UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



OPTIMÁLNE RIADENIE DLHOPISOVÉHO DÔCHODKOVÉHO FONDU Z HĽADISKA GARANCIÍ A VÝKONNOSTI

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2019 Bc. Andrea JEČMENOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OPTIMÁLNE RIADENIE DLHOPISOVÉHO DÔCHODKOVÉHO FONDU Z HĽADISKA GARANCIÍ A VÝKONNOSTI

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Mgr. Miroslav Kotov

Bratislava 2019 **Bc. Andrea JEČMENOVÁ**

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Andrea Ječmenová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Optimálne riadenie dlhopisového dôchodkového fondu z hľadiska garancií a výkonnosti
Optimal managing of the bond pension fund with regard to guarantees and performance

Anotácia: Dlhopisové dôchodkové fondy v SR majú zákonnú povinnosť na minimálnu dosiahnutú výkonnosť. V týchto fondoch umožňuje zákon oceňovať dlhopisy rôznymi metódami - trhovými cenami ako aj metódou umorovanej hodnoty. Tieto metódy a ich kombinácie pre rôzne dlhopisy umožňujú vytvárať stratégie riadenia fondu s rôznymi dopadmi na dosahovanie garancií ako aj na relatívnu výkonnosť voči konkurenčným fondom či benchmarku fondu.

Vedúci: Mgr. Miroslav Kotov
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

Dátum zadania: 24.01.2018

Dátum schválenia: 25.01.2018 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie Chcela by som sa poďakovať svojmu školiteľovi Mgr. Miroslavovi Kotovovi za usmernenie a adresovanie podstatných pripomienok a rád. Rovnako by som chcela vyjadriť poďakovanie svojej rodine a priateľovi za podporu pri písaní.

Abstrakt

JEČMENOVÁ, Andrea: Optimálne riadenie dlhopisového dôchodkového fondu z hľadiska garancií a výkonnosti [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Miroslav Kotov, Bratislava, 2019, 58 s.

Táto práca sa zaoberá dlhopisovým fondom a jeho fungovaním. Popisuje model simulujúci fungovanie portfólia takéhoto fondu a snaží sa doňho zakomponovať výnosovú krivku meniacu sa v čase. Súčasťou práce je teda aj skonštruovanie modelu na predikciu výnosových kriviek. Výsledkom sú scenáre pohybov výnosovej krivky a ich vplyv na portfólio dlhopisového fondu, ako aj porovnanie s výkonnosťou čisto trhovo oceňovaným portfóliom.

Kľúčové slová: dlhopisový dôchodkový fond, MTM dlhopis, HTM dlhopis, Cash-flow párovací model, výnosová krivka, Vašíčkov model, dynamický Nelson-Siegelov model.

Abstract

JEČMENOVÁ, Andrea: Optimal managing of bond pension fund in term of guaranties and efficiency [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Miroslav Kotov, Bratislava, 2019, 58 p.

This thesis deals with bond fund and its operating. It describes model simulating performance of portfolio of such fund and also tries to integrate time-varying yield curve into this model. Our focus is constructing the model predicting yield curves. The results are scenarios of yield curve movements and its influence on bond fund portfolio and also performance compararison of constructed portfolio and portfolio containing only MTM bonds.

Key words: bond pension fund, MTM bond, HTM bond, Cash-flow matching model, yield curve, Vasicek model, dynamic Nelson-Siegel model.

Obsah

Úvod **8**

1 Dôchodkový systém v rámci II. piliera **10**

1.1 Charakteristika II. piliera 10

1.2 Terminológia súvisiaca s dlhopisovými fondmi 10

2 Jednokrokový model **15**

2.1 Popis základného modelu 15

2.2 Aplikácia modelu na dáta 18

2.2.1 Pridanie možnosti predaja dlhopisov 20

2.2.2 Pridanie parametrov výkonnosti 22

3 Modelovanie výnosovej krivky **25**

3.1 Tvary a posuny výnosových kriviek 25

3.2 Vašíčkov model 26

3.3 Dynamický Nelson-Siegelov model 32

4 Dynamický model optimalizácie **39**

4.1 Použitie výnosovej krivky z Vašíčkovho modelu 40

4.2 Použitie výnosovej krivky z dynamického Nelson-Siegelovho modelu . . 40

4.3 Porovnanie výsledkov 41

5 Stresové scenáre pre portfólio dlhopisového fondu **43**

5.1 Metódy pre zlepšenie výkonnosti portfólia 43

5.2 Porovnanie jednotlivých metód na stresových scenároch 46

5.3 Zhrnutie výsledkov 47

Záver **50**

Zoznam použitej literatúry **53**

Príloha A **54**

Úvod

Dôchodkové sporenie je v dnešnej dobe vysoko aktuálna téma. Počet ľudí v dôchodkovom veku totiž neustále pribúda, zatiaľ čo počet aktívne pracujúcich ľudí sa v pomere k počtu dôchodcov znižuje. Tým sa stáva najbežnejší I. pilier, v ktorom práve aktívne pracujúci ľudia prispievajú dôchodcom na dôchodky, neudržateľný. Čoraz viac ľudí preto začína sporiť aj v II. pilieri, ktorý nie je taký naviazaný na demografický vývoj a ponúka ľuďom možnosť zvýšiť hodnotu svojho dôchodku.

My sa v tejto práci budeme zaoberať práve II. pilierom, konkrétne fungovaním garantovaného dôchodkového fondu. Spája sa s ním viacero obmedzení, ale aj garancia na kladné zhodnotenie dôchodkovej jednotky počas sledovaných období. Investícia do tohto fondu je tým pádom menej riziková v porovnaní s inými typmi fondov II. piliera.

V 1. kapitole v jednoduchosti popíšeme fungovanie aktuálneho dôchodkového systému a bližšie špecifikujeme garantovaný fond aj s terminológiou, ktorá s ním súvisí. Uvedieme tiež základné matematické pojmy a vzorce spájajúce sa s dlhopismi, ktoré budeme využívať v ďalších častiach.

V 2. kapitole predstavíme model, v ktorom budeme optimalizovať priemernú hodnotu portfólia počas zadaného obdobia a stanovíme ohraničenia, ktoré budeme od modelu požadovať. Bude popisovať správanie dlhopisového fondu. Medzi vstupmi do modelu bude aj výnosová krivka, ale iba v aktuálnom čase. Krivky v budúcich rokov budú počítané na základe forwardových úrokových mier. Okrem toho si predstavíme parametre, na základe ktorých meriame výkonnosť portfólia.

II. pilier je pomerne závislý od diania na finančných trhoch, keďže sporitelia si sporia na dôchodok prostredníctvom investovania do rôznych finančných nástrojov. Garantovaný fond ponúka prevažne investície do dlhopisov, preto jedným z dôležitých faktorov, ktoré naň vplývajú je práve výnosová krivka. V predošlej časti sme uvažovali iba aktuálnu výnosovú krivku, na základe ktorej sme odhadli vývoj v budúcich rokoch. Pre model by však bolo výhodnejšie priebežne rebalancovať rozloženie investície na základe skutočnej výnosovej krivky. Preto v 3. kapitole predstavíme modely na predikovanie správania výnosovej krivky v budúcnosti, konkrétne Vašíčkov a dynamický Nelson-Siegelov model, ktoré v našom modeli budú predstavovať reálnu výnosovú krivku v budúcich rokoch.

V 4. kapitole zakomponujeme vygenerované scenáre z predchádzajúcej kapitoly a každoročne prehodnotíme portfólio na základe aktuálnej krivky a príslušných forwardových kriviek. Dostaneme tak dynamický viackrokový model optimalizácie. Zároveň porovnáme výkonnosť s benchmarkom predstavujúcim trhovo oceňované portfólio.

V poslednej kapitole identifikujeme riziká, ktorým čelí fond počas fungovania a zameriame sa na riziko spojené s úrokovými mierami. Použijeme scenáre z Vašíčkovho modelu ako stresové scenáre a navrhneme 4 stratégie, ktoré majú potenciál vylepšiť výkonnosť pôvodného modelu a aplikujeme ich na vybraté scenáre.

Cieľom našej práce bude ilustrovať scenáre pohybu výnosovej krivky a jej dopady na hodnotu portfólia dlhopisového fondu. Vytvoríme model, ktorý bude popisovať správanie takéhoto fondu a budeme sa snažiť optimalizovať hodnotu jeho majetku. Na základe vygenerovaných výnosových kriviek identifikujeme správanie portfólia v jednotlivých prípadoch. Taktiež sa budeme snažiť porovnať modelované portfólio s čisto trhovo oceňovaným portfóliom s rovnakou duráciou a budeme požadovať, aby sa naše portfólio výkonnostne príliš neoddialo od trhového. Naším prínosom teda bude identifikovanie možného budúceho vývoja portfólia, respektíve jeho stresových scenárov a dopady na garantovaný dôchodkový fond.

1 Dôchodkový systém v rámci II. piliera

1.1 Charakteristika II. piliera

Aktuálny dôchodkový systém na Slovensku pozostáva od roku 2004 z troch pilierov. Piliere sú tvorené prostredníctvom povinných odvodov na sociálne poistné (I. a II. pilier), respektíve dobrovoľnými príspevkami (II. a III. pilier). Momentálna výška odvodov je stanovená na 18% z vymeriavacieho základu, teda z hrubej mesačnej mzdy. Občan sa dostáva do vzťahu s dôchodkovým systémom tým, že vstúpi na pracovný trh. My sa v tejto práci budeme zaoberať problematikou II. piliera.

