátneho šoku ε^T , t.j. $\pi^T = \pi(\varepsilon^T)$, čo neskôr dokazujú na str. 13. Vychádzajúc z tohto predpokladu, rovnice (1.15) a vlastnosti $E[\varepsilon_i^T] = 0$, môžeme písať

$$\begin{aligned} M_i^0 &= \frac{E^T[\pi^T D_i^T]}{E^T[\pi^T]} = \frac{E^T[\pi^T(1-\tau)B_i^T]}{E^T[\pi^T]} = (1-\tau)B^0 e^{\mu_i T} \frac{E^T[\pi^T e^{\varepsilon^T + \varepsilon_i^T}]}{E^T[\pi^T]} \\ &= (1-\tau)B^0 e^{\mu_i T} \frac{E^T[\pi^T e^{\varepsilon^T}]}{E^T[\pi^T]} = (1-\tau)B^0 e^{\mu_i T} Z. \end{aligned} \quad (1.18)$$

V [9] na str. 8 je definovaná alokácia portfólia $\omega_{i,j}$ a výnos R_j firmy j očistený od dane, ktoré sa počítajú nasledovne:

$$\omega_{i,j} = \frac{N_{i,j}^0 M_j^0}{M_i^0}, \quad (1.19)$$

$$R_j = \frac{D_j^T}{M_j^0} - 1 = \frac{(1-\tau)B^0 e^{\mu_j T + \varepsilon_j^T}}{(1-\tau)B^0 e^{\mu_j T} Z} - 1 = \frac{e^{\varepsilon_j^T}}{Z} - 1. \quad (1.20)$$

Podmienku maxima prvého rádu (1.16) tak vieme prepísať nasledovným spôsobom:

$$0 = E^T \left[\left(1 + \theta R_i + \int_{\mathcal{I}} \omega_{i,j} R_j \, dm(j) \right)^{-\gamma_i} R_j \right]. \quad (1.21)$$

V dôkaze vety 4 je ďalej ([9], str. 8 - 10) dokázané, že rovnovážna alokácia portfólia nadobúda multiplikatívny tvar

$$\omega_{i,j} = \tilde{\alpha}(\gamma_i) \omega_j. \quad (1.22)$$

Autori tento vzťah interpretujú nasledovným spôsobom: všetci podnikatelia investujú do aktíva j rovnaký základný podiel ω_j , ktorý je potom len prispôsobený averzii k riziku individuálneho podnikateľa použitím $\tilde{\alpha}(\gamma_i)$. Vzťah (1.22) sa následne podľa [9] dá upraviť na

$$\omega_{i,j} = (1-\theta) \frac{\tilde{\alpha}(\gamma_i) M_j^0}{\int_{\mathcal{I}} \tilde{\alpha}(\gamma_k) M_k^0 \, dm(k)}. \quad (1.23)$$

Zavedieme pomocnú premennú ([9], str. 10)

$$\Omega = \frac{\int_{\mathcal{I}} M_k^0 \, dm(k)}{\int_{\mathcal{I}} \tilde{\alpha}(\gamma_k) M_k^0 \, dm(k)}, \quad (1.24)$$

a zadefinujeme výnos trhového portfólia ([9], str. 11)

$$R_{Mkt} = \frac{\int_{\mathcal{I}} D_j^T \, dm(j)}{\int_{\mathcal{I}} M_k^0 \, dm(k)} - 1 = \frac{(1-\tau)B^0 e^{\varepsilon^T} \int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i T} \, dm(i)}{(1-\tau)B^0 Z \int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i T} \, dm(i)} - 1 = \frac{e^{\varepsilon^T}}{Z} - 1, \quad (1.25)$$

resp.

$$\begin{aligned} R_{Mkt} &= \frac{\int_{\mathcal{I}} D_j^T \, dm(j)}{\int_{\mathcal{I}} M_k^0 \, dm(k)} - 1 = \int_{\mathcal{I}} \frac{M_j^0}{\int_{\mathcal{I}} M_k^0 \, dm(k)} \left(\frac{D_j^T}{M_j^0} - 1 \right) dm(j) \\ &= \int_{\mathcal{I}} \frac{M_j^0}{\int_{\mathcal{I}} M_k^0 \, dm(k)} R_j \, dm(j). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Po dosadení (1.23) do (1.21) a následných úpravách dostávame

$$\begin{aligned}
 0 &= E^T \left[\left(1 + \theta R_i + \int_{\mathcal{I}} (1 - \theta) \frac{\tilde{\alpha}(\gamma_i) M_j^0}{\int_{\mathcal{I}} \tilde{\alpha}(\gamma_k) M_k^0 dm(k)} R_j dm(j) \right)^{-\gamma_i} R_j \right] \\
 &= E^T \left[\left(1 + \theta R_i + (1 - \theta) \tilde{\alpha}(\gamma_i) \int_{\mathcal{I}} \frac{M_j^0}{\int_{\mathcal{I}} \tilde{\alpha}(\gamma_k) M_k^0 dm(k)} R_j dm(j) \right)^{-\gamma_i} R_j \right] \\
 &= E^T \left[\left(1 + \theta R_i + (1 - \theta) \tilde{\alpha}(\gamma_i) \Omega \int_{\mathcal{I}} \frac{M_j^0}{\int_{\mathcal{I}} M_k^0 dm(k)} R_j dm(j) \right)^{-\gamma_i} R_j \right].
 \end{aligned}$$

Využitím (1.26) upravíme rovnosť na

$$0 = E^T \left[(1 + \theta R_i + (1 - \theta) \tilde{\alpha}(\gamma_i) \Omega R_{Mkt})^{-\gamma_i} R_j \right]. \quad (1.27)$$

Následne je možné použiť analogický postup ako na str. 23, t.j. úprava na dve zátvorky, integrácia cez interval $\mathcal{I}$ a následné vydedukovanie nového tvaru SPD pomocou rovnice (1.15):

$$\begin{aligned}
 0 &= E^T \left[(1 + \theta R_i + (1 - \theta) \tilde{\alpha}(\gamma_i) \Omega R_{Mkt})^{-\gamma_i} \left(\frac{D_j^T}{M_j^0} - 1 \right) \right], \\
 &E^T \left[\int_{\mathcal{I}} (1 + \theta R_i + (1 - \theta) \tilde{\alpha}(\gamma_i) \Omega R_{Mkt})^{-\gamma_i} dm(i) D_j^T \right] \\
 &= E^T \left[\int_{\mathcal{I}} (1 + \theta R_i + (1 - \theta) \tilde{\alpha}(\gamma_i) \Omega R_{Mkt})^{-\gamma_i} dm(i) M_j^0 \right], \\
 \pi^T &= \int_{\mathcal{I}} (1 + \theta R_i + (1 - \theta) \tilde{\alpha}(\gamma_i) \Omega R_{Mkt})^{-\gamma_i} dm(i). \quad (1.28)
 \end{aligned}$$

Teraz použijeme označenie $\alpha(\gamma_i) = \tilde{\alpha}(\gamma_i) \Omega$ ([9], str. 13, rovnica (A19)) a dosadením (1.20) a (1.25) dostávame tvar SPD (1.12) použitý vo formulácii vety:

$$\pi^T = \int_{\mathcal{I}} \left[1 + \theta \left(\frac{e^{\varepsilon^T + \varepsilon_i^T}}{Z} - 1 \right) + (1 - \theta) \alpha(\gamma_i) \left(\frac{e^{\varepsilon^T}}{Z} - 1 \right) \right]^{-\gamma_i} dm(i).$$

V [9] na str. 11 je dokázané, že podmienku prvého rádu (1.27) je možné použitím (1.20) a (1.25) upraviť do tvaru

$$0 = E^T \left[(1 + \theta R_i + (1 - \theta) \tilde{\alpha}(\gamma_i) \Omega R_{Mkt})^{-\gamma_i} R_{Mkt} \right],$$

resp.

$$0 = E^T \left[\left\{ Z + \theta (e^{\varepsilon^T + \varepsilon_i^T} - Z) + (1 - \theta) \alpha(\gamma_i) (e^{\varepsilon^T} - Z) \right\}^{-\gamma_i} (e^{\varepsilon^T} - Z) \right],$$

čo už je presný tvar podmienky prvého rádu (1.13) z formulácie vety. ■

1.3.2 Výpočet spotreby a užitočnosti penzistov

V nasledujúcich dvoch podkapitolách sa zaoberáme vetami 1 a 2 ([8], str. 7 - 8, resp. [9], str. 2 - 4), ktoré upravujú vzorce (1.7) a (1.8) do nových tvarov za použitia veličín a vzorcov z podkapitoly 1.3.1.

Ako prvé urobíme výpočty týkajúce sa penzistov, ktoré nezávisia od odvodení v časti 1.3.1. Dôkaz uvedený v [9] na str. 2 je pomerne priamočiary, nebudeme sa ním preto hlbšie zaoberať a uvedieme len základné kroky.

Veta 1.2. ([8], str. 7, Veta 1, upravené)

Spotreba penzistu je

$$C_i^T = \tau B^0 e^{\varepsilon^T} E_{\mathcal{J}} \left[e^{\mu_j T} \mid j \in \mathcal{I} \right] \frac{m(\mathcal{I})}{1 - m(\mathcal{I})} \quad \forall i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{I} \quad (1.29)$$

a jeho očakávaná užitočnosť z toho, že sa rozhodne stať penzistom, je

$$\begin{aligned} E^T \left[U \left(C_i^T \right) \right] &= \frac{1}{1 - \gamma_i} \left(\tau B^0 \frac{m(\mathcal{I})}{1 - m(\mathcal{I})} \right)^{1 - \gamma_i} \\ &\times E^T \left[e^{(1 - \gamma_i) \varepsilon^T} \right] \left(E_{\mathcal{J}} \left[e^{\mu_j T} \mid j \in \mathcal{I} \right] \right)^{1 - \gamma_i}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Dôkaz. Pri výpočte spotreby vychádzame z rovnice (1.8), do ktorej sa dosadí (1.5) a následne pomocou postupu popísaného v [9] upraví na požadovaný tvar (1.29). Očakávaná užitočnosť penzistu sa vyjadří dosadením výrazu (1.29) do (1.3) a následnej úprave až na tvar (1.30). ■

1.3.3 Výpočet spotreby a užitočnosti podnikateľov

Na rozdiel od predošlej podkapitoly, odvodenie spotreby podnikateľov si vyžaduje použiť niektoré výrazy definované alebo odvodené v časti 1.3.1. Vo všeobecnosti bude odvodenie kopírovať niektoré kroky odvodenia SPD, no v iných sa bude líšiť.

