UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



MERANIE RIZÍK POMOCOU EXPECTED SHORTFALL

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2019 Bc. Dominika DANKOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MERANIE RIZÍK POMOCOU EXPECTED SHORTFALL

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko - finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Mgr. Ing. Pavol Jurča, PhD.

Bratislava 2019 **Bc. Dominika DANKOVÁ**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Dominika Danková
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Meranie rizík pomocou Expected shortfall
Risk measurement using expected shortfall

Anotácia: Mnohé inštitúcie používajú na meranie trhových rizík mieru VaR, táto miera má však významné nedostatky. Samotný Bazilejský výbor, ktorý určuje medzinárodné štandardy v oblasti riadenia rizík navrhuje nahradenie VaR mierou Expected shortfall. Diplomová práca by sa preto mala zaoberať porovnaním výhod a nevýhod rôznych spôsobov výpočtu tejto miery vrátane možností spätného testovania.

Vedúci: Mgr. Ing. Pavol Jurča, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.

Dátum zadania: 24.01.2018

Dátum schválenia: 25.01.2018 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie Touto cestou sa chcem poďakovať v prvom rade Bohu, ktorý ma sprevádzal nielen pri vypracovávaní tejto práce, ale aj počas celého štúdia. Veľkú vďačnosť chcem vyjadriť aj vedúcemu mojej diplomovej práce Mgr. Ing. Pavlovi Jurčovi, PhD., za jeho veľkú trpezlivosť, ochotu pomôcť a v neposlednom rade za podnetné pripomienky a odborné rady. Zo srdca tiež ďakujem môjmu snúbencovi, rodine a priateľom za ich podporu a povzbudenie.

Abstrakt v štátnom jazyku

DANKOVÁ, Dominika: Meranie rizík pomocou Expected Shortfall [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Ing. Pavol Jurča, PhD., Bratislava, 2019, 71 s.

V našej práci sa zaoberáme výpočtom miery rizika Value at Risk a jej možnosťou nahradenia mierou Expected Shortfall. Analyzujeme a porovnávame tieto metódy nielen z teoretického hľadiska, ale aj na výsledkoch nami zostaveného portfólia akciových indexov. Naším cieľom je spätne testovať mieru rizika Expected Shortall s rôznymi testami a porovnať ich postupy a výsledky. Práca poskytuje výsledky spätných testov s navrhnutými úpravami. Touto úpravou sa myslí najmä výmena normálneho rozdelenia zmien výnosov za štandardizované Studentovo t - rozdelenie zmien s odhadnutým počtom stupňov voľnosti z historického obdobia. Vďaka štandardizovanému Studentovmu t - rozdeleniu zmien výnosov získavame okrem iného presnejšie kvantily, ktoré vstupujú takmer do všetkých výpočtov. A preto navrhujeme použitie týchto upravených spätných testov na riešenie reálnych problémov. Okrem toho sme analyzovali silu spätných testov a vyhodnotili ich navzájom.

Kľúčové slová: miera rizika, Value at Risk, Expected Shortfall, spätné testovanie Expected Shortfall, sila testov

Abstract

DANKOVÁ, Dominika: Risk measurement using expected shortfall [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Ing. Pavol Jurča, PhD., Bratislava, 2019, 71p.

In our thesis we deal with calculation of risk measurement Value at Risk and possibility of replacement with Expected Shortfall. We analyze and compare these methods not only theoretically but also in results from portfolio of market indices we made. Our purpose is back testing of risk measurement Expected Shortfall with different approaches and compare their procedures and results. Thesis provides results from modify back tests with proposed modifications. In particular, this modification refers to the exchange of normal distribution of revenue changes to standardized Student's t - distribution of changes with estimated number of degrees of freedom from the historical period. Due to the standardized Student's t-distribution of revenue changes, we obtain, among other things, more accurate quantiles that enter almost all calculations. Therefore we propose to use these modified backtests to solve real problems. In addition, we analyzed the power of backtesting and evaluated each other.

Keywords: risk measurement, Value at Risk, Expected Shortfall, backtesting, Tests power

Obsah

Úvod **9**

1 Value at Risk **11**

1.1 Výpočet Value at Risk 11

1.1.1 Filtrovaná historická simulácia 14

1.2 Spätné testovanie Value at Risk 18

1.2.1 Kupiecov POF test 19

1.2.2 Christoffersenov test 21

2 Value at Risk vs. Expected Shortfall **23**

2.1 Matematické vlastnosti týkajúce sa rizikových mier 23

2.2 Výhody a nevýhody použitia Value at Risk 26

2.3 Výhody a nevýhody použitia Expected Shortfall 28

3 Výpočet Expected Shortfall a jeho spätné testovanie **30**

3.1 Výpočet Expected Shortfal 30

3.2 Nahradenie miery rizika Value at Risk mierou rizika Expected Shortfall 31

3.3 Testy spätného testovania Expected Shortfall a ich aplikácie 35

3.3.1 Test skráteného rozdelenia podľa Righi a Ceretta 36

3.3.2 Wong test sedlového bodu 38

3.3.3 Test aproximácie kvantilu podľa Emmer, Kratz a Tasche 42

3.3.4 Neparametrický test podľa Acerbi a Székely 47

3.4 Záver spätných testov 52

4 Sila testov **54**

4.1 Miera nezamietania dobre predikovanej hodnoty Expected Shortfall . . 56

4.2 Miera nezamietania zle predikovanej hodnoty Expected Shortfall 58

4.2.1 1. prístup 64

4.2.2 2. prístup 64

4.3 Záver testovania sily testov 65

Záver **66**

Zoznam použitej literatúry **69**

Príloha A **72**

A.1 Informácie o portfóliu **72**

Úvod

Riziková miera Value at Risk (VaR) je miera na odhadovanie potencionálnych strát navrhnutá Bazilejskou komisiou v roku 1996. Riziková miera Value at Risk je 100α %-ný kvantil q_α rozdelenia zmien výnosov, ktorý by nemal byť prekročený s mierou pravdepodobnosti $(1-\alpha)$. Keďže ide iba o kvantil rozdelenia, tak nemáme bližšiu informáciu, akej veľkej strate budeme vystavený, ak tento kvantil prekročíme. Nielen táto vlastnosť, ale aj mnohé iné boli podnetom na vznik novej rizikovej miery Expected Shortfall (ES) v roku 1997, ktorá túto skutočnosť zohľadňovala. Jej ďalším pozitívnym prínosom je, že spĺňa určité matematické vlastnosti, akou je napríklad subaditivita, ktorá pri miere Value at Risk nie je splnená. Na druhej strane sa postupom času ukázalo, že aj táto riziková miera má matematické vlastnosti, ktoré nie sú vyhovujúce. Príkladom je nesplnenie elicitability. Elicitabilita dovoľuje skonštruovať skóringovú funkciu, ktorá porovnáva rôzne modely. Nesplnenie elicitability viedlo mnohých k záveru, že túto mieru nie je možné spätne testovať. A preto metóda výpočtu rizikovej miery Expected Shortfall upadla na nejaký čas do zabudnutia.

Aj keď v roku 2011 pán Gneiting dokázal nedostatok rizikovej miery Expected Shortfall - nespĺňanie elicitability - časom sa dospelo k záveru, že to neznamená, že rizikovú mieru nemožno spätne testovať. A tak sa postupom času zostrojili rôzne spätné testy pre rizikovú mieru Expected Shortfall. Nakoniec Bazilejská komisia v roku 2013 prichádza s návrhom používať Expected Shortfal ako alternatívnu metódu na výpočet miery rizika.

Motivácia na vznik tejto práce bola snaha o nahradenie rizikovej miery Value at Risk s mierou Expected Shortfall. Jedným z cieľov tejto práce je matematicky popísať a vysvetliť ich vzájomné výhody a nevýhody, predostrieť postup výpočtu konkrétnych metód, ale najmä porovnať ich výsledky na dátach z reálneho portfólia.

Hlavným cieľom práce je implementácia metód spätného testovania Expected Shortfall na reálnych dátach, čo ovplyvňuje celý prístup aplikácie metód. Reálne dáta sa totiž neriadia normálnym rozdelením, z ktorého niektoré metódy vychádzajú. A preto navrhujeme niektoré úpravy metód spätného testovania. Naším zámerom je, aby sa spätné testy dali aplikovať v reálnych smeroch. V práci používame nasledujúce spätné testy: Wong z roku 2008 [25], Righi a Ceretta z roku 2013 [21], Emmer, Kratz a Tasche [9]

z roku 2013 a Acerbi a Székely z roku 2014 [1]. V závere štúdie sa pozrieme na silu aplikovaných spätných testov.

Spätné testy vo všebecnosti rozhodujú, či zamietajú alebo nezamietajú predikovanú hodnotu Expected Shortfall
z modelu oproti vypočítanej hodnote Expected Shortfall z realizovaných zmien výnosov portfólia. Spätným testovaním chceme vedieť odpoveď na otázku, či postačuje, alebo nepostačuje na pokrytie potencionálnych strát predikovaná hodnota rizikovej miery Expected Shortfall. K dipozícií máme viacero spätných testov. Otázkou je, ktorý zvoliť a ktorého výsledky sú dostatočne dôveryhodné. Pre tento účel vzniklo testovanie sily testov. Pri testovaní sily spätných testov pre Expected Shortfall nás zaujímajú dve vlastnosti testov, a to miera nezamietania dobre predikovanej hodnoty Expected Shortfall a miera nezamietania zle predikovanej hodnoty Expected Shortfall. Od prvej vlastnosti testov očakávame, čo najvyššiu hodnotu nezamietania dobre predikovanej hodnoty Expecte Shortfall a od druhej vlastnosti, čo najnižšiu hodnotu nezamietanie zle predikovanej hodnoty Expected Shortfall. Našou úlohou bude použité testy navzájom porovnať. Keďže chceme zhodnotiť spätné testy čo najobjektívnejšie, tak použijeme viaceré prístupy.

Odrazový mostík na výpočet miery Expected Shortfall je miera Value at Risk. Naším cieľom nie je predstavovať alternatívne metódy na výpočet rizikovej miery Value at Risk, ale nájsť jednu vhodnú metódu, ktorá bude vykazovať dobré výsledky v spätných testoch na Value at Risk. Následne môžeme túto metódu použiť pri výpočte Expected Shortfall. Takto sa postupne dostaneme od samotného výpočtu Expected Shortfall, cez jeho spätné testy a ich aplikácie, až po určovanie sily testov.

V prvej kapitole predstavujeme rizikovú mieru Value at Risk a konkrétnu metódu na jej výpočet, vrátane spätných testov. V druhej kapitole sa venujeme výhodám
a nevýhodám oboch rizikových mier Value at Risk a Expected Shortfall. V tretej kapitole opisujeme postup výpočtu rizikovej miery Expected Shortfall. V tejto kapitole ďalej predstavíme postupy a výsledky zo spätných testov. V poslednej štvrtej kapitole sa zaoberáme silou spätných testov. Celá práca a jej kapitoly majú nasledovnú štruktúru: hlavná myšlienka, kostra výpočtu, aplikácia, výsledky a zhodnotenie. Všetky výpočty sú aplikované na portfóliu reálnych dát z akciových indexov.

1 Value at Risk

Ako kvantifikovať trhové riziko, ktorému sme vystavení pri kúpe peňažnej meny, akcií, alebo dlhopisov? Príklad kvantifikácie rizika, na ktorom vieme jednoducho a jasne interpretovať riešenie nášho problému je výpočet rizikovej miery Value at Risk. A preto v tejto kapitole vysvetlíme a predstavíme tento prístup.

Ale ako sme už uviedli v úvode práce, tak existuje už aj iný prístup výpočtu rizikovej miery. Výpočet rizikovej miery Value at Risk je medzikrokom k výpočtu alternatívnej rizikovej miere Expected Shortfall. Preto je potrebné Value at Risk uviesť detailnejšie, opísať jej hlavnú myšlienku, postup konkrétneho modelu a predstaviť výsledky z našej implementácie na reálnych dátach. Samozrejme na to, aby sme túto metódu mohli pokladať za dobrú, tak je nevyhnutné ju aj otestovať na to určenými testami, ktoré si v tejto kapitole tiež predstavíme.

1.1 Výpočet Value at Risk

V tejto podkapitole definujeme rizikovú mieru Value at Risk [19], opíšeme jej hlavnú myšlienku a kroky výpočtu pre konkrétny vybraný model pre naše portfólio. Väčšina modelov predpokladá, že zisky a straty sa riadia podľa normálneho rozdelenia, ibaže tento predpoklad na reálnych dátach splnený nie je. Výsledok testu na normálne rozdelenie nášho porftólia môžeme vidieť v prílohe. Kedže reálne dáta sa nesprávajú podľa normálneho rozdelenia, tak našou snahou bolo vybrať model, ktorý zachytí charakter dát čo najlepšie. A práve použitie metódy Filtrovanej historickej simulácie, ktorá je kombináciou bootstrap metódy s CCC - GARCH modelom zachytáva empirické rozdelenie ziskov a strát. Popis, zloženie a hlbšia analýza portfólia, ktorá je dôležitá na pozadí celého modelu, je presnejšia špecifikovaná v prílohe.

Ako je definovaná riziková miera Value at Risk? Value at Risk je najvyššia strata, ktorá by nemala byť prekročená počas stanoveného časového obdobia s danou mierou pravdepodobnosti $1 - \alpha$ definovaná nasledovne

Definícia 1.1. *Value at Risk:*
Nech X sú zisky a straty. Nech $\alpha \in (0, 1)$ je daná hladina. Predpokladajme, že rozdelenie ziskov a strát F je známe. Potom Value at Risk $VaR_{t,1-\alpha}$ portfólia so ziskami a stratami

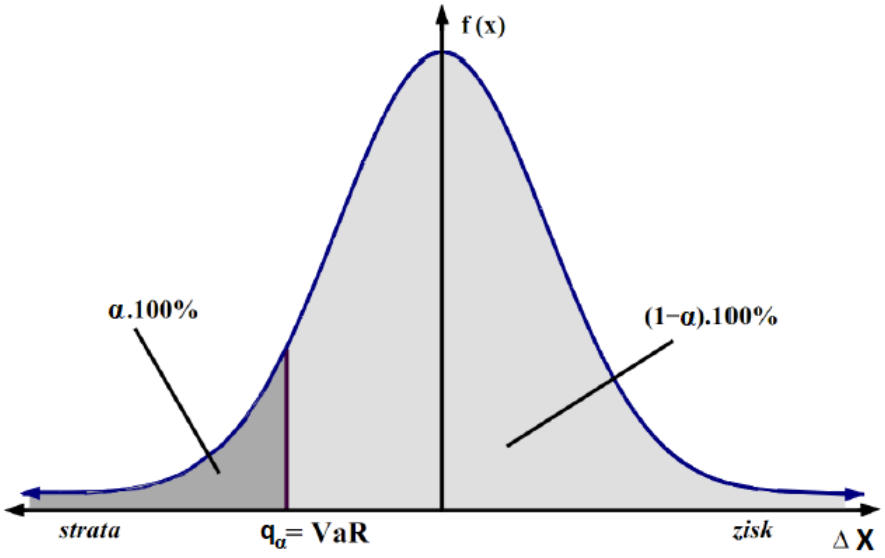
X a hladinou α je najväčšie číslo x, také že pravdepodobnosť, že strata X prekročí x nie je väčšia než hladina α (vezmeme opačné znamienko). Formálne

$$VaR_{t,1-\alpha} = -sup\{x \in \mathbb{R} | P(X \leq x) \leq \alpha\} = -sup\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \leq \alpha\}$$

Navyše, ak $f(x)$ je funkcia hustoty rozdelenia, tak máme

$$\int_{-\infty}^{VaR_{t,1-\alpha}} f(x)dx = \alpha.$$

Hodnotu Value at Risk môžeme interpretovať ako kvantil q_α z funkcie $f(x)$ husoty ziskov a strát. Na nasledujúcom obrázku, viď. Obr. 1, je znázornený tento prístup.



Obr. 1: Obrázok [14] znázorňujúci hodnotu Value at Risk ako kvantil q_α z funkcie hustoty $f(x)$ ziskov a strát ΔX

Hlavný problém je ten, že rozdelenie ziskov a strát, čiže zmien výnosov nepoznáme. Poznáme niekoľko metód, ktoré používajú rôzne prístupy na určovanie rozdelenia zmien výnosov. Hlavnou myšlienkou všetkých metód je, čo najpresnejšie odhanúť toto rozdelenie. Pre jednoduchú interpretáciu výpočtu miery Value at Risk stačí opísať metódu Histotickej simuácie. V tomto prípade vypočítame relatívne zmeny z historického obdobia a zoradíme ich od najnižšej, až po najvyššiu hodnotu. Dostávame rozdelenie zmien F, z ktorého určíme kvantil $q_\alpha(F)$. Treba upozorniť, že táto metóda je pomalá na

reakcie trhu. Preto sa vyvinuli komplexnejšie metódy, ako sú napríklad Varično - kovariačná metóda, Viacrozmerná Garch metóda, Metóda konštantnej podmienej korelácie, BEKK - Garch metóda a mnohé ďalšie.

Všeobecná kostra výpočtu:

- Nech P_t^i sú aktíva, kde $t = 0, 1, ..., T$ je čas, $i = 1, 2, ..., I$ je i-te aktívum.

  Potom $P_t^i = f^i(t, R_t^i)$, kde R_t^i je rizikový faktor.

- Nech w^i sú váhy pre i - te aktívum.

- Potom hodnota portfólia je $P = \sum_{i=1}^{I} w^i P_t^i$.

- Relatívna zmena rizikového faktora je $r_t^i = ln\left(\frac{R_{t+1}^i}{R_t^i}\right)$, kde $t = 0, 1, ..., T-1$.

- Nech hypotetické scenáre pre rizikový faktor sú $\widetilde{R^i}_{T+1,s} = R_T^i(1 + r_s)$,
  kde $s = 1, 2, ..., T-1$.

- Nech hypotetická cena aktíva je $\widetilde{P^i}_{T+1,s} = f^i(T+1, \widetilde{R^i}_{T+1,s})$.

- Potom hypotetická hodnota portfólia je $\widetilde{P}_{T+1,s} = \sum_{i=1}^{N} w^i \widetilde{P^i}_{T+1,s}$.

- Na záver z relatívnych hypotetických zmien portfólia vypočítame kvantil na hladine α.

Naša aplikácia:

Určíme aktíva. Aktíva môžu byť akcie, dlhopisy, menové deriváty a pod. V našom portfóliu sú aktíva akciové indexy, a to konkrétne 1. akciový index je DJIA, 2. akciový index NASDAQ a 3. akciový index S & P.

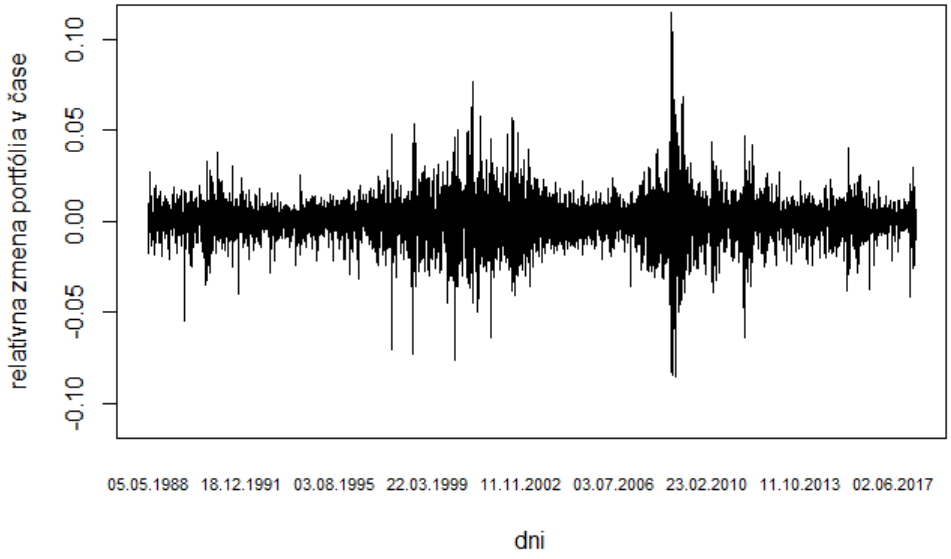
Rizikový faktor je faktor ovplyvňujúci hodnotu aktíva. V prípade, že aktívum je akcia, tak jej rizikový faktor je jej cena. Ak je aktívum dlhopis, tak jeho rizikovým faktorom je úroková miera. Rizikovým faktorom pre menové deriváty je výmenný kurz. Rizikový faktor v našom prípade je cena akcie.

Ďalej určíme váhy, s ktorými vieme vypočítať hodnotu portfólia. Váhy pre jednotlivé aktíva určíme ako podiel investovaného kapitálu do jednotlivého aktíva a hodnoty aktíva v čase $t = 0$. Nech v našom prípade investujeme do každého aktíva 1 mil. $.

Váha predstavuje počet akcií, ktoré sme nakúpili za 1 mil. \$. Váhy dostaneme ako $w^i = \frac{1000000}{R_0^i}$.

Hodnoty váh jednotlivých akciových indexov nášho portfólia sú rovné $w^1 = 494,9931$, $w^2 = 2635,046$, $w^3 = 3864,137$.

Vypočítali sme relatívnu zmenu portfólia v čase t ako $p_t = \frac{P_{t+1}^i - P_t^i}{P_t^i}$, ktorú môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku, viď. Obr. 2.



