

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



VEKTOROVÉ HYPERBOLICKÉ PDR V TEÓRII
DOPRAVY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**VEKTOROVÉ HYPERBOLICKÉ PDR V TEÓRII
DOPRAVY**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. Mgr. Peter GUBA, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Peter Šišan
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Vektorové hyperbolické PDR v teórii dopravy.
Vectorial hyperbolic PDEs in the theory of traffic flow.

Cieľ: Diplomová práca je zameraná na konštrukciu a numerickú analýzu nelineárneho systému hyperbolických zákonov zachovania, ktoré popisujú dynamiku dopravných tokov ('traffic flow dynamics'). Model predstavuje rozšírenie klasického skalárneho Lighthill-Whitham-Richards modelu. Cieľom práce bude implementácia metódy konečných objemov Godunovského typu s využitím aproximatívneho Riemannovského solvera.

Vedúci: doc. RNDr. Peter Guba, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 26.01.2017

Dátum schválenia: 27.01.2017
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Podakovanie Touto cestou by som sa chcel podakovať vedúcemu diplomovej práce doc. Mgr. Petrovi Gubovi, PhD., za ochotu, trpezlivosť, odbornú pomoc, cenné rady a pripomenky pri písaní práce. Ďakujem aj rodine za podporu a pomoc pri jej gramatickej úprave.

Abstrakt v štátnom jazyku

ŠIŠAN, Peter: Vektorové hyperbolické PDR v teórii dopravy [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ doc. Mgr. Peter GUBA, PhD., Bratislava, 2018, 63 strán.

V diplomovej práci sa venujeme hyperbolickým parciálnym diferenciálnym rovniciam, ktoré aplikujeme na makroskopické modely v teórii dopravy. V druhej kapitole rozoberáme spôsob riešenia jednorozmernej hyperbolickej PDR pomocou optimálneho riadenia. Numerické príklady riešené optimálnym riadením sú uvedené v štvrtej kapitole. Zovšeobecnil sme jednorozmerné makroskopické modely do viacrozmerných, pričom vozidlá majú možnosť zmeniť svoj jazdný pruh. Na numerické riešenie sme využili nami navrhnutú integrálnu transformáciu typu (65).

Kľúčové slová: hyperbolická parciálna diferenciálna rovnica, Lighthill–Whitham–Richardsov model, Burgersova rovnica, Chebfun, integrálna transformácia, dvojrozmerný systém

Abstract

ŠIŠAN, Peter: Vectorial hyperbolic PDEs in the theory of traffic flow [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. Mgr. Peter GUBA, PhD., Bratislava, 2018, 63p.

In this thesis we focus on hyperbolic partial differential equations applied to macroscopic traffic flow models. In the second chapter we analyze a method for solving one-dimensional hyperbolic PDEs which use optimal control. Numerical examples solved by optimal control are listed in the fourth chapter. We generalize one-dimensional macroscopic models to multidimensional wherein vehicles can change their lane. For numerical solution we used integral transformation of type (65) which we designed.

Keywords: hyperbolic partial differential equation, Lighthill–Whitham–Richard’s model, Burger’s equation, Chebfun, integral transformation, two-dimensional system

Obsah

Úvod	8
1 Matematická reprezentácia zákona zachovania	10
1.1 Lineárna hyperbolická PDR	11
1.1.1 Advekčná rovnica	11
1.1.2 Systém advekčných rovníc	13
1.2 Nelineárna hyperbolická PDR	15
1.2.1 Kvázilineárna rovnica	15
1.3 Rovnica vedenia tepla	16
2 Skalárne rovnice zachovania s konvexnými funkciami toku	17
2.1 Všeobecná rovnica toku	17
2.2 Funkcia toku nezávislá od polohy	20
3 Vektorové rovnice zachovania pri makroskopickom popise dynamiky dopravy	26
3.1 Viacrozmerný problém	28
3.2 Dvojrozmerný problém	29
4 Skalárne rovnice zachovania a ich numerické riešenia	30
4.1 Metóda charakteristík	41
5 Vektorové rovnice zachovania a ich numerické riešenia	42
5.1 Skalárna úloha: Integrálna formulácia	42
5.2 Vektorová úloha: Integrálna formulácia	44
5.2.1 Numerická schéma pre dvojrozmerný systém	47
5.2.2 Diskusia nespojitosti $q(x, t)$ a $Q_x(x, t)$ v priestorovej premennej x	47
5.2.3 Pozorovania z numerických riešení	50
5.3 Ďalšie aplikácie	52
Záver	54
Zoznam použitej literatúry	55
Príloha A	57
Príloha B	62

Úvod

S nárastom dopravy v priebehu 20. storočia sa objavili problémy s jej organizáciou. Predovšetkým ako zabezpečiť, aby výhody plynúce z väčšej mobility neboli prevýšené negatívnymi dosahmi na ľudské životy. Na dosiahnutie tohoto cieľa bolo nutné pozrieť sa na situáciu z vedeckého hľadiska. Zo začiatku išlo skôr o experimenty, nie o teoretické popísanie situácie. Využívali sa hlavne štatistické metódy na meranie priemernej rýchlosti vozidiel, jej štandardnej odchýlky na určitom úseku cesty alebo v konkrétnom bode. Taktiež sa uskutočnili pokusy o koreláciu týchto dát s niektorými parametrami cesty, napríklad počtom jazdných pruhov cesty a jej krivosťou.

V polovici 20. storočia boli teoretické poznatky o správaní sa dopravných tokov omnoho menšie v porovnaní s experimentálnym prístupom. Wardrop [12] zdôraznil potrebu prepojenia teoretických myšlienok s experimentami na dosiahnutie lepšieho popisu dopravných tokov. Teória, ktorú Wardrop vyvinul, sa dá považovať za štatistickú. Pomocou teórie hromadnej obsluhy riešil problém ako optimálne nastaviť semafóry za predpokladu, že doprava vychádza z rovnakého počiatočného stavu, má rovnaký cieľ a medzi počiatočným stavom a cieľom môže viesť rôznymi trasami.

Vo všeobecnosti existujú tri základné prístupy v modelovaní dopravy. Mikroskopický, v ktorom modelujeme každé vozidlo samostatne pomocou obyčajnej diferenciálnej rovnice. Typickým príkladom sú tzv. „*car-following*“ modely. Mezoskopický, ktorý je podobný mikroskopickému, ale veľká pozornosť sa venuje práve správaniu jednotlivca z pohľadu pravdepodobnosti. Posledným je makroskopický prístup, ktorému sa budeme venovať v tejto práci. Využíva metódy, ktoré popisujú dopravný tok ako kinematické vlny v teórii dynamiky kvapalín. Vychádzame z článkov Whithama a Lighthilla [7], [8] a knižnej publikácie [6]. Vhodnou oblasťou pre modelovanie dopravy ako spojitého toku sú dostatočne dlhé úseky ciest, na ktorých je relatívne vysoká koncentrácia vozidiel. Spojitý prístup je dôsledkom limitného správania sa *stochastických procesov* pre dostatočne veľké počty vozidiel.

Teóriu dynamiky kvapalín využijeme pri predikcii vzniku nárazových vĺn v doprave, napríklad pri zúženej ceste, obmedzení dopravných pruhov, v križovatke, prípadne ako dôsledok interakcie medzi rôznymi účastníkmi premávky. Pri kinematickej nárazovej vlne dochádza k veľkému a náhlemu zníženiu rýchlosti vozidiel, ktoré sa do

nej dostanú. V tejto práci sa budeme zaoberať numerickou analýzou jednorozmerných a viacrozmerných úloh dopravných tokov, ktoré budú rozšírením existujúcich modelov Lighthill–Whitham–Richardsov a Burgersovho typu.

Numerické výsledky modelované v tejto práci, sme implementovali v softvérovom balíku *Chebfun* [1] (príručka k balíku Chebfun [2]) pod systémom *Matlab*.

1 Matematická reprezentácia zákona zachovania

V mnohých prírodných vedách sa stretávame s úlohami, v ktorých sa zachovávajú rôzne veličiny ako sú hmotnosť, energia alebo hybnosť. Na popísanie ich časových zmien na danej priestorovej oblasti sa používajú parciálne diferenciálne rovnice (PDR). Hyperbolické parciálne diferenciálne rovnice prvého rádu reprezentujú zákony zachovania v mechanike kontinua. Pre ilustráciu, ako tieto PDR vznikajú v prírodných vedách, urobme nasledujúcu úvahu. Uvažujme neobmedzene dlhú jednorozmernú trubicu, v ktorej tečie kvapalina so známou rýchlosťou $u(x, t)$, kde x reprezentuje polohu určitého bodu v trubici a t je čas. Zavedme do trubice dostatočne malé množstvo (aby neovplyvňovala rýchlostné pole $u(x, t)$) kontrastnej látky a sledujme, ako sa bude jej koncentrácia vyvíjať v čase pozdĺž trubice. Množstvo kontrastnej látky na určitom úseku môžeme vyjadriť ako

$$\int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx.$$

Toto množstvo látky sa na danom úseku vo všeobecnosti mení. Definujme *funkciu toku* ako $f(x, q(x, t)) = u(x, t)q(x, t)$, kde $u(x, t)$ je rýchlostné pole a $q(x, t)$ je koncentrácia látky v bode (x, t) . Hodnota tejto funkcie vyjadruje množstvo látky, ktoré by pri ustálenom toku pretieklo daným bodom x za jednotku času. Celkovú zmenu množstva látky na úseku (x_1, x_2) , spôsobenú tokom kvapaliny, môžeme teda vyjadriť ako rozdiel *funkcie toku* vyjadrený v krajných bodoch tohto úseku. A teda odtiaľ platí

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = f(x_1, q(x_1, t)) - f(x_2, q(x_2, t)) = -[f(x, q(x, t))]_{x_1}^{x_2},$$

pričom predpokladáme, že funkcie $f(x, q(x, t))$ a $q(x, t)$ sú dostatočne hladké (až na množinu s konečným počtom prvkov). Tento vzťah sa dá ďalej prepísať na

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} f(x, q(x, t)) dx,$$

a teda

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(x, q(x, t)) \right] dx = 0. \quad (1)$$

Na polohu bodov x_1 a x_2 neboli kladené žiadne špeciálne nároky, a preto posledný vzťah musí platiť pre každú dvojicu. Odtiaľ teda platí

$$\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(x, q(x, t)) = 0,$$

čo budeme skrátene zapisovať v tvare

$$q_t(x, t) + [f(x, q(x, t))]_x = 0. \quad (2)$$

Vztahy (1) a (2) nazývame postupne integrálnou a diferenciálnou formou zákona zachovania. Túto úvahu sme urobili s predpokladom, že sa na úseku (x_1, x_2) nenachádzajú zdrojové členy. Teda, že $\int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx$ sa mení len na základe tokov cez koncové body úseku. V prípade, že zahrnieme aj zdroj $\Psi(q(x, t), x, t)$, rovnice (1) a (2) sa modifikujú na tvar

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(x, q(x, t)) \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \Psi(q(x, t), x, t) dx, \quad (3)$$

$$q_t(x, t) + [f(x, q(x, t))]_x = \Psi(q(x, t), x, t). \quad (4)$$

1.1 Lineárna hyperbolická PDR

Pre lineárnu verziu PDR rovnice (2) platí, že ak $v_1(x, t)$ a $v_2(x, t)$ sú dve riešenia zodpovedajúce rôznym počiatočným podmienkam, potom aj ich lineárna kombinácia je riešením rovnice (2). Rovnica (2) je lineárna pre všetky separovateľné funkcie toku, teda také, ktoré môžeme zapísať v tvare

$$f(x, q(x, t)) = u(x, t)q(x, t).$$

Inak povedané, pre všetky funkcie toku $f(x, q(x, t))$, ktoré sú lineárne verzie neznámej funkcie $q(x, t)$.

1.1.1 Advekčná rovnica

Za predpokladu konštantnosti rýchlostného poľa, teda $u(x, t) = \bar{u}$, rovnica (2) nadobúda tvar:

$$q_t(x, t) + \bar{u}q_x(x, t) = 0. \quad (5)$$

Rovnicu (5) nazývame *advekčná rovnica*. Riešením je akákoľvek hladká funkcia spĺňajúca $q(x, t) = \hat{q}(x - \bar{u}t)$. Funkcia $\hat{q}$, ktorá je určená počiatočnou podmienkou $q(x, 0)$, závisí len od jednej premennej $\xi = x - \bar{u}t$, a preto sa rovnica (5) zredukuje na obyčajnú diferenciálnu rovnicu (ODR). S tým súvisí aj metóda hľadania riešení PDR. Hľadá sa taká krivka, na ktorej sa PDR redukuje na ODR. Takáto krivka sa nazýva *charakteristická krivka* [6]. V prípade rovnice (5) *charakteristikou* je polpriamka $p(t) = x_0 + \bar{u}t$.

Pozdĺž tejto lineárnej charakteristiky je zmena neznámej funkcie $q(x, t)$ nulová, pretože je nezávislá od x a t .

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q(p(t), t) &= q_t(p(t), t) + p'(t)q_x(p(t), t) \\ &= q_t(p(t), t) + \bar{u}q_x(p(t), t) \\ &= 0.\end{aligned}$$

V tomto špeciálnom prípade konštantného rýchlostného poľa je teda riešenie pozdĺž charakteristických kriviek konštantné. Vo všeobecnosti to neplatí. Stačí uvažovať situáciu, kde je rýchlostné pole závislé na polohe $u(x, t) = \bar{u}(x)$. Potom (2) nadobúda tvar $q_t(x, t) + [\bar{u}(x)q(x, t)]_x = 0$, pričom pre charakteristické krivky platí $p'(t) = \bar{u}(p(t))$. Pozdĺž charakteristickej krivky má advekčná rovnica tvar

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q(p(t), t) &= q_t(p(t), t) + p'(t)q_x(p(t), t) \\ &= q_t(p(t), t) + \bar{u}(p(t))q_x(p(t), t) \\ &= q_t(p(t), t) + [\bar{u}(p(t))q(p(t), t)]_x - \bar{u}'(p(t))q(p(t), t) \\ &= -\bar{u}'(p(t))q(p(t), t).\end{aligned}$$

Pre ilustráciu uvažujme, že rýchlostné pole má tvar $\bar{u}(x) = \sin(x)$. Pre charakteristické krivky potom platí $p'(t) = \sin(p(t))$.

$$\begin{aligned}dp &= \sin(p)dt \\ p(t) &= 2\operatorname{atan}\left[\tan(p_0/2)e^t\right] + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

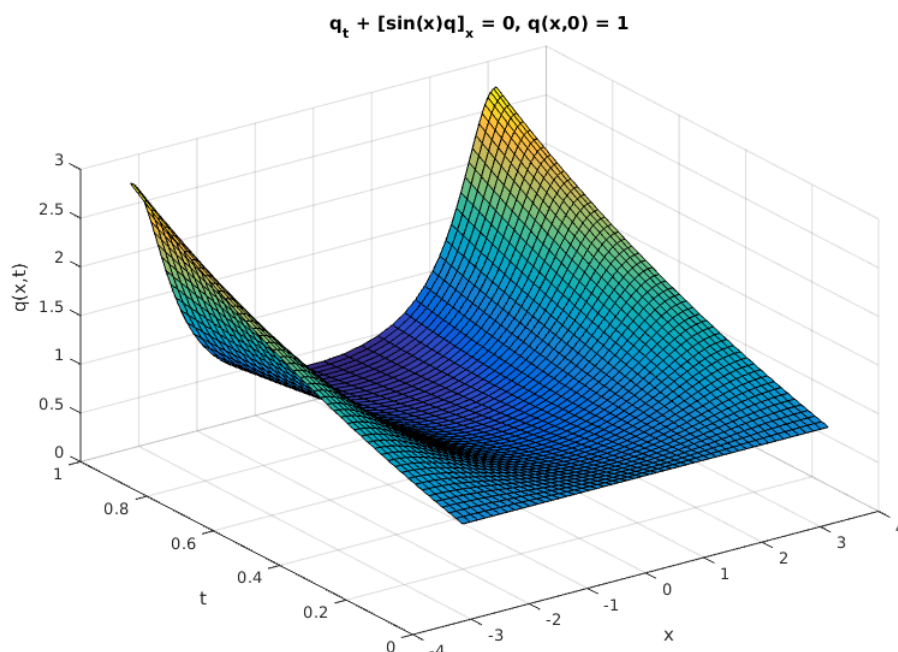
Integráciou je možné vyjadriť $p(t) = 2\operatorname{atan}\left[\tan(p_0/2)e^t\right] + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, kde p_0 je pôvodná pozícia charakteristickej krivky. Vidíme, že riešenie nie je konštantné pozdĺž charakteristických kriviek a charakteristické krivky nie sú priamkové. Pôvodná PDR sa zredukovala na ODR s rôznou počiatočnou podmienkou pre rôzne charakteristiky.

$$\begin{aligned}\frac{dq(p, t)}{q(p, t)} &= -\cos\left\{2\operatorname{atan}\left[\tan\left(\frac{p_0}{2}\right)e^t\right]\right\}dt \\ &= \frac{\tan^2\left(\frac{p_0}{2}\right)e^{2t} - 1}{\tan^2\left(\frac{p_0}{2}\right)e^{2t} + 1}dt, \\ \ln|q(p, t)| &= \ln\left[\tan^2\left(\frac{p_0}{2}\right)e^{2t} + 1\right] - t + c, c \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

$$q(p, t) = c \left[\tan^2 \left(\frac{p_0}{2} \right) e^{2t} + 1 \right] e^{-t}, c \in \mathbb{R},$$

$$q \left(2 \operatorname{atan} \left[\tan \left(\frac{p_0}{2} \right) e^t \right] + 2k\pi, t \right) = \hat{q}(p_0 + 2k\pi) e^{-t} \frac{\tan^2 \left(\frac{p_0}{2} \right) e^{2t} + 1}{\tan^2 \left(\frac{p_0}{2} \right) + 1}, k \in \mathbb{Z}.$$

Pre ilustráciu uvažujme konštantnú počiatočnú podmienku $q(x, 0) = \hat{q}(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Odtiaľ potom máme $q(x, t) = e^t \frac{\tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) + 1}{\tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) + e^{2t}}, x \in (-\pi, \pi)$. Pričom riešenie je priestorovo periodické s periódou 2π , t.j. $q(x + 2k\pi, t) = q(x, t), k \in \mathbb{Z}$ (pozri obrázky 1 a 2).



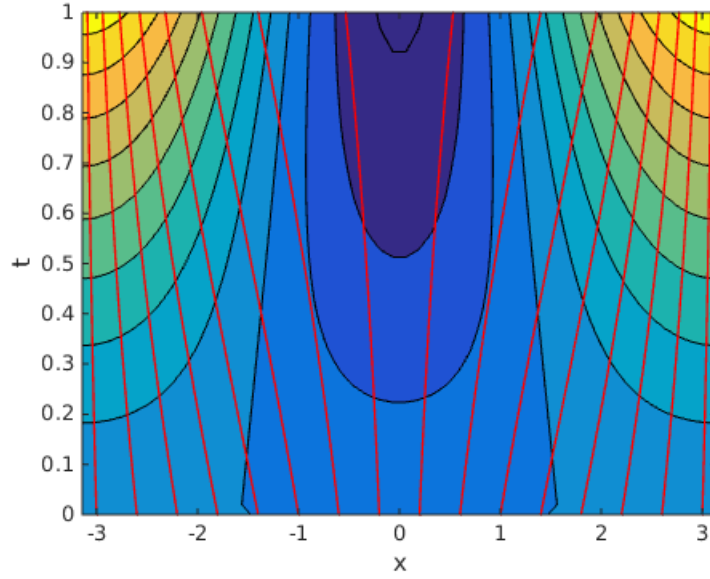
Obr. 1: Obrázok graficky znázorňuje riešenie lineárnej hyperbolickej PDR s $\bar{u}(x) = \sin(x)$. Riešenie je priestorovo periodické s periódou 2π .

1.1.2 Systém advekčných rovníc

Definícia 1.1. (podľa[6]) *Lineárny systém tvaru*

$$\mathbf{q}_t(x, t) + A\mathbf{q}_x(x, t) = 0 \tag{6}$$

sa nazýva hyperbolický, ak štvorcová matica $A_{m \times m}$ je diagonalizovateľná a má m reálnych vlastných čísel a m lineárne nezávislých vektorov.



Obr. 2: Obrázok znázorňuje vyplnené kontúry riešenia a červené čiary predstavujú charakteristiky. Z obrázka je navyše vidieť, že riešenie pozdĺž charakteristík nie je konštantné.

Riešenie rovnice (6) budeme hľadať v podobnom tvare ako v skalárnom prípade, teda

$$q(x, t) = \bar{q}(x - \lambda t).$$

Po dosadení do rovnice (6) dostávame

$$A\bar{q}'(x - \lambda t) = \lambda\bar{q}'(x - \lambda t).$$

Je evidentné, že λ musí byť vlastné číslo matice A a $\bar{q}'(x - \lambda t)$ je jej vlastný vektor. Súhrnne zapísané riešenie rovnice (6)

$$q(x, t) = \sum_{i=1}^m \hat{q}_i(x - \lambda_i t) v_i,$$

kde $\hat{q}_i(x - \lambda_i t)$ je hladká funkcia z $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a v_i je vlastný vektor matice A .

Na hľadanie riešenia takejto lineárnej sústavy sa môžeme pozerat aj inak. Matica A je diagonalizovateľná, a preto platí $A = R\Lambda R^{-1}$, kde Λ je matica s vlastnými číslami na diagonále. Lineárny systém (6) z definície pre násobíme zľava maticou R^{-1} a ekvivalentne prepíšeme na:

$$R^{-1}q_t(x, t) + R^{-1}ARR^{-1}q(x, t) = 0.$$

Zavedieme substitúciu $w(x, t) = R^{-1}q(x, t)$ a dostaneme rovnicu

$$w_t(x, t) + \Lambda w_x(x, t) = 0, \tag{7}$$

čo zodpovedá m nezávislým advekčným rovniciam pre m neznámych funkcií $w(x, t)$.

