UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



SEMIDEFINITNÉ ÚLOHY S OHRANIČENIAMI NA HODNOSŤ

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2019 Bc. Terézia FULOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

SEMIDEFINITNÉ ÚLOHY S OHRANIČENIAMI NA HODNOSŤ

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD.

Bratislava 2019 **Bc. Terézia FULOVÁ**



15708941

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Terézia Fulová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Semidefinitné úlohy s ohraničeniami na hodnosť
Rank-constrained semidefinite problems

Anotácia: Úlohy s ohraničeniami na hodnosť nachádzajú aplikácie v rôznych oblastiach. Typickým príkladom je lokalizácia senzorov v bezdrôtovej sieti, doplnenie korelačnej matice, či tzv. 'kissing number' problém. Ide o nekonvexné, ťažko riešiteľné úlohy, ktoré však možno relaxovať pomocou semidefinitného programovania. Práca obsahuje prehľad starých a nových prístupov, ich analýzu, porovnanie a použitie na vybranú aplikáciu.

Vedúci: doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.

Dátum zadania: 24.01.2018

Dátum schválenia: 25.01.2018 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie Veľké ďakujem patrí mojej vedúcej diplomovej práce doc. RNDr. Márii Trnovskej, PhD. za jej ochotu a prívetivý prístup, za jej drahocenný čas a za všetky odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce.

Chcela by som sa poďakovať aj celej mojej rodine, ktorá na mňa neustále myslí, podporuje ma a dáva mi silu pokračovať. Ďakujem aj mojim priateľom, ktorí si na mňa našli čas, keď som potrebovala prísť na iné myšlienky. Osobitné poďakovanie patrí mojej najlepšej kamarátke Táničke za všetky jej povzbudivé slová. V neposlednom rade ďakujem Pánu Bohu, lebo len On vie, koľkokrát som sa pohla ďalej len vďaka Nemu.

Abstrakt v štátnom jazyku

FULOVÁ, Terézia: Semidefinitné úlohy s ohraničeniami na hodnosť [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD., Bratislava, 2019, 74 s.

Táto práca sa zaoberá semidefinitnými úlohami s ohraničeniami na hodnosť, ktoré tvoria špeciálnu podtriedu nekonvexných úloh, kde je ohraničenie na hodnosť jediným zdrojom nekonvexnosti. Existuje niekoľko spôsobov, ako sa možno vysporiadať s ohraničením na hodnosť. V práci skúmame semidefinitnú relaxáciu, heuristiku stopy a konvexnú iteráciu. Navyše navrhneme štyri nové heuristiky pridaním dodatočných ohraničení k semidefinitnej relaxácii a heuristike stopy. Tieto ohraničenia je potrebné upraviť tak, aby sme pracovali len so semidefinitnými úlohami, ktoré sú efektívne riešiteľné. Navrhnuté heuristiky porovnáme s existujúcimi pri riešení tzv. lokalizačného problému, ktorý sa dá sformulovať v tvare semidefinitnej úlohy s ohraničením na hodnosť. Úlohou lokalizačného problému je nájsť pozície všetkých senzorov v sieti, pričom poznáme len pozície niektorých senzorov a niektoré vzdialenosti medzi nimi. Zameriame sa predovšetkým na mobilnú sieť, kde sa hľadajú pozície mobilných telefónov pri poznaní pozícií vysielačov a niektorých vzájomných vzdialeností. Táto úloha býva často ovplyvnená ruchom a obmedzeným dosahom signálu.

Kľúčové slová: Semidefinitné úlohy s ohraničeniami na hodnosť, semidefinitné programovanie, hodnosť, semidefinitná relaxácia, heuristiky, lokalizačný problém

Abstract

FULOVÁ, Terézia: Rank-constrained semidefinite problems [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD., Bratislava, 2019, 74 p.

This thesis deals with rank-constrained semidefinite problems which form a special subclass of non-convex problems where the rank constraint is the only source of non-convexity. There are several methods how to handle the rank constraint. In the thesis we examine semidefinite relaxation, trace heuristic and convex iteration. Moreover, we introduce four new heuristics, using additional constraints in semidefinite relaxation and trace heuristic. These constraints need to be adjusted so that we handle only with semidefinite problems since they are effectively solvable. We compare suggested heuristics to existing ones while solving so-called localization problem that can be formulated as a rank-constrained semidefinite problem. The localization problem consists in finding positions of all sensors in the network assuming that only positions of some sensors and their pairwise distances are known. We focus especially on the mobile network where positions of mobile phones are supposed to be found while the positions of base stations and some of their pairwise distances are known. This problem is also often influenced by noise and bounded radio range.

Keywords: Rank-constrained semidefinite problems, semidefinite programming, rank, semidefinite relaxation, heuristics, localization problem

Obsah

Zoznam použitých symbolov **10**

Úvod **11**

1 Úloha semidefinitného programovania a semidefinitná relaxácia **13**

1.1 Príklady aplikácií úloh s ohraničeniami na hodnosť 14

2 Hodnosť, stopa a vlastné hodnoty symetrických kladne semidefinitných matíc **16**

2.1 Súčet vlastných hodnôt ako semidefinitná úloha 21

2.2 Stopa ako konvexná obálka hodnosti 23

3 Heuristiky pre riešenie semidefinitných úloh prípustnosti s ohraničeniami na hodnosť **28**

3.1 Heuristika stopy pre úlohu minimalizácie hodnosti 28

3.2 Heuristika stopy pre úlohu s ohraničením na hodnosť 30

3.3 Konvexná iterácia 30

3.3.1 Úloha smerovej matice v konvexnej iterácii 31

3.4 Heuristiky s dodatočným ohraničením 1 32

3.4.1 Heuristika 1a 33

3.4.2 Heuristika 1b 34

3.5 Heuristiky s dodatočným ohraničením 2 34

3.5.1 Heuristika 2a 35

3.5.2 Heuristika 2b 36

4 Lokalizácia senzorov v bezdrôtovej sieti **37**

4.1 Formulácia lokalizačného problému 37

4.2 Štandardný tvar úlohy 40

4.3 Formulácia heuristík pre lokalizačný problém 42

5 Lokalizácia mobilných telefónov **47**

5.1 Príklad 47

5.1.1 Zanedbanie ruchu 50
5.1.2 Prítomnosť ruchu 57
5.2 Porovnanie vybraných heuristík 64

Záver **69**

Zoznam použitej literatúry **71**

Príloha A **73**

A.1 Schurov doplnok **73**

Zoznam použitých symbolov

$\mathbb{R}$	množina všetkých reálnych čísel
$\mathbb{N}$	množina všetkých prirodzených čísel
$\mathbb{R}^m$	množina všetkých reálnych m-rozmerných vektorov
$\mathbb{R}^{m\times n}$	množina všetkých reálnych $m \times n$ matíc
$\mathbb{S}^n$	množina všetkých $n \times n$ symetrických matíc
$\mathbb{S}^n_+$	množina všetkých $n \times n$ symetrických kladne semidefinitných matíc
$rank(X)$	hodnosť matice X
$tr(X)$	stopa matice X
λ_i	i-ta vlastná hodnota matice
$\|x\|_1$	l_1 norma vektora x, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|$
$\|x\|_2$	euklidovská norma, $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$
$\succeq$	symbol kladnej semidefinitnosti
k	požadovaná hodnosť riešenia, $k \in \mathbb{N}$
β	váha bikriteriálnej úlohy pre Heuristiku 1a (117)
γ	váha bikriteriálnej úlohy pre Heuristiku 2a (120)
$cenv\ f$	konvexná obálka funkcie f
$conv$	konvexný obal
$\mathcal{U}_1$	množina $\mathcal{U}_1 = \{X \in \mathbb{S}^n_+ \mid 0 \preceq X \preceq I\}$
$\mathcal{U}_\alpha$	množina $\mathcal{U}_\alpha = \{X \in \mathbb{S}^n_+ \mid 0 \preceq X \preceq \alpha \cdot I, \alpha \in \mathbb{N}\}$
x_i	neznáma pozícia senzora v lokalizačnom probléme
$\hat{x}_i$	známa pozícia senzora v lokalizačnom probléme
N	počet všetkých senzorov v lokalizačnom probléme
m	počet známych senzorov v lokalizačnom probléme
d_{ij}	štvorcová vzdialenosť medzi i-tym a j-tym senzorom, $d_{ij} = \|x_i - x_j\|^2$
$\mathcal{I}$	množina všetkých dvojíc indexov prislúchajúcich zmerateľným vzdialenostiam

G	Gramova matica
I_n	$n \times n$ identita
Q	ortogonálna matica, $QQ^T = I$
Λ	diagonálna matica s vlastnými hodnotami na diagonále
W	smerová matica,
e_i	i-ty vektor štandardnej bázy
$\langle A, B \rangle$	skalárny súčin matíc A a B
$U([0,1])$	rovnomerné rozdelenie na intervale $[0,1]$
$^\circ$	stupeň zemepisnej šírky resp. zemepisnej dĺžky

Úvod

Štatistika, teória grafov, genomika, lokalizácia senzorov, či financie - to je len malý zlomok oblastí, v ktorých vznikajú problémy vedúce k formulácii semidefinitných úloh s ohraničeniami na hodnosť. Tie sú kvôli ohraničeniu na hodnosť maticovej premennej nekonvexné, a teda vo všeobecnosti ťažko riešiteľné. V práci sa budeme zaoberať otázkou, ako sa vysporiadať s ohraničením na hodnosť tak, aby bola úloha efektívne riešiteľná a zároveň sa dosiahla požadovaná hodnosť riešenia.

Semidefinitné úlohy s ohraničeniami na hodnosť sú úlohy nekonvexného programovania, preto existuje viacero spôsobov, ktorými možno tieto úlohy riešiť. Pri hľadaní numericky presného riešenia sa využíva manifoldová optimalizácia, ktorej sú okrem iných venované aj články [15] a [21]. Takéto algoritmy sú však vo všeobecnosti veľmi pomalé. Efektívnejšie riešenie poskytujú rôzne projekčné či kvázinewtonovské metódy a heuristiky. Cenou za ich efektívnosť je však strata presnosti riešenia a získanie len akejsi aproximácie. Často najjednoduchším spôsobom riešenia je semidefinitná relaxácia, ktorá ak vedie k riešeniu požadovanej hodnosti, tak toto riešenie je optimálne, avšak to sa stáva len zriedka.

Semidefinitné úlohy s ohraničeniami na hodnosť úzko súvisia s úlohami minimalizácie hodnosti matice nad konvexnou množinou. Dlhodobo sa na riešenie týchto úloh používali kvázinewtonovské metódy ([16]), či striedavá projekcia ([20]), avšak ich obrovskou nevýhodou je závislosť riešenia od zvoleného počiatočného bodu a nemožná garancia nájdenia globálneho optima. Preto vznikla potreba nájsť taký spôsob riešenia úlohy minimalizácie hodnosti, ktorý by zaručil globálnu optimalitu nájdeného riešenia. Takým sa ukázala byť heuristika stopy, ktorá je v súčasnosti dosť rozšírená ([9], [17], [19]) a využíva sa dokonca aj pri riešení semidefinitných úloh s ohraničeniami na hodnosť ([6], [14]), ktorými sa v práci budeme zaoberať.

Iným spôsobom, ako získať riešenie semidefinitnej úlohy s ohraničením na hodnosť, sú algoritmy na zníženie hodnosti riešenia nájdeného semidefinitnou relaxáciou. Takýchto algoritmov na zníženie hodnosti existuje mnoho, my sa v práci pozrieme na tzv. konvexnú iteráciu.

Cieľom našej práce je predstaviť niekoľko existujúcich spôsobov riešenia semidefinitných úloh s ohraničeniami na hodnosť a navrhnúť ich možné vylepšenia. Ďalej chceme otestovať fungovanie jednotlivých heuristík pri riešení tzv. lokalizačného problému a navzájom ich porovnať vzhľadom na efektívnosť algoritmu a presnosť riešenia.

Práca je rozdelená do šiestich kapitol. V prvej kapitole predstavíme semidefinitné úlohy s ohraničeniami na hodnosť a semidefinitnú relaxáciu týchto úloh. Zároveň spomenieme niekoľko oblastí, v ktorých vznikajú problémy vedúce k formulácii semidefinitných úloh s ohraničeniami na hodnosť. Druhá kapitola je venovaná teoretickým poznatkom. Uvádzame v nej niekoľko tvrdení potrebných pre pochopenie ďalších častí práce. K väčšine týchto tvrdení doplníme vlastný dôkaz. Tretiu kapitolu začíname vysvetlením základnej myšlienky fungovania heuristiky stopy a konvexnej iterácie. Ďalej v tejto kapitole navrhujeme nové heuristiky a popisujeme myšlienky, na ktorých sú založené. V štvrtej kapitole predstavíme lokalizačný problém a ukážeme, že ho možno sformulovať v tvare semidefinitnej úlohy s ohraničením na hodnosť. Zároveň tu uvedieme formulácie jednotlivých heuristík pre lokalizačný problém. V poslednej, piatej kapitole sa zameriame na lokalizáciu mobilných telefónov. Pri riešení konkrétneho príkladu porovnáme fungovanie navrhnutých heuristík s tými existujúcimi, pričom budeme pracovať s rôznymi variantmi úlohy. Nakoniec sa pozrieme na robustnosť najlepšej z navrhnutých heuristík.

1 Úloha semidefinitného programovania a semidefinitná relaxácia

Semidefinitné programovanie (SDP) je podtrieda konvexného programovania, kde sa optimalizuje lineárna účelová funkcia nad prienikom kužeľa kladne semidefinitných matíc s afinným priestorom. Jedná sa o špeciálny typ kónického programovania, ktorý v sebe zahŕňa známe podtriedy ako lineárne programovanie (LP), kvadratické programovanie (QP) a programovanie nad kužeľmi druhého rádu (SOCP).

Štandardne ([4], [6]) sa úloha semidefinitného programovania uvádza v nasledovnom tvare

$$\begin{array}{lrcl} \underset{X\in\mathbb{S}^n}{min} & tr(CX) & & \\ & tr(A_iX) & = & b_i, \quad i=1,...,m, \\ & X & \succeq & 0, \end{array} \tag{1}$$

kde $X \in \mathbb{S}^n$ je maticová premenná, $C, A_1, ..., A_m \in \mathbb{S}^n$ a $b \in \mathbb{R}^m$.

Pod úlohou prípustnosti SDP budeme rozumieť úlohu

$$\begin{array}{lrcl} \underset{X\in\mathbb{S}^n}{\text{nájsť}} & X & & \\ & tr(A_iX) & = & b_i, \quad i=1,...,m, \\ & X & \succeq & 0, \end{array} \tag{2}$$

kde $X \in \mathbb{S}^n$ je maticová premenná, $C, A_1, ..., A_m \in \mathbb{S}^n$ a $b \in \mathbb{R}^m$.

V práci sa budeme zaoberať semidefinitnými úlohami prípustnosti s ohraničeniami na hodnosť t.j. úlohami v tvare

$$\begin{array}{lrcl} \underset{X\in\mathbb{S}^n}{\text{nájsť}} & X & & \\ & tr(A_iX) & = & b_i, \quad i=1,...,m, \\ & X & \succeq & 0, \\ & rank(X) & \leq & k, \end{array} \tag{3}$$

kde $X \in \mathbb{S}^n$ je maticová premenná, $C, A_1, ..., A_m \in \mathbb{S}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ a $k \in \mathbb{N}$ je horná hranica na hodnosť matice X.

Poznamenajme, že úloha (3) je kvôli ohraničeniu na hodnosť nekonvexná, pričom toto ohraničenie je jediným zdrojom nekonvexnosti. Keďže úloha (3) je nekonvexná, našou prirodzenou snahou bude relaxovať ju vhodnou úlohou SDP.

Relaxácia úlohy sa vo všeobecnosti snaží nahradiť nekonvexnú úlohu v istom zmysle k nej najbližšou konvexnou úlohou tak, aby sme čo najefektívnejšie dospeli k riešeniu s požadovanými vlastnosťami alebo aspoň k aproximácii optimálneho riešenia. V prípade úlohy (3) spočíva relaxácia vo vynechaní ohraničenia na hodnosť matice. Rieši sa teda úloha typu (2), prípadne sa do úlohy dodajú ďalšie špecifické ohraničenia.

SDP úlohy vieme efektívne riešiť využitím metód vnútorného bodu, ktoré sú implementované vo viacerých programovacích prostrediach. Nevýhodou metód vnútorného bodu však je, že pre SDP úlohy konvergujú k maximálne komplementárnemu riešeniu t.j. k riešeniu s maximálnou hodnosťou, a preto sa riešenia s nižšou hodnosťou nenájdu ([6, §4.2.1]).

Vo všeobecnosti platí, že ak má relaxovaná úloha riešenie požadovanej hodnosti, tak toto riešenie je riešením úlohy (3). Avšak to sa nestáva často, preto je potrebné zaviesť nové spôsoby riešenia úlohy (3), ktoré by viedli k jej optimálnemu riešeniu, alebo aspoň k jeho aproximácii.

1.1 Príklady aplikácií úloh s ohraničeniami na hodnosť

V tejto podkapitole uvedieme niekoľko príkladov aplikácií z rôznych oblastí, v ktorých nachádzajú uplatnenie SDP úlohy s ohraničeniami na hodnosť. Všetky tieto aplikácie sú dôkazom toho, že má zmysel zaoberať sa metódami riešenia týchto úloh.

K formulácii takejto úlohy vedie veľa úloh kombinatorickej optimalizácie a teórie grafov. Najznámejšou úlohou z teórie grafov vedúcou k riešeniu SDP úlohy s ohraničením na hodnosť rovnej jednotke je známy *MAX-CUT problém*, kde je úlohou nájsť taký rez, ktorý rozdelí množinu vrcholov na dve podmnožiny tak, aby sa maximalizovala váha hrán medzi nimi. Doposiaľ najlepšou heuristikou na riešenie tohto problému je tzv. Goemans-Williamsonov algoritmus, o ktorom sa možno dočítať v [6, §4.6.0.0.11] alebo [12].

Ďalšou známou úlohou je *lokalizácia senzorov v bezdrôtovej sieti*, ktorá spočíva v nájdení pozícií všetkých senzorov, pričom sú známe pozície len niektorých senzorov a vzdialenosti medzi nimi. Bližšie sa týmto problémom zaoberáme v Kapitole 4.

Semidefinitné úlohy s ohraničeniami na hodnosť nachádzajú uplatnenie aj v genomike, konkrétne pri *určovaní molekulovej štruktúry* proteínov. Podrobnejšie sa tejto problematike venujú autori v [2] a [6].

V oblasti financií sa kvôli nekonzistentným dátam často stáva, že korelačná matica nie je kladne semidefinitná, preto vzniká potreba nájdenia *najbližšej korelačnej matice*. Viac sa o tejto problematike píše v [13].

Aj niektoré metódy *strojového učenia* vedú k formulácii SDP úlohy s ohraničením na hodnosť, ako napríklad známy algoritmus k-means pri využití myšlienok z článkov [11] a [18].

Poslednou, no nemenej zaujímavou aplikáciou, ktorú spomenieme, je tzv. *kissing number problem*. Úlohou je určiť maximálny počet sfér, ktoré sa dotýkajú jednej centrálnej sféry v danom n-rozmernom priestore, pričom sa tieto sféry nesmú pretínať. Formulácia tohto problému tiež vedie k riešeniu SDP úlohy s ohraničením na hodnosť. Viac o tejto úlohe sa možno dozvedieť v [6, §5.4.2.2.6].

2 Hodnosť, stopa a vlastné hodnoty symetrických kladne semidefinitných matíc

Hodnosť matice je definovaná ako maximálny počet jej lineárne nezávislých stĺpcov resp. riadkov. Udáva teda dimenziu stĺpcového a riadkového priestoru danej matice a pre diagonalizovateľné matice je rovná počtu ich nenulových vlastných hodnôt. To všetko sú známe vlastnosti hodnosti. Keď však vnímame hodnosť ako funkciu kladne semidefinitnej symetrickej maticovej premennej, je potrebné uviesť, že hodnosť je kvázikonkávna funkcia, o čom hovorí aj nasledovné tvrdenie.

Tvrdenie 2.1 (podľa [6, §2.9.2.9.2]). *Nech $X, Y \in \mathbb{S}_+^N$. Potom platí*

$$rank(X+Y) \geq min\{rank(X), rank(Y)\}, \tag{4}$$

teda hodnosť je kvázikonkávna funkcia na $\mathbb{S}_+^N$.

Dôkaz. Platnosť vzťahu (4) ukážeme na základe nasledovnej vlastnosti kladne semidefinitných symetrických matíc ([6, §2.9.2.9.2])

$$\mathcal{N}(X+Y) = \mathcal{N}(X) \cap \mathcal{N}(Y), \ \ \forall X, Y \in \mathbb{S}_+^N. \tag{5}$$

Vlastnosť (5) je očividná, keď si uvedomíme, že pre $\forall X, Y \in \mathbb{S}_n^+$ a $z \in \mathbb{R}^n$ platí:

$$z \in \mathcal{N}(X+Y) \Leftrightarrow 0 = z^T(X+Y)z = z^TXz + z^TYz \Leftrightarrow z \in \mathcal{N}(X) \wedge z \in \mathcal{N}(Y).$$

Zo vzťahu (5) môžeme odvodiť nasledovné

$$dim\,\mathcal{N}(X+Y) \leq min\{dim\,\mathcal{N}(X), dim\,\mathcal{N}(Y)\},$$
$$N - rank(X+Y) \leq min\{N - rank(X), N - rank(Y)\}.$$

A teda dostávame

$$rank(X+Y) \geq min\{rank(X), rank(Y)\}, \tag{4}$$

čo sme chceli ukázať. □

Vzťah (4) je samotnou definíciou kvázikonkávnosti. Stačí si uvedomiť, že platí

$$rank(\lambda X + (1-\lambda)Y) \geq min\, rank(\lambda X + (1-\lambda)Y) = min\, rank(X+Y), \ \ \forall \lambda \in (0,1). \tag{6}$$

Ako sme spomenuli už v úvode kapitoly, hodnosť diagonalizovateľných matíc je rovná počtu ich nenulových vlastných hodnôt. Vyplýva to zo skutočnosti, že pre každú symetrickú maticu existuje spektrálny rozklad $X = Q\Lambda Q^T$, kde $\Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, pričom $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sú vlastné hodnoty matice X a $QQ^T = I$, a zároveň platí $rank(X) = rank(\Lambda)$.

Keďže symetrické matice patria do triedy diagonalizovateľných matíc, má zmysel venovať sa ich vlastným hodnotám. Nižšie uvádzame dve tvrdenia, ktoré dávajú do súvisu súčet vlastných hodnôt a hodnosť.