Obr. 2: Relatívna zmena výnosov portfólia v čase

Teraz je našou úlohou vypočítať relatívne hypotetické zmeny výnosov portfólia a z nich vypočítať 99%-ný kvantil, čo predstavuje Value at Risk na hladine α, kde $\alpha = 0,1$, čo predstavuje odporúčanú hladinu podľa Bazilej [6]. Rovnakým spôsobom vieme vypočítať Value at Risk aj pre inú hladinu α. Modelov na výpočet relatívnych hypotetických zmenien je mnoho, my predstavíme model, ktorý sme implementovali, a tým je vyššie spomenutá Filtrovaná historická simulácia.

1.1.1 Filtrovaná historická simulácia

Filtrovaná historická simulácia [3] je jedna z metód na výpočet miery Value at Risk. V tomto prístupe sa používa kombinácia CCC - GARCH modelu na výpočet volatility

a historickej simulácie, tzv. bootstrap metódy na výpočet hypotetických štandardizovaných rezíduí. Bootstrap metóda je vhodná na odhad empirického rozdelenia dát.

Posúdenie všetkých zavedených modelov pre Value at Risk z hľadiska presnosti odhadu Expected Shortfall je v štúdii [22], čo má za následok prednosť podmienených modelov, najmä GARCH s filtrovanými historickými simuláciami. Ďalej v štúdií poukazujú, že presnosť odhadu Expected Shortfall závisí od presnosti odhadu Value at Risk. Toto zistenie nás motivovalo zvoliť pre našu úlohu vhodnú metódu na výpočet miery rizika Value at Risk. Preto sme vybrali Filtrovanú historickú simuláciu. Túto metódu sme vybrali aj vďaka spomínanej štúdií a práci [26].

Teraz predstavíme model, všeobecnú kostru výpočtu a predostreme výsledky z našej implementácie.

Všeobecná kostra výpočtu:

Analyzujme jednotlivé časti modelu. CCC metóda (Constant conditional correlation method) je metóda podmienenej konštantnej korelácie. Čo znamená, že korelácie nechávame konštantné a počítame len smerodajnú odchýlku σ_t.

Nech rezíduá $u_t = \mu_t + \epsilon_t$, kde $\epsilon_t = \sigma_t z_t$ a $\epsilon_t \sim N(0, \Sigma_t)$.

Potom štandardizované rezíduá $z_t = \frac{u_t - \mu_t}{\sigma_t}$.

Potom kovariančná matica Σ_t vypočítaná ako

$$\Sigma_{t+1} = S_{t+1} R S_{t+1}, \tag{1}$$

kde $S_{t+1} = diag(\sigma^1_{t+1}, ..., \sigma^i_{t+1}, ..., \sigma^I_{t+1})$

a matica korelácií R výpočítaná zo štandardizovaných rezíduí $R = cor(z^1, ..., z^i, ..., z^I)$, kde z^i je časový rad štandardizovaných rezíduí pre i - te aktívum za poseldných N - dní.

GARCH model sme použili na odhad smerodajnej odchýlky σ_t. Ako odhad dostávame $\hat{\sigma_t}$. Bootstrap metóda sa používa na výber relatívnych hypotetických zmien zo zmien z minulosti.

Naša aplikácia:

Najskôr sme pomocou 1 - rozmernych GARCH procesov odhadli model pre každé

aktívum i. Z neho sme vyjadrili rezíduum u_t^i a sigmu σ_t^i, a na záver vypočítali štandardizované rezíduum z_t^i pre každé aktívum.

Strednú hodnotu μ_t^i môžeme z dlhodobého hľadiska pokladať za nulovú.

Pri výpočte Value at Risk sme použili rekalibráciu parametrov na 1 - dennej báze. To znamená, že sme vypočítali volatilitu na 1 deň dopredu z autoregresného vzťahu pomocou parametrov ω^i, alfa α^i a beta β^i odhadnutých z GARCH modelu. Potom vieme vypočítať $(t+1)$ - vú sigmu pre zajtrajší deň nasledovne

$$\sigma_{t+1}^i = \sqrt{\omega^i + \alpha^i {z_t^i}^2 + \beta^i {\sigma_t^i}^2}. \tag{2}$$

Na výpočet hypotetických scenárov rizikových faktorov potrebujeme zajtrajšie, čiže hypotetické štandarizované rezíduá z_{t+1}^i. Získame ich použitím bootstrap metódy.
Zo štandardizovaných rezíduí, ktoré nastali od začiatku časového okna až po dnes vyberieme náhodne práve jednu hodnotu, ktorú považujeme za štandarizované rezíduum pre zajtrajší deň. Postup zopakujeme toľkokrát, aký je zvolený počet simulácií.

Kovariančnú maticu Σ_{t+1} sme vypočítali podľa vzťahu (1). Súčasť jej výpočtu je matica korelácií R, v ktorej sme pre časový rad z^i zvolili $N = 250$.

Na rozklad matice Σ_{t+1} sme použili Choleského rozklad

$$\Sigma_{t+1} = A^T A. \tag{3}$$

Relatívna zmena i - teho aktíva je v našom prípade súčin matice A a simulácií zajtrajších štandardizovaných rezíduí z_{t+1}.

Vypočítali sme hypotetické scenáre pre rizikové faktory ako

$$\widetilde{R^i}_{t+1} = R_{t+1}^i (1 + z_{t+1}^T A). \tag{4}$$

Hypotetický scenár pre celé portfólio je súčet hypotetických scenárov rizikových faktorov prenásobených s ich prislúchajúcou váhou

$$\widetilde{P^i}_{t+1} = \sum_i w^i \widetilde{R^i}_{t+1}. \tag{5}$$

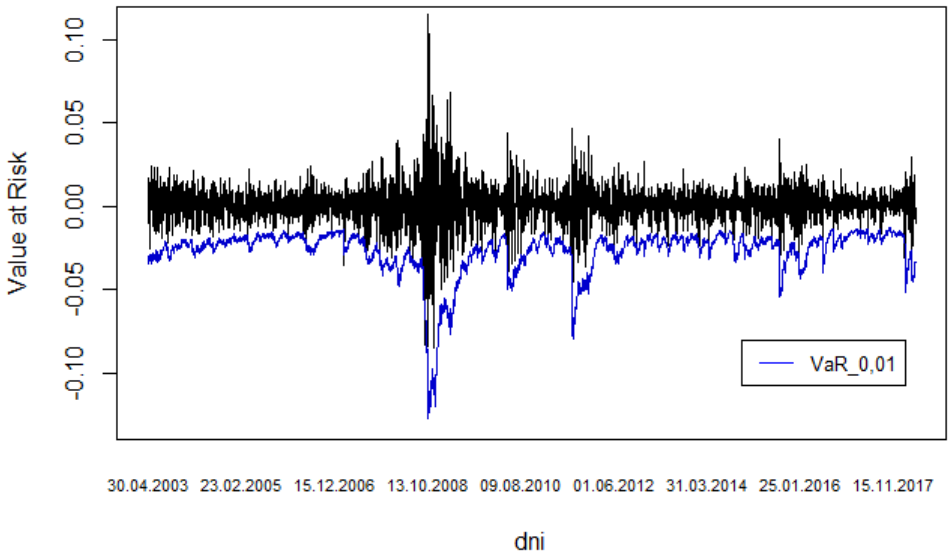
Relatívne hypotetické zmeny dostávame ako

$$\widetilde{P^i}_{t+1} = \frac{\widetilde{P^i}_{t+1} - P^i_t}{P^i_t}. \tag{6}$$

Na záver vypočítame 1% - ný kvantil z týchto relatívnych hypotetických zmien, čo je hľadaná Value at Risk hodnota.

Výsledky:

Podľa našich výpočtov dostávame nasledujúci obrázok, viď. Obr. 3, s hodnotami Value at Risk v každom čase. Na prvý pohľad vidíme, že hodnoty Value at Risk sa zdajú byť dobré v zmysle počtu prekročení vzhľadom na hladinu kvantilu α. Avšak musíme to overiť spätnými testami.



Obr. 3: Value at Risk

Pre lepšiu interpretáciu výsledkov metód spätného testovania budeme interpretovať výsledky na obrázkoch so štandardizovanými rezíduami. Kde štandardizované rezíduá portfólia dostaneme ako

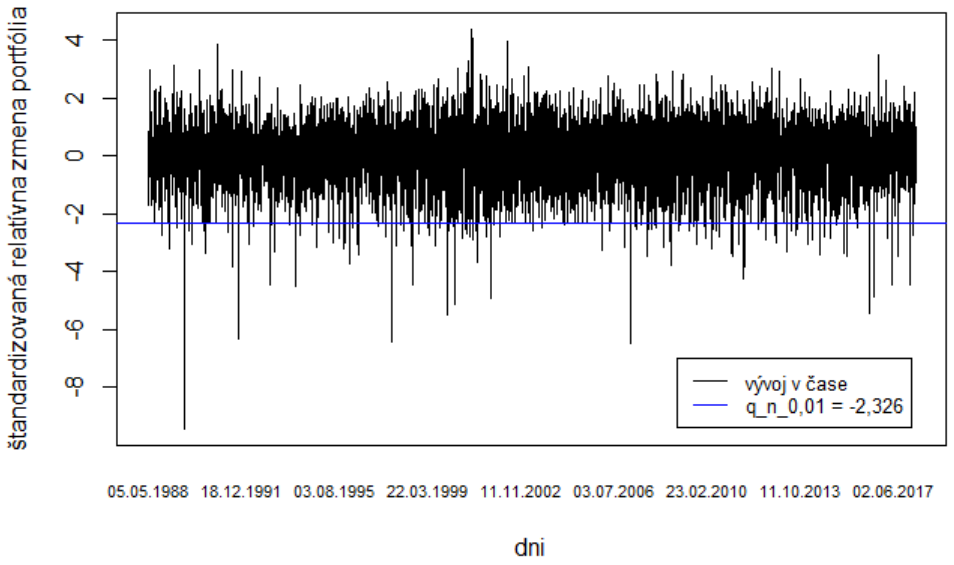
$$pz_t = \sum_i z^i_t v^i_t, \tag{7}$$

kde z_t^i sú štandardizované rezíduá v čase t pre i - ty index. A v_t^i je podiel investovaného kapitálu v čase t pre i-ty index, ktorý dostaneme ako

$$v_t^i = \frac{R_t^i}{\sum_i R_t^i}, \tag{8}$$

kde R_t^i je hodnota akciového indexu i v čase t.

Nasledujúci obrázok, viď. Obr. 4, porovnáva hodnoty štandardizovaných rezíduí z nášho portfólia a 1% - ný kvantil normálneho rozdelenia $\phi_\alpha^{-1} = -2,326$.



Obr. 4: Štandardizovaná relatívna zmena výnosov portfólia a 1% - ný kvantil normálneho rozdelenia

Na obrázku, viď. Obr. 4, môžeme vidieť prekročenia v prípade, ak by sme na určenie miery rizika používali iba 1% - ný kvantil normálneho rozdelenia $\phi_\alpha^{-1} = -2,326$. Percentuálna početnosť prekročení je rovná $1,59\%$ a priemerná absolútna veľkosť prekročenia je rovná $0,02918753$.

1.2 Spätné testovanie Value at Risk

V tejto podkapitole opíšeme spätné testovanie miery rizika Value at Risk. Predstavíme konkrétne testy, ktoré sme použili, a to Kupiecov POF test a Christoffersonov test,

ktorý je aj najpoužívanejší.

Spätné testovanie rizikovej miery Value at Risk pozostáva z analýzy prekročení hodnôt Value at Risk v minulosti. K prekročeniu dochádza, ak straty boli vyššie než sme očakávali.

Dôležité vlastnosti, ktoré by mal spĺňať dobrý Value at Risk model:

- správne nepodmienené krytie,
- nezávislosť prekročení.

Správne nepodmienené krytie znamená, že počet prekročení vypočítaného Value at Risk z modelu ku pozorovaniam z minulosti by mal spĺňať hladinu pravdepodobnosti α. Ak je tento podiel väčší ako hladina pravdepodobnosti, hovoríme o podhodnotení rizika. Ak je tento podiel menší, tak model je konzervatívny.

Nezávislosť prekročení znamená, že prekročenia by sa mali vyskytovať na pozorovaniach z minulosti náhodne. To znamená, že prekročenia by namali byť autokorelované.

1.2.1 Kupiecov POF test

Hlavná myšlienka Kupiecovho POF testu [16] je testovať podiel prekročení ku pozorovaniam, tzv. proportion of failures (POF), vzhľadom na teoretickú hodnotu pravdepodobnosti. Test je zameraný iba na prvú vlastnosť, a to nepodmienené pokrytie.

Test je založený na teste pomerom vierohodnosti (likelihood ratio test (LR)) s nasledovnou testovacou štatistikou

$$LR = -2\frac{lnL(K, N, p)}{lnL(K, N, q)}, \tag{9}$$

kde K je počet prekročení za N predchádzajúcich dní. A L je vierohodnostná funkcia (likelihood function) binomického rozdelenia

$$L(K, N, p) = \binom{N}{K}\theta^K(1-\theta)^{N-K}, \tag{10}$$

kde θ je parameter.

Testujeme hypotézu:

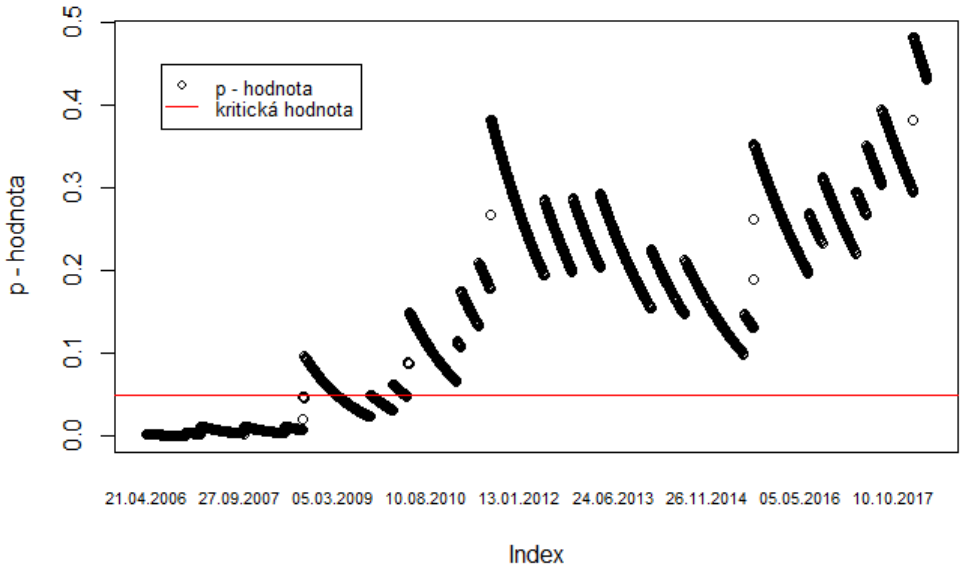
$$H_0 : q = p \quad vs.$$
$$H_1 : q \neq p, \tag{11}$$

kde q označuje skutočnú relatívnu početnosť prekročení, teda $q = \frac{K}{N}$. A p označuje hladinu pravdepodobnosti prekročenia α.

Ak je testovacia štatistika LR blízka k nule, tak hypotézu H_0 nezamietame. Tento prípad nastáva vtedy, ak $p \approx q$. Na druhej strane H_0 zamietame, ak sú hodnoty p a q výrazne odlišné, a to konkrétne $p \leq q$. V tomto prípade je testovacia štatistika LR výrazne kladná.

Výsledky:

Hypotézu sme testovali v každom časovom kroku s použitím dostupného časového okna od začiatku, až po čas t. P - hodnoty pre náš test na hladine 95% sú znázornené na obrázku nižšie, viď. Obr. 5. Môžeme vidieť, že okrem počiatočných dvoch rokov, kedy sa model kalibroval, je p - hodnota vyššia ako kritická hladina 5%. To znamená, že hypotézu H_0 nezamietame. Čiže nezamietame skutočnosť, že relatívna početnosť prekročení sa rovná hladine prekročení α.



Obr. 5: P - hodnoty z Kupiecovho POF testu a kritická hodnota

1.2.2 Christoffersenov test

Christoffersenov test [13] testuje nepodmienené pokrytie a aj nezávislosť prekročení.

Testovacia štatistika je nasledovná

$$LR_{ch} = LR_{pof} + LR_{ind}, \tag{12}$$

kde LR_{pof} je testovacia štatistika z Kupiecovho POF testu, LR_{ind} je testovacia štatistika testujúca nezávislosti prekročení.

Testovacia štatistika LR_{ind} sa vypočíta nasledovne

$$LR_{ind} = -2ln\left(\frac{(1-q)^{N_{00}+N_{10}}q^{N_{01}+N_{11}}}{(1-q_{01})^{N_{00}}(1-q_{11})^{N_{10}}(q_{01})^{N_{01}}(q_{11})^{N_{11}}}\right), \tag{13}$$

kde

N_{01} je počet dní s prekročením nasledujúcich po dni bez prekročenia,

N_{11} je počet dní s prekročením nasledujúcich po dni s prekročením,

N_{00} je počet dní bez prekročenia nasledujúcich po dni bez prekročenia,

N_{10} je počet dní bez prekročenia nasledujúcich po dni s prekročením,

q_{01} je relatívna početnosť prekročení v prípade, že pred ním nenastalo prekročenie a q_{11} je relatívna početnosť prekročení v prípade, že pred ním nastalo prekročenie.

Ďalej podmienené relatívne početnosti sú výpočítané nasledovne

$$q_{01} = \frac{N_{01}}{N_{00}+N_{01}}, \tag{14}$$

$$q_{11} = \frac{N_{11}}{N_{10}+N_{11}}, \tag{15}$$

$$q = \frac{N_{01}+N_{11}}{N_{00}+N_{10}+N_{01}+N_{11}}. \tag{16}$$

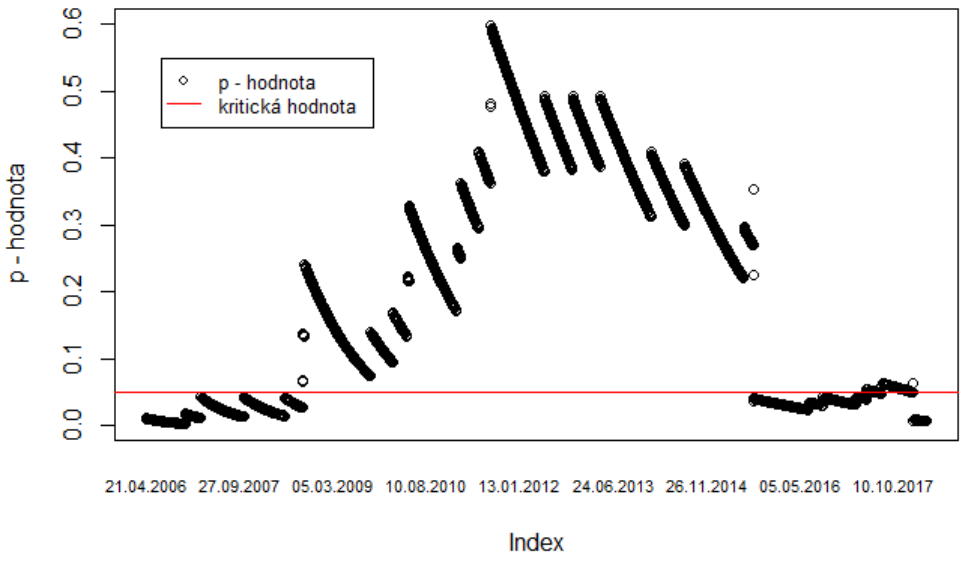
Testujme hypotézu:

$$H_0 : q_{01} = q_{11} = q. \tag{17}$$

Ak prekročenia nie sú od seba závislé a teda platí $q_{01} = q_{11} = q$, tak testovacia štatistika LR je rovná nule.

Výsledky:

Hypotézu sme testovali v každom časovom kroku s použitím dostupného časového okna od začiatku až po čas t. P - hodnoty pre náš test na hladine 95% sú znázornené na obrázku nižšie, viď. Obr. 6. Môžeme vidieť, že výsledky testovania tejto hypotézy sú zamietané pre počiatočné dva roky, kedy sa model kalibroval, ale aj na konci časového okna. A preto sme tento problém skúmali ďalej a zistili sme, že výsledky z testovania, sú pokazené kvôli dvom udalostiam, kedy nastali prekročenia hodnoty Value at Risk dva dni po sebe. V časoch kedy je p - hodnota vyššia ako kritická hladina 5% hypotézu H_0 nezamietame. Čiže nezamietame skutočnosť, že relatívna početnosť prekročení sa rovná hladine prekročení α a súčasne prekročenia sú nezávislé.



Obr. 6: P - hodnoty z Christoffersenovho testu a kritická hodnota

2 Value at Risk vs. Expected Shortfall

Na začiatku tejto kapitoly predstavíme matematické vlastnosti, ktoré budeme v tejto práci využívať. V samostatnej podkapitole opíšeme, ktoré z týchto vlastnosti spĺňa riziková miera Value at Risk. Jednou z nich je napríklad spĺňanie matematickej vlastnosti elicitability. Na druhej strane opíšeme aj jej nedostatky. Jeden z nich hovorí, že metóda Value at Risk nie je subaditívna miera rizika. A preto sa zaujímame o metódu Expected Shortfall, ktorá túto vlastnosť spĺňa. Uvedieme tiež hlavnú myšlienku rizikovej miery Expected Shortfall, ktorá sa dostáva do popredia. V závere kapitoly popíšeme jej pozitívne, ale i negatívne vlastnosti.

2.1 Matematické vlastnosti týkajúce sa rizikových mier

Elicitabilita bola prvýkrát predstavená Osbandom v roku 1985 [20]. Elicitabilita je dôležitá matematická vlastnosť pomáhajúca pri výbere modelu, porovnaní a hodnotení predpovedí.