Veta 1.3. ([8], str. 8, Veta 2, upravené)

Spotreba podnikateľa je

$$C_i^T = (1 - \tau) B^0 e^{\mu_i T} \left[Z + \theta \left(e^{\varepsilon^T + \varepsilon_i^T} - Z \right) + (1 - \theta) \alpha(\gamma_i) \left(e^{\varepsilon^T} - Z \right) \right] \quad (1.31)$$

a jeho očakávaná užitočnosť z toho, že sa rozhodne stať podnikateľom, je

$$\begin{aligned} E^T \left[U \left(C_i^T \right) \right] &= \frac{1}{1 - \gamma_i} \left((1 - \tau) B^0 e^{\mu_i T} \right)^{1 - \gamma_i} \\ &\times E^T \left[\left\{ Z + \theta \left(e^{\varepsilon^T + \varepsilon_i^T} - Z \right) + (1 - \theta) \alpha(\gamma_i) \left(e^{\varepsilon^T} - Z \right) \right\}^{1 - \gamma_i} \right]. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Dôkaz. Vychádzať budeme z rovnice (1.7), do ktorej dosadíme rozpočtové ohraničenie (1.4). S použitím definície výnosu jednotlivkej firmy z (1.20) tak dostávame

$$\begin{aligned} C_i^T &= M_i^0 + \theta \left(D_i^T - M_i^0 \right) + \int_{\mathcal{I}} N_{i,j}^0 \left(D_j^T - M_j^0 \right) dm(j) \\ &= M_i^0 \left(1 + \theta R_i + \int_{\mathcal{I}} \frac{N_{i,j}^0 M_j^0}{M_i^0} R_j dm(j) \right). \end{aligned}$$

Zlomok vo vnútri integrálu nahradíme premennou $\omega_{i,j}$ z (1.19) a tú následne výrazom (1.23). Do vzniknutého výrazu

$$C_i^T = M_i^0 \left(1 + \theta R_i + (1 - \theta) \tilde{\alpha}(\gamma_i) \int_{\mathcal{I}} \frac{M_j^0}{\int_{\mathcal{I}} \tilde{\alpha}(\gamma_k) M_k^0 dm(k)} R_j dm(j) \right)$$

dosadíme pomocnú premennú (1.24) a dostávame

$$C_i^T = M_i^0 \left(1 + \theta R_i + (1 - \theta) \tilde{\alpha}(\gamma_i) \Omega \int_{\mathcal{I}} \frac{M_j^0}{\int_{\mathcal{I}} M_k^0 dm(k)} R_j dm(j) \right)$$

čo sa ďalej použitím (1.26) dá napísať ako

$$C_i^T = M_i^0 (1 + \theta R_i + (1 - \theta) \tilde{\alpha}(\gamma_i) \Omega R_{Mkt}).$$

Za M_i^0 , R_i a R_{Mkt} dosadíme postupne (1.18), (1.20) a (1.25), čo nás vedie k tvaru

$$C_i^T = (1 - \tau) B^0 e^{\mu_i T} Z \left[1 + \theta \left(\frac{e^{\varepsilon^T + \varepsilon_i^T}}{Z} - 1 \right) + (1 - \theta) \tilde{\alpha}(\gamma_i) \Omega \left(\frac{e^{\varepsilon^T}}{Z} - 1 \right) \right]$$

Úpravou a dosadením identity $\alpha(\gamma_i) = \tilde{\alpha}(\gamma_i) \Omega$ použitej už aj v dôkaze vety 1.1 dostávame finálny tvar spotreby podnikateľov (1.31).

Do vzorca na očakávanú užitočnosť (1.3) dosadíme vyjadrený výraz (1.31), upravíme a dostávame (1.32). Aby sme zostali konzistentní s [9], použijeme označenie

$$\bar{V}_i = E^T \left[\left\{ Z + \theta \left(e^{\varepsilon^T + \varepsilon_i^T} - Z \right) + (1 - \theta) \alpha(\gamma_i) \left(e^{\varepsilon^T} - Z \right) \right\}^{1 - \gamma_i} \right] \quad (1.33)$$

a očakávanú užitočnosť (1.32) tak vieme napísať aj ako

$$E^T \left[U \left(C_i^T \right) \right] = \frac{1}{1 - \gamma_i} \left((1 - \tau) B^0 e^{\mu_i T} \right)^{1 - \gamma_i} \bar{V}_i. \quad (1.34)$$

■

1.3.4 Kritérium pri rozhodovaní

V rámci sekcie „Rozhodovací proces“ nám zostáva vykonať už len jeden úkon - určiť pravidlo, podľa ktorého sa agent rozhoduje, či sa stane podnikateľom, alebo penzistom. Táto otázka zodpovedá vete 3 ([8], str. 10, resp. [9], str. 4 - 5) a my sa v tejto podkapitole budeme venovať jej dôkazu.

Veta 1.4. ([8], str. 10, Veta 3, upravené)

Nech $\gamma_i \neq 1$. Agent sa stane podnikateľom vtedy a len vtedy, ak platí

$$\begin{aligned} \mu_i &> \frac{1}{(1-\gamma_i)T} \left[\ln \left(\frac{E^T [e^{(1-\gamma_i)\varepsilon^T}]}{E^T \left[\left\{ Z + \theta (e^{\varepsilon^T + \varepsilon_i^T} - Z) + (1-\theta)\alpha(\gamma_i) (e^{\varepsilon^T} - Z) \right\}^{1-\gamma_i} \right]} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{T} \left[\ln \left(\frac{\tau}{1-\tau} \cdot \frac{m(\mathcal{I})}{1-m(\mathcal{I})} \right) + \ln (E_{\mathcal{J}} [e^{\mu_j T} \mid j \in \mathcal{I}]) \right], \end{aligned} \quad (1.35)$$

kde $\alpha(\gamma_i)$ a Z sú rovnovážne hodnoty spĺňajúce podmienky formulované vo vete 1.1.

Dôkaz. Vychádzať budeme z pravidla (1.9), pričom jednotlivé očakávané užitočnosti nahradíme výrazmi (1.30) a (1.34):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1-\gamma_i} \left((1-\tau)B^0 e^{\mu_i T} \right)^{1-\gamma_i} \bar{V}_i \\ &> \frac{1}{1-\gamma_i} \left(\tau B^0 \frac{m(\mathcal{I})}{1-m(\mathcal{I})} \right)^{1-\gamma_i} E^T [e^{(1-\gamma_i)\varepsilon^T}] (E_{\mathcal{J}} [e^{\mu_j T} \mid j \in \mathcal{I}])^{1-\gamma_i}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Pri úprave výrazu (1.36) autori [9] podrobne rozoberajú alternatívu $\gamma_i > 1$ a potom len poznamenajú, že pre opačnú nerovnosť sa odvodenie urobí takmer analogicky. My sa preto budeme venovať druhej alternatíve, $\gamma_i < 1$ a následne sa v prípade $\gamma_i > 1$ len odvoláme na [9].

Nech $\gamma_i < 1$. Potom nerovnosť (1.36) upravíme do požadovaného tvaru nasledovne:

$$\begin{aligned} e^{(1-\gamma_i)\mu_i T} \bar{V}_i &> \left(\frac{\tau}{1-\tau} \cdot \frac{m(\mathcal{I})}{1-m(\mathcal{I})} \right)^{1-\gamma_i} E^T [e^{(1-\gamma_i)\varepsilon^T}] \\ &\times (E_{\mathcal{J}} [e^{\mu_j T} \mid j \in \mathcal{I}])^{1-\gamma_i}, \\ (1-\gamma_i)\mu_i T + \ln(\bar{V}_i) &> \ln(E^T [e^{(1-\gamma_i)\varepsilon^T}]) \\ &+ (1-\gamma_i) \left[\ln \left(\frac{\tau}{1-\tau} \cdot \frac{m(\mathcal{I})}{1-m(\mathcal{I})} \right) + \ln(E_{\mathcal{J}} [e^{\mu_j T} \mid j \in \mathcal{I}]) \right], \\ \mu_i &> \frac{1}{(1-\gamma_i)T} \left[\ln(E^T [e^{(1-\gamma_i)\varepsilon^T}]) - \ln(\bar{V}_i) \right] \\ &+ \frac{1}{T} \left[\ln \left(\frac{\tau}{1-\tau} \cdot \frac{m(\mathcal{I})}{1-m(\mathcal{I})} \right) + \ln(E_{\mathcal{J}} [e^{\mu_j T} \mid j \in \mathcal{I}]) \right]. \end{aligned}$$

Po spätnom dosadení za $\bar{V}_i$ z (1.33) dostávame tvar (1.35).

Nech $\gamma_i > 1$. Ako sme už vyššie spomínali, táto alternatíva je odvodená v [9] a vedie na výraz zhodný s (1.35). Nebudeme sa ňou preto viac zaoberať. ■

Pástor a Veronesi sa v [9] ešte zaoberajú špeciálnym prípadom $\gamma_i = 1$. Vychádzajú v ňom taktiež z (1.9), no funkciu užitočnosti v tvare (1.2) nemožno použiť práve z dôvodu $\gamma_i = 1$. Namiesto nej využívajú logaritmickú funkciu užitočnosti

$$U(C_i^T) = \ln(C_i^T).$$

Do pravidla (1.2) dosadíme spotrebu penzistu (1.29) a podnikateľa (1.31) použijúc logaritmickú funkciu užitočnosti

$$\begin{aligned} E^T \left[\ln \left\{ (1 - \tau) B^0 e^{\mu_i T} \left[Z + \theta \left(e^{\varepsilon^T + \varepsilon_i^T} - Z \right) + (1 - \theta) \alpha(\gamma_i) \left(e^{\varepsilon^T} - Z \right) \right] \right\} \right] \\ > E^T \left[\ln \left(\tau B^0 e^{\varepsilon^T} E_{\mathcal{J}} \left[e^{\mu_j T} \mid j \in \mathcal{I} \right] \frac{m(\mathcal{I})}{1 - m(\mathcal{I})} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.37)$$

a z následnej úpravy v [9] vyplýva tvar veľmi podobný nerovnosti (1.35):

$$\begin{aligned} \mu_i > \frac{1}{T} E^T \left[\ln \left(\frac{e^{\varepsilon^T}}{Z + \theta \left(e^{\varepsilon^T + \varepsilon_i^T} - Z \right) + (1 - \theta) \alpha(\gamma_i) \left(e^{\varepsilon^T} - Z \right)} \right) \right] \\ + \frac{1}{T} \left[\ln \left(\frac{\tau}{1 - \tau} \cdot \frac{m(\mathcal{I})}{1 - m(\mathcal{I})} \right) + \ln \left(E_{\mathcal{J}} \left[e^{\mu_j T} \mid j \in \mathcal{I} \right] \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.38)$$

1.4 Zdroje nerovnosti príjmov

Na záver prvej kapitoly by ešte bolo vhodné aspoň v krátkosti spomenúť ekonomickú interpretáciu odvodených výsledkov, ktorá sa v článku [8] nachádza na stranách 14 - 15. Autori tu uvádzajú zdôvodnenie nerovnosti príjmov.

Autori [8] zaviedli označenie pre normalizovanú spotrebu agenta $i \in \mathcal{J}$, ktorá sa vypočíta zo vzorca

$$s_i^T = \frac{C_i^T}{\int_{\mathcal{J}} C_i^T dm(i)}.$$

Ďalej vo vete 7 ([8], str. 14) odvodili varianciu premennej s_i^T . Dôkaz tejto vety je pomerne jednoznačný a priamočiary, uvádzame preto len výsledok. Tým je vzorec na výpočet variance:

$$\begin{aligned} \text{Var}(s_i^T) &= \frac{\tau^2}{1 - m(\mathcal{I})} + \frac{(1 - \tau)^2}{m(\mathcal{I})} \cdot \frac{E_{\mathcal{J}} \left[e^{2\mu_j T} \mid j \in \mathcal{I} \right]}{E_{\mathcal{J}} \left[e^{\mu_j T} \mid j \in \mathcal{I} \right]} \\ &\times E_{\mathcal{J}} \left[\left(\frac{1 + \theta R_j + (1 - \theta) \alpha(\gamma_j) R_{Mkt}}{1 + R_{Mkt}} \right)^2 \mid j \in \mathcal{I} \right] - 1. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Vychádzajúc z (1.39), Pástor a Veronesi rozlišujú tri zdroje spôsobujúce nerovnosť príjmov:

1. Prvým zdrojom nerovnosti je rozdiel medzi priemernou spotrebou podnikateľov a penzistov. Autori argumentujú, že príjem podnikateľov je v priemere vyšší než príjem penzistov, a to z dôvodu
 - vyššej úrovne podnikateľských schopností,
 - vyššej rizikovosti investície, a z toho vyplývajúcej prémie za riziko.
2. Druhým zdrojom je heterogenita podnikateľských schopností medzi jednotlivými podnikateľmi. Tento rozdiel sa v (1.39) prejavuje v zlomku obsahujúcom dve stredné hodnoty $E_{\mathcal{J}}[\cdot]$.
3. Tretí zdroj nerovnosti sa v (1.39) prejavuje v treťom súčiniteli, a je ním rozličný výnos z portfólií, do ktorých investovali jednotliví podnikatelia.

2 Alternatívne odvodenie podmienok rovnováhy

Pástor a Veronesi v [8] a [9] prispôsobujú svoje značenie a vzťahy tomu, aby z nich bola zrejmá ekonomická interpretácia. Z tohto dôvodu sú však vzťahy častokrát matematicky ťažko uchopiteľné a nedajú sa na nich skúmať matematické vlastnosti. My naopak chceme model skúmať z matematického hľadiska. Za týmto účelom musíme najprv urobiť úpravy vzťahov a alternatívne odvodenia, čomu bude venovaná druhá kapitola.