Tvrdenie 2.2. *Nech $X \in \mathbb{S}^n_+$, $k \leq n$ a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ sú vlastné hodnoty matice X. Potom platí*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = tr(X) \;\; \Leftrightarrow \;\; rank(X) \leq k. \tag{7}$$

Dôkaz. ($\Rightarrow$): Keďže stopa matice je rovná súčtu jej vlastných hodnôt, môžeme písať:

$$\lambda_1 + ... + \lambda_k = tr(X) = \lambda_1 + ... + \lambda_k + ... + \lambda_n. \tag{8}$$

Je teda zrejmé, že $\lambda_{k+1} = ... = \lambda_n = 0$. Zároveň je matica X diagonalizovateľná, preto je jej hodnosť rovná počtu jej nenulových vlastných hodnôt, a teda $rank(X) \leq k$.

($\Leftarrow$): Opäť využijeme, že matica X je diagonalizovateľná, teda jej hodnosť je rovná počtu jej nenulových vlastných hodnôt. Preto ak $rank(X) \leq k$, tak $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_k \geq 0$ a $\lambda_{k+1} = ... = \lambda_n = 0$, a teda platí (8). □

Tvrdenie 2.3. *Nech $X \in \mathbb{S}^n_+$, $k \leq n$ a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ sú vlastné hodnoty matice X. Potom platí*

$$\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} + ... + \lambda_n = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; rank(X) \leq k. \tag{9}$$

Dôkaz. Stačí si uvedomiť, že ľavá strana ekvivalencie (9) je ekvivalentná ľavej strane ekvivalencie (7) a z platnosti Tvrdenia 2.2 vyplýva aj platnosť Tvrdenia 2.3. □

Stopu matice nemusíme vždy vnímať len ako súčet vlastných hodnôt, ale môžeme sa na ňu pozrieť aj ako na funkciu maticovej premennej. V tom prípade je užitočné poznať nasledovné tvrdenie.

Tvrdenie 2.4. *Nech $X, Y \in \mathbb{S}^n_+$. Potom funkcia $tr(.)$ je lineárna funkcia t.j.*

$$tr(\alpha X + \beta Y) = \alpha tr(X) + \beta tr(Y), \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Kvôli nasledujúcim tvrdeniam je potrebné uviesť Lemu 2.5, ktorá hovorí o tom, že suprémum z triedy konvexných funkcií je konvexná funkcia a infimum z triedy konkávnych funkcií je konkávna funkcia.

Lema 2.5 (podľa [4, §3.2]). *Nech $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a $C \subseteq \mathbb{R}^m$ je ľubovoľná množina.*

a) Nech je $f(x, y)$ konvexná v x pre každé pevné $y \in C$. Potom je funkcia

$$g(x) = \sup_{y \in C} f(x, y) \tag{11}$$

konvexná.

b) Nech je $f(x, y)$ konkávna v x pre každé pevné $y \in C$. Potom je funkcia

$$g(x) = \inf_{y \in C} f(x, y) \tag{12}$$

konkávna.

Dôkaz.

a) Z konvexnosti funkcie $f(x, y)$ v x a vďaka vlastnostiam supréma platí:

$$\begin{aligned} g(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) &= sup_{y \in C} f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2, y) && (13)\\ &\leq sup_{y \in C}\{\theta f(x_1, y) + (1-\theta) f(x_2, y)\} && (14)\\ &\leq sup_{y \in C}\{\theta f(x_1, y)\} + sup_{y \in C}\{(1-\theta) f(x_2, y)\} && (15)\\ &= \theta sup_{y \in C} f(x_1, y) + (1-\theta) sup_{y \in C} f(x_2, y) && (16)\\ &= \theta g(x_1) + (1-\theta) g(x_2), && (17) \end{aligned}$$

čo je definícia konvexnosti funkcie g.

b) Analogicky k dôkazu časti a).

□

Nielen stopu matice, ale aj súčet jej vlastných hodnôt môžeme považovať za funkciu maticovej premennej. V takom prípade sa dá ukázať, že súčet k najväčších vlastných hodnôt symetrickej matice je konvexná funkcia v X a súčet $n - k$ najmenších vlastných hodnôt symetrickej matice je konkávna funkcia v X, ako uvádzame v Tvrdení 2.7. Najskôr však v Tvrdení 2.6 uvádzame zaužívané spôsoby vyjadrenia súčtu k najväčších a súčtu $n - k$ najmenších vlastných hodnôt symetrickej matice.

Tvrdenie 2.6 (podľa [8]). *Nech* $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_k \geq ... \geq \lambda_n$ *sú vlastné hodnoty matice* $X \in \mathbb{S}^n$. *Potom*

a)

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = sup\{tr(V^T XV) \mid V \in \mathbb{R}^{n\times k}, V^T V = I_k\}. \tag{18}$$

b)

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i = inf\{tr(V^T XV) \mid V \in \mathbb{R}^{n\times (n-k)}, V^T V = I_{n-k}\}. \tag{19}$$

Dôkaz.

a) Nech $X = Q\Lambda Q^T$ je spektrálny rozklad matice $X \in \mathbb{S}^n$. Potom

$$tr(V^T XV) = tr(V^T Q\Lambda Q^T V). \tag{20}$$

Označme $\tilde{V} = Q^T V$.

Keďže $V^T V = I_k$ a $QQ^T = I_n$, tak $\tilde{V}^T\tilde{V} = V^T QQ^T V = I_k$, $\tilde{V}\tilde{V}^T \succeq 0$ a

$$tr(\tilde{V}\tilde{V}^T) = tr(\tilde{V}^T\tilde{V}) = k. \tag{21}$$

Navyše $\tilde{V}^T\tilde{V} = I_k$, preto platí aj $I_k - \tilde{V}^T\tilde{V} \succeq 0$. Využitím Schurovho doplnku (A.1.1) môžeme túto maticovú nerovnosť prepísať na tvar

$$\begin{bmatrix} I_k & \tilde{V}^T \\ \tilde{V} & I_n \end{bmatrix} \succeq 0. \tag{22}$$

Opätovnou aplikáciou Schurovho doplnku (A.1.1) získame maticovú nerovnosť

$$I_n - \tilde{V}\tilde{V}^T \succeq 0. \tag{23}$$

Vráťme sa teraz ku vzťahu (20). Dostávame

$$tr(V^T XV) = tr(V^T Q\Lambda Q^T V) = tr(\tilde{V}^T\Lambda\tilde{V}) = tr(\Lambda\tilde{V}\tilde{V}^T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{v}_i^T \tilde{v}_i, \tag{24}$$

kde $\tilde{v}_i$ je riadok matice $\tilde{V}$.

Z vlastnosti (23) platí $1 - \tilde{v}_i^T\tilde{v}_i \geq 0$ pre každé $i = 1, ..., n$ a vďaka vzťahu (21) máme $\sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i^T\tilde{v}_i = k$.

Označme $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)^T$, kde $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$ a $x = (\tilde{v}_1^T \tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_n^T \tilde{v}_n)^T$. Keď si teraz vezmeme úlohu lineárneho programovania

$$\begin{aligned} max \qquad & \lambda^T x \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = k, \\ & 0 \leq x_i \leq 1, \end{aligned} \tag{25}$$

je zrejmé, že krajným bodom množiny prípustných riešení tejto úlohy je aj bod

$$x = [\, \underbrace{1, ..., 1}_{k}, 0, ..., 0 \,]^T,$$

v ktorom sa zjavne nadobúda maximum.

Preto platí

$$tr(V^T X V) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{v}_i^T \tilde{v}_i \leq \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k. \tag{26}$$

b) Analogicky k dôkazu časti a) zavedieme $\tilde{V} = Q^T V$, pre ktoré bude platiť $\tilde{V}^T \tilde{V} = I_{n-k}$, $tr(\tilde{V}^T \tilde{V}) = tr(\tilde{V} \tilde{V}^T) = n - k$ a $0 \preceq \tilde{V} \tilde{V}^T \preceq I_n$. Podobým spôsobom ako v dôkaze časti a) sa dá ukázať, že platí

$$tr(V^T X V) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{v}_i^T \tilde{v}_i \geq \lambda_{k+1} + ... + \lambda_n. \tag{27}$$

□

Tvrdenie 2.7. *Nech $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ sú vlastné hodnoty matice $X \in \mathbb{S}^n$. Potom*

a) $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ je konvexná funkcia v X.

b) $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i$ je konkávna funkcia v X.

Dôkaz.

a) Podľa Tvrdenia 2.6a) možno súčet k najväčších vlastných hodnôt symetrickej matice vyjadriť ako suprémum množiny (18). Ako sme uviedli v Tvrdení 2.4, stopa je lineárna funkcia maticovej premennej, preto pre každú pevne zvolenú maticu V je funkcia $tr(V^T X V)$ lineárna, a teda konvexná v X, čím je splnený predpoklad Lemy 2.5a), ktorá tvrdí, že suprémum triedy konvexných funkcií je konvexná funkcia vzhľadom na ľubovoľnú množinu. Teda aj súčet k najväčších vlastných hodnôt je konvexná funkcia.

b) Podľa Tvrdenia 2.6b) možno súčet $n-k$ najmenších vlastných hodnôt symetrickej matice vyjadriť ako infimum množiny (19). Funkcia $tr(V^TXV)$ je lineárna, a teda aj konkávna v X pre pevne zvolenú maticu V. Je tak splnený predpoklad Lemy 2.5b), ktorá tvrdí, že infimum triedy konkávnych funkcií je konkávna funkcia vzhľadom na ľubovoľnú množinu. Súčet $n-k$ najmenších vlastných hodnôt je teda konkávna funkcia.

□

2.1 Súčet vlastných hodnôt ako semidefinitná úloha

Tvrdenie 2.8 (podľa [1, §4.1]). *Nech X je symetrická matica a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ sú jej vlastné hodnoty. Potom súčet k najväčších vlastných hodnôt možno charakterizovať ako optimálnu hodnotu SDP úlohy:*

$$\begin{aligned} \lambda_1 + ... + \lambda_k \quad = \max_{U} \quad & tr(XU) \\ & tr(U) = k, \\ & 0 \preceq U \preceq I. \end{aligned} \tag{28}$$

Dôkaz. Podľa Tvrdenia 2.6a) môžeme súčet k najväčších vlastných hodnôt zapísať ako suprémum množiny (18). Ak teraz položíme $U = \tilde{V}\tilde{V}^T$, kde $0 \preceq \tilde{V}\tilde{V}^T \preceq I_n$ a $tr(\tilde{V}\tilde{V}^T) = k$, dostávame tvar úlohy (28). □

Tvrdenie 2.8 ponúka spôsob, ako nájsť súčet k najväčších vlastných hodnôt symetrickej matice riešením SDP úlohy. Niekedy je však výhodnejšie riešiť namiesto úlohy (28) k nej duálnu úlohu sformulovanú v Tvrdení 2.9.

Tvrdenie 2.9 (podľa [1, §4.1]). *Nech X je symetrická matica a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ sú jej vlastné hodnoty. Potom súčet k najväčších vlastných hodnôt možno charakterizovať ako optimálnu hodnotu SDP úlohy:*

$$\begin{aligned} \lambda_1 + ... + \lambda_k \quad = \min_{z,V} \quad & kz + tr(V) \\ & zI + V \succeq X, \\ & V \succeq 0, \end{aligned} \tag{29}$$

kde $z \in \mathbb{R}$ a $V \in \mathbb{S}^n$.

Dôkaz. Odvodíme duálnu úlohu k úlohe (28) a využijeme, že sa optimálne hodnoty ich účelových funkcií rovnajú, nakoľko existuje matica spĺňajúca ohraničenia s ostrými nerovnosťami (tzv. vnútorný bod), a teda platí silná dualita.

Po zavedení duálnych premenných $V \in \mathbb{S}_+^n$ a $z \in \mathbb{R}$ a zmene maximalizačnej úlohy na minimalizačnú obrátením znamienka účelovej funkcie nadobúda Lagrangeova funkcia tvar

$$\mathcal{L}(U, z, V) = -tr(XU) + z(tr(U) - k) + tr(V(U - I)) \tag{30}$$

$$= -kz - tr(V) + tr((-X + zI + V)U). \tag{31}$$

Platí teda

$$inf\ \mathcal{L}(U, z, V) = \begin{cases} -kz - tr(V), & \text{ak } zI + V - X \succeq 0 \\ -\infty, & \text{inak.} \end{cases} \tag{32}$$

Duálna úloha k úlohe (28) má teda tvar

$$\begin{aligned} \max_{z,V} \quad & -kz - tr(V) \\ & zI + V \succeq X, \\ & V \succeq 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Po obrátení znamienka účelovej funkcie úlohy (33) naozaj získame tvar duálnej úlohy (29). □

Podobným spôsobom môžeme vyjadriť aj súčet $n - k$ najmenších vlastných hodnôt, ako uvádzame v Tvrdení 2.10 a Tvrdení 2.11. Tieto tvrdenia sme sformulovali analogicky k Tvrdeniu 2.8 a Tvrdeniu 2.9.

Tvrdenie 2.10. *Nech X je symetrická matica a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ sú jej vlastné hodnoty. Potom súčet $n - k$ najmenších vlastných hodnôt možno charakterizovať ako optimálnu hodnotu SDP úlohy:*

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} + ... + \lambda_n \quad = \min_{U} \quad & tr(XU) \\ & tr(U) = n - k, \\ & 0 \preceq U \preceq I. \end{aligned} \tag{34}$$

Dôkaz. Podľa Tvrdenia 2.6b) môžeme súčet $n - k$ najmenších vlastných hodnôt zapísať ako infimum množiny (19). Ak teraz položíme $U = \tilde{V}\tilde{V}^T$, kde $0 \preceq \tilde{V}\tilde{V}^T \preceq I_n$ a $tr(\tilde{V}\tilde{V}^T) = n - k$, dostaneme tvar úlohy (34). □

Tvrdenie 2.11. *Nech X je symetrická matica a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ sú jej vlastné hodnoty. Potom súčet $n-k$ najmenších vlastných hodnôt možno charakterizovať ako optimálnu hodnotu SDP úlohy:*

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} + ... + \lambda_n \quad = \max_{z,V} \quad & -(n-k)z - tr(V) \\ & zI + V \succeq -X, \\ & V \succeq 0, \end{aligned} \tag{35}$$

kde $z \in \mathbb{R}$ a $V \in \mathbb{S}^n$.

Dôkaz. Úloha (35) je duálnou k úlohe (34). Postup odvodenia duálnej úlohy je analogický k dôkazu Tvrdenia 2.9, kde sa využije, že úloha (34) sa líši od úlohy (28) len v znamienku účelovej funkcie. Stačí si uvedomiť, že súčet $n-k$ najmenších vlastných hodnôt matice X je súčet $n-k$ najväčších vlastných hodnôt matice $-X$ s opačným znamienkom. □

2.2 Stopa ako konvexná obálka hodnosti

Predtým, ako sa pozrieme na jedno z kľúčových tvrdení v tejto práci, pripomenieme niektoré pojmy a tvrdenia z lineárnej algebry a konvexnej optimalizácie.

Definícia 2.12. *Pod pojmom projekčná matica budeme rozumieť maticu ortogonálnej projekcie P na podpriestor, ktorá spĺňa: $P \succeq 0$, $P = P^T$, $P = P^2$ a jej vlastné hodnoty sú rovné* 0 *alebo* 1.

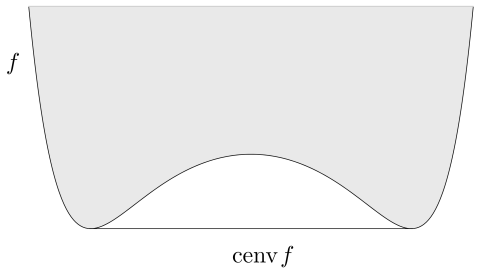
Lema 2.13. *Nech P je projekčná matica spĺňajúca Definíciu 2.12. Potom platí*

$$tr(P) = rank(P). \tag{36}$$

Dôkaz. Matica P je symetrická, preto poznáme jej spektrálny rozklad $P = Q\Lambda Q^T$, kde Λ je diagonálna matica s vlastnými hodnotami matice P na diagonále, a platí $rank(P) = rank(\Lambda)$, čiže hodnosť matice je rovná počtu jej nenulových vlastných hodnôt.

Keďže projekčná matica má vlastné hodnoty len nuly a jednotky, počet nenulových vlastných hodnôt je rovný súčtu vlastných hodnôt, čo je známa definícia stopy matice. Je teda zrejmé, že platí $rank(P) = tr(P)$. □

V ďalšej časti práce budeme narábať s pojmom konvexná obálka funkcie, ktorý definujeme v Definícii 2.14.



Obr. 1: Ilustrácia konvexnej obálky funkcie f.

Definícia 2.14. *Nech* $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$*, kde* $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}$*. Funkcia* cenv f *je konvexná obálka funkcie* f *na množine* $\mathcal{C}$*, ak* cenv f *je konvexná funkcia,* cenv $f(x) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{C}$ *a pre každú konvexnú funkciu* $\varphi(x)$ *takú, že* $\varphi(x) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{C}$*, platí* $\varphi(x) \leq$ cenv $f(x), \forall x \in \mathcal{C}$*.*

Konvexná obálka funkcie f je teda taká konvexná funkcia *cenv* f, ktorá je spomedzi všetkých konvexných funkcií (bodovo) najbližšie k funkcii f. Ilustrácia konvexnej obálky je zobrazená na obrázku Obr.1.

Stopa matice sa dá pre symetrické kladne semidefinitné matice interpretovať ako konvexná obálka hodnosti, ako uvádzame v Tvrdení 2.15.

Tvrdenie 2.15 (podľa [10])**.** *Konvexná obálka funkcie* $\Phi(X) = rank(X)$ *na množine*

$$\mathcal{U}_1 = \{X \in \mathbb{S}_+^n \mid 0 \preceq X \preceq I\} \tag{37}$$

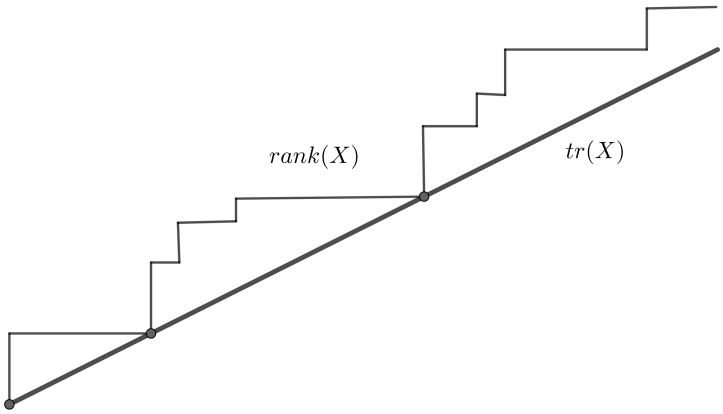
je stopa matice X*, t.j.*

$$\text{cenv } \Phi(\mathrm{X}) = \mathrm{tr}(\mathrm{X}). \tag{38}$$

Dôkaz Tvrdenia 2.15 uvedený v [10] je založený na známom výsledku konvexnej optimalizácie, že konjugovaná funkcia konjugovanej funkcie funkcie f je konvexnou obálkou funkcie f. My sa pokúsime dokázať toto tvrdenie len na základe poznania definície konvexnej obálky (Definícia 2.14). Tento dôkaz uvádzame nižšie. Pre lepšie pochopenie dôkazu odporúčame pozrieť obrázok Obr.2.

Dôkaz. Chceme ukázať, že ak $\varphi(X)$ je konvexná funkcia taká, že

$$rank(X) \geq \varphi(X) \geq tr(X) \tag{39}$$



Obr. 2: Ilustrácia stopy ako konvexnej obálky hodnosti. Priesečníky predstavujú projekčné matice, pre ktoré platí $rank(X) = tr(X)$.

na množine $\mathcal{U}_1$, tak $\varphi(X) = tr(X)$.

Budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na hodnosť k. Maticu hodnosti k budeme označovať X^k.

Pre $k = 0$ tvrdenie očividne platí, keďže do úvahy prichádza len $X = 0$.

Pre $k = 1$ možno maticu X^1 zapísať ako

$$X^1 = vv^T, \text{ pre nejaký vektor } v \neq 0. \tag{40}$$

Jediná nenulová vlastná hodnota matice X^1 je $\lambda = v^T v$, keďže platí

$$X^1 x = vv^T x = \lambda x, \ \forall x, \tag{41}$$

a teda špeciálne pre $x = v$ platí

$$v(v^T v) = \lambda v. \tag{42}$$

Z vlastnosti $0 \preceq X^1 \preceq I$ vyplýva, že $\lambda \in (0, 1]$.

Nech P je projekčná matica (Definícia 2.12) daná predpisom

$$P = \frac{vv^T}{v^T v}. \tag{43}$$

Potom môžeme maticu X^1 vyjadriť ako konvexnú kombináciu projekčnej matice P a nulovej matice:

$$X^1 = \lambda P + (1 - \lambda)0, \ \lambda \in (0, 1]. \tag{44}$$

Vďaka Leme 2.13, platí $tr(P) = rank(P)$, a teda platí aj $\varphi(P) = tr(P)$.

Z definície funkcie φ máme

$$\varphi(X^1) \geq tr(X^1) \tag{45}$$

a z definície konvexnosti pre $\lambda \in (0,1)$ dostaneme

$$\varphi(X^1) \leq \lambda\varphi(P) + (1-\lambda)\varphi(0) = \lambda tr(P) + (1-\lambda)0 = tr(\lambda P + (1-\lambda)0) = tr(X^1). \tag{46}$$

Z (45) a (46) potom vyplýva, že $\varphi(X^1) = tr(X^1)$.

Sformulujme teraz indukčný predpoklad nasledovne: Nech tvrdenie platí pre matice s hodnosťou menšou ako k, t.j.

$$\varphi(X^i) = tr(X^i),\ \forall i = 0, ..., k-1. \tag{47}$$

Ukážeme, že toto tvrdenie platí pre matice hodnosti k, teda že $\varphi(X^k) = tr(X^k)$.

Nech $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$ sú vlastné hodnoty matice X^k a $q_1, ..., q_n$ sú príslušné ortogonálne vlastné vektory matice X^k. Potom

$$X^k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i q_i^T = \lambda_1 q_1 q_1^T + \sum_{i=2}^{k} \lambda_i q_i q_i^T. \tag{48}$$

Keďže $0 \preceq X^k \preceq I$, tak $\lambda_1 \in (0,1]$ a maticu X^k vieme zapísať ako konvexnú kombináciu matice hodnosti 1 a matice hodnosti $k-1$ nasledovne

$$X^k = \lambda_1 q_1 q_1^T + (1-\lambda_1)\sum_{i=2}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} q_i q_i^T = \lambda_1 X^1 + (1-\lambda_1)X^{k-1}, \tag{49}$$

kde $X^1 = q_1 q_1^T$ a $X^{k-1} = \sum_{i=2}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} q_i q_i^T$.