II. pilier zastupujú dôchodkové správcovské spoločnosti a je definovaný zákonom č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení . V kombinácii s prvým pilierom sa snaží sporiteľom zabezpečiť dostatočný príjem v starobe. Nazýva sa tiež kapitalizačný pilier, keďže každý sporiteľ si sporí na osobnom účte peniaze, ktoré dôchodkové správcovské spoločnosti investujú na finančných trhoch. Jednou z výhod je zásluhovosť, teda dôchodok je tvorený z toho, čo si sporiteľ našetrí. Taktiež je možné oproti I. pilieru dediť úspory poistenca v prípade jeho úmrtia. Na druhej strane je do veľkej miery ovplyvňovaný dianím na finančných trhoch a vstup do tohto piliera je možný iba do 35 rokov. V prípade tohto typu sporenia sa povinné odvody prerozdeľujú od roku 2018 nasledovne: 13,5% putuje do Sociálnej poisťovne, zatiaľ čo 4,5% ide na osobný účet sporiteľa v dôchodkovej správcovskej spoločnosti. Po splnení právnych podmienok na vyplatenie dôchodku, občan dostáva svoju penziu naraz z dvoch zdrojov, časť z povinného I. piliera a časť zo svojich osobných dôchodkových úspor.

1.2 Terminológia súvisiaca s dlhopisovými fondmi

V súčasnosti na Slovensku pôsobí 6 dôchodkových správcovských spoločností. Každá z nich je zo zákona povinná spravovať 2 typy fondov:

dlhopisový garantovaný d. f., ktorý obsahuje bezpečné peňažné a dlhopisové investície,

a

akciový negarantovaný d. f., v ktorom je možnosť investovať do množstva nástrojov, vrátane akcií.

My sa v tejto práci budeme zaoberať garantovaným fondom, ktorý charakterizujeme na základe [3] a [4] objasníme základné pojmy:

- Pod pojmom investovanie v dôchodkovom fonde sa rozumie zhodnocovanie majetku v tomto fonde na princípe obmedzenia a rozloženia rizika podľa uvedeného zákona.

- *Majetok v dôchodkovom fonde* nie je súčasťou majetku dôchodkovej správcovskej spoločnosti. Majetok v dôchodkovom fonde tvoria podiely sporiteľov na tomto majetku, pričom podiel sporiteľa na tomto majetku je vyjadrený pomerom dôchodkových jednotiek na osobnom dôchodkovom účte sporiteľa ku všetkým dôchodkovým jednotkám tohto dôchodkového fondu.

  Dôchodková jednotka je teda podiel na majetku v dôchodkovom fonde a jej aktuálnu hodnotu je dôchodková správcovská spoločnosť povinná vypočítať každý pracovný deň a oznámiť Národnej banke Slovenska a depozitárovi. Jej hodnotu určujeme ako:

  $$AHDJ_t = \frac{NAV_t}{\#\, podielov}\,, \tag{1}$$

  kde NAV_t je čistá hodnota majetku fondu.

- **Garantovaný dlhopisový fond garantuje doplniť hodnotu majetku vo fonde z vlastného majetku** vo výške absolútnej hodnoty súčinu poklesu hodnoty dôchodkovej jednotky a priemernej čistej hodnoty majetku v dlhopisovom garantovanom dôchodkovom fonde za sledované obdobie. Sledované obdobie tu predstavuje 10 po sebe nasledujúcich rokov.

- Dôchodková správcovská spoločnosť má právo na:

a) *odplatu za správu dôchodkového fondu*, ktorá je určená dôchodkovou správcovskou spoločnosťou. Nesmie pritom presiahnuť hodnotu 0,3% priemernej ročnej predbežnej čistej hodnoty dôchodkového fondu. Táto odplata zahŕňa náklady DSS spojené so správou fondu, napr. poplatky depozitárovi alebo dane za majetok vo fonde.

b) *odplatu za vedenie osobného dôchodkového účtu*, ktorá sa vzťahuje na každého sporiteľa v dôchodkovom fonde. Jej hodnota nesmie presiahnuť 1% zo sumy príspevkov sporiteľov.

c) *odplatu za zhodnotenie majetku v dôchodkovom fonde*. Dôchodková správcovská spoločnosť má na ňu nárok jedine v prípade kladného zhodnotenia dôchodkovej jednotky. Konkrétne má právo si ju nárokovať v prípade, že dôchodková jednotka dosiahne svoje trojročné maximum. Potom sa jej výška určuje podľa vzorca:

$$O_t = K * NAV_t * (\frac{AHDJ_t}{max\, AHDJ_{t-1}} - 1)\,, \tag{2}$$

kde O_t je odplata, K je konštanta s maximálnou možnou hodnotou 0,1; NAV_t je čistá predbežná hodnota majetku, $AHDJ_t$ je aktuálna hodnota dôchodkovej jednotky vypočítaná na základe NAV_t a $max\, AHDJ_{t-1}$ je maximálna hodnota dôchodkovej jednotky dosiahnutá za posledné 3 roky.
Výšku odplaty si stanovuje samotná dôchodková správcovská spoločnosť.

- *Predbežná čistá hodnota majetku* predstavuje rozdiel hodnoty majetku a odplaty za vedenie osobného dôchodkového účtu. *Druhá predbežná čistá hodnota* predstavuje zníženie predbežnej čistej hodnoty o odplatu za správu dôchodkového fondu. *Čistá hodnota majetku* v dôchodkovom fonde predstavuje hodnotu majetku očistenú o všetky záväzky fondu. Teda je to druhá predbežná čistá hodnota znížená o odplatu za zhodnotenie majetku.

- V dlhopisovom garantovanom dôchodkovom fonde sa hodnota majetku určuje *metódou reálnej hodnoty* alebo *metódou umorovanej hodnoty*. Podľa toho rozlišujeme

2 typy dlhopisov:

MTM dlhopisy - tieto dlhopisy sú oceňované trhovo, resp. metódou reálnej hodnoty a môžeme ich predať v ľubovoľnom čase od ich zakúpenia. Cenu dlhopisu vtedy vyjadríme nasledovne v prípade diskrétneho úročenia:

$$P = \sum_{i=1}^{T} \frac{C}{(1+r_i)^i} + \frac{F}{(1+r_T)^T} \tag{3}$$

alebo v prípade spojitého úročenia:

$$P = \sum_{i=1}^{T} C\delta e^{-R(t_0,t_i)(t_i-t_0)} + Fe^{-R(t_0,t_T)(t_T-t_0)}, \tag{4}$$

kde r_i úrok závisiaci od doby vypršania dlhopisu, $R(T_1, T_2)$ predstavuje spojitý úrok na obdobie T_1 až T_2, C je konštantná výška kupónu a F je nominálna hodnota, ktorá je vyplatená majiteľovi dlhopisu na konci splatnosti.

HTM dlhopisy - narozdiel od MTM dlhopisov ich musíme v portfóliu držať až do splatnosti a oceňujeme ich metódou umorovanej hodnoty. Oceňujeme ich nasledovne:

$$P = \sum_{i=1}^{T} \frac{C}{(1+y)^i} + \frac{F}{(1+y)^T} \tag{5}$$

alebo v prípade spojitého úročenia:

$$P = \sum_{i=1}^{T} C\delta e^{-y(t_i-t_0)} + Fe^{-y(t_T-t_0)}, \tag{6}$$

kde y predstavuje výnos do splatnosti, teda konštantný úrok vyjadrený z nákupnej ceny dlhopisu. Pri kúpe dlhopisu sa stanoví príslušný nákupný výnos do splatnosti, ktorý sa uzamkne a dlhopis sa v nasledujúcich rokoch oceňuje na základe tejto hodnoty.

- Ďalším dôležitým pojmom je **durácia**. Vyjadruje mieru citlivosti trhovej ceny dlhopisu na zmenu trhovej úrokovej miery.

  V prípade diskrétneho úročenia používame pojem *kvázimodifikovaná durácia* a vypočítame ju nasledovne:

$$D_Q = -\frac{1}{PV(0)}\frac{dPV(0)}{d\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{m})X_i(1+\frac{s_i}{m})^{-(i+1)}}{\sum_{i=1}^{n}X_i(1+\frac{s_i}{m})^{-(i+1)}}, \tag{7}$$

kde $PV(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} X_i(1+\frac{s_i+\lambda}{m})^{-i}$ predstavuje súčasnú hodnotu peňažného toku, postupnosť $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ tvorí tok jednotlivých platieb, s_i okamžitú úrokovú mieru v perióde i, λ predstavuje paralelný posun výnosovej krivky a m tvorí počet úročení za rok.

V prípade spojitého úročenia používame pojem *Fisher-Weilova durácia* a vieme ju vyjadriť takto:

$$D_{FW} = -\frac{1}{PV}\sum_{i=1}^{n} t_i X_{t_i} e^{-s_{t_i} t_i}, \tag{8}$$

kde $PV(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} X_{t_i} e^{-(s_{t_i}+\lambda)t_i}$ predstavuje súčasnú hodnotu peňažného toku, postupnosť $\{X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}\}$ tvorí postupnosť jednotlivých platieb, s_{t_i} predstavuje krivku okamžitých úrokových mier a λ predstavuje paralelný posun výnosovej krivky.

Prirodzene duráciu vieme vyjadriť iba pre trhovo oceňované MTM dlhopisy, keďže cien HTM dlhopisov sa zmena úrokových sadzieb nedotkne.

- Okrem toho budeme v modeli používať aj **forwardové výnosové krivky**. Tie predstavujú časovú štruktúru forwardových úrokových mier. Forwardové miery sú úrokové miery medzi 2 časovými obdobiami v budúcnosti platné za podmienok dohodnutých dnes. Vieme ich vyjadriť podľa vzorca:

$$f_{i,j} = \left[\frac{(1+r_j)^j}{(1+r_i)^i}\right]^{\frac{1}{j-i}} - 1, \tag{9}$$

kde i je začiatok budúceho obdobia, j je koniec budúceho obdobia, r_i je úroková miera platná od aktuálneho času t do i a r_j je úroková miera platná od aktuálneho času t po čas j.