Kapitolu nazývame „alternatívnym odvodením podmienok rovnováhy“. Najprv je však vhodné ozrejmiť, čo vlastne pod pojmom „rovnováha“ rozumieme a aké má rôzne úrovne. Rozširujeme tým pôvodnú terminológiu, používanú v [8] a [9] a tiež kapitole 1 tohto textu.

2.1 Úrovne rovnováhy v modeli

V modeli rozlišujeme niekoľko druhov, resp. úrovní rovnováhy, ktoré sú medzi sebou previazané a jedna druhej nadradené.

Prvou úrovňou je *individuálna rovnováha* - individuálny podnikateľ maximalizuje svoju očakávanú užitočnosť, využívajúc pri tom podmienku prvého rádu (1.13). Výsledkom jeho optimalizácie je $\alpha(\gamma_i)$. Optimalizácia prebieha pri zafixovanej množine podnikateľov $\mathcal{I}$ a konštantnej premennej Z (resp. jej alternatíve Δ , ktorú predstavíme v tejto kapitole), ktorá reflektuje vývoj trhu.

Druhou úrovňou je *rovnováha trhu*, ktorá je nadradená individuálnej rovnováhe. Vyjadrená je podmienkou vyprázdnenia trhu (1.11), do ktorej vstupujú hodnoty $\alpha(\gamma_i)$ z individuálnej rovnováhy. Výsledkom tejto rovnováhy je optimálna hodnota premennej Z (resp. jej alternatívy Δ , ktorú predstavíme v tejto kapitole), ktorá reflektuje vývoj trhu. Platnosť podmienky analyzujeme pri zafixovanej množine podnikateľov $\mathcal{I}$. Keď

hovoríme, že platí rovnováha trhu, automaticky predpokladáme aj platnosť individuálnej rovnováhy každého podnikateľa. Teraz už je zrejmé, že keď sme po vzore [8] hovorili vo vete 1.1 o „rovnovážnej SPD“, jednalo sa o rovnováhu trhu.

Obe vyššie spomínané rovnováhy platia pri zafixovanej množine podnikateľov $\mathcal{I}$, potrebné je preto spomenúť aj tretiu úroveň rovnováhy - *rovnováhu v celej spoločnosti*. Táto nastáva vtedy, keď očakávaná užitočnosť každého podnikateľa z toho, že sa stal podnikateľom, je vyššia ako očakávaná užitočnosť z toho, že by sa stal penzistom, et vice versa. Výsledkom je množina podnikateľov $\mathcal{I}$, resp. penzistov $\mathcal{J} \setminus \mathcal{I}$.

Pod pojmom „podmienky rovnováhy“, ktorým sa budeme zaoberať v kapitolách 2 a 3, budeme rozumieť platnosť rovnováhy trhu a nej implikovanej individuálnej rovnováhy, ak nebude uvedené inak.

2.2 Pomocné odvodenia

Prvým odvodením v tejto sekcii bude veta, ktorá využíva isté časti postupu v [9] a odvádzame v nej veličiny, ktoré budeme potrebovať v sekcii 2.3.

Veta 2.1. ([8], str. 8, Veta 2, resp. [9], str. 6 - 14, dôkaz Vety 4, upravené)

Pre podiel $N_{i,j}^0$ podnikateľa i vo firme podnikateľa j platí

$$N_{i,j}^0 = (1 - \theta)\alpha(\gamma_i) \frac{e^{\mu_i T}}{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_j T} dm(j)}, \quad (2.1)$$

resp.

$$N_{i,j}^0 = (1 - \theta)\alpha(\gamma_i) \frac{M_i^0}{M_P^0}, \quad (2.2)$$

kde

$$M_P^0 = \int_{\mathcal{I}} M_i^0 dm(i) \quad (2.3)$$

je celková trhová hodnota firiem všetkých podnikateľov.

Z (2.1) a (2.2) vyplýva vzťah

$$\frac{M_i^0}{M_P^0} = \frac{e^{\mu_i T}}{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_k T} dm(k)}. \quad (2.4)$$

Podiel $N_{i,0}^0$ podnikateľa i v bezrizikovom dlhopisovom fonde vypočítame ako

$$N_{i,0}^0 = (1 - \theta)(1 - \alpha(\gamma_i)) M_i^0. \quad (2.5)$$

Dôkaz. Vychádzať budeme z rozpočtového ohraničenia (1.4) podnikateľa $i \in \mathcal{I}$:

$$(1 - \theta)M_i^0 = \int_{\mathcal{I}} N_{i,j}^0 M_j^0 dm(j) + N_{i,0}^0,$$

Z (1.19) a (1.23) máme vzorec na $N_{i,j}^0$

$$N_{i,j}^0 = (1 - \theta) \frac{\tilde{\alpha}(\gamma_i) M_i^0}{\int_{\mathcal{I}} \tilde{\alpha}(\gamma_k) M_k^0 dm(k)}, \quad (2.6)$$

ktorý dosadíme do rozpočtovného ohraničenia. Dostaneme vzťah

$$(1 - \theta) M_i^0 = (1 - \theta) \tilde{\alpha}(\gamma_i) M_i^0 \frac{\int_{\mathcal{I}} M_j^0 dm(j)}{\int_{\mathcal{I}} \tilde{\alpha}(\gamma_k) M_k^0 dm(k)} + N_{i,0}^0.$$

Dosadíme (1.24) a upravíme použitím $\alpha(\gamma_i) = \tilde{\alpha}(\gamma_i)\Omega$:

$$(1 - \theta) M_i^0 = (1 - \theta) M_i^0 \alpha(\gamma_i) + N_{i,0}^0. \quad (2.7)$$

Integrujeme cez množinu podnikateľov $\mathcal{I}$ a dostávame rovnicu

$$\int_{\mathcal{I}} (1 - \theta) M_i^0 dm(i) = (1 - \theta) \int_{\mathcal{I}} M_i^0 \alpha(\gamma_i) dm(i) + \int_{\mathcal{I}} N_{i,0}^0 dm(i),$$

ktorú upravíme použitím označenia M_P^0 a podmienky vyprázdnenia trhu dlhopisov (1.14) na

$$M_P^0 = \int_{\mathcal{I}} M_i^0 \alpha(\gamma_i) dm(i). \quad (2.8)$$

Teraz sa vrátime k (2.6). Pravú stranu upravíme použitím (2.8) na

$$N_{i,j}^0 = (1 - \theta) \frac{\tilde{\alpha}(\gamma_i) \Omega M_i^0}{\int_{\mathcal{I}} \tilde{\alpha}(\gamma_k) \Omega M_k^0 dm(k)} = (1 - \theta) \alpha(\gamma_i) \frac{M_i^0}{M_P^0},$$

čo je výraz zhodný s (2.2).

Druhý tvar (2.1) pre $N_{i,j}^0$ z formulácie vety dostaneme nahradením M_i^0 a M_P^0 v (2.2) výrazmi (1.18) a

$$M_P^0 = \int_{\mathcal{I}} M_i^0 dm(i) = (1 - \tau) B^0 Z \int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i T} dm(i).$$

Vzorce (2.4) a (2.5) vyplývajú priamo z rovnosti vzťahov (2.1) a (2.2), resp. z (2.7). ■

Na tomto mieste uvedieme alternatívny tvar podmienky vyprázdnenia trhu.

Lema 2.1. *Podmienka vyprázdnenia trhu (1.11) vo formulácii vety 1.1 je ekvivalentná s podmienkou*

$$\int_{\mathcal{I}} \alpha(\gamma_i) w_i dm(i) = 1 \quad (2.9)$$

uvedenou vo formulácii vety 4 ([8], str. 12). Hodnoty w_i autori [8] nazývajú váhami kapitalizácie trhu a sú definované ([8], str. 9) ako

$$w_i = \frac{N_{j,i}^0 M_i^0}{(1 - \theta) \alpha(\gamma_j) M_j^0} = \frac{M_i^0}{M_P^0}. \quad (2.10)$$

Vzorec (2.9) vieme napísať aj v alternatívnych tvaroch

$$M_P^0 = \int_{\mathcal{I}} \alpha(\gamma_i) M_i^0 \, dm(i) \quad (2.11)$$

alebo

$$\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i T} \, dm(i) = \int_{\mathcal{I}} \alpha(\gamma_i) e^{\mu_i T} \, dm(i). \quad (2.12)$$

Poznámka. Druhá rovnosť v (2.10) vyplýva z (2.2).

Dôkaz. Vychádzame z podmienky (1.11)

$$1 - \theta = \int_{\mathcal{I}} N_{i,j}^0 \, dm(i),$$

alebo

$$1 - \theta = \int_{\mathcal{I}} N_{j,i}^0 \frac{\frac{N_{i,j}^0 M_P^0}{1 - \theta}}{\frac{N_{j,i}^0 M_P^0}{1 - \theta}} \, dm(i),$$

resp. po dosadení z (2.2)

$$1 - \theta = \int_{\mathcal{I}} N_{j,i}^0 \frac{\alpha(\gamma_i) M_i^0}{\alpha(\gamma_j) M_j^0} \, dm(i).$$

Teraz už len stačí rovnicu upraviť na vhodný tvar

$$1 = \int_{\mathcal{I}} \alpha(\gamma_i) \frac{N_{j,i}^0 M_i^0}{(1 - \theta) \alpha(\gamma_j) M_j^0} \, dm(i)$$

a dosadiť z (2.10):

$$1 = \int_{\mathcal{I}} \alpha(\gamma_i) w_i \, dm(i).$$

Vzorec (2.11) dostaneme priamo dosadením pravej strany (2.10) do (2.9). Následne použitím (2.4) upravíme na (2.12). ■

2.3 Alternatívne odvodenie podmienky prvého rádu

V prvej kapitole máme odvodenú podmienku prvého rádu, ktorú musí spĺňať $\alpha(\gamma_i)$ na to, aby platila individuálna rovnováha. Uvedená je vo viacerých tvaroch, napríklad ako (1.13). Žiadny z týchto tvarov však nie je pre nás vhodný na ďalšiu analýzu, preto musíme najskôr odvodiť vlastný. Tohto sa budú týkať vety v podkapitole 2.3.

Pre zjednodušenie zápisu označme

$$\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon^T + \varepsilon_i^T, \quad (2.13)$$

$$\Delta = \frac{M_P^0}{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_k^T} dm(k)}. \quad (2.14)$$

Z vlastností ε^T a ε_i^T zadaných v sekcii 1.1 potom priamo vyplýva $E[\tilde{\varepsilon}_i] = 0$.

V odvodení na str. 2 v texte [9] sa používa rozšírenie tzv. zákona veľkých čísel (law of large numbers [1]) z konečného počtu nezávislých náhodných premenných na ich kontinuum. Autori [9] využívajú vzťah

$$E_{\mathcal{J}} [e^{\mu_i^T + \varepsilon_i^T} \mid i \in \mathcal{I}] = \frac{1}{m(\mathcal{I})} \int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i^T + \varepsilon_i^T} dm(i). \quad (2.15)$$

Táto identita nemusí byť v prípade nespočítateľnej množiny $\mathcal{I}$ splnená pre ľubovoľnú mieru. Tomuto problému sa podrobne venuje práca [5], v ktorej je dokázané, že vždy existuje miera, pri použití ktorej je identita (2.15) splnená. Budeme preto rovnako ako autori [9] predpokladať, že pre mieru, ktorú používame, vzťah (2.15) platí.