1.2 Nelineárna hyperbolická PDR

Na začiatku kapitoly 1 sme uvažovali, že pridaná kontrastná látka v trubici nespôsobuje dodatočnú zmenu v rýchlostnom poli. Tento zjednodušujúci predpoklad častokrát nebýva splnený. V takejto situácii už rýchlostné pole u priamo závisí aj od hodnoty $q(x, t)$, ktorá pre plyny predstavuje hustotu plynu v danom mieste a čase. Príkladom môžu byť niektoré termodynamické deje s ideálnym plynom. Napríklad pri fúkaní bicykla dochádza k adiabetickej kompresii plynu. Vzduch pri pieste hustilky tlačí na plyn pred ním v hadičke. Hadička má oveľa menší objem aj priemer ako piest hustilky a dochádza v nej k náhlemu nárastu tlaku (je to dôsledok tzv. „bottleneck“ - oblasť so zníženou priepustnosťou), teda aj hustoty stlačeného plynu. Ako následok adiabetickej kompresie plynu pociťujeme kovové časti hadičky hustilky teplé. Podobná situácia, v ktorej dochádza k ovplyvneniu rýchlostného poľa množstvom (hustotou) vozidiel na nejakom úseku cesty, sa vyskytuje aj v teórii dopravy.

1.2.1 Kvázilineárna rovnica

Definícia 1.2. (podľa [11])

Rovnicu

$$a_1(x, q) \frac{\partial q}{\partial x_1} + a_2(x, q) \frac{\partial q}{\partial x_2} + \dots + a_n(x, q) \frac{\partial q}{\partial x_n} = a_{n+1}(x, q), \quad (8)$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sú zadané funkcie a hľadaná funkcia $q: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, nazývame kvázilineárna hyperbolická PDR prvého rádu.

Tvrdenie 1.3. (podľa [11])

Nech $w = w(x, u): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je C^1 hladké riešenie rovnice $a_1(x, q) \frac{\partial w}{\partial x_1} + a_2(x, q) \frac{\partial w}{\partial x_2} + \dots + a_n(x, q) \frac{\partial w}{\partial x_n} + a_{n+1}(x, q) \frac{\partial w}{\partial q} = 0$. Nech $q: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je C^1 hladká funkcia taká, že $w(x, q(x)) = \text{konšt.}$ a $\frac{\partial w}{\partial q}(x, q(x)) \neq 0$ pre $\forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}$. Potom q je riešením rovnice (8) na oblasti Ω .

Uvažujme Burgersovu rovnicu v kvázilineárnom tvare $\frac{\partial q}{\partial t} + q \frac{\partial q}{\partial x} = 0$. Potom na základe Tvrdenia 1.3 vieme nájsť jej riešenie v implicitnom tvare ako $q(x, t) = \hat{q}(x - tq(x, t))$, kde $\hat{q}(x)$ je počiatočná podmienka.

1.3 Rovnica vedenia tepla

V tejto časti ukážeme ďalšie prepojenie zákona zachovania a funkcie toku z modelu uvažovanom na začiatku kapitoly. Nech $q(x, t)$ predstavuje teplotu materiálu tenkej tyče v bode x a čase t . Hustota vnútornej energie v bode x je potom daná vzťahom $E(x, t) = \kappa(x, t)q(x, t)$, kde $\kappa(x, t)$ predstavuje tepelnú kapacitu materiálu. Predpokladáme, že nedochádza k tepelnej výmene medzi okolím a tyčou. Vnúterná energia je potom zachovaná a na úseku (x_1, x_2) sa môže meniť len kvôli toku tepelnej energie cez koncové body x_1 a x_2 . Z *Fourierovho zákona vedenia tepla* platí, že tok v danom bode a čase je úmerný teplotnému gradientu $q_x(x, t)$ a tepelnej vodivosti $\nu(x)$, teda $f(x, q(x, t)) = \nu(x)q_x(x, t)$. Zákona zachovania tepla môžeme písať v tvare

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \kappa(x, t)q(x, t)dx = - [\nu(x)q_x(x, t)]_{x_1}^{x_2}, \quad (9)$$

resp. v diferenciálnej forme

$$[\kappa(x, t)q(x, t)]_t = [\nu(x)q_x(x, t)]_x. \quad (10)$$

Tepelná kapacita sa bežne nemení s časom $\kappa(x, t) = \kappa(x)$, kedy sa rovnica (10) zjednoduší na $\kappa(x)q_t(x, t) = [\nu(x)q_x(x, t)]_x$. Hľadanie riešenia rovnice (2) pre špeciálne voľby funkcie $f(x, q(x, t))$ (jednou z nich je *Burgersova rovnica*, ktorej sa budeme venovať v kapitole 4) vieme zjednodušiť pridaním malého difúzneho člena k tejto rovnici. Hyperbolická PDR sa zmení na parabolickú, teda na rovnicu vedenia tepla. Túto metódu sme zvolili, aby sme preskúmali jej presnosť vzhľadom na zmenu veľkosti difúzneho člena.

2 Skalárne rovnice zachovania s konvexnými funkciami toku

V tejto časti využijeme súvis medzi skalárnymi konvexnými zákonmi zachovania a Pontyarigovym princípom minima ako je uvedené v [5].

2.1 Všeobecná rovnica toku

Uvažujme pôvodnú skalárnu úlohu

$$q_t(x, t) + [f(x, q(x, t))]_x = 0, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}, t \in (0, T) \quad (11)$$

$$q(x, 0) = g(x), \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}, t = 0, \quad (12)$$

kde $q: \mathbb{R} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ je neznáma, $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ predstavuje známu *funkciu toku* a funkcia $g(x)$ je počiatková podmienka $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zavedieme transformáciu $q(x, t) = u_x(x, t)$, ktorá je splnená v bodoch, v ktorých existuje druhá derivácia $u(x, t)$ a dosadením do rovníc (11)–(12)

$$u_{tx} + [f(x, u_x)]_x = 0, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}, t \in (0, T) \quad (13)$$

$$u = G, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}, t = 0, \quad (14)$$

kde sa počiatková podmienka zmení na $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pričom platí $G' = g$ skoro všade. Rovnica (13) sa dá prepísať na $u_t + f(x, u_x) = c$, kde $c \in \mathbb{R}$. Avšak $u(x, t)$ sa dá nastaviť tak, aby $c = 0$. V prípade, že $c \neq 0$, stačí, ak zoberieme $u(x, t)^* = u(x, t) + ct$. Potom $u_x^* = u_x$ a $u_t^* = u_t + c$. Ďalej teda môžeme uvažovať rovnice

$$u_t + f(x, u_x) = 0, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}, t \in (0, T) \quad (15)$$

$$u = G, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}, t = 0. \quad (16)$$

Vzťahy (15)–(16) sa tiež nazývajú *Hamilton–Jacobiho rovnicou*. Zavedieme zúženú úlohu optimálneho riadenia (OR) v Bolzovom tvare s pevným časom T , voľným koncom a so začiatkovou podmienkou (x, s) , $x \in \mathbb{R}$ a $s \in [0, T]$.

$$\min_{\alpha} J_{x,s}[\alpha] = \min_{\alpha} \int_s^T L(\mathbf{x}(r), \alpha(r)) dr + G(\mathbf{x}(T)) \quad (17)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(r) = \alpha(r) \quad (18)$$

$$\mathbf{x}(s) = x, \quad (19)$$

kde $\mathbf{x}: [s, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\alpha}: [0, T] \rightarrow A$, $A \subseteq \mathbb{R}$ je riadenie, $J_{x,s}: A \rightarrow \mathbb{R}$ je nákladová funkcia a $L: \mathbb{R} \times A \rightarrow \mathbb{R}$ je *Lagranžián*. K úlohe priradíme *Hamiltonián* $H: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A \rightarrow \mathbb{R}$, v tvare

$$H(x, \alpha, \psi) = L(x, \alpha) + \psi \alpha \quad (20)$$

a hodnotovú funkciu $V: \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, v tvare

$$V(x, s) = \min_{\alpha} J_{x,s}[\alpha]. \quad (21)$$

V ďalšom kroku odvodíme *Hamiltonovu–Jacobiho–Bellmanovu* (HJB) rovnicu.

$$\begin{aligned} V(x, s) &= \min_{\alpha(r), s \leq r \leq T} \int_s^T L(\mathbf{x}(r), \boldsymbol{\alpha}(r)) dr + G(\mathbf{x}(T)) \\ &= \min_{\alpha(r)} \int_s^{s+h} L(\mathbf{x}(r), \boldsymbol{\alpha}(r)) dr + \int_{s+h}^T L(\mathbf{x}(r), \boldsymbol{\alpha}(r)) dr + G(\mathbf{x}(T)) \\ &\stackrel{*}{=} \min_{\alpha(r), s \leq r \leq s+h} \int_s^{s+h} L(\mathbf{x}(r), \boldsymbol{\alpha}(r)) dr + V(x(s+h), s+h) \\ &= \min_{\alpha(r), s \leq r \leq s+h} L(\mathbf{x}(\eta), \boldsymbol{\alpha}(\eta))h + V(x, s) + \left(\frac{\partial V}{\partial s}(x, s) + \frac{\partial V}{\partial x}(x, s) \boldsymbol{\alpha}(s) \right) h + o(h) \end{aligned}$$

Krok označený hviezdičkou bol prípustný kvôli Vete 2.2 z [4], ktorá platí aj pre spojitý prípad. V poslednej úprave bola použitá Veta o strednej hodnote integrálu a $\eta \in (s, s+h)$.

$$-\frac{\partial V}{\partial s} h = \min_{\alpha(r), s \leq r \leq s+h} \left[L(\mathbf{x}(\eta), \boldsymbol{\alpha}(\eta))h + \frac{\partial V}{\partial x}(x, s) \boldsymbol{\alpha}(s)h + o(h) \right]$$

Predelením rovnice s h a limitou $h \rightarrow 0$ dostaneme

$$-\frac{\partial V}{\partial s} = \min_{\alpha(s)} \left[L(\mathbf{x}(s), \boldsymbol{\alpha}(s)) + \frac{\partial V}{\partial x}(x, s) \boldsymbol{\alpha}(s) \right],$$

s okrajovou podmienkou

$$V(x, T) = G(\mathbf{x}(T)).$$

Posledné dve rovnosti prepíšeme v termínoch *Hamiltoniánu*

$$V_s + \min_{\alpha} H(x, \alpha, V_x) = 0, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}, s \in (0, T), \quad (22)$$

$$V = G, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}, s = T. \quad (23)$$

Koncovú podmienku (23) upravíme na začiatočnú pomocou transformácie $t = T - s$ a definujeme $u(x, t) = V(x, T - t)$, takže máme

$$u_t(x, t) - \min_{\alpha} H(x, \alpha, u_x) = 0, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}, t \in (0, T), \quad (24)$$

$$u = G, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}, t = 0. \quad (25)$$

Rovnica (24) je hľadaná HJB s okrajovou podmienkou (25). Ak predpokladáme, že funkcia toku spĺňa

$$f(x, \psi) = - \min_{\alpha} H(x, \alpha, \psi), \quad (26)$$

potom HJB rovnica (24) a (25) je rovnocenná s (15) a (16). Preto vyriešením úlohy optimálneho riadenia (17)–(19) vieme nájsť riešenie rovnice (15) a (16), ktoré je zviazané s riešením (11) a (12) transformáciou $u_x(x, t) = q(x, t)$.

Poznámka: Riešenie úlohy (11) a (12), pre ktoré platí $q(x, t) = u_x(x, t)$, nazývame *riešenie s minimálnou hodnotou* (z angl. *minimal value solution*), vzhľadom na Lagranžián $L(x, \alpha)$. Ďalej platí, že toto riešenie je jediné pre daný Lagranžián pre všetky (x, t) , pre ktoré existuje druhá derivácia. Jednoznačnosť je zabezpečená vďaka jednoznačnosti hodnotovej funkcie OR.

Z vyššie uvedeného textu vidieť, že namiesto úlohy (11) a (12) budeme riešiť úlohu OR (17)–(19). Označme $\hat{\alpha}(r)$ ako optimálne riešenie úlohy (17)–(19). Na základe Pontryaginovho princípu minima musí toto optimálne riešenie spĺňať nasledujúce nutné podmienky [4]:

$$(PM) \quad H(\mathbf{x}(r), \hat{\alpha}(r), \psi(r)) = \min_{\alpha(r)} H(\mathbf{x}(r), \alpha(r), \psi(r)),$$

$$(AR) \quad \dot{\psi}(r) = - \frac{\partial H}{\partial x}(\mathbf{x}(r), \hat{\alpha}(r), \psi(r)),$$

$$(PT) \quad \psi(T) = G'(\mathbf{x}(T)),$$

$$\dot{\mathbf{x}}(r) = \hat{\alpha}(\mathbf{x}(r)),$$

$$\mathbf{x}(s) = x,$$

kde (PM) je podmienka minima, (AR) adjungovaná rovnica a (PT) je podmienka transverzality. Príslušná úloha OR, ku ktorej patria tieto nutné podmienky, je platná pre $r \in (s, T)$. Keďže žiadna funkcia explicitne nezávisí na r , čas môžeme posunúť o s

späť, a teda

$$(PM) \quad H(\mathbf{x}(r), \hat{\boldsymbol{\alpha}}(r), \boldsymbol{\psi}(r)) = \min_{\boldsymbol{\alpha}(r)} H(\mathbf{x}(r), \boldsymbol{\alpha}(r), \boldsymbol{\psi}(r)), \quad (27)$$

$$(AR) \quad \dot{\boldsymbol{\psi}}(r) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(r), \hat{\boldsymbol{\alpha}}(r), \boldsymbol{\psi}(r)), \quad (28)$$

$$(PT) \quad \boldsymbol{\psi}(t) = G'(\mathbf{x}(t)), \quad (29)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(r) = \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}(r)), \quad (30)$$

$$\mathbf{x}(0) = x, \quad (31)$$

kde $t = T - s$ a $r \in (0, t)$. V prípade, že funkcia G' nemá deriváciu v konečnom počte bodov a_k , $k = 1, \dots, m$, tak (PT) nemusí byť splnená. Nahradí ju podmienka

$$\mathbf{x}(t) = a_k, \text{ kde } k = 1, \dots, m. \quad (32)$$

Pokiaľ sa nám podarí zabezpečiť platnosť podmienky (26), tak na základe predchádzajúcich úvah vieme zostrojiť algoritmus na nájdenie *riešenia s minimálnou hodnotou* ako aj úlohy (15) a (16).

Algoritmus 1

- 1. krok** Pre daný bod (x, t) nájdeme všetky riešenia dvojbodovej okrajovej úlohy (28)–(31) a (32).
- 2. krok** Zo všetkých riešení z 1. kroku uvažujeme to, ktoré dáva najmenšiu hodnotu v rovnici (17).
- 3. krok** Nastavíme $u(x, t) = V(x, T - t) = \hat{J}_{x,t}$, $q(x, t) = \boldsymbol{\psi}(0)$.

2.2 Funkcia toku nezávislá od polohy

Vo všeobecnosti je náročné nájsť vhodný Lagranžián a Hamiltonián. Preto sa ďalej budeme zaoberať úlohou (11) a (12), v ktorej *funkcia toku* nebude explicitne závislá od polohy, teda $f = f[q(x, t)]$.

$$q_t(x, t) + f(q(x, t))_x = 0, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}, t \in (0, T), \quad (33)$$

$$q(x, 0) = g(x), \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}, t = 0 \quad (34)$$

a tzv. pridružená *Hamilton–Jacobiho rovnica*

$$u_t + f(u_x) = 0, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}, t \in (0, T), \quad (35)$$

$$u = G, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}, t = 0, \quad (36)$$

kde $q(x, t) = u_x(x, t)$. V nasledujúcom texte budeme požadovať platnosť dvoch nasledujúcich predpokladov.

Predpoklad 1: Počiatočná funkcia $q(x, 0) = g(x)$ je ohraničená v $\mathbb{R}$ a spojitá skoro všade až na konečný počet bodov $x = a_1, a_2, \dots, a_m$.

Predpoklad 2: Funkcia toku je konvexná a navyše splňa

$$\lim_{|q| \rightarrow \infty} \frac{f(q)}{|q|} = \infty. \quad (37)$$

Definícia 2.1. (podľa[5]) *Nech je daná funkcia $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, potom jej Legendrova transformácia má tvar*

$$F^*(u) = \sup_v [uv - F(v)], u \in \mathbb{R}.$$

Poznámka: Ak funkcia F v predchádzajúcej definícii navyše splňa podmienku (37), tak $\sup$ je zameniteľné s $\max$.

Tvrdenie 2.2. (podľa[3]) *Predpokladajme, že $F(u)$ splňa Predpoklad 2. Potom*
a) *zobrazenie $u \rightarrow F^*(u)$ je konvexné a*

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{F^*(u)}{|u|} = \infty,$$

b) *naviac platí $F = (F^*)^*$.*

Dôkaz. a) Nech $k \in (0, 1)$, potom bod $u_1 \leq ku_1 + (1 - k)u_2 \leq u_2$, pre $\forall u_1 \leq u_2$. $F^*(ku_1 + (1 - k)u_2) = \sup_{v \in \mathbb{R}} [ku_1v + (1 - k)u_2v - F(v)] \leq k \sup_{v \in \mathbb{R}} [u_1v - F(v)] + (1 - k) \sup_{w \in \mathbb{R}} [u_2w - F(w)] = kF^*(u_1) + (1 - k)F^*(u_2)$, čím je dokázaná konvexnosť.

$F^*(u) = \sup_{v \in \mathbb{R}} [uv - F(v)] \geq \lambda|u| - F(\lambda u/|u|) \geq \lambda|u| - \max_{w \in (0, \lambda)} F(w)$, pre $\lambda > 0$. Odtiaľ potom $\liminf_{u \in \mathbb{R}} \frac{F^*(u)}{|u|} \geq \lambda$, pre $\forall \lambda > 0$.

b) $F^*(u) + F(v) = \sup_{v \in \mathbb{R}} [uv - F(v)] + F(v) \geq uv, \forall u, v \in \mathbb{R}$. Odtiaľ $F(v) \geq \sup_{u \in \mathbb{R}} [uv - F^*(u)] = (F^*)^*(v)$. Pre opačnú nerovnosť platí $(F^*)^*(v) =$

$\sup_{u \in \mathbb{R}} [uv - \sup_{w \in \mathbb{R}} [uw - F(w)]] = \sup_{u \in \mathbb{R}} \inf_{w \in \mathbb{R}} [u(v - w) + F(w)]$. Na základe konvexnosti $u \rightarrow F(u)$ platí $F(w) \geq F(v) + s(w - v)$, $r \in \mathbb{R}$. Ak položíme $u = s$, dostaneme $(F^*)^*(v) \geq \inf_{w \in \mathbb{R}} [s(v - w) + F(w)] = F(v)$.

□

Podobne, ako v postupe pre všeobecnú funkciu toku $f(x, q(x, t))$ v kapitole 2.1, budeme požadovať platnosť podmienky (26). Nech $F \circ (-1): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reprezentuje funkciu $p \rightarrow F(-p)$. Definujeme *Lagranžián* ako

$$L(\alpha) = (f \circ (-1))^*(\alpha) = \max_p [p\alpha - f(-p)]. \quad (38)$$

Analogicky zavedieme úlohu OR

$$\min_{\alpha} J_{x,s}[\alpha] = \min_{\alpha} \int_s^T L(\alpha(r)) dr + G(x(T)) \quad (39)$$

$$\dot{x}(r) = \alpha(r) \quad (40)$$

$$x(s) = x, \quad (41)$$

a *Hamiltonián* v tvare

$$H(\alpha, \psi) = L(\alpha) + \psi\alpha. \quad (42)$$

Tvrdenie 2.3. *Nech je splnený Predpoklad 2. Potom je splnená podmienka (26) v tvare*

$$f(\psi) = -\min_{\alpha} H(\alpha, \psi).$$

Dôkaz. Z Tvrdenia 2.2 platí $f \circ (-1) = L^*$. Pre $\forall \psi \in \mathbb{R}$ platí

$$f(\psi) = L^*(-\psi) = \max_{\alpha} [-\psi\alpha - L(\alpha)] = -\min_{\alpha} [\psi\alpha + L(\alpha)] = -\min_{\alpha} H(\alpha, \psi). \quad \square$$

Nasledujúce tvrdenie nám pomôže zjednodušiť hľadanie riešenia Pontryaginovho princípu minima.

