UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY




# SIMULOVANIE SCENÁROV ÚROKOVÝCH MIER PRE POTREBY DLHOPISOVÉHO FONDU

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2019 Bc. Tatiana Jašurková

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

# SIMULOVANIE SCENÁROV ÚROKOVÝCH MIER PRE POTREBY DLHOPISOVÉHO FONDU

## DIPLOMOVÁ PRÁCA

| | |
|---|---|
| Študijný program: | Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie |
| Študijný odbor: | 1114 Aplikovaná matematika |
| Školiace pracovisko: | Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky |
| Vedúci práce: | doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD. |

Bratislava 2019 **Bc. Tatiana Jašurková**






Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

# ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Tatiana Jašurková
**Študijný program:** ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
**Študijný odbor:** aplikovaná matematika
**Typ záverečnej práce:** diplomová
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský
**Sekundárny jazyk:** anglický

**Názov:** Simulovanie scenárov úrokových mier pre potreby dlhopisového fondu
*Simulation of interest rate scenarios for the needs of the bond fund*

**Anotácia:** Dlhopisové fondy potrebujú pre svoju správu možnosť otestovania vývoja hodnoty pre rôzne vývoje úrokových mier v budúcnosti. Klasické modely majú problémy so súčasnou nízkou úrovňou úrokových mier. Práca by mala posúdiť vhodnosť rôznych modelov na simuláciu úrokových mier (s dôrazom na súčasný stav) a navrhnúť metódy simulácie.

**Vedúci:** doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.

**Dátum zadania:** 24.01.2018

**Dátum schválenia:** 25.01.2018 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

**Poďakovanie** Touto cestou by som sa chcela poďakovať svojmu vedúcemu diplomovej práce doc. Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD., za jeho odborné vedenie, za čas, ktorý mi vždy ochotne venoval, a za všetky cenné rady a pripomienky. Tiež ďakujem aj svojej rodine za ich morálnu a finančnú podporu počas celého môjho doterajšieho štúdia, a za to, že vo mňa vždy verili.

# Abstrakt v štátnom jazyku

JAŠURKOVÁ, Tatiana: Simulovanie scenárov úrokových mier pre potreby dlhopisového fondu [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2019, 65 s.

Táto diplomová práca sa zaoberá posudzovaním vhodnosti rôznych modelov úrokových mier, najmä vzhľadom na aktuálny výskyt záporných úrokových mier. V úvode práce uvádzame základné informácie o dlhopisoch a k nim prislúchajúcej časovej štruktúre úrokových mier. Neskôr sú predstavené viaceré modely krátkodobej úrokovej miery, pričom väčšiu pozornosť kladieme na Ho-Lee model, Vašíčkov model a špeciálny prípad dvojfaktorového modelu krátkodobej úrokovej miery. Pre každý zo spomínaných modelov uvádzame jeho základné vlastnosti, kalibráciu vzhľadom na reálne trhové dáta a v neposlednom rade tiež aj simulácie scenárov vývoja krátkodobej úrokovej miery a pohybov výnosovej krivky. Poslednú časť práce tvorí praktické využitie vyššie zmienených modelov v rámci aplikácie, v ktorej sa venujeme vyhodnocovaniu vývoja časovej hodnoty dlhopisového portfólia.

**Kľúčové slová: modely krátkodobej úrokovej miery, simulácie scenárov úrokových mier, dlhopisový fond**

# Abstract

JAŠURKOVÁ, Tatiana: Simulation of interest rate scenarios for the needs of the bond fund [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2019, 65 p.

This master thesis deals with the assessment of the suitability of several interest rate models in the view of recent occurence of negative interest rates. In the beginning, we characterise the bonds and the related term structure of interest rates. Then several short rate models are introduced, focusing in particular on Ho-Lee model, Vašíček model and a special case of two-factor short rate model. Main characteristics, calibration to real market data and simulation of short rate scenarios and movements of the yield curve, are provided for each of the mentioned models. In the last part of this thesis, we deal with the practical use of the above-mentioned models in evaluating the development of bond portfolio time value.

**Keywords: short rate models, interest rates scenarios, bond fund**

# Obsah

**Úvod** **9**

**1 Dlhopisy** **11**

1.1 Oceňovanie dlhopisov . . . . . 11

1.1.1 Bezkupónové dlhopisy . . . . . 12

1.1.2 Kupónové dlhopisy . . . . . 12

1.2 Durácia . . . . . 13

1.3 Časová štruktúra úrokových mier . . . . . 13

1.4 Svenssonov model časovej štruktúry úrokových mier . . . . . 15

**2 Modely úrokových mier** **17**

2.1 Delenie modelov úrokových mier . . . . . 17

2.1.1 Jednofaktorové vs. viacfaktorové modely . . . . . 17

2.1.2 Ekvilibriové vs. bezarbitrážne modely . . . . . 18

**3 Ho-Lee model** **19**

3.1 Kalibrácia Ho-Lee modelu . . . . . 20

3.2 Kalibrácia Ho-Lee modelu - reálne dáta . . . . . 23

**4 Vašíčkov model** **31**

4.1 Časová štruktúra úrokových mier vo Vašíčkovom modeli . . . . . 32

4.2 Kalibrácia Vašíčkovho modelu . . . . . 33

4.3 Kalibrácia Vašíčkovho modelu - reálne dáta . . . . . 35

**5 Dvojfaktorový model CIR + Vašíček** **39**

5.1 Časová štruktúra v CIR + Vašíček modeli . . . . . 39

5.2 Kalibrácia CIR + Vašíček modelu . . . . . 40

5.2.1 Kalmanov filter . . . . . 42

5.3 Kalibrácia CIR + Vašíček modelu - reálne dáta . . . . . 44

**6 Aplikácia** **48**

6.1 Simulácie výnosových kriviek . . . . . 49

6.2 Počiatočný kapitál, príspevky a poplatky. . . . . 51

6.3 Zostavenie programu . . . . . 52
6.4 Výsledky . . . . . 54

**Záver** **61**

**Zoznam použitej literatúry** **63**

# Úvod

Vzhľadom na veľký rozvoj v obchodovaní s dlhopismi, dlhopisovými opciami a ostatnými finančnými derivátmi úrokovej miery, časová štruktúra úrokových mier zohráva veľmi významnú úlohu vo finančnej sfére. Čím viac jej rozumieme, tým lepšie vieme pracovať s jednotlivými finančnými inštrumentami, či spravovať a zaisťovať finančné portfólia. Preto sa začal klásť veľký dôraz na vývoj modelov, ktoré by boli schopné verne replikovať pohyby časovej štruktúry úrokových mier.

Zatiaľ čo Black-Scholesov model [2] je celosvetovo uznávaným modelom pre finančné nástroje, ktorých podkladovým aktívom sú akcie, pri derivátoch úrokovej miery situácia nie je taká jednoznačná. Keďže samotná úroková miera má náhodný charakter, je pri jej modelovaní potrebné využitie techník stochastického kalkulu. Medzi prvé stochastické modely úrokových mier patrí Mertonov model [18] z roku 1973. Následne boli navrhnuté a rozpracované aj ďalšie modely, ako napríklad Dothanov model [10], Cox-Ingersoll-Rosov model [9], či rozsiahlo využívaný Vašíčkov model [25], alebo Ho-Lee model [14]. Medzi novšie modely možno okrem iných zaradiť Hull-Whiteov rozšírený Vašíčkov model [15], alebo CIR++ model [5] z roku 2001. Keďže jednotlivé modely vychádzajú z rozličných predpokladov pre vývoj úrokovej miery, tak každý z nich má ako svoje výhody, tak aj nedostatky.

Cieľom tejto práce je tak posúdiť vhodnosť jednotlivých modelov úrokových mier vzhľadom na aktuálnu situáciu na trhu, kde už dlhšie pozorujeme trend záporných úrokových mier. Pozrieme sa na to, aké výsledky jednotlivé modely produkujú, a následne tieto modely použijeme na riešenie praktického problému.

V prvej kapitole tejto práce sa venujeme všeobecnej teórii týkajúcej sa dlhopisov, ich oceňovaniu a tiež zostrojeniu časovej štruktúry úrokových mier na základe informácii o dlhopisoch dostupných na trhu. V závere tejto kapitoly tiež popíšeme, ako možno pomocou Svenssonovho modelu [23] hladko aproximovať výnosovú krivku.

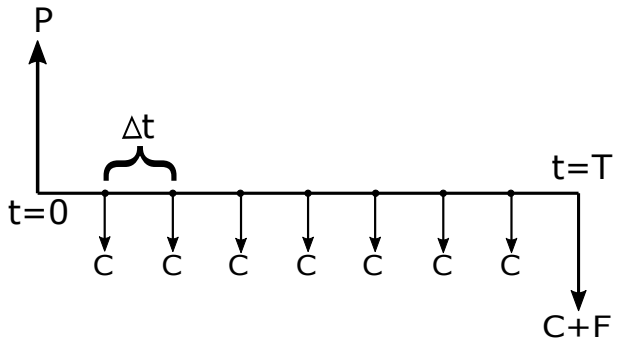
Ďalšia kapitola je zameraná na modely krátkodobej úrokovej miery, pričom kladieme dôraz na to, aby dané modely pripúšťali záporné úrokové miery. Popíšeme tu základné delenie modelov, ich charakteristiku a vlastnosti.

V nasledujúcich troch kapitolách sa bližšie venujeme zvoleným modelom krátkodobej úrokovej miery. Prvým z nich je Ho-Lee model, ku ktorému, s využitím metódy maximálnej vierohodnosti, odvodíme kalibráciu vzhľadom na trhové dáta. Uvedieme tu výsledky kalibrácie a príklady simulácii vývoja úrokových mier. Ďalej sa venujeme Vašíčkovmu modelu a napokon dvojfaktorovému modelu, ktorý predstavuje kombináciu faktorov riadiacich sa Vašíčkovým a CIR modelom. Pri dvojfaktorovom modeli predstavíme spôsob kalibrácie pomocou Kalmanovho filtra. Opätovne pre každý z modelov uvádzame výsledky kalibrácie, rovnako ako aj simulácie vývoja výnosovej krivky. Pri spracovaní jednotlivých modelov využívame voľne dostupný softvér R.

V poslednej šiestej kapitole sa venujeme aplikácii vyššie spomínaných modelov krátkodobej úrokovej miery pri simulovaní vývoja dlhopisového portfólia. Zostavíme program, ktorý bude sledovať výnosnosť a hodnotu dôchodkovej jednotky dlhopisového fondu s rôznymi hodnotami durácie, pričom pracujeme ako so štátnymi dlhopismi, tak aj s hypotekárnymi záložnými listami, či bankovými a korporátnymi dlhopismi. Z hľadiska garancií, ktorým sú takéto dlhopisové fondy vystavené, sledujeme najmä poklesy dôchodkovej jednotky v ľubovoľnom desaťročnom období.

# 1 Dlhopisy

Dlhopis ako cenný papier patrí medzi základné nástroje finančného trhu. Vydaním dlhopisu sa vypisovateľ (emitent) zaväzuje k splateniu dlžnej čiastky (nominálnej hodnoty $F$) v stanovenom termíne, resp. v deň maturity $T$, a k vyplácaniu pravidelných kupónov v určených obdobiach, ak tieto boli dohodnuté v rámci obchodu. Na základe zrealizovaného obchodu sa z emitenta stáva dlžník, ktorý sa tak zaväzuje k plneniu povinností, ktoré mu týmto obchodom vznikli. Vyššie popísanú štruktúru peňažných tokov, spätú s obchodovaním s dlhopismi, z pohľadu emitenta, znázorňujeme na Obrázku 1.




**Obr. 1:** Grafické znázornenie peňažných tokov spätých s obchodovaním s kupónovými dlhopismi. V čase $t = 0$ je vypísaný dlhopis s nominálnou hodnotou $F$. Predajom takéhoto dlhopisu emitent získa na začiatku finančný objem $P$, čo predstavuje súčasnú hodnotu dlhopisu. V jednotlivých dohodnutých časových obdobiach $i\Delta t$, kde $i = 1, \ldots, n$ a $n$ značí počet dohodnutých období, dochádza k vyplateniu stanoveného kupónu $C$. Napokon v čase $t = T$, teda v deň splatnosti dlhopisu, je vypisovateľ povinný splatiť nielen kupón, ale aj nominálnu hodnotu dlhopisu $F$.

## 1.1 Oceňovanie dlhopisov

Aby na trhu nenastala arbitrážna príležitosť, tak súčasná hodnota ľubovoľného finančného nástroja musí zodpovedať diskontovanej hodnote všetkých finančných tokov, ktoré daný nástroj prinesie v budúcnosti. Na základe tohto pravidla je potom jednoznačne určené aj oceňovanie, či už bezkupónových, ale i kupónových dlhopisov. Táto kapitola je spracovaná na základe [4, kap. 1.2] a [17, kap. 1.1].

### 1.1.1 Bezkupónové dlhopisy

Bezkupónový dlhopis je taký typ dlhopisu, ktorého jediným finančným tokom je vyplatenie nominálnej hodnoty $F$ v čase maturity $T$. Kúpu takéhoto dlhopisu môžeme stotožniť s vložením finančných prostriedkov na termínovaný účet, kde sú viazané a zhodnocované počas fixne stanoveného obdobia. Na konci tohto obdobia ich následne spolu s pripísaným úrokom vyberieme.

Pokiaľ použijeme diskrétny spôsob úročenia, pričom sa úrok pripisuje $k$-krát ročne, tak pre bezkupónový dlhopis musí platiť:

$$P(t,T)\left(1+\frac{Y^k_{(t,T)}}{k}\right)^{k(T-t)} = F, \tag{1}$$

kde $Y_{(t,T)}$ je príslušná konštantná ročná úroková miera a $P(t,T)$ označuje hodnotu dlhopisu v ľubovoľnom čase $t < T$.

Teraz si ukážeme ako možno zo zloženého úrokovania prejsť na spojitý prípad. Uvažujme teda, že čas medzi jednotlivými zúročeniami je limitne blízky nule, to nastáva v prípade ak počet ročných úročení $k$ je nekonečne veľký. Pri pohľade na rovnosť (1) je vidno, že od parametra $k$ závisí len druhý člen na ľavej strane. Pre $k$ idúce do nekonečna sa tento člen správa nasledovne:

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{Y^k_{(t,T)}}{k}\right)^{k(T-t)} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{Y^k_{(t,T)}}{k}\right)^{\frac{k}{Y^k_{(t,T)}}Y^k_{(t,T)}(T-t)} = e^{Y^k_{(t,T)}(T-t)}. \tag{2}$$

S využitím predchádzajúcich vzťahov potom rovnosť (1) v spojitom úročení nadobúda tvar:

$$P(t,T)e^{R(t,T)(T-t)} = F, \tag{3}$$

kde $R(t,T)$ je spojitá úroková miera. Z toho vyplýva, že cena bezkupónového dlhopisu v čase $t$ je daná vzťahom:

$$P(t,T) = Fe^{-R(t,T)(T-t)}. \tag{4}$$

### 1.1.2 Kupónové dlhopisy

Rovnako ako v prípade bezkupónových dlhopisov, aj súčasná hodnota kupónových dlhopisov je určená spôsobom diskontácie všetkých finančných tokov s ním spätých. Ak teda dlhopis vypláca kupón vo výške $C$ v stanovených termínoch $t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$,

potom jeho cena je daná vzťahom:

$$P(0,T) = Fe^{-R(0,T)T} + \sum_{i=1}^{n} Ce^{-R(0,t_i)t_i}. \tag{5}$$

Špeciálnym typom dlhopisov sú par-bondy, čo sú dlhopisy, ktorých nominálna a súčasná hodnota sú rovnaké. Z rovnosti (5) je potom možné explicitne dourčiť výšku kupónu:

$$C = \frac{F\left(1 - e^{-R(0,T)T}\right)}{\sum_{i=1}^{n} e^{-R(0,t_i)t_i}}. \tag{6}$$

## 1.2 Durácia

Okrem nominálnej hodnoty, kupónov a času maturity, patrí medzi dôležité charakteristiky dlhopisov aj ich durácia. Zjednodušene, durácia predstavuje priemernú dobu splatnosti dlhopisov, a významnú úlohu zohráva najmä pri kupónových dlhopisoch, kde nám signalizuje čas splatnosti počiatočnej investície. Existujú rôzne spôsoby výpočtu durácie, my v našej práci budeme pracovať s Fisher-Weilovou duráciou, ktorej všeobecnú definíciu čitateľ nájde v [17, str. 27]. Tam uvedený vzorec môžeme pre kupónové dlhopisy previesť do tvaru:

$$D_{FW} = \frac{1}{P(0,T)} \left( TFe^{-R(0,T)T} + \sum_{i=1}^{n} t_i Ce^{-R(0,t_i)t_i} \right). \tag{7}$$

Pokiaľ uvažujeme dlhopisové portfólio zostavené z $N$ dlhopisov s duráciami $D_1, \ldots, D_N$, potom durácia celého portfólia, označme ju $D_P$, je určená ako:

$$D_P = \sum_{i=1}^{N} w_i D_i, \tag{8}$$

kde $w_i$ sú hodnotové váhy jednotlivých dlhopisov zastúpených v portfóliu.

## 1.3 Časová štruktúra úrokových mier

Časová štruktúra úrokových mier je krivka popisujúca vzťah medzi spojitou úrokovou mierou $R(t,T)$ a maturitou daného dlhopisu. Ak uvažujeme bezkupónový dlhopis s nominálnou hodnotou $F = 1$, potom s využitím rovnosti (4) je možné $R(t,T)$ vyjadriť ako:

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}. \tag{9}$$

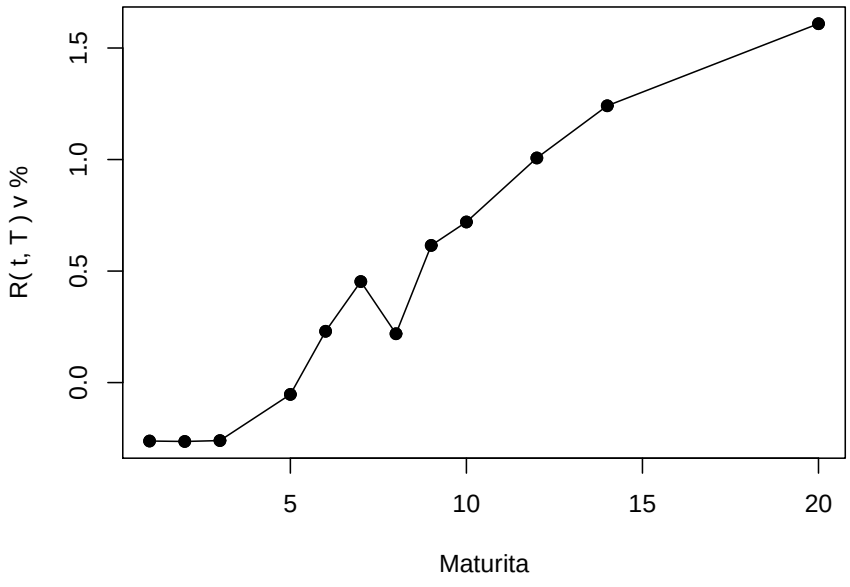
Pokiaľ teda na trhu pozorujeme množinu dlhopisov s rôznymi maturitami, môžeme pomocou vzťahu (9) zostrojiť príslušnú výnosovú krivku. Veľký význam pri modelovaní časovej

štruktúry úrokových mier má aj jej začiatok, teda úroková miera na nekonečne krátky čas, ktorá je označovaná ako $r_t = R(t,t)$, a nazýva sa krátkodobá úroková miera.

Dôležitým pre ďalšie časti práce bude aj pojem forwardovej úrokovej miery $f(t, T_1, T_2)$, čo je úroková miera dohodnutá v čase $t$ na časové obdobie dĺžky $T_2 - T_1$ v budúcnosti. Pokiaľ uvažujeme, že čas $T_2$ je limitne blízky času $T_1$, tak hovoríme o okamžitej forwardovej úrokovej miere, ktorú značíme $f(t,T)$. Taktiež sa dá ukázať, pozri [17, kap. 1.4], platnosť nasledujúceho vzťahu medzi okamžitou forwardovou úrokovou mierou $f(t,T)$ a spojitou úrokovou mierou $R(t,T)$:

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,u)du. \tag{10}$$

Na Obrázku 2 uvádzame príklad časovej štruktúry úrokových mier, kde možno vidieť najbežnejší tvar výnosovej krivky, a to rastúci. Výnosová krivka môže ale tiež byť klesajúca, či prípadne takmer horizontálna. Viac o tvaroch výnosových kriviek a ich ekonomickej interpretácii sa čitateľ môže dočítať v [8] alebo [11].