2 Jednokrokový model

2.1 Popis základného modelu

Zohľadnením charakteristík opísaných v predchádzajúcej kapitole sme vytvorili model simulujúci fungovanie portfólia dlhopisového fondu, v ktorom sa snažíme maximalizovať priebežnú hodnotu portfólia. Model predstavuje jednokrokovú optimalizáciu, v ktorej sa zohľadní výnosová krivka na začiatku optimalizácie a podľa nej sa odhadnú forwardové krivky pre nasledujúce roky. Zároveň zohľadňujeme peňažné toky v každom roku. Podobné modely boli popísané aj v [5], [6].

Naše prvotné požiadavky na model sú:

1. maximalizovať priemernú hodnotu portfólia za uvažované obdobie
2. prostriedky získané investovaním znížené o náklady ďalej reinvestovať
3. udržať hodnotu durácie na cielenej hodnote
4. každoročne doplniť podiel HTM dlhopisov do 25% z hodnoty portfólia dokúpením najdlhšej splatnosti (zvolená stratégia)
5. dodržať garancie dlhopisového fondu
6. nemožnosť predávania dlhopisov po nákupe do portfólia.

Naším cieľom je maximalizácia váženej hodnoty portfólia, pričom váha každého roka je rovnaká. Chceme teda rovnomerne maximalizovať hodnotu majetku narozdiel od maximalizácie majetku až na konci optimalizovaného obdobia. Požadujeme totiž dosiahnutie čo najväčšej hodnoty nielen v konkrétnom roku, ale aj vo všetkých ďalších, aby sme napríklad neznevýhodnili iba sporiteľov v určitom roku.

Náš model má tvar:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \sum_{s=t}^{T} weight_s(\sum\nolimits_{i\in U} Z^M_{s+1,i}x^M_i + \sum\nolimits_{i\in U} Z^H_{s+1,i}x^H_i) \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{i\in U} F^M_{t,i}x^M_i + \sum_{i\in U} F^H_{t,i}x^H_i = L_t + \sum_{i\in U} P^M_{t,i}x^M_i + \sum_{i\in U} P^H_{t,i}x^H_i \\
& \frac{\sum_{i\in U} D_{t,i}Z^M_{t,i}x^M_i}{\sum_{i\in U} Z^M_{t,i}x^M_i + \sum_{i\in U} Z^H_{t,i}x^H_i} \geq 3 - tolerancia \\
& \frac{\sum_{i\in U} D_{t,i}Z^M_{t,i}x^M_i}{\sum_{i\in U} Z^M_{t,i}x^M_i + \sum_{i\in U} Z^H_{t,i}x^H_i} \leq 3 + tolerancia \\
& x^M_i, x^H_i \geq 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

V každom kroku fungovania portfólia $t = \langle 0, T\rangle$ sa riadime jednokrokovým modelom (1). Hľadanie optimálneho zloženia počas celého požadovaného obdobia totiž prebehne v rámci 1 iterácie. Hodnoty $Z_{t+1,i}$ v účelovej funkcii predstavujú precenenú hodnotu dlhopisu i na konci roka t a hodnoty x_i predstavujú celkové počty kusov konkrétnej pozície v portfóliu.

Účelovú funkciu predstavujú hodnoty portfólia na konci rokov t až T, z ktorých urobíme aritmetický priemer. Naša účelová funkcia berie do úvahy všetky predikované výnosové krivky, ktoré odhadne na začiatku a na základe nich vypočíta hodnoty portfólia v ďalších rokoch.

Prvá rovnica modelu (1) vyjadruje, že všetky prostriedky získané zo zmaturovaných dlhopisov a znížené/zvýšené o prípadné výdavky, resp. príjmy sú investované do nákupu nových dlhopisov. Investícia do nových dlhopisov je tvorená hodnotou zmaturovaných dlhopisov a rozdielom medzi hodnotou nových a redemovaných podielov vo fonde.$F_{t,i}$ tu predstavujú nominálne hodnoty zmaturovaných dlhopisov a $P_{t,i}$ trhové ceny dokupovaných dlhopisov v danom roku. Hodnota L_t predstavuje rozdiel záväzkov a príjmov (rozdiel nových a redemovaných podielov) v danom roku.

Nerovnice v modeli predstavujú ohraničenie durácie zhora aj zdola oproti cielenej hodnote, v našom prípade 3, o vopred danú toleranciu, aby nekolísala citlivosť portfólia

na zmenu úrokových mier. Prílišná citlivosť portfólia totiž môže spôsobiť vysoké straty pri zvýšení úrokových mier. A naopak nízka citlivosť znamená investíciu najmä do krátkodobých dlhopisov, čím by sme prišli o vyššie výnosy, ktoré zvyknú mať dlhodobejšie dlhopisy.

Ďalším dôvodom na túto požiadavku je to, aby sme dokázali neskôr porovnať naše portfólio s benchmarkovým, pričom benchmark predstavuje portfólio, ktoré bude mať konštantnú duráciu zhodnú s cielenou duráciou modelovaného portfólia. Pokiaľ by sme teda hodnotu durácie necielili, ťažko by sa porovnávali ich výkonnosti.

Naviac sa snažíme ohraničiť podiel HTM dlhopisov v portfóliu, ktorý sa snažíme držať na hodnote 25%. Je totiž dôležité nemať príliš veľký podiel HTM dlhopisov v portfóliu kvôli tomu, aby sme sa príliš neodklonili od reálneho vývoja na trhoch.

Na druhej strane chceme pokračovať v doterajšej stratégii investovania. Preto objem investícií určený do HTM dlhopisov použijeme vždy na nákup najdlhšej pozície a ostatné HTM pozície neprikupujeme.

Okrem toho počty všetkých prikupovaných dlhopisov uvažujeme nezáporné, takže zatiaľ si dlhopisy držíme až do splatnosti a nepredávame ich.

Vstupy do modelu sú nasledovné:

- začiatočné zloženie jednotlivých typov pozícií
- výnosová krivka
- uzamknuté výnosy pre HTM pozície
- očakávané príjmy (poplatky od sporiteľov) a výdavky fondu (redemované podiely)
- časový horizont, počas ktorého optimalizujeme odklon durácie portfólia od benchmarkovej.

Výstupom modelu sú:

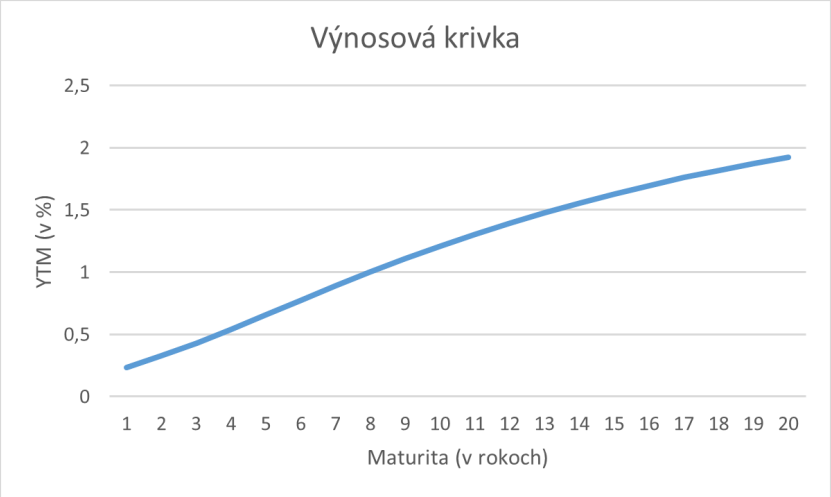
- objemy konkrétnych pozícií v jednotlivých rokoch

- počty prikúpených dlhopisov v jednotlivých rokoch
- uzamknuté výnosy HTM pozícií.

2.2 Aplikácia modelu na dáta

V tejto časti aplikujeme opísaný model na dáta a interpretujeme jeho výstupy. Najprv predpokladáme, že kupujeme iba bezkupónové dlhopisy. Navyše tieto dlhopisy držíme až do konca splatnosti, a to aj v prípade MTM dlhopisov. Uvažujeme pritom splatnosti 1-10 rokov pre MTM dlhopisy a 1-20 rokov pre HTM dlhopisy, ktoré držíme v portfóliu a zároveň ich môžeme dokupovať aj predávať.

Prvým cieľom bolo nakalibrovať začiatočné zloženie tak, aby spĺňalo dopredu dané objemy. Táto informácia je totiž jedným zo vstupných údajov modelu. Na základe tohto zloženia a začiatočnej hodnoty portfólia sme potom odhadli aj cashflow in a cashflow out plynúce každoročne do/z portfólia ako pomernú časť z tejto hodnoty. Ďalej sme si



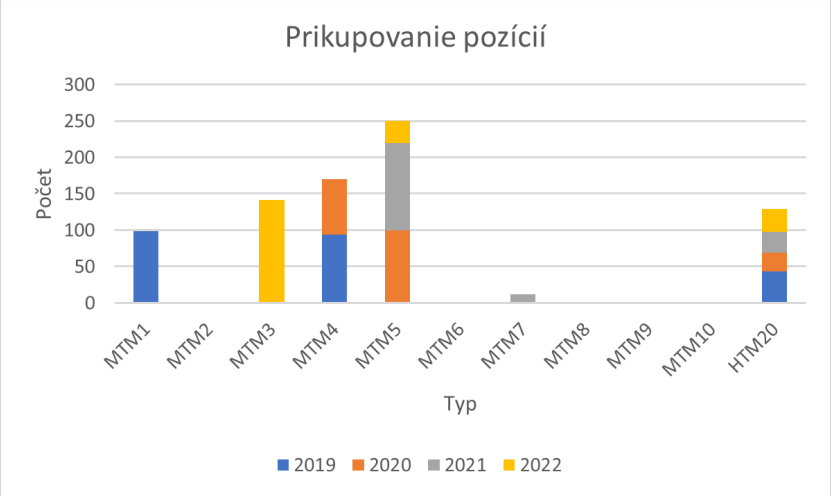
Obr. 1: Použitá výnosová krivka. Zdroj dát: vlastná tvorba.

museli vybrať výnosovú krivku, ktorú použijeme na optimalizáciu. Rozhodli sme sa ju odhadnúť na základe fitovania krivky aktuálnych výnosov štátnych dlhopisov[1] a posunúť ju o konštantnú hodnotu. Fond totiž investuje najmä do korporátnych dlhopisov,

[1]Postup fitovania krivky je počítaný pomocou Nelson-Siegelovho modelu, ktorý je aj s dynamickou

ktoré zvyknú mať vyššie výnosy ako štátne dlhopisy. Krivka, ktorú použijeme je na Obrázku 1.