Lema 2.2. ([9], str. 2, upravené)

Za predpokladu platnosti (2.15) platí identita

$$\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i^T + \varepsilon_i^T + \varepsilon^T} dm(i) = e^{\varepsilon^T} \int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i^T} dm(i). \quad (2.16)$$

Dôkaz. Využívame nezávislosť μ_i a ε_j^T , $\forall i, j \in \mathcal{J}$, a tiež platnosť $E_{\mathcal{J}} [e^{\varepsilon_i^T} \mid i \in \mathcal{I}] = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i^T + \varepsilon_i^T + \varepsilon^T} dm(i) &= e^{\varepsilon^T} \int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i^T + \varepsilon_i^T} dm(i) \\ &= e^{\varepsilon^T} m(\mathcal{I}) E_{\mathcal{J}} [e^{\mu_i^T + \varepsilon_i^T} \mid i \in \mathcal{I}] \\ &= e^{\varepsilon^T} m(\mathcal{I}) E_{\mathcal{J}} [e^{\mu_i^T} \mid i \in \mathcal{I}] E_{\mathcal{J}} [e^{\varepsilon_i^T} \mid i \in \mathcal{I}] \\ &= e^{\varepsilon^T} m(\mathcal{I}) E_{\mathcal{J}} [e^{\mu_i^T} \mid i \in \mathcal{I}] \\ &= e^{\varepsilon^T} \int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i^T} dm(i). \end{aligned}$$

■

Veta 2.2. *Spotreba podnikateľa je rovná*

$$\begin{aligned} C_i^T &= e^{\mu_i^T} \left\{ (1 - \tau) \theta B^0 e^{\tilde{\varepsilon}_i} + (1 - \theta) \Delta \right. \\ &\quad \left. + (1 - \theta) \alpha(\gamma_i) \left((1 - \tau) B^0 e^{\varepsilon^T} - \Delta \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Dôkaz. Vychádzame z (1.6). Za B_i^T a B_j^T dosadíme z (1.5):

$$C_i^T = (1 - \tau) \left[\theta B^0 e^{\mu_i^T + \varepsilon^T + \varepsilon_i^T} + \int_{\mathcal{I}} N_{i,j}^0 B^0 e^{\mu_j^T + \varepsilon^T + \varepsilon_j^T} dm(j) \right] + N_{i,0}^0.$$

Za $N_{i,j}^0$ a $N_{i,0}^0$ dosadíme z (2.1), resp. (2.5). Využijeme tiež označenie (2.13) a (1.1). Spotreba tak nadobúda tvar

$$C_i^T = (1 - \tau)\theta B^0 e^{\mu_i T + \tilde{\varepsilon}_i} + (1 - \tau) \int_{\mathcal{I}} (1 - \theta) \alpha(\gamma_i) \frac{e^{\mu_i T}}{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_k T} dm(k)} B^0 e^{\mu_j T + \tilde{\varepsilon}_i} dm(j) \\ + (1 - \theta)(1 - \alpha(\gamma_i)) M_i^0.$$

Za M_i^0 dosadíme z (2.4). Nový tvar spotreby je

$$C_i^T = (1 - \tau)\theta B^0 e^{\mu_i T + \tilde{\varepsilon}_i} + (1 - \tau)(1 - \theta) \alpha(\gamma_i) e^{\mu_i T} B^0 \frac{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_j T + \tilde{\varepsilon}_j} dm(j)}{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_k T} dm(k)} \\ + (1 - \theta)(1 - \alpha(\gamma_i)) M_P^0 \frac{e^{\mu_i T}}{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_k T} dm(k)},$$

resp. po úprave

$$C_i^T = e^{\mu_i T} \left\{ (1 - \tau)\theta B^0 e^{\tilde{\varepsilon}_i} + (1 - \theta) \frac{M_P^0}{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_k T} dm(k)} \right. \\ \left. + \frac{(1 - \theta)\alpha(\gamma_i)}{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_k T} dm(k)} \left((1 - \tau) B^0 \int_{\mathcal{I}} e^{\mu_j T + \tilde{\varepsilon}_j} dm(j) - M_P^0 \right) \right\}.$$

Na úpravu do finálneho tvaru (2.17) sa využijú vzťahy (2.14) a (2.16). ■

Podobne ako vo vete 1.1, aj teraz pomocou (2.17) vyjadríme očakávanú užitočnosť podnikateľa a následne ju budeme maximalizovať, aby sme dostali podmienku pre $\alpha(\gamma_i)$.

Veta 2.3. *Aby nastala individuálna rovnováha, $\alpha(\gamma_i)$ musí spĺňať podmienku prvého rádu v tvare*

$$0 = E^T \left[\left\{ (1 - \tau)\theta B^0 e^{\tilde{\varepsilon}_i} + (1 - \theta)\Delta \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \theta)\alpha(\gamma_i) \left((1 - \tau)B^0 e^{\varepsilon^T} - \Delta \right) \right\}^{-\gamma_i} \right. \\ \left. \times \left((1 - \tau)B^0 e^{\varepsilon^T} - \Delta \right) \right]. \quad (2.18)$$

Dôkaz. Do (1.3) dosadíme spotrebu zo vzorca (2.17). Dostávame

$$E^T [U(C_i^T)] = \frac{e^{\mu_i T(1-\gamma_i)}}{1 - \gamma_i} E^T \left[\left\{ (1 - \tau)\theta B^0 e^{\tilde{\varepsilon}_i} + (1 - \theta)\Delta \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \theta)\alpha(\gamma_i) \left((1 - \tau)B^0 e^{\varepsilon^T} - \Delta \right) \right\}^{1-\gamma_i} \right]. \quad (2.19)$$

Maximalizujeme túto očakávanú užitočnosť, t.j. derivujeme podľa $\alpha(\gamma_i)$ a položíme

rovné nule:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial \alpha(\gamma_i)} E^T [U(C_i^T)] = E^T \left[\frac{\partial}{\partial \alpha(\gamma_i)} U(C_i^T) \right] \\
 &= (1 - \theta) e^{\mu_i T (1 - \gamma_i)} E^T \left[\left\{ (1 - \tau) \theta B^0 e^{\tilde{\varepsilon}_i} + (1 - \theta) \Delta \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (1 - \theta) \alpha(\gamma_i) \left((1 - \tau) B^0 e^{\varepsilon^T} - \Delta \right) \right\}^{-\gamma_i} \right. \\
 &\quad \left. \times \left((1 - \tau) B^0 e^{\varepsilon^T} - \Delta \right) \right].
 \end{aligned}$$

Teraz už len predelíme rovnicu výrazom nachádzajúcim sa pred strednou hodnotou a dostávame (2.18). ■

Veta 2.4. Podmienky prvého rádu (1.13) a (2.18) sú ekvivalentné.

Dôkaz. Vychádzať budeme z (1.13):

$$0 = E^T \left[\left\{ Z + \theta \left(e^{\varepsilon^T + \varepsilon_i^T} - Z \right) + (1 - \theta) \alpha(\gamma_i) \left(e^{\varepsilon^T} - Z \right) \right\}^{-\gamma_i} \left(e^{\varepsilon^T} - Z \right) \right],$$

resp. z ekvivalentného zápisu

$$0 = E^T \left[\left(1 + \theta R_i + (1 - \theta) \alpha(\gamma_i) R_{Mkt} \right)^{-\gamma_i} R_{Mkt} \right].$$

Za výnosy R_i a R_{Mkt} dosadím výrazy definované v [8] na str. 9:

$$\begin{aligned}
 R_i &= \frac{(1 - \tau) B_i^T}{M_i^0} - 1, \\
 R_{Mkt} &= \frac{(1 - \tau) B^T}{M_P^0} - 1.
 \end{aligned}$$

Predošlá podmienka sa tak zmení na

$$\begin{aligned}
 0 &= E^T \left[\left\{ 1 + \theta \left(\frac{(1 - \tau) B_i^T}{M_i^0} - 1 \right) + (1 - \theta) \alpha(\gamma_i) \left(\frac{(1 - \tau) B^T}{M_P^0} - 1 \right) \right\}^{-\gamma_i} \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\frac{(1 - \tau) B^T}{M_P^0} - 1 \right) \right].
 \end{aligned}$$

Dosadíme z (1.5) za B_i^T a tiež za $B^T = \int_{\mathcal{I}} B_i^T dm(i)$. Taktiež aplikujeme označenie

(2.13):

$$\begin{aligned}
 0 &= E^T \left[\left\{ 1 + \theta \left(\frac{(1-\tau)B^0 e^{\mu_i T + \varepsilon_i}}{M_i^0} - 1 \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (1-\theta)\alpha(\gamma_i) \left(\frac{(1-\tau)B^0 \int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i T + \varepsilon_i} dm(i)}{M_P^0} - 1 \right) \right\}^{-\gamma_i} \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\frac{(1-\tau)B^0 \int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i T + \varepsilon_i} dm(i)}{M_P^0} - 1 \right) \right], \\
 0 &= E^T \left[\left\{ \frac{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_k T} dm(k)}{M_P^0} \left((1-\theta) \frac{M_P^0}{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_k T} dm(k)} + (1-\tau)\theta B^0 e^{\varepsilon_i} \frac{M_P^0 e^{\mu_i T}}{M_i^0 \int_{\mathcal{I}} e^{\mu_k T} dm(k)} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (1-\theta)\alpha(\gamma_i) \left(\frac{(1-\tau)B^0 \int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i T + \varepsilon_i} dm(i)}{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_k T} dm(k)} - \frac{M_P^0}{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_k T} dm(k)} \right) \right) \right\}^{-\gamma_i} \\
 &\quad \left. \times \left((1-\tau)B^0 \int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i T + \varepsilon_i} dm(i) - M_P^0 \right) \frac{1}{M_P^0} \right].
 \end{aligned}$$

Na zjednodušenie vzťahu využijeme (2.4):

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{M_P^0} \left(\frac{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_k T} dm(k)}{M_P^0} \right)^{-\gamma_i} E^T \left[\left\{ (1-\theta) \frac{M_P^0}{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_k T} dm(k)} + (1-\tau)\theta B^0 e^{\varepsilon_i} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (1-\theta)\alpha(\gamma_i) \left(\frac{(1-\tau)B^0 \int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i T + \varepsilon_i} dm(i)}{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_k T} dm(k)} - \frac{M_P^0}{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_k T} dm(k)} \right) \right\}^{-\gamma_i} \right. \\
 &\quad \left. \times \left((1-\tau)B^0 \int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i T + \varepsilon_i} dm(i) - M_P^0 \right) \right].
 \end{aligned}$$

Následne aplikujeme (2.14) a (2.16)

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{M_P^0} \left(\frac{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_k T} dm(k)}{M_P^0} \right)^{-\gamma_i} E^T \left[\left\{ (1-\theta)\Delta + (1-\tau)\theta B^0 e^{\varepsilon_i} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (1-\theta)\alpha(\gamma_i) \left((1-\tau)B^0 e^{\varepsilon^T} - \Delta \right) \right\}^{-\gamma_i} \right. \\
 &\quad \left. \times \left((1-\tau)B^0 e^{\varepsilon^T} - \Delta \right) \right]
 \end{aligned}$$

a finálny tvar (2.18) dostaneme predelením rovnice výrazom pred strednou hodnotou. ■

2.4 Prevod medzi pôvodným a alternatívnym značením

Na niekoľkých posledných stranách sme odvodili alternatívne značenie, ktoré budeme ďalej využívať. Najprv by však bolo vhodné urobiť prehľad jedného aj druhého značenia a ich porovnanie.

V tabuľke 2.2 uvádzame niekoľko najdôležitejších pojmov v ich pôvodnom aj alternatívnom značení.

