

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



MODELÝ OBÁLKOVEJ ANALÝZY DÁT VO
FINANČNÍCTVE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**MODELY OBÁLKOVEJ ANALÝZY DÁT VO
FINANČNÍCTVE**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Veronika Vidová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Modely obálkovej analýzy dát vo finančníctve.
Data envelopment analysis in finance.

Cieľ: Spracovať prehľad a kritickú analýzu využitia DEA modelov vo finančníctve. Pokúsiť sa o kategorizáciu prístupov najmä z hľadiska cieľov analýzy, výberu vstupov a výstupov a použitých DEA modelov. Vybrané prístupy aplikovať na vzorke reálnych dát. Výsledky interpretovať.

Vedúci: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 26.01.2017

Dátum schválenia: 27.01.2017
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

PodĎakovanie Touto cestou by som sa rada poĎakovala svojej vedúcej diplomovej práce doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc. za ochotu, pomoc, cenné rady a pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce.
Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za podporu a trpezlivosť.

Abstrakt v štátnom jazyku

VIDOVÁ, Veronika: Modely obálkovej analýzy dát vo finančníctve [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2018, 71 s.

V našej práci sa venujeme použitiu DEA modelov v oblasti finančníctva, konkrétne v oblasti bankrotu spoločností. V prvej časti práce najprv uvedieme a zhrnieme dôležité poznatky o DEA modeloch vo všeobecnosti. Potom sa budeme podrobnejšie zaoberať aditívnym DEA modelom, jeho vlastnosťami a výhodami oproti ostatným modelom. Spracujeme podrobný prehľad a analýzu využitia DEA modelov v oblasti bankrotu firiem na základe naštudovanej literatúry. V poslednej časti práce použijeme vhodný model z predošlej časti na reálne dáta slovenských firiem. Vstupy a výstupy budeme taktiež vyberať na základe výsledkov z druhej časti práce. Navrhujeme a otestujeme použitie aditívneho modelu s AR nadstavbou a výsledky porovnáme.

Kľúčové slová: obálková analýza dát, aditívny model, firmy, bankrot, finančné ukazovatele, hranica bankrotu.

Abstract

VIDOVÁ, Veronika: Data envelopment analysis in finance [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2018, 71 p.

In our work we devote to application of DEA models in finance, specifically in the field of bankruptcy. In the first part of diploma thesis, we name and summarize important knowledge about common DEA models. Then we concern of additive DEA model in more detail, we name its properties and advantages over other models. We process a detailed summary and analysis of DEA model applications in the field of corporate bankruptcy based on read up literature. In the last part of diploma thesis, we apply one appropriate model from previous part to real data of slovak companies. We choose inputs and outputs based on results from the second part of diploma thesis as well. We design and test the application of additive DEA model with AR constraints and we compare the results.

Keywords: Data envelopment analysis, additive DEA model, companies, bankruptcy, financial indicators, bankruptcy frontier

Obsah

Úvod	13
1 DEA modely	15
1.1 DEA modely vo všeobecnosti	15
1.2 Klasifikácia DEA modelov	16
1.3 Aditívny (VRS) model	17
1.3.1 Základný aditívny (VRS) model	17
1.3.2 Aditívny (VRS) model s váhami	18
1.4 Vlastnosti aditívnych modelov	20
1.4.1 Invariantnosť aditívnych modelov	20
1.4.2 Vlastnosti účelovej funkcie	21
1.5 Výber vhodného modelu	21
1.5.1 Invariantnosť na posun	21
1.5.2 Hodnota účelovej funkcie A_W z $[0, 1]$	22
1.6 AR ohraničenia	23
1.7 Hranica prosperity a hranica bankrotu	25
2 Prehľad používania modelov na predikciu bankrotu	27
2.1 Modely na predikovanie bankrotu v minulosti	27
2.2 Obáľková analýza dát v súvislosti s bankrotom firiem	31
2.2.1 Použitie Aditívneho modelu	32
2.2.2 Použitie SBM modelu	36
2.2.3 Použitie CCR a BCC modelov	39
2.3 Prehľad a zhrnutie	41
3 Aplikácia najviac používaných modelov	47
3.1 Voľba vhodných dát	47
3.2 Aplikácia aditívneho obáľkového modelu s váhami	48
3.2.1 Voľba váh (c)	48
3.2.2 Voľba váh (f)	50
3.3 Aplikácia aditívneho multiplikatívneho modelu s AR nadstavbou	52

3.3.1	Zužovanie intervalov pre pomery váh	53
3.3.2	Testovanie na dátach	53
Záver		59
Zoznam použitej literatúry		61
Prílohy		65

Úvod

Finančníctvo je rozsiahla oblasť, ktorá používa finančné nástroje, modely a procesy na riešenie finančných problémov a zvýhodnenie v nových finančných možnostiach. Tieto nástroje čerpá najmä z oblastí aplikovanej matematiky, štatistiky a ekonomickej teórie. Finančníci pracujú predovšetkým v bankovníctve, oblastiach finančného manažmentu, zabezpečenia firmy alebo konzultačných firmách.

Finančníctvo taktiež zahŕňa vytváranie stratégií spoločností na maximalizáciu zisku, prípadne na optimalizáciu iných dôležitých ukazovateľov. Miesto maximalizácie zisku môžeme teoreticky maximalizovať aj záväzky firmy, čím sa dostaneme k možnému bankrotu spoločnosti. A práve bankrot spoločností je téma, ktorou sa budeme v tejto práci zaoberať.

Možný bankrot firiem budeme analyzovať pomocou DEA modelov. Obáľková analýza dát, po anglicky Data Envelopment Analysis, je metóda, ktorá používa vstupy a výstupy na optimalizáciu vybraných finančných ukazovateľov firmy. V našom prípade budeme minimalizovať tie ukazovatele, ktoré neindikujú bankrot firmy, napr. príjmy, obežné aktíva, zisk. Naopak, maximalizovať budeme také ukazovatele, ktoré výrazne prispievajú k bankrotu, napr. krátkodobé záväzky, celkový dlh.

V prvej časti práce sa budeme venovať DEA modelom vo všeobecnosti, kde budeme čerpať predovšetkým z [11], [7], [8] a [13]. Budeme hovoriť najmä o aditívnom modeli v rôznych formách a o jeho vlastnostiach. Potom spomenieme tzv. Assurance Region (AR) ohraničenia, ktoré neskôr aplikujeme na aditívny DEA model. Takisto definujeme hranicu bankrotu.

V ďalšej časti spracujeme podrobný prehľad literatúry, ktorá sa v minulosti zaoberala tematikou predikcie bankrotu. Budeme analyzovať prístupy autorov z hľadiska použitých modelov, výberu vstupov a výstupov a z hľadiska cieľov analýzy. Na záver aplikujeme vybraný model na základe poznatkov z prvej a druhej časti práce na reálne dáta slovenských firiem z rôznych oblastí. Nakoniec navrhujeme použitie aditívneho DEA modelu s AR ohraničeniami, ktorý takisto otestujeme na reálnych dátach a výsledky porovnáme.

1 DEA modely

V tejto časti práce sa budeme venovať DEA modelom vo všeobecnosti, uvedieme najprv základné pojmy a klasifikáciu modelov. Bližšie sa budeme zaoberať aditívnym modelom vo viacerých formách. Potom sa budeme venovať použitiu DEA modelov v súvislosti s bankrotmi spoločností. V celej kapitole vychádzame z [11], [7], [8] a [13].

1.1 DEA modely vo všeobecnosti

Obálková analýza dát je metóda založená na lineárnom programovaní, ktorá meria efektívnosť jednotlivých producentov v rámci danej skupiny. DEA metóda rieši optimalizačný problém, v ktorom minimalizuje vstupy alebo maximalizuje výstupy. Producentov alebo organizačné jednotky budeme nazývať DMU_j , ($j = 1, \dots, n$), z anglického slova decision making units. Pod jednotlivými DMU si môžeme predstaviť spoločnosti, banky, podniky.

Pojem efektívnosť súvisí s produkčnou činnosťou konkrétneho DMU , ktorú nazývame technológia, ozn. T . Technológia T spotrebováva vstupy $I_1, \dots, I_m$ a produkuje výstupy $O_1, \dots, O_s$. Vstupmi môžu byť rôzne náklady na zamestnancov, materiál, priestory, financie. Výstupy predstavujú vyrobené produkty, rôzne služby, tržby. Hodnoty vstupov daného DMU v technológii T budeme označovať vektorom $x \in \mathbb{R}^m$ a hodnoty výstupov označíme vektorom $y \in \mathbb{R}^s$. Ak sa zo vstupov x dajú pomocou technológie T vyrobiť výstupy y , potom dvojicu (x, y) nazývame prípustnou pre technológiu T . Všetky prípustné dvojice (x, y) tvoria množinu produkčných možností (ozn. G), ktorá je ohraničená v smere znižovania vstupov a zvyšovania výstupov. Množina G je konvexná a má vlastnosť označovanú ako voľná disponovateľnosť. To znamená, že ak obsahuje bod (x_A, y_A) , tak obsahuje aj všetky (x, y) , pre ktoré platí $x \geq x_A$ (plytvanie vstupmi) a $y \leq y_A$ (lenivosť pri vyrábaní). Ak sa nachádzame na hranici množiny produkčných možností, tak hovoríme o hranici efektivity. Producent $A = (x_A, y_A)$ je efektívny vtedy, ak neexistuje žiaden iný producent, ktorý by mal menšie alebo rovné vstupy a zároveň väčšie alebo rovné výstupy ako producent A .

Problém je, že množinu G ani jej efektívnu hranicu v skutočnosti nepoznáme, a preto ju potrebujeme nahradiť vhodnou aproximáciou. Môžeme predpokladať, že pre

n útvarov DMU_j , $j = 1, 2, \dots, n$, ktoré produkujú v technológii T , poznáme hodnoty vstupov a výstupov (x_j, y_j) . Potom označíme množinu

$$Z = \{(x_j, y_j) \in \mathbb{R}_+^{m+s} \mid j = 1, \dots, n\} \subset G.$$

Chceme zostrojiť aproximáciu M množiny G tak, aby obsahovala všetky body zo Z a zároveň zachovala dôležité vlastnosti množiny G . Tieto požiadavky vyjadríme podľa [11] pomocou nasledujúcich axiém, pričom budeme uvažovať variabilné výnosy z rozsahu (viď. kap. 1.2):

(A1) $Z \subset M$;

(A2) M je konvexná;

(A3) Ak $(x_A, y_A) \in M$, potom $\{(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^{m+s} \mid x_A \leq x, y_A \geq y\} \subset M$.

Potom pod M , aproximáciou množiny G , budeme rozumieť najmenšiu množinu splňajúcu (A1)-(A3). Keby sme uvažovali aproximáciu množiny produkčných možností G v prípade konštantných výnosov z rozsahu, rozumeli by sme najmenšiu množinu splňajúcu (A1)-(A4), kde (A4) vyjadruje nasledujúcu vlastnosť:

(A4) Ak $(x_A, y_A) \in M$, potom $(cx_A, cy_A) \in M$, pre každé $c > 0$.

Podľa [11] môžeme M pre variabilné výnosy z rozsahu zapísať v tvare

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+s} \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y, \lambda \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1\}. \quad (1.1)$$

Pod (Pareto-)efektívnym bodom v M rozumieme taký bod $(x_A, y_A) \in M$, pre ktorý neexistuje žiaden iný bod $(x, y) \in M$ taký, že $(x, y) \neq (x_A, y_A)$ a $x \leq x_A \wedge y \geq y_A$. Inými slovami, nevieme nájsť iný bod z M , ktorý by z menšieho alebo rovnakého množstva vstupov vedel vyprodukovať väčšie alebo rovnaké množstvo výstupov. V prípade, ak bod nie je efektívny, tak hovoríme, že je neefektívny.

Cieľom DEA modelov je zistiť, ktoré DMU sú efektívne a ktoré nie. V prípade, že nie sú efektívne, cieľom je nejako zmerať neefektivitu pomocou vhodne zvolených mier neefektívnosti. Mieru neefektívnosti nazývame efektivita (ozn. E), ktorá porovnáva danú firmu s efektívnou firmou, pričom $E \in [0, 1]$. Pre každú efektívnu firmu platí $E = 1$. Existuje viacero spôsobov ako merať efektivitu, podrobnejšie je popísaná v ([11], kap. 1), ([13], kap. 1) a ([8], kap. 1).

1.2 Klasifikácia DEA modelov

Existujú dva prístupy ku tvorbe DEA modelov, prvý z nich je multiplikatívny a druhý sa nazýva obáľkový. Obáľkový tvar modelu je duálnou úlohou k multiplikatívnemu tvaru. Niektoré zo základných modelov sa rozlišujú na vstupne alebo výstupne orientované. Vstupne orientované modely minimalizujú vstupy pri nezmenšených hodnotách

	Orientovanosť		Výnosy z rozsahu	
Model	Orientovaný (vstupný/výstupný)	Neorientovaný	CRS	VRS
CCR	+	–	+	–
BCC	+	–	–	+
AD	–	+	+	+
AD-W	–	+	+	+
SBM	+	+	+	+

Tabuľka 1.1: Prehľad základných DEA modelov

výstupov, a naopak výstupne orientované modely maximalizujú výstupy pri nezväčšených hodnotách vstupov. V tomto prípade aj efektívnosť rozlišujeme na vstupnú a výstupnú.

Výnosy z rozsahu vyjadrujú proporcionálnu výšku nárastu výstupov ako reakciu na zvýšenie všetkých vstupov. V tejto práci uvažujeme iba konštantné a variabilné výnosy z rozsahu (ozn. CRS a VRS). Ak sa výstupy zväčšujú priamo úmerne so zväčšovaním vstupov, hovoríme o konštantných výnosoch z rozsahu. Inak hovoríme o variabilných výnosoch z rozsahu.

Prehľad základných DEA modelov môžeme vidieť v Tab. 1.1. Označenie + znamená, že model danú vlastnosť má a označenie – vyjadruje, že danú vlastnosť nemá.

Množina M z (1.1) odpovedá variabilným výnosom z rozsahu, pretože na rozdiel od konštantných výnosov z rozsahu obsahuje podmienku $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$. Konštantnými výnosmi z rozsahu sa v tejto práci nebudeme ďalej zaoberať.

1.3 Aditívny (VRS) model

V tejto časti sa budeme zaoberať aditívnym modelom, ktorý vo všeobecnosti patrí medzi neorientované modely. Najprv uvedieme základný model a potom sa budeme zaoberať modelom s váhami. Aditívny DEA model bol prvýkrát sformulovaný A. Charnesom v roku 1985.

1.3.1 Základný aditívny (VRS) model

Zistiť efektívnosť $DMU_o = (x_o, y_o)$ pomocou základného aditívneho obáľkového modelu pri variabilných výnosoch z rozsahu znamená podľa ([11], str. 99) riešiť nasledovnú úlohu lineárneho programovania

$$\begin{aligned}
& \max_{\lambda, s^x, s^y} A_O := (e_m^T s^x + e_s^T s^y), \\
& s.t. \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^x = x_o, \quad s^x \geq 0_m, \\
& \quad \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^y = y_o, \quad s^y \geq 0_s, \\
& \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda \geq 0_n,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

kde e_m, e_s sú jednotkové vektory príslušnej dĺžky a s^x, s^y sú doplnkové premenné, tzv. slacky.

Potom podľa ([7], Definition 4.3) DMU_o je efektívne vtedy a len vtedy, keď $s^{*x} = 0$ a zároveň $s^{*y} = 0$. Inými slovami, optimálna hodnota účelovej funkcie musí byť rovná nule, inak je DMU_o neefektívne.

Duálnym modelom k úlohe (1.2) bude podľa [11] aditívny multiplikatívny model v tvare

$$\begin{aligned}
& \min_{u, v, z} A_M := v^T x_o - u^T y_o - z, \\
& s.t. \quad v^T x_j - u^T y_j - z \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
& \quad u \geq e_s, v \geq e_m.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Aby bolo DMU_o efektívne, hodnota účelovej funkcie A_M musí byť podľa [11] rovná nule, inak je DMU_o neefektívne.

1.3.2 Aditívny (VRS) model s váhami

Aditívny model s váhami je modifikáciou základného aditívneho obáľkového modelu. Jednotkové vektory e_m, e_s z pôvodného modelu sa zmenia na vhodne zvolené kladné váhy w^x, w^y . Dôvodom tejto modifikácie je to, že základný aditívny model nie je invariantný na zmenu jednotiek. Dostávame model (1.4).

$$\begin{aligned}
& \max_{\lambda, s^x, s^y} A_{W_O} := ((w^x)^T s^x + (w^y)^T s^y), \\
& s.t. \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^x = x_o, \quad s^x \geq 0_m, \\
& \quad \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^y = y_o, \quad s^y \geq 0_s,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda \geq 0_n.$$

Jednotlivé váhy volíme podľa ([11], str.101) resp. ([13], str.34) nasledovným spôsobom:

$$w_i^x = \frac{1}{(m+s)R_i^x}, \quad i = 1, \dots, m, \quad w_r^y = \frac{1}{(m+s)R_r^y}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (1.5)$$

kde R_i^x, R_r^y môžu byť zvolené viacerými spôsobmi, napríklad:

$$(a) \quad R_i^x = \max_j x_{ij}, \quad R_r^y = \max_j y_{rj},$$

$$(b) \quad R_i^x = \frac{1}{n} \sum_j x_{ij}, \quad R_r^y = \frac{1}{n} \sum_j y_{rj},$$

$$(c) \quad R_i^x = \max_j x_{ij} - \min_j x_{ij}, \quad R_r^y = \max_j y_{rj} - \min_j y_{rj},$$

$$(d) \quad R_i^x = \sigma_i^x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}, \quad R_r^y = \sigma_r^y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_{rj} - \bar{y}_r)^2}, \quad (1.6)$$

$$\text{kde } \bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_j x_{ij}, \quad \bar{y}_r = \frac{1}{n} \sum_j y_{rj},$$

$$(e) \quad R_i^x = x_{io}, \quad R_r^y = y_{ro},$$

$$(f) \quad R_i^x = x_{io} - \min_j x_{ij}, \quad R_r^y = \max_j y_{rj} - y_{ro}.$$

Poznamenajme, že voľba váh v (a) – (d) závisí od celého súboru dát a váhy sú potom rovnaké pre všetky DMU . Je možné postupovať aj iným spôsobom a voliť váhy v závislosti od konkrétneho testovaného DMU_o , čo môžeme vidieť napr. v (e) – (f). Poznamenajme tiež, že voľba váh podľa (e) je vhodná iba v prípade kladných dát. V prípade voľby váh podľa (f) kladieme v prípade $R_i^x = 0$ alebo $R_r^y = 0$ automaticky $A_W^* = 0$.