V risk manažmente pri výpočte rizikovej miery, čiže požiadavky na krytie vlastných zdrojov dochádza k tomu, že riziková miera transformuje rozdelenie pravdepodobností strát na jednu predikovanú hodnotu.

Hodnotiť predpoveď znamená porovnať predikované hodnoty y s reálnymi pozorovaniami x. Na porovnanie týchto hodnôt sa používa skóringová funkcia $S(y, x)$.

Definícia 2.1. *Skóringová funkcia:*
je funkcia, kde

$$S : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$$
$$(y, x) \to S(y, x),$$

kde y sú predikcie a x sú pozorované hodnoty.

Ak chceme udržať elicitabilitu, tak skóringová funkcia musí byť striktne konzistentná. Jej definícia je nasledovná

Definícia 2.2. *Konzistentnosť a striktná konzistentnosť:*
Nech ν je zobrazenie na triede pravdepodobnostných mier $\mathcal{P}$ na $\mathbb{R}$:

$$\nu : \mathcal{P} \to 2^{\mathbb{R}},$$

$$P \to \nu(P) \subset \mathbb{R},$$

kde $2^{\mathbb{R}}$ *označuje mohutnosť množiny* $\mathbb{R}$.

Skóringová funkcia $S : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *je konzistentná pre zobrazenie* ν *vzhľadom na triedu* $\mathcal{P}$ *práve vtedy, keď pre všetky* $P \in \mathcal{P}, t \in \nu(P)$ *a* $y \in \mathbb{R}$,

$$E_P[S(t, X)] \leq E_P[S(y, X)].$$

Funkcia je striktne konzistentná, ak je konzistentná a

$$E_P[S(t, X)] = E_P[S(y, X)] \Rightarrow y \in \nu(P)$$

Definícia 2.3. *Elicitabilita:*
Zobrazenie ν *je elicitabilné vzhľadom k* $\mathcal{P}$ *práve vtedy, keď existuje skóringová funkcia* S, *ktorá je striktne konzistentná pre* ν *vhľadom k* $\mathcal{P}$.

Elicitabilita je pomocné kritérium na určenie optimálnej predikcie. Teda, ak sme našli striktne konzistentnú skóringovú funkciu pre zobrazenie ν, tak môžme určiť optimálnu predikciu $\hat{y}$ pre $\nu(P)$ ako

$$\hat{y} = \underset{y}{\operatorname{argmin}}\, E[S(y, X)], \tag{18}$$

kde X je náhodná premenná pozorovaných hodnôt.

Čiže elicitabilita je splnená vtedy, ak predikovaná hodnota $\hat{y}$ môže byť vyjadrená ako argument minima zo strednej hodnoty skóringovej funkcie.

Tieto definície sú uvedené v práci [9]. Ďalej je v tejto práci definovaná podmienená elicitabilita. Ukázalo sa, že niektoré užitočné rizikové miery nie sú elicitabilné, ale sú takmer elicitabilné. Definícia podmienenej elicitability je nasledovná

Definícia 2.4. *Podmienená elicitabilita:*
Zobrazenie ν *miery pravdepodobnosti* $\mathcal{P}$ *je podmienene elicitabilné, ak existuje funkcia* $\tilde{\gamma}$ *a* γ *taká, že*

$$\nu(\mathcal{P}) = \gamma(P, \tilde{\gamma}(P)),$$

kde $\tilde{\gamma}$ je elicitabilné vzhľadom k $\mathcal{P}$ a γ je taká, že γ_c je definovaná ako

$$\gamma_c : \mathcal{P} \to 2^{\mathbb{R}}, P \to \gamma(P, c) \subset \mathbb{R}$$

je elicitabilná vzhľadom ku $\mathcal{P}$ pre všetky $c \in \mathbb{R}$.

Ďalej predstavme definíciu rizikovej miery. Riziková miera je zobrazenie definované na množine všetkých finančných pozícií. Riziková miera musí spĺňať nasledujúcich 5 axióm zahrnutých v definícii, ktoré určili Acerbi a Tasche [2], formálne

Definícia 2.5. *Riziková miera:*
Nech množina $\mathcal{X}$ je množina reálnych náhodných premenných. Potom zobrazenie $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ sa nazýva riziková miera, ak spĺňa nasledujúce axiómy:

i translačná invariantnosť:

$$X \in \mathcal{X}, a \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(X + a) = \rho(X) - a,$$

ii monotónnosť:

$$X \in \mathcal{X}, X \leq 0 \wedge X \neq 0 \Rightarrow \rho(X) > 0,$$

iii pozitívna homogenita:

$$X \in \mathcal{X}, k \geq 0, kX \in \mathcal{X} \Rightarrow \rho(kX) = k\rho(X),$$

iv subaditivita:

$$X, Y \in \mathcal{X}, X + Y \in \mathcal{X} \Rightarrow \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

Vysvetlíme jednotlivé pojmy v chápaní rizika:

- translačná invariantnosť: pridaním bezpečnej čiastky a do počiatočnej pozície sa zníži riziko o rovnakú čiastku a,
- monotónnosť: ak aktívum dosahuje stratu, tak sme vystavený kladnému riziku. Predpoklad $X \neq 0$ môže byť interpretovaný, že riziková pozícia X nie je bez rizika.

- pozitívna homogenita: ak sa veľkosť pozície zvyšuje, tak rovnako úmerne sa zvyšuje aj riziko

- subaditivita: táto vlastnosť v svete investícií hovorí, že hlavný predpoklad diverzifikácie portfólia aktív vo vnútri portfólia vedie k znižovaniu rizika.

2.2 Výhody a nevýhody použitia Value at Risk

Popísanie výhod a nevýhod je dôležité pre komplexný náhľad na podstatné vlastnosti tejto rizikovej miery. Analýza je tiež dôležitá na pochopenie, prečo vznikol nový výpočet rizikovej miery Expected Shortfall, ktorý nižšie spomínané negatívne vlastnosti nemá.

V tejto podkapitole postupne predstavíme výhody a nevýhody. Najskôr začneme s výhodami a na záver prejdeme k nevýhodám.

Výhoda:

- **Miera rizika Value at Risk spĺňa vlastnosť elicitability:**

  Rozumná voľba pre skóringovú funkciu v prípade miery rizika Value at Risk je použitie skráteného rozdelania strát [11]. Skóringová funkcia vyzerá nasledovne

$$S(q_t, x_t) = (x_t - q_t)(\alpha - I(x_t \leq q_t)), \tag{19}$$

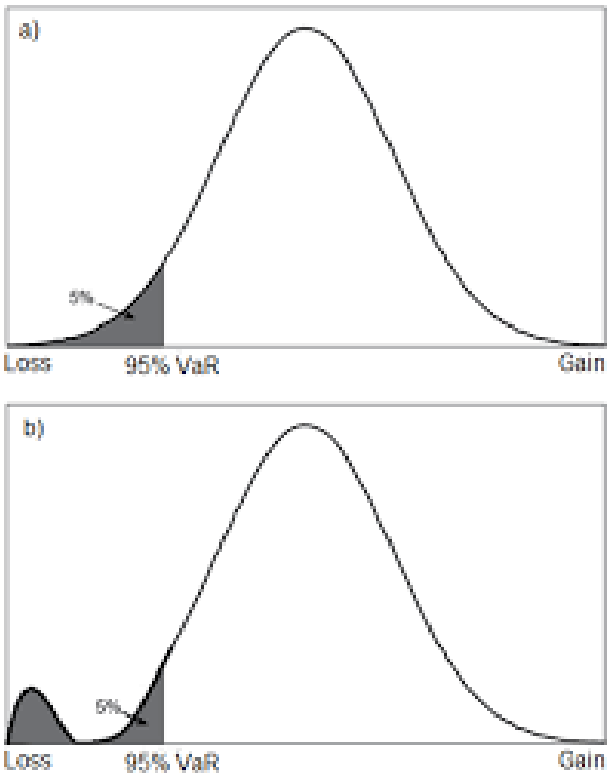
  kde q_t je kvantil, α je hladina na ktorej merieme riziko a $I(x_t \leq q_t)$ je funkcia rovná 1, ak platí $x_t \leq q_t$, inak je rovná 0, kde x sú zmeny portfólia.

Nevýhody:

- **Value at Risk je len kvantil z rozdelenia strát.**

  Znamená to, že nevieme akým stratám budeme čeliť, ak bude tento kvantil prekročený. Názorný príklad môžeme vidieť na obrázku nižšie, viď. Obr. 7. Tento efekt má za príčinu rizikové správanie investorov, ktorí nehľadia na výšku strát po prekročení rizikovej miery Value at Risk. Tiež čelíme tomu, že dve aktíva môžu mať síce rovnakú hodnotu Value at Risk, ale vďaka ich rozličnému chvostu rozdelenia strát sú po prekročení kvantilu vystavené rozličným stratám. A tak sa

dostávame k tomu, že dve rôzne aktíva s rovnakou mierou rizika Value at Risk sú rovnako rizikové iba po hladinu určenú Value at Risk.



Obr. 7: Funkcia hustoty pravdepodobnosti rozdelenia strát, ak je z a) normálneho rozdelia a b) z rozdelenia s extrémnymi udalosťami na chvoste. Obrázok zo zdroja [18] je názornou ukážkou, čo sa môže stať po prekročení Value at Risk

- **Value at Risk nie je subaditívna miera rizika**

  Znamená to, že pri výpočte Value at Risk sa môže stať, že riziko spojeného portfólia prekročí sumu rizík niekoľkých samostatných portfólií. Je rozumné uvažovať, že správna metóda výpočtu rizikovej miery by mala spĺňať subaditivitu, pretože diverzifikáciou portfólia sa riziko znižuje.

  Ako kontrapríklad [15] uvažujme, že máme dve aktíva, každé s hodnotou 100 a so

  - stratou 0% a pravdepodobnosťou 99,1%
  - a stratou 10% spravdepodobnosťou 0,9%.

Pre každé aktívum samostatne je 99% - né Value at Risk rovné 0.

Ak uvažujeme spojené portfólio z vyššie uvedených aktív, tak straty sú rovné:

- 20 s pravdepodobnosťou $0,9 \times 0.9 = 0,0081\%$,
- 10 s pravdepodobnosťou $2 \times 0,009 \times 0,0991 = 1,7838\%$
- a 0 s pravdepodobnosťou $0,91 \times 0.91 = 98,2081\%$.

Z toho 99%-né Value at Risk pre kombinované portfólio je rovné 10.

Z príkladu vidíme, že riziková miera Value at Risk nám odporúča nakúpiť buď jedno aktívum, alebo druhé aktívum namiesto investície do kombinovaného portfólia, čo vyvracia vlastnosť subaditivity.

2.3 Výhody a nevýhody použitia Expected Shortfall

Tak ako sme už načrtli vyššie, tak miera rizika Value at Risk má svoje výhody, ale aj nevýhody. Práve poukázanie, že Value at Risk je iba kvantil a nespĺňa vlastnosti subaditivity, bolo podnetom na hľadanie iných metód na výpočet miery rizika. A tak Artzner v roku 1999 [4] navrhol novú rizikovú mieru nazývanú Expected Shortfall, ktorá tieto vyššie uvedené nedostatky nemá. Riziková miera Expected Shortfall zohľadňuje straty, ktoré nastanú po prekročení kvantilu, pretože je definovaná ako stredná hodnota z týchto extrémnych strát.

Nakoniec navrhnutím Bazilejskej komisie v dokumente [6] v roku 2013 na zmenu miery rizika pri výpočte kapitálovej požiadavky z metódy Value at Risk na metódu Expected Shortfall sa rozvírila diskusiu a spätnom testovaní Expected Shortfall. Problém spočíva v tom, že táto miera rizika nespĺňa vlastnosť elicitability [12]. Hovoríme o neexistencii vhodnej skóringovej funkcie pre Expected Shortfall. Vynárali sa otázky, ako a či vôbec môže byť táto metóda spätne testovaná.

Páni Acerbi, Székely v práci [1] zamietajú argument, že nesplnenie elicitability bráni v spätnom testovaní. O elicitabilite vieme, že vďaka nej vieme skonštruovať mieram skóringovú fukнciu, ktorá umožnuje porovnania s inými modelmi. Vďaka nej môžeme hodnotiť predpoveď, čo znamená porovnať predikované hodnoty y s reálnymi pozorovaniami x. Autori tvrdia, že elicitabilita je dôležitá pri výbere modelu, ale nie pri jeho testovaní. Pretože spätné testovanie nie je hodnotenie predikovaných hodnôt.

Postupom času sa vynoril návrh na spoločné testovanie Value at Risk a Expected Shortfal. Emer, Kratz a Tasche [9] poukázali na to, že Expected Shortfall nie je elicitabilné, ale je podmienene elicitabilné. To znamená, že miera Value at Risk a miera Expected Shortfall spĺňajú vlastnosť elicitability spoločne, aj keď Expected Shortfall samostatne túto vlastnosť nespĺňa. Vyplýva to z toho, že Expected Shortfall je kombináciou

$$E[X|X \geq c], \quad kde \quad c = q_\alpha(X). \tag{20}$$

Acerbi a Székely skonštruovali spoločnú skóringovú funkciu pre obe rizikové miery, Value at Risk a Expected Shorfall. V práci [2] je odvodené jej skonštruovanie a v práci [10] je hĺbková analýza matematického pozadia skóringových funkcií rizikových mier.

Skóringová funckia [2] vyzerá nasledovne

$$S^W(v, e, x) = \alpha(e^2/2 + Wv^2/2 - ve) + \mathbb{1}_{(x+v<0)}(e(v + x) + W(x^2 - v^2))/2, \tag{21}$$

kde $W \in \mathbb{R}$, $v = VaR$, $e = ES$ a x sú pozorovania.

3 Výpočet Expected Shortfall a jeho spätné testovanie

Na začiatku kapitoly uvedieme a popíšeme defíciu miery rizika Expected Shortfall. Zastavíme sa pri samotnom postupe nahradenia rizikovej miery Value at Risk za túto mieru. Tento krok aj dokážeme. V ďalšej časti kapitoly prejdeme k spätným testom, ich hlavnej myšlienke, postupu a aplikácií. Ťažiskom tejto kapitoly je implementácia vybraných spätných testov na našom portfóliu. Pre tieto testy sme navrhli úpravy, ktoré by zachytili empirické rozdelenie dátovej sady. Kým práca [24] predstavuje metódy na jednoduchých príkladoch s normálnym rozdelením, tak my sme sa zamerali na implementáciu testov na reálnej a dostatočne veľkej sade dát.

Pri aplikácii rizikovej miery Expected Shortfall predpokladáme nezávislosť strát, ktoré prekročili kvantil. Tento predpoklad je možné testovať, napríklad pomocou Christoffersonovho testu. My sme testovali nezávislosť na záver podkapitoly 1.2. Pri aplikácii rizikovej miery Expected Shortfall predpokladáme, že hodnota Value at Risk je dobrá.

3.1 Výpočet Expected Shortfal

Výpočet rizikovej miery Value at Risk nezohľadňuje, aké straty sa dosahujú po prekročení kvantilu. Výpočet rizikovej miery Expected Shortfall túto skutočnosť zohľadňuje. Tento prístup výlučne pracuje so stratami v extrémnych situáciách. Expected Shortfall je definované, ako stredná hodnota zmien výnosov, ktoré prekračujú kvantil rozdelenia zmien, čiže Value at Risk.

Definícia rizikovej miery Expected Shortfall znie nasledovne

Definícia 3.1. *Expected Shortfall:*

pre straty X so strednou hodnotou E, pre ktorú platí $E(|X|) < \infty$ a distribučnou funkciou F_X a hladinou $\alpha \in (0,1)$ je miera Expected Shortfall definovaná nasledovne

$$ES_{t,1-\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q_u(F_X)du, \tag{22}$$

$q_u(F_X)du$ je kvantil fuknce F_X. Potom vzťah medzi Value at Risk a Expected Shortfall je nasledovný

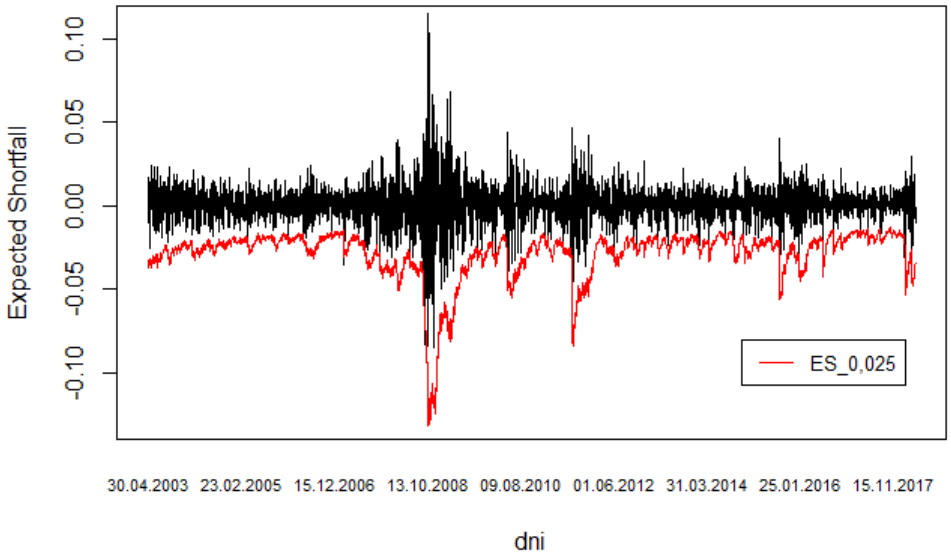
$$ES_{t,1-\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} VaR_{t,1-u}(X)du, \tag{23}$$

alebo v jednoduchosti

$$ES_{t,1-\alpha}(X) = -E[X|X \leq -VaR_{t,1-\alpha}]. \tag{24}$$

Výsledky:

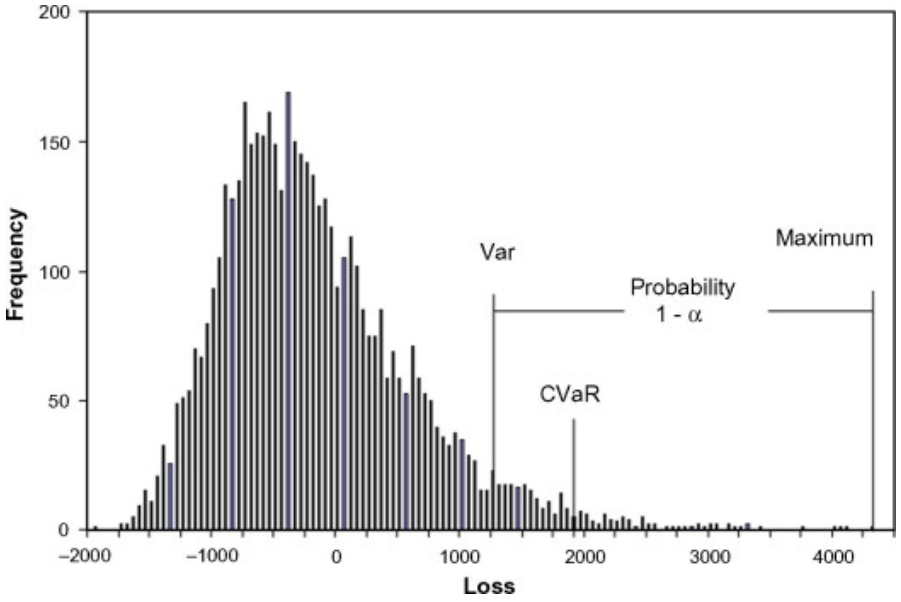
Keďže pracujeme z reálnymi dátami, tak výpočet miery Expected Shortfall podľa vzťahu (24) aplikujeme na relatívnych hypotetických zmenách. Výsledky výpočtov sú zobrazené na nasledujúcom obrázku, viď. Obr. 8. Vo výpočte sme použili hladinu $\widetilde{\alpha} = 2,5\%$. Dôvod použitia práve tejto hladiny vysvetlíme v nasledujúcej podkapitole 3.2.



Obr. 8: Expected Shortfall

3.2 Nahradenie miery rizika Value at Risk mierou rizika Expected Shortfall

Hodota miery rizika Expected Shortfall je väčšia ako hodnota miery Value at Risk pri tej istej hladine α. Tento efekt je zobrazený na nasledujúcom obrázku, viď. Obr. 9.



Obr. 9: Obrázok [23] porovnávajúci Value at risk a Expected Shortfall označený ako CVaR (Conditional Value at Risk) na funkcii rozdelenia strát

Na to, aby mohla byť nahradená miera rizika Value at Risk na hladine $\alpha = 0,01\%$ mierou rizika Expected Shortfall, tak bolo potrebné určiť hladinu $\widetilde{\alpha}$, ktorú použijeme pri výpočte Expected Shortfall.

V regulácií Bazilej [6] je pre Value at Risk, z ktorej sa následne vypočíta Expected Shortfall odporúčená hladina $\widetilde{\alpha} = 0,025$. Pre normálne rozdelenie strát totiž platí nasledovné

$$VaR_{t,\alpha} \cong ES_{t,\widetilde{\alpha}}. \tag{25}$$

Ako sme už uviedli, tak v prípade reálnych dát predpoklad normality nie je splnený. Rozdelenie strát sa viac podobá na rozdelenie s ťažkými chvostami, pretože extrémne straty nastávajú ojedinele, ale sú vysoké. V našom prípade nahrádzame normálne rozdelenie štandardizovaným Studentovým t - rozdelením. Naším cieľom je dokázať a vizualizovať platnosť aproximácie (25).