**Obr. 2:** Časová štruktúra úrokových mier, zostrojená na základe informácii o výnosoch slovenských štátnych dlhopisov zo dňa 29.12.2017. Zdroj dát: [12].

Keďže cena dlhopisov priamo závisí od aktuálnej hodnoty úrokovej miery, vznikla tak potreba vedieť modelovať časovú štruktúru úrokových mier a simulovať jej pohyby v čase.

## 1.4 Svenssonov model časovej štruktúry úrokových mier

V predchádzajúcej časti sme na základe informácii o výnosoch dlhopisov zostrojili časovú štruktúru úrokových mier. Takto zostrojená výnosová krivka ale nie je spojitá, keďže na trhu máme dostupné dlhopisy len s určitými maturitami. My sme úrokové miery, pre dlhopisy s inou ako dostupnou maturitou, zatiaľ interpolovali pomocou lineárneho splajnu. Tento spôsob má však značné nevýhody. Vzhľadom na to, že v neskorších kapitolách tejto práce, pri kalibrácii Ho-Lee modelu, budeme potrebovať poznať celú aktuálnu výnosovú krivku, uvedieme teraz spôsob hladkej aproximácie tejto krivky.

Svensson vo svojom článku [23] uvažuje nasledujúci model pre okamžitú forwardovú krivku:

$$f(t,T) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{T-t}{\lambda_1}} + \beta_2 \frac{T-t}{\lambda_1} e^{-\frac{T-t}{\lambda_1}} + \beta_3 \frac{T-t}{\lambda_2} e^{-\frac{T-t}{\lambda_2}}, \tag{11}$$

kde $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, $\lambda_1$ a $\lambda_2$ sú parametre modelu určujúce tvar forwardovej krivky. Pre lepšiu interpretáciu jednotlivých parametrov je vhodné pozrieť sa na limitné správanie $f(t,T)$. Je jednoduché ukázať, že $\beta_0$ predstavuje hodnotu ku ktorej sa $f(t,T)$ limitne približuje pre $T-t \to \infty$. Naproti tomu, v prípade keď uvažujeme $T-t \to 0$, tak získame, že súčet parametrov $\beta_0 + \beta_1$ predstavuje hodnotu krátkodobej úrokovej miery. Zvyšné parametre ďalej určujú zakrivenie danej forwardovej krivky.

Vzhľadom na to, že platí vzťah (10), spajajúci forwardovú krivku a úrokovú mieru $R(t,T)$, potom spotová úroková miera v Svenssonovom modeli sa dá modelovať ako:

$$R(t,T) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-\frac{T-t}{\lambda_1}}}{\frac{T-t}{\lambda_1}} + \beta_2 \left[ \frac{1 - e^{-\frac{T-t}{\lambda_1}}}{\frac{T-t}{\lambda_1}} - e^{-\frac{T-t}{\lambda_1}} \right] + \beta_3 \left[ \frac{1 - e^{-\frac{T-t}{\lambda_2}}}{\frac{T-t}{\lambda_2}} - e^{-\frac{T-t}{\lambda_2}} \right]. \tag{12}$$

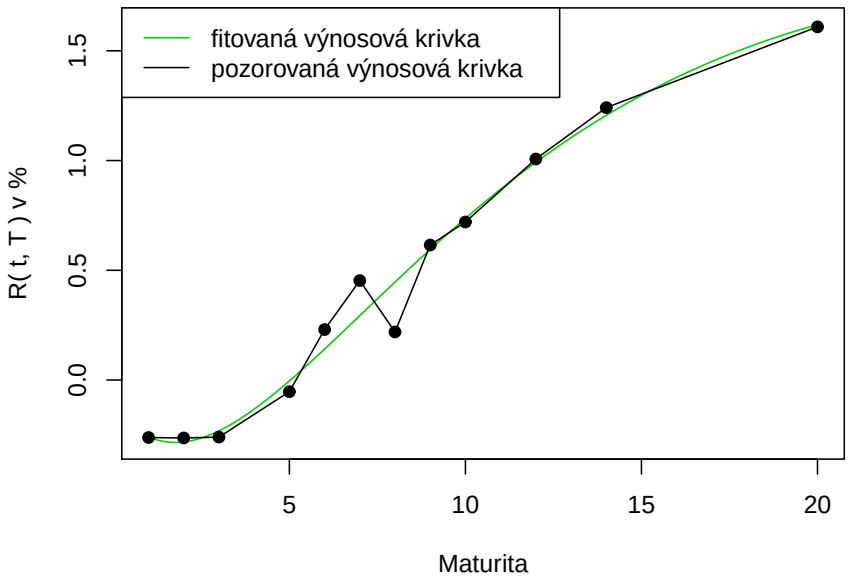
Prakticky je možné tento model realizovať použitím balíčka YieldCurve dostupného v softvéri R.

**Tabuľka 1:** Odhady parametrov Svenssonovho modelu.

| $\beta_0$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,86862 | -0,99829 | -4,74632 | 6,15679 | 3,90334 | 10,87392 |

V Tabuľke 1 uvádzame odhadnuté parametre Svenssonovho modelu použitého na časovú štruktúru úrokových mier z predchádzajúcej kapitoly. Tiež sme aj graficky, na Obráz-

ku 3, zobrazili výsledok tejto aproximácie. Vidíme, že takto zostrojená fitovaná výnosová krivka verne kopíruje priebeh skutočne realizovanej krivky, a preto s týmto modelom budeme aj naďalej pracovať.




**Obr. 3:** Aproximácia časovej štruktúry úrokových mier pomocou Svenssonovho modelu. Čiernou je zobrazená realizovaná výnosová krivka, zelenou je zobrazená jej hladká aproximácia, ktorá je výstupom Svenssonovho modelu.

# 2 Modely úrokových mier

Modelovanie a simulovanie vývoja časovej štruktúry úrokových mier zohráva významnú úlohu v celej finančnej sfére. V začiatkoch modelovania výnosovej krivky boli jednotlivé pokusy založené na modelovaní samotných cien dlhopisov, v súčasnosti je však viac preferované najmä modelovanie pomocou krátkodobej úrokovej miery, ktorému sa aj my budeme v tejto kapitole venovať. V úvode si predstavíme rôzne typy modelov úrokových mier, ich delenie a neskôr, v ďalších kapitolách, sa bližšie zameriame na Ho-Lee model, Vašíčkov model a tiež jeden prípad dvojfaktorového modelu. Popíšeme ich, uvedieme spôsoby kalibrácie a použijeme ich na simuláciu krátkodobej úrokovej miery.

## 2.1 Delenie modelov úrokových mier

### 2.1.1 Jednofaktorové vs. viacfaktorové modely

Modely krátkodobej úrokovej miery je možné deliť na jednofaktorové a viacfaktorové. Jednofaktorové modely predpokladajú, že krátkodobá úroková miera sa riadi nasledujúcim procesom:

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t, \tag{13}$$

kde $\mu(r_t, t)$ predstavuje drift procesu, $\sigma(r_t, t)$ zas jeho volatilitu, a $W_t$ je štandardný Wienerov proces. Vidíme, že tak ako drift, aj volatilita môžu byť funkciami času i krátkodobej úrokovej miery. Spomedzi jednofaktorových modelov majú významné zastúpenie najmä tzv. mean-reversion modely, v ktorých má drift tvar:

$$\mu(r_t, t) = \kappa(\theta - r_t). \tag{14}$$

Tieto sa vyznačujú tým, že z dlhodobého hľadiska sa v nich krátkodobá úroková miera približuje k ustálenej hodnote $\theta$. Patrí k nim napríklad Vašíčkov model, ktorému sa bližšie venujeme v kapitole 4. Prehľad najznámejších jednofaktorových modelov, spolu s informáciou o tom, či pripúšťajú zápornú úrokovú mieru uvádzame v Tabuľke 2.

Viacfaktorové modely, ako samotný názov naznačuje, využívajú viacero zdrojov náhodnosti, čo im umožňuje lepšie opisovať pohyby časovej štruktúry úrokových mier. Ako Brigo a Mercurio uvádzajú v [4, str. 139], pri analýze výnosovej krivky metódou hlavných komponentov, dva faktory sú schopné vysvetliť $85 - 90\%$ variancie, čo môže značiť, že

**Tabuľka 2:** Prehľad jednofaktorových modelov krátkodobej úrokovej miery.

| Model | Dynamika | Pripúšťa $r_t < 0$? |
|---|---|---|
| Dothan | $dr_t = \sigma r_t dW_t$ | nie |
| Vašíček | $dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$ | áno |
| CIR | $dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$ | nie |
| Black-Karasinski | $d\ln r_t = (\theta_t - a_t \ln r_t)\, dt + \sigma_t dW_t$ | nie |
| Ho-Lee | $dr_t = \theta_t dt + \sigma dWt$ | áno |
| Hull-White | $dr_t = \kappa_t(\theta_t - r_t)dt + \sigma_t dW_t$ | áno |

dvojfaktorové modely by mohli byť lepšie v porovnaní s jednofaktorovými. V tejto práci sa budeme v kapitole 5 bližšie venovať dvojfaktorovému modelu, kde jeden z faktorov je modelovaný Vašíčkovým procesom, a druhý faktor sa riadi CIR dynamikou.

### 2.1.2 Ekvilibriové vs. bezarbitrážne modely

Ekvilibriové modely vychádzajú z ekonomických predpokladov, a uvažujúc, že trh sa nachádza v rovnovážnom stave, následne definujú proces pre krátkodobú úrokovú mieru. Na základe čoho potom produkujú ako ceny derivátov, tak aj celú časovú štruktúru úrokových mier. Patrí k nim už spomínaný Vašíčkov, Dothanov alebo CIR model.

Nevýhodou ekvilibriových modelov je to, že nedokážu presne replikovať aktuálnu časovú štruktúru úrokových mier. A to bol zároveň podnet toho, aby vznikli nové modely, ktoré tento nedostatok odstraňujú, čím prichádzame k bezarbitrážnym modelom. Tie, narozdiel od ekvilibriových modelov, berú aktuálnu časovú štruktúru úrokových mier ako vstup do modelu, a teda sú schopné ju dokonale kopírovať. V tomto zmysle, tak aj generujú ceny dlhopisov, ktoré sú zhodné s trhovými cenami. Patrí k nim napríklad Ho-Lee model, či Hull-Whiteov model.

# 3 Ho-Lee model

V tejto kapitole sa budeme zaoberať Ho-Lee modelom, ktorý patrí medzi jednofaktorové modely krátkodobej úrokovej miery. V rámci Ho-Lee modelu sa predpokladá, že krátkodobá úroková miera sa riadi nasledovným stochastickým procesom:

$$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t, \tag{15}$$

kde $\sigma$ je konštantná volatilita, $\theta_t$ predstavuje časovo závislý drift a $W_t$ je štandardný Wienerov proces. Keďže Ho-Lee model patrí medzi bezarbitrážne modely, tak funkcia driftu $\theta_t$ je následne dourčená tak, aby model kopíroval počiatočnú štruktúru úrokových mier.

Alternatívne je možné Ho-Lee model zapísať pomocou stochastického procesu pre vývoj okamžitej forwardovej úrokovej miery $f(t,T)$ (pozri [17, kap. 6.5.1]), a to nasledovným spôsobom:

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma dW_t, \tag{16}$$

pričom $\sigma$ je opäť konštantná volatilita a $\alpha(t,T)$ je časovo závislý drift. Z rovností (15) a (16) vidíme, že krátkodobá úroková miera a aj forwardová úroková miera sa v tomto modeli riadia normálnym rozdelením. Keďže v modeli pracujeme s predpokladom bezarbitrážnosti, tak sa dá ukázať (pozri [17, kap. 6.1]), že pre voľbu driftu $\alpha(t,T)$ musí platiť:

$$\alpha(t,T) = \sigma^2(T-t) + \sigma\lambda_t. \tag{17}$$

Z rovnice (17) je vidno, že drift je v tomto prípade deterministickou funkciou času $t$ a maturity $T$ danej forwardovej úrokovej miery. Takisto sa tu zavádza nový parameter $\lambda_t$, ktorý popisuje tzv. trhovú cenu rizika. Vidíme, že trhová cena rizika môže byť tiež funkciou aktuálneho času $t$, v našej práci sa však pre zjednodušenie obmedzíme len na prípad, keď uvažujeme, že trhová cena rizika je v čase konštantná, teda platí $\lambda_t = \lambda$, pre $\forall t \in (0,T)$.

Po integrácii rovnosti (16) cez interval $(0,t)$ získame nasledovný predpis pre forwardovú úrokovú mieru:

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \sigma W_t. \tag{18}$$

Pomocou predpisu (18) pre $f(t,T)$ a nasledujúceho vzťahu medzi forwardovou úrokovou

mierou a krátkodobou úrokovou mierou:

$$r_t = f(t,t), \tag{19}$$

získame predpis pre vývoj krátkodobej úrokovej miery v tvare:

$$r_t = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds + \sigma W_t. \tag{20}$$

Respektíve po substitúcii za $\alpha(t,T)$ pomocou vzťahu (17), nadobudne rovnosť (20) tvar:

$$r_t = f(0,t) + \int_0^t [\sigma^2(t-s) + \sigma\lambda]ds + \sigma W_t. \tag{21}$$

Pokiaľ teda chceme modelovať krátkodobú úrokovú mieru pomocou Ho-Lee modelu, tak z predpisu (21) vyplýva, že potrebujeme poznať počiatočnú forwardovú krivku $f(0,t)$ pre $\forall t \in (0,T)$, a tiež aj hodnoty $\sigma$ a $\lambda$. Nič z toho však nie je na trhu dokonale pozorovateľné a preto tieto parametre musíme aproximovať ich odhadmi, čím sa dostávame ku kalibrácii Ho-Lee modelu na reálne dáta, ktorú si odvodíme v nasledujúcej časti.

Predtým ako prejdeme k samotnej kalibrácii modelu, uvedieme ešte vzťah, pomocou ktorého získame okamžitú forwardovú krivku pre daný čas $t$. Ten vznikne odčítaním rovnosti (20) od rovnosti (18) a substitúciou za $\alpha(t,T)$ podľa (17):

$$f(t,T) = f(0,T) + f(t,t) - f(0,t) + \sigma^2(T-t)t. \tag{22}$$

## 3.1 Kalibrácia Ho-Lee modelu

Dôležitou súčasťou pri modelovaní úrokových mier pomocou rôznych modelov je ich kalibrácia vzhľadom na reálne trhové dáta, teda týmto procesom sa snažíme model nastaviť tak, aby čo najlepšie odrážal skutočný svet. Teraz si preto odvodíme kalibráciu Ho-Lee modelu, konkrétnejšie, ukážeme si, akým spôsobom budeme aproximovať parametre $\sigma$ a $\lambda$ v tomto modeli.

Na začiatok si zoberme dva časové okamihy vzdialené od seba o časový úsek $\triangle t$. Pri aplikácii na reálne dáta budeme pracovať s $\triangle t = \frac{1}{252}$. Nech teda $t_i = t$ a $t_{i+1} = t + \triangle t$.

Pomocou predpisu (20) vieme tak zapísať stochastickú diferenciálnu rovnicu pre vývoj $r_t$ v daných časoch $t_i$ a $t_{i+1}$ nasledovným spôsobom:

$$r_{t+\triangle t} = f(0,t+\triangle t) + \int_0^{t+\triangle t} \alpha(s,t+\triangle t)ds + \sigma W_{t+\triangle t}, \tag{23}$$

$$r_t = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds + \sigma W_t. \tag{24}$$

Teda následne pre rozdiel úrokových mier $r_{t+\triangle t} - r_t$ platí:

$$\begin{aligned} r_{t+\triangle t} - r_t = f(0, t+\triangle t) + \int_0^{t+\triangle t} [\sigma^2(t+\triangle t - s) + \sigma\lambda]ds + \sigma W_{t+\triangle t} \\ - f(0,t) - \int_0^t [\sigma^2(t-s) + \sigma\lambda]ds - \sigma W_t, \end{aligned} \tag{25}$$

pričom sme využili vzťah (17) pre drift $\alpha(t,T)$. Pomocou vlastností určitých integrálov upravíme rovnosť (25) nasledovne:

$$\begin{aligned} r_{t+\triangle t} - r_t = f(0, t+\triangle t) - f(0,t) + \sigma W_{t+\triangle t} - \sigma W_t \\ + \int_0^t \sigma^2(t+\triangle t - s)ds + \int_0^t \sigma\lambda ds + \int_t^{t+\triangle t} [\sigma^2(t+\triangle t - s) - \sigma\lambda]ds \\ - \int_0^t \sigma^2(t-s)ds - \int_0^t \sigma\lambda ds. \end{aligned} \tag{26}$$

Zlúčením výrazov a integráciou získame:

$$\begin{aligned} r_{t+\triangle t} - r_t = f(0, t+\triangle t) - f(0,t) + \sigma\left(W_{t+\triangle t} - W_t\right) \\ + \left[\sigma^2 \triangle t s\right]_0^t + \left[\sigma^2(t+\triangle t)s - \frac{\sigma^2 s^2}{2} + \sigma\lambda s\right]_t^{t+\triangle t}. \end{aligned} \tag{27}$$

Následným vyčíslením určitých integrálov dostaneme:

$$\begin{aligned} r_{t+\triangle t} - r_t = f(0, t+\triangle t) - f(0,t) + \sigma\left(W_{t+\triangle t} - W_t\right) \\ + \sigma^2 \triangle t t + \sigma^2(t+\triangle t)(t+\triangle t) - \frac{\sigma^2(t+\triangle t)^2}{2} + \sigma\lambda(t+\triangle t) \\ - \sigma^2(t+\triangle t)t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \sigma\lambda t, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} r_{t+\triangle t} - r_t = f(0, t+\triangle t) - f(0,t) + \sigma\left(W_{t+\triangle t} - W_t\right) \\ + \sigma^2 \triangle t t + \sigma^2(t+\triangle t)\triangle t - \frac{\sigma^2(t^2 + 2t\triangle t + \triangle t^2)}{2} + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sigma\lambda\triangle t, \end{aligned} \tag{29}$$

respektíve:

$$r_{t+\triangle t} - r_t = f(0, t+\triangle t) - f(0,t) + \sigma\left(W_{t+\triangle t} - W_t\right) + \sigma^2 \triangle t t + \frac{\sigma^2 \triangle t^2}{2} + \sigma\lambda\triangle t. \tag{30}$$

Na ľavej strane ponecháme len výraz $r_{t+\triangle t}$:

$$r_{t+\triangle t} = r_t + f(0, t+\triangle t) - f(0,t) + \sigma^2 \triangle t t + \frac{\sigma^2 \triangle t^2}{2} + \sigma\lambda\triangle t + \sigma\left(W_{t+\triangle t} - W_t\right). \tag{31}$$

Z rovnosti (31) tak vieme určit podmienené pravdepodobnostné rozdelenie krátkodobej úrokovej miery $r_{t+\triangle t}$, ktoré je normálne s danými parametrami:

$$r_{t+\triangle t} \mid r_t \sim \mathcal{N}\left(r_t + f(0, t+\triangle t) - f(0,t) + \sigma^2 \triangle t t + \sigma\lambda\triangle t + \frac{\sigma^2 \triangle t^2}{2}, \quad \sigma^2 \triangle t\right). \tag{32}$$

Na základe tohto pravdepodobnostného rozdelenia tak vieme určiť odhady parametrov $\sigma$ a $\lambda$. My na to v našej práci použijeme metódu maximálnej vierohodnosti. Keďže $r_{t+\triangle t}$ má normálne rozdelenie s parametrami uvedenými v (32), potom jeho funkcia hustoty nadobúda tvar:

$$f(\lambda, \sigma^2, r_{t+\triangle t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\triangle t}} e^{-\frac{\left(r_{t+\triangle t} - r_t - f(0,t+\triangle t) + f(0,t) - \sigma^2\triangle t t - \sigma\lambda\triangle t - \frac{\sigma^2\triangle t^2}{2}\right)^2}{2\sigma^2\triangle t}}. \tag{33}$$