Najprv sme uvažovali časový horizont 5 rokov. Portfólio si postupne prikupuje z vymaturovaných dlhopisov a peňazí z nových podielov nové dlhopisy, ktoré drží až do splatnosti. Jedinými výdavkami fondu je zatiaľ kúpa nových dlhopisov a redemácia podielov vo fonde. Výsledky boli nasledovné:



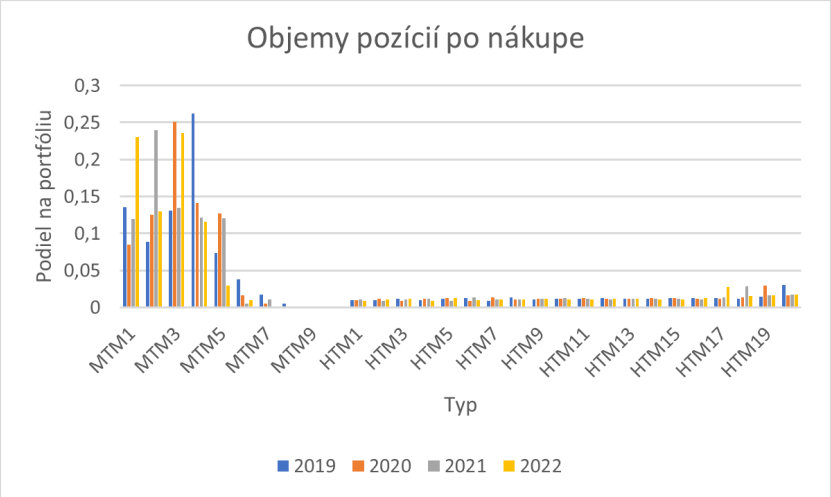
Obr. 2: Prikupovanie pozícií v jednotlivých rokoch ako výstup modelu (1). Zdroj dát: vlastná tvorba.

Ako môžeme vidieť na Obrázku 2, portfólio každoročne investuje do najdlhšej HTM splatnosti podľa aplikovanej stratégie. Pri MTM dlhopisoch potom investuje najmä do strednodobých splatností. To je zmysluplné, keďže sa snažíme udržať duráciu na úrovni 3 a jednotlivé pozície sa nepredávajú. Dochádza tu k postupnému nahromadzovaniu počtu dlhopisov s blízkou dobou splatnosti, ktoré prispievajú k nižšej durácii.

Hromadenie MTM dlhopisov spôsobené modelom (1) bez možnosti predaja týchto dlhopisov možno vidieť aj na Obrázku 3.

Na Obrázku 3 je možné vidieť, že odchýlky medzi objemom HTM pozícií po nákupe dlhopisov sú minimálne a pohybujú sa okolo rovnomernej hodnoty 1,25% hodnoty

modifikáciou bližšie popísaný v ďalšej kapitole.



Obr. 3: Podiely pozícií na objeme portfólia po nákupe dlhopisov v jednotlivých rokoch ako výstup modelu (1). Zdroj dát: vlastná tvorba.

portfólia.

2.2.1 Pridanie možnosti predaja dlhopisov

Pre fond je pomerne nevýhodné, keď nemôže predávať dlhopisy. Môže na tom totiž zarobiť a v reálnom svete je veľmi zriedkavé, aby sa dlhopisy držali v portfóliu až do splatnosti. Preto je prirodzené pridať do modelu možnosť predávať MTM dlhopisy.

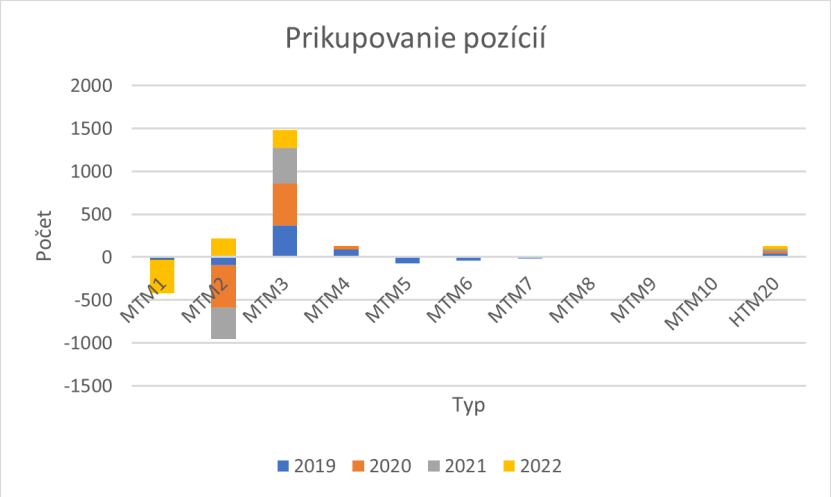
Predaj dlhopisov je do modelu zakomponovaný nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \sum_{s=t}^{T} weight_s \left(\sum\nolimits_{i\in U} Z^M_{s+1,i} x^M_i + \sum\nolimits_{i\in U} Z^H_{s+1,i} x^H_i\right) \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{i\in U} F_{t,i} x_i - \sum_{i\in U} F^M_{t,i} y^M_i = L_t + \sum_{i\in U} P_{t,i} x_i - \sum_{i\in U} P^M_{t,i} y^M_i \\
& \frac{\sum_{i\in U} D_{t,i} Z^M_{t,i} x^M_i - \sum_{i\in U} D_{t,i} Z^M_{t,i} y^M_i}{\sum_{i\in U} Z_{t,i} x_i - \sum_{i\in U} Z^M_{t,i} y^M_i} \geq 3 - tolerancia \\
& \frac{\sum_{i\in U} D_{t,i} Z^M_{t,i} x^M_i - \sum_{i\in U} D_{t,i} Z^M_{t,i} y^M_i}{\sum_{i\in U} Z_{t,i} x_i - \sum_{i\in U} Z^M_{t,i} y^M_i} \leq 3 + tolerancia \\
& x^M_i - y^M_i \geq 0 \\
& x^M_i, x^H_i, y^M_i \geq 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

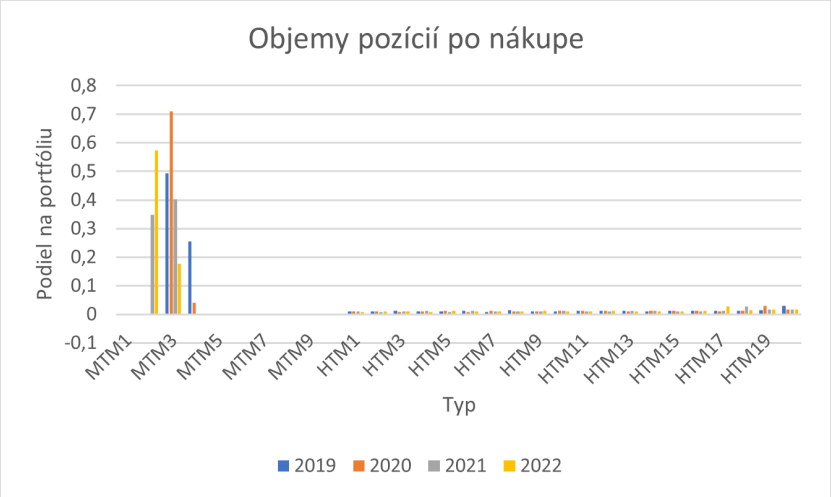
pričom $x_i = [x^M_i, x^H_i]$.

Do modelu (2) bola pridaná nová premenná y^M_i, ktorá predstavuje počty predaných

MTM dlhopisov. Zároveň od nej požadujeme, aby počet predaných MTM dlhopisov typu i nikdy nepresiahol počet dlhopisov tohto typu, ktoré držíme v portfóliu. Môžeme teda predať len tie dlhopisy, ktoré naozaj máme a nepovoľujeme krátke pozície.



Obr. 4: Prikupovanie pozícií v jednotlivých rokoch ako výstup modelu (2). Zdroj dát: vlastná tvorba.



Obr. 5: Podiely pozícií na objeme portfólia po nákupe dlhopisov v jednotlivých rokoch ako výstup modelu (2). Zdroj dát: vlastná tvorba.

Na obrázku 4 vidíme, že možnosť predaja dlhopisov model využíva najmä pri krátkych splatnostiach. Naopak najviac model investuje do strednodobých splatností. Predajom dlhopisov navyše portfólio získava viac prostriedkov na investovanie, takže počty pri-

kupovaných dlhopisov v porovnaní s predchádzajúcim modelom vzrástli.

Objem jednotlivých pozícií je zobrazený na Obrázku 5. Je rozložený medzi strednodobými pozíciami so splatnosťou 2-4 roky. HTM objem v dlhých pozíciách kvôli zvolenému spôsobu investovania zase narastá.