Pre takto zapísateľnú maticu hodnosti k potom z konvexnosti funkcie φ, vďaka indukčnému predpokladu (47) a z linearity stopy (10) platí

$$\begin{aligned} \varphi(X^k) &= \varphi(\lambda_1 X^1 + (1-\lambda_1)X^{k-1}) \leq \lambda_1\varphi(X^1) + (1-\lambda_1)\varphi(X^{k-1}) \\ &= \lambda_1 tr(X^1) + (1-\lambda_1)tr(X^{k-1}) = tr(\lambda_1 X^1 + (1-\lambda_1)X^{k-1}) = tr(X^k) \end{aligned} \tag{50}$$

a z definície funkcie φ máme

$$\varphi(X^k) \geq tr(X^k). \tag{51}$$

Z (50) a (51) vyplýva, že $\varphi(X^k) = tr(X^k)$, čo sme chceli dokázať.

□

Tvrdenie 2.15 možno ešte rozšíriť pre širšiu triedu matíc, ako sa uvádza v Tvrdení 2.16.

Tvrdenie 2.16 (podľa [9]). *Konvexná obálka funkcie* $\Phi(X) = rank(X)$ *na množine*

$$\mathcal{U}_\alpha = \{X \in \mathbb{S}_+^n \mid 0 \preceq X \preceq \alpha I, \alpha \in \mathbb{N}\} \tag{52}$$

je $\frac{1}{\alpha}$*-násobok stopy matice* X*, t.j.*

$$\text{cenv } \Phi(\text{X}) = \frac{1}{\alpha}\text{tr}(\text{X}). \tag{53}$$

Dôkaz. Nech $X \in \mathcal{U}_\alpha$. Položme $Y = \frac{1}{\alpha}X$. Potom $Y \in \mathcal{U}_1$ a podľa Tvrdenia 2.15 platí

$$\text{cenv } \Phi(\text{Y}) = \text{tr}(\text{Y}) = \text{tr}\left(\frac{1}{\alpha}\text{X}\right). \tag{54}$$

Z linearity stopy v X (10) máme

$$tr\left(\frac{1}{\alpha}X\right) = \frac{1}{\alpha}tr(X). \tag{55}$$

Z (54) a (55) vyplýva

$$\text{cenv } \Phi(\text{Y}) = \frac{1}{\alpha}\text{tr}(\text{X}). \tag{56}$$

A keďže násobenie kladnou konštantou nemení hodnosť matice, platí $rank(X) = rank(Y)$, teda aj cenv Φ(X) = cenv Φ(Y) a dostávame

$$\text{cenv } \Phi(\text{X}) = \frac{1}{\alpha}\text{tr}(\text{X}), \tag{57}$$

čo sme chceli ukázať. □

Z predošlého Tvrdenia 2.16 prirodzene vyplýva, že pre $X \in \mathcal{U}_\alpha$ platí

$$tr(X) \leq \alpha\, rank(X). \tag{58}$$

Na overenie tohto vzťahu si stačí uvedomiť, že pre vlastné hodnoty matice $X \in \mathcal{U}_\alpha$ platí

$$\alpha \geq \lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n \geq 0. \tag{59}$$

Navyše hodnosť je rovná počtu nenulových vlastných hodnôt. Teda ak uvažujeme maticu hodnosti k, očividne platí

$$\alpha \geq \lambda_1 \geq ... \geq \lambda_k > 0 = \lambda_{k+1} = ... = \lambda_n. \tag{60}$$

Vzťah (58) by sme teda mohli prepísať na tvar

$$\lambda_1 + ... + \lambda_k \leq \alpha\, k. \tag{61}$$

Zo zápisu (61) je zrejmé, že daný vzťah platí, nakoľko je každá nenulová hodnota zhora ohraničená najvyššou možnou hodnotou, ktorú môže nadobúdať.

3 Heuristiky pre riešenie semidefinitných úloh prípustnosti s ohraničeniami na hodnosť

V tejto kapitole predstavíme niekoľko heuristík pre riešenie SDP úloh prípustnosti s ohraničením na hodnosť (3). Kvôli lepšej prehľadnosti uvádzame tvar tejto úlohy znova:

$$\begin{array}{ll} \underset{X\in\mathbb{S}^n}{\text{nájsť}} & X \\ & tr(A_iX) = b_i, \quad i = 1, ..., m, \\ & X \succeq 0, \\ & rank(X) \leq k. \end{array} \tag{3}$$

Jedným zo spôsobov na riešenie takýchto úloh je heuristika stopy. Tá bola pôvodne predstavená pre úlohu minimalizácie hodnosti, preto základnú myšlienku jej fungovania vysvetlíme najskôr pre takúto úlohu a následne ukážeme, ako ju možno využiť pri riešení úlohy (3). V podkapitole 3.3 ďalej predstavíme iteračný spôsob nahradenia ohraničenia na hodnosť a v podkapitolách 3.4 a 3.5 navrhneme nové heuristiky na riešenie tejto úlohy.

3.1 Heuristika stopy pre úlohu minimalizácie hodnosti

Úloha minimalizácie hodnosti sa uvádza ([9], [10]) v tvare:

$$\begin{array}{ll} min & rank(X) \\ & X \in \mathcal{C}, \\ & X \succeq 0, \end{array} \tag{62}$$

kde $X \in \mathbb{S}^n$ je maticová premenná a $\mathcal{C}$ je konvexná množina.

Úloha (62) je nekonvexná, keďže sa minimalizuje kvázikonkávna funkcia v X (Tvrdenie 2.1). Heuristika stopy spočíva v nahradení funkcie hodnosti v účelovej funkcii stopou matice. Rieši sa teda úloha v tvare:

$$\begin{array}{ll} min & tr(X) \\ & X \in \mathcal{C}, \\ & X \succeq 0, \end{array} \tag{63}$$

kde $X \in \mathbb{S}^n$ je maticová premenná a $\mathcal{C}$ je konvexná množina.

Heuristika stopy je veľmi populárna, nakoľko stopa matice je lineárna v X (Tvrdenie 2.4), preto je úloha (63) konvexná, a teda efektívne a spoľahlivo riešiteľná. Dôvod

fungovania tejto heuristiky možno vysvetliť viacerými spôsobmi. Na základe práce [9] sa pokúsime ozrejmiť niektoré z nich.

Na stopu matice X sa možno pozrieť ako na súčet jej vlastných hodnôt. Pre kladne semidefinitné matice zároveň platí

$$\lambda_i = |\lambda_i|, \ \forall i = 1, ..., n, \tag{64}$$

preto možno stopu zapísať ako l_1 normu vektora vlastných hodnôt:

$$tr(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(X) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(X)| = \|\lambda(X)\|_1. \tag{65}$$

Minimalizácia stopy potom zodpovedá minimalizácii l_1 normy vektora vlastných hodnôt. V tomto zmysle možno heuristiku stopy chápať ako l_1-regularizáciu, ktorej základnou vlastnosťou je, že optimálne riešenie obsahuje veľa nulových zložiek. A keďže nulové zložky tohto vektora znamenajú nulové vlastné hodnoty matice X a zároveň je X symetrická matica, tak veľké množstvo nulových vlastných hodnôt vedie k matici s nízkou hodnosťou.

Iný spôsob je pozrieť sa na stopu ako na konvexnú obálku funkcie hodnosti. Definíciu konvexnej obálky (Definícia 2.14) spolu s tvrdením, že stopa matice sa dá pre symetrické kladne semidefinitné matice interpretovať ako konvexná obálka hodnosti (Tvrdenie 2.15) sme uviedli v Kapitole 2.

Technika nahradenia nekonvexnej funkcie jej konvexnou obálkou nie je nová. V úlohách s nekonvexnou účelovou funkciou sa často zvykne táto funkcia nahrádzať jej konvexnou obálkou, ktorá slúži ako konvexná aproximácia a možno ju efektívne minimalizovať. Minimum konvexnej obálky potom možno vnímať ako dolné ohraničenie pre skutočné minimum. Ak teda p_1 je optimálna hodnota účelovej funkcie pôvodnej úlohy minimalizácie hodnosti (62), p_2 je optimálna hodnota účelovej funkcie heuristiky stopy (63) a $X \in \mathcal{U}_\alpha$, potom platí

$$p_1 \geq \frac{1}{\alpha} p_2. \tag{66}$$

Keďže stopa je konvexná obálka funkcie hodnosti nad množinou $\mathcal{U}_1$, je teda najtesnejšou dolnou aproximáciou funkcie hodnosti nad touto množinou a teda spomedzi všetkých konvexných aproximácií vedie k najtesnejšiemu globálnemu dolnému ohraničeniu hodnosti.

3.2 Heuristika stopy pre úlohu s ohraničením na hodnosť

Heuristiku stopy možno uplatniť aj pri semidefinitných úlohách, kde funkcia hodnosti nevystupuje v účelovej funkcii, ale v ohraničení. V tomto prípade spočíva heuristika stopy v nahradení ohraničenia na hodnosť v úlohe (3) regularizačným členom v účelovej funkcii, ktorým je stopa matice. Rieši sa tak úloha v tvare:

$$\begin{aligned} \min_{X \in \mathbb{S}^n} \quad & tr(X) \\ & tr(A_i X) \;=\; b_i, \quad i = 1, ..., m, \\ & X \;\succeq\; 0, \end{aligned} \tag{67}$$

kde $X \in \mathbb{S}^n$ je maticová premenná, $C, A_1, ..., A_m \in \mathbb{S}^n$ a $b \in \mathbb{R}^m$.

Výhodou tejto heuristiky je, že namiesto nekonvexnej úlohy (3) stačí riešiť úlohu SDP (67).

3.3 Konvexná iterácia

V tejto podkapitole opíšeme spôsob riešenia semidefinitnej úlohy prípustnosti s ohraničením na hodnosť (3), ktorý je uvedený v [6, §4.4]. Autor navrhuje v i-tej iterácii riešiť postupnosť týchto dvoch SDP úloh:

$$\begin{aligned} X_i^* = \operatorname*{argmin}_{X \in \mathbb{S}^n} \quad & tr(W_{i-1}^* X) \\ & X \;\in\; \mathcal{C}, \\ & X \;\succeq\; 0 \end{aligned} \tag{68}$$

a

$$\begin{aligned} W_i^* = \operatorname*{argmin}_{W \in \mathbb{S}^n} \quad & tr(W X_i^*) \\ & tr(W) \;=\; n - k, \\ & 0 \;\preceq\; W \preceq I, \end{aligned} \tag{69}$$

kde $\mathcal{C}$ je konvexná množina, W je tzv. smerová matica a k je požadovaná hodnosť riešenia.

V prvej iterácii sa v úlohe (68) zvykne voliť $W_0^* = 0$ alebo $W_0^* = I$, čím sa prvá iterácia stáva ekvivalentnou SDP relaxácii (1) resp. heuristike stopy (67). Do úlohy (69) tak vchádza matica X_i^* ako optimálne riešenie SDP relaxácie (1) resp. heuristiky stopy (67). V tomto zmysle možno konvexnú iteráciu vnímať ako snahu o vylepšenie vyššie uvedených postupov.

Všimnime si, že formulácia úlohy (69) je totožná s úlohou (34), a teda optimálna hodnota jej účelovej funkcie predstavuje súčet $n-k$ najmenších vlastných hodnôt matice X_i^*. Táto optimálna hodnota sa nadobúda pre maticu W_i^*, ktorá následne vstupuje do úlohy (68) v $(i+1)$-vej iterácii. V tejto úlohe sa tým pádom hľadajú také riešenia, aby v i-tej iterácii platilo, že ak X_i^* a W_i^* sú optimálne riešenia, tak

$$tr(W_1^* X_1^*) \geq tr(W_2^* X_2^*) \geq tr(W_3^* X_3^*) \geq ... \tag{70}$$

pričom tieto optimálne hodnoty účelových funkcií reprezentujú súčty $n-k$ najmenších vlastných hodnôt jednotlivých optimálnych riešení t.j.

$$\sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j(X_1^*) \geq \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j(X_2^*) \geq \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j(X_3^*) \geq ... \tag{71}$$

Prirodzenou snahou je získať v niektorej iterácii maticu X_i^* s nulovým súčtom jej $n-k$ najmenších vlastných hodnôt t.j.

$$tr(W_i^* X_i^*) = \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j(X_i^*) = 0, \tag{72}$$

čím by bola zaručená aj hodnosť matice X_i^* rovná nanajvýš k. Teoreticky by sa rovnosť (72) mala dosiahnuť vďaka platnosti vzťahu (71), avšak kvôli neostrým nerovnostiam v tomto vzťahu nie je konvergencia tejto metódy zaručená.

3.3.1 Úloha smerovej matice v konvexnej iterácii

Vyššie sme uviedli, že W je smerová matica a intuitívne sme vysvetlili jej úlohu v konvexnej iterácii. V tejto podkapitole sa pokúsime na základe knihy [6] priblížiť matematickú interpretáciu tejto matice.

Na úvod uveďme všeobecnú definíciu smerových matíc.

Definícia 3.1 (podľa [6, §4.4.1.1])**.** *Množinu smerových matíc definujeme ako konvexný obal vonkajších súčinov všetkých ortonormálnych matíc hodnosti $n-k$:*

$$conv\{UU^T \mid U \in \mathbb{R}^{n\times(n-k)}, U^T U = I_{n-k}\} \tag{73}$$

alebo ekvivalentne ako nasledovnú podmnožinu symetrických matíc:

$$\{A \in \mathbb{S}^n \mid 0 \preceq A \preceq I_n, tr(A) = n-k\}. \tag{74}$$

Ekvivalenciu množín (73) a (74) možno ukázať podobnými technikami, aké boli uvedené v dôkaze Tvrdenia 2.6. Matica W získaná ako optimálne riešenie úlohy (69) spĺňa definíciu smerovej matice (Definícia 3.1), pretože optimálna hodnota účelovej funkcie úlohy (69) zodpovedá súčtu $n-k$ najmenších vlastných hodnôt matice X, a teda platí

$$W = U^* U^{*T}, \tag{75}$$

kde $U^* = Q(:, k+1:n)$ a $X^* = Q\Lambda Q^T$.

Ak definujeme podpriestor symetrických matíc hodnosti nanajvýš k, ktorých nulový priestor obsahuje nulový priestor matice X^* ako

$$S_n = \{(I-W)X(I-W) \mid X \in \mathbb{S}^n\} = \{Y \in \mathbb{S}^n \mid \mathcal{N}(Y) \supseteq \mathcal{N}(X^*)\}, \tag{76}$$

tak projekcia X^* na S_n bude mať tvar $(I-W)X^*(I-W)$ a smer tejto projekcie je $-WX^*W$. Preto maticu $-W$ možno interpretovať ako maticu smerujúcu k množine S_n t.j. množine symetrických matíc hodnosti nanajvýš k.

3.4 Heuristiky s dodatočným ohraničením 1

Ako sme uviedli už v Kapitole 1, SDP relaxácia (1) vedie k riešeniu požadovanej hodnosti len zriedka. Heuristika stopy (67) zaručuje, že hodnosť riešenia bude nízka, ale nezabezpečí hodnosť rovnú nanajvýš k. Preto sme sa rozhodli pridať k SDP relaxácii a heuristike stopy dodatočné ohraničenie, ktoré bude nutnou a postačujúcou podmienkou pre hodnosť optimálneho riešenia rovnú nanajvýš k a to ohraničenie

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = tr(X). \tag{77}$$

Nutnosť a postačujúcosť tejto podmienky je ukázaná v Tvrdení 2.2.

SDP relaxáciu (1) teda upravíme nasledovne

$$\begin{array}{ll} \underset{X \in \mathbb{S}^n}{\text{nájsť}} & X \\ & \begin{aligned} tr(A_i X) &= b_i, \qquad i = 1, ..., m, \\ X &\succeq 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k &= tr(X). \end{aligned} \end{array} \tag{78}$$

Heuristiku stopy (67) prepíšeme na tvar

$$\begin{aligned} \min_{X\in\mathbb{S}^n} \quad & tr(X) \\ & tr(A_iX) = b_i, \qquad i = 1,...,m, \\ & X \succeq 0, \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = tr(X). \end{aligned} \tag{79}$$

Súčet k najväčších vlastných hodnôt matice X je síce konvexná funkcia (Tvrdenie 2.7a)), ale nie lineárna funkcia v X, preto úlohy (78) a (79) nie sú úlohami SDP, nakoľko ohraničenia takýchto úloh musia byť afinné. Keďže naším cieľom je vyjadriť úlohy (78) a (79) v tvare úlohy SDP, využijeme Tvrdenie 2.8 a súčet k najväčších vlastných hodnôt matice X vyjadríme ako SDP úlohu (28). Avšak v tomto prípade potrebujeme vyjadriť súčet k najväčších vlastných hodnôt neznámej maticovej premennej X a úloha (28) je nekonvexná v (X, U), preto tu nachádza uplatnenie duálna úloha (29), ktorá je úlohou SDP, aj keď za premennú považujeme maticu X, ktorej súčet vlastných hodnôt hľadáme.

Ohraničenie (77) teda vieme prepísať na tvar

$$\min_{z\in\mathbb{R},V\in\mathbb{S}^n} \{kz + tr(V) \mid zI + V \succeq X, V \succeq 0\} = tr(X). \tag{80}$$

3.4.1 Heuristika 1a

V heuristike stopy s dodatočným ohraničením (79) získame nahradením ohraničenia (77) ohraničením (80) bikriteriálnu úlohu SDP v tvare

$$\begin{aligned} \min_{X\in\mathbb{S}^n, z\in\mathbb{R}, V\in\mathbb{S}^n} \quad & tr(X) + \beta\,(kz + tr(V)) \\ & tr(A_iX) = b_i, \qquad i = 1,...,m, \\ & X \succeq 0, \\ & kz + tr(V) = tr(X), \\ & zI + V \succeq X, \\ & V \succeq 0, \end{aligned} \tag{81}$$

kde $\beta \in [0, \infty)$ je relatívna váha prislúchajúca SDP úlohe pre súčet k najväčších vlastných hodnôt matice X.

Bikriteriálna úloha (81) je skutočne SDP úlohou, pretože sme konvexný súčet k najväčších vlastných hodnôt nahradili afinnou funkciou $kz+tr(V)$. Až pri použití tejto heuristiky na riešenie konkrétnych úloh sa ukáže, aká hodnota relatívnej váhy v bikriteriálnej SDP úlohe (81) je najvhodnejšia.

3.4.2 Heuristika 1b

V SDP relaxácii s dodatočným ohraničením (78) získame nahradením ohraničenia (77) ohraničením (80) SDP úlohu v tvare

$$\begin{aligned} \min_{X\in\mathbb{S}^n, z\in\mathbb{R}, V\in\mathbb{S}^n} \quad & kz + tr(V) \\ tr(A_i X) &= b_i, \qquad i = 1, ..., m, \\ X &\succeq 0, \\ kz + tr(V) &= tr(X), \\ zI + V &\succeq X, \\ V &\succeq 0. \end{aligned} \tag{82}$$

3.5 Heuristiky s dodatočným ohraničením 2

K SDP relaxácii (1) a heuristike stopy (67) môžeme pridať aj iné dodatočné ohraničenie ako (77), ktoré bude nutnou a postačujúcou podmienkou pre hodnosť optimálneho riešenia rovnú nanajvýš k a to ohraničenie

$$\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} + ... + \lambda_n = 0. \tag{83}$$

Nutnosť a postačujúcosť tejto podmienky je ukázaná v Tvrdení 2.3.

SDP relaxáciu (1) teda upravíme na tvar

$$\begin{aligned} \text{nájsť}_{X\in\mathbb{S}^n} \quad & X \\ tr(A_i X) &= b_i, \quad i = 1, ..., m, \\ X &\succeq 0, \\ \lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} + ... + \lambda_n &= 0 \end{aligned} \tag{84}$$

a heuristiku stopy (67) upravíme takto

$$\begin{aligned} \min_{X\in\mathbb{S}^n} \quad & tr(X) \\ tr(A_i X) &= b_i, \quad i = 1, ..., m, \\ X &\succeq 0, \\ \lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} + ... + \lambda_n &= 0. \end{aligned} \tag{85}$$

Úlohy (84) a (85) opäť nie sú úlohami SDP, nakoľko ohraničenie (83) nie je afinné. Keďže chceme namiesto úloh (84) a (85) riešiť SDP úlohy, využijeme Tvrdenie 2.11 a súčet $n - k$ najmenších vlastných hodnôt matice X vyjadríme ako SDP úlohu (35).

Ohraničenie (83) potom môžeme prepísať na tvar

$$\max_{z\in\mathbb{R},V\in\mathbb{S}^n}\{-(n-k)z - tr(V) \mid zI + V \succeq -X, V \succeq 0\} = 0. \tag{86}$$

Vzhľadom na to, že narábame s nezápornými vlastnými hodnotami kladne semidefinitnej matice, môžeme namiesto ohraničenia (83) uvažovať ohraničenie

$$-(\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} + ... + \lambda_n) = 0, \tag{87}$$

ktoré možno ekvivalentne zapísať takto

$$\min_{z\in\mathbb{R},V\in\mathbb{S}^n}\{(n-k)z + tr(V) \mid zI + V \succeq -X, V \succeq 0\} = 0. \tag{88}$$

3.5.1 Heuristika 2a

Keď ohraničenie (83) v heuristike stopy s dodatočným ohraničením (85) nahradíme ohraničením (88), dostaneme bikriteriálnu úlohu SDP v tvare

$$\begin{aligned}
\min_{X\in\mathbb{S}^n,z\in\mathbb{R},V\in\mathbb{S}^n} \quad & tr(X) + \gamma\left((n-k)z + tr(V)\right) \\
tr(A_iX) &= b_i, \qquad i = 1, ..., m, \\
X &\succeq 0, \\
(n-k)z + tr(V) &= 0, \\
zI + V &\succeq -X, \\
V &\succeq 0,
\end{aligned} \tag{89}$$

kde $\gamma \in [0, \infty)$ je relatívna váha prislúchajúca SDP úlohe pre súčet $n-k$ najmenších vlastných hodnôt matice X. Ohraničenie

$$(n-k)z + tr(V) = 0, \tag{90}$$

ktoré reprezentuje súčet $n-k$ najmenších vlastných hodnôt maticovej premennej Z, môžeme z úlohy vylúčiť, nakoľko sa funkcia z ľavej strany ohraničenia minimalizuje v účelovej funkcii. A keďže sa jedná o súčet $n-k$ najmenších vlastných hodnôt kladne semidefinitnej matice, v optimálnom riešení by mala táto funkcia nadobúdať nulovú hodnotu.