A teda príslušná vierohodnostná funkcia má tvar:

$$\mathcal{L}(\lambda, \sigma^2, r_{t+\triangle t}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2\triangle t)^{\frac{2}{n}}} e^{-\frac{\sum_{i=0}^{n-1}\left(r_{t_{i+1}} - r_{t_i} - f(0,t_{i+1}) + f(0,t_i) - \sigma^2\triangle t t_i - \sigma\lambda\triangle t - \frac{\sigma^2\triangle t^2}{2}\right)^2}{2\sigma^2\triangle t}}, \tag{34}$$

ale keďže technicky sa oveľa lepšie pracuje s logaritmom vierohodnostnej funkcie, ktorý samotný výsledok nezmení, uvádzame aj ten:

$$\begin{aligned}\ell(\lambda, \sigma^2, r_{t+\triangle t}) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi\triangle t - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2\triangle t}\sum_{i=0}^{n-1}\Big(r_{t_{i+1}} - r_{t_i} - f(0,t_{i+1}) \\ + f(0,t_i) - \sigma^2\triangle t t_i - \sigma\lambda\triangle t - \frac{\sigma^2\triangle t^2}{2}\Big)^2,\end{aligned} \tag{35}$$

Následne funkciu $\ell(\lambda, \sigma^2, r_{t+\triangle t})$ zderivujeme podľa parametra $\lambda$ :

$$\frac{\partial\ell(\lambda, \sigma^2, r_{t+\triangle t})}{\partial\lambda} = -\frac{2\sigma\triangle t}{2\sigma^2\triangle t}\sum_{i=0}^{n-1}\left(r_{t_{i+1}} - r_{t_i} - f(0,t_{i+1}) + f(0,t_i) - \sigma^2\triangle t t_i - \sigma\lambda\triangle t - \frac{\sigma^2\triangle t^2}{2}\right). \tag{36}$$

Túto deriváciu položíme rovnú nule a vyjadríme parameter $\lambda$:

$$0 = -\frac{1}{\sigma}\sum_{i=0}^{n-1}\left(r_{t_{i+1}} - r_{t_i} - f(0,t_{i+1}) + f(0,t_i) - \sigma^2\triangle t t_i - \frac{\sigma^2\triangle t^2}{2}\right) + \lambda\triangle t n, \tag{37}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n\triangle t\sigma}\sum_{i=0}^{n-1}\left(r_{t_{i+1}} - r_{t_i} - f(0,t_{i+1}) + f(0,t_i) - \sigma^2\triangle t t_i - \frac{\sigma^2\triangle t^2}{2}\right). \tag{38}$$

Odhad parametra $\lambda$ je tak určený rovnicou (38), stále tam ale vystupuje neznáma $\sigma^2$. Obdobne teda funkciu $\ell(\lambda, \sigma^2, r_{t+\triangle t})$ zderivujeme aj podľa parametra $\sigma^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ell(\lambda, \sigma^2, r_{t+\triangle t})}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2\triangle t}\sum_{i=0}^{n-1}\Big(r_{t_{i+1}} - r_{t_i} - f(0,t_{i+1}) + f(0,t_i) \\ - \sigma^2\triangle t t_i - \sigma\lambda\triangle t - \frac{\sigma^2\triangle t^2}{2}\Big)^2 - \frac{2}{2\sigma^2\triangle t}\sum_{i=0}^{n-1}\Big(r_{t_{i+1}} - r_{t_i} \\ - f(0,t_{i+1}) + f(0,t_i) - \sigma^2\triangle t t_i - \sigma\lambda\triangle t - \frac{\sigma^2\triangle t^2}{2}\Big)\Big(-\triangle t t_i \\ - \frac{\lambda\triangle t}{2\sigma} - \frac{\triangle t^2}{2}\Big).\end{aligned} \tag{39}$$

Následne túto deriváciu položíme rovnú nule:

$$
\begin{aligned}
0 = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2 \triangle t} \sum_{i=0}^{n-1} \Bigg( & r_{t_{i+1}} - r_{t_i} - f(0, t_{i+1}) + f(0, t_i) - \sigma^2 \triangle t t_i \\
& - \sigma \hat{\lambda} \triangle t - \frac{\sigma^2 \triangle t^2}{2} \Bigg)^2 - \frac{1}{\sigma^2 \triangle t} \sum_{i=0}^{n-1} \Bigg( r_{t_{i+1}} - r_{t_i} - f(0, t_{i+1}) + f(0, t_i) \\
& - \sigma^2 \triangle t t_i - \sigma \hat{\lambda} \triangle t - \frac{\sigma^2 \triangle t^2}{2} \Bigg) \Bigg( - \triangle t t_i - \frac{\hat{\lambda} \triangle t}{2\sigma} - \frac{\triangle t^2}{2} \Bigg),
\end{aligned}
\tag{40}
$$

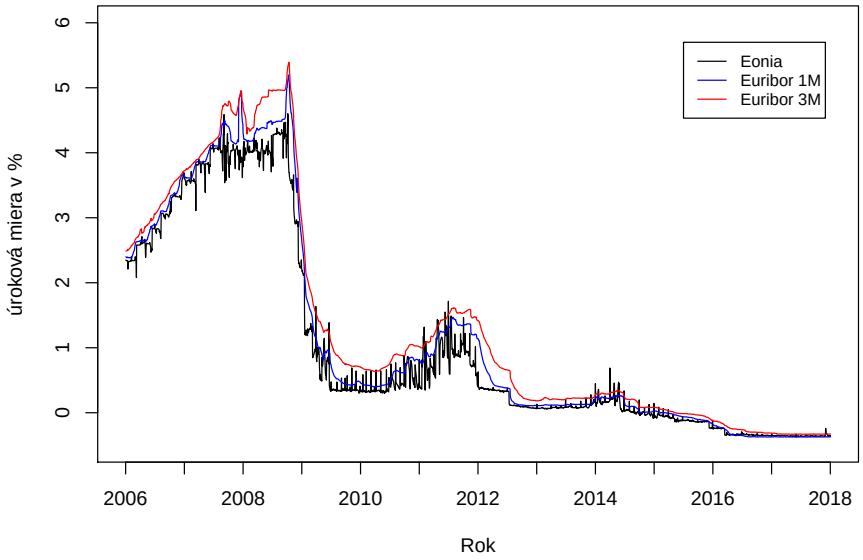
pričom za $\lambda$ sme dosadili odhad $\hat{\lambda}$, ktorý je určený formulou (38). Za predpokladu, že poznáme počiatočnú forwardovú krivku $f(0, t)$, tak výraz na pravej strane rovnosti (40) obsahuje len jednu neznámu premennú, ktorou je $\sigma^2$. Odhad pre tento parameter je teda koreňom rovnice (40), a v softvéri R ho vieme nájsť napríklad pomocou funkcie uniroot(). Následne spätnou substitúciou do formuly (38) získame aj odhad parametra $\lambda$.

Ako sme už ale vyššie uviedli, toto všetko vieme použiť, len ak poznáme celú počiatočnú forwardovú krivku. Tento problém sme už našťastie vyriešili v kapitole 1.4, kde sme uviedli jej hladkú aproximáciu pomocou Svenssonovho modelu.

## 3.2 Kalibrácia Ho-Lee modelu - reálne dáta

V kapitole 3.1 sme teoreticky odvodili spôsob kalibrácie parametrov vystupujúcich v Ho-Lee modeli. V tejto časti využijeme daný postup na reálnych trhových dátach. Otázkou zostáva, čím je vhodné aproximovať krátkodobú úrokovú mieru, keďže tú na trhu nie je možné pozorovať. Tu existujú rôzne prístupy. Jednou z možností je jej aproximácia pomocou krátkodobých úrokových mier, ako je napríklad jednomesačný, či trojmesačný Euribor. Ďalšou z možností je aproximácia krátkodobej úrokovej miery pomocou tzv. overnight-ovej úrokovej miery, ako je napríklad Eonia, čo je referenčná sadzba pre skutočne realizované jednodňové obchody v mene euro.

Na Obrázku 4 je zobrazený vývoj úrokovej miery Eonia spolu s vývojom jednomesačnej a trojmesačnej úrokovej miery Euribor v období medzi rokmi 2006 až 2017 vrátane. Na prvý pohľad vidíme, že Eonia aj Euribor majú približne rovnaký priebeh, ale Eonia je volatilnejšia, čo je spôsobené tým, že oveľa rýchlejšie reaguje na aktuálne pohyby na trhu. Vzhľadom na to, že Eonia viac zodpovedá definícii krátkodobej úrokovej miery, budeme v tejto práci pracovať s touto aproximáciou.




**Obr. 4:** Časový priebeh vývoja úrokových mier Eonia (čiernou), jednomesačného (modrou) a trojmesačného (červenou) Euribor-u v období medzi rokmi 2006 až 2017 vrátane. Zdroj dát: [13].

Následne sme tento časový rad použili ako vstupné dáta do kalibrácie Ho-Lee modelu, ktorú sme už podrobne popísali v kapitole 3.1, čím sme získali jednotlivé odhady parametrov $\sigma$ a $\lambda$. Nami odhadnuté parametre uvádzame v Tabuľke 3.

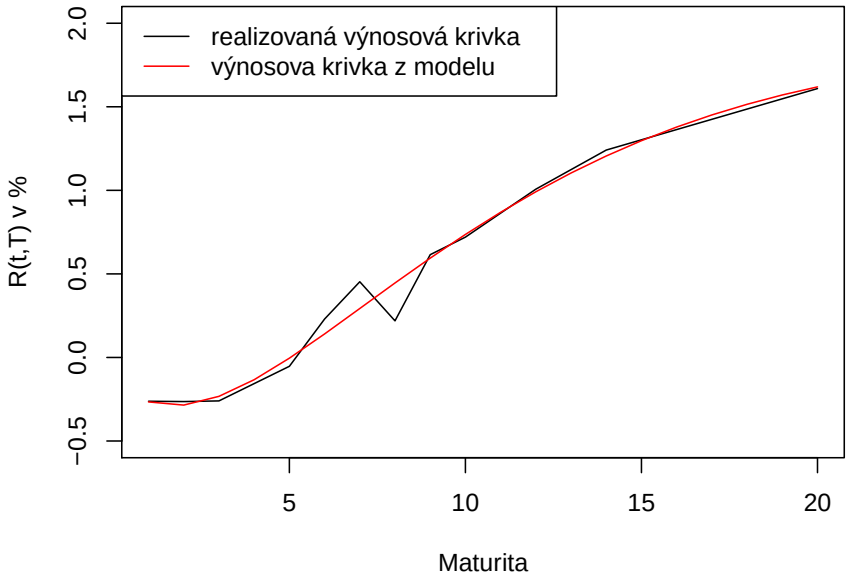
**Tabuľka 3:** Odhad parametrov Ho-Lee modelu.

| Parameter | Odhad hodnoty |
|---|---|
| $\sigma$ | 0,01351 |
| $\lambda$ | -0.40126 |

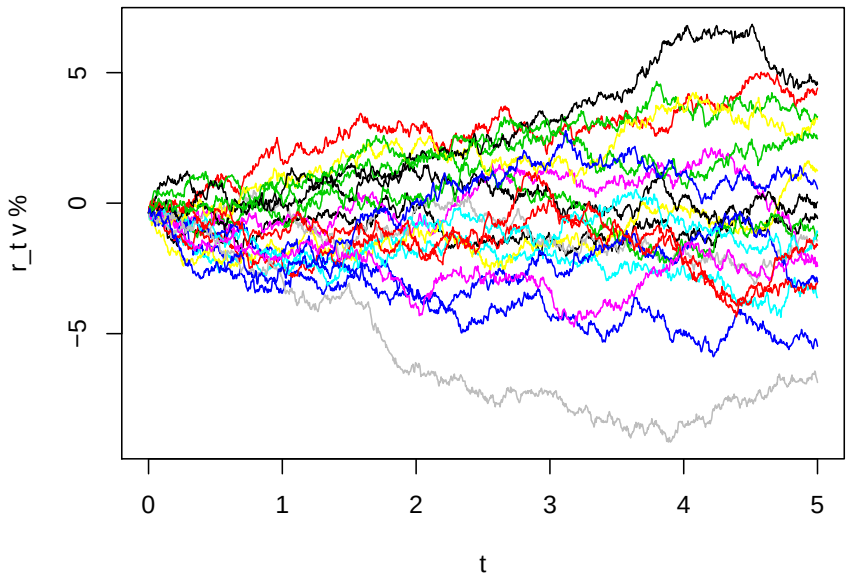
Ako prvé ďalej na Obrázku 5 zobrazujeme realizovanú a fitovanú výnosovú krivku. Keďže Ho-Lee model je bezarbitrážnym modelom krátkodobej úrokovej miery, a teda využíva celú informáciu o aktuálnej časovej štruktúre úrokových mier, tak fitovanie je v tomto prípade dokonalé a zodpovedá aproximácii výnosovej krivky Svennsonovým modelom.

Následne sme pomocou Ho-Lee modelu simulovali priebeh krátkodovej úrokovej miery na obdobie piatich rokov. Príklady týchto simulácii zobrazujeme na grafe Obr. 6, kde si

môžeme všimnúť pomerne veľkú variabilitu vo vývoji $r_t$.




**Obr. 5:** Grafické porovnanie reálnej výnosovej krivky (čiernou) a výnosovej krivky získanej z Ho-Lee modelu.




**Obr. 6:** Simulácie krátkodobej úrokovej miery pomocou Ho-Lee modelu na obdobie 5 rokov.

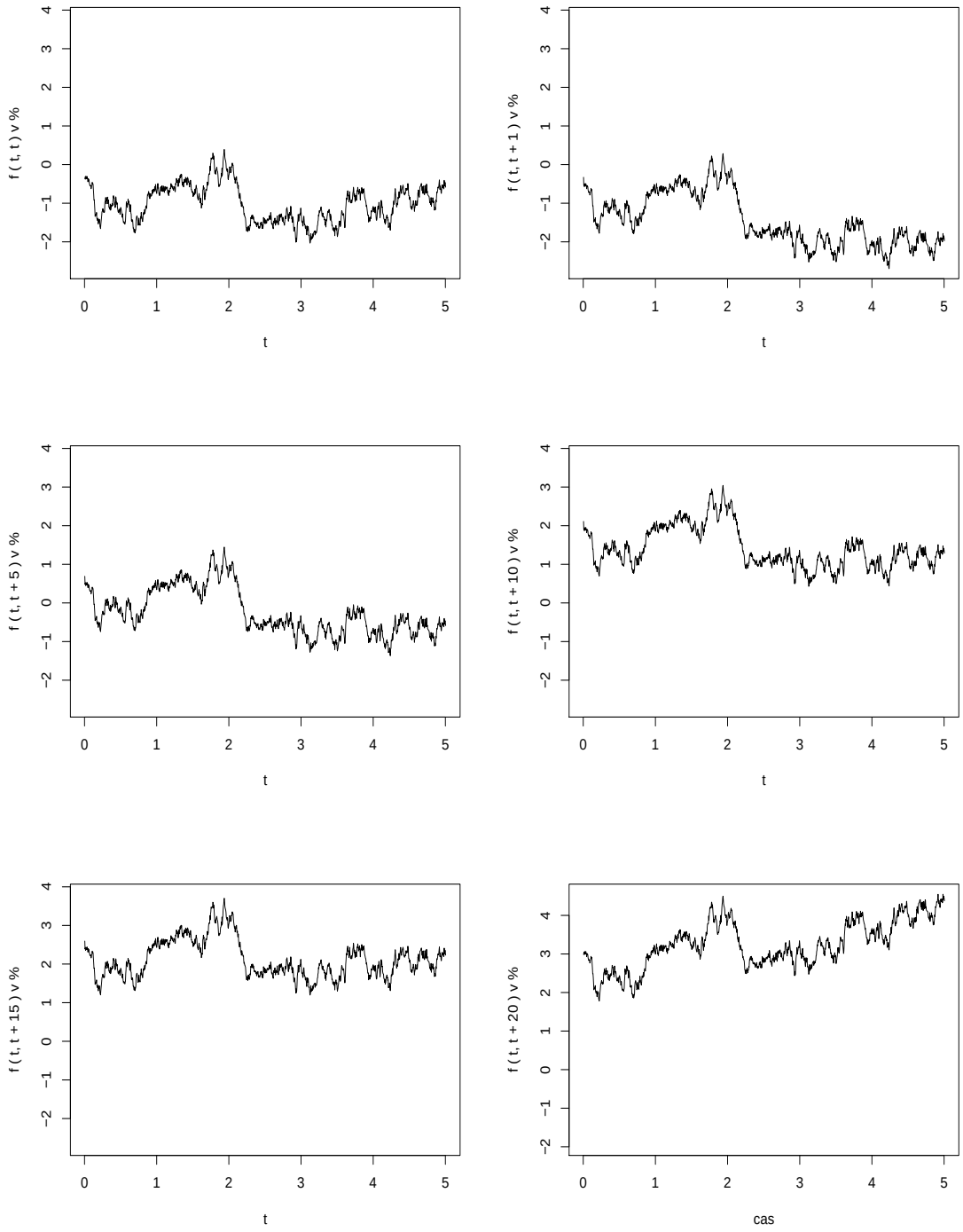
Na nasledujúcich grafoch, vyobrazených na Obr. 7, sme tiež zobrazili jednu zo simulácii vývoja okamžitých forwardových úrokových mier s rôznymi dobami splatnosti na obdobie piatich rokov. Pre všetky doby splatnosti pozorujeme približne rovnaký priebeh a, ako sa dalo očakávať, zatiaľ čo okamžité forwardové úrokové miery s nižšou dobou splatnosti sa držali v záporných číslach, tie s neskoršou splatnosťou sa pohybovali v rozmedzí $1 - 4\%$.

Keď si zoberieme jeden časový okamih, tak pomocou jednotlivých hodnôt forwardových úrokových mier vieme vyskladať forwardovú krivku v danom čase. A teda vieme sledovať vývoj forwardových kriviek (pozri Obr. 8). A keďže forwardová a výnosová krivka sú prepojené vzťahom (10), tak vieme následne sledovať aj vývoj príslušných výnosových kriviek v čase (pozri Obr. 9).

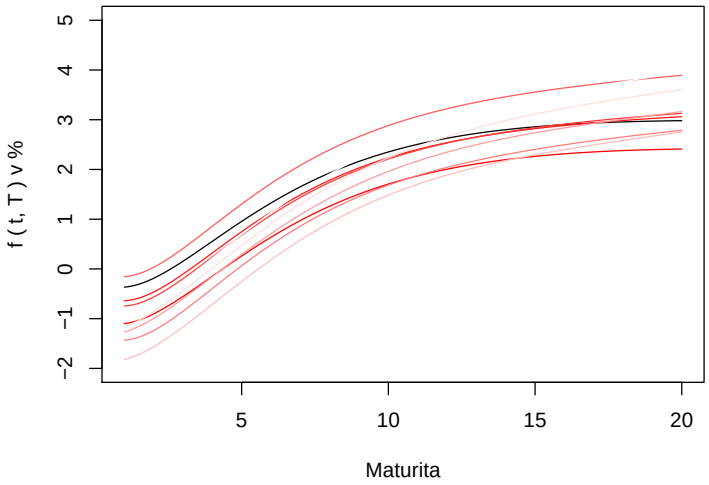
Však, pre jednoduchosť prevodu medzi forwardovou krivkou a výnosovou krivkou v Svenssonovom modeli (pozri kapitola 1.4), sme sa rozhodli prevádzať forwardové krivky na výnosové pomocou tohto modelu.

Samozrejme jedna simulácia nám ešte nepovie, ako sa daný model správa, a preto sme ďalej spravili sto rôznych simulácii vývojov $f(t, T)$, ktoré sme následne spriemerovali a zostrojili sme vyššie zmienené grafy aj pre tieto spriemerované $f(t, T)$, ktoré možno vidieť na Obr. 10, Obr. 11 a na Obr. 12.

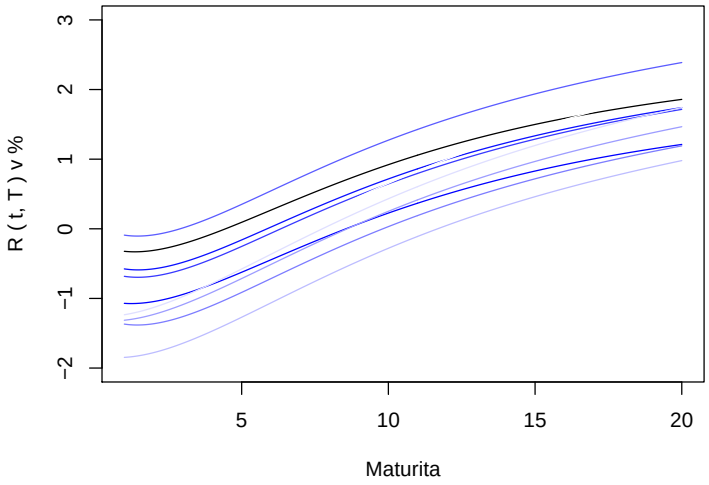
V tomto prípade pozorujeme, že takto spriemerované forwardové úrokové miery vykazujú klesajúci trend, pričom opäť forwardové úrokové miery s nižšou dobou splatnosti sú situované pod hladinou $0\%$. Taktiež príslušné, pomerne široké, intervaly spoľahlivosti nasvedčujú tomu, že v našich simuláciach bola veľká rozmanitosť. Pri priebehu forwardových a výnosových kriviek zas pozorujeme pokles.