Tvrdenie 2.4. *Nech f je aspoň jedenkrát diferencovateľná funkcia, ktorá spĺňa Predpoklad 2. Potom $\alpha^*(\psi) = -f'(\psi)$, $\psi \in \mathbb{R}$ je jediné riešenie minimalizácie $\min_{\alpha} H(\alpha, \psi)$.*

Dôkaz. Na základe definície Lagranžiánu (38), môžeme písať

$$L(\alpha) = \lambda\alpha - f(-\lambda),$$

pričom λ spĺňa

$$\alpha + f'(-\lambda) = 0.$$

Stále nemáme zaručenú jednoznačnosť riešenia, hoci minimálna hodnota $L(\alpha)$ je daná jednoznačne kvôli svojej konvexnosti. Ďalej zavedieme pomocnú funkciu

$$\begin{aligned}
 \bar{H}(\lambda, \psi) &= H(-f'(-\lambda), \psi) = -\psi f'(-\lambda) + L(-f'(-\lambda)) \\
 &= -\psi f'(-\lambda) + \max_s [-s f'(-\lambda) - f(-s)] \\
 &= -\psi f'(-\lambda) - \min_s [s f'(-\lambda) + f(-s)] \\
 &= -\psi f'(-\lambda) - [\lambda f'(-\lambda) + f(-\lambda)] \\
 &= -(\psi + \lambda) f'(-\lambda) - f(-\lambda)
 \end{aligned}$$

Z Predpokladu 2 platí, že $f'(-\lambda)$ je monotónna a neohraničená. Preto α minimalizuje $H(\alpha, \psi)$ práve vtedy, keď λ spĺňajúce $\alpha + f'(-\lambda) = 0$ minimalizuje $\bar{H}(\lambda, \psi)$. V ďalšom kroku sa budeme snažiť minimalizovať práve $\bar{H}(\lambda, \psi)$.

$$\begin{aligned}
 \bar{H}(\lambda, \psi) &= -(\psi + \lambda) f'(-\lambda) - f(-\lambda) + f(\psi) - f(\psi) \\
 &= -(\psi + \lambda) f'(-\lambda) + (\psi + \lambda) f'(\zeta) - f(\psi) \\
 &= -(\psi + \lambda) [f'(-\lambda) - f'(\zeta)] - f(\psi),
 \end{aligned}$$

kde ζ leží medzi ψ a $-\lambda$. Môžu nastať dve situácie, a to ak $\psi > \zeta > -\lambda, \psi + \lambda > 0$ prípadne opačne $\psi < \zeta < -\lambda, \psi + \lambda < 0$. V oboch prípadoch platí, že $-(\psi + \lambda) [f'(-\lambda) - f'(\zeta)] \geq 0$, lebo f' je neklesajúca z dôvodu konvexnosti f . Odtiaľ nutne platí

$$\bar{H}(\lambda, \psi) \geq -f(\psi) = \bar{H}(-\psi, \psi),$$

teda $\lambda = -\psi$ minimalizuje $\bar{H}(\lambda, \psi)$. Preto $\alpha^* = -f'(\psi)$ minimalizuje $H(\alpha, \psi)$. V ďalšom kroku dokážeme, že $\alpha^* = -f'(\psi)$ je jediná funkcia minimalizujúca $H(\alpha, \psi)$. Predpokladajme, že $\hat{\alpha} = -f'(-\hat{\lambda})$ minimalizuje H a $\bar{H}$. Potom $\bar{H}(\hat{\lambda}, \psi) = -f(\psi)$. Z definície $\bar{H}$ platí

$$f(\psi) = f(-\hat{\lambda}) + (\psi + \hat{\lambda}) f'(-\hat{\lambda}). \quad (43)$$

Keďže $f(\zeta)$ je konvexná, jej dotyčnica nikdy nie je nad ňou, teda $f(\zeta) \geq f(-\hat{\lambda}) + (\zeta + \hat{\lambda}) f'(-\hat{\lambda})$, kde $\hat{\lambda}$ predstavuje dotykový bod. Z rovnice (43) platí, že aj ψ je dotykovým bodom k tejto dotyčnici. Odtiaľ platí, že

$$f(\zeta) = f(-\hat{\lambda}) + (\zeta + \hat{\lambda}) f'(-\hat{\lambda})$$

pre všetky body medzi ψ a $\hat{\lambda}$. Navyše platí $f'(\zeta) = f'(-\hat{\lambda})$. Nech $\zeta = -\hat{\lambda}$, potom $-f'(\psi) = -f'(-\hat{\lambda}) = \hat{\alpha}$. Teda $\alpha^* = -f'(\psi)$ je jediná funkcia minimalizujúca $H(\alpha, \psi)$.

□

Budeme žiadať splnenie podmienok (28), (31) a (32) pre úlohu (39)–(41). Vďaka Tvrdeniu 2.4 sa hľadanie riešenia oproti všeobecnému prípadu zjednoduší.

$$\dot{\psi}(r) = 0 \tag{44}$$

$$\dot{x}(r) = \alpha^*(\psi(r)) = -f(\psi(r)) \tag{45}$$

Teda $\psi = p$, kde p je konštanta a charakteristikou je priamka. Riešením pre $\dot{x}$ je $\dot{x} = x - f'(p)r$. Ďalej je potrebné nájsť také vhodné p , aby bolo riešením dvojbodovej okrajovej úlohy (28)–(31) a (32), teda musí byť splnená aspoň jedna z rovníc

$$p = G'(x - f'(p)t) \tag{46}$$

$$a_k = x - f'(p)t, \quad \text{kde } k = 1, \dots, m, \tag{47}$$

kde a_k sú body nespojitosti funkcie $G'(x)$ alebo $g(x)$. V podkapitole 2.1 bol Pontryaginov princíp minima popísaný diferenciálnymi rovnicami, čo je zásadný rozdiel oproti tejto situácii, keď je sústava popísaná algebraickými rovnicami. Túto zmenu sme získali vďaka Predpokladu 2.

Algoritmus 2 (platný, ak sú splnené Predpoklady 1 a 2)

- 1. krok** Pre daný bod (x, t) nájdeme všetky riešenia p , ktoré spĺňajú aspoň jednu z algebraických rovníc (46) a (47).
- 2. krok** Zo všetkých riešení z 1. kroku uvažujeme to, ktoré dáva najmenšiu hodnotu

$$J^* = L(-f'(p))t + G(x - f'(p)t),$$

pre $L = (f \circ (-1))^*$.

- 3. krok** Nastavíme $u(x, t) = p$.

Implementácia Algoritmu 2 v systéme Chebfun pre konvexnú funkciu toku je uvedená nižšie:

```

1 function u = pdeccl(df,L,g,G,d,a,x,t)
2 % Upravene zo zdroja [4]. Implementacia funkcie 'pdeccl' je postavena na
3 % nadstavbe systemu Matlab pre pracu so spektrálnymi aproximáciami
4
5 % Krok1
6 cdf = chebfun(df, d, 'splitting', 'on');           %vytvori chebfun fciu pre df
7 q = [];
8 for k = 1:length(a)                               %hlada riesenie rovnice 47
9     hk = a(k) - x + t*cdf;
10    q = [q, roots(hk)'];
11 end
12
13 dom = unique([d, q]);
14 h = chebfun(@(Cp) g(x - t*df(psi)) - psi, dom, 'splitting', 'on');
15 p = [roots(h); q(:)];                             %hlada riesenie rovnice 46
16
17 % Krok2
18 J = @(psi) L(-df(psi))*t + G(x - df(psi)*t);      %spomedzi vsetkych rieseni p
19 [~, idx] = min(J(psi));                            %vracia index,v ktorom sa
20                                                    %realizuje minimum J
21 % Krok3
22 u = psi(idx);                                       %u(x,t) = arg min_{psi} J(psi)
23 end

```

Vstupmi funkcie `pdeccl.m` sú postupne f' - derivácia funkcie toku, L - Lagranžian, $g, G' = g$ - počiatková podmienka. d predstavuje obor hodnôt g (kvôli rovnici (46)) vrátane bodov, kde f' nemusí byť hladká, a je množina bodov nespojitosti počiatkovej podmienky g a x, t sú body, v ktorých počítame hodnotu neznámej funkcie u .

Tento algoritmus poskytuje niekoľko výhod. V prítomnosti šokových vln je jednoduché nájsť riešenie, pretože Krok 2 dáva jednoznačné riešenie. Taktiež nevyžaduje splnenie Rankine–Hugoniotovej podmienky pre nárazové vlny. Navyše tento algoritmus pri výpočte hodnoty neznámej funkcie u v bode (x, t) nepotrebuje znalosť o iných bodoch, je tzv. kauzálny nezávislý. Vďaka tejto vlastnosti vieme numerické výpočty urýchliť využitím viacerých jadier procesora. Ďalšou výhodou kauzálny nezávislosti je, že numerické chyby sa nešíria v čase ani priestore, rovnaká presnosť môže byť zachovaná počas celého výpočtu.

3 Vektorové rovnice zachovania pri makroskopickom popise dynamiky dopravy

V modeli dopravného toku uvažujeme o doprave ako o kontinuu, kde $q(x, t)$ je spojitá funkcia hustoty dopravy. Avšak v skutočnosti, ak sa pozrieme na konkrétny bod x na ceste, tak buď tam vozidlo je alebo nie je. Môže sa teda zdať, že myšlienka spojitej hustoty je nezmyselná. Situácia je však podobná ako pri plynach. Tie sú tiež zložené z veľkého počtu diskretných častíc, zväčša molekúl, ktorých správanie sa ľahšie popisuje spojitou. Navyše jednotlivé molekuly plynu sa nachádzajú dostatočne ďaleko od seba, a preto je plyn stlačiteľný. Napríklad zvukové vlny sú náhle lokálne zhustenia koncentrácie molekúl striedané úsekmi s nižšou koncentráciou. Pri hustejšej doprave a dostatočne dlhom úseku cesty je vhodné túto analógiu použiť. Vozidlá môžeme považovať za stlačiteľnú tekutinu. Intuitívne, ak je prázdna cesta, tak hustota je $q = 0$. Pri rušnej premávke, pri ktorej sú vozidlá tesne za sebou, definujeme $q = 1$. Chceme teda, aby $0 \leq q \leq 1$. Ďalším predpokladom je rovnaká dĺžka všetkých vozidiel, preto polohu x budeme udávať v dĺžkach vozidla. Taktiež maximálna rýchlosť $u(q, x, t)$ je vyjadrená ako počet vozidiel za jednotku času. Potom pre dopravný tok platí $f(x, t) = u(q, x, t)q(x, t)$.

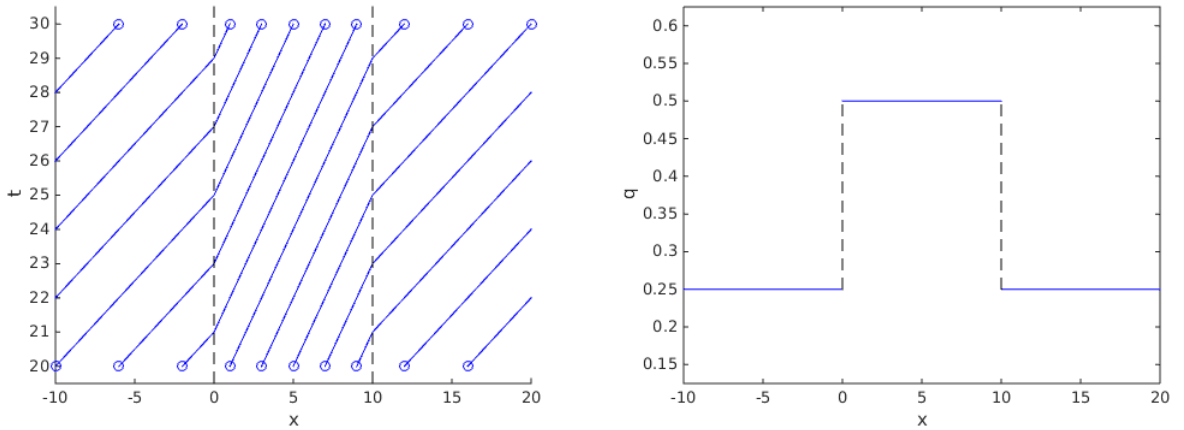
Poznámka: Existuje aj diskretný spôsob riešenia, ktorý uvažuje každé vozidlo zvlášť, pričom okamžitá rýchlosť vozidla je funkciou vzdialenosti predchádzajúceho vozidla a kapacity cesty - *car following theory*.

Uvažujme jednoprádovú cestu, na ktorej je dostatočne málo vozidiel, teda vozidlá sa pohybujú maximálnou rýchlosťou $u(x)$, ktorá je povolená na tomto úseku cesty. Inak povedané, vodiči nie sú obmedzovaní inými účastníkmi dopravy. Takýto stav môžeme pozorovať, keď sedíme v aute a sledujeme premávku na ceste medzi obcami. Pred sebou dostatočne ďaleko vidíme auto, ako sa blíži do obce. Zníži svoju rýchlosť a následne sa zmenší vzdialenosť medzi nami. Nastalo lokálne zhustenie dopravy, ktoré sa bude niesť v podobe vlny späť vzhľadom na autá až po koniec obce, kde sa situácia opäť dostane do predošlého stavu. Túto situáciu môžeme popísať nasledovnou diferenciálnou rovnicou.

$$q_t(x, t) + [u(x)q(x, t)]_x = 0, \quad (48)$$

kde $u(x) = 1$, pre $x \in [0, 10]$, inak $u(x) = 2$, s počiatočnou podmienkou $q(x, 0) = 1/4$

pre $x < 0$, inak $q(x, 0) = 0$. Keďže ide o rýchlostné pole $u(x)$, ktoré je po častiach konštantné, môžeme použiť tvar riešenia z 1.1.1. Pre $x \leq 0$ je $q(x, t) = 1/4$ pre $\forall t$; pre $0 < x \leq 10$ je $q(x, t) = 1/2$, ak $x > t$, inak $q(x, t) = 0$; pre $x > 10$ je $q(x, t) = 1/4$, ak $t > 10$, inak $q(x, t) = 0$. Táto úloha predstavuje upravený *Riemannov problém*.



Obr. 3: Obrázky zobrazujú situáciu v čase $20 \leq t \leq 30$. Oblasť medzi prerušovanými čiarami na obrázkoch znázorňuje obmedzenie maximálnej povolenej rýchlosti na polovicu. Na obrázku vľavo sú trajektórie jednotlivých áut, obrázok vpravo znázorňuje skokový nárast hustoty dopravy v tejto oblasti.

Poznámka: Model predpokladá, že vodiči vedia upraviť svoju rýchlosť okamžite.

V prípade premávky, pri ktorej sa vodiči navzájom neovplyvňujú, je situácia pomerne nezaujímavá a dobre popísateľná lineárnou hyperbolickou PDR. Úloha sa však skomplikuje, ak budeme uvažovať rušnú cestu. Funkcia toku je vždy $f = u(x, q, t)q(x, t)$, teda rýchlosť závisí na hustote dopravy. Často sa predpokladá, že $u(x, q, t) = u(q)$, čiže maximálna rýchlosť nezávisí explicitne od polohy ani času. Pre funkciu toku $f(q)$ zjavne platí $f(0) = 0$. Pre $q = 1$ chceme niečo podobné, lebo maximálna hustota vozidiel znamená zápchu a teda žiadny dopravný tok, $f(1) = 0$. Preto aj $u(1) = 0$. Na základe Rolleovej vety môžeme predpokladať existenciu takej hustoty, ktorá maximalizuje dopravný tok. V najjednoduchšom prípade je funkcia $u(q) = u_{max}(1 - q)$ a príslušný model dopravy

$$q_t + u_{max} [q(1 - q)]_x = 0.$$

Tento model sa nazýva *LWR model* podľa Lighthilla, Whithama a Richardsa. Ako ukážeme v nasledujúcej kapitole, LWR model vieme lineárnou transformáciou previesť

na *Burgersovu rovnicu*. Tá splňa predpoklad konvexnosti funkcie toku $f(q) = \frac{1}{2}q^2(x, t)$ z kapitoly 2. Ak by sme nasilu, t.j. bez lineárnej transformácie požadovali, aby bola doprava popísaná Burgersovou rovnicou, výsledky by nezodpovedali realite. Pretože stredná rýchlosť vozidiel by musela narastať s ich hustotou. Tento model skôr zodpovedá správaniu hydiny utekajúcej pred dravcami. Čím rýchlejšie beží a čím je bližšie pri vás váš sused, tým rýchlejšie sa snažíte bežať aj vy, aby dravec nechytí vás, ale niekoho iného. Preto tento model budeme brať ako ilustračnú alternatívu.

3.1 Viacrozmerný problém

V súčasnosti, najmä vo väčších mestách, sa stretávame s dvoj a viacprúdovými cestami. V takejto situácii dochádza k presunom vozidiel z jedného jazdného pruhu do iného či už kvôli odbočovaniu na inú cestu, obiehaniu alebo menej hustej premávke vo vedľajšom pruhu. V tejto podkapitole sa zameriame na rozšírenie už spomenutých modelov do viacrozmerných situácií. Neskôr sa budeme podrobnejšie venovať dvojrozmerným systémom, teda cestám s dvomi jazdnými pruhmi.

Podľa cestného zákona na Slovensku [14] mimo obce smie vodič využiť iný ako pravý jazdný pruh len v prípade obchádzania, predchádzania, otáčania alebo odbočovania. V obci môže využiť ktorýkoľvek pruh. V ďalších úvahách budeme predpokladať, že vodiči môžu vždy jazdiť vo všetkých pruhoch. Opustiť svoj jazdný pruh a prejsť do iného má zmysel vtedy, ak z toho vodič má nejakú výhodu. Napríklad zníženie rizika dopravnej nehody kvôli vyššej hustote dopravy v danom jazdnom pruhu. Z uvedeného môžeme tvrdiť, že na rozhodnutie na zmenu jazdného pruhu bude vplývať pomer koncentrácií vozidiel v susedných pruhoch. V najjednoduchšej situácii budeme predpokladať, že funkčná závislosť na zmenu jazdného pruhu je lineárna s koeficientami $k^{i,j}$. Tieto koeficienty sa dajú považovať za rovnaké, ak všetky jazdné pruhy považujeme za homogénne z hľadiska praktickej využiteľnosti pre vodičov. Mnohokrát je ale práve pravý pruh pre vodičov „lákavejší“, kvôli východom z diaľnice alebo iným odbočkám.

Na základe vyššie spomenutých úvah v krátkosti uvádzame zovšeobecnený lineárny model pre N –pruhovú cestu za predpokladu konštantnosti rýchlostného poľa v každom

jazdnom pruhu:

$$\begin{aligned}
 q_t^1 + \bar{u}^1 q_x^1 + k^{12} q^1 - k^{21} q^2 &= 0, \\
 q_t^2 + \bar{u}^2 q_x^2 - k^{12} q^1 + (k^{21} + k^{23}) q^2 - k^{32} q^3 &= 0, \\
 &\vdots \\
 q_t^j + \bar{u}^j q_x^j - k^{j-1,j} q^{j-1} + (k^{j,j-1} + k^{j,j+1}) q^j - k^{j+1,j} q^{j+1} &= 0, \\
 &\vdots \\
 q_t^N + \bar{u}^N q_x^N + k^{N-1,N} q^{N-1} - k^{N,N-1} q^N &= 0,
 \end{aligned}$$

kde $q^j(x, t)$ je hustota dopravy v j -tom jazdnom pruhu v bode (x, t) a $k^{i,j} \geq 0$ je „ochota“ prechádzať z pruhu i do j .

3.2 Dvojrozmerný problém

V tejto podkapitole sa v modeloch obmedzíme iba na dva jazdné pruhy. Budeme uvažovať iba modely s konštantnou tendenciou prechodu medzi jazdnými pruhmi vo forme:

$$q_t^1 + [f_1(q^1, q^2)]_x + k^{12} q^1 - k^{21} q^2 = 0, \quad (49)$$

$$q_t^2 + [f_2(q^1, q^2)]_x - k^{12} q^1 + k^{21} q^2 = 0. \quad (50)$$

V kapitole 5, ako prvý analyzujeme lineárny model:

$$q_t^1 + \bar{u}^1 q_x^1 + k^{12} q^1 - k^{21} q^2 = 0, \quad (51)$$

$$q_t^2 + \bar{u}^2 q_x^2 - k^{12} q^1 + k^{21} q^2 = 0. \quad (52)$$

Druhým bude zovšeobecnenie LWR modelu:

$$q_t^1 + u_{max}^1 [q^1(1 - q^1)]_x + k^{12} q^1 - k^{21} q^2 = 0, \quad (53)$$

$$q_t^2 + u_{max}^2 [q^2(1 - q^2)]_x - k^{12} q^1 + k^{21} q^2 = 0. \quad (54)$$

V kapitole 5 taktiež ukážeme, že takto definované modely skutočne spĺňajú podmienku zákona zachovania hmoty. Navyše ukážeme aj niektoré vlastnosti týchto modelov, ak čas pôjde v limite do nekonečna. Nevýhodou uvažovaného zovšeobecnenia LWR modelu je, že pre určité nezáporné počiatočné podmienky, ktoré sú navyše menšie ako 1, môže časom hustota dopravy $q_i, i = 1, 2$ presiahnuť hodnotu 1, čo je fyzikálne nemožné.

4 Skalárne rovnice zachovania a ich numerické riešenia

Príklad 4.1. Periodická funkcia toku

Ako prvý príklad budeme analyzovať úlohu z kapitoly 1, v ktorej rýchlosť toku je periodickou funkciou priestorovej premennej x

$$q_x + [\sin(x)q]_x = 0, \quad q(x, 0) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

teóriou zavedenou v kapitole 2. Lagranžián získame z $L(x, \alpha) = \min_p [p\alpha + p \sin(x)]$. Vzhľadom na to, že minimalizačná premenná p je lineárna, jej hodnota závisí na znamienku $\alpha + \sin(x)$. Jediná možnosť, ako sa vyhnúť nekonečnu, je požadovať, aby $\alpha = -\sin(x)$, a teda $L(x, \alpha) = 0$. Hamiltonián $H(x, \alpha, \psi) = \psi\alpha = -\psi \sin(x)$. Na základe Hamiltonovskej dynamiky pre bod (x, t) požadujeme platnosť vzťahov (28)–(31):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(r) &= -\sin(\mathbf{x}), & \mathbf{x}(0) &= x, \\ \dot{\psi}(r) &= \psi \cos(\mathbf{x}), & \psi(t) &= 1, \end{aligned}$$

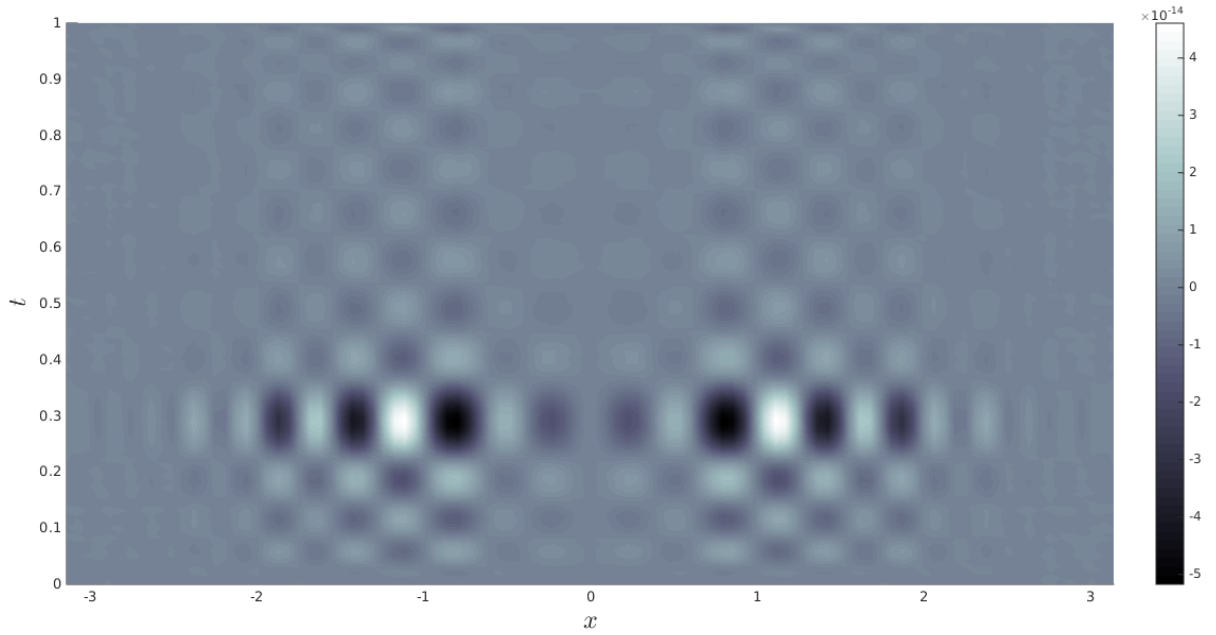
pričom riešenia týchto rovníc majú tvar

$$\mathbf{x}(r) = 2 \operatorname{atan} \left[\tan \left(\frac{x}{2} \right) e^{-r} \right], \quad \psi(r) = e^{t-r} \frac{\tan \left(\frac{x}{2} \right)^2 + e^{2r}}{\tan \left(\frac{x}{2} \right)^2 + e^{2t}}.$$

Takto máme vykonaný Krok 1 v Algoritme 1. Krok 2 môžeme vynechať, keďže existuje práve jedno riešenie. Hľadané riešenie má potom tvar

$$q(x, t) = \psi(0) = e^t \frac{\tan \left(\frac{x}{2} \right)^2 + 1}{\tan \left(\frac{x}{2} \right)^2 + e^{2t}}.$$

Toto riešenie je rovnaké ako to, ktoré sme získali metódou charakteristík. Algoritmus 2 na túto úlohu nemôžeme použiť, kvôli nesplneniu Predpokladov 1 a 2. Obrázok 4 zobrazuje relatívnu chybu presného riešenia úlohy $q_t + [\sin(x)q]_x = 0, q(x, 0) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ oproti riešeniu získanému Algoritmom 1. Zisťujeme, že výsledky sú pomerne presné, s relatívnou chybou rádovo 10^{-14} .