Heuristika 2a tak nadobudne tvar takejto bikriteriálnej SDP úlohy

$$\begin{aligned} \min_{X\in\mathbb{S}^n, z\in\mathbb{R}, V\in\mathbb{S}^n} \quad & tr(X) + \gamma\left((n-k)z + tr(V)\right) \\ tr(A_i X) &= b_i, \qquad i = 1, ..., m, \\ X &\succeq 0, \\ zI + V &\succeq -X, \\ V &\succeq 0. \end{aligned} \tag{91}$$

3.5.2 Heuristika 2b

Keď ohraničenie (83) v SDP relaxácii s dodatočným ohraničením (84) nahradíme ohraničením (88), dostaneme SDP úlohu v tvare

$$\begin{aligned} \min_{X\in\mathbb{S}^n, z\in\mathbb{R}, V\in\mathbb{S}^n} \quad & (n-k)z + tr(V) \\ tr(A_i X) &= b_i, \qquad i = 1, ..., m, \\ X &\succeq 0, \\ (n-k)z + tr(V) &= 0, \\ zI + V &\succeq -X, \\ V &\succeq 0. \end{aligned} \tag{92}$$

Podobne ako v predchádzajúcej heuristike môžeme aj tu vypustiť ohraničenie (90) a riešiť tak SDP úlohu v tvare

$$\begin{aligned} \min_{X\in\mathbb{S}^n, z\in\mathbb{R}, V\in\mathbb{S}^n} \quad & (n-k)z + tr(V) \\ tr(A_i X) &= b_i, \qquad i = 1, ..., m, \\ X &\succeq 0, \\ zI + V &\succeq -X, \\ V &\succeq 0. \end{aligned} \tag{93}$$

4 Lokalizácia senzorov v bezdrôtovej sieti

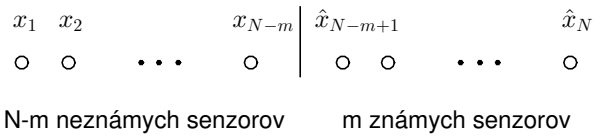
V poslednej dobe bol zaznamenaný nárast používania bezdrôtových senzorových sietí. Typická sieť pozostáva z obrovského množstva senzorov, ktoré sú rozmiestnené v určitej geografickej oblasti, sú schopné komunikovať s ostatnými senzormi v danej sieti a vhodne reagovať na prijaté signály. Väčšinou slúžia na monitorovanie prostredia a zhromažďovanie informácií, ako sú napríklad teplota, vlhkosť a hlasitosť, preto sú dáta získané senzormi relevantné len vtedy, keď poznáme pozície jednotlivých senzorov.

V tzv. lokalizačnom probléme sú spravidla známe len pozície niektorých senzorov a našou úlohou je nájsť pozície ostatných senzorov, pričom poznáme len niektoré medzisenzorové vzdialenosti. Pri predstavovaní problému budeme vychádzať z publikácií [3], [5], [6] a [7].

4.1 Formulácia lokalizačného problému

Majme sieť pozostávajúcu z N senzorov v priestore $\mathbb{R}^n$. Aby mala úloha zmysel, musí platiť: $0 < n < N$.

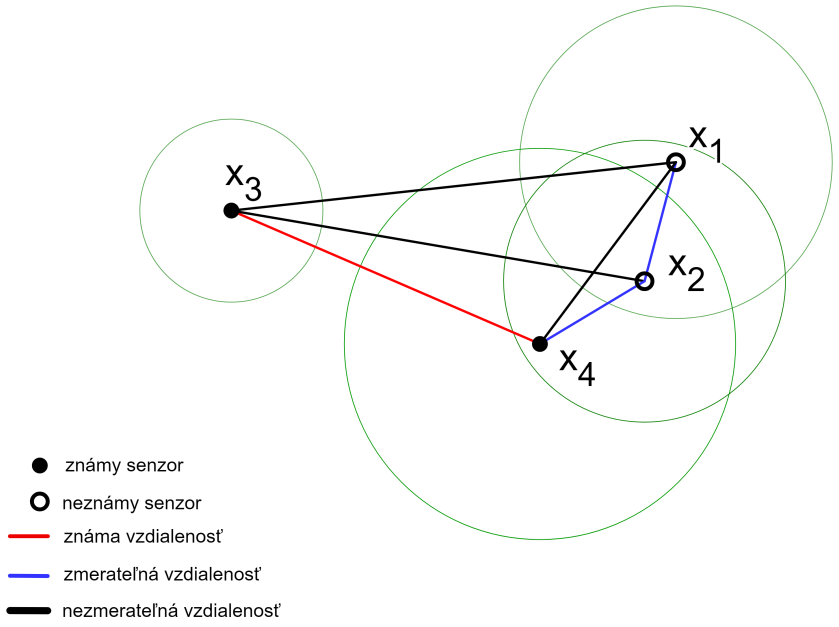
Predpokladajme, že poznáme pozície m senzorov a našou úlohou je nájsť pozície zvyšných $N - m$ neznámych senzorov. Indexovanie jednotlivých senzorov sme priblížili obrázkom Obr.3. Známe senzory budeme označovať strieškou ($\hat{x}_{N-m+1}$, ..., $\hat{x}_N$).



Obr. 3: *Indexovanie senzorov v rámci lokalizačného problému.*

V praxi nie je možné zmerať vzdialenosti medzi všetkými dvojicami senzorov x_i a x_j. Je to spôsobené tým, že každý senzor má len obmedzený dosah signálu, t.j. môže komunikovať len so senzormi, ktoré sa nachádzajú v jeho blízkosti. Na základe tejto skutočnosti budeme rozlišovať tri typy medzisenzorových vzdialeností:

- zmerateľná vzdialenosť – vzdialenosť medzi neznámym a známym/neznámym senzorom v rámci dosahu signálu,



Obr. 4: *Dosah signálu senzorov x_1, x_2, x_3 a x_4 a vyznačené medzisenzorové vzdialenosti.*

- nezmerateľná vzdialenosť – vzdialenosť medzi neznámym a známym/neznámym senzorom mimo dosahu signálu,
- známa vzdialenosť – vzdialenosť medzi dvomi známymi senzormi.

Tieto vzdialenosti sú objasnené obrázkom Obr.4.

Množinu všetkých dvojíc indexov, ktoré prislúchajú zmerateľným vzdialenostiam medzi senzormi označme $\mathcal{I}$ a nameranú štvorcovú vzdialenosť medzi senzormi x_i a x_j označme d_{ij}. Poznamenajme, že namerané štvorcové vzdialenosti d_{ij} sú prvkami tzv. euklidovskej matice (ozn. EDM), ktorá bude vstupovať do lokalizačného problému. Jej definíciu uvádzame nižšie.

Definícia 4.1 (podľa [6, str. 323])**.** *Pod pojmom euklidovská matica budeme rozumieť každú symetrickú maticu s nezápornými prvkami a nulami na diagonále, ktorej prvky predstavujú štvorcovú euklidovskú vzdialenosť medzi bodmi v $\mathbb{R}^n$ t.j.*

$$d_{ij} = \|x_i - x_j\|^2 = \langle x_i - x_j, x_i - x_j \rangle = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2x_i^T x_j. \tag{94}$$

Vzhľadom na to, že kvôli obmedzenému dosahu signálu jednotlivých senzorov v lokalizačnom probléme nemusíme poznať všetky medzisenzorové vzdialenosti, bude do riešenia

vstupovať EDM matica s chýbajúcimi prvkami. Z tohto pohľadu možno tento problém chápať aj ako analógiu s tzv. úlohami doplnenia matice (z angl. *matrix completion*).

Pozície senzorov $x_1, ..., x_{N-m}, \hat{x}_{N-m+1}, ..., \hat{x}_N$ budú odteraz predstavovať stĺpce matice X. Formuláciu úlohy nám uľahčí Gramova matica, ktorú možno definovať takto

$$G = X^T X = \begin{bmatrix} \|x_1\|^2 & x_1^T x_2 & x_1^T x_3 & \cdots & x_1^T x_N \\ x_2^T x_1 & \|x_2\|^2 & x_2^T x_3 & \cdots & x_2^T x_N \\ x_3^T x_1 & x_3^T x_2 & \|x_3\|^2 & \cdots & x_3^T x_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N^T x_1 & x_N^T x_2 & x_N^T x_3 & \cdots & \|x_N\|^2 \end{bmatrix}. \tag{95}$$

Vzhľadom na štruktúru Gramovej matice je zrejmé, že pomocou nej možno zapísať ohraničenia na zmerateľné a známe vzdialenosti medzi senzormi.

Nech e_i je i-ty vektor štandardnej bázy $\mathbb{R}^N$. Potom využijúc vzťah (94) vieme vyjadriť štvorcovú vzdialenosť d_{ij} pre každú dvojicu indexov $(i, j) \in \mathcal{I}$ pomocou prvkov matice G nasledovne

$$d_{ij} = G_{ii} + G_{jj} - 2G_{ij} = \left\langle G, (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T \right\rangle. \tag{96}$$

Ďalej pridáme požiadavky na diagonálne prvky matice G, ktoré prislúchajú dĺžkam pozícií známych senzorov:

$$\|\hat{x}_i\|^2 = e_i^T G e_i = tr\left(G e_i e_i^T\right) = \left\langle G, e_i e_i^T \right\rangle, \quad i = N - m + 1, ..., N, \tag{97}$$

pričom $G e_i e_i^T$ je $N \times N$ matica s jediným nenulovým prvkom $\|\hat{x}_i\|^2$ na pozícii (i, i).

Vzdialenosť medzi známymi senzormi $\hat{x}_i$ a $\hat{x}_j$ vyjadríme pomocou matice G takto

$$\hat{x}_i^T \hat{x}_j = \frac{1}{2}\hat{x}_i^T \hat{x}_j + \frac{1}{2}\hat{x}_i^T \hat{x}_j = tr\left(G\,\frac{e_i e_j^T + e_j e_i^T}{2}\right) = \left\langle G, \frac{e_i e_j^T + e_j e_i^T}{2} \right\rangle, \tag{98}$$

kde $G\,\frac{e_i e_j^T + e_j e_i^T}{2}$ je matica, ktorej diagonálu tvorí vektor

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \frac{1}{2}\hat{x}_i^T \hat{x}_j & \cdots & \frac{1}{2}\hat{x}_i^T \hat{x}_j & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Do úlohy zahrnieme aj podmienku, že $(N - m + 1)$-vý až N-tý stĺpec matice X tvoria známe pozície senzorov $\hat{x}_{N-m+1}, ..., \hat{x}_N$, čo môžeme matlabovskou symbolikou zapísať nasledovne:

$$X(:, N - m + 1 : N) = \begin{bmatrix} \hat{x}_{N-m+1} & ... & \hat{x}_N \end{bmatrix}. \tag{99}$$

Dostávame teda úlohu prípustnosti v tvare

$$\begin{array}{rcl} \underset{G\in\mathbb{S}^N, X\in\mathbb{R}^{n\times N}}{\text{nájsť}} \quad X & & \\ \langle G, (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T\rangle & = & d_{ij}, \quad \forall (i,j) \in \mathcal{I}, \\ \langle G, e_i e_i^T\rangle & = & \|\hat{x}_i\|^2, \quad i = N-m+1, ..., N, \\ \langle G, (e_i e_j^T + e_j e_i^T)\frac{1}{2}\rangle & = & \hat{x}_i^T \hat{x}_j, \quad i<j, i, j \in \{N-m+1, ..., N\}, \\ X(:, N-m+1:N) & = & \left[\begin{array}{ccc} \hat{x}_{N-m+1} & ... & \hat{x}_N \end{array}\right], \\ G & = & X^T X. \end{array} \tag{100}$$

Naším cieľom je formulácia lokalizačného problému v tvare konvexnej úlohy, preto je potrebné, aby všetky ohraničenia príslušnej úlohy boli konvexné. Úloha (100) nie je úlohou konvexného programovania, lebo $G = X^T X$ nie je konvexným ohraničením. Preto sa budeme musieť s týmto ohraničením nejako vysporiadať.

Ohraničenie $G = X^T X$ možno ekvivalentne nahradiť ohraničením na kladnú semidefinitnosť symetrickej blokovej matice $Z = \begin{bmatrix} I_n & X \\ X^T & G \end{bmatrix}$ a ohraničením na hodnosť tejto matice, o čom hovorí Tvrdenie A.1.3. Po aplikácii tohto tvrdenia získame nový tvar úlohy prípustnosti

$$\begin{array}{rcl} \underset{G\in\mathbb{S}^N, X\in\mathbb{R}^{n\times N}}{\text{nájsť}} \quad X & & \\ \langle G, (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T\rangle & = & d_{ij}, \quad \forall (i,j) \in \mathcal{I}, \\ \langle G, e_i e_i^T\rangle & = & \|\hat{x}_i\|^2, \quad i = N-m+1, ..., N, \\ \langle G, (e_i e_j^T + e_j e_i^T)\frac{1}{2}\rangle & = & \hat{x}_i^T \hat{x}_j, \quad i<j = N-m+1, ..., N, \\ X(:, N-m+1:N) & = & \left[\begin{array}{ccc} \hat{x}_{N-m+1} & ... & \hat{x}_N \end{array}\right], \\ Z = \begin{bmatrix} I & X \\ X^T & G \end{bmatrix} & \succeq & 0, \\ rank(Z) & = & n. \end{array} \tag{101}$$

Úloha (101) je formuláciou lokalizačného problému a má tvar semidefinitnej úlohy prípustnosti s ohraničením na hodnosť (3).

4.2 Štandardný tvar úlohy

Niektoré z postupov riešenia lokalizačného problému vyžadujú, aby úloha bola v štandardnom tvare (3). To znamená, že všetky ohraničenia úlohy (101) s výnimkou ohraničenia na

hodnosť a kladnú semidefinitnosť matice Z treba preformulovať do tvaru $tr(A_i Z) = b_i$, kde $A_i \in \mathbb{S}^n$ a $b_i \in \mathbb{R}$ pre $i = 1, ..., m$.

Najprv sa pozrime na ohraničenie

$$\langle G, (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T \rangle = d_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{I}. \tag{102}$$

Využijeme, že pre $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí $tr(AB) = \langle A, B \rangle$ a máme ohraničenie v tvare

$$tr\left((e_i - e_j)(e_i - e_j)^T G\right) = d_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{I}. \tag{103}$$

Keďže matica G je súčasťou blokovej matice Z, stačí jednoduchá úprava ohraničenia (103) a dostaneme ohraničenie v požadovanom tvare

$$tr\left(\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & 0_{n\times N} \\ 0_{N\times n} & (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n\times n} & X_{n\times N} \\ X_{N\times n}^T & G_{N\times N} \end{bmatrix}\right) = d_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{I}. \tag{104}$$

Analogickým postupom prepíšeme ohraničenie

$$\langle G, e_i e_i^T \rangle = \|\hat{x}_i\|^2, \quad i = N - m + 1, ..., N \tag{105}$$

do tvaru

$$tr\left(\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & 0_{n\times N} \\ 0_{N\times n} & e_i e_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n\times n} & X_{n\times N} \\ X_{N\times n}^T & G_{N\times N} \end{bmatrix}\right) = \|\hat{x}_i\|^2, \quad i = N - m + 1, ..., N \tag{106}$$

a ohraničenie

$$\langle G, (e_i e_j^T + e_j e_i^T)\frac{1}{2} \rangle = \hat{x}_i^T \hat{x}_j, \;\; i<j = N - m + 1, ..., N \tag{107}$$

do tvaru

$$tr\left(\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & 0_{n\times N} \\ 0_{N\times n} & (e_i e_j^T + e_j e_i^T)\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n\times n} & X_{n\times N} \\ X_{N\times n}^T & G_{N\times N} \end{bmatrix}\right) = \hat{x}_i^T \hat{x}_j, \;\; i<j = N-m+1, ..., N\}. \tag{108}$$

Posledné ohraničenie

$$X(:, N - m + 1 : N) = \begin{bmatrix} \hat{x}_{N-m+1} & ... & \hat{x}_N \end{bmatrix} \tag{109}$$

je potrebné prepísať na viacero ohraničení, ktoré budú zadávať jednotlivé prvky matice X, ktorá sa vyskytuje v dvoch blokoch matice Z. Prvok symetrickej matice Z vytiahneme podobným spôsobom ako v prípade ohraničenia (98).

Nech teraz $e_i \in \mathbb{R}^{n+N}$ a $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{N-m+1} & ... & \hat{x}_N \end{bmatrix}$. Potom ohraničenie (109) vieme prepísať na tvar

$$tr\left(\left[(e_i e_j^T + e_j e_i^T)\tfrac{1}{2}\right]\begin{bmatrix} I_{n\times n} & X_{n\times N} \\ X_{N\times n}^T & G_{N\times N}\end{bmatrix}\right) = \hat{X}(j, i-N+m-n), \tag{110}$$

kde $j = 1, ..., n$, $i = n+N-m+1, ..., n+N$ a $\hat{X}(j, i-N+m-n)$ je príslušný prvok danej matice.

Teraz, keď využijeme ohraničenia v tvaroch (104), (106), (108) a (110), dostaneme lokalizačný problém v štandardnom tvare semidefinitnej úlohy prípustnosti s ohraničením na hodnosť:

$$\begin{aligned}
\underset{G\in\mathbb{S}^N, X\in\mathbb{R}^{n\times N}}{\text{nájsť}} \quad & Z \\
tr\left(\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & 0_{n\times N} \\ 0_{N\times n} & (e_i-e_j)(e_i-e_j)^T\end{bmatrix} Z\right) &= d_{ij}, \quad \forall (i,j) \in \mathcal{I}, \\
tr\left(\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & 0_{n\times N} \\ 0_{N\times n} & e_i e_i^T\end{bmatrix} Z\right) &= \|\hat{x}_i\|^2, \quad i = N-m+1, ..., N, \\
tr\left(\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & 0_{n\times N} \\ 0_{N\times n} & (e_i e_j^T + e_j e_i^T)\frac{1}{2}\end{bmatrix} Z\right) &= \hat{x}_i^T \hat{x}_j, \quad i<j = N-m+1, ..., N, \\
tr\left(\left(e_i e_j^T + e_j e_i^T\right)\tfrac{1}{2} Z\right) &= \hat{X}(j, i-N+m-n), \quad j = 1, ..., n, \\
& \qquad i = n+N-m+1, ..., n+N, \\
Z = \begin{bmatrix} I & X \\ X^T & G\end{bmatrix} &\succeq 0, \\
rank(Z) &= n.
\end{aligned} \tag{111}$$

4.3 Formulácia heuristík pre lokalizačný problém

Cieľom tejto podkapitoly je uviesť formulácie jednotlivých heuristík pre lokalizačný problém a priradiť im pomenovanie, ktoré sprehľadní ich porovnávanie v ďalšej časti práce.

Keďže vo všetkých postupoch riešenia budeme, prirodzene, pracovať s tými istými ohraničeniami lokalizačného problému, zavedieme kvôli prehľadnosti zápisov optimalizač-

ných úloh nasledovné označenie

$$\mathcal{G} = \Bigg\{ X \in \mathbb{R}^{n\times N}, G \in \mathbb{S}^N \;\Bigg|\; \langle G, (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T \rangle = d_{ij}, \quad \forall (i,j) \in \mathcal{I},$$
$$\langle G, e_i e_i^T \rangle = \|\hat{x}_i\|^2, \;\; i = N-m+1, ..., N,$$
$$\langle G, (e_i e_j^T + e_j e_i^T)\frac{1}{2} \rangle = \hat{x}_i^T \hat{x}_j, \;\; i<j = N-m+1, ..., N\},$$
$$X(:, N-m+1:N) = \begin{bmatrix} \hat{x}_{N-m+1} & ... & \hat{x}_N \end{bmatrix} \Bigg\}. \tag{112}$$

SDP relaxácia

Ako sme uviedli v Kapitole 1, SDP relaxácia semidefinitnej úlohy s ohraničením na hodnosť spočíva vo vynechaní ohraničenia na hodnosť a riešení SDP úlohy (1).

Pre lokalizačný problém (101) teda SDP relaxácia vyzerá takto

$$\begin{aligned} \min_{Z,G,X} \quad & 0 \\ & (G,X) \in \mathcal{G}, \\ & Z = \begin{bmatrix} I & X \\ X^T & G \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned} \tag{113}$$

Heuristika stopy

Heuristika stopy (67) aplikovaná na lokalizačný problém bude mať tvar

$$\begin{aligned} \min_{Z,G,X} \quad & tr\, Z \\ & (G,X) \in \mathcal{G}, \\ & Z = \begin{bmatrix} I & X \\ X^T & G \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned} \tag{114}$$

Poznamenajme, že pre SDP relaxáciu a heuristiku stopy poznáme aj štandardný tvar týchto úloh, kde namiesto ohraničení $(G,X) \in \mathcal{G}$ vystupujú ohraničenia (104), (106), (108) a (110).

Konvexná iterácia

Konvexná iterácia pre lokalizačný problém, sformulovaná podľa (68) a (69), rieši v i-tej iterácii postupnosť týchto SDP úloh:

$$\begin{aligned} Z_i^* = \underset{Z}{\operatorname{argmin}} \quad & tr(W_{i-1}^* Z) \\ & (G, X) \in \mathcal{G}, \\ & Z = \begin{bmatrix} I & X \\ X^T & G \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned} \tag{115}$$

a

$$\begin{aligned} W_i^* = \underset{W}{argmin} \quad & tr(W Z_i^*) \\ & tr(W) = N, \\ & 0 \preceq W \preceq I, \end{aligned} \tag{116}$$

pričom v prvej iterácii volíme $W_0^* = I$, teda úloha (115) je identická s Heuristikou stopy (114) alebo $W_0^* = 0$ a úloha (115) je identická s SDP relaxáciou (113). Úloha (116) v každej iterácii hľadá súčet N najmenších vlastných hodnôt matice $Z_i^* \in \mathbb{S}_+^{N+n}$.

Heuristika 1a

Heuristika 1a (81) aplikovaná na lokalizačný problém má tvar

$$\begin{aligned} \min_{Z,G,X,V,z} \quad & tr\ Z + \beta(nz + tr(V)) \\ & (G, X) \in \mathcal{G}, \\ & Z = \begin{bmatrix} I & X \\ X^T & G \end{bmatrix} \succeq 0, \\ & nz + tr(V) = tr(Z), \\ & zI + V \succeq Z, \\ & V \succeq 0, \end{aligned} \tag{117}$$

kde $\beta \in [0, \infty)$ je relatívna váha a n je požadovaná hodnosť riešenia. Voľbou vhodnej relatívnej váhy β sa budeme zaoberať pri samotnom riešení lokalizačného problému v nasledujúcich podkapitolách.