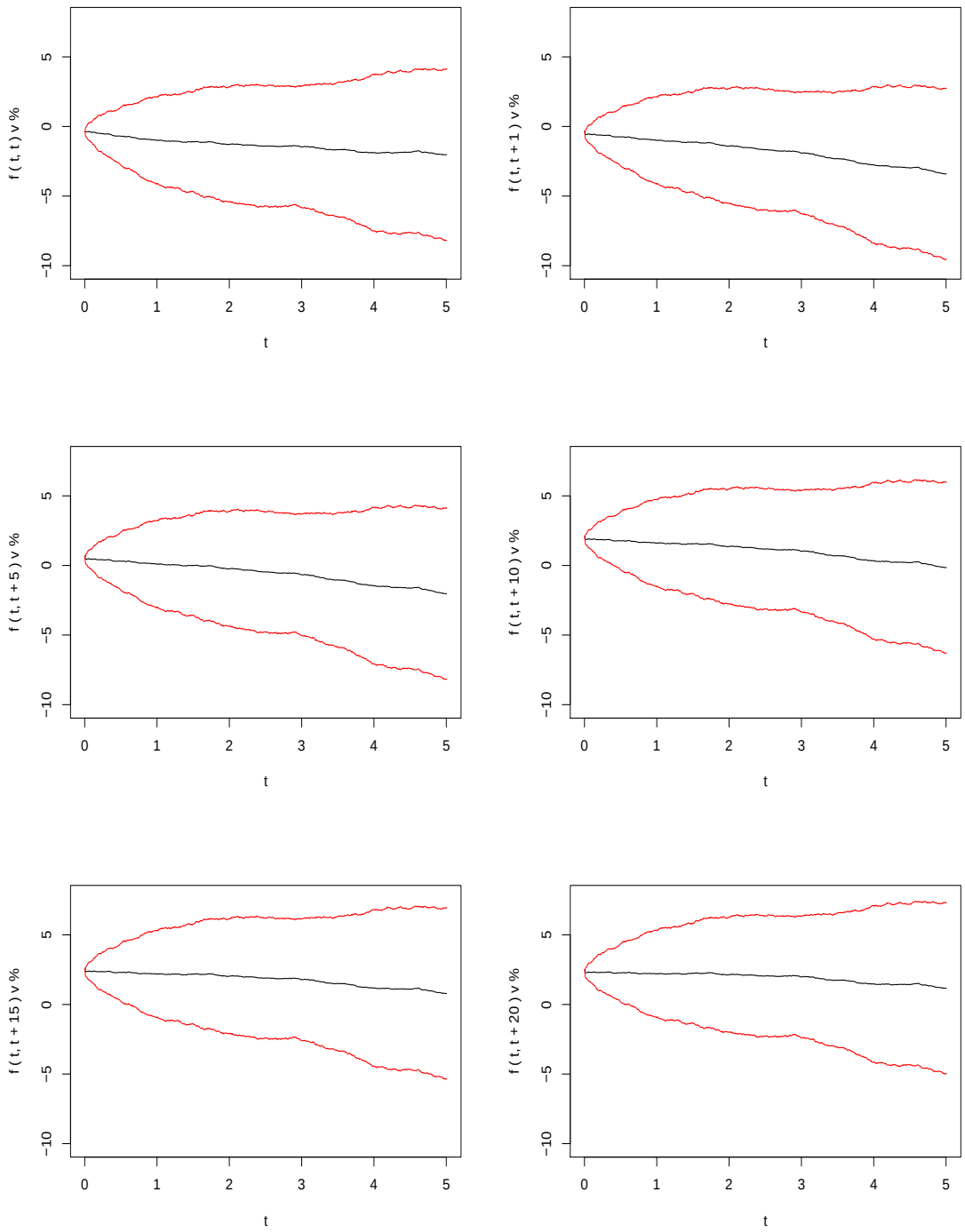

**Obr. 7:** Simulácia okamžitej forwardovej úrokovej miery s rôznou dobou splatnosti pomocou Ho-Lee modelu na obdobie piatich rokov.



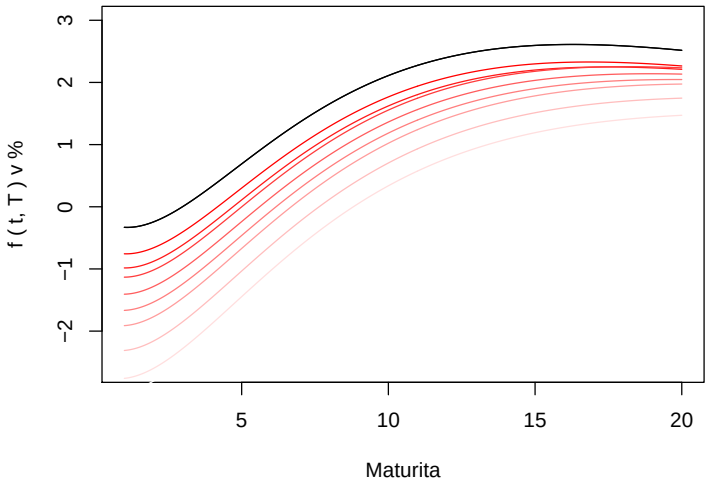

**Obr. 8:** Vývoj forwardovej krivky v čase. Zobrali sme jednu simuláciu vývoja $f(t,T)$ na obdobie piatich rokov. V každom okamihu sme zostrojili príslušnú forwardovú krivku, ktorú sme následne kvôli prevodu na výnosovú krivku, aproximovali pomocou Svenssonovho modelu. Zobrazujeme len počiatočnú forwardovú krivku (čiernou), a následne zobrazené krivky prislúchajú časovému okamihu o pol roka neskôr (červenou). Čím sme ďalej od počiatočného dňa, tým je farba bledšia.



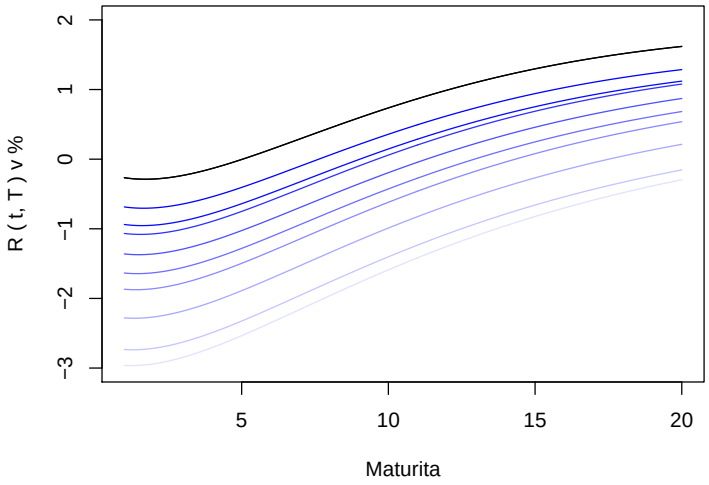

**Obr. 9:** Vývoj výnosovej krivky v čase. Zobrali sme jednu simuláciu vývoja $f(t,T)$ na obdobie piatich rokov. V každom okamihu sme zostrojili forwardovú krivku, ktorú sme následne kvôli prevodu na výnosovú krivku, aproximovali pomocou Svenssonovho modelu. Zobrazujeme len počiatočnú výnosovú krivku (čiernou), a následne zobrazené krivky prislúchajú časovému okamihu o pol roka neskôr (modrou). Čím sme ďalej od počiatočného dňa, tým je farba bledšia.




**Obr. 10:** Spriemerovaná forwardová úroková miera založená na sto simuláciach $f(t,T)$ pomocou Ho-Lee modelu na obdobie piatich rokov. Červenou sú zobrazené hodnoty $\overline{f(t,T)} \pm 2\sqrt{Var(f(t,T))}$, ktoré zodpovedajú príslušným intervalom spoľahlivosti. Vidíme, že tieto intervali sú pomerne široké, teda aj jednotlivé simulácie forwardových kriviek boli rozmanité.




**Obr. 11:** Vývoj forwardovej krivky v čase. Zobrali sme sto simulácii vývoja $f(t,T)$ na obdobie piatich rokov. Tieto $f(t,T)$ sme spriemerovali a zostrojili sme forwardovú krivku, ktorú sme následne kvôli prevodu na výnosovú krivku, aproximovali Svenssonovým modelom. Zobrazujeme len počiatočnú forwardovú krivku (čiernou), a následne zobrazené krivky prislúchajú časovému okamihu o pol roka neskôr (červenou). Čím sme ďalej od počiatočného dňa, tým je farba bledšia.




**Obr. 12:** Vývoj výnosovej krivky v čase. Zobrali sme sto simulácii vývoja $f(t,T)$ na obdobie piatich rokov. Tieto $f(t,T)$ sme spriemerovali a zostrojili sme forwardovú krivku, ktorú sme následne kvôli prevodu na výnosovú krivku, aproximovali Svenssonovým modelom. Zobrazujeme len počiatočnú výnosovú krivku (čiernou), a následne zobrazené krivky prislúchajú časovému okamihu o pol roka neskôr (modrou). Čím sme ďalej od počiatočného dňa, tým je farba bledšia.

# 4 Vašíčkov model

Ďalším z modelov pripúšťajúcich záporné úrokové miery, ktorému sa budeme bližšie venovať, je Vašíčkov model. Tento model patrí medzi rovnovážne modely a vyznačuje sa tiež vlastnosťou návratnosti k strednej hodnote. V nasledujúcich častiach si Vašíčkov model bližšie popíšeme, uvedieme rozdelenie krátkodobej úrokovej miery v tomto modeli a tiež sa zameriame na jeho kalibráciu vzhľadom na reálne dáta. Pri písaní tejto kapitoly sme vychádzali z [4, 17, 19] a [25].

Vašíčkov model predpokladá, že krátkodobá úroková miera sa v rizikovo neutrálnom svete riadi nasledujúcou dynamikou:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma d\tilde{W}_t, \tag{41}$$

kde $\kappa > 0$, $\theta$, $\sigma \geq 0$ sú konštantné parametre modelu. Z predpisu vidíme, že pokiaľ je hodnota $r_t$ pod hodnotou $\theta$, tak drift procesu je kladný, a zas naopak, ak $r_t$ presahuje hodnotu $\theta$, tak drift je záporný. V každom prípade je teda krátkodobá úroková miera priťahovaná k rovnovážnej hodnote $\theta$, a to tým viac, čím je parameter $\kappa$ väčší.

Uvažujme, že trhová cena rizika je konštantná, teda $\lambda(r_t, t) = \lambda$. Keďže platí vzťah:

$$d\tilde{W}_t = \lambda dt + dW_t \tag{42}$$

medzi prírastkami Wienerovho procesu v rizikovo neutrálnej miere a dynamike reálneho sveta, potom môžeme model (41) prepísať na tvar:

$$dr_t = (\kappa\theta + \sigma\lambda - \kappa r_t)dt + \sigma dW_t. \tag{43}$$

Zavedením substitúcii:

$$\begin{aligned} a &= \kappa, \\ b &= \kappa\theta + \sigma\lambda, \end{aligned} \tag{44}$$

tak dostaneme, že krátkodobá úroková miera sa riadi nasledujúcim procesom:

$$dr_t = a(\beta - r_t)dt + \sigma dW_t, \tag{45}$$

pričom

$$\beta = \frac{b}{a}. \tag{46}$$

Pomocou Fokker-Planckovej parciálnej diferencálnej rovnice sa dá odvodiť funkcia hustoty pre proces (45). Krátkodobá úroková miera má tak nasledujúce časovo podmienené rozdelenie:

$$r_t \mid r_0 \sim \mathcal{N}\left(r_0 e^{-at} + \beta(1 - e^{-at}), \quad \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right)\right), \tag{47}$$

kde $r_0$ je počiatočná hodnota krátkodobej úrokovej miery. Pre viac informácii ohľadom odvodenia predchádzajúceho pravdepodobnostného rozdelenia odporúčame čitateľovi pozrieť [19, kap. 7.2].

## 4.1 Časová štruktúra úrokových mier vo Vašíčkovom modeli

Vzhľadom na to, že Vašíčkov model patrí medzi ekvilibriové modely krátkodobej úrokovej miery, tak časová štruktúra úrokových mier je v tomto prípade výstupom z modelu, a nie jeho vstupom, ako tomu bolo v prípade Ho-Lee modelu. Výnosovú krivku tak získame pomocou oceňovania bezkupónových dlhopisov.

V modeloch krátkodobej úrokovej miery predpokladáme, že cena dlhopisov je funkciou času, maturity a tiež krátkodobej úrokovej miery, teda $P = P(t, T, r_t)$. Následne pomocou konštrukcie bezrizikového portfólia a s využitím teórie stochastického kalkulu, sa dá odvodiť (pozri [19, kap. 8.1]) nasledovná parciálna diferenciálna rovnica pre cenu diskontného dlhopisu vo Vašíčkovom modeli:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + (a(\beta - r_t) - \lambda\sigma)\frac{\partial P}{\partial r_t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_t^2} - r_t P = 0 \\ P(\tau, r) = 1, \end{aligned} \tag{48}$$

pričom $\tau = T - t$ a $\lambda$ je konštantná trhová cena rizika. Cena diskontného dlhopisu je potom riešením úlohy (48), a má tvar:

$$P(t, T, r_t) = A(\tau)e^{-B(\tau)r_t}, \tag{49}$$

kde $A(\tau)$ a $B(\tau)$ sú funkcie času zostávajúceho do maturity daného dlhopisu, a nadobúdajú tvar:

$$B(\tau) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a\tau}\right), \tag{50}$$

$$\ln A(\tau) = \left[\frac{1}{a}\left(1 - e^{-a\tau}\right) - \tau\right]\left(\beta - \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right) - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1 - e^{-a\tau})^2. \tag{51}$$

Časovú štruktúru úrokových mier vo Vašíčkovom modeli je možné následne pomocou vzťahu (9) vyjadriť ako:

$$R(t,T) = -\frac{\ln A(\tau)}{\tau} + \frac{B(\tau)}{\tau} r_t. \tag{52}$$

## 4.2 Kalibrácia Vašíčkovho modelu

V tejto kapitole sa budeme venovať kalibrácii Vašíčkovho modelu založenej na odhade pomocou metódy maximálnej vierohodnosti, ktorej výsledok vo svojej knihe [4, kap. 3.2.1] uvádzajú Brigo a Mercurio. Pri odvodzovaní budeme vychádzať z predpisu (45) pre krátkodobú úrokovú mieru a pre zjednodušenie použijeme ešte nasledujúce transformácie:

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{-a\triangle t}, \\ V^2 &= \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2a\triangle t}\right), \end{aligned} \tag{53}$$

pričom $\triangle t$ označuje časový krok. Nech $r_0, r_1, \ldots, r_n$ sú pozorované hodnoty krátkodobej úrokovej miery. Potom $r_{t+\triangle t}$ má podmienené normálne rozdelenie s parametrami:

$$r_{t+\triangle t} \mid r_t \sim \mathcal{N}\left(r_t\alpha + \beta\left(1-\alpha\right), \quad V^2\right), \tag{54}$$

a príslušná funkcia vierohodnosti má tvar:

$$\mathcal{L}(\alpha, \beta, V^2, r_{t+\triangle t}) = \frac{1}{\left(2\pi V^2\right)^{\frac{2}{n}}} e^{-\frac{\sum_{i=0}^{n-1}\left(r_{t_{i+1}} - r_{t_i} - \beta(1-\alpha)\right)^2}{2V^2}}. \tag{55}$$

Ďalej však budeme pracovať s logaritmickou transformáciou vierohodnostnej funkcie, ktorá vyzerá nasledovne:

$$\ell(\alpha, \beta, V^2, r_{t+\triangle t}) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln V^2 - \frac{1}{2V^2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(r_{t_{i+1}} - \alpha r_{t_i} - \beta(1-\alpha)\right)^2. \tag{56}$$

Odhady jednotlivých parametrov následne získame hľadaním maxima tejto funkcie. Začneme deriváciou podľa premennej $V^2$:

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \beta, V^2, r_{t+\triangle t})}{\partial V^2} = -\frac{n}{2V^2} + \frac{1}{2(V^2)^2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(r_{t_{i+1}} - \alpha r_{t_i} - \beta(1-\alpha)\right)^2, \tag{57}$$

Keď túto deriváciu položíme rovnú nule, získame odhad parametra $V^2$ v tvare:

$$\widehat{V^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(r_{t_{i+1}} - \hat{\alpha} r_{t_i} - \hat{\beta}(1-\hat{\alpha})\right)^2. \tag{58}$$

Teraz zderivujeme logaritmus vierohodnostnej funkcie podľa $\beta$:

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \beta, V^2, r_{t+\triangle t})}{\partial \beta} = -\frac{(\alpha - 1)}{V^2} \sum_{i=0}^{n-1} \left( r_{t_{i+1}} - \alpha r_{t_i} - \beta(1 - \alpha) \right). \tag{59}$$

Všimnime si, že výraz $\beta(1 - \alpha)$ nezávisí od $i$. Po porovnaní výrazu (59) s nulou tak získame:

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1} \left( r_{t_{i+1}} - \alpha r_{t_i}) \right) - n\beta(1 - \alpha), \tag{60}$$

a teda odhad parametra $\beta$ je daný formulou:

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n(1 - \hat{\alpha})} \sum_{i=0}^{n-1} \left( r_{t_{i+1}} - \hat{\alpha} r_{t_i} \right). \tag{61}$$

Ostáva ešte dourčiť odhad pre $\alpha$. Pre zjednodušenie výpočtu, najskôr do logaritmu vierohodnostnej funkcie dosadíme odhad pre $\beta$ a získame:

$$\ell(\alpha, \beta, V^2, r_{t+\triangle t}) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln V^2 - \frac{1}{2V^2} \sum_{i=0}^{n-1} \left( r_{t_{i+1}} - \alpha r_{t_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left( r_{t_{i+1}} - \alpha r_{t_i} \right) \right)^2. \tag{62}$$

Túto funkciu zderivujeme podľa $\alpha$:

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \beta, V^2, r_{t+\triangle t})}{\partial \alpha} = -\frac{1}{V^2} \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \left( r_{t_{i+1}} - \alpha r_{t_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left( r_{t_{i+1}} - \alpha r_{t_i} \right) \right) \left( -r_{t_i} + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} r_{t_i} \right) \right] \tag{63}$$

Deriváciu položíme rovnú nule:

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \left( r_{t_{i+1}} - \alpha r_{t_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left( r_{t_{i+1}} - \alpha r_{t_i} \right) \right) \left( -r_{t_i} + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} r_{t_i} \right) \right], \tag{64}$$

a roznásobíme pravú stranu:

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=0}^{n-1} \Bigg[ & -r_{t_{i+1}} r_{t_i} + \frac{1}{n} r_{t_{i+1}} \sum_{i=0}^{n-1} r_{t_i} + \alpha r_{t_i}^2 - \frac{\alpha}{n} r_{t_i} \sum_{i=0}^{n-1} r_{t_i} + \frac{1}{n} r_{t_i} \sum_{i=0}^{n-1} r_{t_{i+1}} \\ & - \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} r_{t_i} \sum_{i=0}^{n-1} r_{t_{i+1}} - \frac{\alpha}{n} r_{t_i} \sum_{i=0}^{n-1} r_{t_i} + \frac{\alpha}{n^2} \left( \sum_{i=0}^{n-1} r_{t_i} \right)^2 \Bigg]. \end{aligned} \tag{65}$$

Napokon zjednotíme výrazy obsahujúce $\alpha$ na jednu stranu:

$$\alpha \left[ -\sum_{i=0}^{n-1} r_{t_i}^2 + \frac{1}{n} \left( \sum_{i=0}^{n-1} r_{t_i} \right)^2 \right] = -\sum_{i=0}^{n-1} r_{t_i} r_{t_{i+1}} + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} r_{t_i} \sum_{i=0}^{n-1} r_{t_{i+1}}, \tag{66}$$

a pre parameter $\alpha$ tak dostaneme nasledujúci odhad:

$$\hat{\alpha} = \frac{n\sum_{i=0}^{n-1} r_{t_i} r_{t_{i+1}} - \sum_{i=0}^{n-1} r_{t_i} \sum_{i=0}^{n-1} r_{t_{i+1}}}{n\sum_{i=0}^{n-1} r_{t_i}^2 - \left(\sum_{i=0}^{n-1} r_{t_i}\right)^2}. \tag{67}$$

Výrazy (67), (61) a (58) potom určujú maximum-likelihood odhady pre parametre $\alpha$, $\beta$ a $V^2$. S využitím substitúcii (44), (46) a (53) následne získame odhady parametrov $\kappa, \lambda$ a $\sigma^2$ ako:

$$\begin{aligned} \hat{\kappa} = \hat{a} &= -\frac{\ln \hat{\alpha}}{\triangle t}, \\ \hat{\sigma^2} &= \frac{2\hat{a}\hat{V^2}}{1 - e^{-2\hat{a}\triangle t}}, \\ \hat{\lambda} &= \frac{\hat{b} - \hat{\kappa}\theta}{\hat{\sigma}} = \frac{\hat{a}\hat{\beta} - \hat{\kappa}\theta}{\hat{\sigma}}. \end{aligned} \tag{68}$$

Môžeme si ale všimnúť, že stále nám chýba odhad pre parameter $\theta$. Jeho hodnotu dourčíme tak, aby sme minimalizovali súčet druhých mocnín rozdielov medzi aktuálnou výnosovou krivkou a krivkou získanou z modelu. Takouto voľbou parametra $\theta$ sa snažíme dosiahnuť čo najlepšie fitovanie časovej štruktúry úrokových mier.