Duálnym modelom k úlohe (1.4) bude aditívny multiplikatívny model s váhami, v ktorom sa zmenia iba ohraničenia na vektory u a v . Dostaneme model (1.7).

$$\begin{aligned} \min_{u,v,z} \quad & A_{W_M} := v^T x_0 - u^T y_0 - z, \\ \text{s.t.} \quad & v^T x_j - u^T y_j - z \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$u \geq w^y, v \geq w^x,$$

kde w^x, w^y sú voľby váh podľa (1.5).

1.4 Vlastnosti aditívnych modelov

Teraz sa budeme zaoberať najdôležitejšími vlastnosťami aditívnych modelov a poukážeme na výhody oproti ostatným DEA modelom. Budeme hovoriť o invariantnosti aditívnych modelov, potom spomenieme vlastnosti účelovej funkcie. V tejto časti vychádzame najmä z [11], [7] a [13].

1.4.1 Invariantnosť aditívnych modelov

Stáva sa, že vstupné dáta často nie sú v ideálnom tvare. Môžu byť napríklad v rozdielnych jednotkách, alebo to môžu byť záporné hodnoty (najmä v oblasti finančnictva a bankovníctva). Na riešenie týchto situácií potrebujeme použiť také modely, ktoré sú invariantné vzhľadom na určitú zmenu vstupných údajov.

Invariantnosť je schopnosť daného modelu ponechať nezmenenú hodnotu účelovej funkcie a zachovať rozdelenie útvarov na efektívne a neefektívne po určitej transformácii vstupov a výstupov. Budeme brať do úvahy dve základné transformácie vstupných údajov:

- zmenu jednotiek (ZJ)

$$x_j \rightarrow Ax_j = x'_j, \quad y_j \rightarrow By_j = y'_j, \quad (1.8)$$

kde A a B sú diagonálne matice príslušných rozmerov s kladnými prvkami na diagonále.

- posun (P)

$$x_j \rightarrow x_j + \Delta x = x'_j, \quad y_j \rightarrow y_j + \Delta y = y'_j, \quad (1.9)$$

kde Δx a Δy sú ľubovoľné vektory príslušných rozmerov.

Veta. 1.1. ([11], Veta 17) *(Invariantnosť aditívneho modelu na ZJ) Základný aditívny model nie je invariantný na zmenu jednotiek, ale zachováva klasifikáciu útvarov na efektívne a neefektívne. Avšak podľa ([11], Veta 18) aditívne modely s vhodnou voľbou váh podľa (1.5), (1.6) sú invariantné na zmenu jednotiek.*

Táto vlastnosť aditívneho modelu je ľahko viditeľná. Keďže sa po transformácii zmenia hodnoty slackov s^x, s^y , musí sa zmeniť aj hodnota účelovej funkcie. Ale ak je útvar efektívny, a teda $(s^x, s^y) = 0$, tak v tomto prípade ostanú slacky nulové aj po transformácii a zachová sa klasifikácia útvarov na efektívne a neefektívne. V prípade aditívneho modelu s váhami vieme váhy zvoliť tak, aby sa zachovala hodnota účelovej funkcie.

Veta. 1.2. ([11], Veta 21) *(Invariantnosť základného aditívneho modelu na P) Základný aditívny model s variabilnými výnosmi z rozsahu je invariantný na posun.*

Dôkazy viet (1.1) a (1.2) nebudeme uvádzať, je možné ich nájsť v ([11], str. 109, 114 - 115), ([13], str. 39 - 43) a ([7] str. 98 - 100).

1.4.2 Vlastnosti účelovej funkcie

Optimálna hodnota účelovej funkcie aditívneho DEA modelu zachytáva všetku neefektívnosť. V účelovej funkcii vystupujú všetky doplnkové premenné, vďaka ktorým vieme testované *DMU* posunúť na efektívnu hranicu.

Nedostatkom základného aditívneho modelu je, že účelovú funkciu nemôžeme interpretovať ako efektivitu, pretože hodnota účelovej funkcie nie je bezrozmerná veličina a jej hodnota $1 - (A_W^*)$ nemusí byť z intervalu $[0, 1]$. Umožňuje však jednoznačne identifikovať efektívnosť a má vlastnosť monotónnosti.

Na druhej strane, pri vhodnej voľbe váh môžu zostať zachované dobré vlastnosti aditívneho modelu a zároveň eliminované jeho nedostatky.

1.5 Výber vhodného modelu

Naša práca sa zaoberá bankrotmi firiem, a teda používané finančné ukazovatele môžu byť aj záporné. Preto potrebujeme model, ktorý je invariantný aj na posun aj na zmenu jednotiek.

Takisto nás bude zaujímať výsledná hodnota efektivity pri daných firmách, aby sme vedeli určiť, ako ďaleko od hranice bankrotu sa firma nachádza. Preto hľadáme model s takou účelovou funkciou, aby sme z nej priamo vedeli vyjadriť hodnotu efektivity, ktorá musí byť z intervalu $[0, 1]$.

Na základe týchto kritérií si zvolíme aditívny (VRS) model s váhami, ktorý je invariantný na zmenu jednotiek. Potrebujeme vhodne zvoliť váhy tak, aby bol model invariantný aj na posun a aby hodnota účelovej funkcie A_W bola z intervalu $[0, 1]$.

1.5.1 Invariantnosť na posun

Zoberme voľby váh (a) – (f) z (1.6). Ukážeme, že po aplikácii (1.9) model s voľbou váh (c), (d) a (f) je invariantný na posun. Začneme voľbou váh podľa (c):

$$w_i^x = \frac{1}{(m+s)R_i^x}, \quad i = 1, \dots, m, \quad w_r^y = \frac{1}{(m+s)R_r^y}, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$R_i^x = \max_j x_{ij} - \min_j x_{ij}, \quad R_r^y = \max_j y_{rj} - \min_j y_{rj}.$$

Aplikujeme posun (1.9) na zvolené váhy

$$\begin{aligned} R_i^{x'} &= \max_j (x_{ij} + \Delta x_i) - \min_j (x_{ij} + \Delta x_i) = \max_j x_{ij} + \Delta x_i - \min_j x_{ij} - \Delta x_i = \max_j x_{ij} - \min_j x_{ij}, \\ R_r^{y'} &= \max_j (y_{rj} + \Delta y_r) - \min_j (y_{rj} + \Delta y_r) = \max_j y_{rj} + \Delta y_r - \min_j y_{rj} - \Delta y_r = \max_j y_{rj} - \min_j y_{rj}. \end{aligned}$$

Vidíme, že hodnoty R_i^x a R_r^y ostali v prípade voľby váh podľa (c) po posunutí vstupov a výstupov rovnaké. V prípade voľby váh podľa (d) a (f) postupujeme analogicky, a teda aditívny model s voľbou váh podľa (c), (d) alebo (f) je invariantný na posun.

Všimnime si, že ak by sme chceli aplikovať (1.9) na modely s voľbou váh (a), (b) alebo (e), posuny Δx_i a Δy_r sa neodčítajú a zostanú vo výsledku, a tým pádom tieto modely nie sú invariantné na posun.

1.5.2 Hodnota účelovej funkcie A_W z $[0, 1]$

Ešte potrebujeme vybrať také váhy, aby účelová funkcia A_W nadobúdala hodnoty z intervalu $[0, 1]$. Ukážeme, že práve voľby (c) a (f) spĺňajú túto vlastnosť.

Je zrejmé, že $A_W \geq 0$, pretože slacky s^x, s^y aj váhy w^x, w^y sú nezáporné.

Ešte potrebujeme dokázať $A_W \leq 1$, pričom najprv zvolíme voľbu váh podľa (c).

Chceme dokázať $A_W = (w^x)^T s^x + (w^y)^T s^y \leq 1$. Z modelu (1.4) vieme vyjadriť slacky

$$s^x = x_o - \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j, \quad (1.10)$$

$$s^y = \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - y_o. \quad (1.11)$$

Taktiež platí

$$\begin{aligned} \min_j x_{ij} \leq x_{ij} \leq \max_j x_{ij} &\Rightarrow \sum_{j=1}^n (\min_j x_{ij}) \lambda_j \leq \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \sum_{j=1}^n (\max_j x_{ij}) \lambda_j \Rightarrow \\ \min_j x_{ij} \sum_{j=1}^n \lambda_j &\leq \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \max_j x_{ij} \sum_{j=1}^n \lambda_j \Rightarrow \min_j x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \max_j x_{ij}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Analogicky pre výstupy y platí

$$\min_j y_{rj} \leq \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \leq \max_j y_{rj}. \quad (1.13)$$

Najprv dokážeme $s_i^x \leq R_i^x$

$$s_i^x = x_{io} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \max_j x_{ij} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \max_j x_{ij} - \min_j x_{ij} = R_i^x,$$

kde sme v poslednej nerovnosti využili (1.12).

Z toho vyplýva

$$\frac{s_i^x}{(m+s)R_i^x} \leq \frac{1}{(m+s)} \Rightarrow \frac{1}{(m+s)} \sum_{i=1}^m \left(\frac{s_i^x}{R_i^x} \right) = (w^x)^T s^x \leq \frac{m}{(m+s)}.$$

Podobne dokážeme $s_r^y \leq R_r^y$

$$s_r^y = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - y_{ro} \leq \max_j y_{rj} - y_{ro} \leq \max_j y_{rj} - \min_j y_{rj} = R_r^y,$$

kde sme v prvej nerovnosti využili (1.13). Z toho vyplýva

$$\frac{s_r^y}{(m+s)R_r^y} \leq \frac{1}{(m+s)} \Rightarrow \frac{1}{(m+s)} \sum_{r=1}^s \left(\frac{s_r^y}{R_r^y} \right) = (w^y)^T s^y \leq \frac{s}{(m+s)}.$$

Dostávame

$$A_W = (w^x)^T s^x + (w^y)^T s^y \leq \frac{m}{(m+s)} + \frac{s}{(m+s)} = 1.$$

Postup je analogický pri voľbe váh podľa (f), s výnimkou krajných bodov $x_{io} = \min_j x_{ij}$ a $y_{ro} = \max_j y_{rj}$, kde (ako sme uviedli vyššie) kladieme $A_W^* = 0$. Teda hodnota účelovej funkcie aj pri tejto voľbe váh bude spĺňať $A_W \in [0, 1]$.

Tento postup by sme nemohli aplikovať na voľbu váh podľa (d), v ktorej sa pracuje so smerodajnou odchýlkou, ani v prípade (b), kde sa pracuje s priemermi.

Toto môžeme vidieť na príklade dvoch producentov (ozn. A a B) s jedným vstupom a jedným výstupom. Zvolíme vstupy $x_A = 1$, $x_B = 7$ a výstupy $y_A = 5$, $y_B = 1$. Je zrejmé, že producent A je efektívny, a teda $s_A^x = 0$ a $s_A^y = 0$. Dosadíme do (1.10) a (1.11), z čoho dostaneme $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 0$. Ďalej z (1.10), (1.11) vypočítame $s_B^x = 6$ a $s_B^y = 4$.

Najprv zoberieme voľbu váh (1.6) (b). Vypočítame jednotlivé priemery a dostaneme $R_i^x = 4$, $R_r^y = 3$. Po dosadení do účelovej funkcie úlohy (1.4) dostaneme pre producenta B hodnotu $A_{W_O} = \frac{17}{12} > 1$.

Podobne vypočítame smerodajné odchýlky podľa (1.6) (d) a dostaneme $R_i^x = 3$, $R_r^y = 2$. Dosadíme do predpisu pre účelovú funkciu a dostaneme výsledok $A_{W_O} = 2 > 1$.

Vidíme teda, že v oboch prípadoch sme dostali hodnoty účelovej funkcie väčšie ako 1, teda voľba váh podľa (b) a (d) nebude pre nás vhodná. Preto budeme neskôr pracovať s aditívnym modelom s voľbou váh podľa (c) (taktiež nazývaný ako Range Adjusted Measure (RAM) model, podrobnejšie popísaný v [6]) alebo podľa (f).

Stručné zhrnutie vlastností aditívneho modelu pre jednotlivé voľby váh (a) – (f) možno vidieť v Tab. 1.2.

1.6 AR ohraničenia

Uvažujme teraz aditívny multiplikatívny model s váhami (1.7). Všimnime si, že máme veľkú voľnosť voľby váh u a v , ktoré sú ohraničené iba zdola kladnými vektormi w^x a w^y . Potom nastávajú situácie, v ktorých máme príliš veľa efektívnych DMU, pretože

Voľba váh	Invariantnosť na ZJ	Invariantnosť na P	Úč. funkcia $A_W \in [0, 1]$
(a)	+	–	+
(b)	+	–	–
(c)	+	+	+
(d)	+	+	–
(e)	+	–	+
(f)	+	+	+

Tabuľka 1.2: Vlastnosti aditívneho DEA modelu v závislosti od voľby váh

stačí mať minimálny jeden vstup alebo maximálny jeden výstup a už je *DMU* automaticky na hranici M . Aby sme takéto situácie obmedzili, potrebujeme k modelu (1.7) pridať vhodné ohraničenia na multiplikátory u a v .

Podľa [11] sa najčastejšie používajú nasledujúce ohraničenia na pomery multiplikátorov

$$d_{k,i} \leq \frac{v_i}{v_k} \leq h_{k,i} \quad \forall i, k \in \{1, \dots, m\}, \quad i > k, \quad (1.14)$$

$$D_{q,r} \leq \frac{u_r}{u_q} \leq H_{q,r} \quad \forall r, q \in \{1, \dots, s\}, \quad r > q, \quad (1.15)$$

kde $d_{k,i}, h_{k,i}, D_{q,r}$ a $H_{q,r}$ sú konkrétne dolné a horné hranice, ktoré môžu pomery váh $\frac{v_i}{v_k}$ a $\frac{u_r}{u_q}$ nadobúdať. Bez ujmy na všeobecnosti sme zvolili $i > k$ a $r > q$. Tieto ohraničenia je možné pridať k ľubovoľnému DEA modelu v multiplikatívnom tvare. Takéto modely sa označujú ako Assurance Region (AR) modely, pretože množina váh u a v sa zúži na istý región.

Ohraničenia v (1.14) a (1.15) je možné prepísať do lineárneho tvaru a rozpisovať na jednostranné ohraničenia. Podľa [11] dostaneme

$$v^T P \leq 0_\alpha^T, \quad u^T Q \leq 0_\beta^T, \quad (1.16)$$

v ktorých

$$P = \begin{pmatrix} d_{1,2} & -h_{1,2} & d_{1,3} & -h_{1,3} & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & d_{2,3} & -h_{2,3} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & -1 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

a

$$Q = \begin{pmatrix} D_{1,2} & -H_{1,2} & D_{1,3} & -H_{1,3} & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & D_{2,3} & -H_{2,3} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & -1 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

kde $P \in \mathbb{R}^{m \times \alpha}$, $Q \in \mathbb{R}^{s \times \beta}$, α je počet jednostranných ohraničení na vstupy a β je počet jednostranných ohraničení na výstupy.

Ak tieto ohraničenia pridáme k modelu (1.7), dostaneme aditívny multiplikatívny model s AR nadstavbou (1.19).