Ukážeme, že v prípade štandardizovaného Studentovho t - rozdelenia pri rastúcom počte stupňov voľnosti sa pomer $VaR_{0,99}$ a $ES_{0,975}$ blíži ku jednotke.

Nech nasledujúce vzťahy (26) a (27) sú vzťahy na výpočet Expected Shortfall a Value at Risk, kde w sú váhy a μ je stredná hodnota, ktorú predpokladajme nulovú počas

celého obdobia. Ďalej Σ je matica kovariancií, ν je počet stupňov voľností, g_ν je hustota štandardizovaného Studentovho t - rozdelenia a $t^{-1}_{\nu,\alpha}$ je kvantil štandardizovaného Studentovho t - rozdelenia.

$$VaR_{t,\alpha} = w^T\mu_t + \sqrt{w^T\Sigma_t w}\sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}t^{-1}_{\nu,\alpha}, \tag{26}$$

$$ES_{t,\widetilde{\alpha}} = w^T\mu_t + \sqrt{w^T\Sigma_t w}\sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}\left(\frac{g_\nu(t^{-1}_{\nu,\widetilde{\alpha}})}{1-\widetilde{\alpha}}\right)\left(\frac{\nu+(t^{-1}_{\nu,\widetilde{\alpha}})^2}{\nu-1}\right). \tag{27}$$

Našou úlohou je dokázať, že nasledujúci výraz, čiže pomer $VaR_{t,\alpha}$ a $ES_{t,\widetilde{\alpha}}$ sa približne rovná 1

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{t^{-1}_{\nu,\alpha}}{\left(\frac{g_\nu(t^{-1}_{\nu,\widetilde{\alpha}})}{1-\widetilde{\alpha}}\right)\left(\frac{\nu+(t^{-1}_{\nu,\widetilde{\alpha}})^2}{\nu-1}\right)} \cong 1. \tag{28}$$

Dôkaz.

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{t^{-1}_{\nu,\alpha}}{\left(\frac{g_\nu(t^{-1}_{\nu,\widetilde{\alpha}})}{1-\widetilde{\alpha}}\right)\left(\frac{\nu+(t^{-1}_{\nu,\widetilde{\alpha}})^2}{\nu-1}\right)} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{t^{-1}_{\nu,\alpha}}{\frac{g_\nu(t^{-1}_{\nu,\widetilde{\alpha}})}{1-\widetilde{\alpha}}}\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\frac{\nu+(t^{-1}_{\nu,\widetilde{\alpha}})^2}{\nu-1}} =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty}\frac{t^{-1}_{\nu,\alpha}}{\frac{g_\nu(t^{-1}_{\nu,\widetilde{\alpha}})}{1-\widetilde{\alpha}}}1 = \frac{\phi^{-1}_\alpha}{\frac{\varphi(\phi^{-1}_{\widetilde{\alpha}})}{1-\widetilde{\alpha}}} = 0,9951704.$$

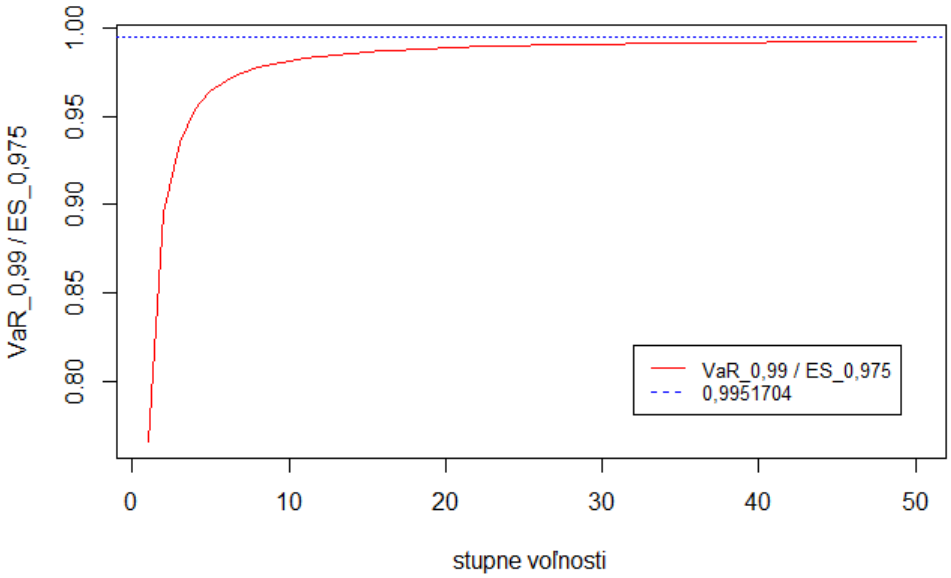
■

Kde ϕ^{-1}_α je kvantil normálneho rozdelenia a φ je hustota normálneho rozdelenia.

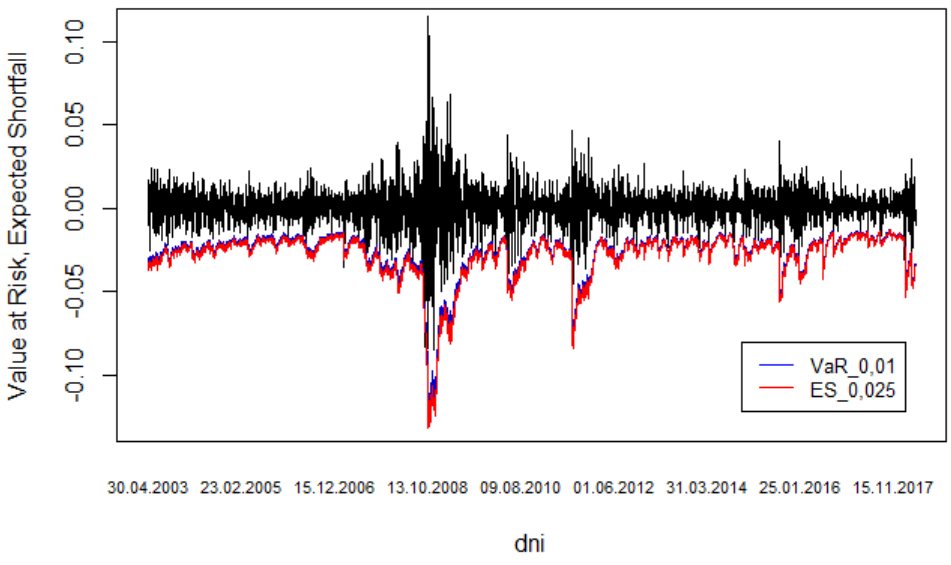
Podiel $VaR_{t,\alpha}$ a $ES_{t,\widetilde{\alpha}}$ konverguje ku hodnote $0,9951704$, čo je približne 1.

Na obrázku nižšie, viď. Obr. 10, môžeme vidieť konvergenciu hore uvedeného výrazu ku hodnote $0,9951704$ vzľadom na rast počtu stupňov voľnosti.

Na porovnanie rizikových mier na rôznych hladinách $VaR_{0,99}$ a $ES_{0,975}$ vypočítaných pre naše portfólio prikládame obrázok, viď. Obr. 11.



Obr. 10: Pomer $VaR_{0,99}$ a $ES_{0,975}$ pri zmene stupňov voľnosti pre štandardizované Studentovo t - rozdelenie



Obr. 11: Porovnanie hodnôt $VaR_{0,99}$ a $ES_{0,975}$ pre naše portfólio

3.3 Testy spätného testovania Expected Shortfall a ich aplikácie

Spätné testovanie je proces posudzovania kvality modelu. V metódach spätného testovania pre mieru Value at Risk sledujeme, kedy štandardizované relatívne hypotetické zmeny portfólia prekročia kvantil na stanovenej hladine. Avšak pri testovaní Expected Shortfall nestačí sledovať iba správne nepodmienené pokrytie a nezávislosť prekročení, pretože Expected Shortfall je funkcia strednej hodnoty. Vo všeobecnosti budeme testovať, či sa predikovaná hodnota Expected Shorfall rovná zrealizovanej hodnote Expected Shortfall. Kde predikovaná hodnota Expected Shorfall je stredná hodnota relatívnych hypotetických zmien výnosov portfólia, ktoré prekračujú Value at Risk z modelu.
A zrealizované Expected Shortfall je stredná hodnota zrealizovaných relatívnych zmien výnosov portfólia, ktoré prekračujú rovnakú hodnotu Value at Risk pre určité historické obdobie.

V tejto podkapitole predstavíme hlavnú myšlienku, postup a implementáciu jednotlivých spätných testov pre Expected Shortfall.

Na úvod opíšeme všeobecné informácie o metódach spätného testovania pre túto rizikovú mieru. Môže ísť o metódu s parametrickým alebo neparametrickým prístupom. Metóda si vyžaduje alebo nevyžaduje simulácie.

Parametrická metóda sa zaoberá parametrami dátového súboru, ako sú stredná hodnota, medián, rozptyl a podobne. Parametrická metóda si vyžaduje špecifikáciu rozdelenie dátového súboru, prípadne aj jeho parametre. Na druhej strane neparametrická metóda sa zaoberá vlastnosťami dátového súboru, ako sú tvar rozdelenia, závislosť premenných a podobne, a preto nemusíme špecifikovať rozdelenie dátového súboru.

Simulovanie sme použili na relatívne hypotetické zmeny portfólia. Keďže relatívne hypotetické zmeny portfólia sa nesprávajú podľa normálneho rozdelenia, tak našou snahou bolo simulovať ich z rozdelenia s ťažšími chvostami. Simulovali sme dvoma prístupmi, a to pomocou bootstrap metódy a pomocou štandardizovaného Studentovho t - rozdelenia so stupňami voľnosti ν. V prípade použitia bootstrap metódy zachytávame empirické rozdelenie relatívnych hypotetických zmien. V prípade použitia štandardizovaného Studentovho t - rozdelenia sa snažíme odhadnutím počtu stupňov voľnosti priblížiť k rozdeleniu dát. Pri simuláciách sme použili strednú hodnotu μ a kova-

riančnú maticu Σ, ktoré charakterizujú naše dáta.

3.3.1 Test skráteného rozdelenia podľa Righi a Ceretta

Hlavná myšlienka testu od Righi a Ceretta [21] spočíva v odvodení rozdelenia chvostu prekročení, tzv. skráteného rozdelenia. Následne môžeme testovať hypotézy o strednej hodnote skráteného rozdelenia, čiže Expected Shortfall. Rozdelenie strát nepoznáme, takže ho musíme odhadnúť. Odhadneme ho simuláciami zo štandardizovaného Studentovho t - rozdelenia s odhadnutým počtom stupňov voľností.

Keďže spätný test sa zaoberá rozdelením zmien výnosov, tak ide o metódu s parametrickým prístupom.

Hlavná myšlienka postupu:

- simulovať rozdelenie zmien portfólia,
- vybrať hodnoty, ktoré prekročili Value at Risk,
- štandardovať prekročenia, z ktorých dostávame skátené rozdelenie,
- vypočítať medián zo štandardizovaných prekročení,
- zopakovať simuláciu M - krát,
- zvoliť kritickú hladinu,
- určiť kritickú hodnotu na tejto hladine zo všetkých mediánov a porovnať ju z kvantilom rozdelenia.

Všeobecná kostra výpočtu:

- simulácia M náhodných premenných za posledných N dní x^s_{mt} z rozdelenia pre zmeny portfólia x_t, kde $m = 1, 2, ..., M, t = 1, 2, ..., N$,
- pre každé spĺňajúce $z^s_{mt} = \frac{x^s_{mt} - \mu^s_t}{\sigma^s_t} < VaR_{t,\widetilde{\alpha}}$ vypočítať

$$E[z^s_{mt} | z^s_{mt} < VaR_{t,\widetilde{\alpha}}] \quad \forall m,$$

$$Var[z^s_{mt} | z_{mt} < VaR_{t,\widetilde{\alpha}}] \quad \forall m,$$

- pre každé spĺňajúce $z^s_{mt} < VaR_{t,\tilde{\alpha}}$ vypočítať $BT_{mt} = \frac{z^s_{mt} - E[z^s_{mt} | z^s_{mt} < VaR_{t,\tilde{\alpha}}]}{(Var[z^s_{mt} | z^s_{mt} < VaR_{t,\tilde{\alpha}}])^{1/2}}$,
- vypočítať medián $\overline{BT}_m$ pre každé m,
- určiť kritickú hodnotu z m mediánov $\overline{BT}_m$.

Aplikácia:

Nech $N = 250$. Zvolili sme 95% - ný interval spoľahlivosti, číže kritická hladina je rovná 5%.

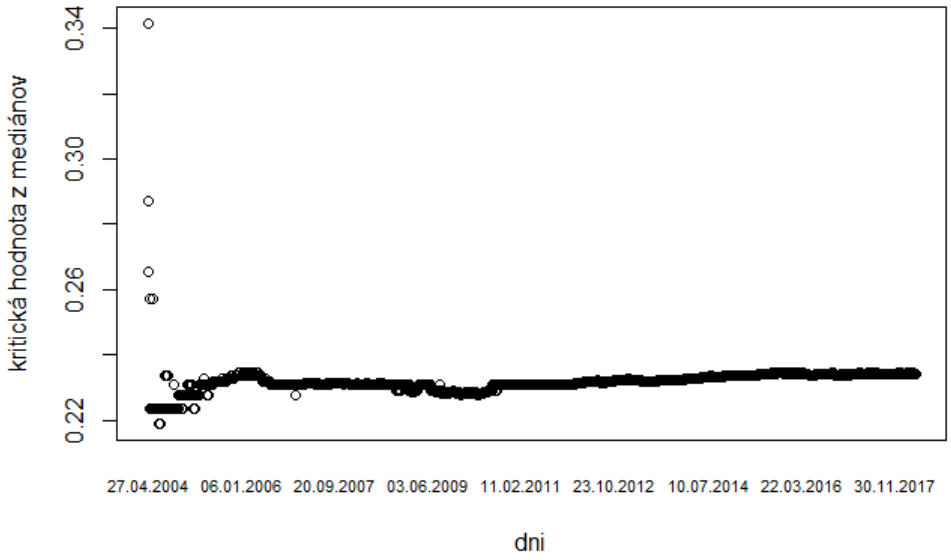
Odporúčaný počet simulációií pre tento spätný test je 10^7.

Týmto spätným testom testujeme, či predikované Expected Shortfall z modelu stačí na krytie strát, ktoré prekročia Value at Risk. Kritická hodnota z $\overline{BT}_m$ na hladine 5% nemôže byť menšia ako kvantil na hladine 5% zo štandardizovaného Studentovho t - rozdelania, inak zamietame predikované Expected Shortfall, pretože nepatrí do skráteného rozdelenia.

Avšak keď sa pozrieme na tento test kriticky, tak vidíme, že nezachytáva „správnosť“ Expected Shortfall, pretože testuje, či sú hodnoty Expected Shortfall z rozdelenia, z ktorého sme ich simulovali. V samotnom predpoklade testu je uvedené, že štandardizované relatívne hypotetické zmeny sa správajú podľa rozdelenia, z ktorého ich simulujeme. Čiže testujeme „správnosť“ Expected Shortfall, ak predpokladáme totožnosť simulovaného rozdelenia s empirickým rozdelením.

Výsledky:

Na nasledujúcom obrázku, viď. Obr. 12, vidíme kritické hodnoty z mediánov $\overline{BT}_m$ v každom čase. Všetky kritické hodnoty sú väčšie ako kvantily štandardizovaného Studentovho t - rozdelenia, takže akceptujeme predikované Expected Shortfall.



Obr. 12: Kritické hodnoty z mediánov $\overline{BT}_m$

3.3.2 Wong test sedlového bodu

Tento spätný test je test s parameterickým prístupom a bez použitia simulácií. V konečnom dôsledku to znamená, že potrebujeme určiť rozdelenie zmien výnosov portfólia bez simulovania. Tento cieľ zabezpečíme predpokladom normálneho rozdelenia zmien výnosov portfólia. Hlavná myšlienka tohto testu je podobná s predchádzajúcim testom uvedeným v 3.3.1., ale s rozdielom, že skrátené rozdelenie určujeme pomocou momentovej funkcie.

Hlavná myšlienka Wong test sedlového bodu [25] je nájsť funkciu hustoty nezávislých rovnako rozdelených premenných zobrazujúcich rozdelenie chvostu prekročení, kde stredná hodnota je hodnota Expected Shortfall. Funkciu hustoty nájdeme pomocou inverzie momentovej funkcie a aproximáciou integrálu pomocou sedlového bodu podľa Lugannaniho a Riceho [17].

Táto metóda pozostáva z dvoch krokov, a to:

- odvodenie inverznej formuly na výpočet hustoty Expected Shortfall,

- použitie sedlového bodu na aproximáciu integrálu.

Majme zrealizované zmeny výnosov $X_1, ..., X_N$, pre ktoré predpokladáme, že sú iid (independent and identically distributed random variables - nezávislé rovnako rozdelené náhodné premenné) zo spojitej distribučnej funkcie $F(x)$ a s hustotou $f(x)$.

Wong predpokladá, že zmeny výnosov sú z normálneho rozdelenia. Tento predpoklad sa ďalej využíva pri výpočte momentovej funkcie. V prípade predpokladu Studentovho t - rozdelenia táto momentová funkcia nie je definovaná.

Nech Y_i sú zrealizované zmeny, ktoré prekročili kvantil distribučnej funkcie. Predpokladajme, že tieto zmeny sú tiež iid a z normálneho rozdelenia.

Vypočítame ES_N, čo je stredná hodnota zo zmien výnosov prekračujúcich kvantil normálneho rozdelenia $\phi_{\widetilde{\alpha}}^{-1}$ za obdobie N dní

$$ES_N = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i. \tag{29}$$

Zaujíma nás rozdelenie Y, čo je chvost rozdelania X.

Testujeme hypotézu (platí pre kladné hodnoty ES):

$$\begin{aligned} H_0 &: ES_N = ES_{\widetilde{\alpha}}(X) \quad vs. \\ H_1 &: ES_N > ES_{\widetilde{\alpha}}(X). \end{aligned} \tag{30}$$

V hypotéze testujeme rovnosť teoretického Expected Shortfall $ES_{\widetilde{\alpha}}$ a vypočítaného Expected Shortfall ES_N. Kde teoretické Expected Shortfall $ES_{\widetilde{\alpha}}$ pre normálne rozdelenie môžeme vyjadriť

$$ES_{\widetilde{\alpha}} = \frac{\varphi(\phi(\widetilde{\alpha})^{-1})}{\widetilde{\alpha}}. \tag{31}$$

Kvôli rozsiahlosti a technickej náročnosti zvyšok technických postupov a dôkaz neuvádzame, ale nájdeme ho v hlavnom zdroji [25].

Na záver vypočítame pravdepodobnosť

$$P(\overline{Y} < \overline{y}) = \begin{cases} \phi(\zeta) - \varphi(\zeta)(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\zeta}), & \text{ak } ES_N < \phi_{\widetilde{\alpha}}^{-1}, \\ 1, & \text{ak } inak, \end{cases} \tag{32}$$

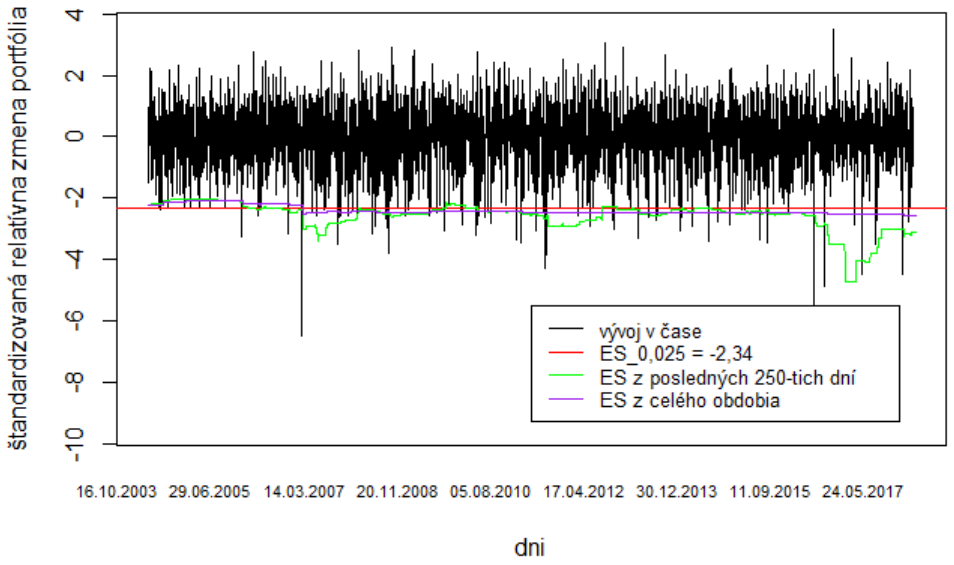
kde $\phi_{\widetilde{\alpha}}^{-1}$ je $97,5\%$- ný kvantil normálneho rodelenia, $\phi_{\widetilde{\alpha}}^{-1} = -1,96$,
ϕ je štandardizovaná distribučná funkcia normálneho rozdelenia,

φ je štandardizovaná funkcia hustoty normálneho rozdelenia,
zeta ζ a eta η sú výstupné hodnoty z komplikovaného postupu.

Na záver dostávame pravdepodobnosť, či teoretické Expected Shortfall $ES_{\widetilde{\alpha}}$ postačuje na vypočítané Expected Shortfall ES_N zo zrealizovaných strát. Používame kritickú hladinu 5%.