Obr. 4: Relatívna chyba: presné riešenie vs. Algoritmus1.

```

1 %Riesenie Príkladu 1 pomocou Chebfun
2 g=chebfun(1,[-pi,pi]); % počiatočná podmienka
3 tmin=0; % časový interval (tmin,tmax)
4 tmax=1; % ktorom riešime PDR
5 q= @(x,t) exp(t).*(tan(x/2).^2 + 1)./(tan(x/2).^2 + exp(2*t));
6 Q=chebfun2(@(x,t) q(x,t), [domain(g),tmin,tmax], 'vectorize'); % riešenie
    
```

V nasledujúcej časti prevedieme PDR vyskytujúcu sa v LWR modeli na *Burgersovu rovnicu*, ktorá spĺňa naše predpoklady o konvexnosti funkcie toku. V rovnici

$$q_t + [v_{max}q(1 - q)]_x = 0,$$

$$q(x, 0) = \bar{q}(x),$$

kde v_{max} je konštanta, predstavuje LWR model. Zavedieme substitúciu

$$q(x, t) = \frac{v_{max} - z(x, t)}{2v_{max}}$$

a po úpravách dostávame

$$z_t + \left(\frac{z^2}{2}\right)_x = 0, \quad (55)$$

$$z(x, 0) = v_{max}[1 - 2\bar{q}(x)]. \quad (56)$$

Príklad 4.2. *Burgersova rovnica, jeden skok*

$$z_t + \left(\frac{z^2}{2}\right)_x = 0,$$

$$z(x, 0) = 1, x \in (0, 1), \text{ inak } z = 0$$

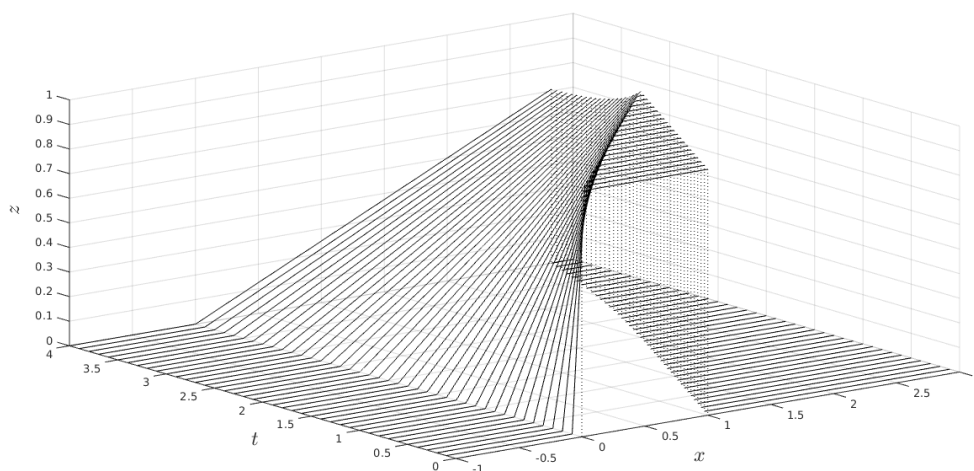
Na numerické riešenie tejto úlohy využijeme Algoritmus 2. Taktiež uvádzame jeho implementáciu v Matlabe. Výhodou takejto implementácie je ľahká modifikovateľnosť pri zmene počiatočnej podmienky (riadok 5).

```

1 % Burgersova rovnica
2 % Počiatočná podmienka  $z(x,0)=1$ ,  $x \in [0,1]$ ,  $z(x,0)=0$  inak
3  $df=@(z)$   $z$ ; % derivácia funkcie toku,  $f(z) = (z^2)/2$ 
4  $L=@(z)$   $z.^2/2$ ; % Lagranžian
5  $g=chebfun(\{0,1,0\},[-1,0,1,3],\text{'splitting'},\text{'on'})$ ; % poc. podmienka
6  $G=cumsum(g)$ ; % integral z poc. podmienky
7  $d=\min\&max(g)'$ ; % hľadá lokálne extremy, keďže uvažujeme uzavretý interval
8 % najde aj globálne => získame obor hodnôt funkcie  $g$ 
9  $a=g.ends(abs(jump(g,g.ends))>10*vscale(g)*eps)$ ; % najde body nespojitosti
10 % funkcie  $g$ 
11  $t=0:0.1:4$ ; % časové body v ktorých hľadáme riešenie
12  $Z=cell(size(t))$ ; % inicializácia riešenia
13  $T=cell(size(t))$ ;
14  $z=@(x,t)$   $pdeccl(df,L,g,G,d,a,x,t)$ ; % vracia hľadajú funkčnú hodnotu v bode  $(x,t)$ 
15  $T\{1\}=chebfun(0, domain(g))$ ; % vytvorí chebfun funkcie pre  $t = 0$ 
16  $Z\{1\}=chebfun(@(x) g(x), domain(g), \text{'splitting'}, \text{'on'}, \text{'vectorize'})$ ;
17 parfor  $i=2:length(t)$ ,
18      $T\{i\}=chebfun(t(i), domain(g))$ ;
19     % na začiatku zabudovaného algoritmu vypočítava funkcie  $z(x,t)$  v mnohých
20     % bodoch  $x$  a následne pomocou nich vytvorí chebfun funkciu
21      $Z\{i\}=chebfun(@(x) z(x,t(i)), domain(g), \text{'splitting'}, \text{'on'}, \text{'vectorize'})$ 
22 end
23 % vykreslenie vodopádového grafu
24  $x=chebfun('x', domain(g))$ ;
25 for  $i=1:length(t)$ ,
26      $plot3(x,T\{i\},Z\{i\},\text{'k'})$ 
27     hold on
28 end
29  $xlabel('\$x\$', \text{'interpreter'}, \text{'latex'}, \text{'fontsize'}, 18)$ 
30  $ylabel('\$t\$', \text{'interpreter'}, \text{'latex'}, \text{'fontsize'}, 18)$ 
31  $zlabel('\$z\$', \text{'interpreter'}, \text{'latex'}, \text{'fontsize'}, 18)$ 
32 grid on

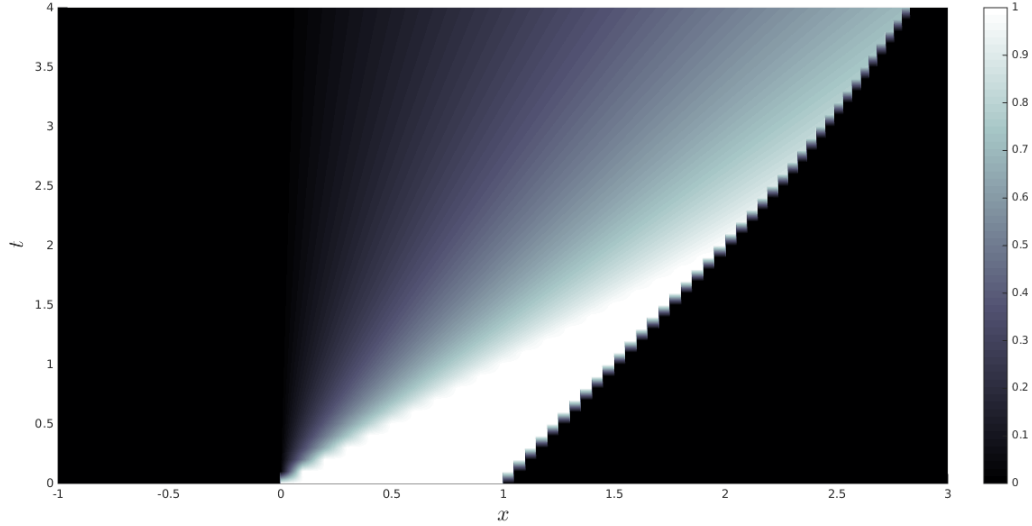
```

Obrázok 5 predstavuje grafické znázornenie riešenia Príkladu 4.2 v diskretných časových rezochoch. Prerušovaná čiara predstavuje skok - miesto, kde riešenie nie je diferencovateľné.



Obr. 5: Vodopádový graf, Príklad 4.2.

Lepšie znázornenie vývoja oblasti nespojitosti je znázornené na obrázku 6. Ide o grafickú interpoláciu riešenia v diskretných časových rezoch (obrázok 5) pomocou funkcie `surf`.



Obr. 6: Pohľad zhora, Príklad 4.2.

Príklad 4.3. *LWR model, dva skoky*

$$q_t + [1.5q(1 - q)]_x = 0, \quad (57)$$

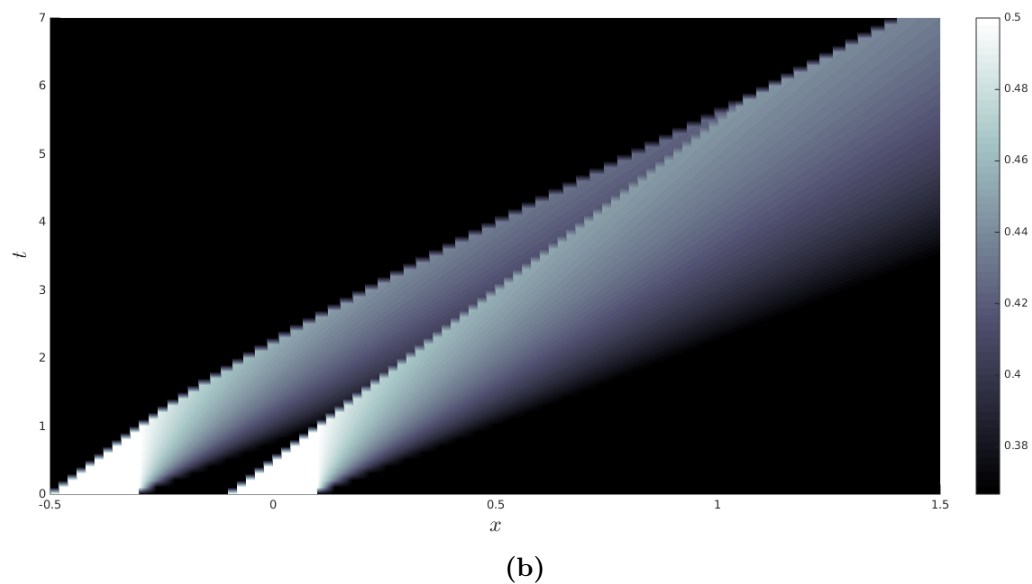
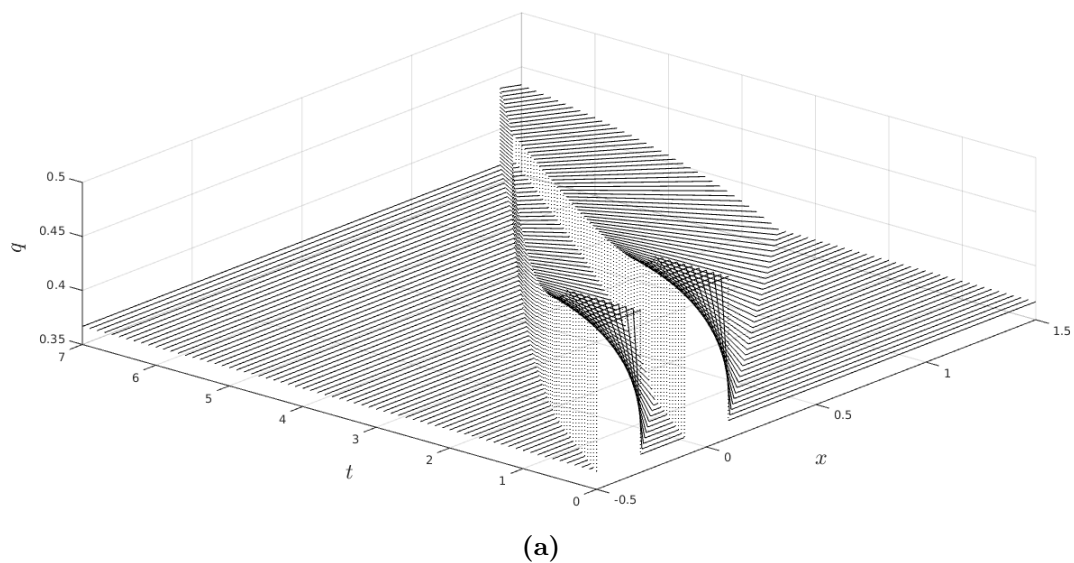
$$q(x, 0) = 0.5, x \in (-0.5, -0.3) \cup (-0.1, 0.1), \text{ inak } q = 0.36 \quad (58)$$

Rovnica (58) predstavuje situáciu, v ktorej sa nachádzajú dve lokálne zhustenia dopravy. Úlohu prevedieme na tvar Burgersovej rovnice.

$$z_t + \left(\frac{z^2}{2} \right)_x = 0,$$

$$z(x, 0) = 0, x \in (-0.5, -0.3) \cup (-0.1, 0.1), \text{ inak } z = 0.4$$

Obrázok 7a znázorňuje riešenie v diskretných časoch vodopádovým grafom. Na základe tohoto obrázka môžeme povedať, že druhý skok „napája“ svojou hmotou (vozidlami) prvý skok. Druhý skok nakoniec zanikne a situácia sa vyvíja ako v Príklade 4.2. Obrázok 7b je analógiou situácie zobrazenej na obrázku 6 so zmenenou počiatočnou podmienkou. Je na ňom vidieť zánik jednej z nehomogenít.



Obr. 7: Príklad 4.3: (a) Vodopádový graf, (b) Pohľad zhora.

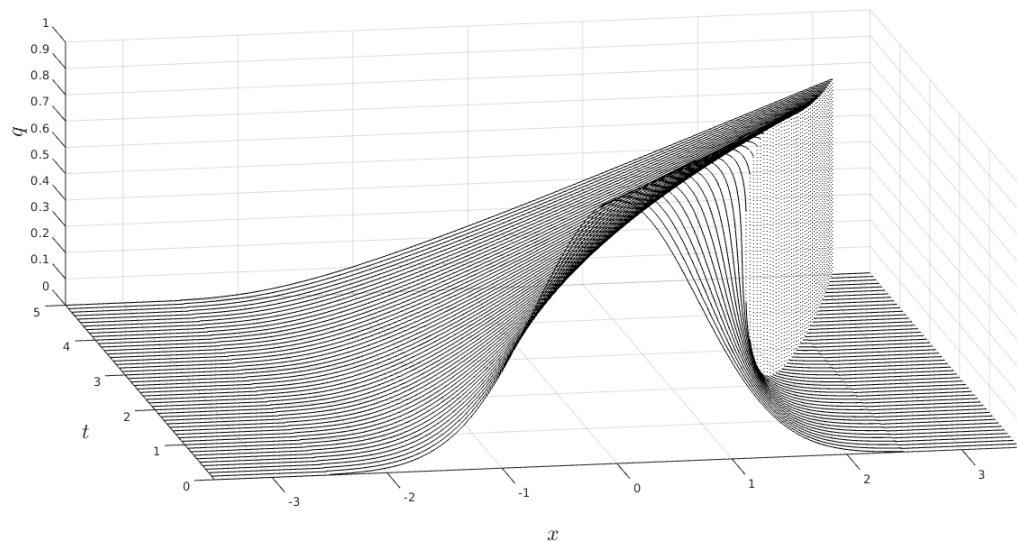
Príklad 4.4. *Burgersova rovnica pre nenormovanú Gaussovu krivku*

$$z_t + \left(\frac{z^2}{2} \right)_x = 0,$$

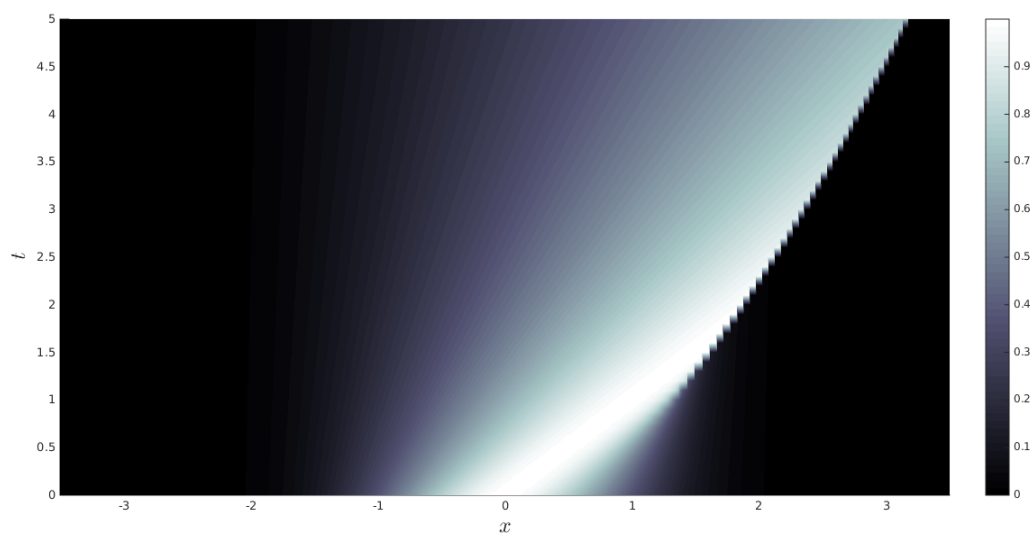
$$z(x, 0) = e^{-x^2}, x \in (-2.5, 2.5), \text{ inak } z = 0$$

V ďalšom príklade budeme sledovať vznik a vývoj nespojitosti v riešení. Táto nespojitosť v riešení vzniká aj napriek spojitaj počiatocnej podmienke. Je fakt, že tak ako je počiatocná podmienka uvedená, je nespojitá. Avšak táto nespojitosť nemá žiadny signifikantný vplyv na výsledok. Rýchlosť šírenia tejto nespojitosti v čase $t = 0$ je

daná ako $v = q(x_0)/2 \approx 10^{-3}$. Túto nespojitosť sme sa rozhodli zaviesť do počiatočnej podmienky kvôli numerickým nepresnostiam, ktoré boli zrejme spôsobené *Chebfunom*. Obrázky 8a a 8b predstavujú riešenie Príkladu 4.4. Z obrázkov môžeme odhadnúť čas ($t \approx 1$), v ktorom dôjde ku vzniku skoku v riešení. Neskôr ukážeme, ako tento čas vieme explicitne vyjadriť.



(a)



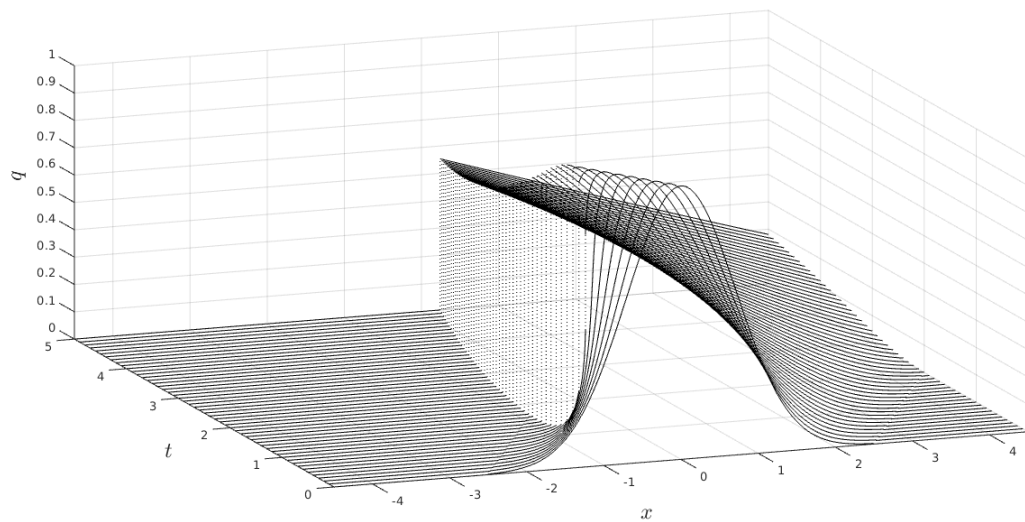
(b)

Obr. 8: Príklad 4.4: (a) Vodopádový graf, (b) Pohľad zhora.