Vplyv predaja dlhopisov na konečnú hodnotu portfólia nebol veľký, ale portfólio vďaka tomu rástlo o čosi viac ako v predchádzajúcom modeli. Čisté hodnoty portfólia v jednotlivých rokoch pre oba modely (1) a (2) môžeme vidieť v Tabuľke 1.

Rok	$\text{Portfólio}_{model1}$	$\text{Portfólio}_{model2}$
2018	94672,11	94672,11
2019	99898,98	99899,03
2020	104789,5	104789,6
2021	110386,8	110387
2022	115790,6	115790,9

Tabuľka 1: Vývoj a porovnanie hodnôt portfólia na konci každého roka pre model (1) a (2) v období 2018-2022.

2.2.2 Pridanie parametrov výkonnosti

V tejto časti si predstavíme dôležité výkonnostné parametre, na základe ktorých vieme porovnávať výkon portfólia, konkrétne:

- dôchodková jednotka
- absolútna výkonnosť
- výnos do splatnosti portfólia

Jedným z najdôležitejších pojmov z hľadiska výkonnosti dlhopisového fondu je *dôchodková jednotka*. Tá predstavuje hodnotu 1 podielu. K nej prináleží príslušný počet

podielov, ktorý sa navyšuje/znižuje s prísunom sumy plynúcej z nových/redemovaných podielov vo fonde. Počíta sa z čistej hodnoty majetku, ktorá v našom modeli vyjadruje hodnotu portfólia na konci jednotlivých rokov (odplaty v našom modeli nezahrňujeme).

Ďalším dôležitým ukazovateľom je *výkonnosť fondu*. Tá sa dá vyjadriť práve na základe hodnoty dôchodkovej jednotky. Môžeme ju počítať každoročne alebo na dlhšie zvolené obdobie a predstavuje zhodnotenie dôchodkovej jednotky počas tohto obdobia. Nás bude zaujímať práve ročné zhodnotenie a celková výkonnosť za celé obdobie optimalizácie. Všeobecne sa počíta na základe vzorca:

$$\text{Absolútna výkonnosť fondu} = \prod_{i=0}^{n} \frac{NAV_{i+1}}{NAV_i - D_i} - 1, \tag{10}$$

kde NAV_i predstavuje čistú hodnotu majetku na 1 podiel fondu, teda vlastne hodnotu dôchodkovej jednotky v čase i a D_i predstavuje vyplatené dividendy, ktoré však uvažujeme nulové. Hodnota n zase hovorí o tom, za aké dlhé obdobie chceme vypočítať absolútnu výkonnosť fondu. Na Obrázku 6 môžeme vidieť, že hodnota dôchodkovej jed-



Obr. 6: Vývoj hodnoty dôchodkovej jednotky v období 2018-2023 a príslušné ročné výkonnosti vypočítané podľa vzorca (10).

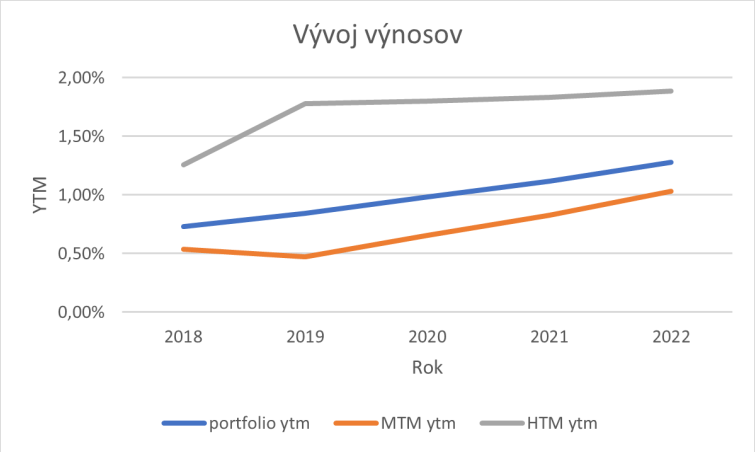
notky počas 5 rokov neustále stúpala, ale výkonnosť portfólia vypočítaná na základe nej sa menila. Najviac podľa grafu hodnota dôchodkovej jednotky vzrástla v roku 2023 a najmenej v roku v 2020, odchýlky medzi výkonnosťami sú však minimálne. V prípade poklesu dôchodkovej jednotky by bola príslušná výkonnosť záporná.

Celková výkonnosť fondu za sledované obdobie 5 rokov pritom dosiahla hodnotu približne 4,61%.

Posledný spomínaný parameter predstavuje *výnos portfólia*, ktorý vieme vyjadriť na základe výnosov do splatnosti jednotlivých dlhopisov v portfóliu. Dá sa vypočítať ako:

$$ytm_p = \frac{\sum_{i \in U} ytm_i^M \, x_i^M + \sum_{i \in U} ytm_i^H \, x_i^H}{\sum_{i \in U} x_i^M + \sum_{i \in U} x_i^H}. \tag{11}$$

Rovnako by sme vedeli vyjadriť výnosy pre MTM a HTM časť portfólia do splatnosti započítaním iba príslušných dlhopisov a ich výnosov.



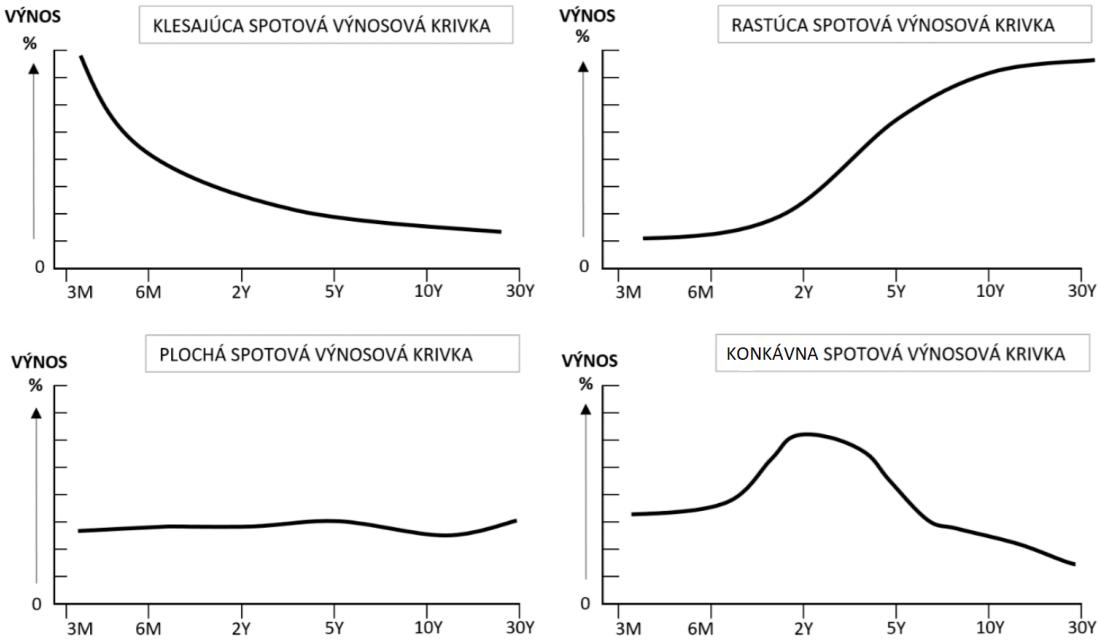
Obr. 7: Vývoj výnosov pre model (2). Zdroj dát: vlastná tvorba.

3 Modelovanie výnosovej krivky

3.1 Tvary a posuny výnosových kriviek

Výnosová krivka predstavuje grafickú reprezentáciu časovej štruktúry sadzieb vybraných cenných papierov (dlhopisov). Popisuje ako výnos dlhopisu závisí od doby zostávajúcej do maturity tohto dlhopisu. Zvyčajne sa konštruuje pre podobné skupiny dlhopisov - napríklad zvlášť pre štátne a podnikové alebo zvlášť pre bezkupónové dlhopisy a kupónové dlhopisy s rovnakým kupónom. Spoločnou charakteristikou by mali byť najmä typ emitenta a kreditná kvalita dlhopisov.

Klasickými tvarmi pre výnosovú krivku sú rastúci, klesajúci, plochý alebo konkávny. Krivky týchto tvarov môžeme vidieť na Obrázku 8.



Obr. 8: Možné tvary výnosovej krivky. Zdroj dát: [7].

Rastúca výnosová krivka je najtypickejšia, keďže za vyššiu dobu splatnosti požadujeme zvyčajne vyšší výnos. V prípade, že sa očakáva nárast sadzieb, tak sa zostrmí.

Klesajúca výnosová krivka je pomerne neštandardný jav. Môže signalizovať očakávanie poklesu úrokových sadzieb, ako aj malú dôveru investorov v ekonomiku. Vyskytuje sa pred ekonomickou recesiou.

Plochá výnosová krivka sa vyskytuje, keď sú výnosy krátkodobých a dlhodobých

dlhopisov takmer rovnaké. Väčšinou znamená smerovanie k recesii alebo očakávanie poklesu úrokových sadzieb. Predstavuje prechod na rastúcu alebo inverznú krivku. Signalizuje neistotu v ekonomike.

Konkávna výnosová krivka predstavuje situáciu, kedy krátkodobé a dlhodobé výnosy sú nižšie v porovnaní so strednodobými výnosmi. Môže byť výsledkom toho, že banky preferujú investície do dlhopisov s krátkou dobou splatnosti, zatiaľ čo fondy investujú najmä do dlhopisov s vyššou splatnosťou, čo prispieva k nízkym krátkodobým a dlhodobým výnosom.