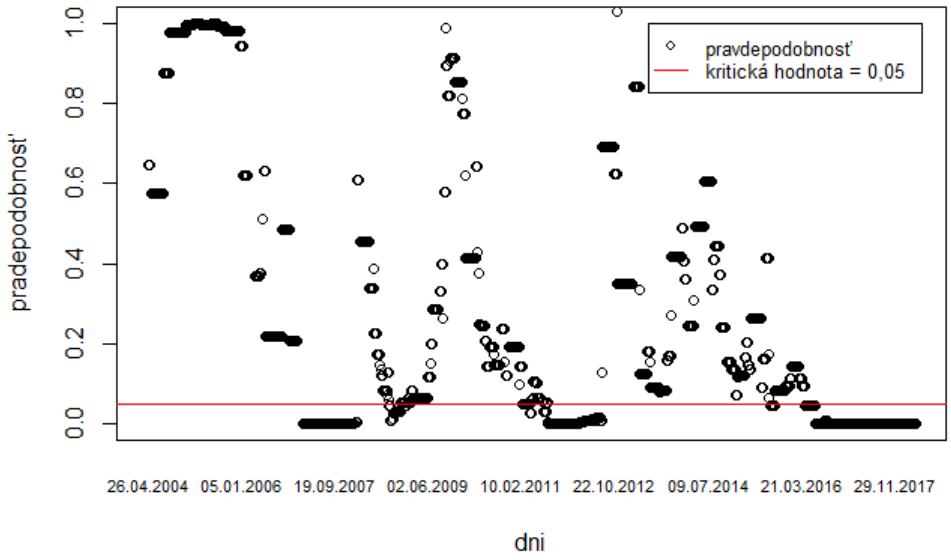
Výsledky:

Pre porovnanie dopadu na výsledky, vzhľadom na voľbu N, sme celý test vykonali dvakrát, pre $N = 250$ a $N = t$, kde $t = 250, 251, ..., T$. Touto analýzou chceme poukázať, prečo nie je dobré, aby obdobie na testovanie modelu bolo veľmi veľké. Prvýkrát sme použili časové okno 250 - tich dní a druhýkrát celé dostupné historické časové okno. Na obrázku nižšie, viď. Obr. 13 je porovnanie hodnôt ES_N pre $N = 250$ a $N = t$ a teoretická hodnota Expected Shortfall $ES_{\widetilde{\alpha}}$.

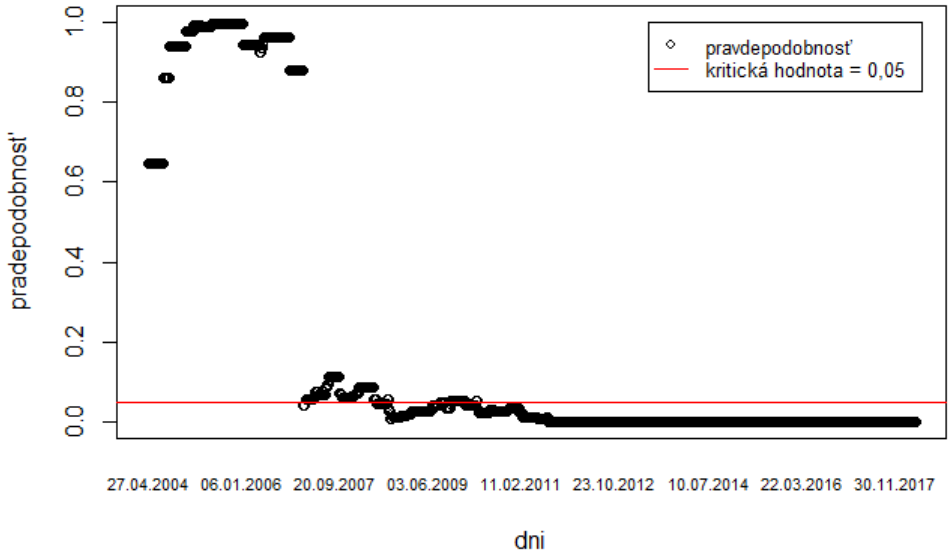


Obr. 13: Expected Shortfall ES_N vypočítané z posledného roku, ES_N zo všetkých dostupných dát a teoretické Expected Shortfall $ES_{\widetilde{\alpha}}$

Na nasledujúcich obrázkoch viď. Obr. 14 a 15 sú za radom porovnania pravdepodobnosti vypočítaných zo spätného testu s použitím ES_N pre $N = 250$ a $N = t$.



Obr. 14: Pravdepodobnosť zo spätného testu s použitím ES_N pre $N = 250$



Obr. 15: Pravdepodobnosť zo spätného testu s použitím ES_N pre $N = t$

Na obrázkoch Obr. 14 a Obr. 15 v porovnaní s Obr. 13 môžeme pozorovať, prečo

dochádza k zamietaniu. Ak hodnota ES_N je výrazne vzdialená od $ES_{\widetilde{\alpha}}$, tak $ES_{\widetilde{\alpha}}$ nemôžeme pokladať za dostačujúcu mieru rizika, a preto je zamietnutá vzhľadom na ES_N.

Vidíme, že pravdepodobnosť vypočítaná z ES_N pre $N = t$ sa po kríze pohne smerom nadol a až po koniec časového okna zostane pod kritickou hladinou, pretože ES_N je výrazne väčšie oproti $ES_{\widetilde{\alpha}}$. Tento jav je dôsledkom nabalovania strát, čo má v konečnom dôsledku za následok trvalé zamietanie hypotézy. Na strane druhej, ES_N pre $N = 250$ reaguje rýchlejšie na zmeny na trhu.

Z tohto pozorovania vyvádzame dôsledok, že na testovanie Expected Shotfall nie je dobré používať dlhé časové okno. Efektívnejšie je použiť časové okno z 250 - timi dňami, pretože sa vie rýchlejšie pozviechať v dobrom období a rýchlejšie zareagovať v období krízy. Nevýhoda je, že výsledky z testu sú viac variantné a menej róbustné, pretože používame iba 250 dát.

Nevýhoda použitia daného spätného testu je, že predpokladáme normálne rozdelenie zmien výnosov. Avšak vieme, že tento predpoklad je na skutočných dátach nereálny.

3.3.3 Test aproximácie kvantilu podľa Emmer, Kratz a Tasche

Hlavnou myšlienkou testu podľa Emmer, Kratz a Tasche [9] je aproximovať Expected Shortfall na hladine α pomocou Value at Risk na viacerých hladinách, ktoré následne testujeme.

Test je neparametrický a simulácie nie sú potrebné. To znamená, že nepotrebujeme odhadovať alebo inak určovať rozdelenie zmien výnosov porfólia a nepoužívame simulácie, a teda pracujeme s reálnymi zmenami výnosov. Test je jednoduchý na implementáciu v praxi.

Autori zverejnili aproximáciu Expected Shortfall pomocou Value at Risk na štyroch hladinách. Ak $\alpha = 0,05$, a tak dostávame hodnoty Value at Risk s hladinami $VaR_{0,0125}, VaR_{0,025}, VaR_{0,0375}, VaR_{0,05}$. Aproximácia je nasledovná

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X) &= \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_u(X)du \approx \\ &\approx \frac{1}{4}[VaR_{0,25\alpha+0,0075}(X) + VaR_{0,5\alpha+0,005}(X) + \\ &+ VaR_{0,75\alpha+0,0025}(X) + VaR_\alpha(X)]. \end{aligned} \tag{33}$$

Nakoniec je potrebné testovať hodnoty Value at Risk na všetkých hladinách. V metóde nie je striktne určené, ako sa majú jednotlivo otestované hodnoty Value at Risk previazať do spoločného testu. Po zvolení previazania spoločného testu dostávame odpoveď, či zamietame alebo nezamietame predikované Expected Shortfall ES_α z modelu.

Aplikácia:

Keďže v našej aplikácii počítame Expected Shortfall na hladine $\widetilde{\alpha} = 0,025$, je vhodné použiť aproximáciu Expected Shortfall pomocou hodnôt Value at Risk na piatich hladinách. Dostávame hodnoty Value at Risk s hladinami $VaR_{0,025}, VaR_{0,02}, VaR_{0,015}$, $VaR_{0,01}, VaR_{0,005}$.

$$\begin{aligned} ES_{\widetilde{\alpha}}(X) &= \frac{1}{\widetilde{\alpha}} \int_0^{\widetilde{\alpha}} VaR_u(X)du \approx \\ &\approx \frac{1}{5}[VaR_{0,2\widetilde{\alpha}}(X) + VaR_{0,4\widetilde{\alpha}}(X) + \\ &+ VaR_{0,6\widetilde{\alpha}}(X) + VaR_{0,8\widetilde{\alpha}}(X) + VaR_{\widetilde{\alpha}}(X)]. \end{aligned} \tag{34}$$

Na testovanie hodnôt Value at Risk sme použili test z Bazilej [5] a Christoffersenov test. Aplikovaním dvoch rôznych prístupov dostávame rôzne výsledky. Jeden test testuje iba správnosť nepodmieneného pokrytia a druhý aj nezávislosť prekročení.

Ak všetky hladiny Value at Risk v čase t úspešne prejdú testom, tak predikované Expected Shortfall $ES_{\widetilde{\alpha}}$ nezamietame. Ak sa tak nestane, čiže aspoň jeden test Value at Risk v teste zlyhá, tak predikované Expected Shortfall $ES_{\widetilde{\alpha}}$ zamietame.

- **Testovanie Value at Risk pomocou testu z Bazilej [5]**

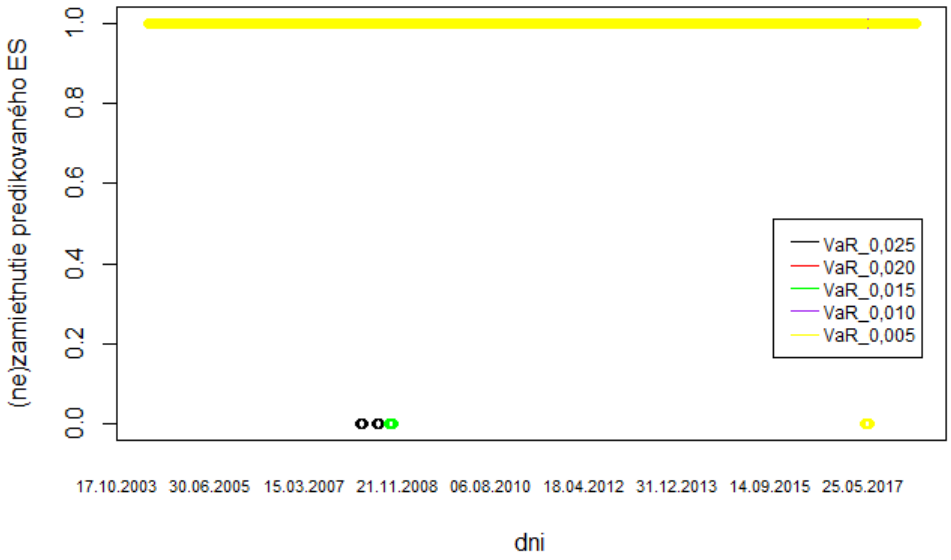
  Spočítali sme prekročenia Value at Risk na rôznych hladinách na časovom okne 250 - tich dní a skontrolovali, či sú počty menšie alebo rovné s hodnotami z Tabuľky 1. Ak je to splnené, tak Value at Risk úspešne prešlo testom.

Tabuľka 1: V tabuľke zo zdroja [5] sú vypísané maximálne počty prekročení v spätnom teste pre Value at Risk na rôznych hladinách α pre časové okno 250 dní, ktorých prekročenie zamietne Value at Risk na danej hladine

α	Maximálny počet prekročení
0,025	10
0.020	8
0.015	6
0.010	4
0.005	2

Výsledky:

Na nasledujúcom obrázku, viď Obr. 16, môžeme vidieť, kedy predikované Expected Shortfall $ES_{\widetilde{\alpha}}$ zamietame a kedy nie. Ak sú hodnoty rovné 1, tak hodnota Value at Risk na danej hladine prešla testom. V opačnom prípade, ak je hodnota rovná 0, tak hodnota Value at Risk na danej hladine neprešla testom. Farebne vyznačené hodnoty nám ukazujú, ktoré Value at Risk na ktorej hladine neprešlo spätným testom a ktoré prešlo. Vidíme, že predikované $ES_{\widetilde{\alpha}}$ zamietame najmä počas krízového obdobia. Ak sa hodnoty zo spätného testu pre všetky hladiny Value at Risk v danom čase rovnajú 1, tak predikované Expected Shortfall $ES_{\widetilde{\alpha}}$ nezamietame.



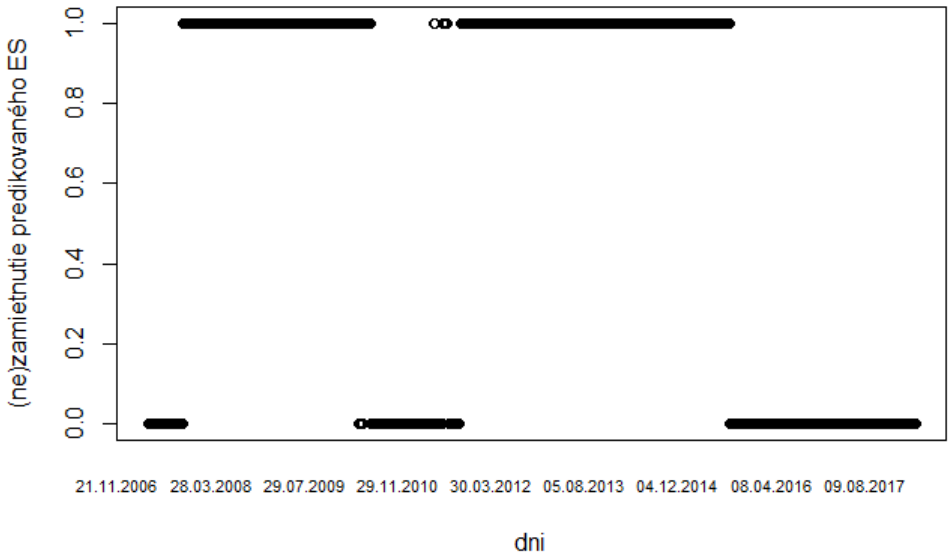
Obr. 16: (ne)zamietnutie predikovaného Expected Shortfall $ES_{\widetilde{\alpha}}$ a (ne)zamietnutia Value at Risk na rôznych hladinách (testované pomocou testu z Bazilej [5])

- **Testovanie Value at Risk pomocou Christoffersenovho testu [13]**

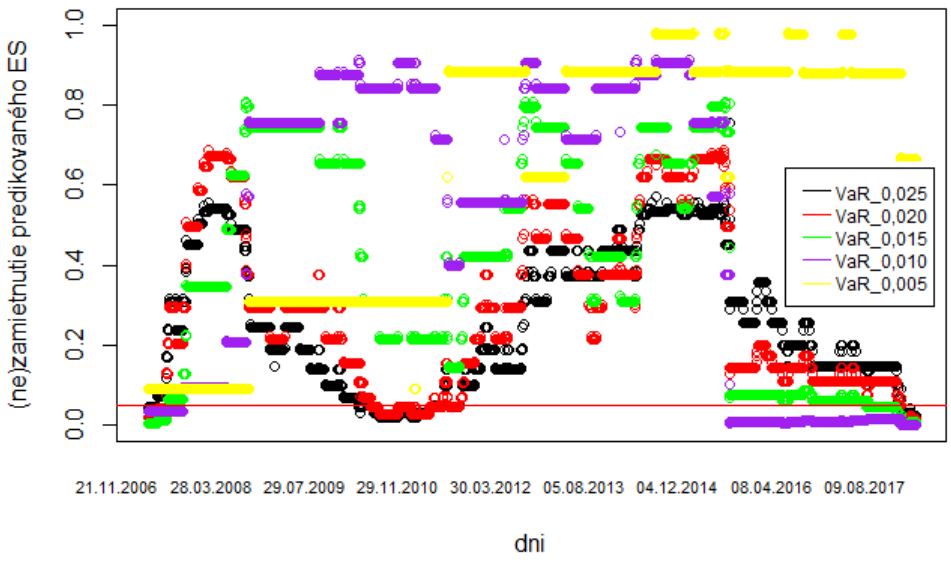
  Pomocou Christoffersenovho testu testujeme Value at Risk na rôznych hladinách na časovom okne 250 dní.

  Výsledky:

  Vďaka charakteristike testu a p - hodnote, ktorú dostaneme ako výstup z Christoffersenovho testu dostávame obrázky, viď. Obr. 17 a 18. Obrázok 17 ukazuje, kedy dochádza k zamietaniu predikovaného $ES_{\widetilde{\alpha}}$ a kedy nie. Obrázok 18 zobrazuje p - hodnotu z testu pre jednotlivé Value at Risk hodnoty na rôznych hladinách. Obrázok 18 znázorňuje, ktoré Value at Risk majú za následok zamietnutie Expected Shorfall.



Obr. 17: (ne)zamietnutie predikovaného Expected Shortfall $ES^{\sim}_{\alpha}$ (testované pomocou Christoffersenovho testu)



Obr. 18: (ne)zamietnutie predikovaného Expected Shortfall $ES^{\sim}_{\alpha}$ a (ne)zamietnutia Value at Risk na rôznych hladinách (testované pomocou Christoffersenovho testu)

Na záver môžeme potvrdiť, že daný test je zrozumiteľný a jednoduchý na implementáciu. Vďaka použitiu dvoch prítupov na spätné testovanie Value at Risk môžeme tieto výsledky navzájom porovnať.

Výsledky z prvého prístupu, kde sme použili test z Bazilej, ktorý kontroluje správnosť nepodmieneného pokrytia, sú nadhodnotené. To znamená, že spätný test často prijíma predikované Expected Shortfall $ES_{\widetilde{\alpha}}$, aj keď zrealizované Expected Shortfall je výrazne vyššie než teoretické. Na druhej strane test s aplikáciou Christoffersenovho testu, ktorý kontroluje okrem nepodmieneného pokrytia aj nezávilosť prekročení, je výraznejšie lepší.

3.3.4 Neparametrický test podľa Acerbi a Székely

Výkonný riaditeľ Carlo Acerbi a jeden z vedúcich výskumníkov analytického tímu Balázs Székely, obaja z MSCI (Morgan Stanley Capital International), navrhujú tri testy [1] spätného testovania Expected Shortfall.

Tieto testy vyžadujú neparametrický prístup a simulácie. To znamená, že nepotrebujeme vedieť rozdelenie zmien výnosov, aby sme mohli v teste testovať hypotézy. Vzhľadom na to, že tieto testy sú založené na simuláciách, tak simulovať budeme zmeny výnosov, z ktorých nás budú zaujímať iba prekročenia kvantilu. Odporúčaný počet simulácií pre každý test je minimálne 5000. Zmeny výnosov portfólia sme simulovali pomocou bootstrap metódy.

Ukážeme a aplikujeme prvé dva z troch testov. Síce každý test má rozdielnu testovaciu štatistiku, ktorej odvodenie tiež predstavíme a popíšeme, no všetky testy majú spoločnú myšlienku a podobnú hypotézu. V hypotéze testujeme, či sa rozdelenie zrealizovaných zmien výnosov pod kvantilom rovná predikovanému rozdeleniu zmien výnosov pod kvantilom. To znamená, že či zrealizovaná hodnota Expected Shortfall $ES_{N,\alpha,t}$ je rovná s predikovanou hodnotou Expected Shortfall $ES_{\alpha,t}$.

- **Prvý test**

  Odvodenie testovacej štatistiky pre hladinu $\alpha = 0,975$ je nasledovné. Vzťah výpočtu Expected Shortfall vieme napísať nasledovne

$$ES_{\alpha,t}(X) = -E[X|X + VaR_{\alpha,t} < 0], \tag{35}$$

kde X je náhodná premenná reprezentujúca zmeny výnosov porfólia. Ďalej tento vzťah môžeme prepísať ako

$$E\left[\frac{X}{ES_{\alpha,t}(X)} + 1|X + VaR_{\alpha,t} < 0\right] = 0. \tag{36}$$

Z tohto vzťahu vieme odvodiť nasledujúcu testovaciu štatistiku, ktorá vyzerá nasledovne

$$Z_1(\mathbb{X}) = \frac{\sum_{t=1}^{N}(\frac{X_t I_t}{ES_{\alpha,t}})}{K_N} + 1, \tag{37}$$

kde I_t je indikátorová funkcia, ktorá indikuje prekročenia hodnoty Value at Risk realizovanou hodnotou X_t: $I_t = \mathbb{1}_{(X_t < -VaR_{\alpha,t})}$,
K_N je počet prekročení do času N: $K_N = \sum_{t=1}^{N} I_t$
a vektor $\mathbb{X}$ je vektor realizovaných zmien výnosov portfólia $(X_1, X_2, ..., X_N)$.

Testovaciu štatistiku $Z_1(\mathbb{X})$ vieme prepísať nasledovne

$$Z_1(\mathbb{X}) = \frac{ES_{N,\alpha,t}}{ES_{\alpha,t}} + 1. \tag{38}$$

Môžeme pozorovať, že testovacia štatistika porovnáva Expected Shortfall vypočítané z dát $ES_{N,\alpha,t}$ a predikované Expected Shortfall $ES_{\alpha,t}$ pre každý čas t a dané N.

Testovaná hypotéza vyzerá nasledovne

$$\begin{aligned} H_0 :& F_{\alpha,t} = P_{\alpha,t} \quad vs. \\ H_1 :& ES_{N,\alpha,t}(x) \geq ES_{\alpha,t}(x) \quad \forall t, \\ & ES_{N,\alpha,t}(x) > ES_{\alpha,t}(x), \quad pre \quad nejaké \quad t, \\ & VaR_{N,\alpha,t}(x) = VaR_{\alpha,t}(x) \quad \forall t, \end{aligned} \tag{39}$$

kde F_t je skutočné rozdelenie výnosov,
P_t predikované rozdelenie výnosov,

$F_{\alpha,t}$ je skutočné rozdelenie výnosov chvostu F_t pod kvantilom α,
$P_{\alpha,t}$ je predikované rozdelenie výnosov chvostu P_t pod kvantilom α
a $ES_{N,\alpha,t}(x)$ a $VaR_{N,\alpha,t}(x)$ sú Expected Shortfall a Value at Risk z realizovaných výnosov.