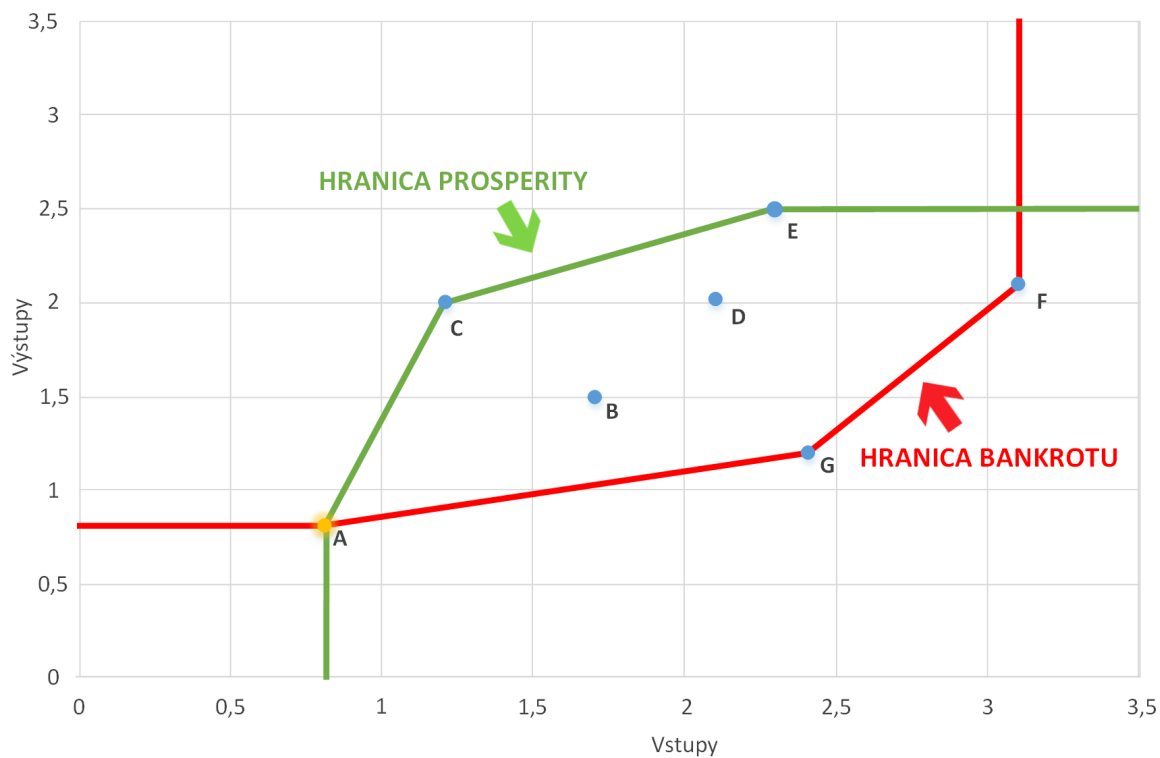
$$\begin{aligned} \min_{u,v,z} \quad & A_{AR} := v^T x_0 - u^T y_0 - z, \\ \text{s.t.} \quad & v^T x_j - u^T y_j - z \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & P^T v \leq 0_\alpha, \quad Q^T u \leq 0_\beta, \\ & u \geq w^y, v \geq w^x. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Pridaním ohraničení (1.16) sa zmenší množina prípustných u, v , a teda optimálne hodnoty účelovej funkcie sa zvýšia a počet efektívnych DMU sa zníži. Avšak nevhodnou voľbou ohraničení sa úloha lineárneho programovania môže stať neprípustnou.

1.7 Hranica prosperity a hranica bankrotu

Aditívny DEA model bežne graficky interpretujeme pomocou hranice efektivity resp. prosperity. Vtedy sa jedná o minimalizáciu vstupov a maximalizáciu výstupov so snahou zistiť, ktorá firma je najefektívnejšia. Avšak pri skúmaní bankrotu firiem sa na vstupy a výstupy budeme pozeráť opačne, pretože budeme zisťovať, ktoré firmy sú najhoršie. V tomto prípade pôjde o maximalizáciu vstupov a minimalizáciu výstupov, pričom najmenej efektívne firmy budú ležať na tzv. hranici bankrotu (po angl. bankruptcy frontier). Grafické znázornenie hranice prosperity a hranice bankrotu môžeme vidieť na Obr. 1.1. Body A, C, E ležia na hranici prosperity, teda model označil tieto firmy ako efektívne. Naopak, body A, G, F ležia na hranici bankrotu, čo znamená, že sú najmenej efektívne a veľmi pravdepodobne budú mať finančné problémy. Môžeme si všimnúť, že firma A leží aj na hranici prosperity a zároveň aj na hranici bankrotu. Je to spôsobené tým, že niektoré ukazovatele firmy A sú veľmi dobré a niektoré naopak veľmi zlé.

Zisťovať, ktoré firmy sa ocitli na hranici bankrotu budeme využitím štandardných modelov, kde iba vymeníme vstupy za výstupy. Naďalej však budeme v ďalšom označovať za výstupy tie ukazovatele, ktoré v snahe dostať sa na hranicu bankrotu minimalizujeme a za vstupy tie ukazovatele, ktoré maximalizujeme. Túto dohodu označovania



Obr. 1.1: Grafické zobrazenie hranice prosperity a hranice bankrotu

výstupov a vstupov budeme používať aj v tom prípade, keď budeme hovoriť o iných prístupoch k predikcii bankrotu.

V prvom rade potrebujeme zistiť, ktoré finančné ukazovatele je dobré použiť na identifikáciu bankrotu. Urobíme to aj na základe našich poznatkov z literatúry, ktorých prehľad uvádzame v nasledujúcej kapitole.

2 Prehľad používania modelov na predikciu bankrotu

V tejto časti podrobne spracujeme prehľad literatúry, ktorá sa v minulosti zaoberala predikciou bankrotov spoločností. V prípade použitia DEA modelov sa v jednotlivých článkoch budeme zameriavať na autormi zvolené modely, voľbu vstupov a výstupov, rozdiely v prístupoch k danej problematike a cieľoch ich analýz. Zhrnieme a porovnáme dosiahnuté výsledky, s ktorými budeme neskôr pracovať. Všetky finančné ukazovatele sú uvedené v anglickom jazyku, ktorých význam je vysvetlený neskôr na Obr. 2.5.

Podľa [16] firme hrozí bankrot vtedy, ak má problém s rentabilitou vloženého kapitálu, likviditou a výškou čistého pracovného kapitálu.

Rentabilita je finančný ukazovateľ, ktorý meria schopnosť firmy dosiahnuť zisk použitím vloženého kapitálu. Používa sa najmä:

- rentabilita celkového kapitálu = $EBIT / \text{Total capital}$,
- rentabilita aktív = $EBIT / \text{Total assets}$,
- rentabilita tržieb = EAT / Sales .

Likvidita je ukazovateľ, ktorý hovorí o schopnosti firmy splácať svoje záväzky. Rozlišuje sa:

- okamžitá likvidita = $\text{Short-term financial assets} / \text{Current liabilities}$,
- bežná likvidita = $\text{Current assets} / \text{Current liabilities}$,
- celková likvidita = $(\text{Current assets} - \text{Inventories}) / \text{Current liabilities}$.

Na predpoveď bankrotu možno zvoliť aj ďalšie ukazovatele, používané vo viacerých bankrotových modeloch, o ktorých budeme hovoriť v nasledujúcej časti.

2.1 Modely na predikovanie bankrotu v minulosti

Najprv spomenieme niekoľko najvýznamnejších testov a analýz z oblasti predikcie bankrotu v minulosti.

Podľa [3] a [27] jeden z prvých pokusov predikovať úpadok alebo bankrot bol uskutočnený Wiliamom Beaverom v roku 1967. Beaver zozbieral dáta z rokov 1954 - 1964 a ku každej zbankrotovanej firme priradil jednu zdravú na základe jej trhovej

hodnoty. Beaver skúmal pomocou jednorozmernej diskriminačnej analýzy 30 finančných ukazovateľov, z ktorých 14 sa ukázalo byť najvýznamnejších, a to konkrétne:

- Cash flow/Total debt,
- Net income/Total assets,
- Current assets/Total assets,
- Quick assets/Total assets,
- Working capital/Total assets,
- Cash/Total assets,
- Current assets/Current liabilities,
- Quick assets/Current liabilities,
- Cash/Current liabilities,
- Current assets/Sales,
- Quick assets/Sales,
- Working capital/Sales,
- Cash/Sales,

ktoré by sme podľa zavedeného označenia pomenovali výstupmi,

- Total debt/Total assets,

ktorý by sme označili ako vstup.

Výsledky ukázali, že najlepšími ukazovateľmi boli pomery Cash flow/Total debt a Total debt/Total assets. Beaver sa taktiež zaoberal metódou maximálnej vierohodnosti, ale bez významnejších výsledkov. Zároveň poznamenal, že aj keď on používal jednorozmerný model, bolo by dobré uvažovať aj viacrozmerný.

V roku 1968 sa podľa [1] a [27] Edward Altman prvýkrát pokúsil predikovať bankrot spoločností pomocou viacrozmerného prístupu, konkrétne technikou viacrozmernej diskriminačnej analýzy. V tom čase metóda diskriminačnej analýzy (MDA) nebola taká populárna ako regresná analýza.

MDA je štatistická technika používaná na klasifikáciu objektu do jednej z niekoľkých skupín na základe individuálnych charakteristík. Zvyčajne sa používa na klasifikovanie premennej do kvalitatívnej skupiny, napr. zbankrovaná alebo nezbankrovaná firma. Najprv je potrebné zozbierať dáta, v našom prípade finančné ukazovatele firiem. Potom je potrebné urobiť takú lineárnu kombináciu, ktorá najlepšie diskriminuje medzi jednotlivými ukazovateľmi, a to spôsobom, že sa ku každému ukazovateľu priradí jeden koeficient. Výsledkom bude číslo, ktoré zatriedi firmu do skupiny zbankrovaných alebo nezbankrovaných. MDA umožňuje analyzovať celý profil premenných naraz.

Altman testoval 33 zbankrovaných firiem, ku ktorým priradil 33 zdravých firiem, podobným spôsobom ako Beaver. Jednotlivé finančné ukazovatele boli rozdelené do piatich kategórií - likvidita, ziskovosť, pomer dlhu a vlastného kapitálu, solventnosť a ukazovatele aktivity.

Z pôvodných 22 možných finančných ukazovateľov bolo na základe viacerých

štatistických testov vybraných 5 takých, ktoré boli najlepšie na predikovanie bankrotu. Finálny model, nazývaný aj Z-skóre model, mal tvar:

$$Z = 1,2T_1 + 1,4T_2 + 3,3T_3 + 0,6T_4 + 0,999T_5, \quad (2.1)$$

kde

- T_1 = Working capital/Total assets,
- T_2 = Retained earnings/Total assets,
- T_3 = EBIT/Total assets,
- T_4 = Market value of equity/Total liabilities,
- T_5 = Sales/Total assets.

Poznamenajme, že všetky tieto ukazovatele môžeme chápať ako výstupy. Hranice jednotlivých oblastí boli dané nasledovne:

- $Z > 2,99$ - bezpečná zóna,
- $1,81 < Z < 2,99$ - šedá zóna,
- $Z < 1,81$ - zóna finančných ťažkostí.

Altman označil šedú zónu ako takú oblasť, v ktorej si nie je istý či firme hrozí bankrot alebo nie. Správnosť klasifikácie Altmanovho modelu bola 83,5% a bolo ukázané, že tento model dokáže predikovať bankrot 3 roky dopredu.

Neskôr v roku 1972 podľa [27] E. Deakin použil 14 najefektívnejších ukazovateľov z Beaverovej analýzy a použil ich v diskriminačnej analýze podobnej Altmanovmu modelu. Deakin chcel aplikovať dáta z obdobia 5 rokov pred bankrotom, ale vo svojej analýze zistil, že dôležitosť jednotlivých finančných ukazovateľov sa počas piatich rokov zmenila. Preto bol Deakin schopný správne predikovať bankrot najviac 3 roky dopredu rovnako ako Altman.

Podľa [27] v roku 1980 J. Ohlson použil alternatívnu metódu na predikciu bankrotu pomocou štatistickej pravdepodobnosti. V tejto metóde počítal parametre k vektoru finančných ukazovateľov a pozeral sa na pravdepodobnosti zbankrotovania pre jednotlivé parametre a ukazovatele. Snažil sa nájsť takú hodnotu pravdepodobnosti z intervalu $[0, 1]$, ktorá by oddeľovala zbankrotované a zdravé firmy. Avšak tento model bol nakoniec menej úspešný ako Altmanov model.

V roku 1984 podľa [27] M. Zmijewski skúmal metodologické nedostatky predošlých techník na predikciu bankrotu a chcel ich vylepšiť. Zaoberal sa najmä tým, že v predošlých analýzach sa pracovalo s nenáhodnými vzorkami dát, ktoré boli dopredu rozdelené. Zmijewski použil náhodné vzorkovanie v tzv. Probit modeli, čo je štatistický regresný model. Použil ukazovatele:

- Net income/Total assets,
 - Current assets/Current liabilities,
- ktoré môžeme chápať ako výstupy,
- Total debt/Total assets,

ktorý chápeme ako vstup.

Zmijewski zistil, že jeho výsledky sú kvalitatívne veľmi podobné tým, pri ktorých bolo použité nenáhodné vzorkovanie, a teda nedospel k žiadnemu výraznému pokroku.

Podľa [27] T. Shumway vytvoril v roku 2001 metódu na predikciu bankrotu používajúcu štatistický Hazard model so snahou analyzovať zmeny v čase. Zozbieral dáta za obdobie 31 rokov a použil rovnaké finančné ukazovatele ako Altman vo svojom Z-skóre modeli. Síce Shumwayov model dosahoval lepšie výsledky za obdobie 1 rok pred bankrotom, ale za obdobie 2 roky pred bankrotom boli výsledky výrazne horšie v porovnaní s Altmanovým modelom.

Podľa [27] bolo v tomto období veľa modelov porovnávaných práve s Altmanovým modelom, ktorý predstavoval akýsi štandard v oblasti predikcie bankrotu. V roku 2001 sa J. Grice a R. Ingram [10] pokúsili o generalizáciu Altmanovho Z-skóre modelu. Grice ukázal, že Altmanov model nebol úplne presný pre dáta z obdobia 1988 - 1991. Taktiež bolo ukázané, že Altmanov model je viac efektívny pre špecifickú vzorku priemyselných firiem ako pre všeobecnú vzorku firiem z rôznych odvetví.

Následne v roku 2004 S. Chava a R. Jarrow skúmali vplyv priemyselného odvetvia na predikciu bankrotu pomocou Hazard modelu. Ich výskum ukázal, že mesačné intervaly sú oveľa lepšie na predikovanie bankrotu ako ročné intervaly, pokiaľ sú dáta dostupné. Hazard model používal premenné z Altmanovho, Zmijewského a Shumwayovho modelu. Ukázalo sa, že zgrupovanie podľa priemyselného odvetvia má veľký vplyv na niektoré výsledné koeficienty.

Podľa [27] Edward Altman navrhol v roku 2000 ďalší model založený na predošlom Z-skóre modeli, avšak tentokrát špeciálne pre nepriemyselné firmy. Tento model mal tvar:

$$Z'' = 6,56T_1'' + 3,26T_2'' + 6,72T_3'' + 1,05T_4'', \quad (2.2)$$

kde

- T_1'' = Working capital/Total assets,
- T_2'' = Retained earnings/Total assets,
- T_3'' = EBIT/Total assets,
- T_4'' = Book value of equity/Total liabilities

sú všetko výstupy. Hranice jednotlivých oblastí sú dané nasledovne:

- $Z'' > 2,6$ - bezpečná zóna,
- $1,1 < Z'' < 2,6$ - šedá zóna,
- $Z'' < 1,1$ - zóna finančných ťažkostí.

Ako bolo ukázané vo výskume J. Gricea [10] v roku 2001, Altmanov originálny model je zameraný na priemyselné firmy, a tým pádom veľa ďalších modelov taktiež. Altmanov model pre nepriemyselné firmy nebol zatiaľ tak široko a podrobne analyzovaný ako ten pôvodný.

2.2 Obáľková analýza dát v súvislosti s bankrotom firiem

Modely na predikovanie bankrotu vieme rozdeliť na dve hlavné skupiny, a to na účtovne založené modely (Accounting-based models) a trhovo založené modely (Market-based models). Do prvej skupiny patria modely diskriminačnej analýzy, regresné modely, modely zamerané na analýzu prežitia a taktiež DEA modely. Trhovo založené modely sú väčšinou stochastické modely. V dnešnej dobe sa používajú aj tzv. hybridy, ktoré vznikajú kombináciou modelov z týchto dvoch skupín. Teraz sa budeme zaoberať literatúrou, ktorá sa venovala použitiu DEA modelov na predikciu bankrotov spoločností.

Podľa [27] v roku 1997 P. Simak prvýkrát porovnal Altmanove Z-skóre s výsledkami obáľkovej analýzy dát. Myšlienkou bolo ukázať, že DEA metóda by mohla byť taktiež vhodná na predikciu bankrotu. Simak tvrdil, že pri investovaní do firmy je dôležité zistiť, či je risk akceptovateľný vzhľadom na výnosy. Preto sa vo veľkom vyhľadávali a skúmali ukazovatele firiem, ktoré by mohli signalizovať budúce finančné ťažkosti.

Simak [24] vo svojom DEA modeli čerpal zo Z-skóre modelu. Finančné ukazovatele v menovateľoch určil ako výstupy a ukazovatele v číateľoch ako vstupy. Tento model neskôr ešte dvakrát mierne modifikoval.

Simak zozbieral dáta z rokov 1991 až 1995, kde bolo zahrnutých 426 zbankrotovaných spoločností s celkovým majetkom od 1 milióna do 15 miliónov. Z toho vybral náhodnú vzorku 43 firiem a ku každej priradil zdravú firmu podľa SIC kódu (Standard Industrial Classification code). Dáta boli rozdelené do troch skupín, podľa zostávajúcich rokov do bankrotu (v tomto prípade 1, 2 a 3 roky do bankrotu).

Odteraz budeme používať nasledovné:

- pravdepodobnosť správneho zaradenia zbankrotovanej firmy $P\left(\frac{BR}{BR}\right)$, kde BR v čítateľi označuje počet zbankrotovaných firiem na hranici bankrotu a BR v menovateli je počet všetkých zbankrotovaných firiem,
- pravdepodobnosť správneho zaradenia nebankrotovanej firmy $P\left(\frac{NBR}{NBR}\right)$, kde NBR v čítateľi sú také nebankrotované firmy, ktoré sa neocitli na hranici bankrotu a NBR v menovateli označuje všetky zdravé firmy spolu,
- celková správnosť predikcie CSP , ktorú počítame nasledovným spôsobom:

$$CSP = \frac{\# \text{ zbankrotovaných f.}}{\# \text{ všetkých f.}} \times P\left(\frac{BR}{BR}\right) + \frac{\# \text{ zdravých f.}}{\# \text{ všetkých f.}} \times P\left(\frac{NBR}{NBR}\right). \quad (2.3)$$

Simakovi sa podarilo dosiahnuť 75%-nú správnosť zaradenia zbankrotovanej firmy a 56%-nú správnosť klasifikácie zdravej firmy. Toto nízke percento odôvodňuje tým, že existujú viaceré firmy, ktoré síce prežili, ale boli veľmi blízko bankrotu. Celková správnosť predikcie modelu bola 63%. Simak takisto tvrdil, že výsledky by boli presnejšie

pri rozdelení firiem do konkrétnych priemyselných odvetví. Autor používal vo svojich analýzach výstupne orientovaný BCC model. Vyskúšal niekoľko testov aj so vstupne orientovaným BCC modelom a dostal veľmi podobné výsledky. Avšak podľa neho by bolo určite zaujímavé a prínosné použiť aj iný DEA model na predikciu bankrotu spoločností.