V predchádzajúcej časti sme predpokladali, že výnosová krivka sa v čase nemení. Tento predpoklad je však nerealistický. Výnosová krivka sa mení a podľa toho ako sa správa v čase rozlišujeme **paralelné posuny**, kedy sa celá krivka pozdĺž všetkých splatností pohne o rovnaký úsek nahor alebo nadol alebo **neparalelné posuny**, pri ktorých sa môže meniť aj tvar alebo strmosť výnosovej krivky. Paralelné posuny sa v realite takmer nevyskytujú.

3.2 Vašíčkov model

Vašíčkov model patrí medzi short-rate modely, v ktorých sa krátkodobá úroková miera (short-rate) modeluje pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice:

$$dr = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dw,$$

kde $\mu(r,t)$ predstavuje drift a $\sigma(r,t)$ predstavuje volatilitu.

Vašíčkov model má nasledovný tvar:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t).$$

Patrí aj medzi mean-reversion procesy, teda sa približuje k dlhodobo rovnovážnej hodnote. O tom hovorí parameter θ symbolizujúci dlhodobý priemer a κ predstavujúci rýchlosť približovania sa k tomuto dlhodobému priemeru. Volatilita daného procesu je konštantná a vyjadruje ju parameter σ. Všetky tieto parametre majú byť navyše kladné.

Ďalšou vlastnosťou Vašíčkovho modelu je jeho nenulová pravdepodobnosť nadobúdania záporných úrokových mier. V súčasnosti sú totiž krátkodobé úrokové miery naozaj záporné a táto vlastnosť je aj hlavným dôvodom, prečo sme si vybrali na modelovanie úrokových mier práve Vašíčkov model.

Stredná hodnota krátkodobej úrokovej miery vo Vašíčkovom modeli má nasledovný tvar:

$$E[r(t)] = r_o e^{-\kappa t} + (1 - e^{-\kappa t})\theta. \tag{12}$$

Disperzia tejto úrokovej miery sa dá zapísať ako:

$$D[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t}). \tag{13}$$

Limitne sa stredná hodnota a disperzia približujú k týmto hodnotám:

$$\lim_{t\to\infty} E[r(t)] = \theta \qquad \text{a} \qquad \lim_{t\to\infty} Var[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2\kappa}.$$

Navyše rozdelenie Vašíčkovho modelu je normálne s vyjadrenou strednou hodnotou a disperziou. Na základe (12) a (13) vieme Vašíčkov model diskretizovať do tvaru:

$$r_{t+1} = r_t e^{-\kappa\delta} + \theta(1 - e^{-\kappa\delta}) + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa\delta}}{2\kappa}}N(0, 1). \tag{14}$$

V prípade, že poznáme historické hodnoty úrokovej miery, vieme odhadnúť parametre Vašíčkovho modelu metódou najmenších štvorcov alebo metódou maximálnej vierohodnosti.

Metóda najmenších štvorcov je založená na predpoklade, že úroková miera predstavuje AR(1) proces, teda:

$$r_{t+1} = ar_t + b + \epsilon. \tag{15}$$

Spojením (14) a (15) dostávame:

$$a = e^{-\kappa\delta},$$
$$b = \theta(1 - e^{-\kappa\delta}),$$
$$sd(\epsilon) = \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa\delta}}{2\kappa}}.$$

Danú metódu vieme využiť na získanie týchto koeficientov a z nich vyjadriť Vašíčkove

parametre:

$$\kappa = \frac{-lna}{\delta}, \tag{16}$$

$$\theta = \frac{b}{1-a}, \tag{17}$$

$$\sigma = sd(\epsilon)\sqrt{\frac{-2lna}{\delta(1-a^2)}}. \tag{18}$$

Metóda maximálnej vierohodnosti využíva vlastnosti Vašíčkovho modelu (12), (13) a jeho normalitu. Na základe nich má potom úroková miera nasledovné podmienené rozdelenie:

$$f(r_{t+1}|r_t;\kappa,\theta,\hat{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} exp\Big[-\frac{(r_t - r_{t-1}e^{-\kappa\delta} - \theta(1-e^{-\kappa\delta}))^2}{2\hat{\sigma}^2}\Big],$$

kde $\hat{\sigma}^2 = \sigma^2\frac{1-e^{-2\kappa\delta}}{2\kappa}$. Z toho potom dostávame log-likelihood funkciu:

$$\mathcal{L}(\kappa,\theta,\sigma) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} lnf(r_i|r_{i-1};\kappa,\theta,\sigma). \tag{19}$$

Maximalizáciou (19) pomocou metódy maximálnej vierohodnosti získame odhad pre Vašíčkove parametre:

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n}[r_i - r_{i-1}e^{-\kappa\delta}]}{n(1-e^{-\kappa\delta})}, \tag{20}$$

$$\kappa = -\frac{1}{\delta} ln \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i-\theta)(r_{i-1}-\theta)}{\sum_{i=1}^{n}(r_{i-1}-\theta)^2}, \tag{21}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n}[r_i - \theta - e^{-\kappa\delta}(r_{i-1}-\theta)]^2. \tag{22}$$

Okrem Vašíčkovho short-rate modelu poznáme aj Vašíčkov model pre cenu dlhopisu, podľa ktorého cena dlhopisu B spĺňa nasledovnú parciálnu diferenciálnu rovnicu:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + (\kappa(\theta - r(t)) - \lambda\sigma)\frac{\partial B}{\partial r} - rB = 0, \tag{23}$$

kde κ, θ a σ sú parametre z Vašíčkovho short-rate modelu, r je krátkodobá úroková miera a λ je trhová cena rizika[2]. Okrem toho koncová podmienka pre cenu dlhopisu je $B(T,T) = 1$.

[2]My budeme ďalej uvažovať hodnotu λ rovnú nule.

Riešenie rovnice (23) má tvar $B(t,T) = e^{c(t,T)+d(t,T)}$, kde:

$$c(t,T) = \frac{1}{\kappa}(e^{-(T-t)\kappa} - 1), \tag{24}$$

$$d(t,T) = \frac{\sigma^2}{4\kappa^3}(1 - e^{-2(T-t)\kappa}) + \frac{1}{\kappa}(\theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{\kappa^2})(1 - e^{-(T-t)\kappa}). \tag{25}$$

Zároveň vzťah medzi výnosom R a cenou dlhopisu B vieme zapísať ako (vzťah (6) pre bezkupónové dlhopisy):

$$B(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}. \tag{26}$$

Na základe (24), (25) a (26) má výnos pre jednotlivé maturity T tvar:

$$\begin{aligned} R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\{&\frac{1}{\kappa}(e^{-(T-t)\kappa} - 1)r(t) + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3}(1 - e^{-2(T-t)\kappa}) \\ &+\frac{1}{\kappa}(\theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{\kappa^2})(1 - e^{-(T-t)\kappa}) - (\theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{\kappa^2})(T-t)\}. \end{aligned} \tag{27}$$

Limitu tohto výrazu potom môžeme vyjadriť ako:

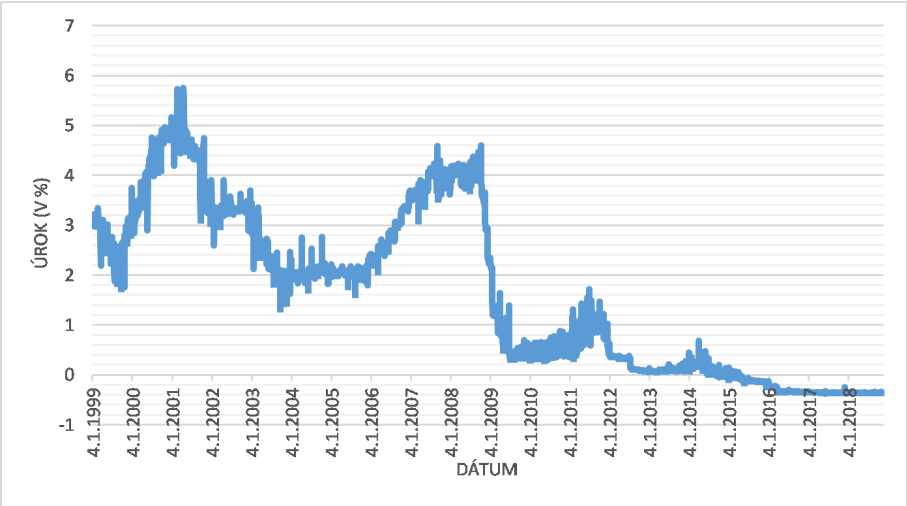
$$R_\infty = \lim_{T\to\infty} R(t,T) = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}.$$

Na základe toho, do ktorého intervalu padne modelovaná short-rate rozlišujeme tvary výnosovej krivky:

1. rastúca, ak $r_t \geq R_\infty + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}$
2. klesajúca, ak $r_t \leq R_\infty - \frac{\sigma^2}{4\kappa^2}$
3. vydutá (z angl. humped), ak $r_t \in (R_\infty - \frac{\sigma^2}{4\kappa^2}, R_\infty + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2})$.

Využitím predchádzajúcich metód na reálnych dátach vieme odhadnúť Vašíčkove parametre. Na to potrebujeme historický časový rad vývoja nejakej krátkodobej úrokovej miery. Dáta, na ktoré sme opísané postupy aplikovali boli denné údaje jednodňovej úrokovej sadzby Eonia (Euro OverNight Index Average)[3].

Najprv sme aplikovali postup na celý časový rad a neskôr sme ho aplikovali na kratšie časové úseky. Koeficienty, ktoré sme odhadli na základe (16)-(18),(20)-(22) a (27) sú



Obr. 9: Vývoj Eonie v období 1999-2018. Zdroj dát: http://sdw.ecb.europa.eu .