Heuristika 1b

Heuristika 1b (82) je pre lokalizačný problém identická s Heuristikou 1a (117) až na účelovú funkciu, v ktorej vynecháme stopu matice a dostaneme SDP úlohu

$$\begin{aligned} \min_{Z,G,X,V,z} \quad & nz + tr(V) \\ & (G,X) \in \mathcal{G}, \\ & Z = \begin{bmatrix} I & X \\ X^T & G \end{bmatrix} \succeq 0, \\ & nz + tr(V) = tr(Z), \\ & zI + V \succeq Z, \\ & V \succeq 0, \end{aligned} \tag{118}$$

kde n je požadovaná hodnosť matice Z.

Pri implementácii Heuristiky 1a (117) a Heuristiky 1b (118) sa ukázalo byť výhodné zapísať ohraničenia v takomto kompaktnejšom tvare:

$$\begin{aligned} (G,X) &\in \mathcal{G}, \\ nz + tr(V) &= tr(Z), \\ zI + V &\succeq Z, \\ \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} &\succeq 0. \end{aligned} \tag{119}$$

Heuristika 2a

Heuristika 2a (91) aplikovaná na lokalizačný problém má tvar takejto semidefinitnej bikriteriálnej úlohy

$$\begin{aligned} \min_{Z,G,X,V,z} \quad & tr\, Z + \gamma(Nz + tr(V)) \\ & (G,X) \in \mathcal{G}, \\ & Z = \begin{bmatrix} I & X \\ X^T & G \end{bmatrix} \succeq 0, \\ & zI + V + X \succeq 0, \\ & V \succeq 0, \end{aligned} \tag{120}$$

kde $Z \in \mathbb{S}^{n+N}$, n je požadovaná hodnosť riešenia, N je počet všetkých senzorov v sieti a $\gamma \in [0, \infty)$ je relatívna váha, ktorej voľbou sa budeme zaoberať pri samotnom riešení lokalizačného problému.

Heuristika 2b

Heuristika 2b (93) je pre lokalizačný problém identická s Heuristikou 2a (117) až na účelovú funkciu, v ktorej vynecháme stopu matice a dostaneme SDP úlohu

$$\begin{aligned} \min_{Z,G,X,V,z} \quad & Nz + tr(V) \\ & (G, X) \in \mathcal{G}, \\ & Z = \begin{bmatrix} I & X \\ X^T & G \end{bmatrix} \succeq 0, \\ & zI + V + X \succeq 0, \\ & V \succeq 0, \end{aligned} \tag{121}$$

kde $Z \in \mathbb{S}^{n+N}$, n je požadovaná hodnosť riešenia a N je počet všetkých senzorov v sieti.

5 Lokalizácia mobilných telefónov

Mobilný telefón je zdroj signálu, preto ho môžeme lokalizovať vzhľadom na známu polohu vysielačov mobilného signálu. Vzdialenosť mobilného telefónu od vysielača sa určí na základe sily signálu. Tá bežne podlieha mnohým vplyvom, ako je odraz signálu, hornatý povrch, či rôzne bariéry. V rovinatej oblasti môžeme tieto faktory zanedbať, teda sa predpokladá, že od sily signálu možno odvodiť presnú vzdialenosť medzi objektami. Na druhej strane, v hornatej či zastavanej oblasti tieto faktory zanedbať nemôžeme. Do úlohy teda bude vstupovať akýsi ruch, ktorý bráni určeniu presných vzdialeností medzi objektami.

Okrem ruchu ovplyvňuje riešenie lokalizačného problému aj obmedzený dosah signálu. V praxi to znamená, že poznáme len vzdialenosti medzi objektami, ktoré ležia v rámci dosahu svojich signálov (pozri §4.1). EDM matica vstupujúca do úlohy teda nie je kompletná, čím sa redukuje počet ohraničení na zmerateľné vzdialenosti.

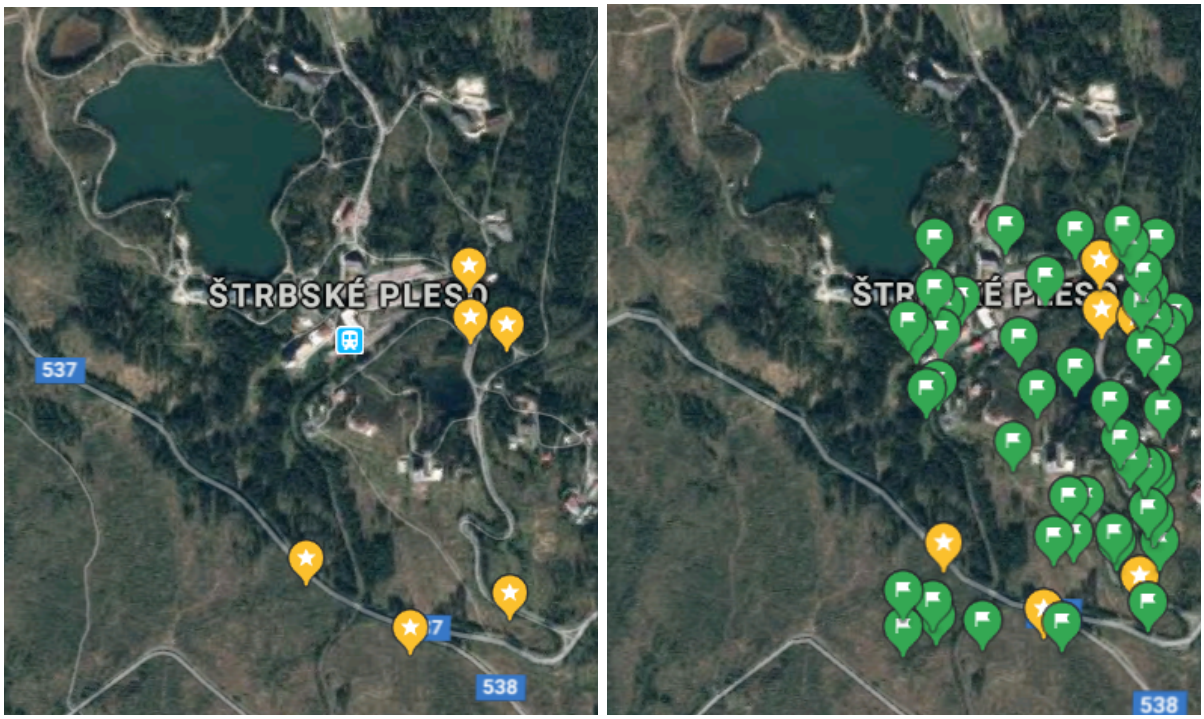
Donedávna sa na riešenie takéhoto lokalizačného problému využívala tzv. *multilaterácia*, teda tento problém sa riešil algebraicky pomocou najmenších štvorcov a hyperbolických rovníc. Pri GPS lokalizácii zase nachádzajú uplatnenie numerické interpolačné metódy ako napr. inverzné vzdialenosti (z angl. *inverse distance*). Na mieste je teda otázka, prečo vznikla potreba riešenia lokalizačného problému pomocou semidefinitného programovania.

Podľa viacerých autorov ([3], [6]) je lokalizácia pomocou semidefinitného programovania užitočná najmä v prípadoch, keď do úlohy vstupuje ruch alebo keď nepoznáme všetky vzdialenosti. Tu možno spomenúť, že riešenie lokalizačného problému pre obrovské siete senzorov spočíva v ich rozdelení na akési podsiete. Riešia sa teda subproblémy, ktoré by v konečnom dôsledku mali viesť k celkovému optimálnemu riešeniu (viď [2],[5]). Vzhľadom na komplexnosť takýchto riešení sa budeme zaoberať len malými sieťami, ktorých riešenie pomerne efektívne dokážeme nájsť pomocou solvera CVX v MATLABe aj na bežnom počítači. Zdrojové kódy sú dostupné na stránke [23].

5.1 Príklad

Budeme pracovať so sadou polôh vysielačov mobilného signálu na Slovensku, ktoré sme stiahli zo stránky [22]. Polohy daných vysielačov sú jednoznačne určené ich zemepisnou

dĺžkou a zemepisnou šírkou ($n = 2$). Vzhľadom na časovú náročnosť riešenia SDP úlohy s veľkým počtom ohraničení využitím solvera CVX sa obmedzíme len na určitú oblasť, konkrétne na okolie Štrbského plesa. V tejto oblasti sa budeme snažiť na základe poznania polôh šiestich ($m = 6$) vysielačov určiť polohy päťdesiatich ($N - m = 50$) mobilných telefónov náhodne rozmiestnených v ich okolí. Pre lepšiu predstavu daného problému sme na obrázkoch Obr.5 žltými hviezdičkami vyznačili polohy vysielačov a zelenými štítkami polohy mobilných telefónov.



Obr. 5: Mapa okolia Štrbského Plesa. Žltými hviezdičkami sú vyznačené polohy vysielačov mobilného signálu, zelenými štítkami polohy mobilných telefónov. Zdroj: Google Maps.

Chceme riešiť lokalizačný problém, ktorý sme v Kapitole 4 sformulovali do tvaru úlohy (101). Táto úloha je semidefinitnou úlohou prípustnosti s ohraničením na hodnosť (3), preto pri jej riešení môžeme uplatniť postupy predstavené v prvej a tretej kapitole a sformulované v časti 4.3. Jednotlivé postupy budeme porovnávať vzhľadom na hodnosť, presnosť a časovú náročnosť riešenia. Dodajme, že pod riešením budeme rozumieť blokovú maticu Z, z ktorej možno získať maticu X obsahujúcu hľadané pozície mobilných telefónov a zároveň chceme, aby jej hodnosť bola rovná 2.

Keďže matica Z je symetrická a kladne semidefinitná, budeme jej hodnosť určovať ako počet jej nenulových vlastných hodnôt. Je však otázne, aké malé musia byť vlastné

hodnoty, aby sme ich považovali za nulové. Preto sa pri riešení úloh pozrieme aj na to, ako zvolená tolerancia ovplyvní numerickú hodnosť riešenia.

Nakoľko skutočné pozície mobilných telefónov poznáme, budeme za mieru kvality výsledku považovať nielen samotnú hodnosť riešenia, ale aj súčet absolútnych odchýlok pozícií senzorov nájdených daným algoritmom od ich skutočných pozícií a maximálnu z týchto odchýlok. Kvôli lepšej interpretácii budeme tieto odchýlky udávať v jednotkách dĺžky, pričom využijeme, že v našich zemepisných šírkach predstavuje 1° zemepisnej dĺžky približne 85.39km a 1° zemepisnej šírky približne 111.03km.

Aby sme sa presvedčili o veľkosti SDP úloh, ktoré budeme riešiť, vyčíslime počet lineárnych ohraničení SDP relaxácie a Heuristiky stopy v štandardnom tvare (111) pre lokalizačný problém bez ruchových faktorov, uvažujúc neobmedzený dosah signálu mobilných telefónov aj vysielačov. V ostatných heuristikách s dodatočnými ohraničeniami bude, samozrejme, vystupovať o niekoľko ohraničení viac. Podrobnejšie sa však nimi zaoberať nebudeme. Nakoľko v popísanom lokalizačnom probléme považujeme všetky vzdialenosti za zmerateľné, EDM matica, ktorá vstupuje do úlohy, bude kompletná, čo predstavuje $\frac{N(N-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} = 1525$ ohraničení na zmerateľné vzdialenosti. Ohraničení na dĺžky známych polôh je $m = 6$, ohraničení na vzdialenosti medzi známymi senzormi $\frac{m(m-1)}{2} = 15$ a ohraničení zadávajúcich prvky známych polôh vysielačov $n * m = 12$. Dokopy je to 1558 lineárnych ohraničení a dimenzia priestoru $\mathbb{S}^{N+n}$ pre premennú Z je $\frac{N(N+1)}{2} = 1711$.

Daný lokalizačný problém budeme najskôr riešiť za predpokladu, že do úlohy nevstupuje ruch, neskôr sa pozrieme aj na to, ako jednotlivé postupy riešenia ovplyvní prítomnosť ruchu. V oboch prípadoch budeme zároveň uvažovať rôzne dosahy signálu, aby sme otestovali citlivosť jednotlivých heuristík na množstvo chýbajúcich informácií o vzdialenosti.

Obmedzený dosah signálu spôsobí, že všetky objekty v sieti nie sú schopné zachytávať svoje signály, preto budeme za zmerateľné považovať len vzdialenosti medzi tými objektami, ktoré ležia v rámci dosahu svojich signálov. Budeme predpokladať, že všetky objekty v mobilnej sieti majú dosah signálu rovnaký. Najskôr budeme uvažovať sieť mobilných telefónov a vysielačov s neobmedzeným dosahom signálu, teda všetky vzájomné vzdialenosti budú zmerateľné. V ďalšom prípade bude dosah signálu $R = 0.0075°$, čo v našich zemepisných šírkach predstavuje zhruba 750 metrov a nakoniec tento dosah zmenšíme ešte o tretinu na 500 metrov, čomu zodpovedá dosah $R = 0.005°$.

Pri päťstometrovom dosahu signálu budeme namiesto 1525 vzájomných vzdialeností medzi mobilnými telefónmi a vysielačmi poznať len 627 z nich, čo predstavuje 41.11% týchto vzájomných vzdialeností, čím sa značne zníži počet ohraničení na zmerateľné vzdialenosti. Budeme teda pracovať s menším množstvom informácií o vzdialenosti, a teda sa úloha stane náročnejšou. V prípade dosahu 750 metrov už bude známych až 1059 týchto vzájomných vzdialeností, čo predstavuje 69.74%, teda sa počet ohraničení na zmerateľné vzdialenosti výrazne priblíži prípadu, kedy sú známe všetky vzdialenosti.

Poznamenajme, že pri obmedzenom dosahu signálu sa predpokladá, že každému hľadanému mobilnému telefónu bude prislúchať aspoň jedna zmerateľná vzdialenosť. Navyše v prípade, kedy poznáme všetky vzdialenosti medzi objektami v priestore a v úlohe nie je prítomný ruch, bez problémov fungujú aj zaužívané postupy.

5.1.1 Zanedbanie ruchu

Už vieme, že pri zanedbaní ruchu budeme všetky zmerateľné vzdialenosti považovať za presné a množstvo zmerateľných vzdialností bude závisieť od dosahu signálu.

V Tabuľke 1 uvádzame hodnosti riešení získaných jednotlivými postupmi. Nakoľko hodnosť určujeme ako počet nenulových vlastných hodnôt, táto tabuľka obsahuje hodnosti týchto riešení v prípadoch, keď za nulové považujeme vlastné hodnoty menšie ako 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}, 10^{-10} alebo 10^{-11}. Môžeme si všimnúť, ako so sprísňovaním tejto hodnoty podľa očakávania rastie hodnosť daného riešenia.

Keďže naším cieľom je dosiahnutie riešenia s hodnosťou 2, za lepšie budeme považovať tie postupy, ktoré vedú k takémuto riešeniu, aj pri prísnejšej tolerancii na nulové vlastné hodnoty. Pri neobmedzenom a sedemstopäťdesiatmetrovom dosahu signálu sa najlepšími javia byť SDP relaxácia (113), Heuristika 2a (120) a Heuristika 2b (121). Nakoľko SDP relaxácia (113) poskytuje riešenie hodnosti 2 aj pri relatívne prísnych toleranciách, mohlo by sa zdať, že nemá zmysel hľadať nové postupy riešenia semidefinitných úloh s ohraničeniami na hodnosť. Avšak pri malom dosahu signálu, kedy bolo známych len zhruba 40% vzájomných vzdialeností sa ukázalo, že SDP relaxácia (113) sa nedokáže vysporiadať s veľkým množstvom nezmerateľných vzdialeností. Tu sa ukázala sila Heuristiky 2a (120) a Heuristiky 2b (121), ktoré aj pri veľkom množstve chýbajúcich informácií o vzdialenosti poskytovali podobne kvalitné výsledky ako v prípade poznania všetkých vzdialeností.

Úloha	Dosah	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}
SDP relaxácia (113)	∞	2	2	2	2	3	4	56
Heuristika stopy (114)	∞	2	2	3	4	6	6	57
Konvexná iterácia (115), (116)	∞	✓	✓	✓	✓	2(2)	×	×
Heuristika 1a (117)	∞	2	2	2	3	4	6	56
Heuristika 1b (118)	∞	2	2	3	4	6	6	56
Heuristika 2a (120)	∞	2	2	2	2	2	2	55
Heuristika 2b (121)	∞	2	2	2	2	2	3	56
SDP relaxácia (113)	750m	2	2	2	2	2	4	56
Heuristika stopy (114)	750m	2	2	2	4	8	37	56
Konvexná iterácia (115), (116)	750m	✓	✓	✓	✓	✓	×	×
Heuristika 1a (117)	750m	2	4	6	28	48	51	58
Heuristika 1b (118)	750m	2	4	6	21	46	50	58
Heuristika 2a (120)	750m	2	2	2	2	3	6	54
Heuristika 2b (121)	750m	2	2	2	2	3	5	55
SDP relaxácia (113)	500m	50	57	57	58	58	58	58
Heuristika stopy (114)	500m	57	57	58	58	58	58	58
Konvexná iterácia (115), (116)	500m	×	×	×	×	×	×	×
Heuristika 1a (117)	500m	4	8	31	50	54	56	58
Heuristika 1b (118)	500m	4	7	28	47	54	56	58
Heuristika 2a (120)	500m	2	2	2	2	3	7	57
Heuristika 2b (121)	500m	2	2	2	2	3	6	56

Tabuľka 1: Hodnosti riešení získaných danými postupmi pre rôzne tolerancie na nulové vlastné hodnoty. Uvažujeme rôzne dosahy signálov (∞, 750m, 500m) pri zanedbaní ruchu. Pri Konvexnej iterácii symbol ✓značí, že táto metóda nebola potrebná. V zátvorke za hodnosťou uvádzame počet iterácií, po koľkých sme riešenie požadovanej hodnosti dosiahli a symbolom × vyjadrujeme, že v prvých 30 iteráciách sa riešenie požadovanej hodnosti nedosiahlo.

Keď sa v Tabuľke 1 zameriame na riadky prislúchajúce Konvexnej iterácii (115), (116), môžeme si všimnúť, že v prípadoch, kedy samotná SDP relaxácia (113) alebo Heuristika stopy (114) viedla k riešeniu hodnosti 2, Konvexná iterácia (115), (116) nebola potrebná.

Keď však tieto postupy k riešeniu hodnosti 2 neviedli, uspela Konvexná iterácia (115), (116) len v jedinom prípade pri poznaní všetkých zmerateľných vzdialeností, keď sme za nulové pokladali vlastné hodnoty menšie ako 10^{-9}. Vo všetkých ostatných prípadoch táto metóda v prvých 30 iteráciách nekonvergovala k riešeniu požadovanej hodnosti.

V Tabuľke 2 sme sa pozreli na správanie hodnosti optimálneho riešenia X_i^* a optimálnej hodnoty účelovej funkcie $tr(W_i^* X_i^*)$ v prvých deviatich iteráciách pri voľbe $W_0 = 0$, kde sa v prvej iterácii riešila SDP relaxácia (113) pri dosahu signálu 500m. Ukázalo sa, že tieto hodnoty nemusia mať klesajúci trend, čím sme vyvrátili predpoklad (70), ktorým bolo odôvodnené fungovanie Konvexnej iterácie (115), (116). Je teda zrejmé, že konvergencia tejto metódy k riešeniu požadovanej hodnosti nie je vždy zaručená.

iterácia i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$rank(X_i^*)$	58	57	57	58	57	57	57	57	57
$tr(W_i^* X_i^*)$	0.0025	0.0022	0.0023	0.0022	0.0023	0.0022	0.0024	0.0023	0.0023

Tabuľka 2: Prvých 9 iterácií Konvexnej iterácie (115), (116) pre $W_0 = 0$ pri dosahu signálu 500m, keď za nulové považujeme vlastné hodnoty menšie ako 10^{-8}.

Pre Heuristiku 1a (117) a Heuristiku 2a (120) bolo potrebné určiť optimálne hodnoty relatívnych váh β a γ. Tieto hodnoty sme určili osobitne pre každý uvažovaný dosah signálu, pričom sme vybrali spomedzi niekoľkých hodnôt vypísaných v Tabuľke 3 tak, aby Heuristika 1a (117) resp. Heuristika 2a (120) viedla k riešeniu čo najnižšej hodnosti. V prípade, že viacero hodnôt relatívnej váhy β resp. γ vedie k rovnakej hodnosti, za lepšie považujeme to, ktoré poskytuje menšiu maximálnu absolútnu odchýlku získaného riešenia od toho skutočného. V tomto prípade sme teda volili $\beta = 0.25$ a $\gamma = 0.25$ pri neobmedzenom dosahu signálu, $\beta = 0.5$ a $\gamma = 1.75$ pri dosahu signálu 750m a $\beta = 2$ a $\gamma = 2$ pri dosahu signálu 500m. Pri Heuristike 1a (117) si možno všimnúť, ako aj malá zmena relatívnej váhy výrazne ovplyvnila hodnosť riešenia. Navyše pre každú úlohu je optimálnou iná hodnota relatívnej váhy β resp. γ. Preto nie je možné zvoliť takú relatívnu váhu, ktorá by bola optimálnou pre každú úlohu.

Optimálne hodnoty relatívnych váh boli určené len spomedzi hodnôt $\{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2\}$. Nie je teda zaručené, že pre hodnotu relatívnej váhy zvolenú mimo

tejto množiny by Heuristika 1a (117) alebo Heuristika 2a (120) neviedla k lepšiemu riešeniu. Hľadanie optimálnej váhy tak robí tieto úlohy neefektívnymi.

V Tabuľke 1 boli pri Heuristike 1a (117) a Heuristike 2a (120) vypísané hodnosti riešení získaných riešením úloh s optimálnymi hodnotami týchto relatívnych váh. Tie boli určené pre každú toleranciu osobitne.

$\beta \setminus \gamma$	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
Hodnosť pre 1a	4	3	6	4	4	4	4	4	4
Hodnosť pre 1a, dosah 750m	30	15	4	18	10	39	6	5	28
Hodnosť pre 1a, dosah 500m	50	51	50	50	50	50	51	50	50
Hodnosť pre 2a	4	2	2	2	2	2	2	2	2
Hodnosť pre 2a, dosah 750m	2	2	2	3	2	2	2	2	2
Hodnosť pre 2a, dosah 500m	9	4	9	7	5	2	4	4	2

Tabuľka 3: Voľba optimálnych relatívnych váh β pre Heuristiku 1a (117) a γ pre Heuristiku 2a (120) pri riešení lokalizácie mobilných telefónov s neobmedzeným dosahom signálu bez prítomnosti ruchu, keď za nulové považujeme vlastné hodnoty menšie ako 10^{-8}.

V Tabuľke 4 uvádzame porovnanie jednotlivých heuristík pri rôznych dosahoch signálu, zanedbávajúc ruch. Pri určovaní hodnosti sme tu pokladali vlastné hodnoty menšie ako 10^{-8} za nulové. Môžeme si všimnúť, že Heuristika stopy (114), Heuristiky 1a (117) a Heuristika 1b (118) aj pri poznaní všetkých vzájomných vzdialeností viedli k výraznejším odchýlkam ako ostatné postupy, avšak aj odchýlky na úrovni niekoľkých centimetrov možno v mnohých situáciách považovať za relatívne presné, hoci ostatné heuristiky, ktoré poskytujú odchýlky pod jeden milimeter, sú určite presnejšie.