V tej dobe DEA modely neboli vôbec analyzované v súvislosti s predikciou bankrotu, a ukázalo sa, že takýto výskum by mal potenciál a bolo by prínosom začať sa ním zaoberať. V dnešnej dobe existuje veľa analýz založených na DEA modeloch, ktoré používajú finančné ukazovatele na predpoveď bankrotu. V nasledujúcej časti práce rozdelíme existujúce analýzy do niekoľkých kategórií, a to podľa použitého typu DEA modelu. Našou snahou bude zistiť, ktorý model je na predikciu bankrotu firiem najlepší a neskôr ho otestujeme na vlastných dátach. Pre lepšiu prehľadnosť použité vstupy a výstupy nebudeme vo väčšine prípadov uvádzať jednotlivo pri každom autovi, ale až na konci v súhrnných tabuľkách na Obr. 2.2 (použité vstupy), Obr. 2.3 (použité výstupy) a Obr. 2.4 (vysvetlenie skratiek finančných ukazovateľov).

2.2.1 Použitie Aditívneho modelu

V roku 2009 I. Premachandra, G. Bhabra a T. Sueyoshi napísali článok [22], v ktorom sa venovali téme predikcie bankrotu pomocou DEA metódy a logistickej regresie. Zobrali ročné dáta o 50-tich náhodných zbankrotovaných firmách z 1 roku pred bankrotom a údaje o 910-tich zdravých firmách. Rozhodli sa vo svojej analýze použiť aditívny DEA model s variabilnými výnosmi z rozsahu.

V prvom teste rozdelili firmy do skupín tak, aby v každej skupine bola práve 1 zbankrotovaná. Ku každej zbankrotovej firme boli priradené zdravé firmy na základe rovnakej trojčíselnej SIC klasifikácie odvetvia. Pravdepodobnosť správneho zaradenia zbankrotovej firmy vyšla 86% a správne zaradenie zdravej firmy bolo 67,75%. Celková správnosť predikcie modelu bola 69%.

V druhom teste bolo v každej skupine firiem niekoľko zbankrotovaných, opäť priradených podľa SIC kódu. Konkrétne pomery zbankrotovaných a zdravých firiem boli 1:1, 1:2, 1:3 a 1:4. Ukázalo sa, že pri všetkých pomeroch vie model veľmi dobre identifikovať zbankrotované firmy, väčší problém bol pri identifikovaní zdravých firiem. Napríklad pri pomere 1:2 bolo správne zaradených 88,9% zbankrotovaných firiem, ale iba 68,4% zdravých firiem.

Dôležitým testom bolo to, kde sa zdravé firmy nepriradzovali k zbankrotovaným na základe žiadneho ukazovateľa. V tomto prípade autori použili 50 zbankrotovaných firiem z celkového počtu 1583 firiem, čo oveľa viac pripomína reálnu situáciu. Teraz model správne určil 84% zbankrotovaných a 76,9% zdravých firiem. Celková správnosť predikcie vyšla 77%.

Autori porovnávali výsledky použitia DEA modelu s výsledkami z logistickej regresie. Záverom bolo, že logistická regresia je lepšia na identifikovanie zdravých firiem. Pri identifikovaní zbankrotovaných firiem logistická regresia dosiahla maximálne 64%, a teda na predikovanie bankrotu je podľa autorov vhodnejší aditívny DEA model.

V tom istom roku T. Suyeoshi a M. Goto zverejnili článok [25], v ktorom bolo cieľom porovnať DEA a DEA-DA model v oblasti predikovania bankrotu spoločností. DEA-DA model je založený na diskriminačnej analýze a vychádza zo Z-skóre modelu. Na porovnanie použili viacero DEA modelov, ale pracovali najmä s RAM modelom, ktorý bol podľa nich jediný z DEA modelov, ktorý je invariantný na posun.

Na testovanie použili dáta 50-tich zbankrotovaných a 951 zdravých firiem z rôznych odvetví z obdobia 1991 - 2004. V prvých testoch vychádzali percentá správnej predikcie zbankrotovaných firiem veľmi nízke (do 20%). Potom autori použili DEA-DA model v časovom horizonte, kde mali k dispozícii ročné údaje o 10 zbankrotovaných a 23 zdravých firmách za celé obdobie od roku 1996 do roku 2005. V tomto teste sa počítali odchýlky Altmanovho Z-skóre za určité obdobie. Výsledkom tohto článku bolo najmä porovnanie modelov DEA a DEA-DA, z čoho spomenieme iba najdôležitejšie poznatky.

Výhodou DEA-DA modelu je, že nepotrebuje rozdeliť dáta na vstupy a výstupy. Na rozdiel od DEA modelov, na všetky firmy sa dajú aplikovať rovnaké váhy a taktiež si tento model dokáže poradiť s nepomerom zbankrotovaných a nezbankrotovaných firiem vo vzorke dát. Avšak DEA-DA model na rozdiel od DEA modelu nevie určiť firmy, ktoré sa nachádzajú na hranici bankrotu. DEA modely merajú výkon a schopnosti firiem, zatiaľ čo DEA-DA model počíta Z-skóre. Záverom tejto analýzy bolo, že DEA-DA model v časovom horizonte je lepší ako DEA model, ale má problémy pri niektorých voľbách finančných ukazovateľov, napríklad rovnaké menovatele alebo pomer ukazovateľov rovný 1.

V roku 2011 už spomínaný Premachandra spolu s Y. Chenom a J. Watsonom [23] použili obyčajný aditívny model s VRS a taktiež aditívny superefektívny model na predikciu bankrotu. Superefektívny model porovnáva všetky *DMU* na hranici bankrotu.

Autori použili rovnaké dáta firiem ako sa používali v [25], teda mali k dispozícii 50 zbankrotovaných a k nim priradených 951 zdravých firiem. Tie testovali na 2 modeloch, na modeli bankrotu a na modeli úspechu (tam iba vymenili vstupy a výstupy). Autori počítali nasledovný koeficient predikcie (ozn. K):

$$K = \lambda\theta_1 - (1 - \lambda)\theta_2, \quad (2.4)$$

kde θ_1 je efektivita alebo superefektivita z modelu bankrotu a θ_2 je efektivita alebo superefektivita z modelu úspechu. λ je konštanta, ktorú mohli zvoliť podľa vlastného uváženia na základe toho, akú veľkú váhu chceli pripísať modelu bankrotu.

Ďalej autori použili tvz. cut-off bod na identifikáciu bankrotu. Firmy ktoré majú superefektivitu vyššiu alebo rovnú tejto hodnote sú považované za zbankrotované, a tie firmy, ktoré sú pod cut-off bodom sú predikované ako zdravé. Autori spravili viacero testov s rôznymi λ mi a cut-off bodmi. Prišli k záveru, že lepšie sa identifikujú zdravé firmy ako zbankrotované, a ak chceme identifikovať tie zbankrotované, odporúča sa použiť $\lambda = 0,5$, a cut-off = $-0,05$.

Poznamenajme, že v tomto článku autori počítajú hodnoty efektívít pomocou vzorcov, v ktorých vstupy a výstupy musia byť kladné. Avšak tento predpoklad nie je v článku uvedený a v prípade predikcie bankrotu spoločností máme tým pádom obmedzené používanie dát, pretože veľa finančných ukazovateľov môže byť záporných alebo nulových.

Takisto nám prišiel zaujímavý spôsob počítania koeficientu predikcie K . Hodnota θ_1 síce hovorí o tom, ako ďaleko sa firma nachádza od hranice bankrotu, pretože je to hodnota vypočítaná z modelu bankrotu. Avšak θ_1 sa kombinuje s hodnotou θ_2 , ktorá naopak hovorí o úspešnosti danej firmy. Keby sme napríklad mali zbankrotovanú firmu, hodnoty efektívít z jednotlivých modelov by mohli vyjsť napr. $\theta_1 = 1$ a $\theta_2 = 0,3$. Ak zvolíme $\lambda = 0,5$, výsledný koeficient predikcie bude rovný $K = 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,3 = 0,65$. Avšak rovnako môžeme zobrať aj veľmi dobrú firmu, ktorej efektivita z modelu bankrotu bude nízka, napr. $\theta_1 = 0,3$ a efektivita z modelu prosperity naopak vysoká, teda $\theta_2 = 1$. Dostaneme výsledok $K = 0,5 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 1 = 0,65$. Teda z výsledku $K = 0,65$ nevieme zistiť či bola pôvodná firma dobrá alebo zlá.

V roku 2012 J. Janová, J. Vavřina a D. Hampel [12] použili rovnako ako Premachandra aditívny DEA model s VRS na identifikovanie bankrotu priemyselných spoločností. Použili údaje o 54 zbankrotovaných a 795 zdravých firmách, ktoré boli rozdelené do 54 skupín, v každej 1 zbankrotovaná a niekoľko zdravých firiem. Najprv otestovali rozdiely v mediánoch finančných ukazovateľov pri zdravých a zbankrotovaných firmách. Pri všetkých ukazovateľoch okrem CATA (Current assets/Total assets) boli výrazné rozdiely, a preto zobrali do úvahy všetky ukazovatele okrem tohto jedného. Po aplikovaní DEA modelu bola výsledná pravdepodobnosť správneho zaradenia zbankrotovanej firmy až 94%, zdravej firmy 73% a celková správnosť predikcie vyšla 75%. Čím menej zdravých firiem bolo v jednotlivých vzorkách, tým bol model úspešnejší. Ukázalo sa, že aditívny DEA model je veľmi dobrý na identifikovanie zbankrotovaných priemyselných firiem, ale zároveň o niečo slabší na identifikovanie zdravých firiem.

V roku 2013 tí istí autori vydali článok [26], v ktorom sa opäť venovali tematike bankrotu. Cieľom ich analýzy bolo testovať a porovnať 4 rôzne modely na predikciu bankrotu v priemysle, a to aditívny DEA model, logistickú regresiu, Z-skóre model a model produkčných funkcií. Použili údaje o 2587 zdravých a 71 zbankrotovaných firmách z Čiech, Maďarska, Poľska a Slovenska z rokov 1998 - 2012. Dáta boli rozdelené podľa dĺžky periódy pred bankrotom, v tomto prípade 1, 2, 3 alebo 4 roky pred

bankrotom.

Autori najprv porovnávali Altmanovo Z-skóre a logistickú regresiu - Logit model. Testovalo sa správne identifikovanie zbankrotovaných firiem. Výsledkom bolo, že logistická regresia bola pre všetky periódy lepšia. V prvých dvoch rokoch bola celková správnosť predikcie logistickej regresie väčšia až o 10% v porovnaní s Altmanovým Z-skóre. Jej hodnoty pre prvé 2 roky boli 71,9% a 71,7%. Hlavným dôvodom bolo to, že parametre Logit modelu sa pre každú skupinu dát odhadujú samostatne, tým pádom máme pre každú skupinu tie najlepšie odhady. Naopak, v Altmanovom modeli sú parametre závislé od predošlých výsledkov. Navyše, v Logit modeli sa používa viac parametrov ako v Z-skóre modeli.

S produkčnou funkciou sa ťažko pracuje v tejto súvislosti, odhadovanie parametrov je veľmi náročné. Celková správnosť predikcie 1 rok pred bankrotom vyšla iba 53,1% a pre 4 roky pred bankrotom 50%. Keby sa nerozlišovala dĺžka obdobia do bankrotu, správnosť klasifikácie bude o niečo vyššia, ale výsledky budú aj tak horšie ako pre Logit model. Produkčná funkcia používa iba tri premenné, jej použitie by mohlo byť výhodné v prípade limitovaných dát.

Na testovanie DEA modelu autori náhodne rozdelili dáta z 1 roku pred bankrotom do 60-tich rôznych skupín obsahujúcich 1, 3, 5 alebo 8 zbankrotovaných firiem a 15, 30 alebo 45 zdravých firiem. Pre 1 zbankrotovanú firmu vo vzorke dát bola pravdepodobnosť správnej klasifikácie zbankrotovanej firmy 100%, teda táto 1 firma bola vždy správne zaradená na hranicu bankrotu. Síce aj niektoré zo zdravých firiem boli zaradené na hranicu bankrotu, ale v prvom rade išlo o správnu predikciu bankrotu. Sumárne výsledky celého testu boli nasledovné:

- pravdepodobnosť správneho zaradenia zbankrotovanej firmy $P\left(\frac{BR}{BR}\right) = \frac{163}{255} = 0,64$,
- pravdepodobnosť správneho zaradenia nezbankrotovanej firmy $P\left(\frac{NBR}{NBR}\right) = \frac{1720}{1800} = 0,96$,
- celková správnosť predikcie $CSP = 92\%$.

Aditívny DEA model sa zdá byť lepší ako ostatné, ak sa jedná o malý počet zbankrotovaných firiem v skupine dát. Čím viac zbankrotovaných firiem je vo vzorke, tým menej správna je predikcia. Preto je dobré robiť testy spôsobom, že zoberieme zdravé firmy, pridáme k nim neznámu firmu, a ak táto firma skončí na hranici bankrotu, je veľmi pravdepodobné, že bude mať v budúcnosti finančné problémy.

V tom istom roku M. Araghi a S. Makvandi [2] chceli zistiť, či dokážu DEA modely lepšie predikovať bankrot ako štatistické modely Logit a Probit alebo viacrozmerná diskriminačná analýza. Použili aditívny superefektívny DEA model a údaje o 55 zbankrotovaných a 134 zdravých priemyselných firmách z rokov 2000 - 2010. Výsledky ukázali, že Logit a Probit modely boli o niečo lepšie, aditívny DEA model a diskriminačná analýza boli na podobnej, o niečo nižšej úrovni. Autori navrhovali do budúcnosti použiť z DEA modelov aj BCC a CCR model, prípadne zakomponovať do testovania

aj infláciu.

O rok neskôr autori de Llano, Piñeiro a Rodríguez [15] použili aditívny DEA model na odhalenie zbankrotovaných firiem, ktorý porovnávali s logistickou regresiou a metódou diskriminačnej analýzy (MDA). Mali k dispozícii údaje o 75 640 firmách, z ktorých 384 bolo zbankrotovaných. Testy robili na náhodných vzorkách dát veľkosti 402 firiem. Správnosť zaradenia zbankrotovanej firmy vyšla najviac 82,7% a správnosť klasifikácie zdravej firmy najviac 79,8%. Výsledkom tejto analýzy bolo, že rovnako ako MDA a Logit model, tak aj DEA model je vhodný nástroj na predikciu bankrotu. Autori poznamenali, že tieto metódy by nemali byť vzájomne nezlúčiteľné alternatívy, ale naopak, mali by to byť komplementárne metódy, ktoré sa dopĺňajú, aby bol výsledok čo najlepší.

2.2.2 Použitie SBM modelu

V roku 2009 sa F. Liu a Ch. Chen venovali vo svojom článku [14] problematike bankrotu a jeho predikcie pomocou Slack-based Measure (SBM) modelu. Použili údaje o 24 firmách z oblasti bankovníctva za rok 2000, z ktorých 2 boli vyhlásené za zbankrotované. Autori použili okrem obvyčajného SBM modelu aj tzv. HypoSBM model, ktorý vedel zo všetkých zlých firiem odlíšiť tie najhoršie (podobný princíp ako pri superefektívnych modeloch). Výsledkom bolo, že model vyhodnotil 5 firiem ako zbankrotovaných, z čoho najhoršie výsledky mali práve tie 2 skutočne zbankrotované. Autori poznamenali, že vhodnou kombináciou SBM a HypoSBM modelu je možné dosiahnuť pôsobivé výsledky, ale zároveň tvrdia, že neexistuje perfektný model na predikciu bankrotu.

Môžeme si všimnúť, že autori použili také firmy, ktoré majú všetky finančné ukazovatele kladné. Vieme, že SBM model vie pracovať iba s kladnými vstupmi a výstupmi, hoci v prípade zbankrotovaných firiem je v skutočnosti veľa finančných ukazovateľov záporných, čo by obmedzilo správne použitie tohto modelu.

V roku 2012 A. Wilson [27] zverejnil svoju diplomovú prácu pod vedením J. Paradiho, týkajúcu sa analyzovania bankrotu spoločností, ktorá bola neskôr použitá aj v článkoch. Cieľom ich analýzy bolo porovnať v tejto súvislosti SBM model a Altmanov Z-skóre model.