Pojem	Pôvodné označenie	Alternatívne označenie
Spotreba podnikateľa	(1.31) $C_i^T = (1 - \tau)B^0 e^{\mu_i T} \times \left[Z + \theta \left(e^{\varepsilon^T + \varepsilon_i^T} - Z \right) + (1 - \theta)\alpha(\gamma_i) \left(e^{\varepsilon^T} - Z \right) \right]$	(2.17) $C_i^T = e^{\mu_i T} \left\{ (1 - \tau)\theta B^0 e^{\tilde{\varepsilon}_i} + (1 - \theta)\Delta + (1 - \theta)\alpha(\gamma_i) \times \left((1 - \tau)B^0 e^{\varepsilon^T} - \Delta \right) \right\}$
Podmienka prvého rádu	(1.13) $0 = E^T \left[\left\{ Z + \theta \left(e^{\varepsilon^T + \varepsilon_i^T} - Z \right) + (1 - \theta)\alpha(\gamma_i) \left(e^{\varepsilon^T} - Z \right) \right\}^{-\gamma_i} \times \left(e^{\varepsilon^T} - Z \right) \right]$	(2.18) $0 = E^T \left[\left\{ (1 - \tau)\theta B^0 e^{\tilde{\varepsilon}_i} + (1 - \theta)\Delta + (1 - \theta)\alpha(\gamma_i) \times \left((1 - \tau)B^0 e^{\varepsilon^T} - \Delta \right) \right\}^{-\gamma_i} \times \left((1 - \tau)B^0 e^{\varepsilon^T} - \Delta \right) \right]$
Podmienka vyprázdnenia trhu	$1 - \theta = \int_{\mathcal{I}} N_{i,j}^0 \, dm(i)$	$M_P^0 = \int_{\mathcal{I}} \alpha(\gamma_i) M_i^0 \, dm(i)$ resp. $\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i T} \, dm(i)$ $= \int_{\mathcal{I}} \alpha(\gamma_i) e^{\mu_i T} \, dm(i)$
Premenná popisujúca správanie sa trhu	$\pi^T,$ resp. $Z = \frac{E^T [\pi^T e^{\varepsilon^T}]}{E^T [\pi^T]}$	$M_P^0 = (1 - \tau)B^0 Z \int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i T} \, dm(i),$ resp. $\Delta = \frac{M_P^0}{\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_k T} \, dm(k)}$ $= (1 - \tau)B^0 Z$

Tabuľka 2.2: Prevodná tabuľka medzi pôvodným a alternatívnym označením

2.5 Príklad výpočtu pre jednoduché rozdelenie

V predošlých sekciách sme všetko odvádzali vo všeobecnosti. Výsledok takýchto výpočtov je však ťažko predstaviteľný a uchopiteľný. Teraz preto uvedieme príklad použitia jednoduchého rozdelenia na modelovanie náhodných šokov ε_i^T a ε^T . Taktiež sa v tomto príklade ukáže, že nie je vždy korektné použiť na maximalizáciu očakávanej funkcie užitočnosti podmienku prvého rádu. Takúto možnosť však autori [8] nebrali do úvahy.

Náhodné šoky modelujeme použitím špeciálneho alternatívneho rozdelenia:

$$\varepsilon_i^T = \begin{cases} a & , \text{ s pravdepodobnosťou } 1/2, \\ -a & , \text{ s pravdepodobnosťou } 1/2, \end{cases}$$

$$\varepsilon^T = \begin{cases} a & , \text{ s pravdepodobnosťou } 1/2, \\ -a & , \text{ s pravdepodobnosťou } 1/2. \end{cases}$$

Premenná $\tilde{\varepsilon}_i$ potom má rozdelenie

$$\tilde{\varepsilon}_i = \begin{cases} 2a & , \text{ s pravdepodobnosťou } 1/4, \\ 0 & , \text{ s pravdepodobnosťou } 1/2, \\ -2a & , \text{ s pravdepodobnosťou } 1/4. \end{cases}$$

Použitím uvedeného rozdelenia dostáva rovnica (2.19) tvar

$$\begin{aligned} E^T [U(C_i^T)] &= \frac{e^{\mu_i T(1-\gamma_i)}}{1-\gamma_i} \left[\frac{1}{4} \left\{ (1-\tau)\theta B^0 e^{2a} + (1-\theta)\Delta \right. \right. \\ &\quad + (1-\theta)\alpha(\gamma_i) \left. \left. \left((1-\tau)B^0 e^a - \Delta \right) \right\}^{1-\gamma_i} \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ (1-\tau)\theta B^0 + (1-\theta)\Delta \right. \\ &\quad + (1-\theta)\alpha(\gamma_i) \left. \left. \left((1-\tau)B^0 e^a - \Delta \right) \right\}^{1-\gamma_i} \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ (1-\tau)\theta B^0 + (1-\theta)\Delta \right. \\ &\quad + (1-\theta)\alpha(\gamma_i) \left. \left. \left((1-\tau)B^0 e^{-a} - \Delta \right) \right\}^{1-\gamma_i} \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ (1-\tau)\theta B^0 e^{-2a} + (1-\theta)\Delta \right. \\ &\quad \left. \left. + (1-\theta)\alpha(\gamma_i) \left((1-\tau)B^0 e^{-a} - \Delta \right) \right\}^{1-\gamma_i} \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Podme teraz analyzovať výraz (2.20) z hľadiska hľadania maximálneho riešenia v α . V hranatej zátvorke sa nachádzajú štyri veľmi podobné výrazy

$$V(x, y, \alpha) = \left\{ (1-\tau)\theta B^0 e^x + (1-\theta)\Delta + (1-\theta)\alpha \left((1-\tau)B^0 e^y - \Delta \right) \right\},$$

kde $(x, y) \in \{(2a, a), (0, a), (0, -a), (-2a, -a)\}$.

Každý z týchto výrazov má dve časti. Prvou z nich je $((1 - \tau)\theta B^0 e^x + (1 - \theta)\Delta)$. Tento výraz je vždy kladný, takže je pre nás z hľadiska tejto analýzy nie je až tak zaujímavý. Dôležitá je však časť $((1 - \tau)B^0 e^y - \Delta)$. Od nej závisí, či daný výraz $V(x, y, \alpha)$ rastie alebo klesá v α . Konkrétne tieto vlastnosti môžeme formulovať nasledovne:

$$V(x, y, \alpha) \begin{cases} \text{klesá} & , \text{ ak } \Delta > (1 - \tau)B^0 e^y, \\ \text{rastie} & , \text{ ak } \Delta < (1 - \tau)B^0 e^y. \end{cases} \quad (2.21)$$

Toto nám ešte stále veľmi nepomôže, keďže tieto hodnoty vstupujú do funkcie $f(z) = z^{1-\gamma_i}$, ktorá môže mať všakovaký tvar v závislosti od hodnoty γ . Avšak v prípade, že si za γ_i zvolíme nejakú rozumnú hodnotu, napr. $\gamma_i = \frac{1}{2}$, budeme vedieť povedať o tejto funkcii viac. V prvom rade vieme ohraničiť definičný obor, konkrétne $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_0^+$. Funkcia $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ je monotónna a po aplikácii na lineárnu funkciu $g(\alpha)$ preberá monotónnosť funkcie $g(\alpha)$. Teda výraz $V(x, y, \alpha)^{\frac{1}{2}}$ taktiež spĺňa podmienky (2.21). Použitím týchto podmienok vieme formulovať podmienky pre samotnú očakávanú užitočnosť:

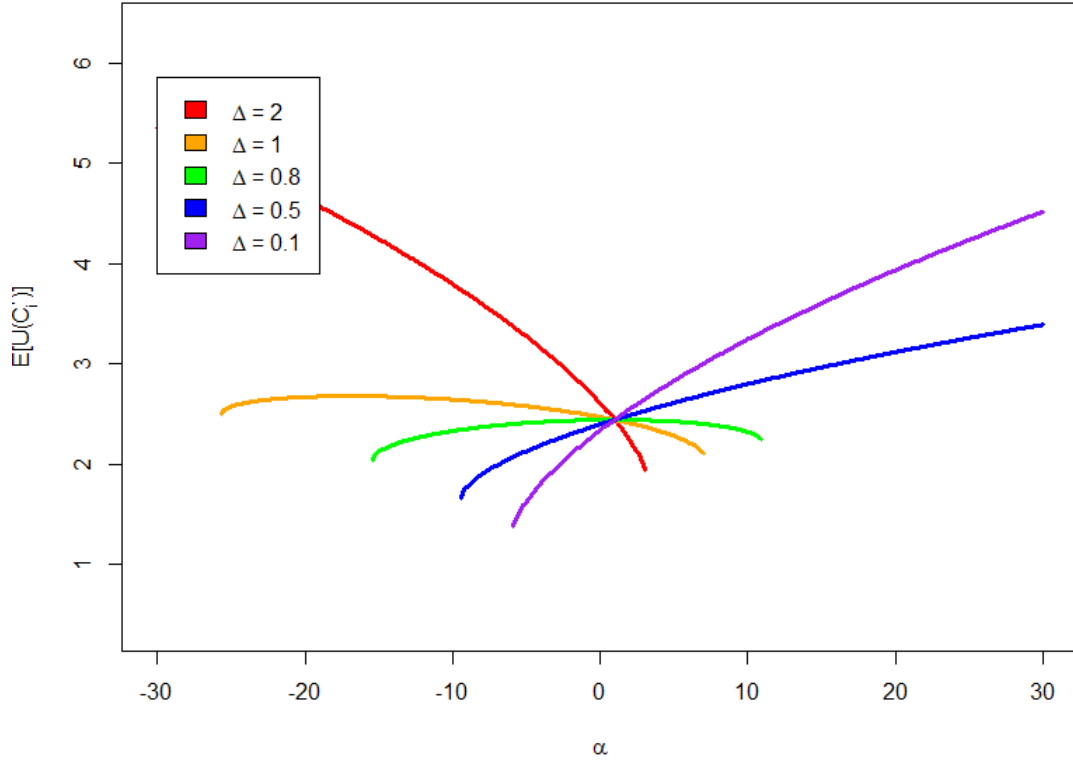
$$E^T \left[U \left(C_i^T \right) \right] \begin{cases} \text{rýdzo monotónna - klesá} & , \text{ ak } \Delta > H := (1 - \tau)B^0 e^a, \\ \text{rýdzo monotónna - rastie} & , \text{ ak } \Delta < L := (1 - \tau)B^0 e^{-a}, \\ \text{monotónnosť nevieme jednoznačne určiť} & , \text{ ak } \Delta \in (L, H). \end{cases} \quad (2.22)$$

Z dôvodu ohraňovaného definičného oboru funkcie $f(z)$ tiež platí, že definičný obor $\mathcal{D} \left(E^T \left[U \left(C_i^T \right) \right] \right)$ funkcie $E^T \left[U \left(C_i^T \right) \right]$ je tiež ohraňovaný, a to sprava, zľava resp. z oboch strán v závislosti od toho, v ktorej vetve (2.22) sa nachádzame. Presnými hranicami nie je potrebné sa zaoberať, pre túto analýzu nie sú dôležité.

Na Obr. 2.1 sme znázornili očakávanú užitočnosť ako funkciu α pre niekoľko rôznych hodnôt Δ . Hraničné hodnoty sú v tomto prípade rovné $H = 1,318977$, $L = 0,4852245$.

Na obrázku môžeme pozorovať, že grafy pre hodnoty mimo intervalu (L, H) , t.j. $\Delta = 2$ a $\Delta = 0,1$, sú skutočne rýdzo monotónne. Naopak, grafy pre hodnoty vo vnútri intervalu (L, H) , t.j. $\Delta = 1$ a $\Delta = 0,8$, sú konkávne, na časti intervalu rastúce, na časti klesajúce. Odvođené vlastnosti (2.22) máme teda aj graficky potvrdené.

Vychádzajúc z (2.22) teraz môžeme tvrdiť, že v prípade prvých dvoch vetiev, t.j. ak $\Delta \in \mathbb{R} \setminus [(1 - \tau)B^0 e^{-a}, (1 - \tau)B^0 e^a]$, je z dôvodu rýdzej monotónnosti nekorektné počítať maximum očakávanej užitočnosti ako deriváciu výrazu (2.20), maximum tejto funkcie sa totiž nenadobúda pre žiadny bod z intervalu $(-\infty, \infty)$.



Obr. 2.1: Očakávaná užitočnosť $E^T \left[U \left(C_i^T \right) \right]$ ako funkcia premennej α zobrazená pre rôzne hodnoty Δ , pričom $T = 1$, $\mu_i = 1$, $\tau = 0,2$, $\theta = 0,9$, $\gamma = 0,5$, $B_0 = 1$, $a = 0,5$.

To nás vedie k záveru, že by bolo rozumné umelo ohraničiť definičný obor premennej α . Maximum funkcie $E^T \left[U \left(C_i^T \right) \right]$ sa potom bude nadobúdať v jednom z krajných bodov, v závislosti od veľkosti Δ . Nech $\mathcal{D}(\alpha) = (L_\alpha, H_\alpha)$, potom

$$\arg \max_{\alpha} E^T \left[U \left(C_i^T \right) \right] = \begin{cases} L_\alpha & , \text{ ak } \Delta > H := (1 - \tau)B^0 e^a, \\ H_\alpha & , \text{ ak } \Delta < L := (1 - \tau)B^0 e^{-a}. \end{cases}$$

Ďalším prirodzeným dôvodom ohraničenia definičného oboru α je definičný obor $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_0^+$ funkcie $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$. V prípade, že hodnoty z , ktoré sú priamo ovplyvnené hodnotami α , sú mimo tohto definičného oboru, hodnota $E^T \left[U \left(C_i^T \right) \right]$ neexistuje (resp. existuje len v priestore komplexných čísel). Bolo by preto rozumné ohraničiť α tak, aby k tomuto prípadu nedochádzalo. Tieto hranice samozrejme závisia od konkrétnych hodnôt parametrov použitých vo výpočtoch, nebudeme sa ich preto pokúšať odvodiť vo všeobecnosti.