Heuristika stopy (114), ktorá bola navrhnutá tak, aby minimalizovala hodnosť riešenia, zlyhala, nakoľko vo všetkých prípadoch poskytovala riešenie vyššej, či nanajvýš rovnakej hodnosti ako SDP relaxácia (113). Takže myšlienka zníženia hodnosti prevzatá z heuristiky stopy pre úlohu minimalizácie hodnosti pri semidefinitnej úlohe s ohraničením na hodnosť nezafungovala.

Úloha	Dosah signálu	Hodnosť	Max. abs. odchýlka (m)	Súčet abs. odchýlok (m)	Čas (s)
SDP relaxácia (113)	∞	2	4.7017×10^{-4}	6.4943×10^{-4}	9.90
	750m	2	3.1439×10^{-4}	4.0579×10^{-4}	8.35
	500m	58	309.3	573.7	19.74
Heuristika stopy (114)	∞	4	9.0406×10^{-2}	1.1837×10^{-1}	10.37
	750m	4	3.8877×10^{-2}	5.2590×10^{-2}	9.13
	500m	58	1334.2	2124.5	6.27
Konvexná iterácia (115), (116)	∞	✓			
	750m	✓			
	500m	×			
Heuristika 1a (117) pre $\beta = 0.25$	∞	3	6.1166×10^{-3}	7.8471×10^{-3}	17.79
pre $\beta = 0.5$	750m	4	7.4944×10^{-2}	1.0102×10^{-1}	20.82
pre $\beta = 2$	500m	50	58.9	88.4	21.75
Heuristika 1b (118)	∞	4	4.8310×10^{-2}	6.2102×10^{-2}	18.40
	750m	21	1.8	2.4	20.78
	500m	47	52.2	76.2	20.42
Heuristika 2a (120) pre $\gamma = 0.25$	∞	2	2.2262×10^{-5}	2.8859×10^{-5}	16.35
pre $\gamma = 1.75$	750m	2	1.8863×10^{-4}	2.3808×10^{-4}	18.61
pre $\gamma = 2$	500m	2	3.8335×10^{-3}	4.4468×10^{-3}	21.09
Heuristika 2b (121)	∞	2	5.5426×10^{-5}	7.1097×10^{-5}	16.88
	750m	2	1.2563×10^{-3}	1.6179×10^{-3}	17.71
	500m	2	2.3477×10^{-3}	2.8342×10^{-3}	20.27

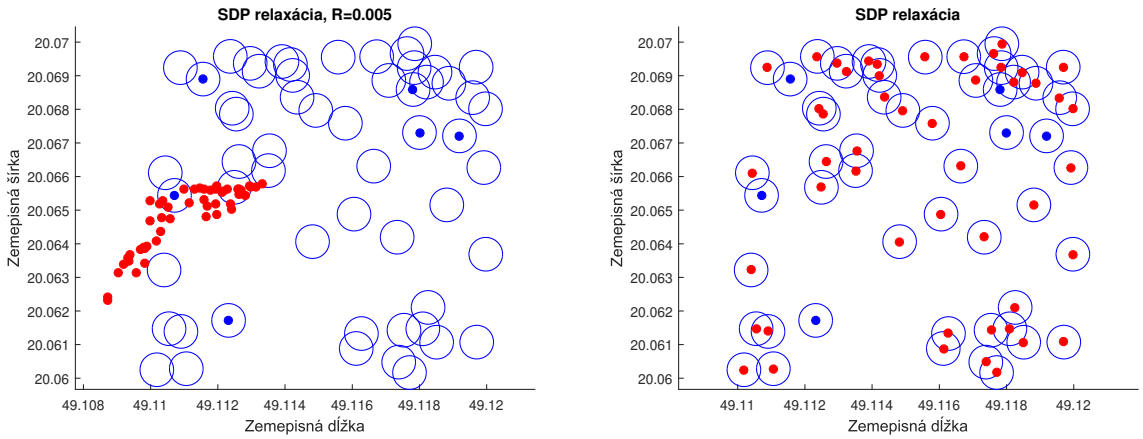
Tabuľka 4: Porovnanie riešení lokalizácie mobilných telefónov pri zanedbaní ruchu, uvažujúc neobmedzený dosah signálu (∞), dosah signálu 750m a 500m. Pri určovaní hodnosti považujeme vlastné hodnoty menšie ako 10^{-8} za nulové. Pri Konvexnej iterácii symbol ✓značí, že táto metóda nebola potrebná a symbolom × vyjadrujeme, že v prvých 30 iteráciách sa riešenie požadovanej hodnosti nedosiahlo.

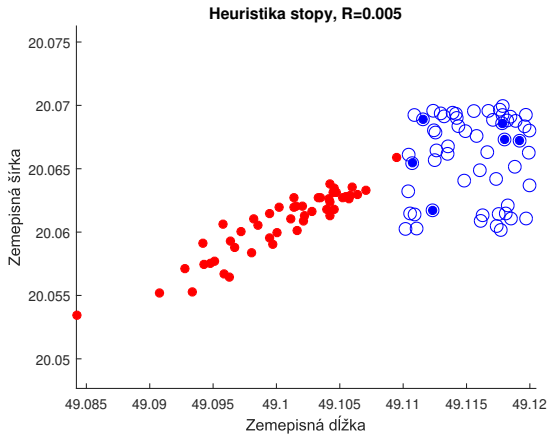
Z Tabuľky 4 zároveň vidno, že lepšie výsledky dávajú tie navrhnuté heuristiky, v ktorých vystupuje ohraničenie na súčet N najmenších vlastných hodnôt matice rovný nule (83), teda Heuristika 2a (120) a Heuristika 2b (121). Tu sa ukázalo, že dve ekvivalentné

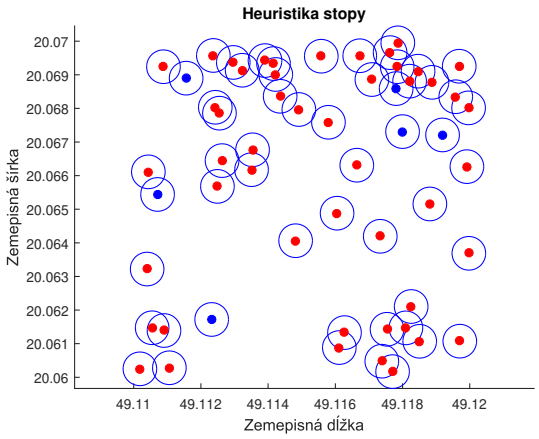
ohraničenia nemusia viesť k rovnakým výsledkom. Pripomeňme, že v Heuristike 1a (117) a Heuristike 1b (118) vystupuje ohraničenie na súčet n najväčších vlastných hodnôt matice rovný stope tejto matice (77). Rozdielnosť poskytnutých výsledkov môže byť spôsobená matlabovskou numerikou, nakoľko konštanta na pravej strane ohraničenia (77) nám umožnila toto ohraničenie z úlohy vypustiť, ako uvádzame v časti 3.5.1.

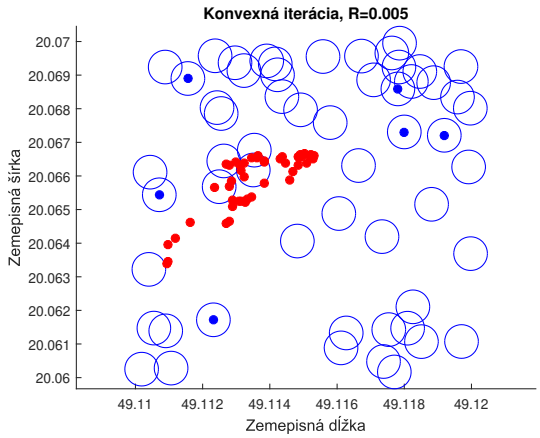
Tabuľka 4 obsahuje aj čas, za ktorý solver CVX vyrieši príslušnú semidefinitnú úlohu. Najrýchlejšie dospejú k riešeniu SDP relaxácia (113) a Heuristika stopy (114), avšak tie nie vždy poskytujú dostatočne presné riešenie. Navrhnuté heuristiky sú približne na rovnakej úrovni časovej náročnosti. Trvajú síce o čosi dlhšie ako spomínaná SDP relaxácia (113) a Heuristika stopy (114), čo je spôsobené prítomnosťou viacerých dodatočných ohraničení, ale niektoré z týchto heuristík vedú k uspokojivejším výsledkom. Dodajme, že pri Heuristike 1a (117) a Heuristike 2a (120) uvádzame v Tabuľke 13 trvanie riešenia bikriteriálnej SDP úlohy pre optimálnu hodnotu relatívnej váhy. V týchto časoch teda nie je zahrnuté trvanie riešenia úloh za účelom voľby týchto optimálnych relatívnych váh.

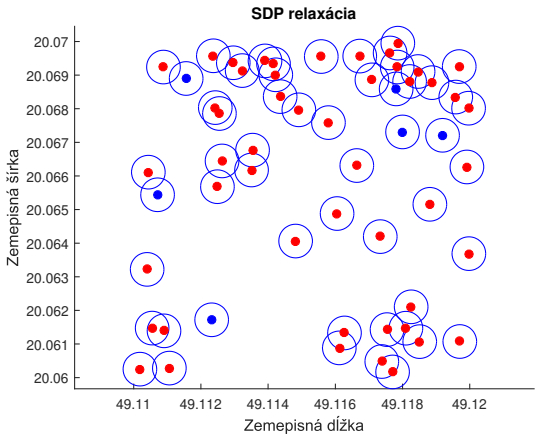
Nielen v Tabuľke 4, ale aj na obrázkoch Obr.6 si možno všimnúť, ako veľmi riešenie závisí od dosahu signálu, teda od množstva zmerateľných vzdialeností. Najinvariantnejšie vzhľadom na chýbajúce údaje o vzdialenosti sú Heuristika 2a (120) a Heuristika 2b (121), ktoré ako jediné viedli k presnému riešeniu aj pri malom dosahu signálu. Pri neobmedzenom dosahu signálu (Obr.6 obrázky napravo) sa javia byť všetky riešenia presné, čo je spôsobené zvolenou mierkou. Keďže modré krúžky predstavujú odchýlku 50 metrov od skutočnej polohy, ani pri Heuristike stopy (114) a Heuristike 1b (118), ktoré viedli k najväčším odchýlkam, tieto odchýlky nepozorujeme, nakoľko majú najviac pár centimetrov.

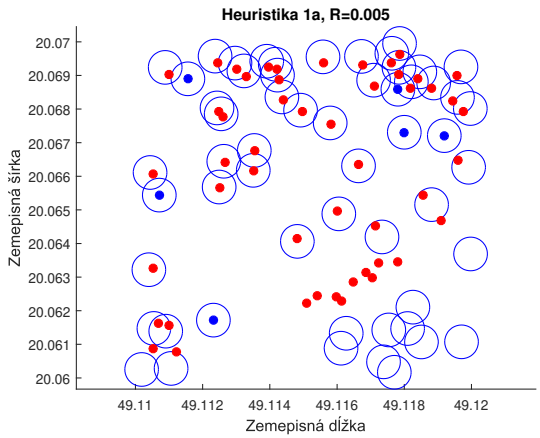


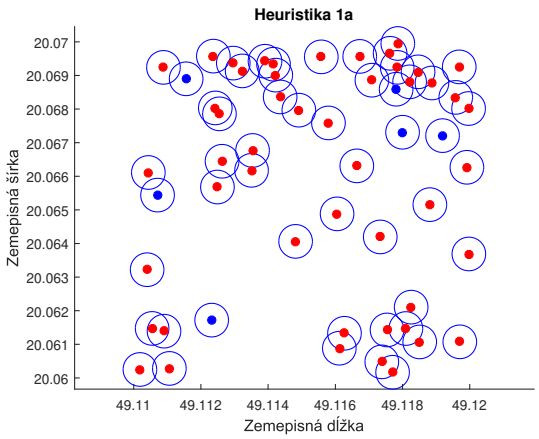

Heuristika stopy, R=0.005
Zemepisná šírka
Zemepisná dĺžka

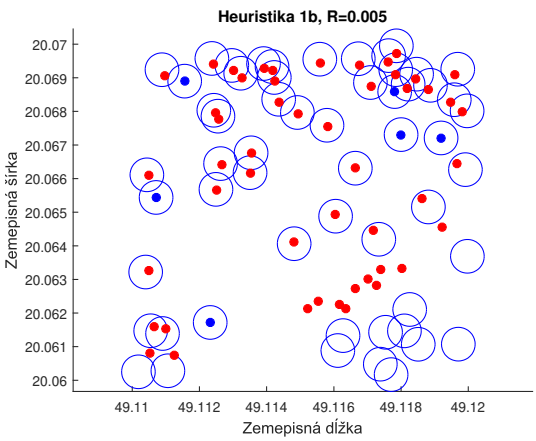

Heuristika stopy
Zemepisná šírka
Zemepisná dĺžka

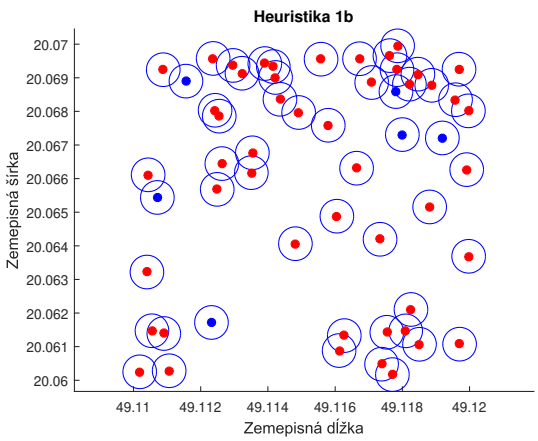

Konvexná iterácia, R=0.005
Zemepisná šírka
Zemepisná dĺžka

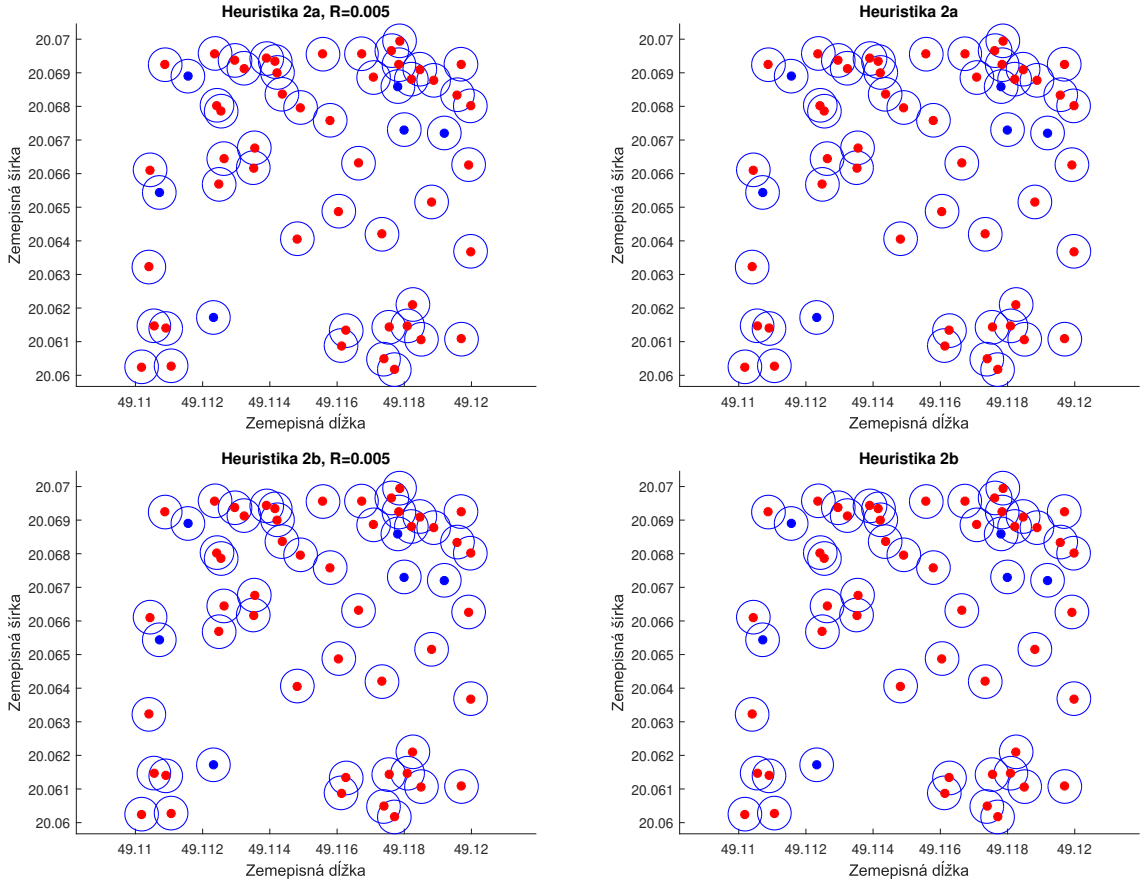

SDP relaxácia
Zemepisná šírka
Zemepisná dĺžka


Heuristika 1a, R=0.005
Zemepisná šírka
Zemepisná dĺžka


Heuristika 1a
Zemepisná šírka
Zemepisná dĺžka


Heuristika 1b, R=0.005
Zemepisná šírka
Zemepisná dĺžka


Heuristika 1b
Zemepisná šírka
Zemepisná dĺžka



Obr. 6: Porovnanie riešení lokalizácie mobilných telefónov pri zanedbaní ruchu, uvažujúc dosah signálu 500m (obrázky naľavo) a neobmedzený dosah (obrázky napravo). Modré prázdne krúžky predstavujú vzdialenosť 50 metrov od skutočných pozícií, modrou sú zvýraznené pozície vysielačov a červenou pozície mobilných telefónov nájdené SDP relaxáciou (113), Heuristikou stopy (114), Konvexnou iteráciou (115), (116), Heuristikou 1a (117), Heuristikou 1b (118), Heuristikou 2a (120) a Heuristikou 2b (121). Menšie ako metrové odchýlky na obrázkoch pri zvolenej mierke nepozorujeme, preto sa väčšina riešení javí byť presná.

5.1.2 Prítomnosť ruchu

Keď do úlohy zahrnieme aj ruchové faktory, kontúry vysielaného signálu už v dvojrozmernom priestore nebudú kruhy, ako tomu bolo pri lokalizácii senzorov v Kapitole 4 na obrázku Obr.4, ale elipsy rôznej orientácie a excentricity. Existencia ruchu navyše znemožňuje určenie presnej vzdialenosti mobilného telefónu od vysielača aj mobilných telefónov medzi sebou, preto budeme poznať len akúsi hornú a dolnú hranicu týchto vzdialeností.

Hornú a dolnú hranicu štvorcovej vzdialenosti medzi bodmi x_i a x_j budeme simulovať

pomocou náhodnej premennej U z rovnomerného rozdelenia na intervale $(0, 1)$ takto:

$$\overline{d_{ij}} = d_{ij} + \eta U, \tag{122}$$

$$\underline{d_{ij}} = d_{ij} - \eta U, \tag{123}$$

kde symbolom $\overline{d_{ij}}$ značíme hornú hranicu zmerateľnej vzdialenosti, symbolom $\underline{d_{ij}}$ dolnú hranicu zmerateľnej vzdialenosti, d_{ij} je skutočná štvorcová zmerateľná vzdialenosť a η je ruchový faktor, ktorý budeme voliť rovný 0.001, čím dosiahneme nanajvýš stometrové odchýlky hornej resp. dolnej hranice od skutočnej vzdialenosti.

Formulácia lokalizačného problému (101) sa teraz zmení nasledovne

$$\begin{aligned}
\underset{G\in\mathbb{S}^N, X\in\mathbb{R}^{n\times N}}{\text{nájsť}} \quad & X \\
\underline{d_{ij}} \le \langle G, (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T \rangle \quad &\le \quad \overline{d_{ij}}, \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{I}, \\
\langle G, e_i e_i^T \rangle \quad &= \quad \|\hat{x}_i\|^2, \quad i = N-m+1, ..., N, \\
\langle G, (e_i e_j^T + e_j e_i^T)\tfrac{1}{2} \rangle \quad &= \quad \hat{x}_i^T \hat{x}_j, \quad i<j = N-m+1, ..., N, \\
X(:, N-m+1:N) \quad &= \quad \begin{bmatrix} \hat{x}_{N-m+1} & ... & \hat{x}_N \end{bmatrix}, \\
Z = \begin{bmatrix} I & X \\ X^T & G \end{bmatrix} \quad &\succeq \quad 0, \\
rank(Z) \quad &= \quad n,
\end{aligned} \tag{124}$$

pričom zmena nastala len v prvom ohraničení, kde namiesto rovnosti vystupujú dve nerovnosti. K takejto zmene dôjde aj v príslušných tvaroch heuristík.

Podobne ako v prípade zanedbania ruchu, aj tu sa najskôr pozrieme na závislosť hodnosti riešenia určenej ako počet nenulových vlastných hodnôt, keď za nulové považujeme vlastné hodnoty, ktoré sú pod určitou hodnotou. Tieto hodnosti uvádzame v Tabuľke 5. Možno si všimnúť, že prítomnosť ruchu len mierne zhorší riešenia získané danými postupmi. Z navrhnutých heuristík sú stále najlepšie Heuristika 2a (120) a Heuristika 2b (121). Pri dostatočnom dosahu signálu funguje celkom dobre aj SDP relaxácia (113).

Najviac pomohol ruch Konvexnej iterácii (115), (116), ktorá vo viacerých prípadoch znížila hodnosť riešenia získaného SDP relaxáciou (113) alebo Heuristikou stopy (114). Keď sme však považovali za nulové až príliš malé vlastné hodnoty, Konvexná iterácia (115), (116) si vyžadovala veľké množstvo iterácií. My sme sa pozreli len na konvergenciu k riešeniu požadovanej hodnosti v rámci prvých 30 iterácií. Príliš veľký počet iterácií robí totiž túto metódu neefektívnou.