Použitie výstupy v SBM modeli boli menovatele z Altmanovho Z-skóre modelu a použité vstupy boli čitatele z tohto modelu. Keďže v SBM modeli nie je možné použiť záporné čísla, jednotlivé finančné ukazovatele boli rozdelené na kladnú a zápornú časť. Autori použili dáta nepriemyselných firiem z obdobia od 1 do 5 rokov pred bankrotom a ku každej zbankrotovanej firme chceli priradiť zdravú firmu. Nie vždy sa im však podarilo údaje nájsť, a preto mali nakoniec v niektorých skupinách viac zbankrotovaných ako zdravých firiem, čo nie je veľmi reálna situácia. Dáta otestovali najprv dvakrát na Altmanovom Z'-skóre modeli a potom dvakrát na SBM modeli. Prvý z dvojice

	Počet rokov pred BR	$P(\frac{BR}{BR})$ v %	$P(\frac{NBR}{NBR})$ v %	CSP v %
1. Model	1	77,3	41,9	62,7
	2	59,1	35,5	49,3
	5	51,2	46,4	49,3
2. Model	1	77,8	47,5	63,5
	2	59,1	52,5	55,9
	5	35,1	63,9	49,3

Tabuľka 2.3: [27] Výsledky po použití 2 Altmanových modelov bez šedej zóny

	Počet rokov pred BR	$P(\frac{BR}{BR})$ v %	$P(\frac{NBR}{NBR})$ v %	CSP v %
1. Model	1	71,7	65,9	68,9
	2	51,1	68,3	59,3
	5	36,8	62,2	49,3
2. Model	1	78,6	62,9	71,4
	2	57,9	61,8	59,7
	5	38,5	70,4	54,7

Tabuľka 2.4: [27] Výsledky po použití 2 SBM modelov bez šedej zóny

modelov mal slúžiť na určenie cut-off bodu, ktorý oddeľuje zbankrotované firmy od zdravých. Tento bod sa potom použije v druhom zrevidovanom modeli s pozmenenými vstupnými dátami, napr. pridaným počtom zamestnancov, akcionárov. Výsledky jednotlivých modelov boli rozdelené na dve skupiny vzhľadom na šedú zónu, ktorú sme vysvetlili pri Altmanovom modeli (2.1). Prvá skupina brala do úvahy šedú zónu, zatiaľ čo druhá skupina šedú zónu do úvahy nebrala. Ukážku výsledkov pre 2 Altmanove modely bez šedej zóny pre obdobie 1, 2 a 5 rokov pred bankrotom je možné vidieť v Tab. 2.3.

Pre lepšie porovnanie, v Tab. 2.4 ukážeme výsledky aj pre 2 SBM modely bez šedej zóny pre rovnaké dáta. V tomto prípade má najlepšiu celkovú predikciu 2. DEA model (71,4%), a to pre dáta z 1 roku pred bankrotom. Celkovo vyšiel DEA model o trochu lepšie ako Altmanov model, samozrejme v prípade výsledkov vrátane šedej zóny boli všetky percentá o niečo vyššie. Obidva modely podobne identifikovali zbankrotované firmy, avšak DEA model o niečo lepšie zaradil nezbankrotované firmy. Altmanov model vo všetkých rokoch klasifikoval viac firiem medzi zbankrotované, a naopak DEA model počas prvých troch rokov klasifikoval viac firiem ako zdravých. Je zrejmé, že sa neoplatí používať dáta z obdobia až 5 rokov pred bankrotom, pretože výsledky sú veľmi slabé a nedá sa podľa nich dobre predikovať bankrot v budúcnosti.

Tu môžeme poznamenať, že autori si síce poradili so zápornými ukazovateľmi spôsobom, že ich rozdelili na 2 časti, ale zároveň si treba uvedomiť, že tým pádom zdvojnásobili počet vstupov a výstupov. To by mohlo mať za následok, že výsledky budú iné, ako keby sa použil pôvodný počet ukazovateľov na inom modeli ako SBM.

V roku 2015 M. Mousavi, J. Ouenniche a B. Xu napísali článok [17], v ktorom použili SBM model ako nadstavbu k iným modelom na predikciu bankrotu. Použili ho napr. v kombinácii s Altmanovým modelom, viacrozmernou diskriminačnou analýzou, Logit modelom, Probit modelom. Toto DEA modelovanie sa skladalo z troch krokov. Najprv zistili aké výnosy z rozsahu na dáta použiť, potom aplikovali SBM model, a nakoniec na všetky efektívne útvary aplikovali SBM superefektívny model.

Autori použili údaje o 211 zbankrotovaných a 1203 zdravých anglických firmách z rokov 1989 - 2006. Vstupy a výstupy záviseli vždy od konkrétne zvoleného modelu, na ktorý sa DEA nadstavba použila. Uvedieme napríklad použité ukazovatele v prípade Altmanovho modelu diskriminačnej analýzy:

- Working capital/Total assets,
- Retained earnings/Total assets,
- EBIT/Total assets,
- Market value of equity/Total debt,
- Sales/Total assets,

ktoré môžeme podľa zavedeného označenia všetky chápať ako výstupy.

Výsledkom bolo, že DEA nadstavba je hodnotným nástrojom na predikciu bankrotu a dajú sa pomocou nej dosiahnuť lepšie výsledky.

V roku 2017 S. Condello, A. del Pozzo, S. Loprevite a B. Ricca v [5] použili SBM model na predikovanie bankrotu a porovnali ho s diskriminačnou analýzou a logistickou regresiou. Pracovali s údajmi 8 zbankrotovaných a 161 zdravých talianskych firiem z rokov 2013 - 2014. Po aplikácii jednotlivých modelov sa ukázalo, že správnosť klasifikácie zdravých firiem pomocou DEA modelu vyšla iba 71,43%, čo je horší výsledok oproti MDA a Logit modelom, kde boli tieto percentá 98,76% a 99,38%. Naopak, čo sa týka správneho zaradenia zbankrotovaných firiem, SBM model bol najlepší, správne klasifikoval 62,50%, zatiaľ čo Logit model dosiahol správnosť iba 25% a MDA model dokonca iba 12,5%. Celková správnosť predikcie vyšla najvyššia pre Logit model (95,86%), zatiaľ čo pre SBM model vyšla najnižšia, a to 71,01%. Teda SBM model označuje príliš veľa firiem za zbankrotované, takmer 29% zdravých firiem model vyhodnotil nesprávne. Napriek tomu, ak sa zameriame na správne zaradenie zbankrotovaných firiem, tak SBM model je lepší ako MDA alebo Logit model.

2.2.3 Použitie CCR a BCC modelov

V roku 2002 sa autori P. Pille a J. Paradi [21] snažili odhaliť úpadok kanadských finančných inštitúcií Credit Unions. Použili modifikované CCR a BCC modely s VRS, ktoré porovnávali s ukazovateľom equity/asset a s modifikovaným Z-skóre modelom. Indikátor equity/asset hovorí o dlhu resp. o finančných investíciách danej firmy. Použité DEA modely sa líšili najmä v ohraničeniach a v použitých vstupných údajoch. Zistilo sa, že DEA modely sú porovnateľné s ukazovateľom equity/asset a dobre predikujú bankrot až 3 roky dopredu. Najlepšie výsledky boli pochopiteľne pre dáta 1 rok pred bankrotom. Modifikované Z-skóre nedosiahlo až také dobré výsledky ako DEA modely.

Ďalší výskum predikcie bankrotu pomocou DEA robili v roku 2004 A. Cielien, L. Peeters a K. Vanhoof. Článok [4] porovnával DEA s lineárnym programovaním a modelom rozhodovacieho stromu. Autori použili údaje o 90-tich zbankrotovaných a 276-tich zdravých firmách. Pracovali s nasledovnými finančnými ukazovateľmi:

- Equity/Total assets,
- Retained earnings/Total assets,
- Taxes/Short-term debt,
- Cash/Current assets,
- Inventories,
- Financial debt ratio,
- Gross return,
- Cash flow/Total debt,
- Net return,
- Current assets/Short term debts,
- Quick ratio,
- External liabilities/Total assets.

Ukazovatele, ktoré mali kladnú koreláciu s bankrotom boli zvolené za vstupy a tie ktoré nemali kladnú koreláciu s bankrotom boli výstupmi. Táto analýza ukázala, že DEA model je lepší na predikciu bankrotu ako LP model alebo model rozhodovacieho stromu.

V tom istom roku J. Paradi, M. Asmild a P. Simak [20] aplikovali „dobrý“ a „zlý“ DEA model na zbankrotované firmy. Pod zlým modelom budeme rozumieť taký model, ktorý identifikuje najhoršie firmy zo vzorky dát. Autori na testovanie použili vstupne a výstupne orientovaný BCC model (s variabilnými výnosmi z rozsahu). Mali 2 skupiny dát, jednu z roku 1996, druhú z roku 1997. Prvá skupina obsahovala 17 zbankrotovaných a 160 zdravých firiem, v druhej bolo 11 zbankrotovaných a 115 zdravých firiem.

Autori zvolili viacero kombinácií vstupov a výstupov spolu v 5 „dobrých“ modeloch, ktoré uvádzame v Tab. 2.5 (podľa nami zavedeného označenia, kde vstupy maximalizujeme a výstupy minimalizujeme).

Model	Výstupy	Vstupy
1	TA, IE	RE, WC, EB, CF
2	TA, SE	RE, EB
3	TA	RE, EB, CF
4	TA, TL	RE, WC, EB, EQ
5	IE, SE	RE, WC, EB, CF

Tabuľka 2.5: [20] Použité vstupy a výstupy v klasickom (dobrom) DEA modeli

Model	Výstupy	Vstupy
1	WC, CF	IE, SE
2	TA, WC, CF	IE, SE
3	CA, RE, EB, CF	TA, IE, SE, CL

Tabuľka 2.6: [20] Použité vstupy a výstupy v zlom DEA modeli

Jednotlivé skratky znamenajú nasledovné:

- TA - Total assets,
- IE - Interest expense,
- RE - Retained earnings,
- WC - Working capital,
- EB - Earnings before interest and taxes,
- CF - Cash flow,
- SE - Stability of earnings,
- TL - Total liabilities,
- EQ - Equity,
- CL - Current liabilities.

Všetky okrem 4. modelu klasifikovali bankrot na 100%, najlepšiu klasifikáciu zdravých firiem dosiahol 5. model (81%) a najhoršiu 4. model (64%).

V „zlom“ modeli boli zvolené vstupy a výstupy uvedené v Tab. 2.6. V tomto prípade 2. a 3. model identifikoval bankrot na 100%, ale percentá správnej klasifikácie nezbankrotovaných firiem boli výrazne menšie, najlepší bol model č. 3, a to dosiahol iba 41%.

Autori potom skombinovali jeden z „dobrého“ a jeden zo „zlého“ DEA modelu. Výsledky boli omnoho lepšie, podarilo sa im dosiahnuť správnosť klasifikácie 100% pri zbankrotovaných firmách a až 78% pri zdravých firmách. Výsledkom teda bolo, že autorom sa veľmi dobre podarilo identifikovať firmy, ktoré sú na tom najhoršie.

V roku 2012 sa autori A. Mukhopadhyay, S. Tiwari, A. Narsaria a B. Karma-ker [18] venovali predikcii bankrotu spoločností pomocou kombinácie DEA modelov a umelej inteligencie. Na svoju analýzu použili superefektívny vstupný CCR model. Mali

k dispozícii údaje o 1437 zdravých a 175 zbankrotovaných firmách z rôznych odvetví z rokov 1996 a 1997. Najprv použili spomínaný DEA model na zdravé firmy, aby určili ktoré sú na tom najhoršie. Tie potom zaradili do skupiny zbankrotovaných. Na takto vytvorených skupinách zdravých a zbankrotovaných firiem potom testovali neurónovú sieť. Ukázalo sa, že chyby 1. a 2. druhu sú pri tomto teste menšie, ak sa pred aplikáciou neurónovej siete použije aj DEA model. Teda autori prišli na to, že je výhodné použiť DEA modely aj pri aplikácii neurónovej siete na dáta.

V tom istom roku Z. Noor, T. Iskandar a N. Omar [19] použili výstupný BCC model, ktorého výsledky potom aplikovali na viacrozmerný Logit model. Model testovali na 68 firmách s finančnými ťažkosťami, z ktorých napokon 47 zbankrotovalo. Po aplikácii DEA modelu vyšla celková správnosť klasifikácie logistickej regresie 80,9%, a teda výsledkom bolo, že DEA modely v kombinácii s logistickou regresiou sú užitočným nástrojom na predikciu bankrotu.

V roku 2014 autorka A. Ferus [9] analyzovala finančné ťažkosti firiem vo forme úverových rizík pomocou DEA metód. Vo svojich testoch použila výstupný CCR model, ktorý porovnávala s lineárnou regresiou, diskriminačnou analýzou a metódou vnútorného bodu. Použila údaje poskytnuté bankou o 100 firmách, ktoré si zobrali pôžičku v rokoch 2001 - 2003. CCR model použila takým spôsobom, že hľadala najnižšie efektivity. Ak bola výsledná hodnota efektivity nižšia ako 0,4, riziko úpadku firmy v budúcnosti bolo veľmi veľké. Pravdepodobnosť správneho zaradenia zbankrotovanej firmy bola približne 78% a celková správnosť predikcie vyšla 81,5%. Po aproximácii DEA efektivity pomocou lineárnej regresie boli výsledky ešte lepšie ako predtým, pravdepodobnosť správneho zaradenia zbankrotovanej firmy bola 81% a celková správnosť predikcie až 83,5%. Záverom tohto článku bolo, že DEA metóda je porovnateľná, dokonca aj trochu lepšia na predikciu finančných ťažkostí firiem ako ostatné spomínané metódy.

Poznamenajme, že CCR model nie je invariantný na posun. Autori teda mohli použiť iba kladné finančné ukazovatele, čo môže byť v prípade zbankrotovaných firiem problematické. Takisto si všimnime, že autori v tejto časti používali CCR a BCC modely, ktoré patria medzi orientované DEA modely. Avšak v prípade predikcie bankrotu je podľa nás lepšie optimalizovať všetky ukazovatele súčasne, a nie sa zameriavať iba na vstupy alebo výstupy.

2.3 Prehľad a zhrnutie

V tejto časti práce sme uviedli rôzne prístupy ako predikovať bankrot firiem. Čo sa týka DEA modelov, stretli sme sa najmä s použitím aditívneho modelu, ale taktiež SBM, CCR a BCC modelov. Kvôli lepšej prehľadnosti sme pri väčšine článkov neuvá-

dzali jednotlivé vstupy a výstupy, ktoré boli použité na modelovanie. Prehľad vstupov (ukazovatele, ktoré autori maximalizovali) je možné vidieť na Obr. 2.2 a prehľad výstupov (ukazovatele, ktoré autori minimalizovali) na Obr. 2.3. Vysvetlenie jednotlivých skratiek použitých finančných ukazovateľov možno nájsť na Obr. 2.4.

Literatúra	Rok	Použitý DEA model	Vstupy			
[2]	2013	Aditívny superefektívny	TDE	TD	Collection period	
[4]	2004	DEA spojený s LP	TSD	Financial debt ratio	ELTA	
[5]	2017	SBM	TDTA	CLTA		
[9]	2014	CCR výstupný	NR	ETA	NIEQ	CACL
[12]	2012	Aditívny	TDTA	CLTA		
[14]	2008	SBM	Deposits	IE	NIE	
[15]	2014	Aditívny	TDTA	CLTA		
[18]	2012	CCR superefektívny	TDTA			
[19]	2012	BCC výstupný	TS			
[21]	2002	CCR, BCC	Total loans	Cash	EQ	NI
[22]	2007	Aditívny	TDTA	CLTA		
[23]	2011	Aditívny, aditívny superefektívny	TDTA	CLTA		
[24]	1997	BCC výstupný	MV	EBIT	RE	WC
[25]	2008	Aditívny s váhami (RAM)	TDTA			
[26]	2013	Aditívny	TDTA	CLTA		
[27]	2012	SBM	WC	RE	EBIT (resp. OI)	BV

Obr. 2.2: Zhrnutie použitých vstupov v jednotlivých publikáciách

Môžeme spomenúť, že v dnešnej dobe existuje viacero analýz, ktoré kombinujú DEA modely s inými metódami, často napríklad s umelou inteligenciou. Taktiež sa v oblasti predikovania bankrotu používajú rôzne indexy, ktoré umožňujú použiť DEA modely v časovom horizonte. Na takéto testy však treba komplexnejšie dáta z viacerých rokov pred bankrotom pre tie isté firmy, čo môže byť viac náročné.