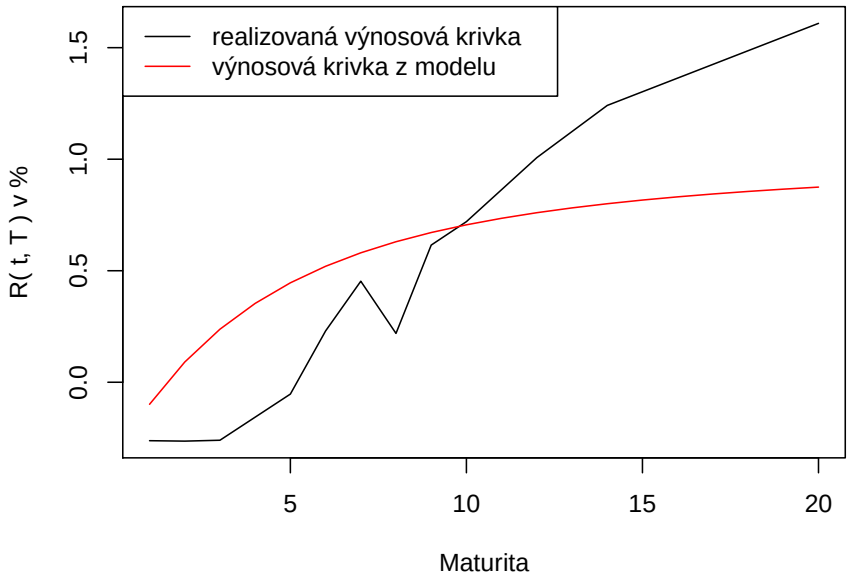
## 4.3 Kalibrácia Vašíčkovho modelu - reálne dáta

V rámci kalibrácie Vašíčkovho modelu sme takisto, ako v prípade Ho-Lee modelu, krátkodobú úrokovú mieru aproximovali úrokovou mierou Eonia, pričom sme opäť použili časový rad tejto úrokovej miery z rokov 2006-2017 vrátane. Postupom uvedeným v predchádzajúcej kapitole 4.2 sme získali odhady jednotlivých parametrov, ktoré uvádzame v Tabuľke 4.

**Tabuľka 4:** Odhad parametrov Vašíčkovho modelu.

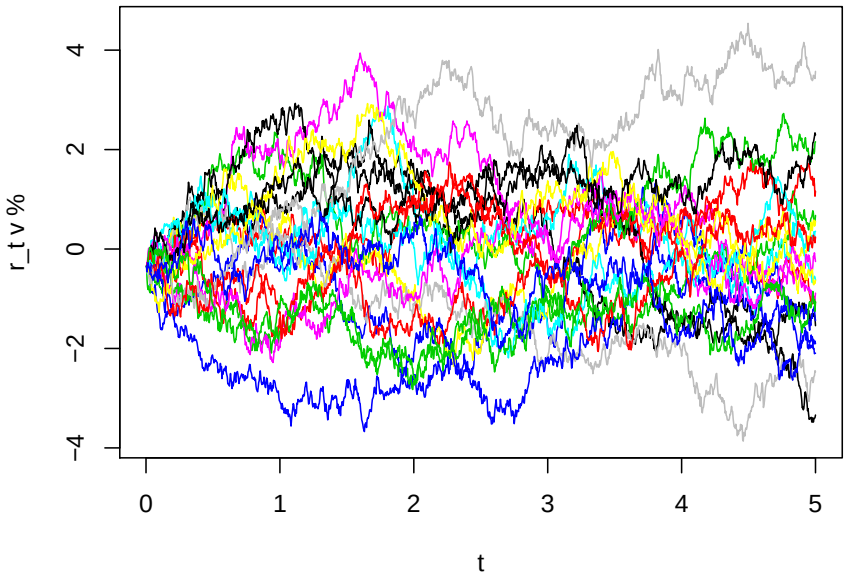
| Parameter | Odhad hodnoty |
|---|---|
| $\kappa$ | 0,38710 |
| $\theta$ | 0,01111 |
| $\lambda$ | -0,19235 |
| $\sigma$ | 0,01349 |

Tiež sme sa pozreli na to, akú výnosovú krivku nám vygeneroval tento model a výsledok sme zobrazili na Obr. 13. Vidíme, že fitovanie výnosovej krivky v tomto modeli nie je úplne najlepšie, aj napriek tomu, že sme parameter $\theta$ určovali tak, aby sa minimalizovala chyba. Príčinou tohto nepresného fitovania môže tiež byť aj to, že sme model kalibrovali len na základe vývoja úrokovej miery Eonia, ktorá nemusí obsahovať dostatok informácii o výnosoch dlhopisov. Z tohto hľadiska by bolo dobré vyskúšať aj iné spôsoby kalibrácie Vašíčkovho modelu, ktoré by poskytovali lepšie fitovanie aktuálnej výnosovej krivky. Jednou z možností je napríklad kalibrácia, v rámci ktorej sa snažíme o minimalizáciu rozdielu úrokových mier $R(t,T)$ získaných z modelu a skutočne pozorovaných úrokových mier. Viac o tomto postupe sa čitateľ môže dočítať v článku [6].




**Obr. 13:** Grafické porovnanie reálnej výnosovej krivky (čiernou) a výnosovej krivky získanej z Vašíčkovho modelu (červenou), nakalibrovaného pomocou metódy maximálnej vierohodnosti, s parametrami uvedenými v Tabuľke 4.

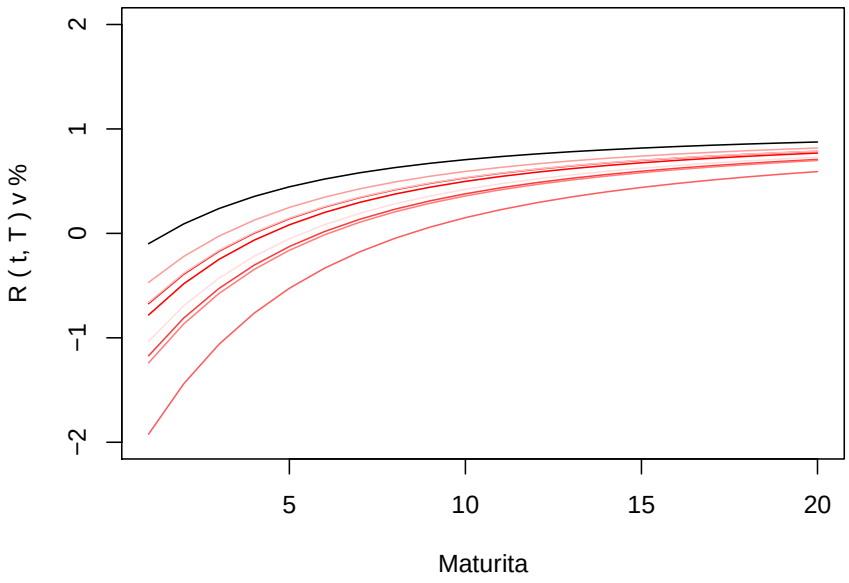
Následne sme pomocou získaných odhadov simulovali priebeh vývoja krátkodobej úrokovej miery na nasledujúcich päť rokov, pričom ako počiatočnú hodnotu krátkodobej úrokovej miery $r_0$ sme zobrali príslušnú hodnotu úrokovej miery Eonia. Príklady týchto vývojov zobrazujeme na grafe Obr. 14.

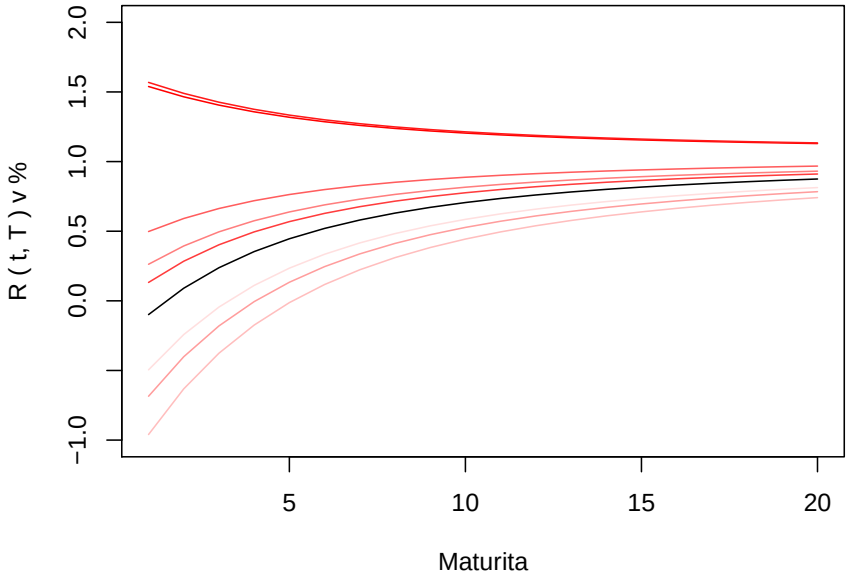



**Obr. 14:** Simulácie krátkodobej úrokovej miery na obdobie piatich rokov pomocou Vašíčkovho modelu, nakalibrovaného metódou maximálnej vierohodnosti, s parametrami uvedenými v Tabuľke 4.

Napokon sme sa pozreli na to, ako tento model simuluje vývoj výnosovej krivky v čase. Zobrali sme si dve z možných simulácii krátkodobej úrokovej miery a zostrojili sme ku každému dňu príslušnú výnosovú krivku. Na Obr. 15 sme zobrazili tento časový vývoj, pričom zobrazujeme len výnosové krivky zodpovedajúce začiatku každého nového polroka.

Vidíme, že v jednom prípade došlo len k paralelným posunom danej výnosovej krivky, zatiaľ čo v druhom prípade dochádza aj k jej prevráteniu, kedy dlhopisy s kratšou maturitou majú vyššie výnosy ako dlhopisy s vyššou maturitou, čo by mohlo signalizovať istú ekonomickú neistotu na trhu. K takejto situácii totiž môže dôjsť vtedy, keď je na trhu málo investorov, ktorí majú záujem nakupovať dlhopisy s krátkymi dobami splatnosti. Táto nedôvera môže byť spôsobená tým, že v blízkom období je na trhu očakávaná ekonomická recesia, a tak krátkodobé dlhopisy sú pokladané za rizikovejšie a investori sa zdržiavajú ich nákupu. Z dôvodu nedostatočného dopytu po týchto dlhopisoch, musí nevyhnutne vzrásť ich výnos, aby sa stali atraktívnejšími, čo može následne spôsobiť spomínané preklopenie výnosovej krivky.




**Obr. 15:** Príklady vývoja výnosovej krivky vo Vašíčkovom modeli. Čiernou je zobrazená počiatočná výnosová krivka a následne vyobrazené výnosové krivky prislúchajú časovému okamihu vždy o pol roka neskôr. Čím sme ďalej od počiatočného dňa, tým je farba bledšia. Zatiaľ čo v prvom prípade (hore) dochádza len k paralelným posunom, v druhom prípade (dole) došlo aj k prevráteniu výnosovej krivky.

# 5 Dvojfaktorový model CIR + Vašíček

Zatiaľ sme pracovali len s modelmi, v ktorých vystupoval iba jeden náhodný faktor. Ukazuje sa, že vo veľa prípadoch, pridaním ďalšieho náhodného faktora, je možné vylepšiť takéto modely. V tejto kapitole sa preto budeme venovať dvojfaktorovému modelu, pričom vychádzať budeme z diplomovej práce [16]. V spomínanej práci autor pracuje s nasledovným modelom krátkodobej úrokovej miery:

$$\begin{aligned} dr_t^{(1)} &= \kappa_1(\theta_1 - r_t^{(1)})dt + \sigma_1 dW_1, \\ dr_t^{(2)} &= \kappa_2(\theta_2 - r_t^{(2)})dt + \sigma_2\sqrt{r_t^{(2)}}dW_1, \\ Cov(dW_1, dW_2) &= 0, \\ r_t &= r_t^{(1)} + r_t^{(2)}. \end{aligned} \tag{69}$$

Tento model predpokladá, že dané dva zdroje náhodnosti $dW_1$ a $dW_2$ sú navzájom nekorelované a tiež, že príslušná krátkodobá úroková miera $r_t$ je súčtom jednotlivých faktorov $r_t^{(1)}$ a $r_t^{(2)}$.

Keďže predpokladáme, že prvý faktor sa riadi Vašíčkovým procesom, tak $r_t^{(1)}$ má normálne rozdelenie:

$$r_{t+\triangle t}^{(1)} \mid r_t^{(1)} \sim \mathcal{N}\left(\theta_1\left(1 - e^{-\kappa_1\triangle t}\right) + r_t^{(1)}e^{-\kappa_1\triangle t}, \quad \frac{\sigma_1^2}{2\kappa_1}\left(1 - e^{-2\kappa_1\triangle t}\right)\right). \tag{70}$$

Iná situácia nastáva pri faktore $r_t^{(2)}$. Dá sa ukázať, že tento faktor sa riadi necentrálnym $\chi^2$ rozdelením, čo značne ovplyvňuje zložitosť modelu. Našťastie, Ball a Torous v článku [1] uvádzajú, že pokiaľ pracujeme s malým časovým krokom, tak rozdelenie $r_t^{(2)}$ môžeme aproximovať normálnym rozdelením so strednou hodnotou a disperziou zodpovedajúcou prvým dvom momentom daného necentrálneho $\chi^2$ rozdelenia, teda:

$$r_{t+\triangle t}^{(2)} \mid r_t^{(2)} \sim \mathcal{N}\left(\theta_2\left(1 - e^{-\kappa_2\triangle t}\right) + r_t^{(2)}e^{-\kappa_2\triangle t}, \quad \frac{\theta_2\sigma_2^2}{2\kappa_2}\left(1 - e^{-\kappa_2\triangle t}\right)^2 + \frac{\sigma_2^2}{\kappa_2}r_t^{(2)}\left(e^{-\kappa_2\triangle t} - e^{-2\kappa_2\triangle t}\right)\right). \tag{71}$$

## 5.1 Časová štruktúra v CIR + Vašíček modeli

Rovnako ako Vašíčkov model, aj tento dvojfaktorový model patrí medzi ekvilibriové modely a výnosová krivka je teda výstupom z modelu. Parciálna diferenciálna rovnica

pre cenu dlhopisu má v tomto prípade tvar:

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau}+\left(\kappa_1\left(\theta_1-r_t^{(1)}\right)-\lambda_1\sigma_1\right)\frac{\partial P}{\partial r_t^{(1)}}+\left(\kappa_2\left(\theta_2-r_t^{(2)}\right)-\lambda_2\sigma_2\sqrt{r_t^{(2)}}\right)\frac{\partial P}{\partial r_t^{(2)}}$$
$$+\frac{1}{2}\sigma_1^2\frac{\partial^2 P}{\partial\left(r_t^{(1)}\right)^2}+\frac{1}{2}\sigma_2^2 r_t^{(2)}\frac{\partial^2 P}{\partial\left(r_t^{(2)}\right)^2}-\left(r_t^{(1)}+r_t^{(2)}\right)P=0, \qquad (72)$$
$$P\left(\tau, r_t^{(1)}, r_t^{(2)}\right)=1,$$

kde $\tau = T-t$ zodpovedá času zostávajúcemu do maturity, $\lambda_1$ a $\lambda_2$ sú trhové ceny rizika. Ak čitateľa zaujíma odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre všeobecný dvojfaktorový model, môže ho nájsť v [16, kap. 1.6].

Cena diskontného dlhopisu je potom riešením úlohy (72), a má separovaný tvar:

$$P\left(t,T,r_t^{(1)},r_t^{(2)}\right)=A_1(\tau)A_2(\tau)e^{-B_1(\tau)r_t^{(1)}-B_2(\tau)r_t^{(2)}}, \qquad (73)$$

pričom

$$B_1(\tau)=\frac{1}{\kappa_1}\left(1-e^{-\kappa_1\tau}\right), \qquad (74)$$
$$\ln A_1(\tau)=\left[\frac{1}{\kappa_1}\left(1-e^{-\kappa_1\tau}\right)-\tau\right]\left(\theta_1-\frac{\lambda_1\sigma_1}{\kappa_1}-\frac{\sigma_1^2}{2\kappa_1^2}\right)-\frac{\sigma_1^2}{4\kappa_1^3}(1-e^{-\kappa_1\tau})^2, \qquad (75)$$
$$B_2(\tau)=\frac{2\left(e^{\phi\tau-1}-1\right)}{(\phi+\psi)\left(e^{\phi\tau}-1\right)+2\phi}, \qquad (76)$$
$$A_2(\tau)=\left(\frac{2\phi e^{(\phi+\psi)\frac{\tau}{2}}}{(\phi+\psi)\left(e^{\phi\tau}-1\right)+2\phi}\right)^{\frac{2\kappa_2\theta_2}{\sigma_2^2}}, \qquad (77)$$
$$\psi=\kappa_2+\lambda_2\sigma_2, \qquad (78)$$
$$\phi=\sqrt{\psi^2+2\sigma_2^2}. \qquad (79)$$

Odvodenie predchádzajúceho výsledku môže čitateľ nájsť v [19, kap. 8]. Časová štruktúra úrokových mier v tomto modeli je potom daná vzťahom (9) ako:

$$R(t,T)=-\frac{\ln A_1(\tau)A_2(\tau)}{\tau}+\frac{B_1(\tau)}{\tau}r_t^{(1)}+\frac{B_2(\tau)}{\tau}r_t^{(2)}. \qquad (80)$$

## 5.2 Kalibrácia CIR + Vašíček modelu

V tejto kapitole sa budeme venovať kalibrácii vyššie popísaného dvojfaktorového modelu pomocou Kalmanovho filtra, pričom vychádzať budeme z [3].

Kalmanov filter je výpočtovo účinná metóda pôvodne určená na vyfiltrovanie procesu, ktorý je ovplyvnený šumom z prostredia. V súčasnosti sa Kalmanov filter rozsiahlo

využíva v navigačných, či sledovacích systémoch, ale čoraz väčšie uplatnenie má aj v ekonomike a financiách. Kalmanov filter spočíva v tom, že na základe pozorovaných hodnôt výstupnej premennej, závislých od inej latentnej stavovej premennej, odhaduje túto skrytú premennú. V našom prípade sú výstupnými premennými úrokové miery bezkupónových dlhopisov, a nepozorovateľnou premennou je krátkodobá úroková miera.

Predtým než prejdeme na samotný algoritmus Kalmanovho filtra, je najprv potrebné, aby sme model, ktorý skúmame, previedli do formy lineárneho systému, ktorý je charakterizovaný stavovou rovnicou a rovnicou výstupu.