Úloha	Dosah	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}
SDP relaxácia (113)	∞	2	2	2	3	6	24	54
Heuristika stopy (114)	∞	2	2	2	3	9	43	57
Konvexná iterácia (115), (116)	∞	✓	✓	✓	2(4)	2(15)	×	×
Heuristika 1a (117)	∞	2	2	3	4	8	42	58
Heuristika 1b (118)	∞	2	2	4	8	52	57	58
Heuristika 2a (120)	∞	2	2	2	3	6	28	56
Heuristika 2b (121)	∞	2	2	2	3	5	27	56
SDP relaxácia (113)	750m	2	2	2	4	7	30	56
Heuristika stopy (114)	750m	2	2	3	7	38	55	58
Konvexná iterácia (115), (116)	750m	✓	✓	✓	2(2)	×	×	×
Heuristika 1a (117)	750m	2	2	3	5	13	52	57
Heuristika 1b (118)	750m	2	4	6	33	54	56	58
Heuristika 2a (120)	750m	2	2	2	5	14	53	58
Heuristika 2b (121)	750m	2	2	3	4	8	23	54
SDP relaxácia (113)	500m	52	57	57	58	58	58	58
Heuristika stopy (114)	500m	57	57	57	58	58	58	58
Konvexná iterácia (115), (116)	500m	✓	✓	2(2)	2(3)	2(21)	×	×
Heuristika 1a (117)	500m	4	10	35	51	56	58	58
Heuristika 1b (118)	500m	3	4	6	22	48	57	58
Heuristika 2a (120)	500m	2	2	3	6	14	49	57
Heuristika 2b (121)	500m	2	2	2	4	13	42	56

Tabuľka 5: Hodnosti riešení získaných danými postupmi pre rôzne tolerancie na nulové vlastné hodnoty. Uvažujeme rôzne dosahy signálov (∞, 750m, 500m) za prítomnosti ruchu. Pri Konvexnej iterácii symbol ✓značí, že táto metóda nebola potrebná, v zátvorke za hodnosťou uvádzame počet iterácií, po koľkých sme riešenie požadovanej hodnosti dosiahli a symbolom × vyjadrujeme, že v prvých 30 iteráciách sa riešenie požadovanej hodnosti nedosiahlo.

Lepšie fungovanie Konvexnej iterácie (115),(116) za prítomnosti ruchu je pravdepodobne zapríčinené prítomnosťou nerovností v ohraničení na zmerateľné vzdialenosti vo formulácii úlohy (124).

V Tabuľke 6 je zachytené správanie sa hodnosti optimálneho riešenia a optimálnej hodnoty účelovej funkcie pre každú iteráciu Konvexnej iterácie (115), (116) po dosiahnutie požadovanej hodnosti. Tentoraz sme volili $W_0 = I$, vychádzali sme teda z riešenia Heuristiky stopy (114) za prítomnosti ruchu pre dosah signálu 500m. Tu už vzťah (70) platí s ostrými nerovnosťami, preto je konvergencia Konvexnej iterácie (115), (116) k riešeniu požadovanej hodnosti zaručená.

iterácia i	1	2	3
$rank(X_i^*)$	58	3	2
$tr(W_i^* X_i^*)$	2.114×10^{-2}	3.726×10^{-8}	4.947×10^{-9}

Tabuľka 6: Všetky iterácie Konvexnej iterácie (115), (116) po dosiahnutie riešenia požadovanej hodnosti, uvažujúc dosah 500m za prítomnosti ruchu.

Aj za prítomnosti ruchu sme v Heuristike 1a (117) a v Heuristike 2a (120) určovali optimálne hodnoty relatívnych váh β a γ. V Tabuľke 7 sú spísané hodnosti riešení pre jednotlivé hodnoty týchto váh. Možno si tu zároveň všimnúť, ako zvyšujúce sa množstvo informácií o vzdialenosti znižuje hodnosť. Za prítomnosti ruchu to však nie je pravidlo, čo sa ukazuje napríklad pri Heuristike 1a (117) pre relatívnu váhu 0.75.

$\beta\backslash\gamma$	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
Hodnosť pre 1a	4	5	8	23	4	14	6	4	30
Hodnosť pre 1a, dosah 750m	41	5	24	20	5	39	25	26	38
Hodnosť pre 1a, dosah 500m	49	51	51	51	49	49	50	38	50
Hodnosť pre 2a	3	5	4	3	3	3	3	5	3
Hodnosť pre 2a, dosah 750m	41	5	24	20	5	39	25	26	38
Hodnosť pre 2a, dosah 500m	49	51	51	51	49	49	50	38	50

Tabuľka 7: Voľba optimálnych relatívnych váh β pre Heuristiku 1a (117) a γ pre Heuristiku 2a (120) pri riešení lokalizácie mobilných telefónov s obmedzeným dosahom signálu za prítomnosti ruchu, keď za nulu považujme hodnotu 10^{-8}.

V Tabuľke 8 ponúkame náhľad na riešenia jednotlivých heuristík za prítomnosti ruchu, keď za nulové považujeme vlastné hodnoty menšie ako 10^{-8}.

Úloha	Dosah signálu	Hodnosť (iterácie)	Max. abs. odchýlka (m)	Súčet abs. odchýlok (m)	Čas (s)
SDP relaxácia (113)	∞	3	2.5804×10^{-2}	3.3167×10^{-2}	14.74
	750m	4	4.8998×10^{-2}	6.1097×10^{-2}	11.43
	500m	58	321.4	575.9	36.35
Heuristika stopy (114)	∞	3	3.7031×10^{-2}	4.6926×10^{-2}	16.77
	750m	7	1.2373×10^{-1}	1.5873×10^{-1}	13.18
	500m	58	925.5	1506.9	8.29
Konvexná iterácia (115), (115)	∞	2 (4)	1.9666×10^{-2}	2.4522×10^{-2}	72.98
	750m	2 (2)	1.2532×10^{-2}	1.6694×10^{-2}	36.23
	500m	2 (3)	2.3579×10^{-2}	2.8991×10^{-2}	49.44
Heuristika 1a (117) pre $\beta = 0$	∞	4	5.7890×10^{-2}	8.2831×10^{-2}	47.91
pre $\beta = 0.25$	750m	5	1.3698×10^{-1}	2.0104×10^{-1}	40.10
pre $\beta = 1.75$	500m	38	28.6	37.1	32.02
Heuristika 1b (118)	∞	8	3.7052×10^{-1}	4.9779×10^{-1}	36.72
	750m	33	2.1	2.9	30.20
	500m	22	6.8	9.1	32.43
Heuristika 2a (120) pre $\gamma = 0$	∞	3	2.7103×10^{-2}	3.3943×10^{-2}	36.72
pre $\gamma = 0.25$	750m	4	3.7877×10^{-2}	6.1336×10^{-2}	42.56
pre $\gamma = 1.75$	500m	6	1.6063×10^{-1}	2.2282×10^{-1}	30.29
Heuristika 2b (121)	∞	3	3.1051×10^{-2}	4.3861×10^{-2}	34.17
	750m	4	7.8285×10^{-2}	1.0704×10^{-1}	29.72
	500m	4	4.9903×10^{-1}	6.5534×10^{-1}	31.27

Tabuľka 8: Porovnanie riešení lokalizácie mobilných telefónov pri zanedbaní ruchu, uvažujúc neobmedzený dosah signálu (∞), dosah signálu 750m a 500m. Pri určovaní hodnosti považujeme vlastné hodnoty menšie ako 10^{-8} za nulové. Pri Konvexnej iterácii v zátvorke za hodnosťou uvádzame počet iterácií, po koľkých sa dosiahlo riešenie požadovanej hodnosti.

Keď porovnáme Tabuľku 8 s Tabuľkou 4, zistíme, že za prítomnosti ruchu vedú všetky heuristiky k riešeniam s väčšími odchýlkami, aj keď ich hodnosti sa rovnajú.

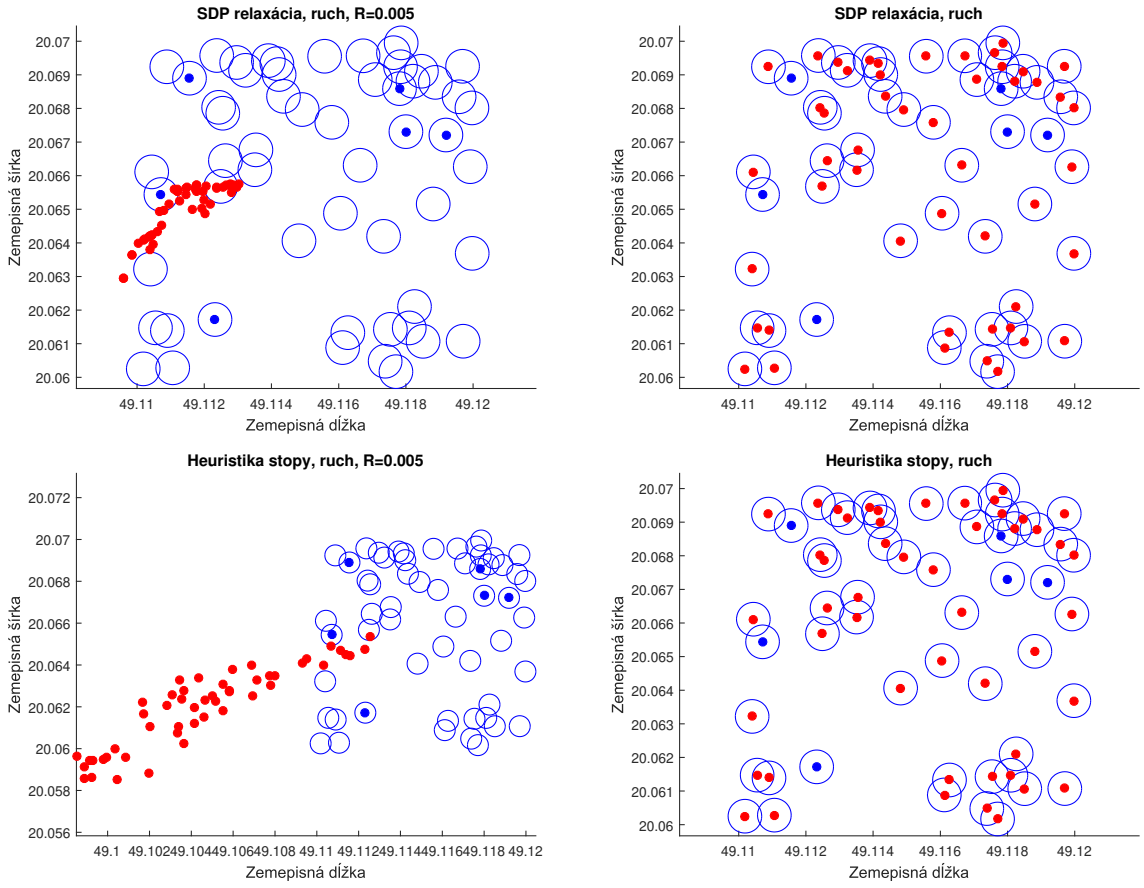
Konvexná iterácia (115), (116) síce v niektorých prípadoch dokáže znížiť hodnosť riešenia SDP relaxácie (113) alebo Heuristiky stopy (114) na požadovanú hodnosť, ale za

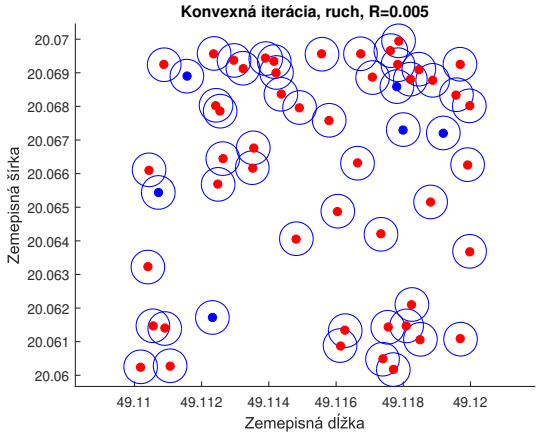
cenu vyššej časovej náročnosti spôsobenej potrebou riešenia viacerých SDP úloh.

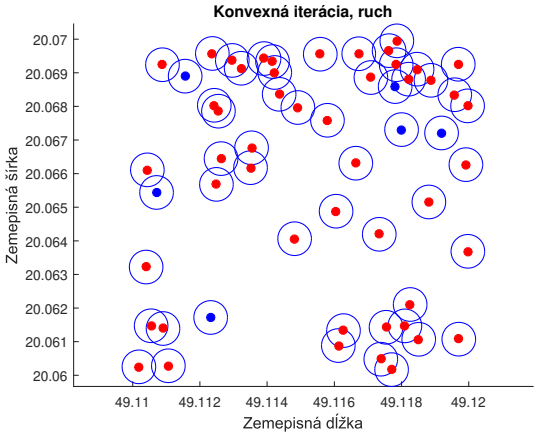
Odhliadnuc od Konvexnej iterácie (115),(116) sa na základe Tabuľky 8 javia byť najlepšími Heuristika 2a (120) a Heuristika 2b (121), ktoré bez ohľadu na množstvo informácií o vzdialenosti aj za prítomnosti ruchu nájdu riešenie hodnosti nanajvýš 4 resp. 6, pričom mobilné telefóny lokalizujú s maximálnou absolútnou odchýlkou na úrovni niekoľkých decimetrov, čo môžeme považovať za postačujúce vzhľadom na to, že riešenie hodnosti 2 nájdené Konvexnou iteráciou (115),(116) vedie k odchýlkam na úrovni centimetrov.

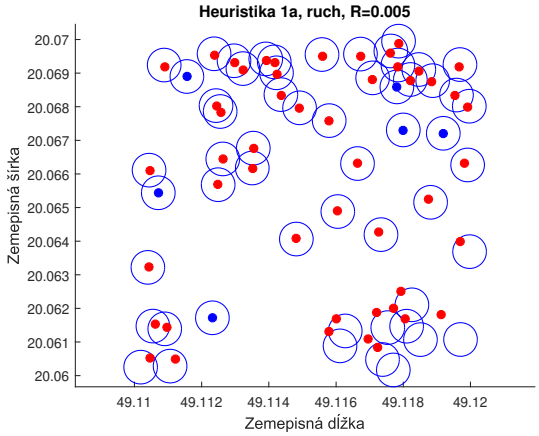
Z obrázkov Obr.7 možno vyčítať, ako sa riešenie spresňuje so stúpajúcim množstvom informácií o vzdialenostiach. Zároveň si pri Heuristike 1a (117) pre dosah 500m môžeme všimnúť, že najviac vychýlené od skutočnej polohy sú mobilné telefóny v pravom dolnom rohu, ktoré ležia najodľahlejšie od početnejších vysielačov v hornej časti obrázku.

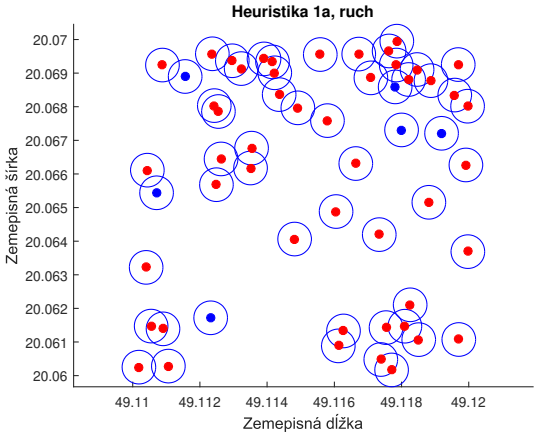
Za prítomnosti ruchu pri neobmedzenom dosahu (Obr.7 napravo) sa zdajú byť všetky mobilné telefóny lokalizované presne. Pri zvolenej mierke, kde modré krúžky predstavujú päťdesiatmetrové odchýlky od skutočných riešení, totiž najväčšie decimetrové odchýlky pri Heuristike 1b (118) nemožno pozorovať.

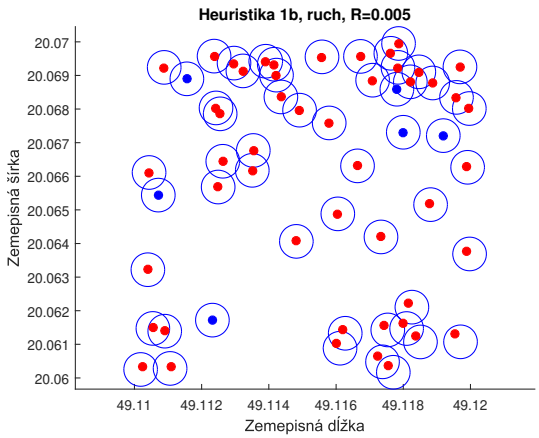


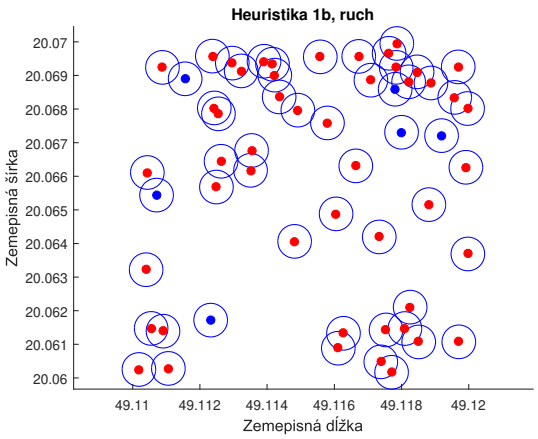

Konvexná iterácia, ruch, R=0.005
Zemepisná šírka
Zemepisná dĺžka
20.07
20.069
20.068
20.067
20.066
20.065
20.064
20.063
20.062
20.061
20.06
49.11
49.112
49.114
49.116
49.118
49.12

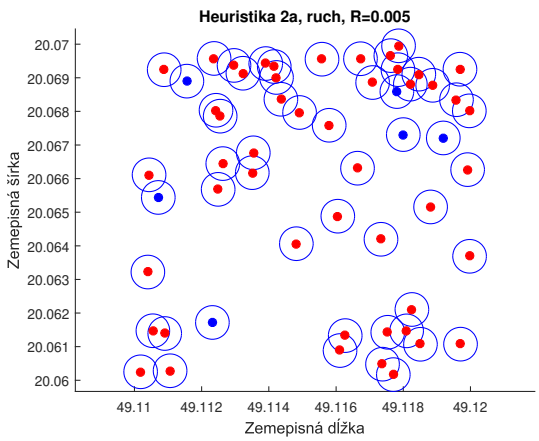

Konvexná iterácia, ruch
Zemepisná šírka
Zemepisná dĺžka
20.07
20.069
20.068
20.067
20.066
20.065
20.064
20.063
20.062
20.061
20.06
49.11
49.112
49.114
49.116
49.118
49.12

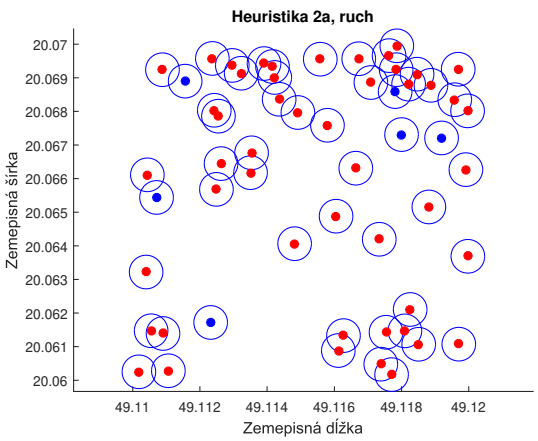

Heuristika 1a, ruch, R=0.005
Zemepisná šírka
Zemepisná dĺžka
20.07
20.069
20.068
20.067
20.066
20.065
20.064
20.063
20.062
20.061
20.06
49.11
49.112
49.114
49.116
49.118
49.12

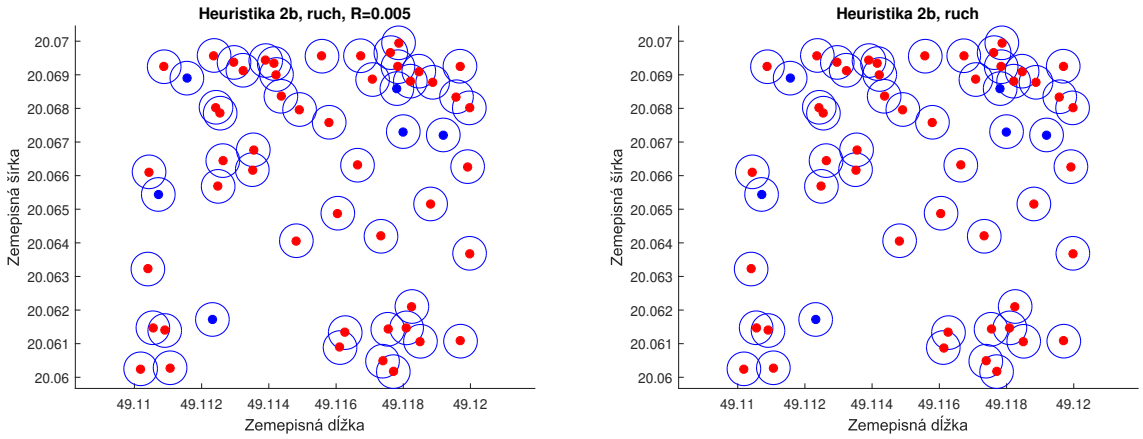

Heuristika 1a, ruch
Zemepisná šírka
Zemepisná dĺžka
20.07
20.069
20.068
20.067
20.066
20.065
20.064
20.063
20.062
20.061
20.06
49.11
49.112
49.114
49.116
49.118
49.12


Heuristika 1b, ruch, R=0.005
Zemepisná šírka
Zemepisná dĺžka
20.07
20.069
20.068
20.067
20.066
20.065
20.064
20.063
20.062
20.061
20.06
49.11
49.112
49.114
49.116
49.118
49.12


Heuristika 1b, ruch
Zemepisná šírka
Zemepisná dĺžka
20.07
20.069
20.068
20.067
20.066
20.065
20.064
20.063
20.062
20.061
20.06
49.11
49.112
49.114
49.116
49.118
49.12


Heuristika 2a, ruch, R=0.005
Zemepisná šírka
Zemepisná dĺžka
20.07
20.069
20.068
20.067
20.066
20.065
20.064
20.063
20.062
20.061
20.06
49.11
49.112
49.114
49.116
49.118
49.12


Heuristika 2a, ruch
Zemepisná šírka
Zemepisná dĺžka
20.07
20.069
20.068
20.067
20.066
20.065
20.064
20.063
20.062
20.061
20.06
49.11
49.112
49.114
49.116
49.118
49.12



Obr. 7: Riešenie lokalizácie mobilných telefónov za prítomnosti ruchu, uvažujúc obmedzený dosah signálu 500m (obrázky naľavo) a neobmedzený dosah signálu (obrázky napravo). Modré prázdne krúžky predstavujú vzdialenosť 50 metrov od skutočných pozícií, modrou sú zvýraznené pozície vysielačov a červenou pozície mobilných telefónov nájdené SDP relaxáciou (113), Heuristikou stopy (114), Konvexnou iteráciou (115), (116) , Heuristikou 1a (117), Heuristikou 1b (118), Heuristikou 2a (120) a Heuristikou 2b (121). Menšie ako metrové odchýlky na obrázkoch pri zvolenej mierke nepozorujeme, preto sa väčšina riešení javí byť presná.