Literatúra	Rok	Použitý DEA model	Výstupy									
[2]	2013	Aditívny superefektívny	NIEQ	NRWC	CFTD	IN turnover						Quick ratio
[4]	2004	DEA spojený s LP	EQTA	RETA	Cash/CA	IN	GR	CFTD	NR	CACL		
[5]	2017	SBM	CFTA	NITA	WCTA	CATA	ETA	EBIE	MVBV			
[9]	2014	CCR výstupný	Daily return	TL*100/TA								
[12]	2012	Aditívny	CFTA	ETA	NITA	WCTA	ES	BVTD				
[14]	2008	SBM	Total loans	II	III							
[15]	2014	Aditívny	NITA	CFTA	ETA	EBFE	AVBV	CATA	WCTA			
[18]	2012	CCR superefektívny	CACL	NRTA	NWCTA	CATA	ETA	MVBV	EBIE			
[19]	2012	BCC výstupný	TA	TL								
[21]	2002	CCR, BCC	NIE	Deposits	IE							
[22]	2007	Aditívny	CFTA	NITA	WCTA	CATA	ETA	MVBV	EBIE			
[23]	2011	Aditívny, aditívny superefektívny	CFTA	NITA	WCTA	CATA	ETA	MVBV				
[24]	1997	BCC výstupný	TA	TL								
[25]	2008	Aditívny s váhami (RAM)	NITA	CFTA	CATA	ETA	WCTA	EBIE	MVBV			
[26]	2013	Aditívny	CFTA	CATA	ETA	NITA	WCTA	ES	BVTD			
[27]	2012	SBM	TA	TL								

Obr. 2.3: Zhrnutie použitých výstupov v jednotlivých publikáciách

BV	Book value of equity
CA	Current assets
EBIT	Earnings before interest and taxes
EQ	Equity
GR	Gross return
IE	Interest expenses
II	Interest income
IN	Inventories
MV	Market value of equity
NI	Net income
NIE	Non-interest expenses
NII	Non-interest income
NR	Net return
OI	Operating income
RE	Retained earnings
TA	Total assets
TD	Total debt
TL	Total liabilities
TS	Total sales
WC	Working capital
AVBV	Added value of equity/Book value of equity
BVTD	Book value of equity/Book value of total debt
CACL	Current assets/Current liabilities
CATA	Current assets/Total assets
CFTA	Cash flow/Total assets
CFTD	Cash flow/Total debt
CLTA	Current liabilities/Total assets
EBFE	EBIT/Financial expenses
EBIE	EBIT/Interest expense
ELTA	External liabilities/Total assets
EQTA	Equity/Total assets
ES	EBIT/Sales
ETA	EBIT/Total assets
MVBV	Market value of equity/Book value of equity
NIEQ	Net income/Equity
NITA	Net income/Total assets
NRTA	Net return/Total assets
NRWC	Net return/Working capital
NWCTA	Net working capital/Total assets
RETA	Retained earnings/Total assets
TDE	Total debt/Equity
TDTA	Total debt/Total assets
TSD	Taxes/Short-term debt
WCTA	Working capital/Total assets

Obr. 2.4: Vysvetlenie jednotlivých skratiek finančných ukazovateľov použitých na Obr. 2.2 a Obr. 2.3

Added value of equity	Pridaná hodnota majetku
Book value of equity	Účtovná hodnota majetku
Book value of total debt	Účtovná hodnota celkového dlhu
Cash	Peňažné prostriedky
Cash flow	Peňažný tok
Collection period	Inkasné obdobie
Current assets	Obežné aktíva
Current liabilities	Krátkodobé záväzky
Daily return	Denný obrat
Deposits	Vklady
Earnings after taxes	Zdanený čistý zisk
Earnings before interest and taxes	Nezúročený a nezdanený čistý zisk
Equity	Majetok
External liabilities	Zahraničné záväzky
Financial debt ratio	Ukazovateľ finančného dlhu
Financial expenses	Finančné výdavky
Gross return	Hrubý zisk
Interest expenses	Úrokové výdavky
Interest income	Príjem z úrokov
Inventories	Zásoby
Inventory turnover	Obrat tovaru
Market value of equity	Trhová hodnota majetku
Net income	Čistý príjem
Net return	Čistý zisk
Net working capital	Čistý obežný kapitál
Non-interest expenses	Neúrokové výdavky
Non-interest income	Ostatné príjmy okrem príjmov z úrokov
Operating income	Prevádzkový príjem
Quick assets	Likvidné aktíva
Quick ratio	Ukazovateľ krátkodobej likvidity
Retained earnings	Nerozdelený zisk
Sales	Tržby
Short-term debt	Krátkodobý dlh
Short-term financial assets	Krátkodobý finančný majetok
Stability of earnings	Stabilita ziskov
Taxes	Dane
Total assets	Celkové aktíva
Total capital	Celkový kapitál
Total debt	Celkový dlh
Total liabilities	Celkové záväzky
Total loans	Celkové pôžičky
Total sales	Celkové tržby
Working capital	Obežný kapitál

Obr. 2.5: Preklad finančných ukazovateľov do slovenčiny

3 Aplikácia modelov na slovenských firmách

V tejto časti práce budeme používať vybrané modely z 2. kapitoly. Použijeme vlastné dáta, na ktorých budeme modely testovať a výsledky navzájom porovnáme. Taktiež navrhne vlastnú analýzu na predikciu bankrotu pomocou DEA modelov.

3.1 Voľba vhodných dát

Finančné údaje slovenských firiem máme z finančných závierok z databázy Finstat za roky 2010 až 2016. Sú to firmy z viacerých odvetví, pričom dáta v každom roku vieme rozdeliť na skupinu zdravých firiem a na skupinu firiem, ktoré nasledujúci rok zbankrotovali. Z týchto údajov budeme vyberať menšie skupiny dát podľa určitých zvolených parametrov. Rozhodli sme sa miesto pomerov finančných ukazovateľov, ktoré boli použité vo viacerých článkoch, použiť iba samotné ukazovatele, podobne ako v [27] resp. [20]. Je lepšie aplikovať aditívny model s variabilnými výnosmi z rozsahu na „surové“ dáta (raw data), s ktorými si vie tento model v prípade firiem podobnej veľkosti dobre poradiť. Nami použité vstupy a výstupy je možné vidieť v Tab. 3.7.

Keďže budeme pracovať s modelom invariantným na zmenu jednotiek (viď. Kap.3.2), môžeme dáta normalizovať spôsobom, že každý stĺpec vstupov a výstupov predelíme najväčšou hodnotou v danom stĺpci. Spravíme to preto, aby sme nemuseli počítat s

Výstupy	Vstupy
Obežný majetok (Current Assets)	Krátkodobé záväzky (Current Liabilities)
EBIT (Earnings Before Interest and Taxes)	Celkový dlh (Total Debt)
Čistý pracovný kapitál (Net Working Capital)	
Tržby (Sales)	

Tabuľka 3.7: Voľba výstupov a vstupov v našich testoch

veľmi veľkými číslami.

3.2 Aplikácia aditívneho obáľkového modelu s váhami

V prechádzajúcej kapitole sme zistili, že viacerí autori používali na predikciu bankrotov firiem aditívny DEA model, konkrétne v článkoch [22], [23], [25], [12], [26], [2] a [15]. Vzhľadom na poznatky z 1. časti práce sme sa rozhodli použiť aditívny DEA model s váhami, kde váhy budeme voliť podľa (1.6) (c) alebo (f), pretože iba pri týchto voľbách máme zaručenú invariantnosť na posun a na zmenu jednotiek. Model sme naprogramovali v matematickom softvéri Matlab a zdrojový kód je možné vidieť v *Prílohe A*.

V tejto časti budeme robiť podobné testy ako autori Premachandra, Chen a Watson v [23]. Zaujala nás ich analýza, konkrétne určovanie koeficientu bankrotu na základe modelu úspechu a modelu bankrotu.

3.2.1 Voľba váh (c)

Na naše dáta použijeme aditívny model s váhami v obáľkovom tvare, kde najprv zvolíme váhy podľa (1.6) (c). Použijeme model bankrotu, potom model prosperity, čo znamená, že v nich budú vstupy a výstupy vymenené. Kombináciou týchto modelov budeme počítať koeficient (ozn. K'), ktorý bude udávať riziko bankrotu danej spoločnosti:

$$K' = \lambda\theta_1 + (1 - \lambda)(1 - \theta_2), \quad (3.1)$$

kde θ_1 je efektivita modelu bankrotu a θ_2 je efektivita modelu prosperity. Všimnime si, že náš výpočet koeficientu K' je mierne odlišný od výpočtu koeficientu K v (2.4). Tým, že θ_2 hovorí o efektivite danej firmy, prišlo nám rozumnejšie pracovať s hodnotou $(1 - \theta_2)$, aby výsledný koeficient hovoril o neefektivite. V druhej kapitole sme spomínali, že je ťažko povedať o čom hovorí koeficient K , ktorý použili autori v [23]. Efektivitu budeme pre lepšiu zrozumiteľnosť počítať nasledovným spôsobom:

$$E = 1 - [(w^x)^T s^x + (w^y)^T s^y].$$

Parameter λ budeme voliť podľa toho, aký dôraz chceme dať na jednotlivé modely. Modely budeme testovať vždy na skupine 5-tich zbankrotovaných a 30-tich zdravých firmách, čo sa po viacerých testoch ukázalo byť ako vhodný pomer firiem.

Spravíme 3 rôzne testy, kde použijeme dáta z rokov 2014, 2015 a 2016. Na Obr. 3.6 možno vidieť výsledky pre dáta z roku 2016. Pri firmách B označuje zbankrotované firmy a N nezbankrotované. V tabuľke sú uvedené výsledky obidvoch modelov a taktiež výsledné koeficienty K' pre $\lambda = 0,5$ a $\lambda = 0,75$.

Firma (B/N)	efektivita θ_1	efektivita θ_2	K' (pre $\lambda = 0,5$)	K' (pre $\lambda = 0,75$)
B	1	0,9507	0,5247	0,7623
B	1	1	0,5000	0,7500
B	1	1	0,5000	0,7500
B	1	0,7704	0,6148	0,8074
B	1	0,9448	0,5276	0,7638
N	0,7310	1	0,3655	0,5483
N	0,7872	1	0,3936	0,5904
N	1	0,9756	0,5122	0,7561
N	1	0,9941	0,5030	0,7515
N	0,9764	0,9962	0,4901	0,7333
N	1	1	0,5000	0,7500
N	1	0,9872	0,5064	0,7532
N	0,9606	0,9913	0,4847	0,7226
N	0,9953	0,9891	0,5031	0,7492
N	1	0,9938	0,5031	0,7516
N	0,9873	0,9885	0,4994	0,7434
N	0,9856	0,9900	0,4978	0,7417
N	0,9800	0,9810	0,4995	0,7398
N	0,8278	1	0,4139	0,6209
N	0,9771	0,9806	0,4983	0,7377
N	0,9705	0,9604	0,5051	0,7378
N	0,9846	0,9958	0,4944	0,7395
N	0,9802	1	0,4901	0,7352
N	0,9840	1	0,4920	0,7380
N	0,9929	0,9938	0,4996	0,7462
N	0,9877	1	0,4939	0,7408
N	0,9910	0,9945	0,4983	0,7446
N	0,9931	0,9960	0,4986	0,7458
N	0,9864	0,9990	0,4937	0,7401
N	0,8963	1	0,4482	0,6722
N	1	0,9441	0,5280	0,7640
N	0,9680	0,9588	0,5046	0,7363
N	0,9878	0,9708	0,5085	0,7482
N	0,9972	0,9929	0,5022	0,7497
N	0,9447	0,8941	0,5253	0,7350

Obr. 3.6: Výsledky aditívneho obáľkového modelu s váhami pre dáta z r. 2016 (váhy podľa (c))

Vidíme, že podľa prvého modelu skončilo na hranici bankrotu 11 firiem, z čoho všetkých 5 zbankrotovaných bolo správne určených. Zaujímavé je, že niektoré z týchto firiem sa ocitli podľa druhého modelu aj na hranici prosperity. Dôvodom je to, že tieto firmy mali niektoré ukazovatele minimálne a niektoré naopak maximálne, tým pádom sa ocitli na obidvoch hraniciach.

Chceli by sme, aby na hranici bankrotu ostalo čo najmenej zdravých firiem a čo najviac zbankrotovaných. Vypočítali sme koeficient K' a zvýraznili 5 najvyšších hodnôt v každom stĺpci. Pre obidve lambdy by sme však podľa tohto postupu určili správne iba 3 zbankrotované firmy z 5, čo nie je veľmi dobrý výsledok. Na druhú stranu, 4 zdravé firmy, ktoré model predtým vyhodnotil ako zbankrotované, by sme zaradili medzi zdravé. Zároveň si môžeme všimnúť, že hodnoty efektív θ_1 a θ_2 sú celkovo vysoké. Preto spravíme rovnaký test na modeli s voľbou váh podľa (1.6) (f), a ak budú hodnoty efektív zmyslupnejšie, budeme pracovať už len s takou voľbou váh.

3.2.2 Voľba váh (f)

Teraz spravíme test na rovnakých dátach, ale použijeme aditívny model s voľbou váh podľa (1.6) (f). Na Obr. 3.7 si môžeme všimnúť, že hodnoty efektivity nie sú tak blízko

Firma (B/N)	efektivita θ_1	efektivita θ_2	K' (pre $\lambda = 0,5$)	K' (pre $\lambda = 0,75$)
B	1	0,6517	0,6742	0,8371
B	1	1	0,5000	0,7500
B	1	1	0,5000	0,7500
B	1	0,4408	0,7796	0,8898
B	1	0,7631	0,6185	0,8092
N	0,6891	1	0,3446	0,5168
N	0,6483	1	0,3242	0,4862
N	1	0,7838	0,6081	0,8041
N	1	0,8720	0,5640	0,7820
N	0,6770	0,9320	0,3725	0,5248
N	1	1	0,5000	0,7500
N	1	0,8246	0,5877	0,7939
N	0,7392	0,8344	0,4524	0,5958
N	0,8073	0,8198	0,4938	0,6505
N	1	0,8246	0,5877	0,7939
N	0,7098	0,8241	0,4429	0,5763
N	0,6996	0,8307	0,4345	0,5670
N	0,7130	0,8190	0,4470	0,5800
N	0,6718	1	0,3359	0,5039
N	0,6864	0,8589	0,4138	0,5501
N	0,7011	0,7910	0,4551	0,5781
N	0,6943	0,8622	0,4161	0,5552
N	0,6777	1	0,3389	0,5083
N	0,6909	1	0,3455	0,5182
N	0,7217	0,8291	0,4463	0,5840
N	0,7030	1	0,3515	0,5273
N	0,7274	0,8495	0,4390	0,5832
N	0,7644	0,8407	0,4619	0,6131
N	0,6969	0,9354	0,3808	0,5388
N	0,6992	1	0,3496	0,5244
N	1	0,7761	0,6120	0,8060
N	0,7018	0,7844	0,4587	0,5803
N	0,7692	0,7600	0,5046	0,6369
N	0,7830	0,8259	0,4786	0,6308
N	0,7916	0,4969	0,6474	0,7195

Obr. 3.7: Výsledky aditívneho obáľkového modelu s váhami pre dáta z r. 2016 (váhy podľa (f))

1 ako v predošlom prípade. Inak sa výsledky samozrejme nezmenili, pretože útvary na hranici bankrotu sú určené rovnako v prípade ľubovoľnej voľby váh z (1.6). Pre lepšiu interpretáciu budeme odteraz pracovať s voľbou (f).

Ešte chceme tento model otestovať na 2 skupinách dát, aby sme výsledky mohli lepšie porovnávať. Zoberieme rovnaké počty zdravých a zbankrotovaných firiem, tentokrát z roku 2015. Výsledky je možné vidieť na Obr. 3.8. Vidíme, že v tomto prípade aditívny model správne zaradil na hranicu bankrotu 4 z 5 zbankrotovaných firiem. Dve z nich ležia aj na hranici prosperity, a preto sú koeficienty K' pri týchto firmách nižšie ako v prípade niektorých zdravých firiem. Ak vezmeme do úvahy 5 najvyšších

Firma (B/N)	efektivita θ_1	efektivita θ_2	K' (pre $\lambda = 0,5$)	K' (pre $\lambda = 0,75$)
B	1	0,6956	0,6522	0,8261
B	1	1	0,5000	0,7500
B	0,6933	0,6645	0,5144	0,6039
B	1	1	0,5000	0,7500
B	1	0,4881	0,7560	0,8780
N	0,6909	1	0,3455	0,5182
N	0,7198	1	0,3599	0,5399
N	1	1	0,5000	0,7500
N	0,6826	0,9156	0,3835	0,5331
N	1	0,4944	0,7528	0,8764
N	0,7127	0,9229	0,3949	0,5538
N	0,6953	1	0,3477	0,5215
N	0,6778	1	0,3389	0,5084
N	1	1	0,5000	0,7500
N	0,6270	1	0,3135	0,4703
N	1	1	0,5000	0,7500
N	0,6675	1	0,3338	0,5006
N	0,6912	1	0,3456	0,5184
N	0,7263	0,5727	0,5768	0,6516
N	0,7035	0,7428	0,4804	0,5919
N	0,7431	1	0,3716	0,5573
N	1	1	0,5000	0,7500
N	0,7364	0,5747	0,5809	0,6586
N	0,7360	1	0,3680	0,5520
N	1	1	0,5000	0,7500
N	0,6047	1	0,3024	0,4535
N	1	0,8222	0,5889	0,7945
N	0,8611	0,8272	0,5170	0,6890
N	1	1	0,5000	0,7500
N	1	0,6171	0,6915	0,8457
N	0,6305	1	0,3153	0,4729
N	0,6672	1	0,3336	0,5004
N	0,6870	0,6478	0,5196	0,6033
N	0,6750	0,7313	0,4719	0,5734
N	1	1	0,5000	0,7500

Obr. 3.8: Výsledky aditívneho obáľkového modelu s váhami pre dáta z r. 2015 (váhy podľa (f))

koeficientov K' , tak z hranice bankrotu zmiznú 2 zbankrované a 7 zdravých firiem.

Ešte nás čaká posledný test v tejto časti, a to pre dáta z roku 2014. Výsledky možno vidieť na Obr. 3.9. Tentokrát model bankrotu vyhodnotil správne 4 z 5 zbankrovaných firiem, z ktorých jedna leží podľa modelu prosperity aj na hranici efektivity. Na základe výsledných koeficientov K' by sme správne určili 3 z 5 zbankrovaných firiem, ktorým pre $\lambda = 0,75$ prislúchajú hodnoty 88,81%, 90,33% a 87,68%.

Takéto počítanie koeficientov ako kombinácia efektív z modelu bankrotu a modelu prosperity nie je zlá myšlienka, pre $\lambda = 0,75$ dostaneme zmysluplné percentá efektivity. Vyskúšali sme aj iné hodnoty λ , ale zistili sme, že nie je jednoduché odstrániť zdravé firmy z hranice bankrotu bez toho, aby sme odstránili aj tie zbankrované. Ak nám ide o správne určenie čo najväčšieho počtu zbankrovaných firiem, tak je lepšie použiť iba model bankrotu a nepočítať koeficienty K' .