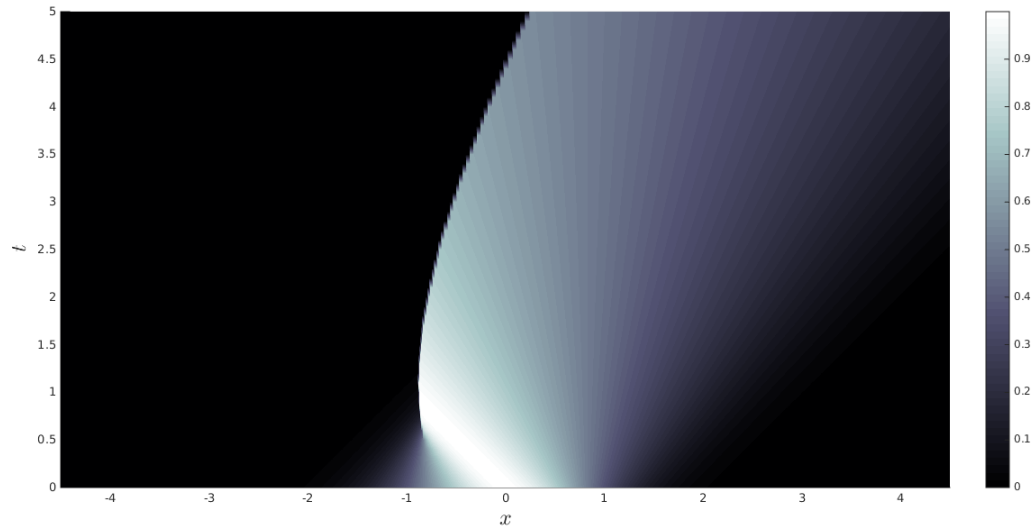
Príklad 4.5. *LWR model pre nenormovanú Gaussovu krivku*

$$q_t + [q(1 - q)]_x = 0,$$

$$q(x, 0) = e^{-x^2}, x \in (-2.5, 2.5), \text{ inak } q = 0$$



(a)



(b)

Obr. 9: Príklad 4.5: (a) Vodopádový graf, (b) Pohľad zhora.

Príklady 4.4 a 4.5 ukazujú zásadný rozdiel medzi Burgersovou rovnicou a LWR modelom. Rovnaká počiatočná podmienka vedie síce na podobné riešenia, ale skoky a zriedovacie vlny sú inak usporiadané.

Aby sme mohli hodnoverne posúdiť správnosť numerického riešenia získaného po-

mocou Pontryaginovho princípu minima, je vhodné nájsť aj jej explicitné vyjadrenie v závislosti na počiatočnej podmienke. K pravej strane rovnice (55) pripočítame εz_{xx} , kde ε je dostatočne malé a kladné. V ďalšom kroku použijeme Hopf–Coleho transformáciu

$$z = -2\varepsilon \frac{w_x}{w}. \quad (59)$$

Následne nájdeme derivácie z podľa času a priestoru,

$$\begin{aligned} z_t &= -2\varepsilon \left(\frac{w_{xt}}{w} - \frac{w_t w_x}{w^2} \right), \\ z_x &= -2\varepsilon \left(\frac{w_{xx}}{w} - \frac{w_x^2}{w^2} \right), \quad z_{xx} = -2\varepsilon \left(-\frac{3w_x w_{xx}}{w^2} + \frac{w_{xxx}}{w} + \frac{2w_x^3}{w^3} \right), \end{aligned}$$

ktoré dosadením do rovnice (55) produkujú

$$\frac{2\varepsilon[-ww_{xt} + w_x(w_t - \varepsilon w_{xx}) + \varepsilon w w_{xxx}]}{w^2} = 0.$$

Čitateľ musí byť rovný nule, t.j. $w_x(w_t - \varepsilon w_{xx}) - w(w_t - \varepsilon w_{xx})_x = 0$. Z poslednej úpravy je vidieť, že Burgersova rovnica sa zmenila na rovnicu vedenia tepla. Ešte nám zostáva určiť počiatočnú podmienku. Transformáciu môžeme ekvivalentne zapísať ako $z = -2\varepsilon(\ln w)_x$. Z transformácie (59) vyplýva, že prenášobenie funkcie $w(x, t)$ nenulovou konštantou nemá vplyv na hľadané riešenie $z(x, t)$, a teda počiatočnú podmienku môžeme zapísať v tvare $w(x, 0) = \bar{w}(x) = e^{-\int_0^x \bar{z}(s)/(2\varepsilon) ds}$. Riešenie rovnice vedenia tepla v bode (x, t) je

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t) \bar{w}(y) dy, \text{ kde } G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon t}}.$$

Po rozpísaní pre počiatočnú funkciu $\bar{z}(x)$ riešenie nadobúda tvar

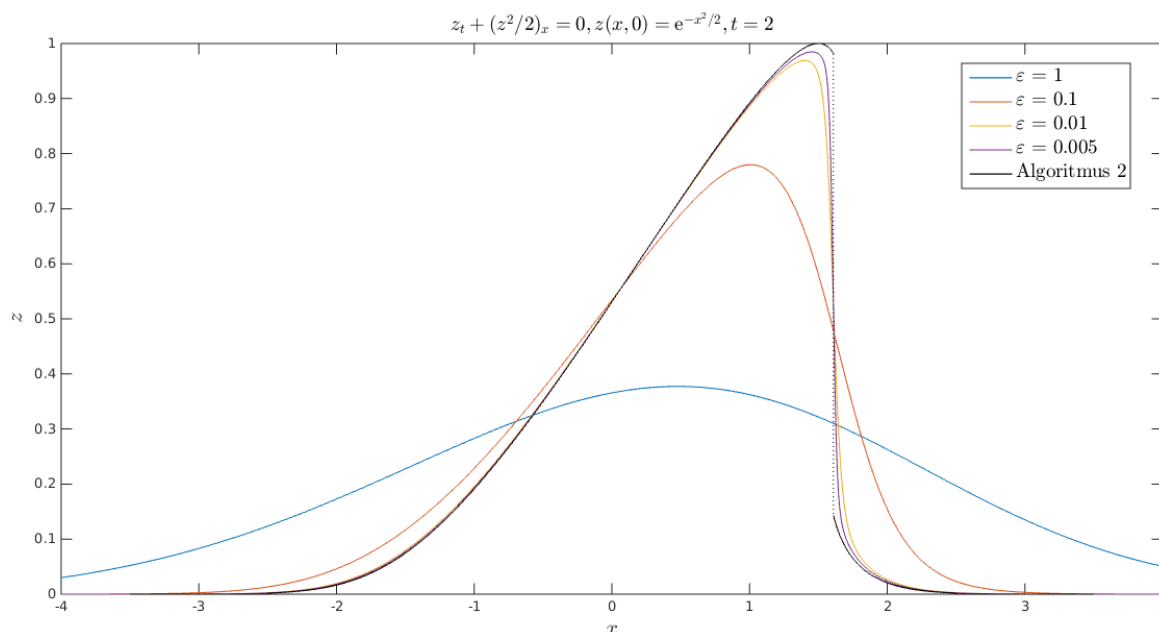
$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\varepsilon} \left[\frac{(x-y)^2}{2t} + \int_0^y \bar{z}(s) ds \right]} dy.$$

Použitím spätnej transformácie (59) a limitným prechodom $\varepsilon \rightarrow 0^+$ získame riešenie pôvodnej Burgersovej rovnice (55)–(56) v tvare

$$z(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-y}{t} e^{-\frac{1}{2\varepsilon} \left[\frac{(x-y)^2}{2t} + \int_0^y \bar{z}(s) ds \right]} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\varepsilon} \left[\frac{(x-y)^2}{2t} + \int_0^y \bar{z}(s) ds \right]} dy}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (60)$$

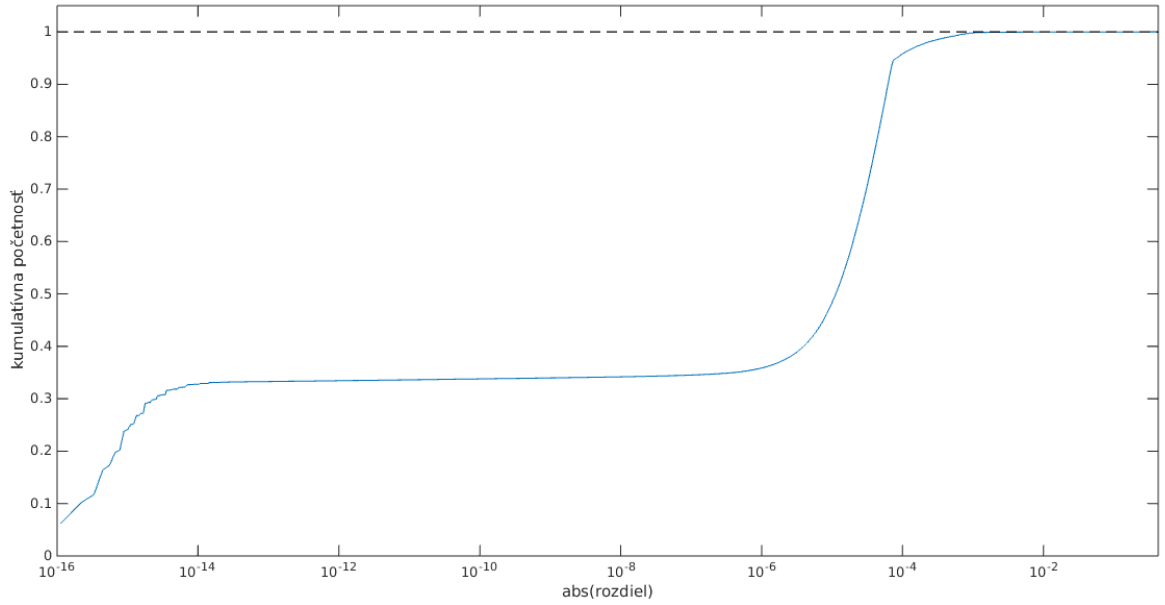
Nevýhodou takto získaného riešenia je, že je vždy spojité. A teda v okolí bodov nespojitosti môžeme očakávať horšiu konvergenciu. Obrázok 10 znázorňuje situáciu z Príkladu

4.4 v čase $t = 2$. Čiernou čiarou je znázornené riešenie získané pomocou Algoritmu 2 a zvyšné čiary predstavujú explicitné riešenia pre rôzne epsilon. Vidíme, že ak $\varepsilon \rightarrow 0^+$, riešenia sa k sebe navzájom blížia.



Obr. 10: Príklad 4.4, rôzne hodnoty parametra ε vs. Algoritmus 2, $t = 2$.

V ďalšej analýze budeme porovnávať explicitné riešenie oproti riešeniu získanému Algoritmom 2. Zvolíme $\varepsilon = 10^{-4}$, rovnomernú diskretizáciu na intervale $x = (-4, 4)$ v 1000 bodoch a na časovom intervale $t = (0.1, 5)$ v 50 bodoch. Pri skúmaní rozdielu medzi týmito dvoma riešeniami sa ukázalo, že maximálny rozdiel je až 0.426 (v okolí skoku), hoci len 2% z týchto bodov malo väčší rozdiel ako 2.25×10^{-4} . Kvôli veľkej podobnosti medzi oboma riešeniami nie je ľahké rozumne znázorniť rozdiely v týchto riešeniach. Preto sme sa rozhodli využiť empirickú kumulatívnu distribučnú funkciu ako je znázornené na obrázku 11, pričom na abscise je absolútny rozdiel medzi týmito dvoma spôsobmi riešenia. Je vidieť, že obe riešenia sú si veľmi podobné. V tomto prípade vieme porovnať riešenia len medzi sebou, lebo k presnému riešeniu sa vieme pomocou explicitného vzorca (60) iba priblížiť. Preto ďalší príklad, ktorý budeme rozoberať, bude mať známe presné riešenie.



Obr. 11: Kumulatívna početnosť absolútnej chyby medzi numerickým a presným riešením. Výsledok je získaný pre 1000 deliacich bodov v premennej x a 50 deliacich bodov premennej t , ktoré sú distribuované rovnomerne. Graf je získaný pre hodnotu $\varepsilon = 10^{-4}$.

Presné riešenie Príkladu 4.2 má tvar (pozri [3], kapitola 3.4, príklad 3):

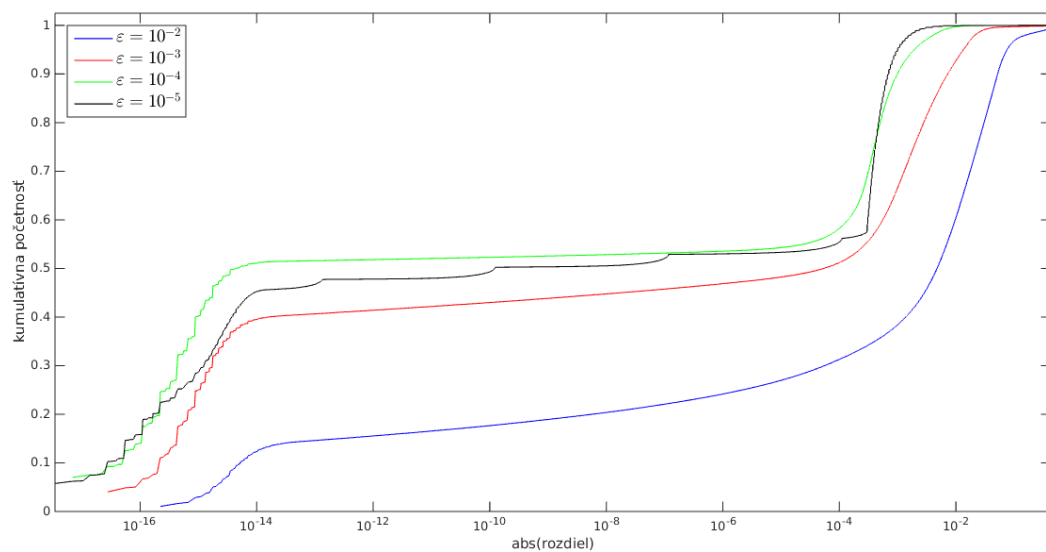
Pre $0 \leq t < 2$:

$$z(x, t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < t \\ 1, & t < x < 1 + \frac{t}{2} \\ 0, & x > 1 + \frac{t}{2} \end{cases}$$

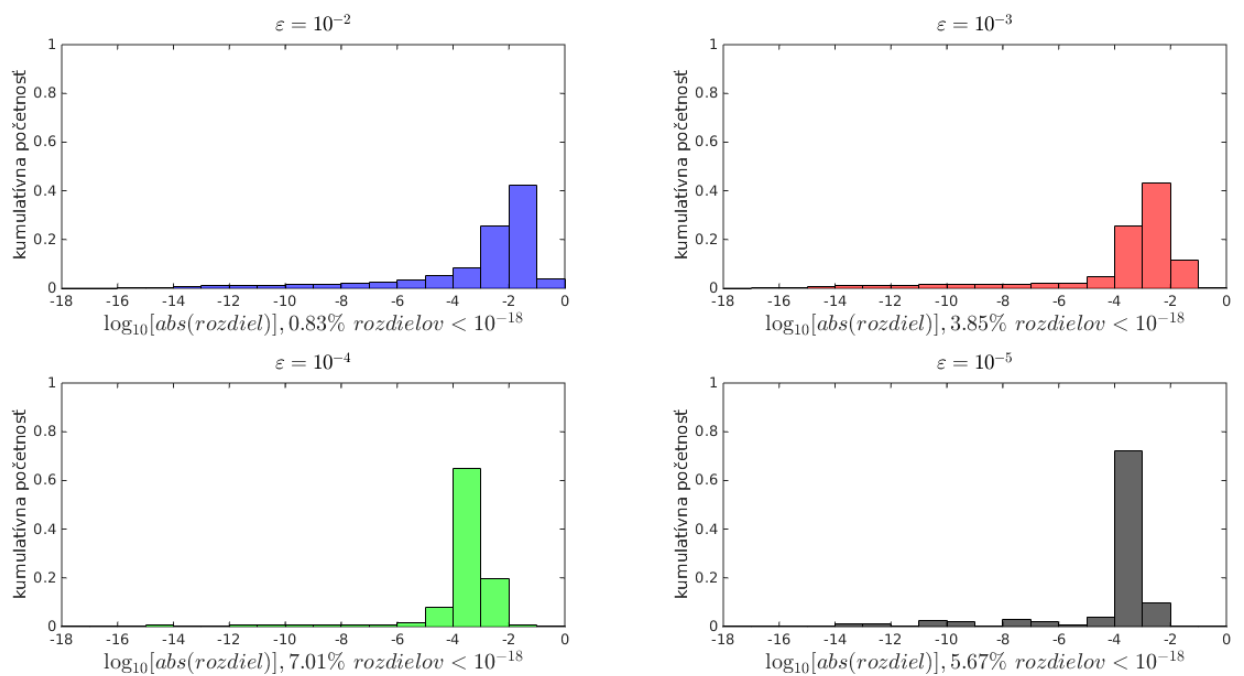
Pre $t \geq 2$:

$$z(x, t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{t}, & \sqrt{2t} \\ 0, & x > \sqrt{2t} \end{cases}$$

Teda môžeme porovnať presnosť explicitného riešenia pre rôzne hodnoty ε . Obrázok 12 podporuje naše tvrdenie, že so zmenšujúcim sa ε sa explicitný vzorec (60) spresňuje. Avšak nedá sa z neho povedať, že $\varepsilon = 10^{-5}$ je lepšia voľba ako $\varepsilon = 10^{-4}$. Z obrázka 13 zasa vidno, že je najmenej väčších numerických nepresností pre $\varepsilon = 10^{-5}$ zo všetkých uvažovaných hodnôt ε .



Obr. 12: Kumulatívna početnosť absolútnej chyby medzi numerickým a presným riešením. Výsledok je získaný pre 1000 deliacich bodov v premennej x a 50 deliacich bodov premennej t , ktoré distribuované rovnomerne. Graf je získaný pre štyri hodnoty $\varepsilon \in \{10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}\}$.



Obr. 13: Histogramy numerických odchýlok od presného riešenia.

4.1 Metóda charakteristík

Ako sme spomenuli v kapitole 1, vo všeobecnosti nemôžeme očakávať, že riešenie pozdĺž charakteristík bude konštantné. Toto tvrdenie ale neplatí pre Burgersovu rovnicu.

$$\frac{dX_k}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} f(z(X_k, t), X_k, t) = z(X_k(t), t), \quad (61)$$

$$\frac{d}{dt} z(X_k(t), t) = z_t + \frac{dX_k}{dt} z_x = z_t + z z_x = 0 \quad (62)$$

kde $X_k(t)$ predstavuje charakteristickú krivku a k označuje, o ktorú z kriviek ide. Ďalej z (62) platí, že z je podĺž krivky $X_k(t)$ konštantna. Potom na základe (61) platí, že krivka $X_k(t)$ je polpriamka. Naviac sklon týchto polpriamok závisí na $z(x_0, 0)$, keďže počiatočná podmienka nezvykne byť konštantná, dochádza k ich vzájomnému prenutiu a vzniku šokových vĺn. Na začiatok uvažujme dve rôzne charakteristiky $X_1(t) = z(x_1)t + x_1$ a $X_2(t) = z(x_2)t + x_2$, ktoré sa pretínajú v konečnom kladnom čase. Tento čas určíme ľahko

$$t = -\frac{x_1 - x_2}{z(x_1) - z(x_2)}. \quad (63)$$

Zápis (63) nápadne pripomína prevrátenú hodnotu numerickej derivácie. Túto skutočnosť môžeme využiť pri hľadaní času, v ktorom vznikne šoková vlna.

Príklad 4.6. *Vypočítajte presný čas t , v ktorom vznikne šoková vlna v Príklade 4.4.*

$$t(x) = \min_{x, t(x) > 0} -\frac{1}{[e^{-x^2}]'} = \min_{x, t(x) > 0} \frac{e^{x^2}}{2x}$$

Existuje iba jediné riešenie $x_{\min} = \sqrt{1/2}$, $t_{\min} = \sqrt{\frac{e}{2}} \approx 1.1658$. Počet šokových vĺn je závislý od počtu lokálnych maxím počiatočnej funkcie. Teda ak $z'(x, 0) \geq 0 \ \forall x$ žiadne lokálne maximum neexistuje, charakteristiky sa navzájom nepretínajú. Treba však dávať pozor, lebo za istých podmienok by šoková vlna mohla vzniknúť až potom, čo daným miestom prejde šoková vlna z nejakého blízkeho miesta.

5 Vektorové rovnice zachovania a ich numerické riešenia

5.1 Skalárna úloha: Integrálna formulácia

Uvažujme náhodnú premennú X s hustotou rozdelenia q a distribučnou funkciou Q , kde hustota q náhodnej premennej X spĺňa diferenciálnu rovnicu

$$q_t + [f(q)]_x = 0. \quad (64)$$

Naším cieľom je popis časo-priestorového vývoja daného kvantilu (napr. 10% kvantilu). Inými slovami, chceme popísať, ako sa bude vyvíjať distribučná funkcia Q v čase a priestore. Distribučná funkcia má oproti hustote pravdepodobnosti výhodu, že vieme nájsť numerickú aproximáciu derivácie v každom bode, lebo je spojitá. (Poznámka: Samozrejme sme si vedomí, že hľadať numerickú aproximáciu derivácie $\frac{dQ}{dx}$ napríklad pre funkciu $Q(x, t_{\text{fixed}}) = xH(x)$, kde $H(x)$ je Heavisidova funkcia v bode $x = 0$, nie je korektné. Možným nepresnostiam, ktoré touto aproximáciou vzniknú, sa venujeme v podkapitole 5.2.2.)