	1999-2018		2004-2018		2010-2018	
Koeficient	**LS**	**ML**	**LS**	**ML**	**LS**	**ML**
κ	0,4433	0,4612	0,3791	0,3883	4,5745	4,6003
θ	0,0126	0,0134	0,0066	0,0071	0,0008	0,0009
σ	0,016	0,0164	0,013	0,0135	0,0122	0,0129

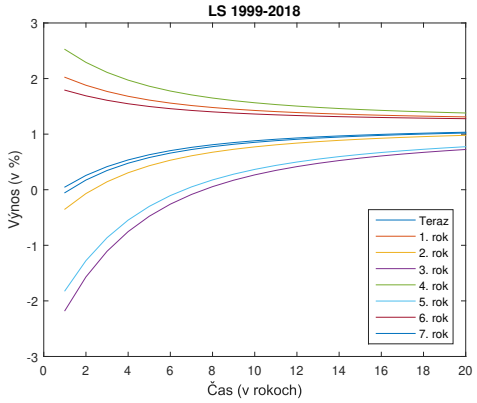
Tabuľka 2: Parametre Vašíčkovho modelu vypočítané na základe metódy najmenších štvorcov (LS) a metódy maximálnej vierohodnosti (ML) za rôzne obdobia.

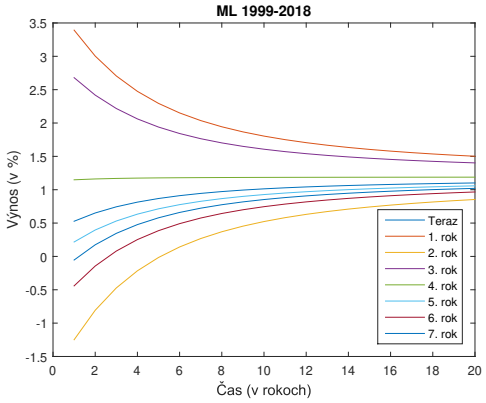
uvedené v Tabuľke 2. Vidíme, že hodnoty parametrov pre 2 rôzne metódy odhadu vyšli pomerne podobné v rámci rovnakých časových intervalov. Na druhej strane odhady parametrov medzi rôznymi obdobiami boli pomerne odlišné. Ako však môžeme vidieť na Obrázku 9, uvažované obdobia sú pomerne rôznorodé - jedno je celý časový rad, druhé predstavuje údaje od krízy po dnes a posledné predstavuje obdobie po kríze. Najmenej sa vychyľovala hodnota volatility, teda parameter σ. Odhadnutá volatilita pritom prirodzene klesala, keďže sme brali do úvahy čoraz menší časový úsek.

Na základe parametrov z Tabuľky 2 sme vygenerovali scenáre pohybu výnosovej krivky pre nasledujúcich 7 rokov. Ich vývoj môžeme vidieť na Obrázkoch 10-12:

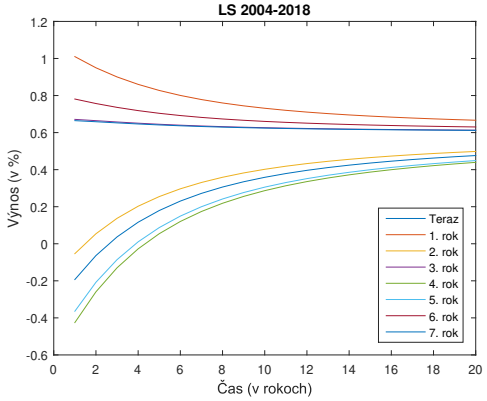
Ako môžeme vidieť, medzi jednotlivými obdobiami je najväčší rozdiel v rozpätí

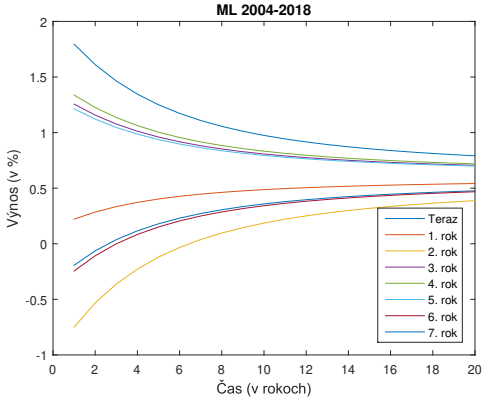
[3]Pri použití na úrokovú mieru Euribor sme dostali oboma metódami aspoň 1 záporný parameter aj pri rôznych zvolených časových obdobiach.



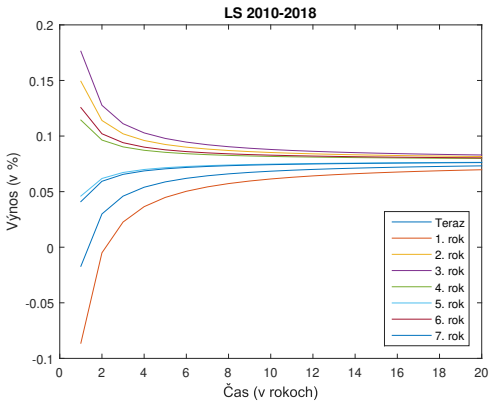


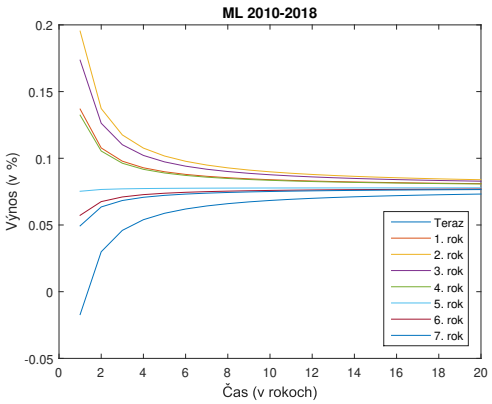
Obr. 10: Odhadnuté výnosové krivky na základe Vašíčkových parametrov z obdobia 1999-2018 na najbližších 7 rokov.





Obr. 11: Odhadnuté výnosové krivky na základe Vašíčkových parametrov z obdobia 2004-2018 na najbližších 7 rokov.





Obr. 12: Odhadnuté výnosové krivky na základe Vašíčkových parametrov z obdobia 2010-2018 na najbližších 7 rokov.

medzi jednotlivými krivkami. Kým model odhadnutý z obdobia 1999-2018 má rozpätie výnosových kriviek takmer 5%, model odhadnutý z obdobia 2004-2018 má rozpätie okolo 2-2,5% a model získaný na základe obdobia 2010-2018 sa pohybuje v rozpätí necelého 1%.

Okrem toho si môžeme všimnúť, že výnosové krivky sú poväčšinou rastúce alebo klesajúce. Častokrát pritom preskakujú, teda rastúca krivka sa zmení na klesajúcu a tá zas na rastúcu. Táto črta Vašíčkovho modelu nie je veľmi dobrá, keďže sme si spomínali že klesajúca alebo inverzná krivka je v ekonomike pomerne zriedkavá, zatiaľ čo v týchto predikciách je častým javom.

3.3 Dynamický Nelson-Siegelov model

Dynamický Nelson-Siegelov model nazývaný aj Diebold-Li model vychádza z Nelson-Siegelovho modelu. Oba tieto modely si neskôr popíšeme na základe [8]. Najprv však definujeme rôzne typy úrokových mier. Rozlišujeme:

- *spotové úrokové miery* - tie predstavujú okamžité úrokové miery, teda poplatky za používanie peňazí od súčasnosti po čas t. Definujú časovú štruktúru úrokových mier.

- *forwardové úrokové miery* - predstavujú úrokové miery medzi dvoma budúcimi časovými obdobiami T_1 a T_2 za podmienok dohodnutých dnes. Podľa [4] vieme navyše forwardovú výnosovú krivku $f(t,T)$ zapísať ako:

$$f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} ln\, P(t,T), \tag{28}$$

  za predpokladu, že T_2 je čas blízky T_1.

Spojením vzťahov (6) a (28) dostávame:

$$y(t,T) = T \int_0^T f(t,u)\, du. \tag{29}$$

Nelson-Siegelov model je často používaný pre odhad výnosovej krivky na základe pozorovaných výnosov. Používa ho aj viacero centrálnych bánk (napr. NBS), najmä

jeho modifikáciu, tzv. Nelson-Siegelov-Svenssonov model. V pôvodnom Nelson-Siegelovom modeli je forwardová krivka daná diferenciálnou rovnicou:

$$\ddot{f} + \alpha_1 \dot{f} + \alpha_2 f = 0. \tag{30}$$

Riešením rovnice (30) je nasledovný tvar forwardovej krivky:

$$f(t,T) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} e^{-\lambda_t T} + \beta_{3,t} \lambda_t e^{-\lambda_t T}. \tag{31}$$

Podľa vzťahu (29) vieme potom prepísať forwardovú krivku (31) na výnosovú krivku v tvare:

$$y(t,T) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \frac{1 - e^{-\lambda_t T}}{\lambda_t T} + \beta_{3,t} (\frac{1 - e^{-\lambda_t T}}{\lambda_t T} - e^{-\lambda_t T}). \tag{32}$$

Koeficient $\beta_{1,t}$ tu predstavuje level výnosovej krivky a jeho zvýšenie zvýši ekvivalentne výnosy pozdĺž celej krivky. Koeficient $\beta_{2,t}$ predstavuje sklon výnosovej krivky, pričom jeho zvýšenie spôsobí väčší nárast krátkodobých výnosov v porovnaní s nárastom dlhodobých výnosov, a tým aj zmenu sklonu. A $\beta_{3,t}$ je zakrivenie výnosovej krivky a jej zvýšením sa zdvihnú najmä strednodobé výnosy, zatiaľ čo krátkodobé a dlhodobé výnosy až tak neovplyvní, takže sa tým zvýši zakrivenie krivky.