Pre porovnanie s článkom [23], ako sme už vyššie spomínali, naše výsledné koefi-

Firma (B/N)	efektivita θ_1	efektivita θ_2	K' (pre $\lambda = 0,5$)	K' (pre $\lambda = 0,75$)
B	1	0,4477	0,7762	0,8881
B	1	0,3868	0,8066	0,9033
B	1	0,4930	0,7535	0,8768
B	0,5599	0,5237	0,5181	0,5390
B	1	1	0,5000	0,7500
N	1	0,4355	0,7823	0,8911
N	0,6359	0,8043	0,4158	0,5259
N	1	0,8245	0,5878	0,7939
N	0,5481	0,7230	0,4126	0,4803
N	0,5847	0,5109	0,5369	0,5608
N	0,6186	1	0,3093	0,4640
N	0,7289	0,5177	0,6056	0,6673
N	0,5569	1	0,2785	0,4177
N	0,5630	0,8402	0,3614	0,4622
N	0,5506	1	0,2753	0,4130
N	0,5595	1	0,2798	0,4196
N	0,5398	0,6504	0,4447	0,4923
N	0,5980	0,6085	0,4948	0,5464
N	0,5781	0,8009	0,3886	0,4834
N	0,6087	0,4851	0,5618	0,5853
N	1	1	0,5000	0,7500
N	0,6020	0,5358	0,5331	0,5676
N	0,7571	1	0,3786	0,5678
N	0,6453	0,6140	0,5157	0,5805
N	0,5628	0,8714	0,3457	0,4543
N	0,5050	1	0,2525	0,3788
N	0,4853	1	0,2427	0,3640
N	0,7450	0,8463	0,4494	0,5972
N	0,6861	1	0,3431	0,5146
N	1	0,6470	0,6765	0,8383
N	0,5736	0,7293	0,4222	0,4979
N	0,5965	0,7075	0,4445	0,5205
N	0,5332	0,8776	0,3278	0,4305
N	0,5178	1	0,2589	0,3884
N	1	0,8268	0,5866	0,7933

Obr. 3.9: Výsledky testovania podľa [23] pre dáta z r. 2014 (váhy podľa (f))

cienty K' sú podľa nás lepšie interpretovateľné ako ich koeficienty K .

3.3 Aplikácia aditívneho multiplikatívneho modelu s AR nadstavbou

Rozmýšľali sme, akým iným spôsobom obmedziť počet zdravých firiem na hranici bankrotu. Rozhodli sme sa k aditívnemu multiplikatívnemu modelu s váhami (podľa (f)) pridať AR ohraničenia, o ktorých sme hovorili v Kap. 1.6. Tento postup nebol doteraz použitý v žiadnej literatúre v súvislosti s predikciou bankrotu spoločností. Použijeme rovnaké dáta ako v prípade aditívneho obáľkového modelu v predošlej časti, aby sme výsledky mohli porovnať.

Najprv sme použili aditívny multiplikatívny model s váhami (1.7), aby sme vypočítali koeficienty u_r a v_i . Potom sme vedeli vypočítať dolné a horné ohraničenia $d_{k,i}$,

$h_{k,i}$ z (1.14) a $D_{q,r}$, $H_{q,r}$ z (1.15). Vypočítali sme matice P a Q z (1.17) a (1.18) a následne použili model (1.19). Zdrojový kód pre tento model je uvedený v *Prílohe B*.

3.3.1 Zužovanie intervalov pre pomery váh

Aby sme dosiahli menší počet firiem na hranici bankrotu, nestačí iba vypočítať dolné a horné hranice $d_{k,i}$, $h_{k,i}$ a $D_{q,r}$, $H_{q,r}$. Tieto intervaly medzi dolnou a hornou hranicou je potrebné ešte nejakým vhodným spôsobom zúžiť tak, aby na hranici ostalo čo najviac zbankrotovaných firiem a zároveň čo najmenej zdravých firiem.

Robili sme veľa testov, aby sme zistili ako vhodne ohraničiť pomery váh. Pozorovaním sme prišli na to, že zdravé firmy, ktoré sa ocitli na hranici bankrotu, skoro všetky obsahovali nejakú spodnú hranicu $d_{k,i}$ alebo $D_{q,r}$. Preto sme začali intervaly zužovať zdola, a zdravé firmy naozaj ubúdali z hranice bankrotu. Chceli sme otestovať aj zužovanie intervalov zhora, ale zistili sme, že to nemalo žiaden významný vplyv na elimináciu zdravých firiem z hranice. Potom sme už iba potrebovali nájsť také dolné ohraničenie intervalov, aby sme tento postup vedeli aplikovať na viacero skupín dát.

Je zrejmé, že zúženie intervalu o nejakú konštantu nebude fungovať pre rôzne vzorky dát, keďže v odlišných skupinách máme rádovo odlišné hodnoty pomerov $\frac{v_i}{v_k}$, $\frac{u_r}{u_q}$. Navyše, niektoré okrajové hodnoty sa niekoľkonásobne líšili od ostatných hodnôt vo vnútri intervalu. Preto sme sa rozhodli zúžené intervaly vytvárať tak, že sme k dolnej hranici pripočítali isté percento z priemernej hodnoty daného vektoru pomerov. Toto percento nemohlo byť príliš malé, inak by sa počet firiem na hranici vôbec nezmenil, ale ani príliš veľké, aby sme z hranice neodstránili aj zbankrotované firmy.

3.3.2 Testovanie na dátach

Najprv sme sa dolné hranice intervalov rozhodli zúžiť nasledovne:

$$d'_{k,i} = d_{k,i} + \text{mean} \left(\frac{v_i}{v_k} \right) \times 0,25, \quad (3.2)$$

$$D'_{q,r} = D_{q,r} + \text{mean} \left(\frac{u_r}{u_q} \right) \times 0,25, \quad (3.3)$$

kde $d'_{k,i}$, $D'_{q,r}$ sú nové dolné hranice pre zúžené intervaly jednotlivých pomerov.

Postupne zoberieme údaje z rokov 2016, 2015 a 2014 a spravíme testy na rovnakých firmách ako v predošlej časti. Na Obr. 3.10 sú vidieť hodnoty účelovej funkcie A_{WM} z (1.7) a pomery $\frac{v_i}{v_k}$, $\frac{u_r}{u_q}$ z (1.14), (1.15) pre dáta z roku 2016. Medzi pomermi sú modrou farbou vyznačené najnižšie hodnoty $d_{k,i}$, $D_{q,r}$ a červenou farbou najvyššie hodnoty $h_{k,i}$, $H_{q,r}$. Dostali sme 6 zdravých firiem, ktoré sa momentálne nachádzajú na hranici bankrotu a vhodnými ohraničeniami ich odtiaľ chceme dostať preč. V prípade

Firma (B/N)	Hodnota A_W	POMERY						
		u2/u1	v2/v1	v3/v1	v4/v1	v3/v2	v4/v2	v4/v3
B	0	3,2269	1,3973	0,0247	0,3878	0,0176	0,2775	15,7246
B	0	1,1978	0,8693	0,1478	0,2337	0,1700	0,2689	1,5814
B	0	0,5847	0,2468	0,0589	0,2313	0,2387	0,9375	3,9272
B	0	2,2253	0,2130	0,1770	0,1035	0,8311	0,4861	0,5848
B	0	0,4343	1,1011	0,0726	0,3178	0,0659	0,2886	4,3783
N	0,3109	0,7707	0,1131	0,0287	0,0506	0,2534	0,4478	1,7669
N	0,3517	0,2581	0,2771	0,0260	0,0456	0,0937	0,1646	1,7559
N	0	6,2864	0,2024	0,0005	0,0136	0,0026	0,0673	25,4002
N	0	5,4877	0,0208	0,0251	0,0030	1,2048	0,1428	0,1185
N	0,3230	0,2089	0,2610	0,0021	0,0035	0,0079	0,0134	1,7088
N	0	0,0563	5,7677	0,0314	0,1977	0,0054	0,0343	6,3026
N	0	6,2670	0,0029	0,0120	0,0254	4,1217	8,7649	2,1265
N	0,2608	24,4040	0,2116	0,0048	0,0082	0,0226	0,0387	1,7076
N	0,1927	0,9968	0,0480	0,0107	0,0002	0,2222	0,0045	0,0203
N	0	8,7250	1,8732	0,0082	0,0092	0,0044	0,0049	1,1142
N	0,2902	47,5595	0,7249	0,0241	0,0016	0,0332	0,0022	0,0677
N	0,3004	0,0761	0,2425	0,0008	0,0014	0,0034	0,0058	1,7340
N	0,2870	8,2093	0,9548	0,0031	0,0054	0,0033	0,0056	1,7187
N	0,3282	0,2088	0,1579	0,0202	0,0322	0,1278	0,2041	1,5977
N	0,3136	0,0541	0,1574	0,0021	0,0036	0,0131	0,0227	1,7353
N	0,2989	0,9183	0,3593	0,0043	0,0075	0,0119	0,0209	1,7565
N	0,3057	0,0477	0,3031	0,0008	0,0014	0,0027	0,0046	1,7290
N	0,3223	31,0785	0,4753	0,0015	0,0026	0,0031	0,0054	1,7139
N	0,3091	0,9972	0,0694	0,0005	0,0008	0,0068	0,0120	1,7732
N	0,2783	3,3854	5,6188	0,0004	0,0008	0,0001	0,0001	1,7216
N	0,2970	54,4681	0,3715	0,0006	0,0010	0,0016	0,0027	1,7160
N	0,2726	0,0165	0,3501	0,0004	0,0006	0,0011	0,0018	1,7280
N	0,2356	25,3011	0,1807	0,0002	0,0004	0,0012	0,0021	1,7234
N	0,3031	63,3248	0,6394	0,0007	0,0012	0,0011	0,0018	1,7166
N	0,3008	0,0583	0,0844	0,0049	0,0108	0,0577	0,1275	2,2111
N	0	1,5360	0,1911	0,0007	0,1331	0,0039	0,6965	179,6952
N	0,2982	0,7450	0,4186	0,0051	0,0088	0,0121	0,0211	1,7344
N	0,2308	8,8140	1,5375	0,0022	0,0039	0,0015	0,0025	1,7356
N	0,2170	1,7392	1,2261	0,0002	0,0004	0,0002	0,0003	1,7263
N	0,2084	0,0594	1,2993	0,0178	0,0307	0,0137	0,0236	1,7215

Obr. 3.10: Výsledky aditívneho multiplikatívneho modelu s váhami (f) pre dáta z r. 2016

údajov z roku 2015 máme na hranici bankrotu 10 zdravých firiem a pre rok 2014 je to 5 zdravých firiem.

Použijeme miesto klasických dolných hraníc $d_{k,i}$, $D_{q,r}$ zúžené intervaly vypočítané podľa (3.2) a (3.3). Na Obr. 3.11 môžeme vidieť porovnanie hodnôt účelových funkcií pre všetky roky pred a po zúžení intervalu. Môžeme si všimnúť, že tento model bol najúspešnejší pre dáta z roku 2016, kde ostala na hranici bankrotu iba 1 zdravá firma. Síce pre údaje z roku 2015 ostala na hranici taktiež iba 1 zdravá firma, ale zároveň zmizla z hranice aj jedna zbankrotovaná firma. V prípade dát z roku 2014 ostali na hranici bankrotu 3 zdravé firmy, ale stále sa nám podarilo aspoň 2 firmy z hranice odstrániť.

Na prvý pohľad vyzerá byť tento model celkom úspešný, našim cieľom bolo od-

2016		2015		2014	
A_W	A_AR	A_W	A_AR	A_W	A_AR
0	0	0	24,0493	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0,3067	9,3440	0	0
0	0	0	0	0,4401	0,4452
0	0	0	0	0	0
0,3109	0,4551	0,3091	1,6726	0	0
0,3517	0,3740	0,2802	15,2121	0,3641	1,2074
0	0	0	13,6359	0	1,0824
0	0,1533	0,3174	1,6718	0,4519	0,4945
0,3230	0,3736	0	28,9547	0,4153	0,5686
0	0,1619	0,2873	15,8393	0,3814	0,7939
0	0,6656	0,3047	6,6244	0,2711	0,9072
0,2608	0,2793	0,3222	4,8469	0,4431	0,5543
0,1927	0,7826	0	242,6185	0,4370	0,5114
0	0,1999	0,3730	1,6552	0,4494	0,6357
0,2902	0,6407	0	14,6624	0,4405	0,6443
0,3004	0,3805	0,3325	4,2292	0,4602	0,6257
0,2870	0,4772	0,3088	7,8859	0,4020	0,4437
0,3282	0,3922	0,2737	1,7246	0,4219	0,4911
0,3136	0,3800	0,2965	14,5048	0,3913	0,3913
0,2989	0,3461	0,2569	29,7117	0	0
0,3057	0,4550	0	0,7566	0,3980	0,4618
0,3223	0,5087	0,2636	12,5602	0,2429	50,6506
0,3091	0,7419	0,2640	9,0609	0,3547	1,0393
0,2783	5,3776	0	619,9864	0,4372	0,4740
0,2970	0,5255	0,3953	1,3813	0,4950	0,7101
0,2726	0,5171	0	104,1385	0,5147	0,6438
0,2356	0,3928	0,1389	145,9984	0,2550	3,4037
0,3031	0,7855	0	0	0,3139	1,8164
0,3008	0,6116	0	4,4152	0	0
0	0,0277	0,3695	0,6700	0,4264	0,4867
0,2982	0,3458	0,3328	2,7153	0,4035	0,5814
0,2308	0,5489	0,3130	6,3943	0,4668	0,6360
0,2170	1,2874	0,3250	2,0081	0,4822	0,4822
0,2084	0,3624	0	92,9089	0	3,1086

Obr. 3.11: Hodnoty účelových funkcií pred a po použití zvolených ohraničení (3.2) a (3.3)

stráň zdravé firmy z hranice bankrotu, tým pádom zvýšiť percento správneho zaradenia zdravej firmy, a zároveň čo najmenej znížiť percento správnej klasifikácie zbankrotovanej firmy. Ak je toto splnené, zvýši sa aj celková správnosť predikcie nášho modelu. Percentuálne výsledky modelu pre spomínané dáta sú uvedené v Tab. 3.8.

Vidíme, že vďaka odstráneniu zdravých firiem z hranice bankrotu sa celková správnosť predikcie výrazne zvýšila. V tomto prípade je jedinou nevýhodou to, že model s AR ohraničeniami pre dáta z roku 2015 odstránil jednu zbankrotovanú firmu z hranice bankrotu, a tým pádom klesla správnosť klasifikácie zbankrotovaných firiem.

Na základe týchto výsledkov však nemôžeme povedať, že zúženie intervalu podľa (3.2) a (3.3) nám vo všeobecnosti dá lepšie výsledky ako samotný aditívny model s váhami. Dôvod je taký, že sme zatiaľ použili iba 3 vzorky dát. Preto spravíme pre dáta

	Dáta z roku	$P(\frac{BR}{BR})$ v %	$P(\frac{NBR}{NBR})$ v %	CSP v %
bez AR ohraničení	2016	100	80	82,86
	2015	80	66,67	68,57
	2014	80	83,33	82,85
s AR ohraničeniami	2016	100	96,67	97,15
	2015	60	96,67	91,43
	2014	80	90	88,57

Tabuľka 3.8: Úspešnosť aditívneho modelu s AR ohraničeniami pre konkrétne dáta z rokov 2016, 2015 a 2014

Veľkosť zúženía	$P(\frac{BR}{BR})$ v %	$P(\frac{NBR}{NBR})$ v %	CSP v %	$P(\frac{BR}{BR})$ v %	$P(\frac{NBR}{NBR})$ v %	CSP v %
$\alpha = 0,25$	76,00	79,04	78,60	53,78	94,37	88,57
$\alpha = 0,15$	76,00	78,96	78,54	59,11	91,63	86,98
$\alpha = 0,10$	76,89	77,85	77,71	68,00	89,78	86,67
$\alpha = 0,05$	76,44	79,04	78,67	74,67	89,11	87,05

Tabuľka 3.9: Priemerná úspešnosť aditívneho modelu s AR ohraničeniami na základe 180-tich testov s rôznymi α pre dáta z rokov 2016, 2015 a 2014

z každého roku aspoň 15 náhodných testov a mierne upravíme dolné ohraničenie, aby sme zistili aká hodnota ohraničenia bude najvhodnejšia.

Dolné ohraničenia budú v tvare:

$$d'_{k,i} = d_{k,i} + \text{mean} \left(\frac{v_i}{v_k} \right) \times \alpha, \quad (3.4)$$

$$D'_{q,r} = D_{q,r} + \text{mean} \left(\frac{u_r}{u_q} \right) \times \alpha, \quad (3.5)$$

kde budeme voliť rôzne hodnoty α so snahou získať čo najlepšie výsledky. Zobrali sme hodnoty $\alpha = \{0,25; 0,15; 0,10; 0,05\}$ a priemerné výsledky za všetky 3 roky uvádzame v Tab. 3.9.

Vidíme, že najvyššia celková správnosť predikcie vyšla pri použití $\alpha = 0,25$, pretože pravdepodobnosť správneho klasifikovania zdravej firmy sa zvýšila zo 79,04% až na 94,37%. Ale naopak, percento správneho zaradenia zbankrotovanej firmy kleslo, konkrétne zo 76% na 53,78%, čo nie je veľmi dobrý výsledok. Preto sme postupne hodnotu α znižovali, aby sme dostali vyššiu hodnotu $P(BR/BR)$, pretože v prvom rade nám ide o čo najlepšie identifikovanie zbankrotovaných firiem. Najlepší výsledok sme dostali pre $\alpha = 0,05$, kde správne identifikovanie zbankrotovanej firmy kleslo iba o necelé 2% na 74,67%, a zároveň správne klasifikovanie zdravej firmy narástlo až o 10% na hodnotu 89,11%. Takto sme dostali celkovú správnosť predikcie modelu 87,05%, čo

je o 8,4% viac ako celková správnosť predikcie pôvodného modelu bez zúženia intervalu pre pomery váh.