Majme dané časové obdobie $[0, T]$, ktoré rovnomerne rozdelíme na $n+1$ intervalov, označíme $t_i = i\frac{T}{n}, \forall i = 1, \ldots, n$ a $\triangle t = t_i - t_{i-1}$. Predpokladajme, že v každom čase $t_i$ pozorujeme na trhu $d$ bezkupónových dlhopisov s rôznymi maturitami $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_d$. Ak teda pracujeme s daným dvojfaktorovým modelom, tak potom podľa (80) vieme zapísať nasledujúce rovnice pre výstup:

$$\begin{pmatrix} R(t_i,\tau_1) \\ R(t_i,\tau_2) \\ \vdots \\ R(t_i,\tau_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\ln A_1(t_i,\tau_1)A_2(t_i,\tau_1)}{\tau_1} \\ -\frac{\ln A_1(t_i,\tau_2)A_2(t_i,\tau_2)}{\tau_2} \\ \vdots \\ -\frac{\ln A_1(t_i,\tau_d)A_2(t_i,\tau_d)}{\tau_d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{B_1(t_i,\tau_1)}{\tau_1} & \frac{B_2(t_i,\tau_1)}{\tau_1} \\ \frac{B_1(t_i,\tau_2)}{\tau_2} & \frac{B_2(t_i,\tau_2)}{\tau_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{B_1(t_i,\tau_d)}{\tau_d} & \frac{B_2(t_i,\tau_d)}{\tau_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{t_i}^{(1)} \\ r_{t_i}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1(t_i) \\ v_2(t_i) \\ \vdots \\ v_d(t_i) \end{pmatrix} \tag{81}$$

pre všetky $i = 1, \ldots, n$, respektíve:

$$R_{t_i} = A + Hr_{t_i} + v_{t_i}. \tag{82}$$

Všimnime si, že okrem výrazov, ktoré priamo vyplývajú zo vzťahu (80), vo výstupných rovniciach pribudol ešte vektor $v(t_i) = \begin{pmatrix} v_1(t_i) & \ldots & v_d(t_i) \end{pmatrix}^T$, ktorý reprezentuje prípadný procesný šum. Ten hovorí o tom, že pozorované hodnoty úrokových mier nemusia úplne presne zodpovedať úrokovým mieram z modelu. Zároveň predpokladáme:

$$v(t_i) \sim \mathcal{N}(0, R), \text{ kde } R = \begin{pmatrix} r_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & r_2^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & r_d^2 \end{pmatrix}. \tag{83}$$

Ďalej ešte potrebujeme zostaviť stavové rovnice pre faktory $r_t^{(1)}$ a $r_t^{(2)}$. Na to nám poslúžia jednotlivé podmienené pravdepodobnostné rozdelenia týchto faktorov, ktoré sú uvedené

v (70) a (71). Stavový systém môžeme tak prepísať do nasledujúceho tvaru:

$$\begin{pmatrix} r_{t_i}^{(1)} \\ r_{t_i}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \left(1 - e^{-\kappa_1 \triangle t}\right) \\ \theta_2 \left(1 - e^{-\kappa_2 \triangle t}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-\kappa_1 \triangle t} & 0 \\ 0 & e^{-\kappa_2 \triangle t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{t_{i-1}}^{(1)} \\ r_{t_{i-1}}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t_i) \\ \varepsilon_2(t_i), \end{pmatrix} \tag{84}$$

alebo skrátene:

$$r_{t_i} = C + F r_{t_{i-1}} + \varepsilon_{t_i}, \tag{85}$$

pričom:

$$\varepsilon_1(t_i) \mid r_{t_{i-1}}^{(1)} \sim \mathcal{N}(0, q_1) : q_1 = \frac{\sigma_1^2}{2\kappa_1} \left(1 - e^{-2\kappa_1 \triangle t}\right), \tag{86}$$

$$\varepsilon_2(t_i) \mid r_{t_{i-1}}^{(2)} \sim \mathcal{N}(0, q_2(t_i)) : q_2(t_i) = \frac{\theta_2 \sigma_2^2}{2\kappa_2} \left(1 - e^{-\kappa_2 \triangle t}\right)^2 + \frac{\sigma_2^2}{\kappa_2} r_{t_{i-1}}^{(2)} \left(e^{-\kappa_2 \triangle t} - e^{-2\kappa_2 \triangle t}\right). \tag{87}$$

Kedže predpokladáme nezávislosť jednotlivých faktorov, potom nevyhnutne musí platiť aj, že vektor $\varepsilon(t_i) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t_i) & \varepsilon_2(t_i) \end{pmatrix}^T$ má nasledovné normálne rozdelenie:

$$\varepsilon(t_i) \sim \mathcal{N}(0, Q(t_i)), \text{ kde } Q(t_i) = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2(t_i) \end{pmatrix}. \tag{88}$$

Na lineárny systém pozostávajúci z rovníc výstupu (81) a stavových rovníc (84) už je možné aplikovať Kalmanov filter.

### 5.2.1 Kalmanov filter

Kalmanov filter je rekurzívny algoritmus, ktorý vychádzajúc z počiatočného odhadu pre stavovú premennú, odhadne hodnoty výstupnej premennej. Následne na základe rozdielu medzi týmto odhadom a skutočnou hodnotou výstupu, dochádza k aktualizovaniu hodnoty stavovej premennej, ktorá sa použije na predikovanie nasledujúceho stavu. Takýmto spôsobom sa potom prechádza cez všetky pozorovacie dni. V závere tak získame časový rad pre nepozorovateľnú premennú, respektíve filtráciu $\mathcal{F}_s$:

$$\mathcal{F}_{t_i} = \sigma(R_{t_0}, R_{t_1}, \ldots, R_{t_i}), \quad \forall i = 0, \ldots, n. \tag{89}$$

Teraz si bližšie popíšeme jednotlivé kroky Kalmanovho filtra, vychádzať pri tom budeme z [3, kap. 3.3].

Ako počiatočný odhad pre stavovú premennú a mieru istoty sa použije nepodmienená stredná hodnota a variancia stavového systému, teda:

$$\mathbb{E}[r_{t_1}] = \mathbb{E}[r_{t_1} \mid \mathcal{F}_0] = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \tag{90}$$

$$Var[r_{t_1}] = Var[r_{t_1} \mid \mathcal{F}_0] = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2}{2\kappa_1} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2^2\theta_2}{2\kappa_2} \end{pmatrix}. \tag{91}$$

Ďalšou časťou je predpovedanie hodnôt výstupnej premennej na základe vzťahu (82):

$$\mathbb{E}[R_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}] = A + H\mathbb{E}[r_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}], \tag{92}$$

$$Var[R_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}] = HVar[r_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}]H^T + R. \tag{93}$$

V druhom kroku filter získaká spätnú väzbu s cieľom zlepšiť presnosť odhadu pre stavovú premennú. Pozrie sa tak na skutočne realizované hodnoty výstupnej premennej a spočíta sa predikčná chyba:

$$\zeta_{t_i} = R_{t_i} - \mathbb{E}[R_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}], \tag{94}$$

a tiež sa vypočíta matica Kalmanovho zisku $K_{t_i}$:

$$K_{t_i} = Var[r_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}]H^T Var[R_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}]^{-1}, \tag{95}$$

ktorá určuje, akú veľkú váhu bude mať korekčný člen v procese filtrácie. Následne sa aktualizuje stavová premenná pomocou:

$$\mathbb{E}[r_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}] = \mathbb{E}[r_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}] + K_{t_i}\zeta_{t_i}, \tag{96}$$

a tiež sa aktualizuje aj kovariančná matica chyby:

$$Var[r_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}] = (I - K_{t_i}H)Var[r_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}]. \tag{97}$$

Napokon sa pomocou aktualizovaných hodnôt stavovej premennej predikujú jej hodnoty na nasledujúci čas s využitím (85):

$$\mathbb{E}[r_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{t_i}] = C + F\mathbb{E}[r_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}], \tag{98}$$

$$Var[r_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{t_i}] = FVar[r_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}]F^T + Q. \tag{99}$$

Týmto spôsobom tak vieme, z realizovaných výnosov dlhopisov, určiť odhad krátkodobej úrokovej miery. V každom kroku tiež generujeme predikčné chyby $\zeta_{t_i}$ a kovariančnú maticu predikčných chýb $Var[r_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}]$. Ak ďalej predpokladáme, že $\zeta_{t_i}$ sú normálne rozdelené, potom vieme skonštruovať funkciu vierohodnosti:

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \mid Var[r_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}] \mid^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\zeta_{t_i}^T Var[r_{t_i}|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]^{-1}\zeta_{t_i}}. \tag{100}$$

Ak teda chceme použiť Kalmanov filter na hľadanie parametrov modelu (69), potom celý predchádzajúci algoritmus bude slúžiť ako funkcia, ktorej výstupom bude hodnota vierohodnostnej funkcie, a budeme hľadať jej maximum cez parametre modelu.

V softvéri R je Kalmanov filter obsiahnutý v balíčku FKF.

## 5.3 Kalibrácia CIR + Vašíček modelu - reálne dáta

Metódu na odhad parametrov, uvedenú v predchádzajúcej kapitole, sme následne použili na reálne trhové dáta. Dátová sada, pomocou ktorej sme model nakalibrovali, pozostávala z výnosov slovenských štátnych dlhopisov s rôznymi maturitami, a pokrývala obdobie druhého polroka 2017. Tieto údaje sme získali z [12] a v Tabuľke 5 uvádzame charakteristiku tejto dátovej sady.

Pri aplikovaní spomínanej metódy sme použili softvér R, pričom maximum danej funkcie vierohodnosti (100) sme hľadali pomocou nástroja nlminb() určeného na optimalizáciu nelineárnych funkcií viacerých premenných. Treba ale dodať, že táto optimalizácia veľmi záležala od voľby počiatočných parametrov, preto sme optimalizáciu spustili viackrát a zobrali sme najlepší dosiahnutý výsledok. Získané odhady parametrov dvojfaktorového modelu uvádzame v Tabuľke 6.

Ďalej sme sa pozreli na to, ako dobre tento model fituje realizovanú výnosovú krivku, výsledok zobrazujeme na Obrázku 16. Vidíme, že v porovnaní s Vašíčkovým modelom tu dochádza k oveľa lepšiemu kopírovaniu reálnej výnosovej krivky, najmä čo sa týka vyšších hodnôt maturity. Jediným problémom sú stále jednoročné a dvojročné úrokové miery, pri ktorých sa výnosová krivka z modelu výraznejšie odkláňa od realizovaných hodnôt.

Na základe odhadnutých parametrov sme následne simulovali vývoj krátkodobej úrokovej miery na obdobie piatich rokov. Zopár príkladov týchto simulácii zobrazujeme na O-

brázku 17, kde si môžeme všimnúť, že tieto simulácie sú rozmanité a vo väčšine z nich sa krátkodobá úroková miera drží v záporných číslach.

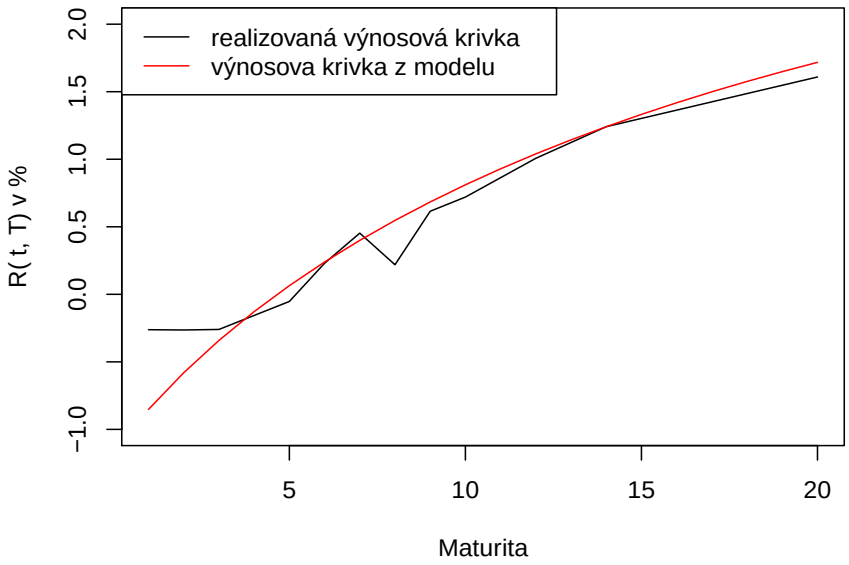
Napokon na Obrázku 18 uvádzame dva možné scenáre pohybov výnosovej krivky generovaných týmto modelom. V oboch prípadoch dochádza len k paralelným posunom krivky, pričom tento posun je výraznejší pre úrokové miery s nižšou maturitou.

**Tabuľka 5:** Popis dátovej sady výnosov slovenských štátnych dlhopisov za druhý polrok 2017.

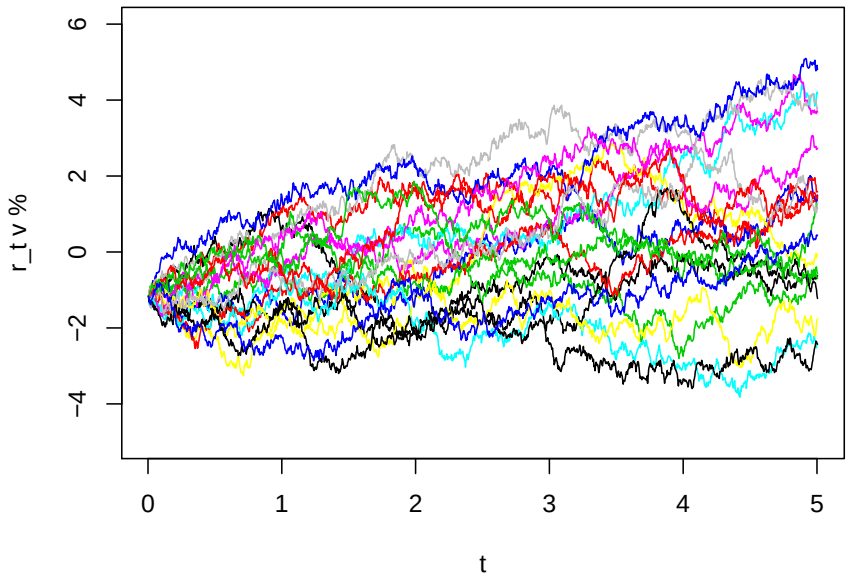
| Maturita v rokoch | Minimum v % | Maximum v % | Priemer v % | Štandardná odchýlka |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -0,441 | 0,351 | -0,171 | 0,00261 |
| 2 | -0,465 | -0,144 | -0,233 | 0,000645 |
| 3 | -0,390 | -0,170 | -0,283 | 0,000555 |
| 5 | -0,100 | 0,209 | 0,077 | 0,00693 |
| 6 | 0,210 | 0,480 | 0,343 | 0,000678 |
| 7 | 0,334 | 0,764 | 0,475 | 0,000960 |
| 8 | 0,046 | 0,563 | 0,285 | 0,00132 |
| 9 | 0,526 | 0,827 | 0,664 | 0,000753 |
| 10 | 0,650 | 0,960 | 0,791 | 0,000781 |
| 12 | 0,970 | 1,290 | 1,086 | 0,000738 |
| 14 | 1,210 | 1,519 | 1,325 | 0,000702 |
| 20 | 1,438 | 1,800 | 1,622 | 0,000854 |

**Tabuľka 6:** Odhad parametrov CIR-VAS modelu.

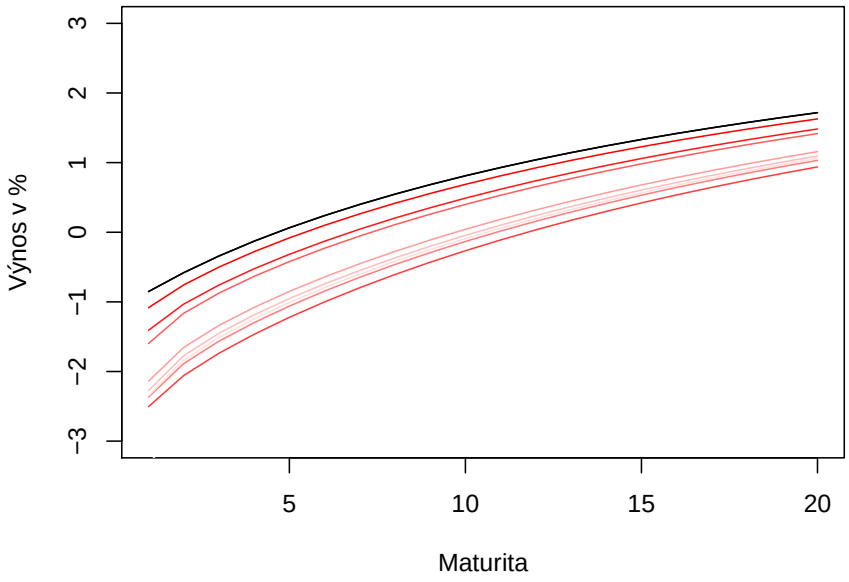
| Parameter | Vašíček | CIR |
|---|---|---|
| $\kappa$ | 0,01866 | 0,49989 |
| $\theta$ | 0,02967 | 0,00456 |
| $\sigma$ | 0,01158 | 0,00831 |
| $\lambda$ | -0,09519 | -0,18508 |

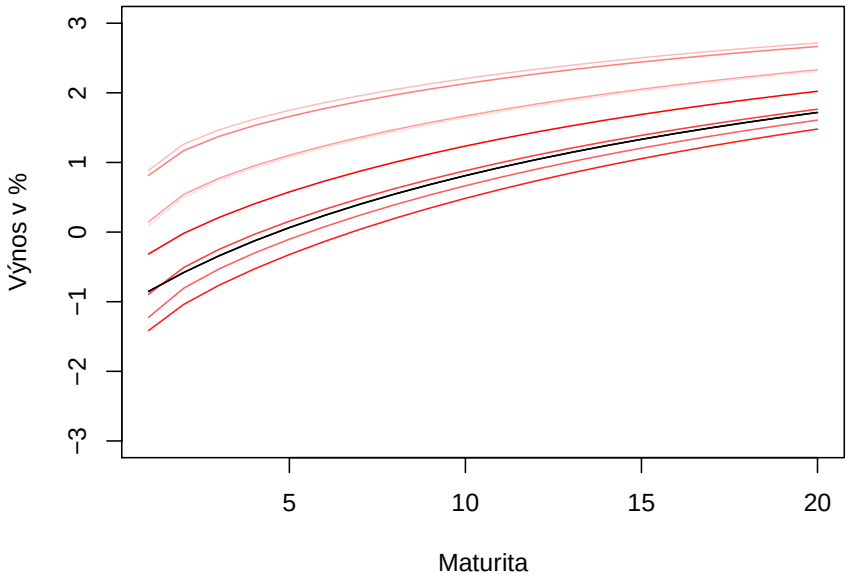



**Obr. 16:** Grafické porovnanie reálnej výnosovej krivky (čiernou) a výnosovej krivky získanej z dvojfaktorového CIR + Vašíček modelu (červenou), nakalibrovaného pomocou Kalmanovho filtra.




**Obr. 17:** Simulácie krátkodobej úrokovej miery na obdobie 5 rokov pomocou dvojfaktorového CIR + Vašíček modelu, nakalibrovaného s použitím Kalmanovho filtra.




**Obr. 18:** Príklady vývoja výnosovej krivky v dvojfaktorovom CIR-VAS modeli. Čiernou je zobrazená počiatočná výnosová krivka a následne vyobrazené výnosové krivky prislúchajú časovému okamihu vždy o pol roka neskôr. Čím sme ďalej od počiatočného dňa, tým je farba bledšia. V oboch prípadoch dochádza v podstate len k paralelným posunom, pričom tieto posuny sú výraznejšie pre nižšie hodnoty maturity.

# 6 Aplikácia

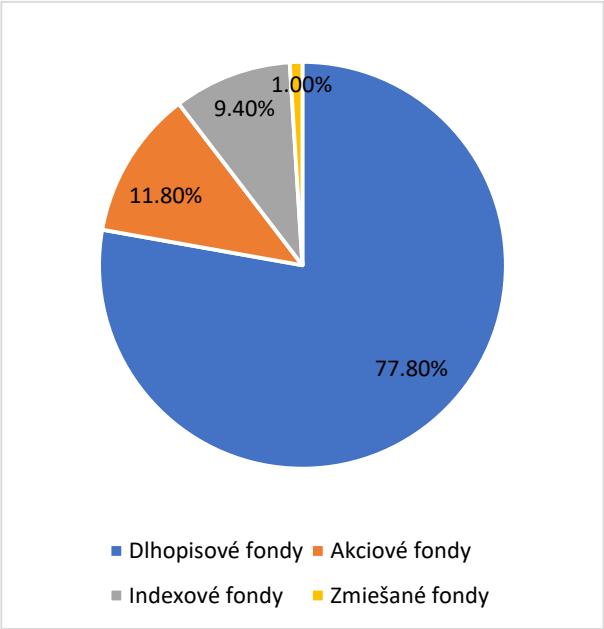
V predchádzajúcich kapitolách sme sa venovali modelom krátkodobej úrokej miery, ich kalibrácii na reálne trhové dáta a následnému simulovaniu pohybov výnosovej krivky v čase. V tejto kapitole využijeme spomínané simulácie v praktickej aplikácii, ktorej motiváciu nachádzame v dôchodkovom systéme Slovenska. Ten je od reformy z roku 2005 zložený z troch pilierov. Zatiaľ čo tretí z týchto pilierov je dobrovoľný, prvé dva piliere predstavujú jeho základnú zložku.