Vyššie opísanú situáciu môžeme pozorovať na Obr. 2.1 na grafoch zodpovedajú-

cich $\Delta = 1$, resp. $\Delta = 0,8$. Na obrázku tiež vidíme, že nezávisle od veľkosti Δ , grafy funkcií (aspoň zdanlivo) prechádzajú cez jeden bod. A skutočne to tak je, táto situácia nastáva v bode $\alpha = 1$. Výraz (2.20) potom nadobúda tvar

$$\begin{aligned} E^T [U(C_i^T)] &= \frac{e^{\mu_i T(1-\gamma_i)}}{1-\gamma_i} \left[\frac{1}{4} \left\{ (1-\tau)\theta B^0 e^{2a} + (1-\theta)(1-\tau)B^0 e^a \right\}^{1-\gamma_i} \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ (1-\tau)\theta B^0 + (1-\theta)(1-\tau)B^0 e^a \right\}^{1-\gamma_i} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ (1-\tau)\theta B^0 + (1-\theta)(1-\tau)B^0 e^{-a} \right\}^{1-\gamma_i} \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left\{ (1-\tau)\theta B^0 e^{-2a} + (1-\theta)(1-\tau)B^0 e^{-a} \right\}^{1-\gamma_i} \right], \end{aligned}$$

ktorý zrejme nie je závislý od veľkosti Δ . Táto skutočnosť však neplatí len v našom konkrétnom prípade, ale aj vo všeobecnosti. Vyplýva to z rovnice (2.19) pre očakávanú užitočnosť podnikateľa.

3 Existencia rovnováhy na okolí spoločnej averzie k riziku

Autori [8] a [9] po odvodení základných vzorcov pokračujú analýzou situácie a odvodením dodatočných vzťahov v niekoľkých špeciálnych prípadoch. Jedným z nich je aj prípad spoločnej averzie k riziku. My sa v tretej kapitole budeme zaoberať formálnym odvodením existencie rovnováhy na okolí tohto bodu, respektíve naformulujeme dodatočné podmienky, ktoré nám existenciu rovnováhy zaručia. Okrem iného využijeme aj vzorce odvodené v 2. kapitole.

3.1 Rovnováha trhu

O rovnováhe trhu sme doteraz rovnako ako autori [8] tvrdili, že nastáva práve vtedy, keď sú zároveň splnené nasledovné podmienky:

1. rovnováha jednotlivcov, počítaná ako maximalizácia užitočnosti jednotlivcov a vyjadrená cez podmienku prvého rádu (2.18),
2. podmienka vyprázdnenia trhu vyjadrená ako (2.12).

Ako sa však ukázalo v sekcii 2.5, nie je vždy korektné počítať maximum užitočnosti pomocou podmienky prvého rádu. Z tvaru funkcie užitočnosti vieme, že sa jedná o konkávnu funkciu, a pre takúto funkciu je podmienka prvého rádu postačujúcou podmienkou maxima. Ak je však očakávaná užitočnosť monotónnou funkciou, ako tomu bolo v niektorých prípadoch v sekcii 2.5, podmienka prvého rádu nie je splnená v žiadnom bode. V takom prípade je nutné ohraničiť interval, z ktorého môže pochádzať α_i , a maximum sa bude nadobúdať na hranici tohto intervalu.

Kvôli vyššie uvedeným dôvodom formulujeme dodatočný predpoklad, vďaka ktorému bude korektné v ďalších výpočtoch využiť podmienku prvého rádu.

Predpoklad 3.1. Maximum funkcie $E^T [U(C_i^T)]$ sa nadobúda v niektorom jej vnútornom bode. Toto je zaručene splnené, ak funkcia $U(C_i^T)$ je konkávna, ale nie je monotónna.

Za platnosti predpokladu 3.1 je korektné tvrdiť, že $\hat{\alpha}_i$, $i \in \mathcal{I}$ a $\hat{\Delta}$ predstavujú rovnováhu trhu práve vtedy, keď spĺňajú systém rovníc

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} E^T [U(C_i^T)] (\hat{\alpha}_i, \hat{\Delta}) = 0, \quad i \in \mathcal{I}, \quad (3.1)$$

$$\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i T} dm(i) = \int_{\mathcal{I}} \hat{\alpha}_i e^{\mu_i T} dm(i). \quad (3.2)$$

Poznámka. Autori v [9] na str. 12 zdôvodňujú, že α_i závisia len od γ_i , a teda by sme mohli písať aj $\alpha_i = \alpha(\gamma_i)$. V tejto kapitole však budeme z praktických dôvodov využívať označenie α_i a platnosť $\alpha_i = \alpha(\gamma_i)$ dokážeme vo vete 3.2.

Definícia 3.1. Definujme „profil averzií“ ako

$$\gamma := \{ \gamma_i, \quad i \in \mathcal{I} \}.$$

Existencia trhovej rovnováhy, t.j. riešenie (3.1), (3.2) nie je v [8] všeobecne vyriešená. Jedným z prípadov, v ktorých sa to autorom vyriešiť podarilo, je prípad, v ktorom majú všetci agenti spoločnú, rovnakú averziu k riziku $\gamma_i = \bar{\gamma} \quad \forall i \in \mathcal{I}$. Profil averzií, v ktorom majú všetci agenti rovnakú averziu, budeme volať konštantným profilom averzií. V tejto sekcii dokážeme existenciu rovnováhy trhu pre profily averzií blízke konštantnému.

Lema 3.1. V konštantnom profile averzií platí

$$\alpha_i = \bar{\alpha} \equiv 1, \quad (3.3)$$

$$\bar{\Delta} = \frac{E^T \left[\left\{ \theta e^{\bar{\varepsilon}_i} + (1 - \theta) e^{\varepsilon^T} \right\}^{-\bar{\gamma}} (1 - \tau) B^0 e^{\varepsilon^T} \right]}{E^T \left[\left\{ \theta e^{\bar{\varepsilon}_i} + (1 - \theta) e^{\varepsilon^T} \right\}^{-\bar{\gamma}} \right]}. \quad (3.4)$$

Dôkaz. V odvodení vychádzame z podmienky vyprázdnenia trhu (2.12). Keďže platí $\alpha_i = \alpha(\gamma_i)$, musí zrejme platiť aj $\alpha_i = \bar{\alpha} \quad \forall i \in \mathcal{I}$. Dosadíme do (2.12) a dostávame

$$\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i T} dm(i) = \bar{\alpha} \int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i T} dm(i). \quad (3.5)$$

Keďže zrejme platí $\int_{\mathcal{I}} e^{\mu_i T} dm(i) \neq 0$, z (3.5) nám už priamo vyplýva požadovaná rovnosť $\bar{\alpha} = 1$.

Vďaka (3.3) môžeme teraz podmienku prvého rádu (2.18) napísať v konštantnom profile averzií ako

$$0 = E^T \left[\left\{ \theta e^{\varepsilon_i} + (1 - \theta) e^{\varepsilon^T} \right\}^{-\bar{\gamma}} \left((1 - \tau) B^0 e^{\varepsilon^T} - \bar{\Delta} \right) \right],$$

z čoho vyplýva formula (3.4) na jej riešenie. ■

Všimnime si, že $\bar{\Delta} > 0$.

Dostali sme, že riešením systému rovníc (3.1), (3.2) v konštantnom profile averzií, v ktorom $\gamma_i = \bar{\gamma} \forall i \in \mathcal{I}$, je $\alpha_i = \bar{\alpha} \equiv 1$, $\Delta = \bar{\Delta}$. Teda za platnosti predpokladu 3.1 v konštantnom profile averzií existuje rovnováha trhu. Existenciu riešenia systému (3.1), (3.2) pre profily averzií blízke konštantnému je možné dokázať pomocou vety o implicitnej funkcii v Banachových priestoroch ([3], str. 21, 4.1.1.). Avšak jej korektná aplikácia by si v našom prípade vyžadovala znalosti z funkcionálnej analýzy v nekonečných priestoroch, čo je však vysoko nad požadované znalosti autora práce. Z tohto dôvodu si množiny zjednodušíme do konečných rozmerov a všetky odvodenia a dôkazy spravíme v tomto jednoduchšom prípade. Na nasledujúcich riadkoch tomu prispôbíme označenie.

Nech je počet všetkých agentov rovný $m \in \mathbb{N}$ a počet podnikateľov rovný $n \in \mathbb{N}$, $n < m$, t.j. mohutnosti množín $\mathcal{I}$ a $\mathcal{J}$ sú

$$|\mathcal{J}| = m,$$

$$|\mathcal{I}| = n.$$

Aby sme zostali konzistentní so zvyškom práce, pre používanú mieru $m(\cdot)$ musí platiť

$$m(\mathcal{J}) = 1,$$

$$m(\mathcal{I}) = \frac{n}{m}.$$

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že

$$\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\},$$

$$\mathcal{J} \setminus \mathcal{I} = \{n+1, n+2, \dots, m\}.$$

Profil averzií definovaný v definícii 3.1 sa zmení na n -rozmerný vektor. Označme

$$\boldsymbol{\gamma} := (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^\top \in \mathbb{R}^n,$$

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} := (\bar{\gamma}, \bar{\gamma}, \dots, \bar{\gamma})^\top \in \mathbb{R}^n,$$

$$\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^\top \in \mathbb{R}^n,$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} := (\bar{\alpha}, \bar{\alpha}, \dots, \bar{\alpha})^\top = (1, 1, \dots, 1)^\top = \mathbf{1}^\top \in \mathbb{R}^n,$$

kde pod symbolom $\mathbf{1}$ rozumieme riadkový vektor. Potom termínom „okolie konštantného profilu averzií“ budeme označovať množinu

$$\mathcal{O}(\bar{\gamma}) := \left\{ \gamma \mid \gamma = \bar{\gamma} + (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)^\top; \ |\delta_i| \ll 1 \ \forall \ i \in 1, \dots, n \right\}. \quad (3.6)$$

Veličina Δ nadobúda v konečnom rozmere tvar

$$\Delta = \frac{M_P^0}{\sum_{k=1}^n e^{\mu_k T}}.$$

Podmienku prvého rádu (2.18) a dodatočnú podmienku vyprázdenia trhu (2.12), ktoré sme odvodili v kapitole 2, spojíme do jedného celku použitím systému funkcií Φ . Vďaka tomu budeme vedieť rozumne definovať podmienky rovnováhy trhu na okolí konštantného profilu averzií.

Definícia 3.2. Definujme systém funkcií Φ na okolí konštantného profilu averzií ako

$$\Phi(\gamma, \alpha, \Delta) = \begin{cases} \Phi_i(\gamma_i, \alpha_i, \Delta), & i = 1, 2, \dots, n, \\ \Phi_0(\gamma, \alpha, \Delta), & \end{cases}$$

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

kde

$$\begin{aligned} \Phi_i(\gamma_i, \alpha_i, \Delta) &= E^T \left[\left\{ (1 - \tau)\theta B^0 e^{\varepsilon_i} + (1 - \theta)\Delta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 - \theta)\alpha_i \left((1 - \tau)B^0 e^{\varepsilon^T} - \Delta \right) \right\}^{-\gamma_i} \right. \\ &\quad \left. \times \left((1 - \tau)B^0 e^{\varepsilon^T} - \Delta \right) \right], \\ \Phi_0(\gamma, \alpha, \Delta) &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1) e^{\mu_i T}. \end{aligned}$$

Pri použití tohto označenia môžeme nahradiť podmienky (3.1) a (3.2) a tvrdiť, že ak platí predpoklad 3.1, tak bod $(\gamma, \hat{\alpha}, \hat{\Delta})$ predstavuje rovnováhu trhu práve vtedy, keď platí

$$\Phi(\gamma, \hat{\alpha}, \hat{\Delta}) = 0. \quad (3.7)$$

Vyššie sme dokázali, že v bode $(\bar{\gamma}, \bar{\alpha}, \bar{\Delta})$ existuje rovnováha, zrejme teda platí

$$\Phi(\bar{\gamma}, \bar{\alpha}, \bar{\Delta}) = 0. \quad (3.8)$$

Vychádzajúc z (3.7) naformulujeme a dokážeme vetu 3.2, ktorá je nosným bodom tejto kapitoly, ako aj celej práce. Najprv však uvedieme pomocné tvrdenia (bez dôkazu), ktorých výsledky aplikujeme v dôkaze vety 3.2.