Dospeli sme k záveru, že vhodné zúženie pôvodného intervalu pre pomery multiplikátorov môže priniesť lepšie výsledky ako pôvodný aditívny model, a preto by sme odporúčali používať aditívny DEA model aj s AR ohraničeniami.

Záver

V tejto práci sme sa oboznámili s tematikou predikcie bankrotu firiem pomocou DEA modelov. V prvej časti práce sme sa venovali DEA modelom vo všeobecnosti, spracovali sme potrebnú teóriu o základnom aditívnom modeli, aditívnom modeli s váhami a ich vlastnosťami. Prínos tejto práce vidíme v naformulovaní dôkazov o invariantnosti aditívneho modelu na posun v prípade konkrétnej voľby váh. Taktiež sme vysvetlili princíp AR ohraničení, ktoré sme neskôr použili v 3. časti práce. Definovali sme hranicu bankrotu a graficky porovnali s hranicou prosperity.

Prínosom tejto práce bolo najmä podrobné spracovanie literatúry v druhej kapitole. Analyzovali sme jednotlivé články z hľadiska použitého modelu a spravili sme prehľad použitých vstupov a výstupov. Zistili sme, že z DEA modelov bol najčastejšie používaný aditívny model, ktorý sme v poslednej časti používali aj my. Takisto sa používali aj SBM, BCC a CCR modely, pri ktorých však nastávajú problémy s podmienkou nezáporných dát a orientovanými modelmi.

V poslednej časti práce sme sa zamerali hlavne na čo najlepšie identifikovanie zbankrotovaných firiem, ale takisto sme sa pokúsili odstrániť čo najviac zdravých firiem z hranice bankrotu, čím narastá celková správnosť predikcie modelu. Najprv sme aplikovali aditívny obáľkový DEA model s váhami na vlastné dáta, podobným spôsobom ako autori v [23]. Používali sme voľbu váh podľa (c) a (f), pretože v prvej časti práce sme dokázali, že iba v prípade týchto váh je model invariantný na posun a hodnota účelovej funkcie je z intervalu $[0, 1]$. Počítanie koeficientu kombináciou modelu bankrotu a modelu prosperity sme zmenili tak, aby vyjadroval mieru bankrotu danej firmy.

Prínos práce vidíme hlavne v použití AR nadstavby na aditívny multiplikatívny model, ktorá ešte v súvislosti s predikciou bankrotu nebola použitá. Zistili sme, že vhodným zúžením intervalu pre pomery váh $\frac{v_i}{v_k}, \frac{u_r}{u_q}$ dosiahneme lepšie výsledky ako pri použití modelu bez AR ohraničení, prípadne ako pri kombinovaní modelu bankrotu a modelu úspechu.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Altman, E. I.: *Financial Ratios, Diskriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy*, The Journal of Finance 23 (1968), 589-609
- [2] Araghi, M. K., Makvandi, S.: *Evaluating the Technique of Data Envelopment Analysis in Predicting Bankruptcy*, Journal of Basic and Applied Scientific Research 3 (2013), 519-527
- [3] Beaver, W. H.: *Financial Ratios As Predictors of Failure*, Journal of Accounting Research 4 (1966), 71-111
- [4] Cielen, A., Peeters, L., Vanhoof, K.: *Bankruptcy prediction using a data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research 154 (2004), 526–532
- [5] Condello, S., del Pozzo, A., Loprevite, S., Ricca, B.: *Potential and Limitations of D.E.A. as a Bankruptcy Prediction Tool in the Light of a Study on Italian Listed Companies*, Applied Mathematical Sciences 11 (2017), 2185 - 2207
- [6] Cooper, W. W., Park, K. S., Pastor, J. T.: *RAM: A Range Adjusted Measure of Inefficiency for Use with Additive Models, and Relations to Other Models and Measures in DEA*, Journal of Productivity Analysis 11 (1999), 5–42
- [7] Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K.: *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References, and DEA-Solver Software, Second edition*, Springer, New York, 2007
- [8] Cooper, W. W., Seiford, L. M., Zhu J.: *Data Envelopment Analysis: History, Models and Interpretations*, Springer, Texas, 2013, dostupné na internete (4.5.2018): <https://pdfs.semanticscholar.org/1e72/1465f763ef26136a492d7ba6c7ef5bc674fb.pdf>
- [9] Feruś, A.: *The application of data envelopment analysis method in managing companies' credit risk*, Business and Economic Horizons 10 (2014), 60-69
- [10] Grice, J. S., Ingram, R. W.: *Tests of the generalizability of Altman's bankruptcy prediction model*, Journal of Business Research 54 (2001), 53–61
- [11] Halická, M.: *DEA modely, učebné texty*, FMFI UK, Bratislava, 2015

- [12] Janová, J., Vavřina, J., Hampel, D.: *DEA as a tool for bankruptcy assessment: the agribusiness case study*, Proceedings of 30th International Conference Mathematical Methods in Economics 11-13 (2012), 379-383, dostupné na internete (4.5.2018): mme2012.opf.slu.cz/proceedings/pdf/065_Janova.pdf
- [13] Ječmen, M.: *Hľadanie efektívnych aktív metódou DEA*, bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2014, dostupné na internete (4.5.2018): <http://www.iam.fmph.uniba.sk/efm/bakalarky/2014/jecmen/bakalarka.pdf>
- [14] Liu, F. F., Chen, Ch.: *The worst-practice DEA model with slack-based measurement*, Computers & Industrial Engineering 57 (2009), 496–505
- [15] de Llano, P., Piñeiro, C., Rodríguez, M.: *DEA as a business failure prediction tool: Application to the case of galician SMEs*, Contaduría y Administración 59-2 (2014), 65-96
- [16] Lüttmerdingová, K.: *Analýza ukazovateľov finančnej situácie podniku*, diplomová práca, Bankovní institut vysoká škola Praha, zahraničná vysoká škola Banská Bystrica, Banská Bystrica, 2013, dostupné na internete (4.5.2018): https://is.bivs.cz/th/14667/bisk_m/Analyza_ukazovatelov_financnej_situacie_podniku__Luttmerdingova_Katarina.pdf
- [17] Mousavi, M. M., Ouenniche, J., Xu, B.: *Performance evaluation of bankruptcy prediction models: An orientation-free super-efficiency DEA-based framework*, International Review of Financial Analysis 42 (2015), 64–75
- [18] Mukhopadhyaya, A., Tiwari, S., Narsaria, A. , Karmaker, B.R.: *New Approach to Predicting Bankruptcy: Combining DEA and Multi-Layer Perceptron*, International Journal of Computer Science Issues 9 (2012), 71-78
- [19] Noor, Z. M., Iskandar, T. M., Omar, N.: *Malaysian Companies Distress Prediction: DEA and Multinomial Logit Model*, Prosiding Perkem VII, Jilid 2 (2012), 1536–1551
- [20] Paradi, J.C., Asmild M., Simak, P.C.: *Using DEA and Worst Practice DEA in Credit Risk Evaluation*, Journal of Productivity Analysis 21 (2004), 153–165
- [21] Pille, P., Paradi, J. C.: *Financial performance analysis of Ontario (Canada) Credit Unions: An application of DEA in the regulatory environment*, European Journal of Operational Research 139 (2002), 339–350
- [22] Premachandra, I.M. , Bhabra, G. S., Sueyoshi, T.: *DEA as a tool for bankruptcy assessment: A comparative study with logistic regression technique*, European Journal of Operational Research 193 (2009), 412-424

- [23] Premachandra, I.M., Chen, Y., Watson J.: *DEA as a Tool for Predicting Corporate Failure and Success: A case of bankruptcy assessment*, Omega 39 (2011), 620-626
- [24] Simak, P.C.: *DEA Based Analysis of Coporate Failure*, Master Thesis, Faculty of Applied Sciences and Engineering, University of Toronto, Toronto, 1997
- [25] Sueyoshi, T., Goto, M.: *Methodological comparison between DEA and DEA-DA from the perspective of bankruptcy assessment*, European Journal of Operational Research 199 (2009), 561-575
- [26] Vavřina, J., Hampel, P., Janová, J.: *New Approaches for the Financial Distress Classification in Agribusiness*, Acta Univeritatis Agriculturae et Silviculturae Mendelianae Brunensis 56 (2013), 1177-1182
- [27] Wilson, A., Paradi, J. C.: *Data Envelopment Analysis of Corporate Failure for Non-Manufacturing Firms using a Slacks-Based Model*, Master Thesis, Department of Chemical Engineering and Applied Chemistry, University of Toronto, Toronto, 2012, dostupné na internete (4.5.2018):
https://tspace.library.utoronto.ca/bitstream/1807/32640/1/Wilson_D%27Andre_J_201106_MASc_thesis.pdf

Prílohy

Príloha A : Zdrojový kód aditívneho obáľkového DEA modelu s váhami

```
% Aditivny obalkovy DEA model VRS s vahami (c) resp. (f)

num = xlsread('data_export.xlsx','data2016bez_pomerov_normaliz');
g =length(num);
%pocet bankrotujucich firiem v skupine testovanych dat
a = 5;
%pocet zdravych firiem v skupine testovanych dat
b = 30;

% Matica ukazovatelov vsetkych DMU, kt. minimalizujeme = vystupy
%(1 riadok zodpoveda jednému DMU)
%X = (num([(1:5),(11:40)],(3:6))));
X = (num([(randsample(g/2,a))',(randsample(g/2,b)+g/2)']),(3:6)));

% Matica ukazovatelov vsetkych DMU, kt.maximalizujeme = vstupy
%(1 riadok zodpoveda jednému DMU)
%Y = (num([(1:5),(11:40)],(1:2))));
Y = (num([(randsample(g/2,a))',(randsample(g/2,b)+g/2)']),(1:2)));

%n - pocet DMU, m - pocet vystupov, s - pocet vstupov
[n,m] = size(X);
[n,s] = size(Y);
Z = zeros(n,n+m+s);
sx=zeros(m,1);
sy=zeros(s,1);
lambda=zeros(n,1);
lb=[lambda;sx;sy];
pocet=0;
```

```

indexy=[];
Rx=[];
Ry=[];
wx=zeros(m,1);
wy=zeros(s,1);

%volba pocitania vah podla (c)
for i=1:m
    %Rx(i,1)= (max(X(:,i))-min(X(:,i)));
end

for i=1:s
    %Ry(i,1)= (max(Y(:,i))- min(Y(:,i)));
end

%vahy wx, wy
% wx=ones(m,1)./((m+s)*Rx);
% wy=ones(s,1)./((m+s)*Ry);
% wx=wx';
% wy=wy';

%f=[zeros(1,n) wx wy];
efektivita=zeros(n,1);

for k=1:n
    %vektor vstupov daneho DMU_0
    x0= X(k,:)' ;
    %vektor vystupov daneho DMU_0
    y0= Y(k,:)' ;

    %uloha LP
    Aeq=[X' eye(m) zeros(m,s) ; Y' zeros(s,m) -eye(s); ...
ones(1,n) zeros(1,m) zeros(1,s)];
    beq= [x0; y0; 1];

    %volba vah podla (f)
    for i=1:m
        Rx(i,1)= (X(k,i)-min(X(:,i)));
        if Rx(i,1)==0 wx(i,1)=0;
    end
end

```

```

        else wx(i,1)=1/((m+s)*Rx(i,1));
        end
    end
for i=1:s
    Ry(i,1)= (-Y(k,i)+ max(Y(:,i)));
    if Ry(i,1)==0 wy(i,1)=0;
    else wy(i,1)=1/((m+s)*Ry(i,1));
    end
end

f=[zeros(1,n) wx' wy'];
z = linprog(-f, [], [], Aeq, beq, lb);
Z(k,:) = z;
efektivita(k,1)=1 -(wx'*Z(k,(n+1):(n+m))'+wy'*Z(k,(n+m+1):(n+m+s))');
end
Z=round(Z*10000)/10000;
for k=1:n
    if Z(k,(n+1):(n+m+s))==0
        % pocet firiem na hranici bankrotu
        pocet=pocet+1;
        % indexy firiem, kt. sa ocitli na hranici bankrotu
        indexy(pocet)=k;
    end
end
end

```

Príloha B : Zdrojový kód aditívneho multiplikatívneho DEA modelu s váhami

```
% Aditivny multiplikativny DEA model VRS s vahami (f)

num = xlsread('data_export.xlsx','data2014bez_pomerov_normaliz');
g =length(num);
%pocet bankrotujucich firiem v skupine testovanych dat
a = 5;
%pocet zdravych firiem v skupine testovanych dat
b = 30;

% Matica ukazovatelov vsetkych DMU, kt. minimalizujeme = vystupy
%(1 riadok zodpoveda jednému DMU)
X = (num([(randsample(g/2,a))',(randsample(g/2,b)+g/2)']),(3:6)));

% Matica ukazovatelov vsetkych DMU, kt. maximalizujeme = vstupy
%(1 riadok zodpoveda jednému DMU)
Y = (num([(randsample(g/2,a))',(randsample(g/2,b)+g/2)']),(1:2)));

%n - pocet DMU, m - pocet vystupov, s - pocet vstupov
[n,m] = size(X);
[n,s] = size(Y);
W = ones(n,1);
Z = zeros(n,m+s+1);
Fval =zeros(n,1);
pocet=0;
indexy=[];
Rx=[];
Ry=[];
wx =zeros(m,1);
wy =zeros(s,1);

for k=1:n
%vektor vstupov daného DMU_0
x0= X(k,:)';
%vektor vystupov daného DMU_0
y0= Y(k,:)';
```

```

%uloha LP
A=[Y -X W];
b= zeros(n,1);
% pocitanie vah podla f
for i=1:m
    Rx(i,1)= (X(k,i)-min(X(:,i))));
    if Rx(i,1)==0 wx(i,1)=0;
    else wx(i,1)=1/((m+s)*Rx(i,1));
    end
end
for i=1:s
    Ry(i,1)= (-Y(k,i)+ max(Y(:,i))));
    if Ry(i,1)==0 wy(i,1)=0;
    else wy(i,1)=1/((m+s)*Ry(i,1));
    end
end
f=[-y0' +x0' -1];
lb=[wy;wx;-inf];
[z,fval] = linprog(f,A,b,[],[],lb);
Z(k,:) = z;
Fval(k,1) = fval;
end

Fval=round(Fval*10000)/10000;
for k=1:n
    if Fval(k,1)==0
        pocet=pocet+1;
        indexy(pocet)=k;
    end
end
%pocet
%indexy
%Fval

%pomery
u2u1=Z(:,2)./Z(:,1);
v2v1=Z(:,4)./Z(:,3);
v3v1=Z(:,5)./Z(:,3);
v4v1=Z(:,6)./Z(:,3);

```

```

v3v2=Z(:,5)./Z(:,4);
v4v2=Z(:,6)./Z(:,4);
v4v3=Z(:,6)./Z(:,5);
%volba parametra alfa
alpha = 0.05;
D12=min(u2u1)+(mean(u2u1))*alpha;
H12=max(u2u1);
d12=min(v2v1)+(mean(v2v1))*alpha;
h12=max(v2v1);
d13=min(v3v1)+(mean(v3v1))*alpha;
h13=max(v3v1);
d14=min(v4v1)+(mean(v4v1))*alpha;
h14=max(v4v1);
d23=min(v3v2)+(mean(v3v2))*alpha;
h23=max(v3v2);
d24=min(v4v2)+(mean(v4v2))*alpha;
h24=max(v4v2);
d34=min(v4v3)+(mean(v4v3))*alpha;
h34=max(v4v3);

Q=[D12,-H12;-1,1];
P=[d12,-h12,d13,-h13,d14,-h14,0,0,0,0,0,0;
    -1,1,0,0,0,0,d23,-h23,d24,-h24,0,0;
    0, 0,-1,1,0,0,-1,1,0,0,d34,-h34;
    0,0,0,0,-1,1,0,0,-1,1,-1,1];

%%% Model so zakomponovanymi maticami P a Q
W = ones(n,1);
Z = zeros(n,m+s+1);
Fval =zeros(n,1);
pocet=0;
indexy=[];
Rx=[];
Ry=[];
wx =zeros(m,1);
wy =zeros(s,1);

for k=1:n

```

```

%vektor vstupov daneho DMU_0
x0= X(k,:)' ;
%vektor vystupov daneho DMU_0
y0= Y(k,:)' ;

%uloha LP
A=[Y -X W; Q' zeros(2,m+1);zeros(12,s) P' zeros(12,1)];
b= zeros(n+14,1);

%pocitanie vah
for i=1:m
    Rx(i,1)= (X(k,i)-min(X(:,i))));
    if Rx(i,1)==0 wx(i,1)=0;
    else wx(i,1)=1/((m+s)*Rx(i,1));
end
end
for i=1:s
    Ry(i,1)= (-Y(k,i)+ max(Y(:,i))));
    if Ry(i,1)==0 wy(i,1)=0;
    else wy(i,1)=1/((m+s)*Ry(i,1));
end
end
f=[-y0' +x0' -1];
lb=[wy;wx;-inf];
[z,fval] = linprog(f,A,b,[],[],lb);
Z(k,:) = z;
Fval(k,1) = fval;
end

Fval=round(Fval*10000)/10000;
for k=1:n
    if Fval(k,1)==0
        pocet=pocet+1;
        indexy(pocet)=k;
    end
end
%pocet
%indexy
%Fval

```