Odvody putujúce do I. piliera idú priamo do Sociálnej poisťovne, kde sú okamžite použité na vyplácanie dôchodkov aktuálnych dôchodcov. Naproti tomu odvody, ktoré sú odvádzané do II. piliera, sú akumulované na dôchodkových účtoch v dôchodkových správcovských spoločnostiach (DSS), kde sú následne spravované a investované do fondov, pričom každá DSS musí podľa zákona o starobnom dôchodkovom sporení č. 43/2004 (pozri [26]) spravovať aspoň dva fondy, a to akciový negarantovaný fond a dlhopisový garantovaný fond. Okrem nich môže tiež vytvárať aj indexový, či prípadne zmiešaný negarantovaný fond. Vzhľadom na princípy fungovania II. piliera, ten teda predstavuje istú formu sporenia si vlastných peňazí. Majetok v rámci tohto piliera, podľa [20], ku dňu 31. 12. 2018 nadobúdal hodnotu $8,06$ miliárd eur. Ak sa pozrieme na graf Obr. 19 môžeme si všimnúť, že práve v druhom zo spomínaných fondov, je situovaný najväčší podiel majetku, a tomuto fondu sa aj my budeme z istého hľadiska venovať.

Čo sa týka zloženia majetku v dlhopisovom garantovanom fonde, ten môže byť tvorený len obchodmi slúžiacimi na obmedzenie devízového rizika a peňažnými investíciami. Významné postavenie má tento typ fondov aj z toho hľadiska, že pokiaľ dôjde k poklesu jeho dôchodkovej jednotky v danom sledovanom desaťročnom období, tak túto stratu musí znášať samotná DSS, teda investor nemôže prísť o svoj počiatočný vklad. Preto je dôležité, aby takýto dlhopisový fond bol zaistený voči nepriaznivému vývoju výnosových kriviek.

V našej aplikácii sa tak zameriame na zostavenie programu, ktorým budeme sledovať vývoj dlhopisového portfólia v čase. Pozrieme sa na to, ako sa pre rôzne scenáre vývoja časovej štruktúry úrokových mier, mení hodnota a výnosnosť portfólia, a taktiež aj na to, ako často, a pre aké scenáre vývoja výnosovej krivky, dochádza k poklesu hodnoty

dôchodkovej jednotky.



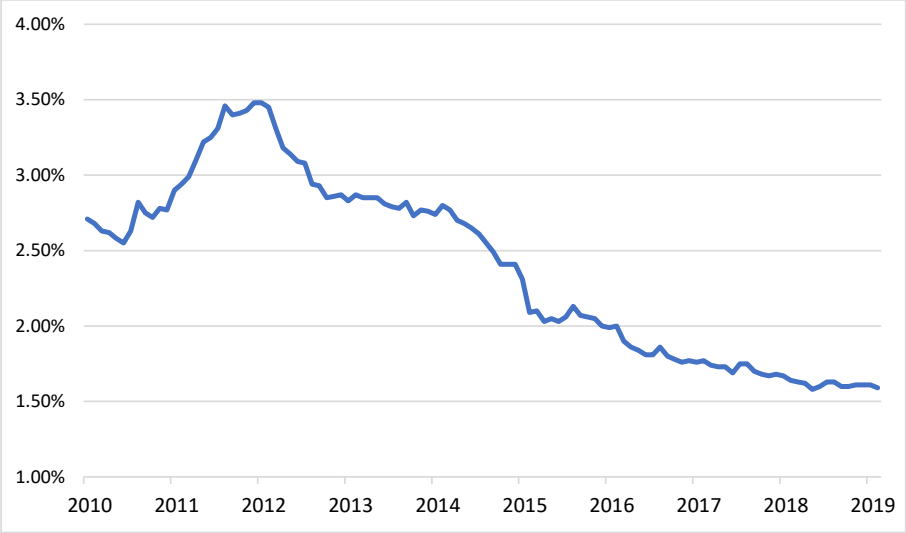

**Obr. 19:** Rozdelenie celkového majetku DSS pôsobiacich na Slovensku medzi jednotlivé typy fondov k 31. 12. 2018. Zdroj dát: [20].

## 6.1 Simulácie výnosových kriviek

Podľa obmedzení v zákone môžu byť v dlhopisovom garantovanom fonde obsiahnuté len štátne dlhopisy, hypotekárne záložné listy, korporátne a bankové dlhopisy, či komunálne obligácie. Z nich za najbezpečnejšie a najlikvidnejšie sú považované štátne dlhopisy a naopak najviac rizikovými sú označované korporátne dlhopisy. Vzhľadom na to, že komunálne obligácie nie sú momentálne na trhu veľmi rozšírené, budeme sa v ďalšej časti venovať len prvým štyrom zo spomínaných skupín dlhopisov.

Pre každú z týchto skupín dlhopisov budeme v našom programe potrebovať príslušnú výnosovú krivku. Výnosové krivky pre štátne dlhopisy budeme generovať pomocou modelov, ktoré sme nakalibrovali v predchádzajúcich kapitolách 3, 4 a 5. Keďže investovanie do zvyšných typov dlhopisov nesie v sebe prirodzene vyššie riziko, budeme predpokladať, že ich výnosy sa skladajú z výnosov štátnych dlhopisov navýšených o istú prirážku. Výnosové krivky pre tieto dlhopisy tak získame posunom výnosových kriviek pre štátne dlhopisy.

Pri posune výnosových kriviek pre hypotekárne záložné listy budeme vychádzať z toho, že väčšina bánk eurozóny poskytuje hypotekárne úvery s úrokom pozostávajúcim z úroku pre trojmesačný Euribor a fixnej prirážky. Na Obrázku 20 sme zobrazili priemernú výšku úrokov hypotekárnych úverov v eurozóne, kde si môžeme všimnúť, že od roku 2012 až približne po rok 2017 dochádzalo ku klesaniu tejto úrokovej miery. Následne sa situácia ustálila a priemerná úroková miera hypotekárnych úverov v eurozóne sa tak pohybuje v rozmedzí $1,59-1,77\%$. A kedže hodnota trojmesačného Euribor-u sa dlhodobo pohybuje na úrovni $-0,313\%$, budeme výnosové krivky pre hypotekárne záložné listy modelovať ako výnosové krivky pre štátne dlhopisy posunuté o konštantu $k_1$, kde premenná $k_1$ má rovnomerné rozdelenie na intervale $(1,903\%, 2,083\%)$.




**Obr. 20:** Historický vývoj priemerných úrokov hypotekárnych úverov v krajinách eurozóny. Zdroj dát: [22].

Posuny pre výnosové krivky bankových a korporátnych dlhopisov sme ďalej prebrali z [21, kap. 2.4]. Autor tejto práce na základe historických dát, ukázal, že pri bankových dlhopisoch je opäť vhodný každoročný paralelný posun o konštantu $k_2$, ktorá má rovnomerné rozdelenie na intervale $(0,2\%, 0,45\%)$. V prípade korporátnych dlhopisov bola situácia zložitejšia a posúvať výnosovú krivku štátnych dlhopisov je teraz potrebné o časovo závislú konštantu $k_3 = a + bx$, kde $a$ je rovnomerne rozdelená náhodná premenná z intervalu $(0,4\%, 0,6\%)$, $b = 0,0002$ a $x$ predstavuje čas v rokoch.

## 6.2 Počiatočný kapitál, príspevky a poplatky.

Pri samotnom simulovaní vývoja dlhopisového fondu budeme najskôr potrebovať odhad pre počiatočný kapitál, za ktorý nakúpime príslušné dlhopisy, a tiež aj odhady pre hodnoty každoročných príspevkov a poplatkov.

Čo sa týka počiatočného kapitálu, tak vychádzať budeme z [20], kde sú zverejnené hodnoty jednotlivých dlhopisových fondov všetkých šiestich dôchodkových správcovských spoločností pôsobiacich na Slovensku k 31. 12. 2018. Po spriemerovaní týchto hodnôt sme získali priemernú hodnotu dlhopisového fondu DSS vo výške $1,04$ mld. eur. V našej aplikácii sme sa tak rozhodli pracovať s počiatočným kapitálom v hodnote 1 mld. eur.

Teraz sa pokúsime odhadnúť výšku každoročných príspevkov do dlhopisového fondu. Z rovnakého zdroja ako pri odhade počiatočného kapitálu, sme tiež získali údaj o počte sporiteľov v druhom pilieri, ktorých k danému dátumu bolo 1 487 519. Podľa rozdelenia majetku na Obrázku 19, môžeme predpokladať, že približne $22,2\%$ sporiteľov sporí v inom než dlhopisovom fonde. Ak ďalej uvážime priemernú mesačnú mzdu, ktorá v roku 2018, podľa [24], dosiahla úroveň 1 013€, potom výška každoročných príspevkov do tohto fondu je:

$$0,0475 * 1\ 013 * 12 * 1\ 487\ 519 * 0,778 = 668\ 230\ 693€,$$

pričom sme využili, že aktuálna hodnota príspevkov do druhého piliera je na úrovni $4,75\%$. Na jednu DSS tak potom pripadá priemerná ročná hodnota príspevkov vo výške $111\ 371\ 782,2€$. V rámci našej aplikácie sme sa tak rozhodli pracovať s každoročnými príspevkami v hodnote 100 miliónov eur.

Napokon sa pozrieme na poplatky spojené s vedením dlhopisového fondu. Tie podľa zákona o dôchodkovom sporení (pozri [26]) môžu byť troch druhov, a to:

- odplata za správu dôchodkového fondu, ktorá môže byť nanajvýš $0,3\%$ priemernej ročnej čistej hodnoty fondu,
- odplata za vedenie osobného dôchodkového účtu, ktorá tvorí maximálne $1\%$ z hodnoty príspevkov,

- odplata za zhodnotenie majetku, ktorú pre naše účely budeme počítať podľa vzorca:

$$O_j = c * \text{hodnota}_j * \left( \frac{\text{jednotka}_j}{\max\limits_{t=j,j-1,j-2}(\text{jednotka}_t)} - 1 \right),$$

kde premenná $\text{hodnota}_j$ predstavuje čistú hodnotu majetku vo fonde v čase $j$, $\text{jednotka}_j$ je zas aktuálna hodnota dôchodkovej jednotky v danom čase a $c \in (0, 0.1)$ je koeficient určujúci výšku poplatku.

## 6.3 Zostavenie programu

V nasledujúcej časti si postupne opíšeme, akým spôsobom budeme simulovať priebeh vývoja dlhopisového portfólia. Pre zjednodušenie, nami zostavené dlhopisové portfólio bude pozostávať len z jedného typu dlhopisov, pričom sa budeme zaoberať iba par-bondami. Do portfólia sme sa ďalej rozhodli zaradiť len dlhopisy s maturitami 1, 3, 5, 7 a 20 rokov. Jednotlivé portfólia budeme rozlišovať ich zvolenými cieľovými duráciami, ktoré budeme počas celého dvadsaťročného pozorovacieho obdobia držať na jednej hladine. Budeme pozorovať portfólia s duráciami 1, 2 a 3 a tiež sme sa rozhodli zaradiť aj portfólio, ktoré na začiatku pozostáva z rovnomerne rozdelenej investície do každého dlhopisu so spomínanými maturitami.

Program potom pozostáva z nasledovných krokov:

1. Inicializácia portfólia:

   (a) Nastaví sa hodnota počiatočnej investície, ktorá je zároveň zhodná s počiatočnou hodnotou portfólia. Na základe predchádzajúcej kapitoly 6.2, kde sme si odvodili priemernú hodnotu dlhopisového fondu na Slovensku, sme sa rozhodli pracovať s investíciou vo výške 1 mld. eur.

   (b) Spočítajú sa durácie jednotlivých dlhopisov $D_i$ podľa (7), a určia sa hodnotové váhy $v_i$ pre každý z dlhopisov tak, aby sa dosiahla zvolená hodnota durácie $D_{\text{cieľ}}$. Riešime tu tak nasledovnú úlohu lineárneho programovania:

$$\begin{aligned} \min_{v_i, i=1,\dots,5} \quad & D_{\text{cieľ}} - \sum_{i=1}^{5} v_i D_i \\ & \sum_{i=1}^{5} v_i = 1, \ i = 1, \dots, 5, \\ & v_i \geq 0, \ i = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

(c) Počiatočná investícia sa rozdelí medzi dlhopisy pomocou váh $v_i$, pričom súčasná a nominálna hodnota daného dlhopisu sa nastaví ako $PV_i = FV_i = v_i * 1\text{mld.}€$. Pomocou vzťahu (6) sa vypočítajú výšky príslušných kupónov.

2. Prechádzame cez celé pozorovacie obdobie a na začiatku každého nového roka $j$ vykonáme nasledovné kroky:

   (a) Znížime maturitu každého doposiaľ nezmaturovaného dlhopisu.

   (b) Na základe novej výnosovej krivky vypočítame aktuálnu súčasnú hodnotu $PV_i$ každého držaného dlhopisu podľa vzťahu (5). Zároveň spočítame dostupné finančné prostriedky $K$, ktoré sa skladajú z nominálov zmaturovaných dlhopisov a z vyplatených kupónov. Spočíta sa aj aktuálna hodnota celého portfólia ako:

$$\text{hodnota}_j = \sum_i PV_i + K.$$

   (c) Na základe aktuálnej hodnoty portfólia a jeho predchádzajúcej hodnoty vypočítame výnosnosť portfólia ako:

$$\text{výnosnosť}_j = \frac{\text{hodnota}_j - \text{hodnota}_{j-1}}{\text{hodnota}_{j-1}}.$$

   A tiež spočítame aktuálnu hodnotu dôchodkovej jednotky:

$$\text{jednotka}_j = \text{jednotka}_{j-1} \left(1 + \text{výnosnosť}_j\right),$$

   pričom jej počiatočná hodnota je $\text{jednotka}_0 = 1$.

   (d) Peňažné prostriedky navýšime o prichádzajúce platby. Ich hodnotu sme sa na základe kapitoly 6.2 rozhodli nastaviť na 100 miliónov eur. V tomto kroku je zároveň možné odčítať aj prípadné poplatky, ktorých výpočet je opäť uvedený v kapitole 6.2. Po pripočítaní prichádzajúcich a odchádzajúcich platieb získame novú hodnotu finančných prostriedkov $K$ a tiež novú hodnotu portfólia $\text{hodnota}_j$.

   (e) Spočítajú sa aktuálne durácie dlhopisov v portfóliu. Následne všetky dostupné peňažné prostriedky $K$ investujeme do kúpy dvoch nových dlhopisov s maturitami 1 a 20 rokov tak, aby sme opäť získali portfólio s duráciou $D_{\text{cieľ}}$. Ak označíme $PV_{1Y}$ hodnotu investovanú do dlhopisov s maturitou 1 rok, ktorých

durácia $D_{1Y} = 1$, a $D_{20Y}$ aktuálnu duráciu dvadsaťročných dlhopisov, tak potom chceme aby platilo:

$$D_{\text{cieľ}} = D_1 \frac{PV_1}{\text{hodnota}_j} + D_2 \frac{PV_2}{\text{hodnota}_j} + \ldots + 1 \frac{PV_{1Y}}{\text{hodnota}_j} + D_{20Y} \frac{K - PV_{1Y}}{\text{hodnota}_j},$$

z čoho jednoducho určíme požadovanú hodnotu investície $PV_{1Y}$:

$$PV_{1Y} = \frac{D_1 PV_1 + D_2 PV_2 + \ldots + D_{20Y} K - D_{\text{cieľ}} \text{hodnota}_j}{D_{20Y} - 1}.$$

Zvyšnú časť peňažných prostriedkov $K - PV_{1Y}$ následne investujeme do dvadsaťročných dlhopisov. Spočítame príslušné kupóny a prejdeme na rok $j = j+1$.

3. Po prejdení celého pozorovacieho obdobia následne vyhodnotíme vývoj daného portfólia, pričom sa pozrieme na to, či v danej simulácii nastal pokles dôchodkovej jednotky počas niektorého desaťročného obdobia.

## 6.4 Výsledky

Pomocou každého z nakalibrovaných modelov krátkodobej úrokovej miery sme spravili 1000 simulácii vývoja časovej štruktúry úrokových mier na obdobie 20 rokov. Tieto simulácie sme následne využili pri sledovaní vývoja hodnoty dlhopisových portfólii, tak ako sme to uviedli v kapitole 6.3.

Jednotlivé scenáre boli rozlíšené ako použitým typom dlhopisov, duráciou tohto portfólia, tak aj daným modelom krátkodobej úrokovej miery. Pre každú z možností sme následne sledovali počet takých simulácii, pri ktorých nastal aspoň jeden pokles dôchodkovej jednotky počas ľubovoľného desaťročného obdobia, a tiež aj priemerné ročné výnosy.

Ako prvé uvádzame výsledky pre štátne dlhopisy v Tabuľke 7, pričom sme zatiaľ zanedbali odčítavanie poplatkov. Môžeme si všimnúť, že pri všetkých troch modeloch vidíme rovnaký trend, a to, že čím je durácia daného portfólia nižšia, tým zaznamenávame viac prepadov dôchodkovej jednotky.

Príčinu takéhoto vývoja možno hľadať v tom, že čím máme nižšiu duráciu, tým viac jednoročných dlhopisov je obsiahnutých v danom portfóliu, a vzhľadom na to, že v použitých modeloch úrokové miery na kratšie časové obdobie sú často v záporných číslach, tak nastáva situácia, že pri týchto krátkodobých dlhopisoch operujeme so zápornými kupónmi,

čo nám automaticky znižuje hodnotu portfólia a má priamy vplyv na pokles výnosnosti, z čoho bezprostredne vyplýva aj väčšia pravdepodobnosť poklesu dôchodkovej jednotky.