Kostra výpočtu:

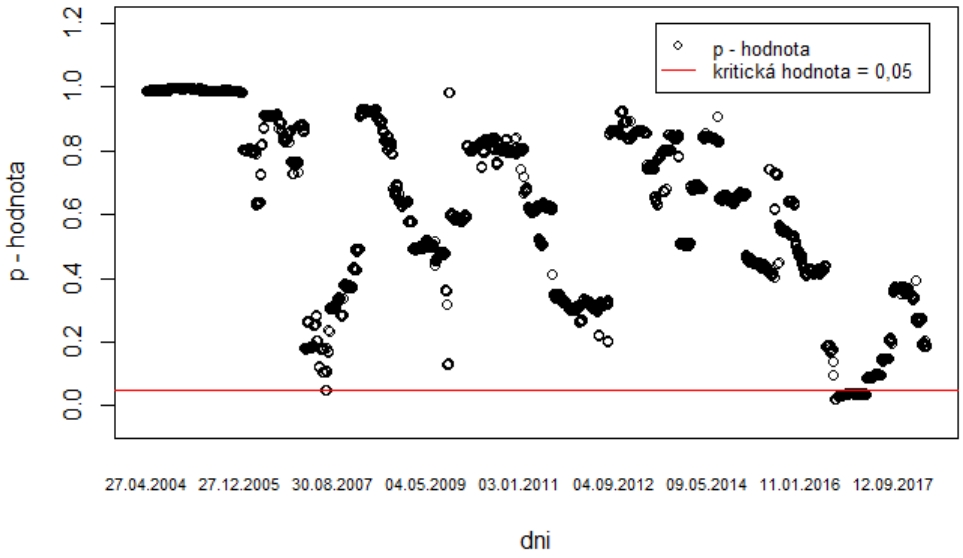
- simulovať nezávislé hodnoty $X_t^m \sim P_t, \forall t, \forall m = 1, 2, ..., M$,
- vypočítať $Z_1(\mathbb{X}) = \frac{ES_{N,\alpha,t}}{ES_{\alpha,t}} + 1$, pre dané N,
- vypočítať $Z_1^m = Z_1(X^m) = \frac{ES_{N,\alpha,t}^m}{ES_{\alpha,t}} + 1, \quad \forall m$, kde $ES_{N,\alpha,t}^m$ je stredná hodnota prekročení kvantilu na hladine α zo simulovaných hodnôt za N dní,
- vypočítať $p - hodnota = (\sum_{m=1}^{M} \mathbb{1}_{(Z_1^m < Z_1(\mathbb{X}))})/M$.

Aplikácia:

Vypočítame zrealizované Expected Shortfall $ES_{N,\alpha,t}$, ako strednú hodnotu prekročení Value at Risk na hladine α za N dní, kde N je 250 dní.

Výsledky:

Na nasledujúcom obrázku, viď. Obr. 19, môžeme vidieť p - hodnoty, ako výsledok testovacej štatistiky. Podľa p - hodnoty vidíme, pre ktorý čas t je hypotéza zamietnutá a pre ktoré nie. Ak je p - hodnota pod hodnotou $0,05$, tak hypotézu zamietame.



Obr. 19: P - hodnota z 1.testu od Acerbi a Székely a kritická hodnota určujúca hranicu zamietania hypotézy

- **Druhý test**

  Odvodenie testovacej štatistiky pre $\alpha = 0,975$ je nasledovné. Expected Shortfall vieme napísať ako nepodmienenú strednú hodnotu nasledovne

$$ES_{\alpha,t}(X) = -E\left[\frac{X_t I_t}{\alpha}\right], \tag{40}$$

  Acerbi a Szekely navrhli nasledovnú testovaciu štatistiku

$$Z_2(\mathbb{X}) = \sum_{t=1}^{N} \frac{X_t I_t}{N\alpha ES_{\alpha,t}} + 1. \tag{41}$$

  Vidíme, že testovacia štatistika $Z_2(\mathbb{X})$ je podobná s testovacou štatistikou $Z_1(\mathbb{X})$. Rozdiel je v tom, že $Z_2(\mathbb{X})$ má v menovateli výraz $N\alpha$, čo je teoretický počet prekročení za čas N na hladine α a $Z_1(\mathbb{X})$ má v menovateli K_N, čo je počet prekročení za čas N, ktorý reálne nastal.

  Testovaciu štatistiku pre dané N vieme tiež prepísať na tvar

$$Z_2(\mathbb{X}) = \frac{\frac{\sum_{t=1}^{N} X_t I_t}{N\alpha}}{ES_{\alpha,t}} + 1. \tag{42}$$

Testovaná hypotéza vyzerá nasledovne

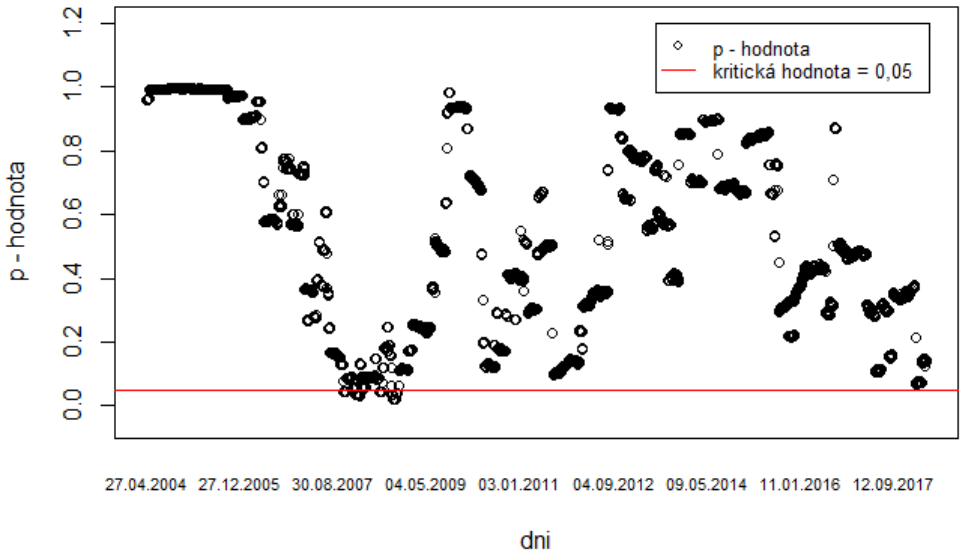
$$\begin{aligned} H_0 :& F_{\alpha,t} = P_{\alpha,t} \quad vs. \\ H_1 :& ES_{N,\alpha,t}(x) \geq ES_{\alpha,t}(x) \quad \forall t, \\ & ES_{N,\alpha,t}(x) > ES_{\alpha,t}(x), \quad pre \quad nejaké \quad t, \\ & VaR_{N,\alpha,t}(x) \geq VaR_{\alpha,t}(x) \quad \forall t. \end{aligned} \tag{43}$$

Kostra výpočtu a aplikácia:

Postupujeme analogicky s rozdielom zámeny testovacej štatistiky $Z_1(\mathbb{X})$ za testovaciu štatistiku $Z_2(\mathbb{X})$.

Výsledky:

Môžeme pozorovať, že k zamietaniu nedochádza často. Dokonca táto metóda zamieta predikované $ES_{\alpha,t}$ iba počas krízy. Prvý prístup v tomto spätnom teste zamietal predikované $ES_{\alpha,t}$ aj okolo roku 2016.



Obr. 20: P - hodnota z 2.testu od Acerbi a Székely a kritická hodnota určujúca hranicu zamietania hypotézy

3.4 Záver spätných testov

Na záver pridávame obrázok, viď. Obr. 21, ktorý zoskupuje výsledky zo všetkých aplikovaných spätných testov. Môžeme pozorovať a porovnať, ktorý test kedy zamietal predikované Expected Shortfall. Niektoré spätné testy relevantne zamietajú predikované Expected Shortfall, najmä počas krízy a iných výkyvoch na trhu, kedy táto hodnota nestačí na pokrytie strát. No ako kontrapríklad, spätný test od Righi a Careta nezamieta predikované Expected Shortfall počas celého testovaného obdobia.



Obr. 21: Výsledky zo spätných testov, kde hodnoty nad oddeľujúcou (sivou) čiarou znamenajú nezamietanie a hodnoty pod znamenajú zamietanie

4 Sila testov

V predchádzujúcej kapitole sme pomocou viacerých metód testovali predikované Expected Shortfall vzhľadom na zrealizované Expected Shortfall. Predikované Expected Shortfall je hodnota, ktorú dostaneme ako výstup z použitého modelu. Zrealizované Expected Shortfall je stredná hodnota prekročení Value at Risk na zrealizovaných dátach. Výstupom zo spätných testov je vo všeobecnosti rozhodnutie, či zamietame alebo nezamietame predikované Expected Shortfall, a teda môžeme povedať, že predikované Expected Shortfall je postačujúce na krytie strát. Vďaka hlbšej analýze, výsledky neposkytujú iba informáciu o zamietaní alebo nezamietaní, ale obsahujú aj informáciu p - hodnoty. A tak z týchto výsledkov vieme povedať, ako veľmi zamietajú respektíve nezamietajú predikované Expected Shortfall. Prínosom p - hodnoty je, že testy vieme sprísniť, a to tak, že hladinu kritickej hodnoty 5 % zvýšime. V prípade testov, ktoré zamietajú predikované Expected Shortfall málokedy alebo nikdy, by sme docielili ich lepšiu efektivitu.

V konečnom dôsledku nám spätné testy povedia, či je predikované Expected Shortfall dostatočne dobré alebo nie. Ale ako je to so silami týchto testov? Do akej miery sú ich výstupy dôveryhodné? Z predchádzajúcej kapitoly vidíme, že výsledky spätných testov sú rôzne. Ktorému teda dôverovať alebo ktorý je najspoľahlivejší? Stačí vybrať jeden test a riadiť sa ním alebo je rozumnejšie prihliadať na výsledky z viacerých testov?

Kvôli týmto otázkam sa budeme v tejto kapitole venovať hodnoteniu spätných testov a bližšie sa pozrieme na ich silu. To znamená, že zistíme, ako sa dá testom dôverovať. Budeme sa venovať dvom častiam. Pozrieme sa na mieru nezamietania dobrého Expected Shortfall a mieru nezamietnutia zlého Expected Shortfall. Detailnejší popis a viaceré použité prístupy popíšeme bližšie v podkapitolách.

Všeobecný postup:

- M - krát simulovať relatívne hypotetické zmeny výnosov portfólia pre N dní, kde $m = 1, 2, ..., M$,
- použiť model, v našom prípade Filtrovanú historickú simuláciu na výpočet predikovaného Expected Shortfall pre každú simuláciu m,

- vypočítať zrealizované Expected Shortfall,
- cez spätné testy určiť zamietnutie alebo nezamietnutie predikovanej hodnoty Expected Shortfall pre každú simuláciu m,
- vypočítať podiel počtu nezamietnutej predikovanej hodnoty Expected Shortfall ku počtu všetkých simulácií M.

Dáta budeme simulovať buď z dobrého alebo zo zlého rozdelenia. Simulovanie zo zlého rozdelenia docielime tak, že budeme meniť určité parametre. V našom prípade budeme meniť stupne voľnosti pri simuláciách zlých zmien výnosov. Na takto zmenených dátach budeme sledovať, či testy zmeny spozorujú a zamietnu predikované Expected Shortfall. Celý postup opakujeme niekoľkokrát, podľa počtu simulácií a určíme mieru nezamietania. Nami stanovený počet simulácií je 10 000. Výsledky budeme interpretovať ako podiel nezamietnutia predikovaného Expected Shortfall ku počtu všetkých simulácií.

Našim zámerom bolo simulácie zhoršiť nepatrne. Zaujíma nás sila testov pri malých zmenách, a teda ako veľmi sú testy citlivé. Ako premenlivý parameter sme zvolili stupne voľnosti. Keďže sa v našej práci intenzívne zaoberáme odhadom stupňov voľností pre simuláciu zmien zo štandardizovaného Studentovho t - rozdelenia a vhodným odhadom budúcich zmien pomocou bootstrapu, tak použijeme práve tento parameter. Výsledky nám môžu poslúžiť aj v spomenutej problematike. V konečnom dôsledku v našej práci kladieme dôraz na simuláciu dát vstupujúcich do modelu. Naopak, napríklad v práci [24] používajú modely a spätné testy za predpokladu normality dát. Ale ako už vieme, tak tento predpoklad nie je vždy splnený. Tento predpoklad normality zahŕňa aj odhad budúcich výnosov z normálneho rozdelenia. Čo si vieme jednoducho predstaviť, že simulujeme relatívne hypotetické zmeny zo štandardizovaného Studentovho t - rozdelenia pre počet stupňov voľnosti idúcich do nekonečna. Na implementáciu a názornú ukážku stačí uvažovať vysoký počet stupňov voľností. Nakoniec touto analýzou môžeme pozorovať nielen silu testov, ale aj ako veľmi sa menia dáta, po zmene stupňov voľností alebo predpoklade, že dáta sú z normálneho rozdelenia.

Pridáme ešte poznámky k niektorým konkrétnym spätným testom:

- 1. Righi a Ceretta:

  Samotný spätný test vyžaduje simulácie zmien výnosov portfólia. Testovanie sily testov vyžaduje opätovné simulácie. V prídate testovnia sily tohto testu to znamená 10 000 - krát simulovať 10 000 možných scenárov strát za poslednch 250 dní. Ako môžeme pozorovať, tak ide o veľmi časovo náročný proces, a preto sme testovanie v tomto prípade skrátili na 100 - krát simulovať 10 000 možných scenárov strát za posledných 250 dní.

- 2. Wong:

  Vzhľadom na to, že charakter tohto testu predpokladá normálne rozdelenie zmien a my sme zmeny simulovali zo Studentovho rozdelenia, tak sme mieru prijatia neaplikovali. V druhom prípade simulácií pomocou bootstrap metódy v prípade niektorých simulovaných zmien zlyhával algoritmus pri hľadaní koreňa z rovnice, ktorú tento test používa.

4.1 Miera nezamietania dobre predikovanej hodnoty Expected Shortfall

Jedna z hlavných vecí, čo očakávame od spätného testovania je, že ak je predikované Expected Shortfall dobré, tak spätný test by ho nemal zamietnuť. To znamená, že ak počítame predikované Expected Shortfall z modelu, ktorý vychádza z určitého rozdelenia, a potom simulujeme zmeny výnosov z tohto rozdelenia, tak chceme aby bola hodnota predikovaného Expected Shortfall z tohto rozdelenia prijatá s vysokou mierou.

V tejto podkapitole budeme zisťovať odpoveď na otázku, ktorý test má najvyššiu mieru nezamietania dobrej hodnoty Expected Shortfall.

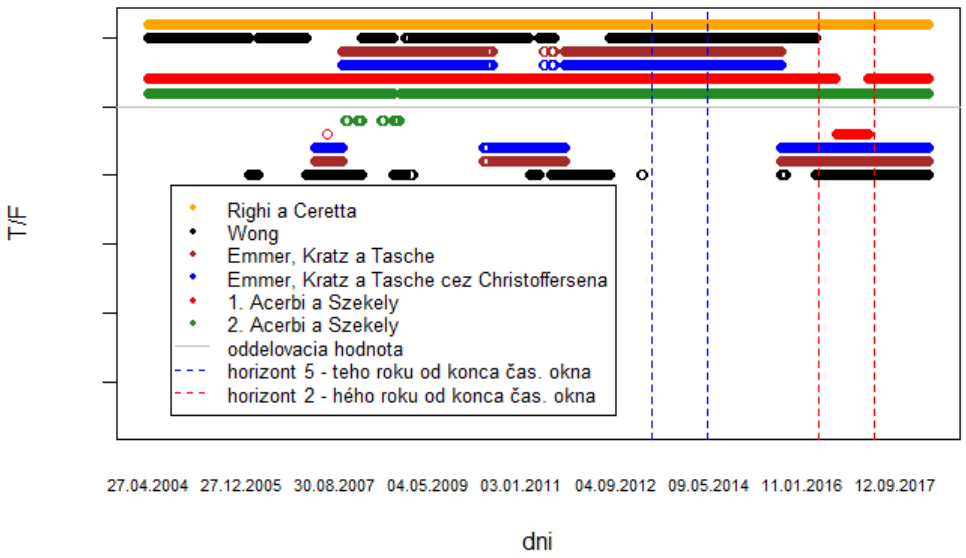
Kostra výpočtu je rovnaká ako všeobecný postup uvedený v úvode tejto kapitoly. Akurát upresníme, že simulovať budeme M - krát *dobré* relatívne hypotetické zmeny výnosov portfólia pre N dní.

Aplikácia:

Budeme simulovať zmeny z rozdelenia, ktoré sa čo najviac približujú charakteru

realizovaných zmien portfólia. Simulovať budeme dvomi spôsobmi, a to pomocou štandardizovaného Studentovho t - rozdelenia s odhadnutým počtom stupňov voľností a pomocou bootstrap metódy, ktorá využíva historické zmeny. V oboch prípadoch simulujeme dáta pre obdobie piateho roku od konca časového okna. Tento výber časového okna nebol náhodný, práve naopak bol vybraný práve kvôli nezamietaniu predikovaného Expected Shortfall počas celého roka. Grafický záznam nezamietania metód a vybraného obdobia môžeme vidieť na nasledujúcom obr. viď. Obr. 22.

V prípade použitia štandardizovaného Studentovho t - rozdelenia s premenlivým počtom stupňov voľností sme použili odhadnuté stupne voľností, viď Obr. A.33. V prípade použitia bootstrapových simulácií sme používali zmeny z celého historického časového okna.



Obr. 22: Výsledky zo spätných testov, kde hodnoty nad oddeľujúcou (sivou) čiarou znamenajú nezamietanie a hodnoty pod znamenajú zamietanie predikovaného Expected Shortfall. Na obrázoku sú aj horizonty, na ktorých testujeme silu testov

Výsledky a zhrnutie:

Tabuľka 2: Výsledky miery nezamietania dobrej hodnoty Expected Shorfall

metóda č.	metóda	simulácie	
		štan. Studen. t - rozd.	bootstrap
1.	Righi a Caretta	1	1
2.	Wong		
3.1.	Emmer, Kratz a Tasche (+ Bazilej)	0,9909	0,9929
3.2	Emmer, Kratz a Tasche (+ Christoffersen)	0,8958	0,9298
4.1.	Acerbi a Szekély 1. test	0,9987	0,9987
4.2	Acerbi a Székely 2. test	0,8716	0,8583

V tabuľke vidíme, že najväčšiu mieru prijatia má 1. metóda spolu s 3.1. a 4.1. metódou. O niečo menšiu, ale stále dobrú mieru prijatia majú metódy 3.2. a 4.2.

Pozorujeme, že takmer vždy je miera prijatia vyššia s použitím bootstrap metódy na simuláciu zmien výnosov. Z toho usudzujeme, že spätné testy častejšie príjmu predikované Expected Shortfall vzhľadom na simulácie, ktoré sú autentickejšie k reálnym zmenám. Z tohto vyvádzame záver, že bootstrap metóda simuluje straty presnejšie, pretože podiel nezamietania teoretického Expected Shortfall je vyšší.

Pre 2. test nemáme výsledok miery nezamietnutia.

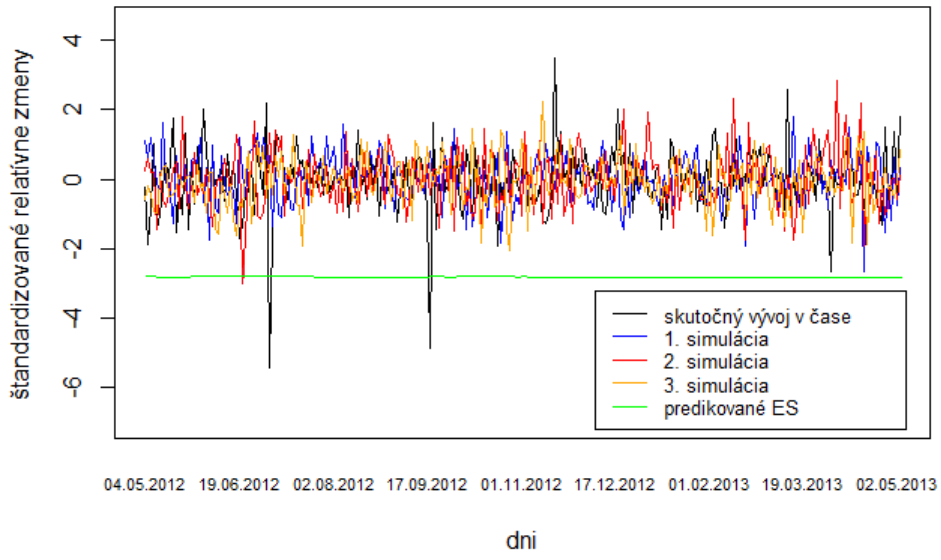
4.2 Miera nezamietania zle predikovanej hodnoty Expected Shortfall

V tejto podkapitole sa budeme venovať miere nezamietania zlej hodnoty predikovaného Expected Shortfall. Hlavnou myšlienkou je dodať iné hodnoty predikovaného Expected Shortfall než prislúcha k simulovaným stratám. To znamená, že ak dodáme spätným testom také simulované straty, ktoré nezodpovedajú rozdeleniu, z ktorého je počítané predikované Expected Shortfall, tak očakávame, že spätný test toto predikované Expected Shortfall zamietne.