Lema 3.2. ([11], str. 4, 6.2.2., upravené)

Nech U, V sú vektorové priestory nad tým istým poľom K . Nech $\psi: V \rightarrow U$ je lineárne zobrazenie. Potom

(a) ψ je injektívne práve vtedy, keď $\text{Ker } \psi = \{0\}$;

(b) ψ je surjektívne práve vtedy, keď $\text{Im } \psi = U$.

Keďže každú maticu vieme reprezentovať ako lineárne zobrazenie a naopak, z lemy 3.2 vyplýva nasledovný dôsledok.

Dôsledok 3.1. Matica $M \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$ je regulárna práve vtedy, keď zobrazenie $\psi: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^q$ reprezentované maticou M je injektívne a surjektívne.

Veta 3.1. (Veta o implicitnej funkcii; [4], str. 142, Veta 4.2., upravené)

Nech $D \subset \mathbb{R}^{q+r}$ je otvorená množina, $f \in C^1(D; \mathbb{R})$ a nech $(\xi, \eta) \in D$ je taký bod, pre ktorý je

$$f(\xi, \eta) = 0 \quad \text{a} \quad \det \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) \neq 0.$$

Potom existuje otvorené okolie U bodu ξ , $U = U(\xi) \subset \mathbb{R}^q$, otvorené okolie V bodu η , $V = V(\eta) \subset \mathbb{R}^r$ s vlastnosťou $U \times V \subset D$ a spojitú parciálne diferencovateľnú funkciu

$$g: U \rightarrow V, \quad x = (x_1, \dots, x_k) \mapsto g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$$

taká, že

$$\begin{aligned} f(x, g(x)) &= 0 && \text{pre všetky } x \in U, \\ f(x, y) &\neq 0 && \text{pre všetky } (x, y) \in U \times V, y \neq g(x), \end{aligned}$$

pričom, ak je $f \in C^k(U \times V; \mathbb{R})$, potom je $g \in C^k(U; \mathbb{R})$. Okrem toho

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} (x, g(x)) \frac{\partial f}{\partial x} (x, g(x)) \quad \text{pre všetky } x \in U,$$

kde $\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1}$ je inverzná matica k matici $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Veta 3.2. (Podmienky rovnováhy na okolí konštantného profilu averzií)

Existuje okolie $\mathcal{O}(\bar{\gamma})$ bodu $\bar{\gamma}$ také, že $\forall \gamma \in \mathcal{O}(\bar{\gamma})$ nastáva rovnováha trhu.

Poznámka. Vo vete dokážeme, že existuje okolie $\mathcal{O}(\bar{\gamma})$ bodu $\bar{\gamma}$ také, že na ňom platí podmienka prvého rádu. Z toho vyplýva, že nájdený bod α skutočne je argumentom maxima funkcie užitočnosti. Aj keď to nie je primárnym cieľom tejto vety, z jej dôkazu taktiež vyplynie skutočnosť, že α_i závisia len od γ_i , t.j. $\alpha_i = \alpha(\gamma_i)$.

Dôkaz. Vetu dokážeme aplikovaním vety o implicitnej funkcii 3.1. Overíme platnosť všetkých predpokladov formulovaných v tvrdení vety 3.1. Najskôr zameníme označenie bodov, množín, funkcií a priestorov vo vete 3.1 tak, aby zodpovedala našej situácii, pričom na vyjadrenie tejto zámény použijeme symbol $\implies$. Platí

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^q &\implies \mathbb{R}^n, \\ \mathbb{R}^r &\implies \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ f &\implies \Phi, \\ (\xi, \eta) &\implies (\bar{\gamma}, \bar{\alpha}, \bar{\Delta}).\end{aligned}$$

Funkcia Φ je definovaná na celom priestore $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, zrejme teda $D \implies \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, čo je otvorená množina. C^1 -diferencovateľnosť funkcie Φ vyplýva priamo z jej definície. Rovnosť $f(\xi, \eta) = 0 \implies \Phi(\bar{\gamma}, \bar{\alpha}, \bar{\Delta}) = 0$ platí vďaka (3.8). Zostáva nám overiť už len platnosť poslednej podmienky, a tou je

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) \neq 0 \implies \det D \neq 0,$$

kde

$$D := D_{\alpha, \Delta} \Phi(\bar{\gamma}, \bar{\alpha}, \bar{\Delta}) \tag{3.9}$$

je matica derivácií funkcie Φ podľa premenných α a Δ .

Pre členy matice D platia nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned}D_{ii} &:= D_{\alpha_i} \Phi_i(\bar{\gamma}, 1, \bar{\Delta}) \\ &= -\bar{\gamma} \left((1 - \tau) B^0 \right)^{-\bar{\gamma}-1} (1 - \theta) E^T \left[\left\{ \theta e^{\tilde{\varepsilon}_i} + (1 - \theta) e^{\varepsilon^T} \right\}^{-\bar{\gamma}-1} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ (1 - \tau) B^0 e^{\varepsilon^T} - \bar{\Delta} \right\}^2 \right], \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$D_{ij} := D_{\alpha_j} \Phi_i(\bar{\gamma}, 1, \bar{\Delta}) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$\begin{aligned}D_{i\Delta} &:= D_{\Delta} \Phi_i(\bar{\gamma}, 1, \bar{\Delta}) \\ &= - \left((1 - \tau) B^0 \right)^{-\bar{\gamma}} E^T \left[\left\{ \theta e^{\tilde{\varepsilon}_i} + (1 - \theta) e^{\varepsilon^T} \right\}^{-\bar{\gamma}} \right], \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},\end{aligned}$$

$$D_{0i} := D_{\alpha_i} \Phi_0(\bar{\gamma}, \mathbf{1}^\top, \bar{\Delta}) = e^{\mu_i T}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$D_{0\Delta} := D_{\Delta} \Phi_0(\bar{\gamma}, \mathbf{1}^\top, \bar{\Delta}) = 0.$$

Celú maticu (3.9) tak môžeme zapísať ako

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & \dots & 0 & D_{1\Delta} \\ 0 & D_{22} & \dots & 0 & D_{2\Delta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_{nn} & D_{n\Delta} \\ D_{01} & D_{02} & \dots & D_{0n} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Matica D je bloková, schematicky ju môžeme zapísať ako

$$D = \begin{pmatrix} A & b \\ c^\top & 0 \end{pmatrix},$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} D_{1\Delta} \\ D_{2\Delta} \\ \vdots \\ D_{n\Delta} \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} D_{01} \\ D_{02} \\ \vdots \\ D_{0n} \end{pmatrix}.$$

Podmienka $\det D \neq 0$ sa alternatívne dá formulovať aj ako požiadavka na regularitu matice D . Aby sme dokázali, že matica D je regulárna, podľa dôsledku 3.1 musíme dokázať injektívnosť a surjektívnosť zobrazenia reprezentovaného maticou D . Výhodou tohto postupu voči výpočtu determinantu matice D a analýzy jeho nenulovosti je to, že dôkaz injektívnosti a surjektívnosti je možné rozšíriť aj na nekonečné priestory využitím poznatkov z [3] alebo podobnej literatúry.

(a) *Injektívnosť*: chceme dokázať, že riešením systému

$$\begin{pmatrix} A & b \\ c^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

môže byť len vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Roznásobením systému (3.12) dostávame

$$Ax + by = 0, \quad (3.13)$$

$$c^\top x = 0. \quad (3.14)$$

Z (3.13) vyjadríme x ako

$$x = -A^{-1}by, \quad (3.15)$$

pričom aby existovala inverzná matica A^{-1} , musí platiť, že matica A je regulárna. Zatiaľ budeme predpokladať, že táto skutočnosť platí, a dokážeme ju neskôr.

Dosadením výrazu (3.15) do (3.14) dostávame

$$c^{\top} A^{-1} b y = 0.$$

Keďže matica A^{-1} je invertibilná, bilineárna forma $(b, c) \mapsto c^{\top} A^{-1} b$ je nedegenerovaná ([6], str. 88, 3.1.9, resp. 3.1.10). Keďže $b \neq 0$, $c \neq 0$, pre ľubovoľnú maticu A , ktorá spĺňa vyššie uvedené vlastnosti, platí $c^{\top} A^{-1} b \neq 0$. Z toho vyplýva, že musí platiť $y = 0$. Z (3.15) nám už potom priamo vyplýva $x = 0$.

(b) *Surjektívnosť*: chceme dokázať, že systém rovníc

$$\begin{pmatrix} A & b \\ c^{\top} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

má riešenie pre ľubovoľnú pravú stranu $(u, v)^{\top}$. Roznásobením systému (3.16) dostávame

$$Ax + by = u, \quad (3.17)$$

$$c^{\top} x = v. \quad (3.18)$$

Z (3.17) vyjadríme x ako

$$x = A^{-1}(u - by), \quad (3.19)$$

pričom opäť požadujeme regularitu matice A . Výraz (3.19) dosadíme do (3.18) a dostávame

$$c^{\top} A^{-1}(u - by) = v.$$

Opäť využijeme poznatok, že $c^{\top} A^{-1} b \neq 0$, a premennú y vyjadríme ako

$$y = \frac{1}{c^{\top} A^{-1} b} (c^{\top} A^{-1} u - v). \quad (3.20)$$

Premennú x vypočítame dosadením (3.20) do (3.19):

$$x = A^{-1} \left(u - \frac{b}{c^{\top} A^{-1} b} (c^{\top} A^{-1} u - v) \right). \quad (3.21)$$

V postupe sme neformulovali žiadny dodatočný predpoklad pre $(u, v)^{\top}$, skutočne teda platí, že pravá strana $(u, v)^{\top}$ môže byť ľubovoľná. Ku konkrétne zvolenému $(u, v)^{\top}$ vypočítame riešenie $(x, y)^{\top}$ zo vzťahov (3.20) a (3.21).

Zostáva nám dokázať, že matica A je regulárna, a teda invertibilná. Keďže A je diagonálna, stačí nám dokázať, že $D_{ii} \neq 0 \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Podľa (3.10) platí

$$D_{ii} = -\bar{\gamma} \left((1 - \tau)B^0 \right)^{-\bar{\gamma}-1} (1 - \theta)E^T \left[\left\{ \theta e^{\tilde{\varepsilon}_i} + (1 - \theta)e^{\varepsilon^T} \right\}^{-\bar{\gamma}-1} \right. \\ \left. \times \left\{ (1 - \tau)B^0 e^{\varepsilon^T} - \bar{\Delta} \right\}^2 \right].$$

Výraz $-\bar{\gamma} \left((1 - \tau)B^0 \right)^{-\bar{\gamma}-1} (1 - \theta)$ nachádzajúci sa pred strednou hodnotou je nenulový. Pre výrazy vo vnútri strednej hodnoty platí

$$0 < \left\{ \theta e^{\tilde{\varepsilon}_i} + (1 - \theta)e^{\varepsilon^T} \right\}^{-\bar{\gamma}-1}, \\ 0 \leq \left\{ (1 - \tau)B^0 e^{\varepsilon^T} - \bar{\Delta} \right\}^2,$$

pričom rovnosť v druhom prípade nastáva len ak

$$e^{\varepsilon^T} = \frac{\bar{\Delta}}{(1 - \tau)B^0}.$$

Premenná e^{ε^T} je spojitá náhodná premenná, a teda pravdepodobnosť toho, že nadobúda jednu diskretnú hodnotu, je nulová. Vo všeobecnosti tak môžeme tvrdiť, že aj výraz

$$E^T \left[\left\{ \theta e^{\tilde{\varepsilon}_i} + (1 - \theta)e^{\varepsilon^T} \right\}^{-\bar{\gamma}-1} \left\{ (1 - \tau)B^0 e^{\varepsilon^T} - \bar{\Delta} \right\}^2 \right]$$

je nenulový, čo implikuje $D_{ii} \neq 0$, čo implikuje regularitu matice A .