5.2 Porovnanie vybraných heuristík

V predošlej podkapitole sme sa venovali riešeniu jedného konkrétneho príkladu, kde sme poznali polohy šiestich vysielačov a hľadali sme náhodne vygenerované polohy päťdesiatich mobilných telefónov. Je zrejmé, že tieto polohy sú aktuálne len v jednom danom časovom okamihu, nakoľko sú nosičmi mobilných telefónov ľudia, ktorí sa voľne pohybujú v teréne. Otázkou ostáva, či sa budú riešenia jednotlivých heuristík v inom časovom okamihu t.j. pre inú sadu náhodne vygenerovaných polôh mobilných telefónov správať rovnako ako v prípade uvedenom v predošlej podkapitole.

Nakoľko sme v predošlej podkapitole zhodnotili, že Heuristika 2a (120) je neefektívna vzhľadom na potrebu voľby optimálnej hodnoty relatívnej váhy, za najlepšiu z navrhnutých heuristík považujeme Heuristiku 2b (121). Zároveň sme pri opise výsledkov príkladu v predošlej podkapitole vyslovili niekoľko domnienok, ktoré je potrebné otestovať na väčšom počte náhodne vygenerovaných úloh.

Naďalej ostaneme pri lokalizácii mobilných telefónov a náhodne vygenerujeme 100 rôznych rozmiestnení 50 mobilných telefónov v okolí 6 vysielačov, ktorých polohy sú pevne

dané. Navrhnutú Heuristiku 2b (121) budeme porovnávať s SDP relaxáciou (113) a Konvexnou iteráciou (115), (116) vzhľadom na dosiahnutú hodnosť, presnosť a časovú náročnosť riešenia. Hodnosť riešenia budeme opäť určovať ako počet nenulových vlastných hodnôt, pričom za nulové budeme považovať vlastné hodnoty menšie ako 10^{-8}.

V Tabuľke 9 sú vypísané percentuálne úspešnosti jednotlivých postupov riešenia pre rôzne typy úloh za či bez prítomnosti ruchu pri rôznych dosahoch signálu. Tabuľka 10 zasa ponúka náhľad na najvyššie hodnosti riešení dosiahnuté jednotlivými postupmi. V Tabuľke 11 sú spísané maximálne absolútne odchýlky nájdených riešení od skutočného riešenia a v Tabuľke 12 priemerné súčty týchto odchýlok. Tabuľka 13 obsahuje priemerné trvania jednotlivých postupov a v Tabuľke 14 uvádzame maximálne počty iterácií Konvexnej iterácie (115), (116) pre $W_0 = 0$ aj $W_0 = I$.

Dodajme, že za zastavovacie kritérium pre Konvexnú iteráciu (115), (116) sme nepovažovali len dosiahnutie riešenia hodnosti 2, ale aj maximálny počet iterácií rovný 30, keďže je veľká pravdepodobnosť, že ak sa požadovaná hodnosť nedosiahne v prvých 30 iteráciách, tak metóda nekonverguje k takémuto riešeniu resp. je táto metóda v takýchto prípadoch časovo náročná, a preto neefektívna.

V Tabuľke 13 uvádzame v prípade Konvexnej iterácie (115), (116) priemery trvania riešenia len tých úloh, pre ktoré sa dosiahlo riešenie požadovanej hodnosti. Preto pri zanedbaní ruchu pozorujeme rovnaké trvanie SDP relaxácie (113) aj Konvexnej iterácie, lebo Konvexná iterácia v tejto situácii konvergovala len v prípadoch, keď samotná SDP relaxácia viedla k riešeniu hodnosti 2.

Z Tabuliek 9 až 14 môžeme vyvodiť niekoľko záverov:

1) Konvexná iterácia (115), (116) pri voľbe $W_0 = 0$ bola v každej situácii úspešnejšia v dosahovaní riešenia hodnosti 2 (Tabuľka 9) ako pri voľbe $W_0 = I$, preto budeme pri ďalších porovnaniach pracovať len s touto jej verziou.

2) Pri zanedbaní ruchu je Konvexná iterácia (115), (116) pri voľbe $W_0 = 0$ potrebná len v prípadoch, kedy SDP relaxácia (113) nevedie k riešeniu požadovanej hodnosti (Tabuľka 9), no práve v týchto prípadoch táto metóda k riešeniu požadovanej hodnosti nekonvergovala resp. ju zastavilo kritérium maximálneho počtu iterácií. V niektorých prípadoch dokonca aj po 30 iteráciách poskytla len riešenie plnej hodnosti (Tabuľka 10).

3) Prítomnosť ruchu značne vylepšila fungovanie Konvexnej iterácie (115), (116), ktorá viedla k riešeniu hodnosti 2 vo všetkých uvažovaných prípadoch bez ohľadu na dosah signálu (Tabuľka 9). Príčinou je zjavne prítomnosť ohraničení na zmerateľné vzdialenosti v tvare nerovností v úlohe (115) v Konvexnej iterácii.

4) V prípade zanedbania ruchu a neobmedzeného dosahu signálu viedla Heuristika 2b (121) v jednom prípade k riešeniu hodnosti 3 (Tabuľky 9 a 10), avšak maximálna odchýlka (Tabuľka 11) na úrovni milimetrov je stále postačujúca.

5) Navrhnutá Heuristika 2b (121) sa najlepšie vysporiada s nezmerateľnými vzdialenosťami pri zanedbaní ruchu, čo sa prejavilo najmä pri dosahu 500m, kedy viedla k riešeniu požadovanej hodnosti až 86krát, kým ostatné postupy najviac dvakrát (Tabuľka 9). Navyše v takomto prípade poskytovala riešenie hodnosti nanajvýš 10, kým ostatné postupy v niekoľkých prípadoch viedli k riešeniam plnej hodnosti (Tabuľka 10), čo sa prejavilo aj na maximálnych absolútnych odchýlkach (Tabuľka 11). Kým SDP relaxácia (113) a Konvexná iterácia (115), (116) v niektorých prípadoch viedli k maximálnej odchýlke niekoľko stoviek metrov, u Heuristiky 2b (121) sme pozorovali maximálnu odchýlku na úrovni necelých štyroch centimetrov.

6) Za prítomnosti ruchu už Heuristika 2b (121) nedávala také presvedčivé výsledky, čo sa týka dosahovania hodnosti 2 (Tabuľka 9), avšak aj pri malom dosahu signálu poskytovala riešenie hodnosti nanajvýš 11 (Tabuľka 10). V prospech našej heuristiky v tomto prípade hovorí časová náročnosť (Tabuľka 13). Konvexná iterácia (115), (116) totiž v priemere zaberie asi štvornásobok času potrebného na vyriešenie Heuristiky 2b (121), čo je spôsobené potrebou riešenia viacerých optimalizačných úloh. Z Tabuľky 14 možno vyčítať, že v niektorých prípadoch bolo potrebné riešiť až 6 iterácií, čo predstavuje 12 optimalizačných úloh. Maximálna odchýlka riešenia získaného Heuristikou 2b (121) na úrovni decimetrov (Tabuľka 11) mnohokrát predstavuje postačujúcu presnosť. Za prítomnosti ruchu teda poskytuje najlepšie riešenia Konvexná iterácia (115), (116), ale navrhnutá Heuristika 2b (121) je prijateľným kompromisom medzi časovou náročnosťou a presnosťou riešenia. Navyše Konvexná iterácia (115), (116) pri prísnejšej tolerancii na nulové vlastné hodnoty nemusí k riešeniu požadovanej hodnosti vôbec konvergovať, alebo len veľmi pomaly.

Ruch	Dosah	SDP relaxácia	Konvexná iterácia pre $W_0 = 0$	Konvexná iterácia pre $W_0 = I$	Heuristika 2b
nie	∞	100	100	100	99
nie	$750m$	99	99	53	92
nie	$500m$	2	2	0	86
áno	∞	52	100	100	3
áno	$750m$	22	100	100	1
áno	$500m$	0	100	100	0

Tabuľka 9: Percentuálna úspešnosť v dosiahnutí riešenia hodnosti 2 pre rôzne typy úloh.

Ruch	Dosah	SDP relaxácia	Konvexná iterácia pre $W_0 = 0$	Konvexná iterácia pre $W_0 = I$	Heuristika 2b
nie	∞	2	2	2	3
nie	$750m$	3	3	6	4
nie	$500m$	58	58	58	5
áno	∞	6	2	2	10
áno	$750m$	6	2	2	11
áno	$500m$	58	2	2	10

Tabuľka 10: Najvyššia hodnosť dosiahnutá daným postupom pre rôzne typy úloh.

Ruch	Dosah	SDP relaxácia	Konvexná iterácia pre $W_0 = 0$	Heuristika 2b
nie	∞	8.8817×10^{-4}	8.8817×10^{-4}	1.8849×10^{-3}
nie	$750m$	2.7370×10^{-3}	793.0	4.7001×10^{-2}
nie	$500m$	894.3	1186.3	3.9761×10^{-2}
áno	∞	9.1860×10^{-2}	9.1860×10^{-2}	1.0506×10^{-1}
áno	$750m$	1.9238×10^{-1}	3.5554×10^{-2}	2.6841×10^{-1}
áno	$500m$	812.6	3.7235×10^{-2}	9.1793×10^{-1}

Tabuľka 11: Maximá maximálnych absolútnych odchýlok (v metroch), ku ktorým viedli riešenia jednotlivých postupov pre rôzne typy úloh.

Ruch	Dosah	SDP relaxácia	Konvexná iterácia pre $W_0 = 0$	Heuristika 2b
nie	∞	1.7820×10^{-4}	1.7820×10^{-4}	1.0122×10^{-4}
nie	$750m$	4.6777×10^{-4}	53.8	1.5024×10^{-3}
nie	$500m$	682.1	641.4	2.9139×10^{-3}
áno	∞	2.1942×10^{-2}	1.5830×10^{-2}	2.4596×10^{-2}
áno	$750m$	3.0280×10^{-2}	1.4701×10^{-2}	4.2671×10^{-2}
áno	$500m$	587.0	1.6413×10^{-2}	9.9314×10^{-2}

Tabuľka 12: Priemerné súčty absolútnych odchýlok (v metroch).

Ruch	Dosah	SDP relaxácia	Konvexná iterácia pre $W_0 = 0$	Heuristika 2b
nie	∞	10.62	10.62	20.16
nie	$750m$	8.67	8.67	15.65
nie	$500m$	14.40	14.40	16.27
áno	∞	15.18	32.79	34.28
áno	$750m$	13.07	37.62	30.78
áno	$500m$	51.29	85.90	26.45

Tabuľka 13: Priemerná časová náročnosť (v sekundách) jednotlivých postupov.

Ruch	Dosah	Konvexná iterácia pre $W_0 = 0$	Konvexná iterácia pre $W_0 = I$
nie	∞	1	2
nie	$750m$	-	-
nie	$500m$	-	-
áno	∞	5	3
áno	$750m$	5	4
áno	$500m$	5	6

Tabuľka 14: Najväčší počet iterácií potrebný na dosiahnutie riešenia hodnosti 2. Symbol − značí, že takéto riešenie sa v niektorých prípadoch nedosiahlo.

Záver

Cieľom práce bolo analyzovať rôzne spôsoby riešenia semidefinitných úloh s ohraničeniami na hodnosť a porovnať ich pri riešení konkrétneho problému. Vzhľadom na to, že existujúce spôsoby riešenia týchto úloh neposkytujú vždy dostatočne presné riešenia, za sekundárny cieľ sme si zvolili vylepšenie existujúcich prístupov. Na ilustráciu fungovania jednotlivých spôsobov riešenia sme vybrali lokalizačný problém, ktorý sa v rôznych obmenách vyskytuje vo viacerých odvetviach.

Pri písaní prvých dvoch kapitol sme čerpali hlavne z publikácií [1], [4],[9] a [10]. Okrem uvedenia štandardného tvaru semidefinitných úloh s ohraničením na hodnosť (3) a semidefinitnej relaxácie (1) týchto úloh sme v rámci prvej kapitoly uviedli aj príklady aplikácií, ktoré vedú k formulácii semidefinitnej úlohy s ohraničením na hodnosť, čím sme ukázali široké uplatnenie tejto úlohy.

Druhá kapitola obsahuje známe tvrdenia o hodnosti, stope a vlastných hodnotách symetrických kladne semidefinitných matíc, doplnené o vlastné dôkazy, ako napríklad v prípade Tvrdenia 2.15, kde sme ukázali, že stopa je konvexnou obálkou hodnosti kladne semidefinitných symetrických matíc, pomocou matematickej indukcie len s využitím definície konvexnej obálky (Definícia 2.14).

V tretej kapitole sme sa venovali heuristikám na riešenie semidefinitných úloh s ohraničeniami na hodnosť. Najskôr sme ozrejmili myšlienku fungovania známej heuristiky stopy (67) a uviedli sme základný princíp konvexnej iterácie (68),(69), ktorú možno vnímať ako algoritmus na zníženie hodnosti riešení získaných semidefinitnou relaxáciou či heuristikou stopy. Navyše sme navrhli štyri nové heuristiky pridaním dodatočných ohraničení (77) a (83) k semidefinitnej relaxácii a heuristike stopy. Tieto ohraničenia však nie sú afinné, preto ich bolo potrebné upraviť tak, aby sme riešili len semidefinitné úlohy, na čo sme využili výsledok (29) z článku [1] a následne sme navrhli heuristiky v tvare semidefinitných úloh (81), (82), (91) a (93).

Štvrtá kapitola sa zaoberá lokalizáciou senzorov v bezdrôtovej sieti a vychádza hlavne z publikácií [3], [5], [6] a [7]. Objasnili sme v nej formuláciu tzv. lokalizačného problému do tvaru semidefinitnej úlohy prípustnosti s ohraničením na hodnosť (101) a následne sme sformulovali príslušné tvary heuristík pre lokalizačný problém.

V piatej kapitole sme sa venovali lokalizácii mobilných telefónov. Tu sme najskôr v podkapitole 5.1 uviedli príklad konkrétnej lokalizácie, pričom sme uvažovali rôzne podmienky ovplyvnené prítomnosťou ruchu či obmedzeným dosahom signálu, ktorý má za následok poznanie menšieho počtu vzdialeností. Tu sa ukázalo, že z navrhnutých heuristík vedie k najlepším výsledkom Heuristika 2b (93). Podobne kvalitné výsledky dáva aj Heuristika 2a (91), avšak potreba hľadania optimálnej hodnoty relatívnej váhy ju robí neefektívnou. Pri porovnaní s existujúcimi prístupmi, vynikala Heuristika 2b (93) hlavne v úlohách s veľkým množstvom chýbajúcich informácií o vzdialenosti, kedy jednoznačne porazila ostatné prístupy. Vo zvyšných úlohách aj keď numericky neviedla k riešeniu požadovanej hodnosti, túto hodnosť prekročila len minimálne.

Autorka pri písaní práce uplatnila svoje poznatky z konvexnej optimalizácie a lineárnej algebry na dôkladné zdôvodnenie danej problematiky. Zároveň si osvojila myšlienku relaxácie nekonvexnej úlohy konvexnou, techniku nahradenia nekonvexnej účelovej funkcie jej konvexnou obálkou, či zápis súčtu niekoľkých najväčších vlastných hodnôt v tvare semidefinitnej úlohy. Obsah práce bol pre autorku zaujímavý hlavne vďaka množstvu nových informácií, ktoré sa jej podarilo zužitkovať pri návrhu vlastných heuristík. Podnetným bolo aj samotné spracovanie lokalizačného problému, pri riešení ktorého autorka preverila svoje interpretačné schopnosti a programovacie zručnosti.

Navrhnutá heuristika nie je prínosom len pre lokalizačný problém, ale aj pre množstvo ďalších aplikácií, ktoré vedú k formulácii semidefinitných úloh s ohraničením na hodnosť. Preto vidíme možné rozšírenie tejto práce v otestovaní fungovania tejto heuristiky aj na ďalších úlohách. Zároveň by sme v budúcnosti chceli doplniť k numerickej analýze robustnosti navrhnutej heuristiky aj teoretickú analýzu jej presnosti.

Zoznam použitej literatúry

[1] Alizadeh, F.: *Interior Point Methods in Semidefinite Programming with Applications to Combinatorial Optimization*, SIAM Journal on Optimization 5 (1995), 13–51

[2] Biswas, P.: *Semidefinite Programming Approaches to Distance Geometry Problems*, dizertačná práca, Stanford University, California, 2007

[3] Biswas, P., Ye, Y.: *Semidefinite Programming for Ad Hoc Wireless Sensor Network Localization*, Proceeding IPSN 3 (2004), 46-54

[4] Boyd, S., Vandenberghe, L.: *Convex Optimization*, Cambridge University Press, New York, 2004

[5] Carter, M.W., Jin, H.H., Saunders, M.A., Ye, Y.: *SpaseLoc: An Adaptive Subproblem Algorithm for Scalable Wireless Sensor Network Localization*, Siam J. Optim. 17 (2006), 1102-1128

[6] Dattorro, J.: *Convex Optimization & Euclidean Distance Geometry*, second edition, Meboo Publishing USA, Stanford University, California, 2016

[7] Dokmanić, I., Parhizkar, R., Ranieri, J.,Vetterli, M.: *Euclidean Distance Matrices: Essential Theory, Algorithms and Applications*, IEEE Signal Processing Magazine 32 (2015), 780-798

[8] Fan, K.: *On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations I.*, Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A 35 (1949), 652-655

[9] Fazel, M.: *Rank Minimization with Applications*, dizertačná práca, Stanford University, California, 2002

[10] Fazel, M., Hindi, H., Boyd, S.: *A Rank Minimization Heuristic With Application To Minimum Order System Aproximation*, Proceedings American Control Conference 6 (2001), 4734-4739

[11] Iguchi, T. a spol.: *Probably certifiably correct k-means clustering*, Mathematical Programming (2016), 1–29

[12] Goemans, M. X., Williamson, D. P.: *Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming*, Journal of the Association for Computing Machinery 6 (1995), 1115–1145

[13] Higham, N. J.: *Computing the nearest correlation matrix – a problem from finance*, IMA Journal of Numeric Analysis 22 (2002), 329-343

[14] Mai, V.S., Maity, D., Ramasubramanian, B., Rotkowitz, M.C.: *Convex Methods for Rank-Constrained Optimization Problem*, SIAM Conference on Control & Its Applications (2015), 123-130

[15] Naldi, S.: *Solving rank-constrained semidefinite programs in exact arithmetic*, Proc. of the ACM on Int. Symposium on Symbolic and Algebraic Comp. (2016), 357-364

[16] Orsi, R., Helmke, U., Moore, J.B.: *A Newton–LikeMethod for Solving Rank Constrained Linear Matrix Inequalities*, Automatica, 42 (2006), 1875-1882

[17] Recht, B., Fazel, M., Parrilo, P.A.: *Guaranteed Minimum-Rank Solutions of Linear Matrix Equations via Nuclear Norm Minimization*, SIAM Review, 52 (2010), 471-501

[18] Peng, J., Wei, Y.: *Approximating K-means-type Clustering via Semidefinite Programming*, SIAM J. Optim., 18 (2005), 186–205

[19] Recht, B., Xu, W., Hassibi, B.: *Necessary and sufficient conditions for success of the nuclear norm heuristic for rank minimization*, 47th IEEE Conference on Decision and Control (2008)

[20] Youla, D.C.: *Generalized Image Restoration by the Method of Alternating Orthogonal Projections*, IEEE Trans. Circuits Syst., 25 (1978), 694-702

[21] Zhou, G. a spol.: *Rank-Constrained Optimization: A Riemannian Manifold Approach*, 23th European Symposium on Artificial Neural Networks, Computational Intelligence and Machine Learning (ESANN) (2015)

[22] *The world's largest Open Database of Cell Towers*, dostupné na internete (27.12.2018): https://www.opencellid.org

[23] *Zdrojové kódy:* https://github.com/TereziaF/lokalizacny_problem

Príloha A

A.1 Schurov doplnok

Tvrdenie A.1.1 (podľa [6, §A.4]). *Nech A a C sú symetrické matice. Potom ak A je invertovateľná, tak platí:*

$$E = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \succeq 0 \;\Leftrightarrow\; A \succeq 0 \wedge C - B^T A^{-1} B \succeq 0, \tag{A.125}$$

kde matica $C - B^T A^{-1} B$ je Schurov doplnok matice A v blokovej matici E.

Ak C je invertovateľná, tak platí:

$$E = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \succeq 0 \;\Leftrightarrow\; C \succeq 0 \wedge A - B C^{-1} B^T \succeq 0, \tag{A.126}$$

kde matica $A - B C^{-1} B^T$ je Schurov doplnok matice C v blokovej matici E.

Tvrdenie A.1.2 (podľa [6, §A.4]). *Nech A a C sú symetrické matice a A je navyše invertovateľná. Potom sa hodnosť blokovej matice E z predchádzajúceho tvrdenia určí nasledovne:*

$$rank\left(\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}\right) = rank\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0^T & C - B^T A^{-1} B \end{bmatrix}\right) = rank\,(A) + rank\left(C - B^T A^{-1} B\right). \tag{A.127}$$

Tvrdenie A.1.3. *Nech $G \in \mathbb{S}^N$ a $X \in \mathbb{R}^{n \times N}$. Potom*

$$G = X^T X \quad \Leftrightarrow \quad G \succeq X^T X \wedge rank\left(\begin{bmatrix} I_n & X \\ X^T & G \end{bmatrix}\right) = n. \tag{A.128}$$

Dôkaz. ($\Rightarrow$): Ak $G = X^T X$, tak platí, že $G \succeq X^T X$ a zároveň $rank(G - X^T X) = 0$, preto $rank\left(\begin{bmatrix} I_n & X \\ X^T & G \end{bmatrix}\right) = n$ podľa Tvrdenia A.1.2.

($\Leftarrow$): Budeme vychádzať z predpokladu $G - X^T X \succeq 0$. Túto maticovú nerovnosť môžeme na základe Tvrdenia A.1.1 napísať ekvivalentne ako

$$Z = \begin{bmatrix} I_n & X \\ X^T & G \end{bmatrix} \succeq 0. \tag{A.129}$$

Hodnosť tejto matice sa podľa Tvrdenia A.1.2 vypočíta takto:

$$rank\left(\begin{bmatrix} I_n & X \\ X^T & G \end{bmatrix}\right) = rank\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0^T & G - X^T X \end{bmatrix}\right) = rank\left(I_n\right) + rank\left(G - X^T X\right)$$
$$= n + rank\left(G - X^T X\right).$$

Keďže hodnosť blokovej matice Z je z predpokladu rovná n, hodnosť matice $G - X^T X$ musí byť preto 0. A to platí práve vtedy, keď $G - X^T X = 0_{N \times N}$. Teda $G = X^T X$. □