Na základe motivačnej úvahy o náhodnej premennej budeme predpokladať, že $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x, t) = 0$ a $\int_{-\infty}^{\infty} q(x, t) dx < \infty$. Nebudeme sa obmedzovať na nezáporné q a ani požadovať platnosť rovnosti $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x, t) = 1$, čo sú typické vlastnosti náhodnej premennej. Hoci v tejto práci sa nevenujeme problémom so záporným q , odvodená numerická schéma je platná aj pre záporné q . Definujme

$$Q(x, t) = \int_{-\infty}^x q(s, t) ds. \quad (65)$$

Integrovaním rovnice (64) a z definície $Q(x, t)$ získame sústavu

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(x, t) = -f(q(x, t)) + f(0), \quad (66)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(x, t) = q(x, t), \quad (67)$$

ktorá separuje priestorovú a časovú deriváciu. Ďalej zavedieme značenie $Q(x_i, t^n) = Q_i^n$. Časovú deriváciu aproximujeme doprednou diferenčnou schémou $(Q_i^{n+1} - Q_i^n)/\Delta t$ presnosti $O(\Delta t)$, kde $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. V závislosti na znamienku derivácie funkcie toku $f(q)$ budeme rozlišovať „upwind“ a „downstream“ priestorovú diskretizáciu [6].

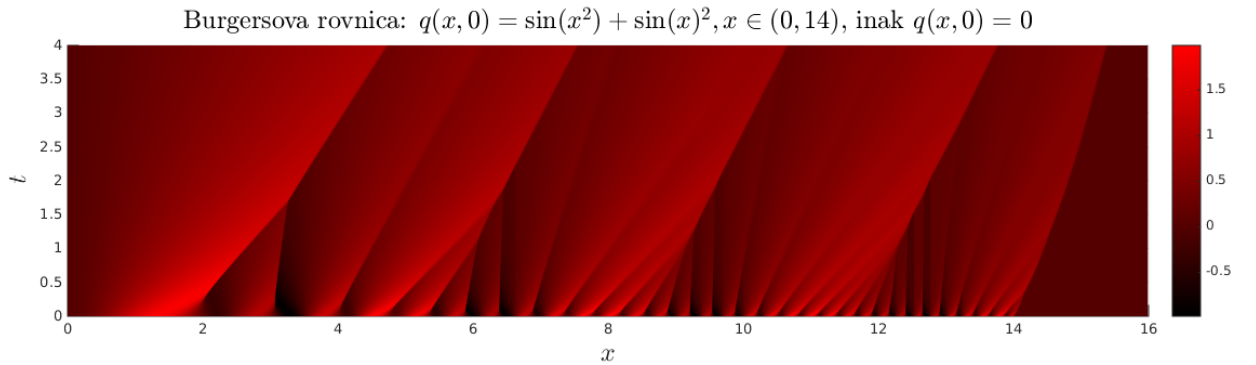
Ak $f' \left(\frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) < 0$, potom

$$\begin{aligned} \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} &= f(0) - f \left(\frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\Delta x} \right), \\ Q_i^{n+1} &= Q_i^n + \Delta t \left[f(0) - f \left(\frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (68)$$

Ak $f' \left(\frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) \geq 0$, potom

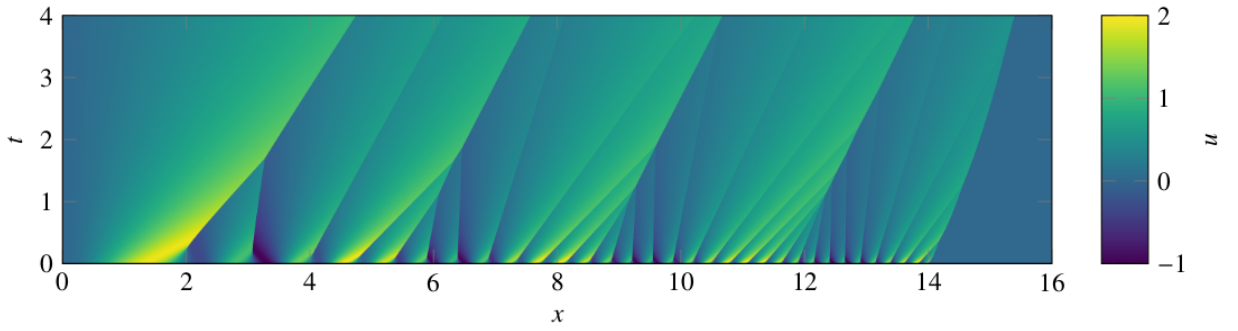
$$\begin{aligned} \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} &= f(0) - f \left(\frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\Delta x} \right), \\ Q_i^{n+1} &= Q_i^n + \Delta t \left[f(0) - f \left(\frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\Delta x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (69)$$

Uvedenú diskretizačnú schému sme aplikovali na riešenie úlohy 4 z práce [5]. Grafický výsledok je uvedený na obrázku 14.



Obr. 14: Časopriestorový vývoj riešenia príkladu 4 z [5].

Pre porovnanie na obrázku 15 uvádzame reprodukciu výstupu z publikácie [5]. Poznamenávame, že diskretizačná schéma (68) a (69), navrhnutá v tejto diplomovej práci, je časovo efektívnejšia. Numerické riešenie nezabralo viac než minútu, pričom riešenie pomocou Algoritmu 2 v [5] vyžaduje niekoľko hodín.



Obr. 15: Riešenie 4 z [5]. V publikácii [5] je použité iné značenie, $u \equiv q$.

```

1 % Burgersova rovnica:
2 % Pociatocna podmienka: q(x,0) = sin(x^2) + sin(x)^2, x \in (0,14), inak q(x,0) = 0
3 N=1501; % pocet deliacich bodov premennej x
4 xmin=0; % interval, na ktorom ratame priklad (xmin,xmax)
5 xmax=16;
6 dx=(xmax-xmin)/(N-1); % dlzka priestoroveho kroku
7 tmax=4; % cas, po ktory ratame priklad
8 dt=10^-3; % dlzka casoveho kroku
9 x=linspace(xmin,xmax,N);
10 g=chebfun({'sin(x.^2) + sin(x).^2'},0),[xmin,14,xmax],'splitting','on'); % pociatocna
    podmienka
11 gint=cumsum(g); % integral z pociatocnej podmienky
12 Q0=gint(x)-gint(xmin); % zodpoveda transformacii Q0(x) = \int_{-\infty}^x q(s,0)ds
13 % start cas poloha
14 Q=[Q0;zeros(tmax/dt,length(x))];
15 for n=2:(tmax/dt+1), % n - cas
16     for i=2:length(x)-1, % i - priestor
17         if (Q(n-1,i+1)-Q(n-1,i-1))<0, % podla znamienka derivacie funkcie toku
18             % sa rozhodneme, aku diferencnu schemu
19             % pouzijeme - dopredna / spatna
20             Q(n,i)=Q(n-1,i)-dt/(2*dx^2)*(Q(n-1,i+1) - Q(n-1,i))^2;
21         else Q(n,i)=Q(n-1,i)-dt/(2*dx^2)*(Q(n-1,i) - Q(n-1,i-1))^2;
22         end
23     end
24     Q(n,1)=Q0(1); % okrajove podmienky
25     Q(n,end)=Q0(end);
26 end
27 q=(Q(:,2:end)-Q(:,1:end-1))/dx; %riesenie

```

V popise priloženého .m kódu uvádzame, akú diferenčnú schému použijeme podľa znamienka derivácie funkcie toku. Keďže ide o Burgersovu rovnicu, funkcia toku je $f(q) = q^2$ a $f'(q) = 2q = 2Q_x$. Pre aproximáciu derivácie Q_x sme použili centrálnu konečno-diferenčnú aproximáciu $[Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n]/(2\Delta x)$, ktorá má presnosť rádu $O(\Delta x^2)$.

5.2 Vektorová úloha: Integrálna formulácia

Integrálnu transformáciu uvedenú v podkapitole 5.1 možno zovšeobecniť na sústavy hyperbolických diferenciálnych rovníc. Zavedieme pomocné funkcie:

$$Q^1(x, t) = \int_{-\infty}^x q^1(s, t) ds, \quad Q^2(x, t) = \int_{-\infty}^x q^2(s, t) ds.$$

Integrovaním rovníc (49) a (50) a využitím definícií Q^1 a Q^2 dostávame nasledujúci systém rovníc pre Q^1, Q^2, q^1 a q^2 :

$$\frac{\partial Q^1}{\partial t} = f_1(0, 0) - f_1(q^1, q^2) - k^{12}Q^1 + k^{21}Q^2, \quad (70)$$

$$\frac{\partial Q^2}{\partial t} = f_2(0, 0) - f_2(q^1, q^2) + k^{12}Q^1 - k^{21}Q^2, \quad (71)$$

$$\frac{\partial Q^1}{\partial x} = q^1, \quad (72)$$

$$\frac{\partial Q^2}{\partial x} = q^2. \quad (73)$$

V nasledujúcom kroku ukážeme, že rovnice (70)–(73) zachovávajú celkové množstvo hmoty. V kontexte spojitého popisu integrujúcej dopravy v dvoch jazdných pruhoch [13] to znamená, že celkový počet vozidiel je konštantný. Na začiatku tejto kapitoly sme v predpokladoch požadovali, aby $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x, t) = 0$ a teda

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(q^1, q^2) = f(0, 0),$$

preto môžeme písať

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} Q^1 = \lim_{x \rightarrow \infty} f_1(0, 0) - f_1(q^1, q^2) - k^{12}Q^1 + k^{21}Q^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} -k^{12}Q^1 + k^{21}Q^2, \quad (74)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} Q^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} f_2(0, 0) - f_2(q^1, q^2) + k^{12}Q^1 - k^{21}Q^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} +k^{12}Q^1 - k^{21}Q^2. \quad (75)$$

Sčítaním oboch rovníc máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} (Q^1 + Q^2) = 0. \quad (76)$$

Vidíme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x q^1(s, t) + q^2(s, t) ds = \text{konšt.}$, a teda celková hmota v oboch jazdných pruhoch sa zachováva. Zavedieme notáciu $\lim_{x \rightarrow \infty} Q^j = \bar{Q}^j(t)$, $j = 1, 2$, ktorú využijeme v rovniciach (74) a (75).

$$\bar{Q}^{1'} = -k^{12}\bar{Q}^1 + k^{21}\bar{Q}^2,$$

$$\bar{Q}^{2'} = k^{12}\bar{Q}^1 - k^{21}\bar{Q}^2.$$

Tým sme získali sústavu lineárnych obyčajných diferenciálnych rovníc v časovej premennej, ktorej riešenie možno vyjadriť v tvare:

$$\bar{Q}^1(t) = \frac{1}{k^{12} + k^{21}} \left[k^{21}[\bar{Q}^1(0) + \bar{Q}^2(0)] + [k^{12}\bar{Q}^1(0) - k^{21}\bar{Q}^2(0)]e^{-(k^{12}+k^{21})t} \right], \quad (77)$$

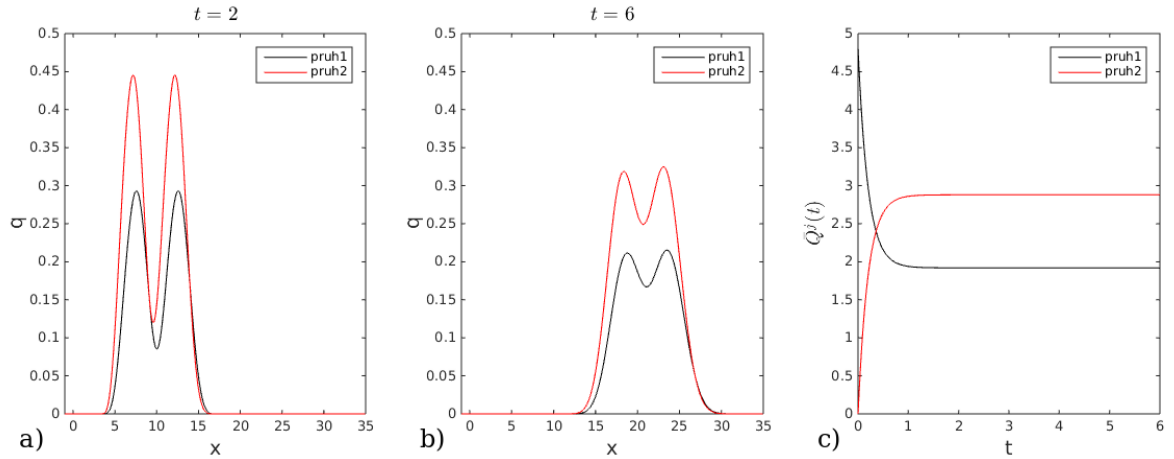
$$\bar{Q}^2(t) = \frac{1}{k^{12} + k^{21}} \left[k^{12}[\bar{Q}^1(0) + \bar{Q}^2(0)] - [k^{12}\bar{Q}^1(0) - k^{21}\bar{Q}^2(0)]e^{-(k^{12}+k^{21})t} \right]. \quad (78)$$

Z rovníc (77) a (78) plynie, že ak $k^{12}\bar{Q}^1(0) = k^{21}\bar{Q}^2(0)$, tak $\bar{Q}^1$ a $\bar{Q}^2$ sú konštanty. Navyše ak k^{12} a k^{21} nie sú súčasne nulové (predpoklad nezápornosti k^{12} a k^{21} je diskutovaný v podkapitole 3.1), tak riešenie sústavy konverguje pre $t \rightarrow \infty$ k stacionárnemu riešeniu.

$$\bar{Q}^{1*} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{Q}^1(t) = \frac{k^{21}}{k^{12} + k^{21}} [\bar{Q}^1(0) + \bar{Q}^2(0)], \quad (79)$$

$$\bar{Q}^{2*} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{Q}^2(t) = \frac{k^{12}}{k^{12} + k^{21}} [\bar{Q}^1(0) + \bar{Q}^2(0)]. \quad (80)$$

Tieto konštanty nás informujú o celkovej doprave (v diskkrétnej situácii by išlo o počet vozidiel) na okrajoch ($x \rightarrow \infty$) jednotlivých jazdných pruhov v čase $t \rightarrow \infty$. Časovú dynamiku funkcií $\bar{Q}^j(t)$, $j = 1, 2$ ilustruje obrázok 16c).



Obr. 16: Lineárny systém dvoch rovníc s počiatočnou podmienkou $q^1(x, 0) = 0.8, x \in (0, 3) \cup (5, 8)$, inak 0 a $q^2(x, 0) = 0$. $\bar{u}_1 = 4$, $\bar{u}_2 = 2$, $k_{12} = 3$ a $k_{21} = 2$. Rozdiel medzi q^1 a q^2 v neskorších časoch (obrázky a) a b)) je spojený s prenosom hmoty medzi dvoma jazdnými pruhmi. Pre $t \gtrsim 1$ sa už efektívne dosahuje limitný stav $\bar{Q}^{j*}$ daný (79) a (80). V prípade bez interakcie jazdných pruhov ($k_{12} = k_{21} = 0$) sa systém redukuje na dve nezávislé advekčné rovnice s propagáciou hustotných funkcií q^1 a q^2 bez zmeny tvaru.

Ďalej uvažujme, že funkcie toku pre oba pruhy sú rovnaké a závisia iba od jednej premennej, konkrétne $f_1 = f(q^1)$ a $f_2 = f(q^2)$, ďalej nech $k^{12} = k^{21} \equiv k > 0$.

$$q_t^1 + f(q^1)_x + k(q^1 - q^2) = 0, \quad (81)$$

$$q_t^2 + f(q^2)_x - k(q^1 - q^2) = 0. \quad (82)$$

Potom funkcie, ktoré sú riešeniami rovníc (81) a (82) sa časom približujú k sebe. Toto tvrdenie je intuitívne jasné. Obe funkcie q^1, q^2 sa riadia rovnakou funkciou $f(q)$ toku a naviac, na každom úseku (x_1, x_2) na ktorom $q^1(x, t) \neq q^2(x, t)$ dochádza k takému toku vozidiel medzi pruhmi, ktorý znižuje rozdiel $|q^1 - q^2|$, niečo ako *mean reversion process*. Inak povedané, pre čas $t \rightarrow \infty$ riešenia k sebe konvergujú bez ohľadu na počiatočnú podmienku.

5.2.1 Numerická schéma pre dvojrozmerný systém

Numerickú schému na výpočet riešenia nášho 2D systému hyperbolických PDR odvodíme analogicky ako v prípade jednorozmerného problému, pričom sa obmedzíme iba na také funkcie toku, ktoré závisia iba od jednej premennej. Zavedieme notáciu $Q^j(x_i, t^n) = Q_i^{j,n}$, kde $j = 1, 2$ zodpovedá jazdnému pruhu. Budeme rozlišovať upwind a downstream prípady na základe znamienka derivácie $f'_j(Q_x^j)$. Numerická schéma pre j -ty jazdný pruh, kde $j = 1, 2$, má nasledovný tvar:

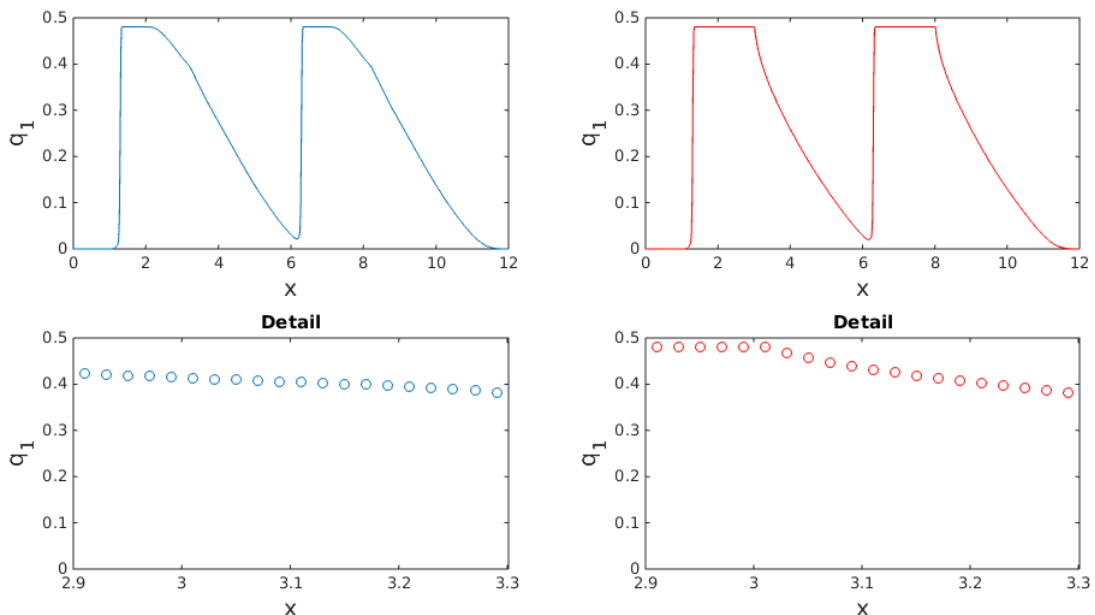
$$\begin{aligned} \text{Ak } f'_j\left(\frac{Q_{i+1}^{j,n} - Q_{i-1}^{j,n}}{2\Delta x}\right) < 0, \text{ potom} \\ \frac{Q_i^{j,n+1} - Q_i^{j,n}}{\Delta t} &= f_j(0) - f_j\left(\frac{Q_{i+1}^{j,n} - Q_i^{j,n}}{\Delta x}\right) + (-1)^j k^{12} Q_i^{1,n} - (-1)^j k^{21} Q_i^{2,n}, \\ Q_i^{j,n+1} &= Q_i^{j,n} + \Delta t \left[f_j(0) - f_j\left(\frac{Q_{i+1}^{j,n} - Q_i^{j,n}}{\Delta x}\right) - (-1)^j k^{12} Q_i^{1,n} + (-1)^j k^{21} Q_i^{2,n} \right]. \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \text{Ak } f'_j\left(\frac{Q_{i+1}^{j,n} - Q_{i-1}^{j,n}}{2\Delta x}\right) \geq 0, \text{ potom} \\ \frac{Q_i^{j,n+1} - Q_i^{j,n}}{\Delta t} &= f_j(0) - f_j\left(\frac{Q_i^{j,n} - Q_{i-1}^{j,n}}{\Delta x}\right) + (-1)^j k^{12} Q_i^{1,n} - (-1)^j k^{21} Q_i^{2,n}, \\ Q_i^{j,n+1} &= Q_i^{j,n} + \Delta t \left[f_j(0) - f_j\left(\frac{Q_i^{j,n} - Q_{i-1}^{j,n}}{\Delta x}\right) - (-1)^j k^{12} Q_i^{1,n} + (-1)^j k^{21} Q_i^{2,n} \right]. \end{aligned} \quad (84)$$

5.2.2 Diskusia nespojitosti $q(x, t)$ a $Q_x(x, t)$ v priestorovej premennej x

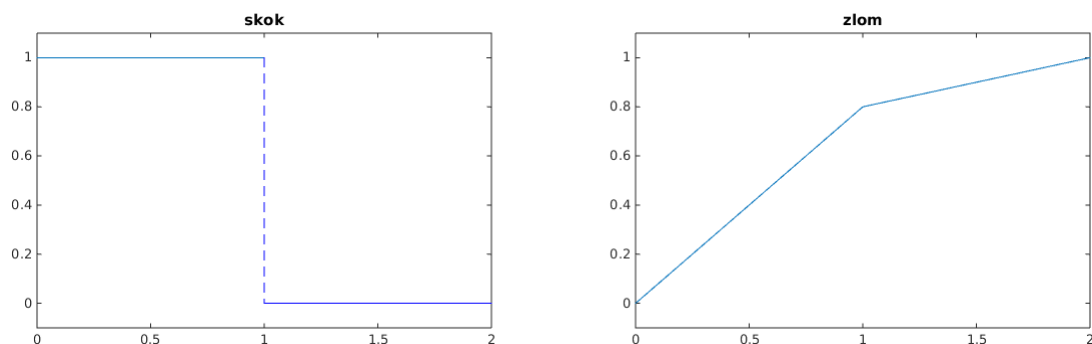
Špecifikom tejto numerickej schémy je závislosť riešenia na voľbe diskretizačných bodov v priestorovej premennej, viď obrázok 17. Na základe numerických riešení (rôzne

diskretizačné body, rôzne počiatkové funkcie, rôzne funkcie toku) sme vypožorovali, že v niektorých prípadoch sa nepreukázala závislosť na voľbe diskretizačných bodov. Ďalej sa budeme zaoberať dôvodom, prečo je to tak.