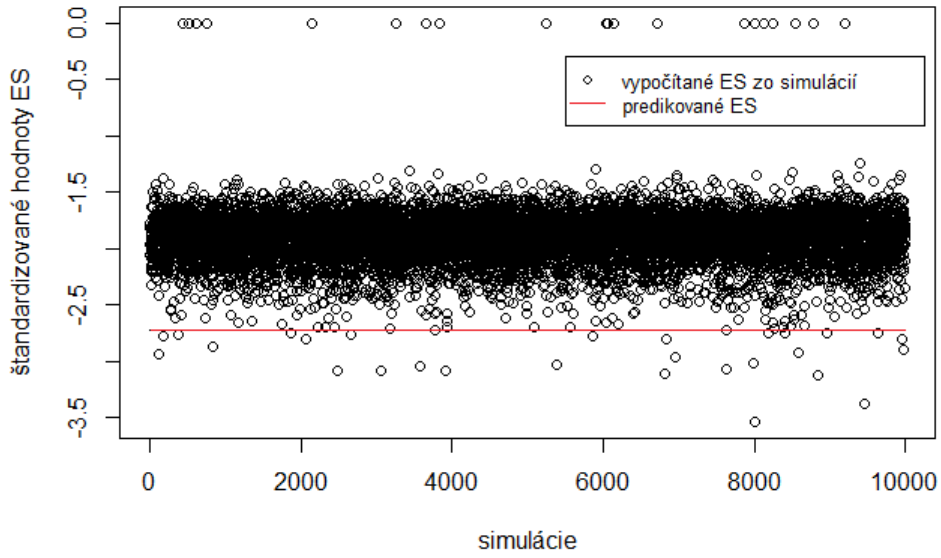
Aplikácia:

Pre hlbšiu analýzu použijeme dva prístupy. V prvom prístupe použijeme zlé simulácie zmien výnosov a dobré hodnoty predikovaného Expected Shortfall. Tento prístup aplikujeme na období 5 - teho roku od konca časového horizontu, kedy sa predikované Expected Shortfall prijímalo, viď. Obr. 22. V rámci tohto prístupu budeme simulo-

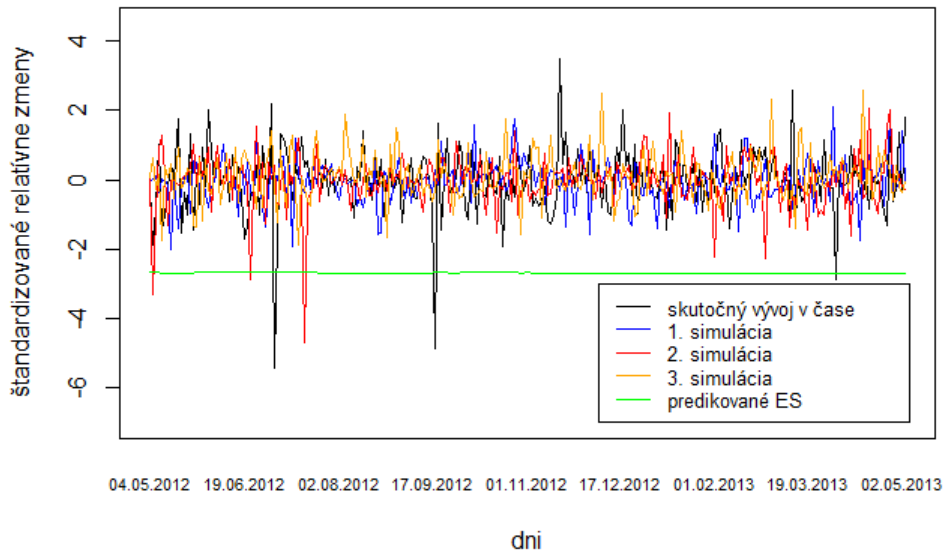
vať zmeny výnosov zo štandardizovaného Studentovho t - rozdelenia s konštantným počtom stupňov voľností pre zvolené časové obdobie. Pre získanie hlbšej analýzy simulujeme zmeny výnosov s počtom stupňov voľností 3 a 20. Ak simulujeme straty zo štandardizovaného Studentovho t - rozdelenia s 3 stupňami voľnosti, tak vďaka ťažkým chvostom charakteristickým rozdeleniu očakávame vyššsie straty, čiže aj častejšie zamietnutie predikovaného Expected Shortfall. Na druhej strane v prípade simulácií zo štandardizovaného Studentovho t - rozdelenia s počtom stupňov voľnoností 20 očakávame, že prijatie predikovaného Expected Shortfall bude častejšie. Očakávanie môžeme odvôvodniť, tým, že chvosty simulovaného rozdelenia nie sú také ťažké, čiže aj straty sú nižšie, a preto sa simulácie strát podobajú realizovaným stratám. Simulovaním strát s odlišným počtom stupňov voľností chceme okrem iného poukázať na citlivosť spätných testov.



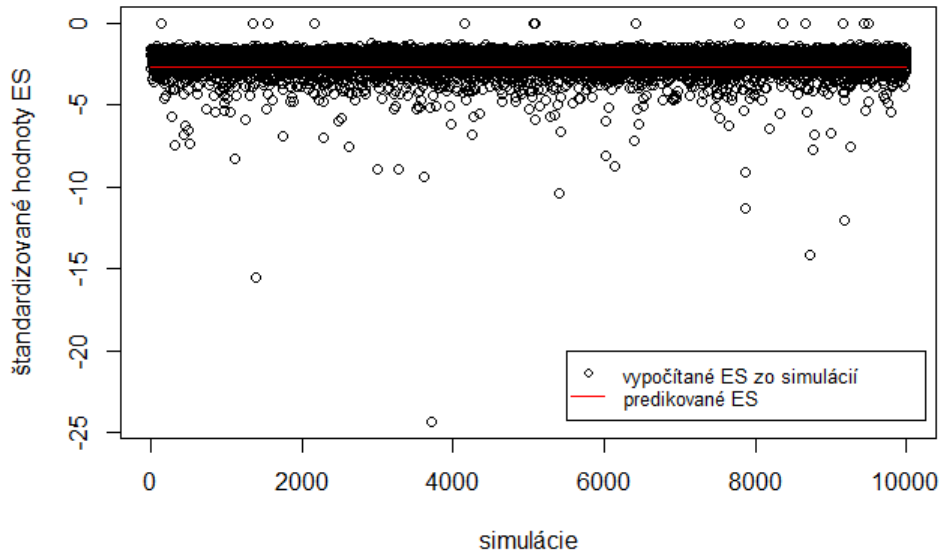
Obr. 23: Zobrazenie reálnych zmien, prvých troch *zlých* simulovaných zmien zo štan. Studen. t - rozd. s počtom stupňov voľností 3 a *dobrej* predikovanej hodnoty ES



Obr. 24: Porovnanie vypočítaneho ES zo *zlých* simulacií zo štan. Studen. t - rozd. s počtom stupňov voľností 3 a *dobrého* predikovaného ES pre posledný deň

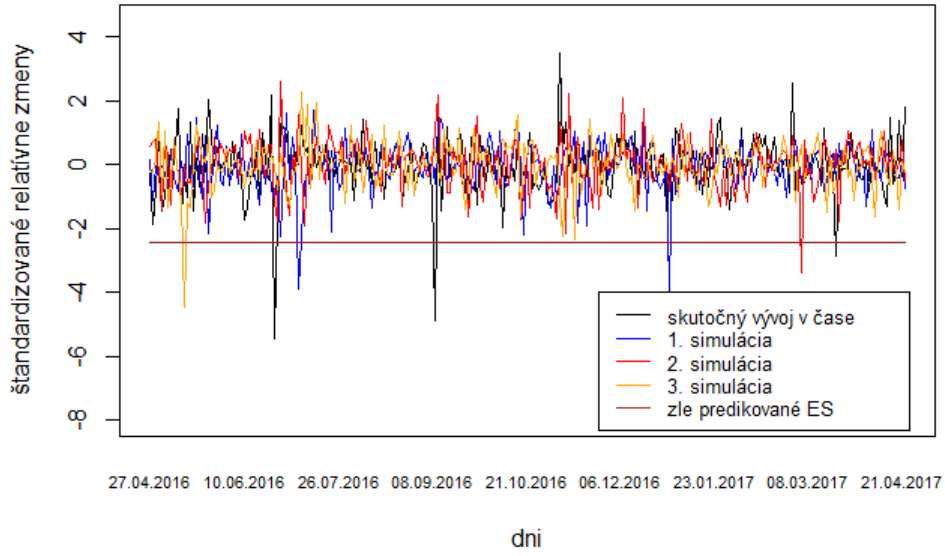


Obr. 25: Zobrazenie reálnych zmien, prvých troch *zlých* simulovaných zmien zo štan. Studen. t - rozd. s počtom stupňov voľností 20 a *dobrej* predikovanej hodnoty ES

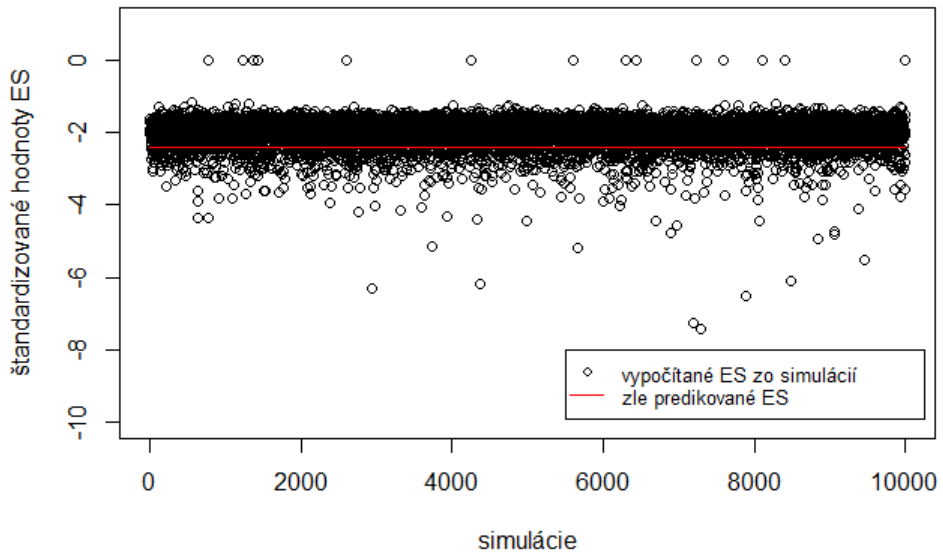


Obr. 26: Porovnanie vypočítaneho ES zo *zlých* simulacií zo štan. Studen. t - rozd. s počtom stupňov voľností 20 a *dobrého* predikovaného ES pre posledný deň

V druhom prístupe použijeme dobré simulácie zmien výnosov pomocou bootstrapu. Na druhej strane použijeme teoretické Expected Shortfall vypčítané zo vzťahu (27) zo štandardizovaného Studentovho t - rozdelenia s konštantným počtom stupňov voľností 20, ktoré nie sú vhodné pre obdobie s veľkými stratami. Tento prístup aplikujeme na období, kedy dochádzalo k zamietaniu predikovaného Expected Shortfall. To znamená, že straty boli vyššie než sa očakávalo a predikované Expected Shortfall nepostačovalo.

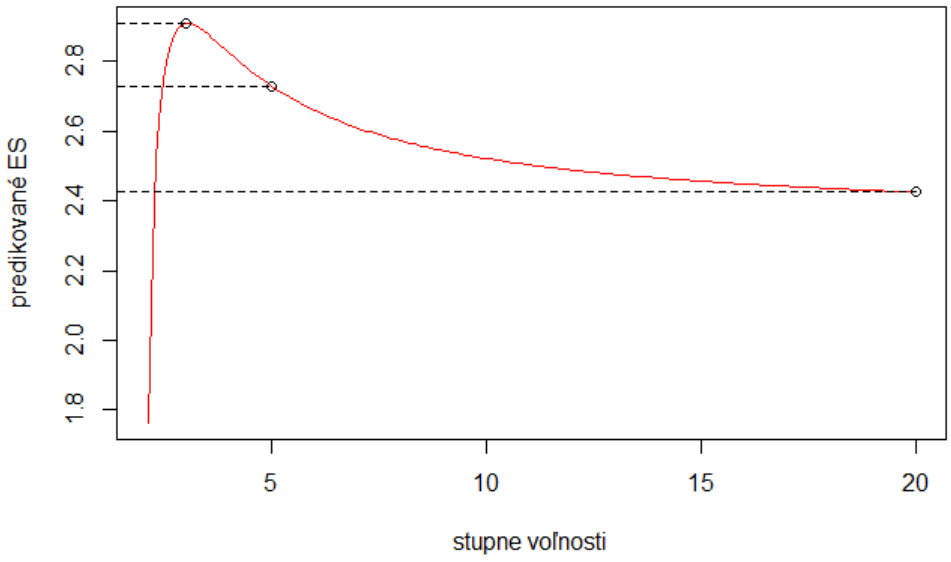


Obr. 27: Zobrazenie reálnych zmien, prvých troch *dobrých* simulovaných zmien a *zlej* teoretickej hodnoty ES so *zlým* počtom stupňov voľností rovným 20



Obr. 28: porovnanie vypočítaneho ES z *dobrých* simulacií a *zlej* hodnoty teoretického ES zo vzťahu s použitím štan. Studen. t - rozd. s počtom stupňov voľností 20 pre posledný deň

Na nasledujúcom obrázku, viď. Obr. 29, je zobrazená hodnota teoretického Expected Shortfall. Hodnota je závislá od počtu stupňov voľností. Najvyššiu hodnotu teoretického Expected Shortfall dostaneme použitím 3 stupňov voľností s hodnotou 2,91. Hodnota teoretického Expected Shortfall je nižšia od tejto hodnoty, ak použijeme počet stupňov voľností z intervalu (2,3) alebo (3,∞). Priemerný počet stupňov voľnosti pre nekrízové obdobie je 5. Prislúchajúca hodnota teoretického Expected Shortfall k 5 stupňom voľnosti je 2,73.



Obr. 29: Teoretické ES vypočítané zo vzťahu (27) pre meniace sa stupne voľnosti štan. Studen. t - rozd. Prislúchajúce hodnoty teoretického ES pre 3, 5 a 20 stupne voľností

Kostra výpočtu je rovnaká ako všeobecný postup uvedený v úvode tejto kapitoly.

Akurát upresníme, že v prípade **1. prístupu** simulujeme M - krát *zlé* relatívne hypotetické zmeny výnosov portfólia pre N dní. V 1. prístupe pracujeme s *dobrými* hodnotami predikovaného Expected Shortfall.

A v prípade **2. prístupu** simulujeme M - krát *dobré* relatívne hypotetické zmeny výnosov portfólia pre N dní. V 2. prístupe pracujeme so *zlými* hodnotami teoretického Expected Shortfall.

4.2.1 1. prístup

Výsledky a zhrnutie:

Tabuľka 3: Výsledky miery nezamietania zlej hodnoty Expected Shorfall pre 1. prístup

metóda č.	metóda	počet stupňov voľností	
		df = 3	df = 20
1.	Righi a Caretta	1	1
2.	Wong		
3.1.	Emmer, Kratz a Tasche (+ Bazilej)	0,9503	0,9998
3.2	Emmer, Kratz a Tasche (+ Christoffersen)	0,8430	0,8615
4.1.	Acerbi a Szekély 1. test	0,9855	1
4.2	Acerbi a Székely 2. test	0,8076	0,9252

Mieru prijatia zlej hodnoty predikovaného Expected Shortfall s použitím simulácií zo štandardizovaného Studentovo t - rozdelenia s počtom stupňov voľností 3 zoradíme na porovnanie testov od najlepšej, po najhoršiu nasledovne: 3.2, 4.1, 3.1, 4.2 a 2.

Mieru prijatia zlej hodnoty predikovaného Expected Shortfall s použitím simulácií zo štandardizovaného Studentovo t - rozdelenia s počtom stupňov voľností 20 zoradíme na porovnanie testov od najlepšej, po najhoršiu nasledovne: 3.2, 4.2, 3.1, 4.1 a 2.

Ďalej vo výsledkoch z tabuľky 3 vidíme, že 3.1. test spozoruje vyššie straty a teda častejšie zamietne predikovaného Expected Shortfall v prípade použitia 3 stupňov voľností oproti 20 stupňov voľností.

4.2.2 2. prístup

Výsledky a zhrnutie:

Tabuľka 4: Výsledky miery nezamietania zlej hodnoty Expected Shorfall pre 2. prístup

metóda č.	metóda	počet stupňov voľností
		df = 20
1.	Righi a Caretta	1
2.	Wong	
3.1.	Emmer, Kratz a Tasche (+ Bazilej)	0,6757
3.2.	Emmer, Kratz a Tasche (+ Christoffersen)	0,4234
4.1.	Acerbi a Szekély 1. test	0,7546
4.2.	Acerbi a Székely 2. test	0,7734

Mieru prijatia zlej hodnoty teoretického Expected Shorfall zoradíme na porovnanie testov od najlepšej, po najhoršiu nasledovne: 3.2, 3.1, 4.1, 4.2 a 2.

4.3 Záver testovania sily testov

Výsledky miery prijatia dobre predikovanej hodnoty Expected Shorfall a miery prijatia zle predikovanej hodnoty Expected Shorfall sú citlivé na simulované straty, ktoré im dodáme. Ak simulujeme straty, čo najbližšie k reálnym zmenám, tak miera prijatia dobre predikovanej hodnoty Expected Shorfall je vysoká (blízka k 1). Ak dodáme extrémne zlé simulované zmeny, tak miera prijatia zle predikovanej hodnoty Expected Shorfall je nízka. Ale ak dodáme testom, simulované zmeny, ktoré nie sú veľmi odchýlené od reálnych, tak miera priatia zle predikovanej hodnoty Expected Shorfall je veľká, čo je častý prípad. A preto nemôžeme výsledky hodnotiť len podľa toho, či je miera prijatia dobre predikovanej hodnoty Expected Shorfall blízka jednotke, alebo miera prijatia zle predikovanej hodnoty Expected Shorfall blízka nule. Na výsledky sily testov je vhodnejšie pozrieť sa vrámci daného prístupu a daných simulácií a porovnať ich vrámci spätných testov navzájom.

Výsledky sily testov nie sú závislé len od simulácií strát, ale aj od zvoleného časového horizontu, na ktorom sme ich testovali.

V konečnem dôsledku sa ako najlepší spätný test ukazuje test od Emmera, Kratza a Tascheho s kombináciou Christoffersenovho testu. Síce vo výsledkoch miery prijatia dobre predikovanej hodnoty Expected Shorfall nemal najvyššie hodnoty, tieto hodnoty boli porovnateľné s výsledkami ostatných testov. No na druhej strane bol výrazne najlepší v testovaní miery prijatia zle predikovanej hodnoty Expected Shorfall. A práve túto mieru, kedy test rozozná zlú hodnotu Expected Shorfall pokladáme za dôležitú.

Záver

Na záver môžeme zhodnotiť, že použitie metódy Expected Shortfall na výpočet miery rizika sa v mnohých ohľadoch ukazuje ako lepšia voľba oproti metóde Value at Risk. Expected Shortfall nie je už len kvantil zmien výnosov, ako je tomu pri Value at Risk. Hlavnou myšlienkou metódy Expected Shortfall je výpočet strednej hodnoty z extrémnych strát, čiže zo zmien prekračujúcich tento kvantil. Výhodou metódy Expected Shortfall je spĺňanie subaditivity, čo znamená zohľadňovanie zmiernenia rizika, ktoré je dôsledkom diverzifikácie porfólia.

Na druhej strane má aj nevýhodu, ktorou je nespĺňanie elicitability, čo spôsobuje problém pri skonštruovani skóringovej fukncie, ktorá umožnuje porovnania s inými modelmi. No ako sme sa dočítali a aj uviedli v našej práci v podkapitole 2.3, tak podľa Acerbiho a Székelyho je elicitabilita dôležitá len pri výbere modelu, ale nie pri jeho testovaní. Dovolíme si dodať, že síce miera Expected Shortfall nespĺňa elicitabilitu, no spolu s mierou Value at Risk je táto matematická vlastnosť splnená. To znamená,
že vieme skonštruovať skóringovú funkciu pre Expected Shortfall za predpokladu dobrej rizikovej miery Value at Risk. Okrajovo sme túto tému rozoberali v podkapitole 2.3, kde sme uviedli aj konkrétny príklad skóringovej funkcie.

Vďaka tomuto poznaniu nielen oni, ale aj mnohí ďalší navrhli metódy spätného testovania s rôznymi prístupmi. Niektoré z nich sme implementovali na nami zostavenom portfóliu z akciových indexov. Avšak pri testovaní normality sme zistili, že reálne dáta nie sú z normálneho rozdelenia, ktoré mnohé metódy spätného testovania predpokladajú. Zmeny výnosov majú ťažšie chvosty oproti normálnemu rozdeleniu. A preto sme navrhli úpravy spätných testov, a to implementáciu Studentovho t - rozdelnia s odhadnutým počtom stupňov voľností. V našom prípade, počas bežnej situácie na trhu, malo naše portfólio zmien výnosov Studentovo t - rozdelenie s priemerným početom stupňov voľností 5, viď Obr. A.33. Z tohto rozdelenia sme simulovali dáta a počítali kvantily. Implementáciou tohto prístupu sa celý výpočet skomplikoval a vyžadoval prepočet vyššie spomínaných parametrov v každom čase.