**Tabuľka 7:** Scenár: štátne dlhopisy, bez poplatkov.

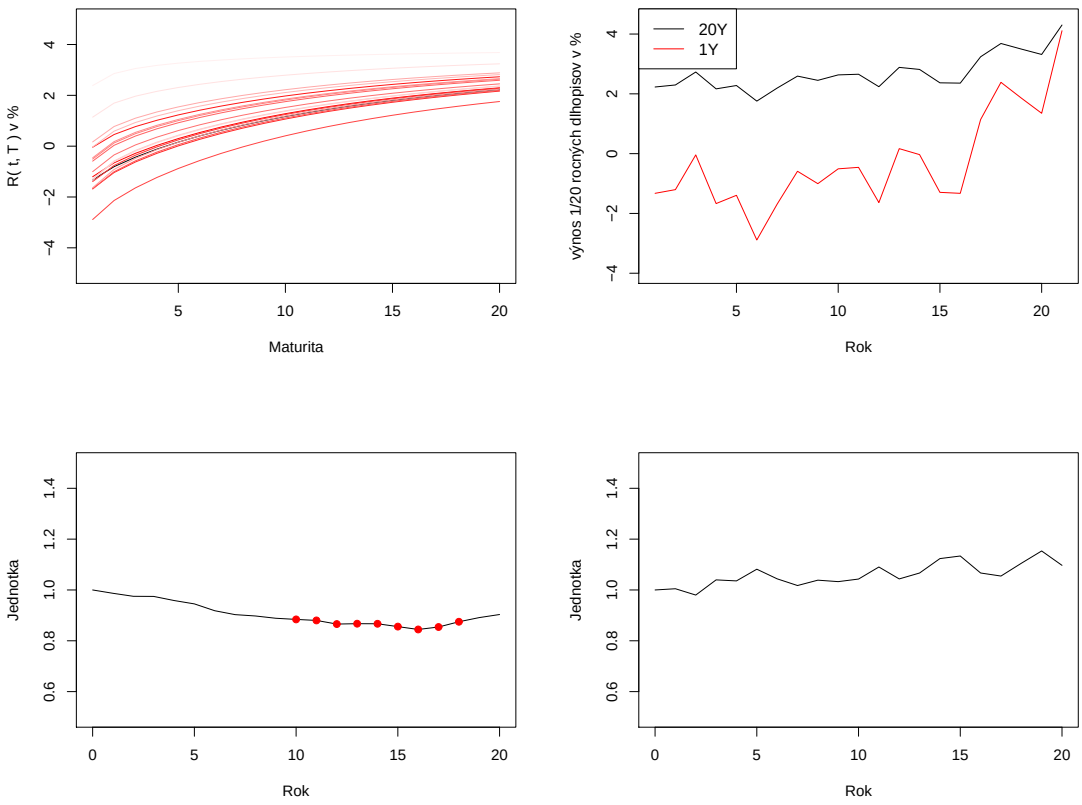
**(a)** Počet simulácii s poklesom dôchodkovej jednotky.

| Durácia | Model | | |
|---|---|---|---|
| | Vašíčkov | Ho-Lee | CIR-VAS |
| 1 | 529 | 781 | 714 |
| 2 | 485 | 712 | 628 |
| 3 | 432 | 683 | 546 |
| Rovnomerne rozdelené portfólio (durácie: 6,88 ; 6,63 ; 6,43) | 242 | 563 | 437 |

**(b)** Priemerné ročné výnosy v %.

| Durácia | Model | | |
|---|---|---|---|
| | Vašíčkov | Ho-Lee | CIR-VAS |
| 1 | 0,42 | -1,52 | -0,30 |
| 2 | 0,50 | -0,98 | -0,17 |
| 3 | 0,53 | -0,61 | 0,19 |
| Rovnomerne rozdelené portfólio (durácie: 6,88 ; 6,63 ; 6,43) | 0,72 | 0,65 | 0,81 |

Hypotézu o tom, že jednoročné dlhopisy veľmi silno vplývajú na väčší počet poklesov dôchodkovej jednotky, potvrdzuje aj Obrázok 21, kde sme pre jednu simuláciu vývoja úrokových mier z CIR-VAS modelu, zobrazili vývoj dôchodkovej jednotky pre portfólio zložené len z jednoročných dlhopisov, a tiež aj pre rovnomerne rozdelené porfólio. Zatiaľ, čo pri rovnomerne rozdelenom portfóliu nedošlo ani k jednému poklesu hodnoty jednotky, pri portfóliu s duráciou 1 prišlo až k desiatim po sebe idúcim poklesom. Z tohto hľadiska sú na tom teda najlepšie rovnomerne rozdelené portfólia, ktorých durácia na úrovni $6-7$, zabezpečuje jednak vyššie výnosy, a tiež aj menej poklesov dôchodkovej jednotky.




**Obr. 21:** Porovnanie priebehu dôchodkovej jednotky pre portfólio zložené z jednoročných dlhopisov a pre rovnomerne rozdelené portfólio, v rámci jedného scenára časového priebehu vývoja výnosovej krivky z CIR-VAS modelu. Vľavo hore je zobrazený uvedený vývoj časovej štruktúry úrokových mier, pričom počiatočná krivka je zobrazená čiernou, a následne jednotlivé krivky zobrazujú výnosovú krivku o rok neskôr (čím sme v čase ďalej, tým je farba bledšia). Vpravo hore je zobrazený vývoj úrokových mier s maturitou 1 a 20 rokov. Vľavo dole je zobrazený vývin dôchodkovej jednotky pre portfólio tvorené len jednoročnými dlhopismi, a na grafe vpravo dole je vykreslený priebeh dôchodkovej jednotky pre rovnomerne rozdelené portfólio. Červenými bodmi sú označené roky, kedy prišlo k poklesu dôchodkovej jednotky v danom desaťročnom období.

Následne sme sa pozreli na vplyv maximálnych možných poplatkov na vývoj dlhopisového portfólia zostaveného zo štátnych dlhopisov. Výsledky pre tento scenár sú uvedené v Tabuľke 8. Ak porovnáme výsledky pre scenár, v ktorom neuvažujeme poplatky a scenár, v ktorom narábame aj s maximálnymi poplatkami, môžeme si všimnúť, že medzi nimi nie je veľký rozdiel. Len v málo prípadoch došlo k nevýraznému navýšeniu počtu simulácii, kde nastal pokles dôchodkovej jednotky. Zdá sa teda, že poplatky tak nemajú

veľký vplyv na vývoj dlhopisového fondu. A vzhľadom na túto skutočnosť, sme sa rozhodli v ďalšej časti s poplatkami nepracovať.

**Tabuľka 8:** Scenár: štátne dlhopisy, s poplatkami.

**(a)** Počet simulácii s poklesom dôchodkovej jednotky.

| Durácia | Model | | |
|---|---|---|---|
| | Vašíčkov | Ho-Lee | CIR-VAS |
| 1 | 531 | 781 | 718 |
| 2 | 485 | 714 | 628 |
| 3 | 433 | 683 | 547 |
| Rovnomerne rozdelené portfólio (durácie: 6,88 ; 6,63 ; 6,43) | 248 | 564 | 439 |

**(b)** Priemerné ročné výnosy v %.

| Durácia | Model | | |
|---|---|---|---|
| | Vašíčkov | Ho-Lee | CIR-VAS |
| 1 | 0,41 | -1,52 | -0,32 |
| 2 | 0,50 | -0,98 | -0,17 |
| 3 | 0,52 | -0,62 | 0,17 |
| Rovnomerne rozdelené portfólio (durácie: 6,88 ; 6,63 ; 6,43) | 0,68 | 0,65 | 0,79 |

Obdobný postup sme následne zopakovali aj pre portfólia zložené z iných typov dlhopisov, a to konkrétne z hypotekárnych záložných listov, bankových a korporátnych dlhopisov. Jednotlivé výsledky tejto analýzy pre uvedené možnosti sú obsiahnuté v Tabuľkách 9, 10 a 11.

Rovnako ako v prípade štátnych dlhopisov, aj tu, pri zvyšných scenároch, opäť pozorujeme zápornú závislosť medzi duráciou portfólia a počtom simulácii s poklesom dôchodkovej jednotky. Celkovo najmenej poklesov a zároveň najväčšie hodnoty priemerných ročných výnosov, ako sa dalo očakávať, pozorujeme pri portfóliach zložených z hypotekár-

nych záložných listov. Vzhľadom na to, že hypotekárne záložné listy patria medzi pomerne bezpečné investície, keďže sú kryté pohľadávkami banky z hypotekárnych úverov, javí sa investovanie práve do tohto typu dlhopisov ako vhodná voľba.

**Tabuľka 9:** Scenár: hypotekárne záložné listy, bez poplatkov.

**(a)** Počet simulácii s poklesom dôchodkovej jednotky.

| Durácia | Model | | |
|---|---|---|---|
| | Vašíčkov | Ho-Lee | CIR-VAS |
| 1 | 92 | 387 | 341 |
| 2 | 65 | 315 | 261 |
| 3 | 34 | 267 | 207 |
| Rovnomerne rozdelené portfólio (durácie: 5,83 ; 5,66 ; 5,73) | 14 | 128 | 118 |

**(b)** Priemerné ročné výnosy v %.

| Durácia | Model | | |
|---|---|---|---|
| | Vašíčkov | Ho-Lee | CIR-VAS |
| 1 | 1,83 | 1,37 | 1,92 |
| 2 | 1,89 | 1,72 | 2,05 |
| 3 | 2,03 | 2,01 | 1,90 |
| Rovnomerne rozdelené portfólio (durácie: 5,83 ; 5,66 ; 5,73) | 2,32 | 2,17 | 2,06 |

Čo sa týka portfólii zložených z bankových a korporátnych dlhopisov, obe vykazujú menší počet poklesov dôchodkovej jednotky ako portfólio zložené zo štátnych dlhopisov. V rámci nich sú na tom, z hľadiska poklesov i priemerných ročných výnosov, korporátne dlhopisy lepšie než bankové dlhopisy. Najlepšie opäť zo všetkých scenárov vyšlo rovnomerne rozdelené portfólio.

**Tabuľka 10:** Scenár: bankové dlhopisy, bez poplatkov.

**(a)** Počet simulácii s poklesom dôchodkovej jednotky.

| Durácia | Model | | |
|---|---|---|---|
| | Vašíčkov | Ho-Lee | CIR-VAS |
| 1 | 318 | 715 | 527 |
| 2 | 242 | 679 | 499 |
| 3 | 221 | 627 | 438 |
| Rovnomerne rozdelené portfólio (durácie: 6,77 ; 6,53 ; 6,71) | 103 | 512 | 401 |

**(b)** Priemerné ročné výnosy v %.

| Durácia | Model | | |
|---|---|---|---|
| | Vašíčkov | Ho-Lee | CIR-VAS |
| 1 | 0,79 | -1,04 | -0,21 |
| 2 | 0,82 | -0,98 | -0,02 |
| 3 | 0,93 | -0,15 | 0,60 |
| Rovnomerne rozdelené portfólio (durácie: 6,77 ; 6,53 ; 6,71) | 1,09 | 0,82 | 1,03 |

Napokon medzi sebou porovnáme ešte samotné modely krátkodobej úrokovej miery. Keď sa bližšie pozrieme na jednotlivé výsledky opisujúce počty simulácii s poklesom dôchodkovej jednotky a tiež priemerné ročné výnosy, tak je možné si všimnúť, že pri Vašíčkovom modeli máme často výrazne nižšie hodnoty pri počtoch simulácii, v ktorých došlo k prepadu dôchodkovej jednotky, ako pri zvyšných dvoch modeloch. Jedno z možných vysvetlení sa nám poskytuje, ak sa pozrieme na simulácie vývoja výnosovej krivky vo Vašíčkovom modeli (pozri kapitolu 4.3 Obrázok 15). Tam totiž pozorujeme, že tento model nám poskytuje scenáre, v ktorých dochádza k preklopeniu výnosovej krivky, kedy dlhopisy s nižšou maturitou majú vyššie výnosy ako dlhopisy s vyššou maturitou. A ako sme už vyššie uviedli, práve záporné úrokové miery pre jednoročné dlhopisy zvyšujú počet poklesov dôchodkovej jednotky. Z prevrátenia výnosovej krivky tak automaticky vyplýva,

že bude dochádzať k menšiemu množstvu poklesov v tomto modeli.

**Tabuľka 11:** Scenár: korporátne dlhopisy, bez poplatkov.

**(a)** Počet simulácii s poklesom dôchodkovej jednotky.

| Durácia | Model | | |
|---|---|---|---|
| | Vašíčkov | Ho-Lee | CIR-VAS |
| 1 | 160 | 686 | 401 |
| 2 | 121 | 632 | 368 |
| 3 | 95 | 609 | 319 |
| Rovnomerne rozdelené portfólio (durácie: 6,67 ; 6,43 ; 6,51) | 47 | 468 | 289 |

**(b)** Priemerné ročné výnosy v %.

| Durácia | Model | | |
|---|---|---|---|
| | Vašíčkov | Ho-Lee | CIR-VAS |
| 1 | 1,09 | -0,42 | -0,02 |
| 2 | 1,15 | -0,11 | 0,47 |
| 3 | 1,22 | 0,44 | 0,85 |
| Rovnomerne rozdelené portfólio (durácie: 6,67 ; 6,43 ; 6,51) | 1,34 | 1,29 | 1,42 |

# Záver

Táto diplomová práca sa zaoberala modelovaním úrokových mier pomocou modelov krátkobej úrokovej miery $r_t$, v kontexte s aktuálnymi zápornými hodnotami úrokových mier. Hlavným cieľom bolo teda vyskúšať rôzne modely úrokových mier, pozrieť sa na ich vlastnosti a na to, či si vedia poradiť so zápornými úrokovými mierami.

V kapitole 1 sme spísali všeobecnú teóriu týkajúcu sa dlhopisov, pozreli sme sa na ich oceňovanie, duráciu a tiež sme uviedli vzťah pre časovú štruktúru úrokových mier. Vzhľadom na to, že časová štruktúra úrokových mier zostrojená na základe informácii o dlhopisoch aktuálne dostupných na trhu, je nespojitá, a pre naše účely jej aproximácia pomocou lineárneho splajnu nie je dostatočná, sme následne uviedli jeden z možných spôsobov jej hladkej aproximácie. Využili sme pri tom Svenssonov model, ktorý bližšie popisujeme v kapitole 1.4, kde ho zároveň aplikujeme aj na reálne trhové dáta.

Ďalej sme sa venovali modelom krátkodobej úrokovej miery, pričom sme sa zamerali len na modely pripúšťajúce záporné hodnoty $r_t$ (pozri Tabuľka 2). Spomedzi nich sme sa bližšie pozreli na Ho-Lee model (15), Vašíčkov model (41) a napokon na jeden príklad dvojfaktorového modelu (69).

V kapitole 3.1 sme na základe podmieneného pravdepodobnostného rozdelenia $r_t$, odvodili vlastnú kalibráciu parametrov Ho-Lee modelu, pričom sme využili metódu maximálnej vierohodnosti. Získanú kalibráciu, ktorá je daná vzťahmi (38) a (40), sme následne otestovali na trhových dátach. Na základe získaných odhadov sme následne simulovali vývoj krátkodobej úrokovej miery a tiež vývoj časovej štruktúry úrokových mier. Výsledky, ktoré sme dostali, kvalitne opisovali vývoj výnosovej krivky v čase.

V nasledujúcej kapitole 4 sme sa zaoberali Vašíčkovým modelom, ktorý sme na trhové dáta kalibrovali opäť metódou maximálnej vierohodnosti, ktorú v [4, kap. 3.2.1] uvádzajú Brigo a Mercurio. My sme tu ukázali aj jej celé odvodenie a tiež sme ju aplikovali na reálne dáta. Z hľadiska fitovania počiatočnej výnosovej krivky, vyšiel práve Vašíčkov model najhoršie, ako možno vidieť na Obrázku 13. Príčinou tohto môže byť, že pri kalibrácii sa nevyužíva dostatočná informácia o časovej štruktúre úrokových mier, keďže použitý spôsob kalibrácie je založený čisto len na vývoji krátkodobej úrokovej miery, ktorú sme

v našej práci aproximovali úrokovou mierou Eonia.

Ako poslednému sme sa v kapitole 5 venovali dvojfaktorovému modelu krátkodobej úrokovej miery, pričom jeden z faktorov bol modelovaný Vašíčkovým procesom a druhý faktor sa riadil CIR dynamikou. Predtým než sme pristúpili k jeho kalibrácii pomocou Kalmanovho filtra, bolo nutné najprv previesť spomínaný model do formy lineárneho systému, ktorý je daný rovnicami pre výstup (81) a stavovými rovnicami (84), pričom sa využila aproximácia pravdepodobnostného rozdelenia pre CIR faktor normálnym rozdelením so zodpovedajúcou strednou hodnotou a disperziou. Z hľadiska fitovania počiatočnej výnosovej krivky sme týmto spôsobom dosiahli uspokojivé výsledky (pozri Obrázok 16), aj napriek tomu, že pre kratšie maturity stále zaznamenávame odklon výnosovej krivky z modelu od realizovanej výnosovej krivky.

Napokon, v poslednej šiestej kapitole, sme pomocou predchádzajúcich modelov simulovali možné vývoje časovej štruktúry úrokových mier do budúcnosti, a tieto simulácie sme následne použili pri sledovaní vývoja hodnoty dlhopisového portfólia. Zostavili sme program (pozri kapitola 6.3), ktorým počas stanoveného dvadsaťročného obdobia pozorujeme priebeh výnosnosti dlhopisového portfólia, zostaveného z rôznych typov dlhopisov. Tiež sme sa zamerali na to, v koľkých prípadoch a pre aké scenáre vývoja výnosovej krivky, došlo k aspoň jednému poklesu dôchodkovej jednotky v ľubovoľnom desaťročnom období. Zistili sme, že k najmenšiemu počtu poklesov dochádza pri portfóliach s vyššou hodnotou durácie. Z hľadiska sledovaných typov dlhopisov nám vyšlo, že najbezpečnejšiu investíciu predstavujú hypotekárne záložné listy, ktoré jednak prinášajú najväčšie výnosy a tiež pri nich došlo k najmenšiemu počtu prepadov dôchodkovej jednotky. Naopak, najhoršie z našej analýzy vyšli štátne dlhopisy.

Keďže v kapitole 5.2.1, pri hľadaní optimálnych parametrov pre dvojfaktorový model pomocou Kalmanovho filtra, musíme optimalizovať nelineárnu funkciu (100) cez veľký počet premenných, čo môže predstavovať pomerne náročný problém, dala by sa práca rozšíriť o numerické, prípadne stochastické metódy riešenia tejto úlohy zamerané na hľadanie globálneho optima spomínanej funkcie. V aplikačnej časti by tiež mohlo byť prínosné skonštruovanie a sledovanie portfólii, ktoré by boli zložené z kombinácii viacerých typov dlhopisov.

# Zoznam použitej literatúry


[1] Ball, C. A., Torous, W. N.: *Unit roots and the estimation of interest rate dynamics*, Journal of Empirical Finance 3 (1996), 215-238

[2] Black, F., Scholes, M.: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* , The Journal of Political Economy 81 (1973), 637-654

[3] Bolder, D. J.: *Affine Term-Structure Models: Theory and Implementation* , Working Paper, Bank of Canada, Ottawa, 2001, dostupné na internete (20.01.2019): `https://www.bankofcanada.ca/wp-content/uploads/2010/02/wp01-15a.pdf`

[4] Brigo, D., Mercurio, F.: *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit*, Springer Science & Business Media, Berlin, 2007

[5] Brigo, D., Mercucio, F.: *A deterministic–shift extension of analytically–tractable and time–homogeneous short–rate models*, Finance and Stochastics 5, 369-387

[6] Bučková, Z., Halgašová, J., Stehlíková, B.: *Estimating the short rate from the term structure in the Vasicek model*, Tatra Mountains Mathematical Publications 61 (2014), 87-103

[7] Bučková, Z., Halgašová, J., Stehlíková, B.: *Short Rate as Sum of Two CKLS-Type Processes*, Numerical Analysis and Its Applications (2017), 243-251

[8] Campbell, J. Y.: *Some lessons from the Yield Curve*, Journal of Economics Perspectives 9 (1995), 129-152

[9] Cox, J. C., Ingersoll, E., Ross, S. A.: *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica 53 (1985), 385-407

[10] Dothan, L. U.: *On the term structure of interest rates* , Journal of Financial Economics 6 (1978), 59-69

[11] Estrella, A., Mishkin, F. S.: *The Yield Curve as a Predictor of U.S. Recessions*, Current Issues in Economics and Finance 2 (1996), 1-6

[12] Historický vývoj výnosov štátnych dlhopisov, dostupné na internete (09.01.2019): https://www.investing.com/rates-bonds/world-government-bonds

[13] Historický vývoj úrokových mier Euribor a Eonia, dostupné na internete (09.01.2019): https://www.emmi-benchmarks.eu

[14] Ho, T. S. Y., Lee, S. B.: *Term structure movements and the pricing of interest rate contingent claims*, The Journal of Finance 41 (1986), 1011-1024

[15] Hull, J., White, A.: *Pricing interest-rate derivative securities*, The Review of Financial Studies 5 (1990), 573-592

[16] Húsková, P.: *Short rate modely pripúšťajúce záporné úrokové miery*, diplomová práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava, 2018

[17] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, EPOS, Bratislava, 2005

[18] Merton, R. C.: *Theory of Rational Option Pricing*, The Bell Journal of Economics and Management Science 4 (1973), 141-183

[19] Mikula, K., Stehlíková, B., Ševčovič, D.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Nakladateľstvo STU, Bratislava, 2009

[20] Ministerstvo práce, sociálnych vecí a rodiny Slovenskej republiky, dostupné na internete (21.04.2019): https://www.employment.gov.sk/

[21] Remiarová, K.: *Správa garantovaného fondu v dôchodkovom systéme na Slovensku*, diplomová práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava, 2017

[22] Statistical Data Warehouse, dostupné na internete (14.04.2019): https://sdw.ecb.europa.eu/

[23] Svensson, L.: *Estimating forward interest rates with the extended Nelson & Siegel method*, Sveriges Riksbank Quarterly Review 3 (1995), 13-26

[24] Štatistický úrad Slovenskej republiky, dostupné na internete (21.04.2019): https://slovak.statistics.sk

[25] Vašíček, O.: *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of financial economics 6 (1977), 177-188

[26] Zákon č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení, dostupné na internete (14.04.2019): `https://www.nbs.sk/sk/legislativa/uplne-znenia-zakonov-patriacich-do-kompetencie-nbs`