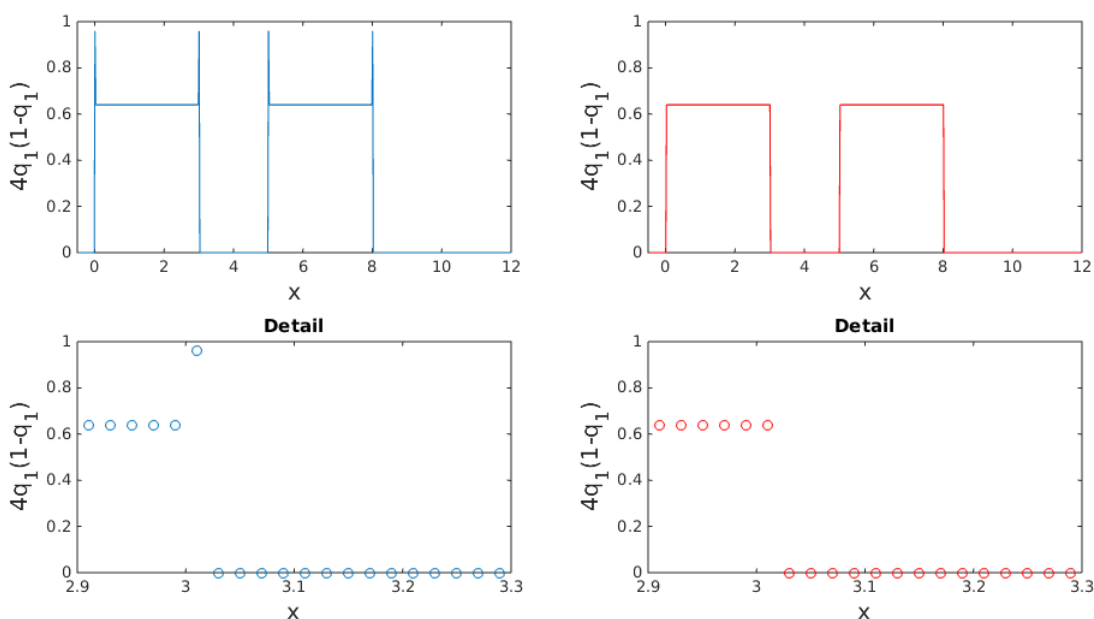
Obr. 17: Nelineárny LWR systém dvoch rovníc s počiatkovou podmienkou $q^1(x, 0) = 0.8, x \in (0, 3) \cup (5, 8)$, inak 0 a $q^2(x, 0) = 0$. $\bar{u}_1 = 4$, $\bar{u}_2 = 2$, $k_{12} = k_{21} = 1$. Riešenie je zobrazené pre q^1 v čase $t = 0.8$. Delenie v priestorovej osi v oboch prípadoch je $dx = 0.02$, rozdiel je iba v posunutí delenia o $dx/2$.

Prechodom od funkcie q k funkcii Q v (65) sme síce odstránili skoky–miesta, kde neexistuje priestorová derivácia funkcie $q(x, t)$, ale stále zostali „zlomy“–body nespojitosti v priestorovej derivácii funkcie $Q(x, t)$, pozri obrázok 18. Naša numerická schéma napriek tomu aproximuje túto deriváciu konečnou hodnotou. Dôvodom, ktorý vedie na rozdielne riešenia, je práve numerická aproximácia derivácie v oblasti „zlomu“. Uvažujme dvojrozmerný systém z obrázka 17. V čase $t = 0$ chceme aproximovať priestorovú deriváciu funkcie Q^1 v okolí bodu $x = 3$. V bode $x = 2.98$ bude $Q_x^1(x, 0) = 0.8$ a v bode $x = 3.02$ bude $Q_x^1(x, 0) = 0$. Na intervale $(2.98, 3.02)$ bude numerická aproximácia derivácie niekde medzi 0 a 0.8 v závislosti na delení priestorovej premennej. Funkcia toku je kvadratická, konkrétne $f(q^1) = \bar{u}_1 q^1(1 - q^1) = 4q^1(1 - q^1)$, maximum teda nadobúda pre $q^1 = 0.5$ a to $f(q^1) = 1$. Aproximácia pre q^1 je medzi 0 a 0.8, a teda aproximácia pre $f(q^1)$ je medzi 0 a 1, navyše funkcia toku na intervale $(0, 0.8)$ nie je prostá. V



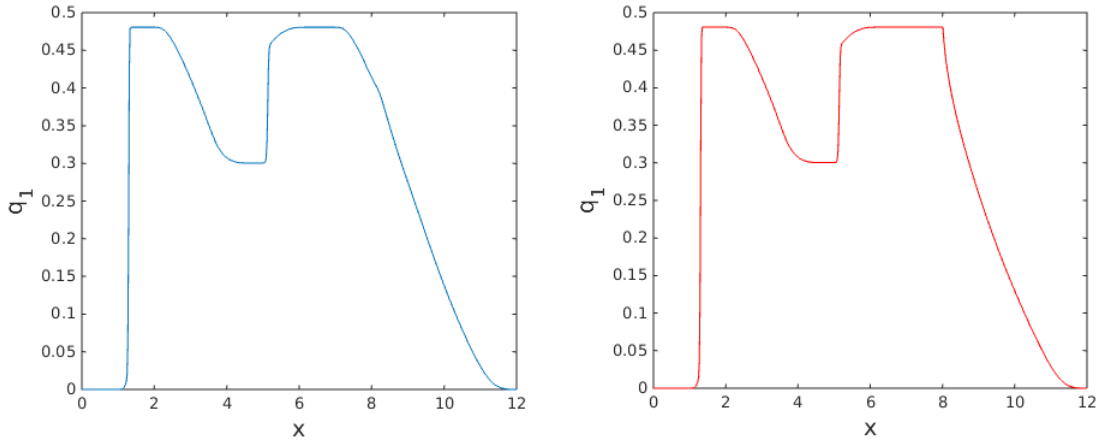
Obr. 18: Grafické znázornenie skoku a zlomu.

závislosti na voľbe diskretizačných bodov získame rôzne funkcie toku, pozri obrázok 19 vpravo a vľavo. V oboch prípadoch sú q a Q zhodné s výnimkou relatívne úzkej oblasti



Obr. 19: Grafické znázornenie priebehu funkcií toku. Obrázok vľavo, numerická aproximácia derivácie $Q_x^1(x, 0) = 0.4$ v okolí $x = 3$, obrázok vpravo $Q_x^1(x, 0) = 0$. Roziely v okolí nuly nie sú podstatné, lebo smer propagácie zmien je zľava doprava; $\bar{u}_1 > 0, \bar{u}_2 > 0$.

v okolí bodov nespojitosti počiatkovej podmienky. Tento rozdiel je dôsledok toho, že funkcia toku nie je prostá na intervale veľkosti skoku, teda $(0, 0.8)$. Ak je počiatková podmienka taká, že funkcia toku v oblasti skoku je prostá, riešenie už nezávisí na pozícii diskretizačných bodov (viď obrázok 20). Podobné úvahy platia aj pre lineárny model, v ktorom je funkcia toku prostá. Na obrázku 20 je vidieť, že tvar prvého „píku“ je



Obr. 20: Rovnaká situácia ako na obrázku 17, až na počiatočnú podmienku funkcie q^1 . $q^1(x, 0) = 0.8, x \in (0, 3) \cup (5, 8), q^1(x, 0) = 0.5, x \in (3, 5)$ inak 0.

efektívne rovnaký v oboch prípadoch, zatiaľ čo druhý „pík“ vykazuje rozdiely. Efektívnu zhodu v riešeníach vieme dosiahnuť takým výberom diskretizačných bodov, pre ktoré body nespojitosti $Q_x^j, j = 1, 2$ spadajú do stredov deliacich intervalov. Iný spôsob spočíva v zhladení funkcie v každom časovom reze, v ktorom odhadnutá funkcia toku závisí na voľbe deliacich bodov, napríklad pomocou moving average nízkeho stupňa.

5.2.3 Pozorovania z numerických riešení

Numerické výpočty, ktoré sme vykonali pomocou aplikácie `APLIKACIA.m` (Príloha A) naznačujú, že ak $t \rightarrow \infty$, riešenia sú navzájom posunuté a pre násobené konštantou. Pre dvojrozmerné systémy (51)–(52) a (53)–(54):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k^{12} q^1(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} k^{21} q^2(x + \delta, t). \quad (85)$$

V tejto časti odhadneme vzťah pre priestorové posunutie δ pre oba modely. Uvažujme rovnice týchto modelov pre $t \rightarrow \infty$ a využijeme vzťah (85), horný index nebudeme používať, keďže hľadané q^1 a q^2 sú na sebe priamo závislé.

$$q(x, t)_t + f[q(x, t)]_x + k^{12} q(x, t) - k^{21} q(x - \delta, t) = 0, \quad (86)$$

$$q(x, t)_t + a f[q(x, t)]_x - k^{12} q(x + \delta, t) + k^{21} q(x, t) = 0, \quad (87)$$

kde $a = \bar{u}_2/\bar{u}_1$. Ak δ nie je príliš veľké, vieme ho odhadnúť využitím Taylorovho radu $q(x \pm \delta, t) = q(x, t) \pm \delta q_x(x, t) + o(\delta)$. Tento vzťah využijeme v (86) a (87):

$$f(q)_x + \delta k^{12} q_x - k^{12} o(\delta) = a f(q)_x - \delta k^{21} q_x - k^{21} o(\delta). \quad (88)$$

Odtiaľ pre lineárny model (51) a (52) platí

$$\left[(1 - a) \bar{u}_1 + \delta (k^{12} + k^{21}) \right] q_x = (k^{12} - k^{21}) o(\delta),$$

a následne odhad pre δ v lineárnom modeli má tvar

$$\delta = \frac{(a - 1) \bar{u}_1}{k^{12} + k^{21}}. \quad (89)$$

Pre nelineárny LWR model (53) a (54) platí

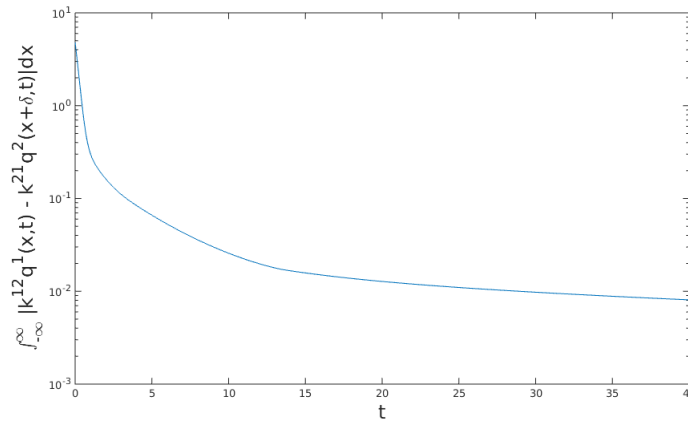
$$\left[(1 - 2q)(1 - a) \bar{u}_1 + \delta (k^{12} + k^{21}) \right] q_x = (k^{12} - k^{21}) o(\delta),$$

a následne odhad pre δ v nelineárnom modeli má tvar

$$\delta = \frac{(1 - 2q)(a - 1) \bar{u}_1}{k^{12} + k^{21}}. \quad (90)$$

V lineárnom modeli majú riešenia q^1, q^2 pre $t \rightarrow \infty$ rovnaký tvar, pričom sú posunuté o hodnotu δ danú (89). Na obrázku 21 je znázornený pokles hodnoty integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k^{12} q^1(x, t) - k^{21} q^2(x + \delta, t)| dx \text{ pre } t \in (0, 40).$$



Obr. 21: Integrál absolútnej hodnoty rozdielu. Lineárny systém s počiatočnou podmienkou $q^1(x, 0) = 0.8, x \in (0, 3) \cup (5, 8)$, inak $q^1(x, 0) = 0$ a $q^2 = 0$. $\bar{u}_1 = 4, \bar{u}_2 = 2, k^{12} = 1, k^{21} = 3$.

Za predpokladu platnosti vzťahu (85) môžeme tvrdiť, že ak jedna z rýchlostí $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ je nulová a $k^{12} > 0, k^{21} > 0$, hmota sa stále vizuálne hýbe v oboch jazdných pruhoch. To aj napriek tomu, že vozidlá v jednom z nich stoja. Je to preto, lebo vozidlo sa preradí z jazdného pruhu, ktorý sa hýbe, do stojaceho a po čase sa opäť preradí do hýbajúceho sa. Týmto spôsobom sa pohybuje celý jazdný pruh.

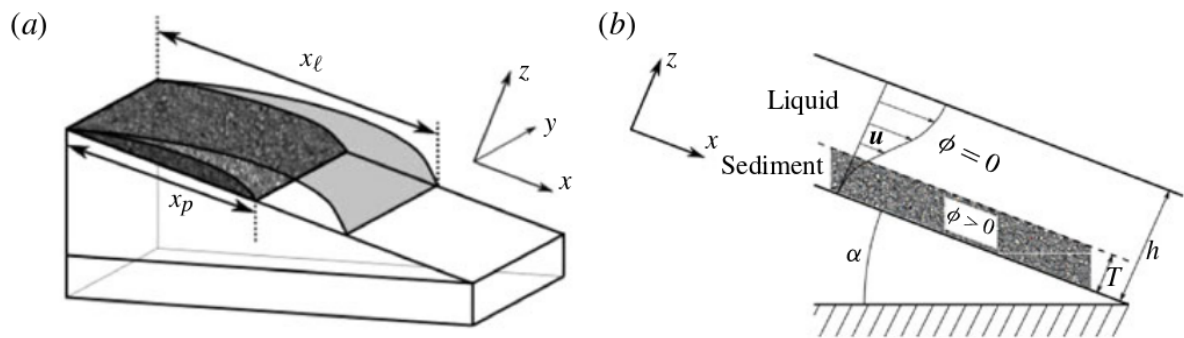
5.3 Ďalšie aplikácie

V článku [9] autori riešia problém usádzania častíc vplyvom gravitácie pri prúde suspenzie po naklonenej rovine. Pri tomto toku dochádza k usádzaniu častíc na pevný povrch, pričom sa vytvárajú dva fronty - rýchlejší kvapalinový a pomalší časticový. Autori sa v práci zaoberajú vplyvom náklonu spodnej hranice a počiatočnej koncentrácie častíc. Uvažujú tok tenkej vrstvy suspenzie pozostávajúcej z viskóznej kvapaliny a drobných sférických častíc. Predpokladajú, že prúdenie suspenzie je symetrické podľa osi y , viď obrázok 22. Dolné indexy p a l sa vzťahujú k premenným a konštantám, ktoré popisujú častice kvapaliny. Nutnou podmienkou je, aby suspendované sférické častice mali vyššiu hustotu ako kvapalina $\rho_p > \rho_l$; v opačnom prípade by nedochádzalo k usadzovaniu. Funkcia $0 \leq \Phi(x, z, t) < 1$ označuje pomernú časť objemu zastúpenú časticami. V tejto práci autori predpokladali, že maximálna prípustná hodnota pre Φ je $\Phi_m = 0.61$. V skutočnosti viskozita μ takejto suspenzie je funkciou Φ , teda $\mu(\Phi)$. V článku bol systematicky odvodený model, ktorý vychádza zo Stokesových rovníc pre suspenzie a zo zákona zachovania objemu častíc. V práci [10] je rozvinutá teória asymptotickej redukcie riadiacich PDR pre prípad tenkých vrstiev kvapaliny (tzv. lubrikačná aproximácia). Táto aproximácia je použitá aj v modeli [9]. Kľúčovú úlohu zohráva škálovanie transportných členov, vďaka ktorým tok častíc v z -ovom smere v najvyššom ráde zanikne. Ďalej uvádzame redukovaný model - sústavu zviazaných parciálnych diferenciálnych rovníc pre premenné $h(x, t)$ a $n(x, t)$:

$$h_t + \left(\frac{h^3}{3} \right)_x = 0, \quad (91)$$

$$n_t + \left[\sqrt{\frac{2}{9B}} (nh)^{3/2} \right]_x = 0, \quad (92)$$

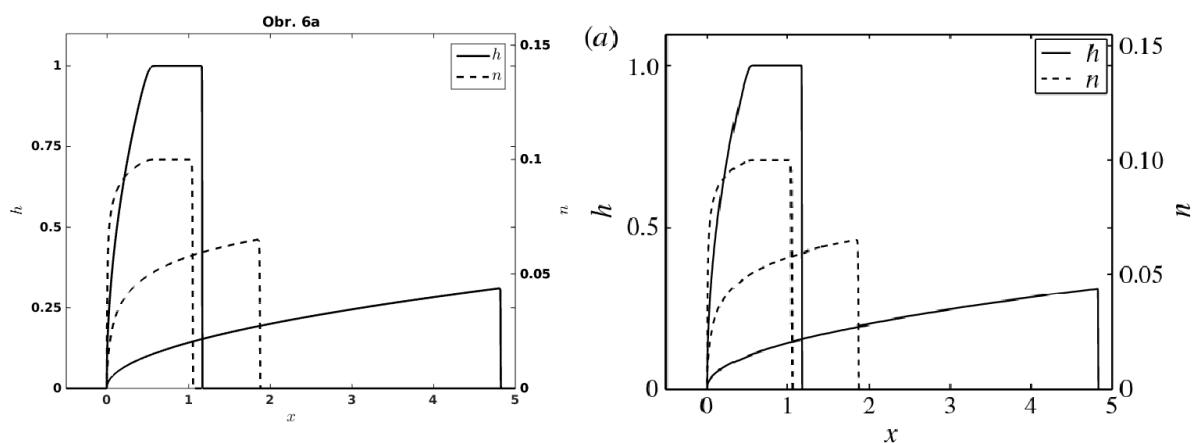
kde $h(x, t)$ je celková výška suspenzie a $n(x, t)$ je celkové množstvo častíc. Bezrozmerný parameter $B = \frac{2(\rho_p - \rho_l) \cot(\alpha)}{9\rho_l K_c}$ meria usádzanie častíc vplyvom gravitácie v z -ovom smere



Obr. 22: Obrázok je reprodukciou z [9]. a) znázorňuje tok suspenzie a vrstvu sedimentu oddeľujúcu fronty, b) znázorňuje prierez x_l - dĺžka frontu kvapalinovej časti, x_p - dĺžka frontu časticovej časti, u - objemovo priemerná rýchlosť, h - celková hrúbka suspenzie, T - výška sedimentu, Φ - percentuálne zastúpenie častíc v danom mieste, α - uhol náklonu spodnej hranice.

relatívne k tangenciálnemu pohybu a K_c je empiricky získaná konštanta. Počiatočné a okrajové podmienky sú špecifikované v záhlaví obrázka 23.

Numerickú schému uvedenú v podkapitole 5.2 sme implementovali na riešenie systému rovníc (91) a (92), viď Príloha B. Numerické výsledky sú uvedené na obrázku 23 vľavo. Pre porovnanie uvádzame na obrázku 23 vpravo reprodukciu numerických výsledkov z práce [9].



Obr. 23: Porovnanie riešenia sústavy rovníc (91) a (92), obrázok vľavo - numerická metóda odvodená v tejto kapitole, obrázok vpravo - prevzatý z [9]. Počiatočná podmienka: $h(x, 0) = 1, x \in (0, 1)$ inak $h(x, 0) = 0$, $n(x, 0) = f_0 h(x, 0)$, kde $f_0 = 0.1$. $B = 2.307$ a $\alpha = 20^\circ$. Riešenie je zobrazené v časoch $t = 0.5$ a $t = 50$.

Záver

V prvej kapitole tejto práce sme uviedli matematickú reprezentáciu zákona zachovania pomocou hyperbolických parciálnych diferenciálnych rovníc. Uviedli sme niekoľko príkladov hyperbolických rovníc a načrtli spôsob ich riešenia. Našou motiváciou pre ich štúdium bola uplatniteľnosť v teórii dopravy.

V druhej kapitole sme sa zamerali na riešenie jednorozmerných hyperbolických úloh pomocou preformulovania na úlohu optimálneho riadenia. Numerické aproximácie riešení sme získali aplikáciou algoritmov zo zdroja [5], ktoré sú založené na Pontryaginom princípe minima.

V tretej kapitole sme sa venovali makroskopickému popisu dynamiky dopravy. Na základe úvah o správaní sa vodičov na viacprúdovej komunikácii sme zaviedli rozšírený model dopravy, ktorý uvažuje prechody vozidiel medzi jazdnými pruhmi.

Štvrtá kapitola je venovaná niekoľkým príkladom a spôsobom numerických výpočtov, ktoré hovoria o správnosti zavedenej teórie. Ide najmä o príklady využívajúce Algoritmy 1 a 2 z kapitoly 2. Ako sa ukázalo, najväčšou nevýhodou týchto algoritmov bola časová náročnosť, napríklad oproti metóde využívajúcej viskóznou Burgersovu rovnicu.

V poslednej kapitole sme navrhli vlastný aproximatívny prístup ku riešeniu skalárnych a vektorových hyperbolických úloh. Tento prístup je založený na preformulovaní hyperbolickej úlohy v termínoch neurčitého integrálu funkcie toku. V podkapitole 5.3 uvádzame použitie odvodených numerických schém aj na inú úlohu.

V Prílohe A uvádzame matlabovské kódy, vďaka ktorým vieme efektívne zobraziť numerické riešenie dvojrozmernej hyperbolickej PDR so zvolenou funkciou toku a zadanou počiatočnou funkciou. V Prílohe B je matlabovský kód, ktorý rieši sústavu previazaných rovníc (91) a (92).