Niektoré spätné testy boli na implementáciu jednoduché no neposkytovali kritické výsledky, akým bol napríklad test skráteného rozdelenia podľa Righiho a Cerettu. Nikdy nedošlo k zamietnutiu predikovaného Expected Shortfall, aj keď iné testy túto

predikciu v časoch krízy zamietali. Ďalej sme implementovali spätný test, ktorý bol jednoduchý na implementáciu a dával dobré výsledky, ktorým bol test aproximácie kvantilu podľa Emmera, Kratzeho a Tascheho. Vrámci tohto spätného testu sme použili dva rôzne prístupy. Jeden prístup prihliadal iba na počtet prekročení kvantilu a druhý aj na nezávislosť medzi prekročeniami. Dokázali sme, že test, ktorý prihliadal aj na nezávislosť prekročení bol presnejší, čo sa dalo aj očakávať. Stretli sme sa aj so zložitým testom, akým bol Wongov test sedlového bodu, v ktorom sme avšak kvôli predpokladu normality nemohli implementovať predpoklad Studentovo t - rozdelenia. Na záver sme implementovali dva z troch prístupov neparametrického testu podľa Acerbi a Székely. Všetky uvedené spätné testy sme analyzovali v kapitole 3. Výsledky spätných testov Expected Shortfall sú zhrnuté na obrázku, viď. Obr. 21.

V závere práce sme sa venovali analýze sily spätných testov pre rizikovú mieru Expected Shortfall. Silu testov sme skúmali z viacerých hľadísk. Zaujímalo nás, ako dobre vedia spätné testy prijať dobre predikované Expected Shortfall a ako dobre spozorujú zlú predikciu Expected Shortfall. Použili sme viacero prístupov, aby sme boli v hodnotení objektívnejší. Výsledky sme zachytili na pomerovom ukazovateli, miere prijatia predikcie Expected Shortfall, viď Tab. 2, Tab. 3 a Tab. 4.

Všetky výpočty, vrátane výpočtu Value at Risk, Expected Shorfall, ich spätných testov a merania sily testov sme naprogramovali v softvéri R. Pri odhadoch a simuláciách sme používali nielen Studentovo t - rozdelenie ale aj simulácie pomocou bootstrap metódy. Našou snahou bolo predstaviť metódy a výpočty, čo najzrozumiteľnejšie. Výsledky sme zakreslili do prehľadných obrázkov a grafov, či vypísali do tabuliek. Pri analýze sily testov sme spätné testy zhodnotili a porovnali navzájom medzi sebou.

Popri plnení cieľov našej práce sme zachytili aj niekoľko užitočných analýz, ktoré môžu ďalej poslúžiť na dôkladnejšie skúmanie alebo ako námet na školskú prácu. Výsledky z diplomovej práce môžu byť užitočné najmä na modelovanie trhového rizika v praxi. Konkrétne môže pomôcť pri rozhodovaní, či uplatniť novú mieru rizika Expected Shortfall, čo musí byť splnené, aby dobre fungovala a aké spätné testy použiť. Keďže táto práca je postavená na implementácií metód na reálnych dátach, tak poskytuje alternatívu metód a spätných testov, ktoré majú realistickejšie predpoklady
a dosahujú presnejšie výsledky.

Možnosti rozšírenia a následného pokračovania práce vidíme v analýze skóringovej funkcie pre Value at Risk spolu s Expected Shortfall. Zamerať sa na túto funkciu, ktorá spĺňa vlastnosť elicitability a dokázať tieto tvrdenia. Ďalej navrhujeme bližšiu analýzu a hodnotenie sily spätných testov vzhľadom na zmenu kritickej hladiny, čím by sa potencionálne zvýšila ich využiteľnosť.

Zoznam použitej literatúry

[1] Acerbi, C., Székely, B.: *Back-testing Expected Shortfall*, MSCI Inc., October 3-6, 11, 2014

[2] Acerbi, C., Tasche, D.: *Expected Shortfall: A Natural Coherent Alternative to Value-at-Risk*, Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA, Vol. 31, No. 2, 379–388, 2002

[3] Adcock Ch., Areal, N., Oliveira, B.: *Value-at-Risk Forecasting Ability of Filtered Historical Simulation for non-Normal GARCH Returns*, 2011

[4] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, J.M.: *Coherent Measures of Risk*, Mathematical Finance, Vol. 9, No. 3, 203–228, July 1999

[5] Basel Committee on Banking Supervision: *Supervisory framework for the use of „Backtesting“ in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirements*, January 1996

[6] Basel Committee on Banking Supervision: *Consultative Document, Fundamental review of the trading book: A revised market risk framework*, October 2013

[7] Basel Committee on Banking Supervision: *Minimum capital requirements for market risk*, January 2016

[8] Basel Committee on Banking Supervision: *Basel III: Finalising post-crisis reforms*, December 2017

[9] Emmer, S., Kratz, M., Tasche, D.: *What is the best risk measure in practice? a comparison of standard measures*, Working Paper, 4-5, 11, 17-18, 2013

[10] Fissler, T., Ziegel, J., F.: *Higher order elicitability and asband's principle*, The Annals of Statistics, Vol. 44, No. 4, 1680–1707, 2016

[11] Giacomini, R., Komunjer, I.:*Evaluation and Combination of Conditional Quantile Forecasts*, Journal of Business & Economic Statistics, Vol. 23, 416-431, 2005

[12] Gneiting, T.:*Making and Evaluating Point Forecasts*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 106, 494, 2011

[13] Christoffersen, P. F.: *Evaluating Interval Forecasts*, Internal Economic Review, Vol. 39, No. 4, November 1998

[14] Jurča, P.: *Value at Risk*, Prednáška 3, slide 5

[15] Jurča, P.: *Value at Risk*, Prednáška 4, slide 6

[16] Kupiec, N. H.: *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models*, Journal of Derivatives, Vol. 3, No. 2, 1995

[17] Lugannani, Rice, S.: *Saddle point approximation for the distribution of the sum of independent random variables*, Advances in Applied Probability, 475–490, 1980

[18] Mak, P., Meng, Q.: *Value at Risk and Expected Shortfall: A comparative analysis of performance in normal and crisis markets*, Project submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of master of science in finance, 2014

[19] McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P.: *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press, 2005

[20] Osband, K. H.: *Providing Incentives for Better Cost Forecasting*, University of California, Berkeley, 1985

[21] Righi, M. B., Ceretta, P.: *Individual and flexible expected shortfall backtesting*, Journal of Risk Model Validation, Vol. 7, No. 3, 3–20, 2013

[22] Righi, M. B., Ceretta, P. S.: *A comparison of expected shortfall estimation models*, Journal of Economics and Business, 2015

[23] Sarykalin, S., Serraino, G., Uryasev, S.: *Value-at-Risk vs Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization*, Tutorials in Operations Research, 2008

[24] Wimmerstedt, L.: *Backtesting Expected Shortfall: the design and implementation of different backtests*, Stockholm, August 2015

[25] Wong, W. K.: *Backtesting trading risk of commercial banks using expected shortfall*, Journal of Banking and Finance, Vol. 32, No. 7, 1404–1415, 2008

[26] Zváč, M.: *Portfolio Value at Risk and Expected Shortfall using High-frequency data*, Praha 2017

Príloha A

A.1 Informácie o portfóliu

Naše portfólio sme zostavili z akciových indexov. Akciové indexy sme vyberali podľa určitých kritérií. Požadovali sme dostatočne dlhé pôsobenie na trhu a spoločné obchodovacie dni. Zvolili sme si tri hlavné americké burzové indexy Dow Jones Industrial Average (DJIA), Nasdaq Composite (NASDAQ) a Standard and Poors 500 (S & P).

Prečo sme vybrali do nášho porfólia práve akciové indexy? Akciové indexy slúžia investorom ako ukazovatele trhu. Sú počítané z cien akcií, prípadne ich derivátov, a to najčastejšie, ako ich vážený priemer. Akciový index má teda za úlohu poskytnúť relevantné informácie o danom odvetví alebo krajine a pod. A tak nám slúži na porovnanie výkonnosti firiem.

Na oboznámenie sa s vybrannými akciovými indexami si ich v skratke predstavíme. Dow Jones Industrial Average (od roku 1884) je zložený z takých akcií, ktoré dohromady slúžia ako ukazovateľ priemyslného sektoru americkej ekonomiky. Tieto akcie patria najväčším a najviac obchodovateľným spoločnostiam na americkom trhu. A nejde iba o priemyselné spoločnosti, ale aj spoločnosti z oblasti ťažkého priemyslu.

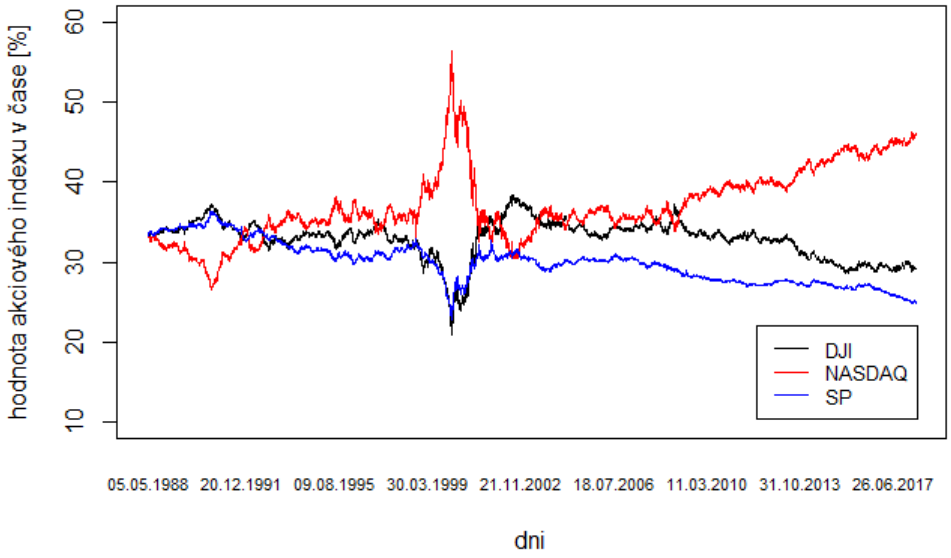
Nasdaq Composite (od roku 1971) zahŕňa akcie obchodované na mimoburzovom trhu NASDAQ. Obsahuje nielen americké akcie a je zameraný najmä na akcie z firiem v oblasti informačných technológií.

Standard and Poors 500 (od roku 1926) je akciový index pozostávajúci z akcií, ktoré tvoria približne 70 % celkovej kapitalizácie amerického akciového trhu. A preto je tento akciový index považovaný ako merítko výkonnosti amerického trhu.

V našej práci teda pracujeme s akciovými indexami, ktoré sme vyššie špecifikovali. Dĺžka časového okna je 30 rokov, a to konkrétne od 5.5.1988 po 4.5.2018.

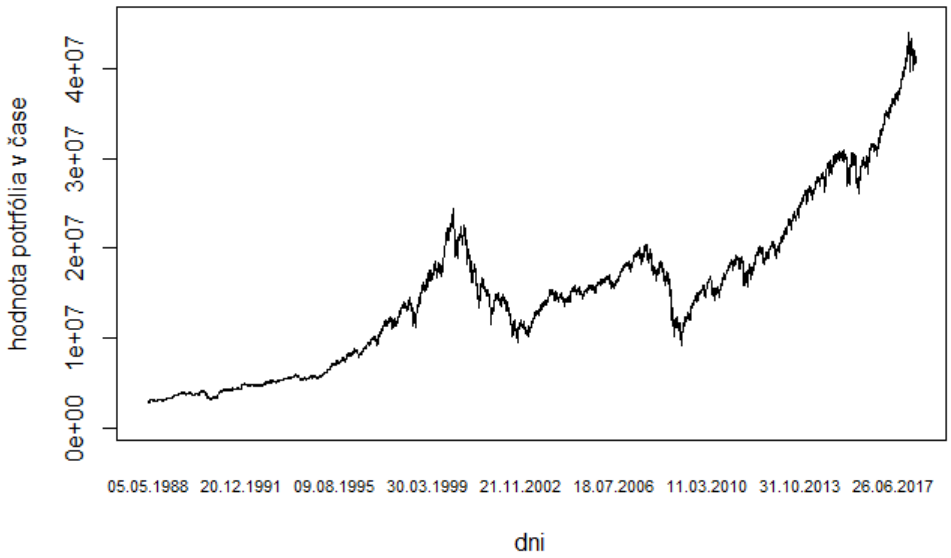
Pri analýze je dôležité pozrieť sa nielen na portfólio ako celok, ale aj na jednotlivé časti portfólia. Zaujíma nás situácia, či niektorý z akciových indexov nehrá majoritnú rolu. Aby sme zistili, či nie je naše portfólio ovplyvňované iba jedným akciovým indexom, tak vykreslíme priebeh hodnôt akciových indexov v našom portfóliu v každom čase. Na obrázku môžeme vidieť, že akciové indexy portfólia nie sú v každom čase jednotné, ale ani nedochádza k veľkým odchýlkam od indexov navzájom.

Hodnota akciového indexu v čase vypočítaná ako $w_t^i = w^i R_t^i$. Nasledujúci obrázok znázorňuje percentuálny pomer hodnôt akciových indexov navzájom, viď. Obr. A.30.



Obr. A.30: Percentuálny pomer hodnôt akciových indexov i v čase t

Hodnota portfólia v čase t je súčet hodnôt akciových indexov v čase t vypočítaná ako $P_t^i = \sum_i w_t^i$. Nasledujúci obrázok znázorňuje celkovú hodnotu portfólia, viď. Obr. A.31.



Obr. A.31: Hodnota portfólia v čase t

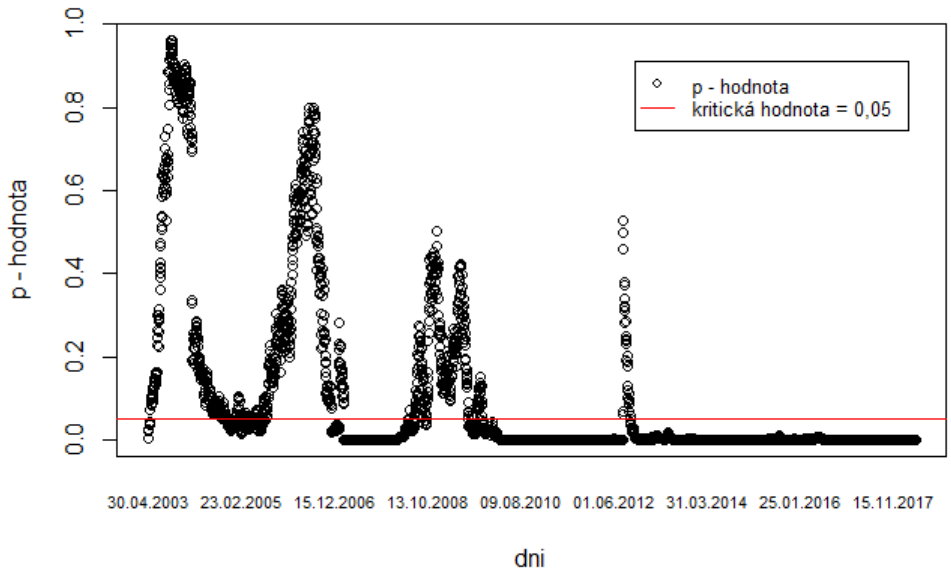
Hodnoty Value at Risk a Expected Shortfall sme počítali pre každý deň počas posledných 15 rokov. Časové okno denných údajov prvých 15 rokov je dostatočne dlhé obdobie, ktoré nám slúži na odpozorovanie charakteru dát a vývoja akciových indexov.

Spätné testovanie pre Value at Risk a Expected Shortfall sme vykonali až po prvom roku výpočtu týchto hodnôt. Pretože vo väčšine metód spätného testovanie potrebujeme historický výpočet Value at Risk prípadne Expected Shortfall aspoň, alebo práve z jedného roku.

Ďalší dôležitý údaj pri spätnom testovní je počet simulácií. Odporúčaný počet simulácií pri konkrétnych metódach je od 5000 až po 10^7. Za účelom porovnanie jednotlivých metód a kvôli výpočtovej náročnosti sme tento počet simulácií zjednotili na 10^4.

O normálnom rozdelení vieme, že má užšie chvosty v porovnaní so štandardizovaným Studentovým t - rozdelením. A práve užšie chvosty sú príčinou podhodnocovania rizika. V našom záujme bolo zistiť, ako veľmi sa reálne dáta z nášho porfólia priližujú normálnemu rozdeleniu, ak vôbec. A preto sme otestovali túto hypotézu v softvéri R pomocou funkcie shapiro.test(). Nasledujúci obrázok ukazuje, kedy sa štandardizované rezíduá portfólia môžu pokladať z normálneho rozdelenia a kedy nie, viď Obr. A.32.

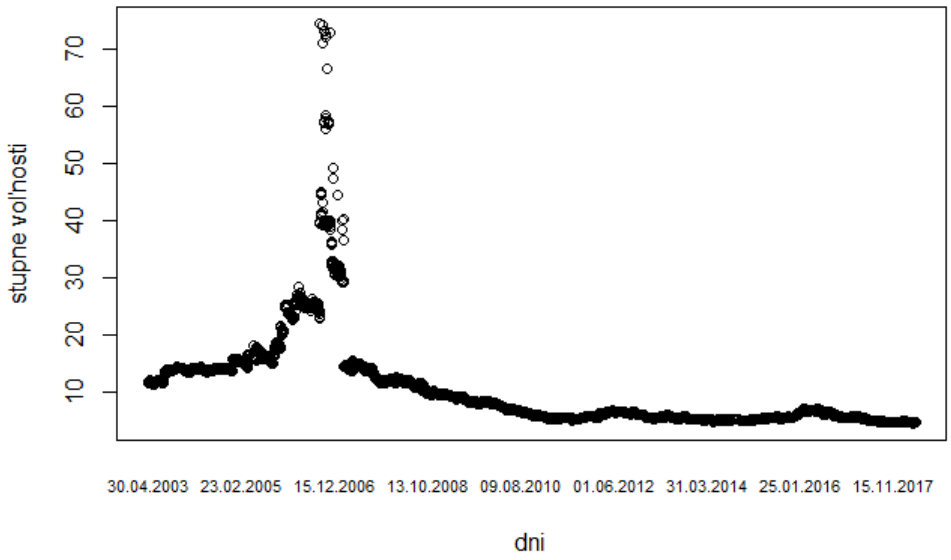
Vidíme, že dáta majú tentenciu byť z normálneho rozdelenia pred krízou, čo môže byť ukazovateľom nastupujúcej krízy.



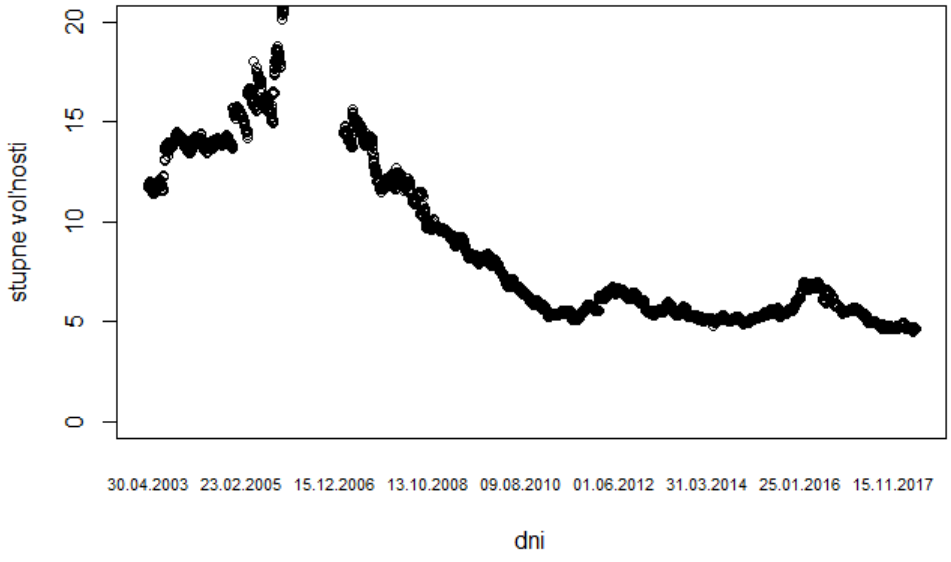
Obr. A.32: P - hodnota z testu na normálne rodelenie portfólia

Keďže štandardizované rezíduá portfólia prevažne nie sú z normálneho rozdelenia, tak navrhujeme použitie štandardizovaného Studentovho t - rozdelenia s odhadnutým počtom stupňov voľností. Stupne voľnosti sme odhadli pre každý časový krok pomocou funkcie fitdistr() v softwéri R. Náš navrhovaný počet dní z ktorého by sme odhadli stupne voľností bol 250 dní, čo predstavuje jeden rok, avšak funkcia vyžadovala vyšší počet vstupných dát, tak sme použili obdobie 1000 dní. Počet stupňov voľnosti sme použili v simulaciách, kvantiloch a štandardizacii Studentovho t - rozdelenia.

Na obrázku nižšie môžeme vidieť priebeh zmeny počtu stupňov voľností v čase, viď. Obr. A.33. V období pred krízou pozorujeme vysoký počet stupňov voľností, čo spôsobovalo približovanie sa k normálnemu rozdeleniu. Prikladáme aj obrázok na zúženej mierke, kde vidíme, že stupne voľnosti sa po kríze rovnajú približne piatim, viď. Obr. A.34.



Obr. A.33: Stupne voľnosti



Obr. A.34: Stupne voľnosti na zúženom intervale