Na predošlých stranách sme dokázali platnosť všetkých predpokladov formulovaných vo vete o implicitnej funkcii 3.1, platí teda implikácia v nej formulovaná. Z nej okrem iného vyplýva aj nasledovný fakt, preformulovaný do nášho označenia: Existuje otvorené okolie U bodu $\bar{\gamma}$, $U = U(\bar{\gamma}) \subset \mathbb{R}^n$, otvorené okolie V bodu $(\bar{\alpha}, \bar{\Delta})$, $V = V(\bar{\alpha}, \bar{\Delta}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ s vlastnosťou $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a spojitě parciálne diferencovateľná funkcia

$$g : U \rightarrow V, \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \mapsto g(\gamma) = (g_1(\gamma), \dots, g_n(\gamma))$$

taká, že

$$\Phi(\gamma, g(\gamma)) = 0 \quad \text{pre všetky } \gamma \in U, \\ \Phi(\gamma, y) \neq 0 \quad \text{pre všetky } (\gamma, y) \in U \times V, y \neq g(\gamma).$$

Označme

$$(\alpha(\gamma), \Delta(\gamma)) \equiv g(\gamma), \\ \mathcal{O}(\bar{\gamma}) \equiv U$$

a dostávame, že existuje okolie $\mathcal{O}(\bar{\gamma})$ bodu $\bar{\gamma}$ také, že

$$\Phi(\gamma, \alpha(\gamma), \Delta(\gamma)) = 0 \quad \forall \gamma \in \mathcal{O}(\bar{\gamma}),$$

čo bolo treba dokázať. ■

3.2 Spoločenská rovnováha

Na začiatku druhej kapitoly, v sekcii 2.1, sme definovali tri úrovne rovnováhy. V celej druhej a tretej kapitole sme však potom počítali iba na úrovni trhovej rovnováhy. Teraz by bolo vhodné, aspoň okrajovo, spomenúť aj spoločenskú rovnováhu, ktorá je nadradená zvyšným dvom typom rovnováhy.

Spoločenská rovnováha nastáva vtedy, keď

1. platí rovnováha trhu a ňou implikovaná individuálna rovnováha každého z podnikateľov, a navyše
2. všetci agenti správne zvolia „zamestnanie“ (penzista / podnikateľ).

Inak povedané, bod 2 znamená, že množina podnikateľov spĺňa vzťah (1.9). Podľa vety 1.4 do tejto množiny patria agenti, ktorí vyhovujú nerovnosti (1.35). Táto nerovnosť prepísaná do označenia zavedeného v kapitole 2 vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} \mu_i &> \frac{1}{(1 - \gamma_i)T} \left[\ln \left\{ E^T \left[e^{(1 - \gamma_i)\varepsilon^T} \right] \right\} - \ln \left\{ E^T \left[\left\{ \theta e^{\tilde{\varepsilon}_i} + (1 - \theta)\alpha(\gamma_i)e^{\varepsilon^T} \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{\Delta}{(1 - \tau)B^0} (1 - \theta - \alpha(\gamma_i)\theta) \right\}^{1 - \gamma_i} \right] \right\} \right] \\ &\quad + \frac{1}{T} \left[\ln \left(\frac{\tau}{1 - \tau} \cdot \frac{m(\mathcal{I})}{1 - m(\mathcal{I})} \right) + \ln \left(E_{\mathcal{J}} \left[e^{\mu_j^T} \mid j \in \mathcal{I} \right] \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Záverom formulujeme vetu, ktorá hovorí, za akých podmienok nastáva spoločenská rovnováha na okolí spoločnej averzie k riziku.

Veta 3.3. *Spoločenská rovnováha na okolí spoločnej averzie k riziku, t.j. $\forall \gamma \in \mathcal{O}(\bar{\gamma})$,*

kde $\mathcal{O}(\bar{\gamma})$ je definované ako (3.6), nastáva, ak je $\forall i \in \mathcal{I}$ splnená nerovnosť

$$\begin{aligned} \mu_i &> \frac{1}{(1-\gamma_i)T} \left[\ln \left\{ E^T \left[e^{(1-\gamma_i)\varepsilon^T} \right] \right\} - \ln \left\{ E^T \left[\left\{ \theta e^{\tilde{\varepsilon}_i} + (1-\theta)\hat{\alpha}_i e^{\varepsilon^T} \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{\hat{\Delta}}{(1-\tau)B^0} (1-\theta-\hat{\alpha}_i\theta) \right\}^{1-\gamma_i} \right] \right\} \right] \\ &\quad + \frac{1}{T} \left[\ln \left(\frac{\tau}{1-\tau} \cdot \frac{n}{m-n} \right) + \ln \left(E_{\mathcal{J}} \left[e^{\mu_j^T} \mid j \in \{1, 2, \dots, n\} \right] \right) \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

a ak $\forall i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{I}$ nerovnosť (3.23) neplatí. Hodnoty γ , $\hat{\alpha}$ a $\hat{\Delta}$ použité vo vzťahu spĺňajú podmienku existencie trhovej rovnováhy (3.7), t.j. platí

$$\Phi(\gamma, \hat{\alpha}, \hat{\Delta}) = 0.$$

Dôkaz. Na to, aby vôbec v nejakom bode γ mohla platiť spoločenská rovnováha, musíme mať najprv zaručené, že v tomto bode platí rovnováha trhu. Vo vete 3.2 sme však dokázali, že rovnováha trhu skutočne platí $\forall \gamma \in \mathcal{O}(\bar{\gamma})$, a tak máme túto podmienku splnenú. Následne už len upravíme kritérium odvodené vo vete 1.4 a upravené na (3.22), použitím veličín a vzťahov definovaných v sekcii 3.1 a dostávame (3.23). ■

Záver

Záverom by sme si na nasledovných riadkoch dovolili zhrnúť výsledky dosiahnuté v práci. Vo všeobecnosti by sa dalo povedať, že cieľ práce, ktorým bolo „porozumieť práci Pástora a Veronesiho a pokúsiť sa rozšíriť platnosť existencie rovnováhy v ich modeli“, sa nám podarilo splniť. Konkrétne prvej časti tohto cieľa zodpovedá prvá kapitola, druhej časti sme venovali kapitoly číslo 2 a 3.

V prvej kapitole sme upravili poznatky zo základného modelu z textu [8] tak, aby na seba jednotlivé vety logicky nadväzovali. Najdôležitejšie vzťahy a závery z prvej kapitoly by sa dali zhrnúť nasledovne:

Spotrebu a očakávanú užitočnosť penzistov vieme vypočítat' zo vzorcov (1.29) a (1.30), spotrebu a očakávanú užitočnosť podnikateľov zo vzorcov (1.31), resp. (1.32). Vychádzajúc z týchto výrazov sme odvodili rozhodovacie pravidlo, ktoré hovorí, že jednotlivec sa stane podnikateľom práve vtedy, keď pre jeho úroveň podnikateľských schopností platí nerovnosť (1.35). Následne v sekcii 1.4 uvádzame zdôvodnenie nerovnosti príjmov medzi jednotlivcami v spoločnosti, ktoré odvodili autori v článku [8].

Druhá kapitola bola venovaná úprave vzťahov z prvej kapitoly do matematicky lepšie analyzovateľných tvarov a odvodeniu alternatívnych podmienok rovnováhy. Spotreba podnikateľov sa podľa týchto odvodení dá vypočítat' zo vzťahu (2.17) a rovnováha jednotlivca nastáva, ak je splnená podmienka prvého rádu (2.18). Navyše, aby platila rovnováha trhu, tak musí byť splnená aj podmienka vyprázdnenia trhu, ktorej niekoľko rôznych tvarov uvádzame v leme 2.1. Tabuľka 2.2 slúži na prevod medzi najdôležitejšími pojmami v pôvodnom aj alternatívnom značení.

Zaujímavým zistením je skutočnosť popísaná v sekcii 2.5, že v prípade nevhodných vlastností funkcie užitočnosti nie je korektné na určenie individuálnej rovnováhy použiť podmienku prvého rádu na maximalizáciu užitočnosti. Z tohto dôvodu k odvodeniam v tretej kapitole pridávame aj podmienku, ktorá zaručuje vhodné vlastnosti funkcie

užitočnosti.

V tretej kapitole sme využitím vety o implicitnej funkcii formálne odvodili existenciu rovnováhy na okolí špeciálneho prípadu, v ktorom majú všetci podnikatelia rovnakú averziu k riziku. Vzhľadom na náročnosť tohto problému sme však ako zjednodušujúci predpoklad obmedzili počet agentov na konečné číslo. Rozšíriť existenciu rovnováhy na pôvodne definovanú nekonečnú, no spočítateľnú množinu agentov, je možné použitím funkcionálnej analýzy a poznatkov napr. z textu [3]. Najdôležitejším tvrdením tejto kapitoly je veta 3.2, ktorou je dokázaná rovnováha trhu na spomínanom okolí. Následne vo vete 3.3 formulujeme dodatočné podmienky, ktoré musia byť splnené, aby na spomínanom okolí platila aj spoločenská rovnováha. Nedokazujeme však, či táto rovnováha skutočne existuje.

Autori [8] v texte okrem rovnakej averzie k riziku analyzujú aj niekoľko ďalších špeciálnych prípadov. Možným rozšírením tejto diplomovej práce by mohla byť úloha analogická tej v tretej kapitole - pokúsiť sa dokázať rovnováhu na okolí niektorého z iných špeciálnych prípadov.

Ďalšou z možností by mohla byť úprava pôvodného modelu, a následné odvodenie podmienok rôznych typov rovnováhy, prípadne aj dôkaz existencie. Navrhovali by sme napríklad model rozšíriť o ďalší typ agentov, ktorý by predstavoval klasických zamestnancov, ktorých príjem síce nepochádza z prerozdelených daní podnikateľov, no nie je ani v plne miere závislý od toho, ako úspešná je tá-ktorá firma, ako tomu je v prípade podnikateľov a ich firiem.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Billingsley, P.: *Probability and Measure*, John Wiley & Sons, Inc., 1995
- [2] Borglin, A.: *Economic Dynamics and General Equilibrium*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004
- [3] Brunovský, P.: *Nelineárna analýza*, FMFI UK, Bratislava, 2006, dostupné na internete (19.4.2018):
<http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/skripta/brunela/brunela.pdf>
- [4] Filo, J., Rostás, K.: $2^2 \times 13$ *prednášok z matematickej analýzy*, Univerzita Komenského v Bratislave, 2016
- [5] Judd, K. L.: The Law of Large Numbers with a Continuum of IID Random Variables, *Journal of Economic Theory*, 1985, vol. 35, str. 19-25
- [6] Melvin, G.: *Linear Algebra (Math 110)*, elektronické študijné materiály, University of California, Berkeley, 2012, str. 84-93, dostupné na internete (24.4.2018):
<https://math.berkeley.edu/~gmelvin/math110su12/math110su12.html>
- [7] Neubrunn, T., Riečan, B.: *Miera a integrál*, Veda - vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied, Bratislava, 1981
- [8] Pástor, L., Veronesi, P.: Income Inequality and Asset Prices under Redistributive Taxation, *Journal of Monetary Economics, Elsevier*, 2016, vol. 81(C), str. 1-20
- [9] Pástor, L., Veronesi, P.: Internet Appendix for "Income Inequality and Asset Prices under Redistributive Taxation", dostupné na internete (31.10.2017):
http://faculty.chicagobooth.edu/lubos.pastor/research/internet_appendix__redist__v9.pdf
- [10] Yao, Y.: State Price Density, Esscher Transforms, and Pricing Options on Stocks, Bonds, and Foreign Exchange Rates, *North American Actuarial Journal*, 2001,

vol. 5, no. 3, dostupné na internete (17.1.2018):

[http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.329.2307&rep=rep1
&type=pdf](http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.329.2307&rep=rep1&type=pdf)

- [11] Zlatoš, P.: *Lineárna algebra a geometria*, Ústav matematiky a statistiky, Masarykova Univerzita, Brno, 2006, dostupné na internete (21.4.2018):

<https://is.muni.cz/el/1431/podzim2010/M1111/um/9024920/zlatos/Zima06.pdf>