Hlavným prínosom pôvodnej časti práce je rozšírenie existujúceho modelu z práce [8] pre úlohy s viacerými jazdnými pruhmi. Prínosom pre autora bolo prehĺbenie vedomostí z oblasti numerického aproximatívneho riešenia PDR, ako aj prepojenie so znalosťami z oblasti optimálneho riadenia.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Chebfun Development Team: *Chebfun Version 5.7.0*, <http://www.chebfun.org>, 2018.
- [2] Driscoll, T. A., Hale, N., Trefethen, L. N.: *Chebfun Guide*, Pafnuty Publications, Oxford, 2014.
- [3] Evans, L.: *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Berkeley, 1998.
- [4] Halická, M., Brunovský, P., Jurča, P.: *Optimálne riadenie. Viacetapové rozhodovacie procesy v ekonómii a financiách*, Epos, Bratislava, 2009.
- [5] Kang, W., Wilcox, L. C.: *Solving 1D Conservation Laws Using Pontryagin's Minimum Principle*, Journal of Scientific Computing, Volume 71 (2017), pp. 144–165. <https://doi.org/10.1007/s10915-016-0294-6>
- [6] LeVeque, Randall J.: *Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [7] Lighthill, M. J., Whitham, G. B.: *On kinematic waves: I. Flood movement in long rivers*, Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A, Volume 229 (1955), pp. 281–316.
- [8] Lighthill, M. J., Whitham, G. B.: *On kinematic waves: II. A theory of traffic flow on long crowded roads*, Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A, Volume 229 (1955), pp. 317–345.
- [9] Murisic, N., Pausader, B., Peschka, D., Bertozzi, A. L.: *Dynamics of particle settling and resuspension in viscous liquid films*, Journal Fluid Mechanics, Volume 717 (2013), pp. 203–231.
- [10] Oron, A., Davis, S. H., Bankoff, S. G.: *Long-scale evolution of thin liquid films.*, Reviews of Modern Physics, Volume 69 (1997), Iss. 3, pp. 931–980.
- [11] Ševčovič, D.: *Parciálne diferenciálne rovnice a ich aplikácie*, IRIS, Bratislava, 2008.

- [12] Wardrop, J. G.: *Some theoretical aspects of road traffic research*, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Volume 1 (1952), pp. 325–362.
- [13] Jin, Wen-Long: *A kinematic wave theory of lane-changing traffic flow*, Transportation Research Part B, Volume 44 (2010), pp. 1001–1021.
- [14] Zákon č. 49/2014 Z.z. o Cestnej premávke a o zmene a doplnení niektorých zákonov.

Príloha A

Hlavná funkcia `APLIKACIA.m` vo svojej prvej časti definuje vzhľad jednoduchého solvera pre úlohy (51)–(52) a (53)–(54). V druhej časti najprv prebehne inicializácia na základe užívateľových vstupov, a potom pomocné funkcie `linsys_2D.m` a `LWR_2D.m` vyriešia danú úlohu. Výstupom tohoto solvera je séria obrázkov (`kresli_subploty.m`) alebo gif (`vytvor_gif.m`).

```
function [q1,q2,x]=linsys_2D(xmin,xmax,tmax,u1,u2,k12,k21,g1,g2,G1,G2,dx,dt,N,casy)
% Linearny model
x=linspace(xmin,xmax,N);
t=0:dt:tmax;
Q01=G1(x)-G1(xmin);
Q02=G2(x)-G2(xmin);
Q1=[Q01;zeros(1,length(x))];
Q2=[Q02;zeros(1,length(x))];
q1=zeros(length(casy),length(x)-1);
q2=zeros(length(casy),length(x)-1);
for n=1:length(t),
    for i=2:length(x)-1,
        if u1*Q1(1,i+1)<u1*Q1(1,i-1),
            Q1(2,i)=Q1(1,i)-u1*dt*(Q1(1,i+1)-Q1(1,i))/dx -dt*k12*Q1(1,i)+dt*k21*Q2(1,i);
        else
            Q1(2,i)=Q1(1,i)-u1*dt*(Q1(1,i)-Q1(1,i-1))/dx -dt*k12*Q1(1,i)+dt*k21*Q2(1,i);
        end
        if u2*Q2(1,i+1)<u2*Q2(1,i-1),
            Q2(2,i)=Q2(1,i)-u2*dt*(Q2(1,i+1)-Q2(1,i))/dx +dt*k12*Q1(1,i)-dt*k21*Q2(1,i);
        else
            Q2(2,i)=Q2(1,i)-u2*dt*(Q2(1,i)-Q2(1,i-1))/dx +dt*k12*Q1(1,i)-dt*k21*Q2(1,i);
        end
    end
    Q1(2,1)=Q01(1);
    Q1(2,end)=(k21*(Q01(end)+Q02(end)) + (k12*Q01(end) - k21*Q02(end))*exp(-(k12+k21)*(t(n))))/(k12+k21);
    Q2(2,1)=Q02(1);
    Q2(2,end)=(k12*(Q01(end)+Q02(end)) - (k12*Q01(end) - k21*Q02(end))*exp(-(k12+k21)*(t(n))))/(k12+k21);
    if (k12==0 & k21==0),
        Q1(2,end)=Q01(end);
        Q2(2,end)=Q02(end);
    end
    kde=find(n==casy);
    if ~isempty(kde),
        q1(kde,:)=(Q1(1,2:end)-Q1(1,1:end-1))/dx;
        q2(kde,:)=(Q2(1,2:end)-Q2(1,1:end-1))/dx;
    end
    Q1(1,:)=Q1(2,:);
    Q2(1,:)=Q2(2,:);
end
q1(:, [1,end-1,end])=[];
q2(:, [1,end-1,end])=[];
x=x(2:end-3);

function [q1,q2,x]=LWR_2D(xmin,xmax,tmax,u1,u2,k12,k21,g1,g2,G1,G2,dx,dt,N,casy)
% Nelinearny model
x=linspace(xmin,xmax,N);
t=0:dt:tmax;
Q01=G1(x)-G1(xmin);
Q02=G2(x)-G2(xmin);
Q01=[0,(Q01(1:end-2)+Q01(2:end-1)+Q01(3:end))/3,0];
Q02=[0,(Q02(1:end-2)+Q02(2:end-1)+Q02(3:end))/3,0];
Q1=[Q01;zeros(1,length(x))];
Q2=[Q02;zeros(1,length(x))];
q1=zeros(length(casy),length(x)-1);
q2=zeros(length(casy),length(x)-1);
for n=1:length(t),
```

```

for i=2:length(x)-1,
    if u1<u1*(Q1(1,i+1)-Q1(1,i-1))/dx,
        Q1(2,i)=Q1(1,i)-u1*dt*(Q1(1,i+1)-Q1(1,i))*(1-(Q1(1,i+1)-Q1(1,i))/dx)/dx -dt*k12*Q1(1,i)+...
            dt*k21*Q2(1,i);
    else
        Q1(2,i)=Q1(1,i)-u1*dt*(Q1(1,i)-Q1(1,i-1))*(1-(Q1(1,i)-Q1(1,i-1))/dx)/dx -dt*k12*Q1(1,i)+...
            dt*k21*Q2(1,i);
    end
    if u2<u2*(Q2(1,i+1)-Q2(1,i-1))/dx,
        Q2(2,i)=Q2(1,i)-u2*dt*(Q2(1,i+1)-Q2(1,i))*(1-(Q2(1,i+1)-Q2(1,i))/dx)/dx +dt*k12*Q1(1,i)-...
            dt*k21*Q2(1,i);
    else
        Q2(2,i)=Q2(1,i)-u2*dt*(Q2(1,i)-Q2(1,i-1))*(1-(Q2(1,i)-Q2(1,i-1))/dx)/dx +dt*k12*Q1(1,i)-...
            dt*k21*Q2(1,i);
    end
end
Q1(2,1)=Q01(1);
Q1(2,end)=(k21*(Q01(end)+Q02(end)) + (k12*Q01(end) - k21*Q02(end))*exp(-(k12+k21)*(t(n))))/(k12+k21);
Q2(2,1)=Q02(1);
Q2(2,end)=(k12*(Q01(end)+Q02(end)) - (k12*Q01(end) - k21*Q02(end))*exp(-(k12+k21)*(t(n))))/(k12+k21);
if (k12==0 & k21==0),
    Q1(2,end)=Q01(end);
    Q2(2,end)=Q02(end);
end
kde=find(n==casy);
if ~isempty(kde),
    q1(kde,:)=(Q1(2,2:end)-Q1(2,1:end-1))/dx;
    q2(kde,:)=(Q2(2,2:end)-Q2(2,1:end-1))/dx;
end
Q1(1,:)=Q1(2,:);
Q2(1,:)=Q2(2,:);
end
q1(:, [1,end-1,end])=[];
q2(:, [1,end-1,end])=[];
x=x(2:end-3);

function kresli_subploty(q1,q2,x,casy,typ_subplotu,xmin,xmax,dt)
t1=typ_subplotu(1);
t2=typ_subplotu(2);
minq1q2=min([min(min(q1)),min(min(q2))]);
maxq1q2=max([max(max(q1)),max(max(q2))]);
figure
hold on
for i=1:length(casy),
    subplot(t1,t2,i)
    plot(x,q1(i,:), 'k')
    hold on
    plot(x,q2(i,:), 'r')
    axis([xmin,xmax,minq1q2,maxq1q2])
    legend('pruh1', 'pruh2')
    title(['$t = $', ' ', num2str((casy(i)-1)*dt)], 'interpreter', 'latex')
    xlabel('x')
    ylabel('q')
    hold off
end

function vytvor_gif(q1,q2,x,casy,dt,adresa,xmin,xmax)
minq1q2=min([min(min(q1)),min(min(q2))]);
maxq1q2=max([max(max(q1)),max(max(q2))]);
h = figure;
for n = 1:length(casy),
    plot(x,q1(n,:), 'k');
    hold on
    plot(x,q2(n,:), 'r');
    axis([xmin,xmax,minq1q2,maxq1q2])
    t2=num2str((casy(n)-1)*dt+10^-3);
    title(['t = ', t2(1:end-1)])
    xlabel('x')
    ylabel('q')
    legend('pruh 1', 'pruh 2')
    hold off

```

```

drawnow

% Capture the plot as an image
frame = getframe(h);
im = frame2im(frame);
[imind,cm] = rgb2ind(im,256);

% Write to the GIF File
if n == 1
    imwrite(imind,cm,adresa,'gif','Loopcount',inf,'DelayTime',0.01);
else
    imwrite(imind,cm,adresa,'gif','WriteMode','append','DelayTime',0.01);
end
end

function APLIKACIA
h=figure;
set(h,'color',[0.8,0.8,0.8],'units','normalized','position',[0.1,0.05,0.8,0.6],'name','APLIKACIA')
set(h,'numberTitle','off','resize','on')

text0=icontrol('style','text','units','normalized','position',[0.02,0.915,0.12,0.06]);
set(text0,'BackgroundColor',[0.8,0.8,0.8],'FontSize',14,'HorizontalAlignment','left',...
    'string','Vyber model:', 'ForegroundColor','k')

popup1=icontrol('style','popupmenu','units','normalized','position',[0.15,0.915,0.15,0.06]);
set(popup1,'String',{'Linearny model','LWR model'});

text00=icontrol('style','text','units','normalized','position',[0.375,0.915,0.12,0.06]);
set(text00,'BackgroundColor',[0.8,0.8,0.8],'FontSize',14,'HorizontalAlignment','left',...
    'string','Vyber vystup:', 'ForegroundColor','k')

popup2=icontrol('style','popupmenu','units','normalized','position',[0.51,0.915,0.15,0.06]);
set(popup2,'String',{'Subplot ($)','Gif (*)'});

edit1=icontrol('style','edit','units','normalized','position',[0.375,0.766,0.6,0.06]);
set(edit1,'BackgroundColor','w','FontSize',16,'String',...
    'chebfun({0,0.8,0,0.8,0},[-1,0,3,5,8,35], 'splitting', 'on'))
set(edit1,'HorizontalAlignment','left')

text1=icontrol('style','text','units','normalized','position',[0.02,0.76,0.35,0.06]);
set(text1,'BackgroundColor',[0.8,0.8,0.8],'FontSize',14,'HorizontalAlignment','left',...
    'string','Zadaj pociatocnu funkciu pre prvý pruh:', 'ForegroundColor','k')

edit2=icontrol('style','edit','units','normalized','position',[0.375,0.696,0.6,0.06]);
set(edit2,'BackgroundColor','w','FontSize',16,'String','chebfun(0,[-1,35])')
set(edit2,'HorizontalAlignment','left')

text2=icontrol('style','text','units','normalized','position',[0.02,0.69,0.35,0.06]);
set(text2,'BackgroundColor',[0.8,0.8,0.8],'FontSize',14,'HorizontalAlignment','left',...
    'string','Zadaj pociatocnu funkciu pre druhý pruh:', 'ForegroundColor','k')

edit3=icontrol('style','edit','units','normalized','position',[0.375,0.836,0.6,0.06]);
set(edit3,'BackgroundColor','w','FontSize',16,'String','[-1,35,6.5]')
set(edit3,'HorizontalAlignment','left')

text3=icontrol('style','text','units','normalized','position',[0.02,0.83,0.35,0.06]);
set(text3,'BackgroundColor',[0.8,0.8,0.8],'FontSize',14,'HorizontalAlignment','left',...
    'string','Zadaj rozsah vypoctu [xmin,xmax,tmax]:', 'ForegroundColor','k')

edit4=icontrol('style','edit','units','normalized','position',[0.375,0.626,0.6,0.06]);
set(edit4,'BackgroundColor','w','FontSize',16,'String','[4,2]')
set(edit4,'HorizontalAlignment','left')

text4=icontrol('style','text','units','normalized','position',[0.02,0.62,0.35,0.06]);
set(text4,'BackgroundColor',[0.8,0.8,0.8],'FontSize',14,'HorizontalAlignment','left',...
    'string','Zadaj maximálne rýchlosti v pruhoch:', 'ForegroundColor','k')

edit5=icontrol('style','edit','units','normalized','position',[0.375,0.556,0.6,0.06]);
set(edit5,'BackgroundColor','w','FontSize',16,'String','[1,1]')
set(edit5,'HorizontalAlignment','left')

```

```

text5=uicontrol('style','text','units','normalized','position',[0.02,0.55,0.35,0.06]);
set(text5,'BackgroundColor',[0.8,0.8,0.8],'FontSize',14,'HorizontalAlignment','left',...
    'string','Zadaj konstanti prechodov:', 'ForegroundColor','k')

edit6=uicontrol('style','edit','units','normalized','position',[0.375,0.486,0.6,0.06]);
set(edit6,'BackgroundColor','w','FontSize',16,'String','0:0.8:6.4')
set(edit6,'HorizontalAlignment','left')

text6=uicontrol('style','text','units','normalized','position',[0.02,0.48,0.35,0.06]);
set(text6,'BackgroundColor',[0.8,0.8,0.8],'FontSize',14,'HorizontalAlignment','left',...
    'string','Zadaj casy v ktorych chces obrazky: ($)', 'ForegroundColor','k')

edit7=uicontrol('style','edit','units','normalized','position',[0.375,0.416,0.6,0.06]);
set(edit7,'BackgroundColor','w','FontSize',16,'String','[3,3]')
set(edit7,'HorizontalAlignment','left')

text7=uicontrol('style','text','units','normalized','position',[0.02,0.41,0.35,0.06]);
set(text7,'BackgroundColor',[0.8,0.8,0.8],'FontSize',14,'HorizontalAlignment','left',...
    'string','Zadaj typ (velkost) subplotu: ($)', 'ForegroundColor','k')

edit8=uicontrol('style','edit','units','normalized','position',[0.375,0.346,0.6,0.06]);
set(edit8,'BackgroundColor','w','FontSize',16,'String','/home/peter/Plocha/gifko.gif')
set(edit8,'HorizontalAlignment','left')

text8=uicontrol('style','text','units','normalized','position',[0.02,0.34,0.35,0.06]);
set(text8,'BackgroundColor',[0.8,0.8,0.8],'FontSize',14,'HorizontalAlignment','left',...
    'string','Zadaj adresu a meno na ulozenie gif: (*)', 'ForegroundColor','k')

hpush1=uicontrol(h,'style','pushbutton','units','normalized','string','Pocitaj',...
    'fontsize',20,'fontname','times new roman','Callback','@t1','position',[0.02,0.2,0.15,0.08]);

%-----

dx=2*10^-2;
dt=10^-3;

function t1(source,callbackdata)
    rozsah=str2num(get(edit3,'String'));
    g1=str2num(get(edit1,'String'));
    g2=str2num(get(edit2,'String'));
    umax=str2num(get(edit4,'String'));
    k=str2num(get(edit5,'String'));
    casy=str2num(get(edit6,'String'));
    typ_subplotu=str2num(get(edit7,'String'));
    adresa=get(edit8,'String');

    model=get(popup1,'Value');
    vystup=get(popup2,'Value');

    xmin=rozsah(1);
    xmax=rozsah(2);
    tmax=rozsah(3);
    u1=umax(1);
    u2=umax(2);
    N=ceil((xmax-xmin)/dx)+1;
    k12=k(1);
    k21=k(2);
    G1=cumsum(g1);
    G2=cumsum(g2);
    if vystup==2,
        casy=0:20*dt:tmax;
    end
    casy=round(casy/dt)+1;

    if (model==1 && vystup==1),
        [q1,q2,x]=linsys_2D(xmin,xmax,tmax,u1,u2,k12,k21,g1,g2,G1,G2,dx,dt,N,casy);
        kresli_subploty(q1,q2,x,casy,typ_subplotu,xmin,xmax,dt)
    elseif (model==2 && vystup==1),
        [q1,q2,x]=LWR_2D(xmin,xmax,tmax,u1,u2,k12,k21,g1,g2,G1,G2,dx,dt,N,casy);
        kresli_subploty(q1,q2,x,casy,typ_subplotu,xmin,xmax,dt)
    elseif (model==1 && vystup==2),

```

```
        [q1,q2,x]=linsys_2D(xmin,xmax,tmax,u1,u2,k12,k21,g1,g2,G1,G2,dx,dt,N,casy);  
        vytvor_gif(q1,q2,x,casy,dt,adresa,xmin,xmax)  
    elseif (model==2 && vystup==2),  
        [q1,q2,x]=LWR_2D(xmin,xmax,tmax,u1,u2,k12,k21,g1,g2,G1,G2,dx,dt,N,casy);  
        vytvor_gif(q1,q2,x,casy,dt,adresa,xmin,xmax)  
    end  
  
end  
end
```

Príloha B

```
%K clanku: Dynamics of particle settling and resuspension in viscous liquid films
%Hladanie frontu x_{f1} a x_{fp}
%Obrázky 6a(presny)
xmin=-1+0.00125;
xmax=5+0.00125;
h0=chebfun({0,1,0},{xmin,0,1,xmax},'splitting','on');
f0=10^-1; % niekedy aj Fi
n0=f0*h0; % pociatocna fcia pre funkciu n
Hp=cumsum(h0); % integral pociatocnych podmienok
Np=cumsum(n0);
poc_del_bodov=2401; % pocet deliacich bodov na x-ovej osi
x=linspace(xmin,xmax,poc_del_bodov); % delenie na x-ovej osi
dx=x(2)-x(1);
dt=10^-3;
tmax=50; % cas po ktory sa pocita, tmax = 50
t=dt:dt:tmax;
H0=Hp(x)-Hp(xmin); % inicializacia riesenia
N0=Np(x)-Np(xmin);
H=[H0;zeros(1,length(x))]; % kvoli setreniu pamate sa riesenie prepisuje a
N=[N0;zeros(1,length(x))]; % vyberaju sa z neho iba podstatne veci
% B = 2*(ro_{fp} - ro_{f1})*cotg(alfa)/(9*ro_{f1}*K_{fc}), K_{fc}=0.41 (podla clanku)
B=2.307;
for cas=2:(length(t)+1),
    for i=2:length(x)-1, % numericky zapis rovnici 2.30
        H(2,i)=H(1,i)-dt*((H(1,i)-H(1,i-1))/dx)^3 /3;
        N(2,i)=N(1,i)-dt*sqrt(2/9/B)*((N(1,i)-N(1,i-1))*(H(1,i)-H(1,i-1))/dx^2)^(3/2);
    end
    H(2,1)=H0(1); % okrajove podmienky
    H(2,end)=H0(end);
    N(2,1)=N0(1);
    N(2,end)=N0(end);
    H(1,:)=H(2,:); % prepisovanie riesenia
    N(1,:)=N(2,:);
    h=(H(1,2:end)-H(1,1:end-1))/dx;
    n=(N(1,2:end)-N(1,1:end-1))/dx;
    if (cas==501), % lebo v obr. 6a zobrazuju riesenie v case t=0.5
        [hAx,hLine1,hLine2]=plotyy(x(1:end-1),h,x(1:end-1),n); % vykreslenie pre t=0.5
        hold on
        hLine1.Color='k';
        hLine1.LineWidth=2;
        hLine2.LineStyle='--';
        hLine2.Color='k';
        hLine2.LineWidth=2;
        set(hAx(1),'YColor','k')
        set(hAx(1),'YLim',[0,1.1])
        set(hAx(1),'FontWeight','bold')
        set(hAx(1),'FontSize',12)
        set(hAx(2),'YColor','k')
        set(hAx(2),'YLim',[0,0.155])
        set(hAx(2),'XLim',[-0.5,5])
        set(hAx(2),'FontWeight','bold')
        set(hAx(2),'FontSize',12)
        xlim([-0.5,5])
    end
end
h=(H(1,2:end)-H(1,1:end-1))/dx;
n=(N(1,2:end)-N(1,1:end-1))/dx;
h(h<0)=0;
n(n<0)=0;
[hAx,hLine1,hLine2]=plotyy(x(1:end-1),h,x(1:end-1),n); %vykreslenie pre t=50
hLine1.Color='k';
hLine1.LineWidth=2;
hLine2.LineStyle='--';
hLine2.LineWidth=2;
hLine2.Color='k';
set(hAx(1),'YColor','k')
set(hAx(1),'YLim',[0,1.1],'Ytick',[0,0.25,0.5,0.75,1])
set(hAx(1),'FontWeight','bold')
set(hAx(1),'FontSize',12)
```

```
set(hAx(2),'YColor','k')
set(hAx(2),'YLim',[0,0.155],'Ytick',[0,0.05,0.1,0.15])
set(hAx(2),'XLim',[-0.5,5])
set(hAx(2),'FontWeight','bold')
set(hAx(2),'FontSize',12)
xlim([-0.5,5])
lgd=legend([hLine1;hLine2],'$h$','$n$');
lgd.FontSize=16;
lgd.Interpreter='Latex';
title('Obr. 6a')
xlabel('$x$','interpreter','latex','FontSize',14)
ylabel(hAx(1),'$h$','interpreter','latex','FontSize',14)
ylabel(hAx(2),'$n$','interpreter','latex','FontSize',14)
```