Naviac koeficienty β môžeme podľa považovať za latentné (skryté) dynamické faktory. Na základe funkcií, ktoré k nim prislúchajú sú $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ a $\beta_{3,t}$ dlhodobý, krátkodobý a strednodobý faktor pre model (32).

Okrem toho koeficient λ_t predstavuje eponenciálnu mieru úbytku. Nižšie hodnoty predstavujú pomalý úbytok a lepšie fitujú dlhodobé výnosy, zatiaľ čo vyššie hodnoty λ_t predstavujú rýchlejší úbytok a lepší fit pre krátkodobé výnosy.

Limitné vlastnosti tohto modelu sú:

$$\lim_{T \to \infty} y(t,T) = \beta_{1,t} \tag{33}$$

a

$$\lim_{T \to 0+} y(t,T) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t}. \tag{34}$$

Prvá vlastnosť hovorí o tom, že výnos sa asymptoticky blíži k levelovému faktoru modelu. Druhá vlastnosť vypovedá o tom, že aktuálne trhové miery by mali byť súčtom levelového a sklonového faktoru modelu.

Pomocou daného modelu ale iba fitujeme výnosovú krivku pre jednotlivé pozorovania úrokov rôznych maturít v čase t, no nevieme predikovať jej správanie v budúcnosti. Na to však našli odpoveď Diebold a Li prostredníctvom dynamického Nelson-Siegelovho modelu.

Dynamický Nelson-Siegelov model využíva práve Nelson-Siegelov pre odhadnutie koeficientov $\beta_{i,t}$, $i = 1, 2, 3$ pre každé t pomocou metódy najmenších štvorcov. Pritom koeficient λ_t predpokladajú Diebold a Li konšatntný[4] pre všetky pozorovania, teda $\lambda_t = \lambda$. Fixnou hodnotou daného parametra sa totiž hľadanie optimálnych parametrov modelu zmení z nelineárnej úlohy na lineárnu, takže na ich odhad môžeme použiť spomínanú LS metódu. Zároveň Diebold a Li predpokladajú, že koeficienty $\beta_{i,t}$ sa dajú modelovať pomocou AR(1) procesu, takže má platiť:

$$\beta_{i,t+1} = c_i + \gamma_i \beta_{i,t} + \epsilon_{i,t+1}. \tag{35}$$

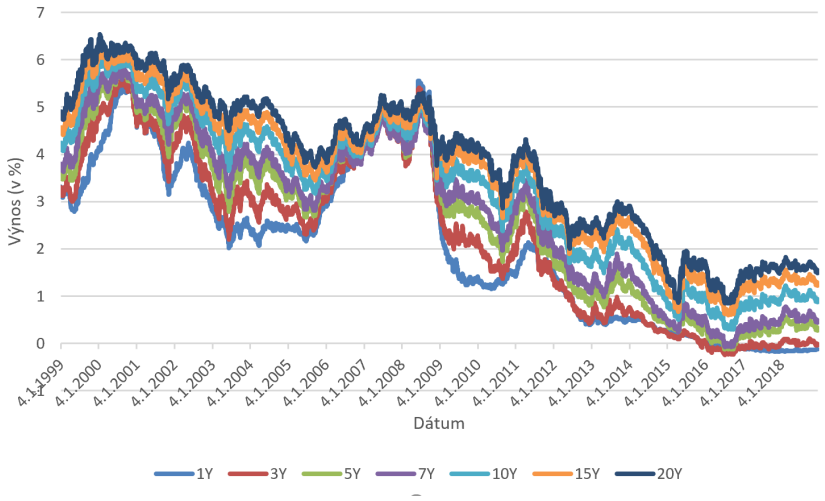
My budeme ďalej predpokladať, že tieto koeficienty sú navzájom nekorelované, keďže podľa je medzi nimi veľmi nízka miera interakcie a korelácie. Ich vývin teda bude popísaný iba týmito jednorozmernými modelmi a náhodnosť bude zabezpečovať odhad pre $\epsilon_{i,t} \sim N(0, \sigma_i^2)$.

Dáta, ktoré sme použili sú denné výnosy bezkupónových dlhopisov v období 1999-2018. Rozhodli sme sa však použiť iba časť z nich, a to výnosy z obdobia 2010-2018. To predstavuje obdobie po kríze a vybrali sme ho preto, aby sme nemali vychýlené výsledky. Uvažovali sme maturity 1, 3, 5, 7, 10, 15 a 20 rokov. Najprv sme pre tieto dáta odhadli pre každý deň výnosovú krivku a koeficienty β pomocou Nelson-Siegelovho modelu . Stanovili sme konštantnú hodnotu λ pre každý deň pri ročných intervaloch medzi výnosmi podľa, teda sme hľadali λ, ktoré spĺňa:

$$\arg\max_{\lambda} = \frac{1 - e^{-30\lambda/12}}{30\lambda/12} - e^{-30\lambda/12} = 0.7173\,. \tag{36}$$

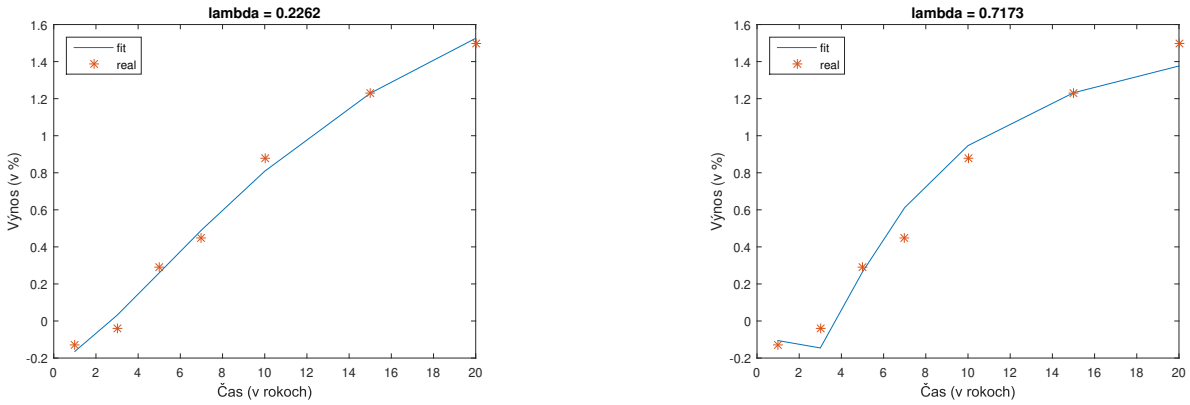
Pri použití tejto hodnoty však model nedostatočne fitoval výnosovú krivku, preto sme sa rozhodli pre použitie parametra λ uvedeného v [9]. Podľa autorov spomínaného

[4]Konkrétnu hodnotu tohto parametra určili maximalizáciou funkcie prislúchajúcej k strednodobému faktoru, teda ku koeficientu $\beta_{3,t}$ zvolením 30 mesiacov za strednodobú maturitu. Pre maturity vyjadrené v mesiacoch teda $\lambda = 0.0609$.



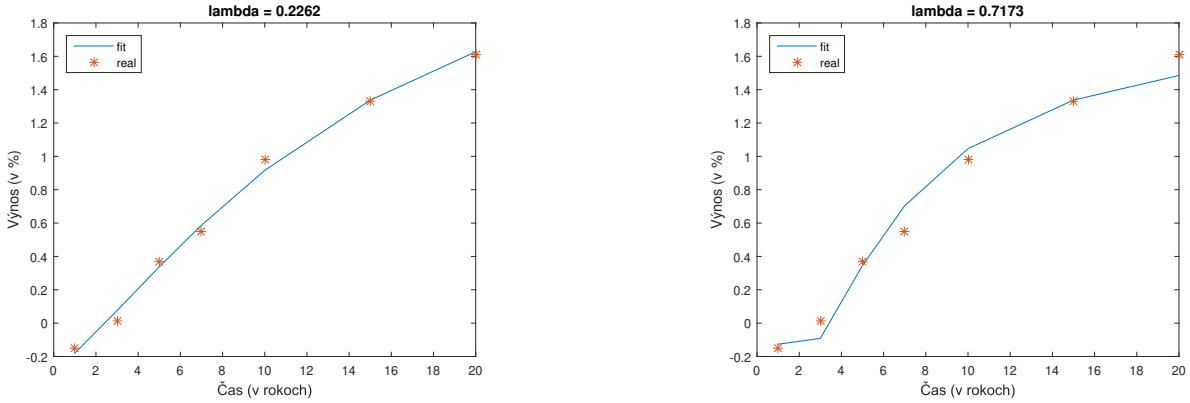
Obr. 13: Priebeh výnosov dlhopisov s uvažovanými splatnosťami v období 1999-2018. Zdroj: interné dáta DSS Allianz.

článku je pri určitých hodnotách odhadovaného parametra možnosť kolinearity funkcií prislúchajúcich k parametrom β (z angl. loadings). To by znamenalo, že náš model nie je veľmi dobrý a prirodzene sa tomuto problému chceme vyhnúť. Použitím hodnoty $\lambda = 0.2262$ dosiahneme minimálnu hodnotu korelačného koeficientu medzi funkciami prislúchajúcimi $\beta_{2,t}$ a $\beta_{3,t}$.



Obr. 14: Odhadnuté výnosové krivky na základe metódy najmenších štvorcov pre rôzne hodnoty parametra λ pre dátum 21.12.2018 .

V ďalších častiach sme teda využili koeficient $\lambda_t = 0.2262$. Potom sme použili metódu najmenších štvorcov na odhad parametrov v modeli pre jednotlivé β koeficienty, ktoré môžeme vidieť v Tabuľke 3. Tie by mali predstavovať nezávislé AR(1) procesy, čo nám potvrdzujú aj autokorelačné funkcie a parciálne autokorelačné fun-

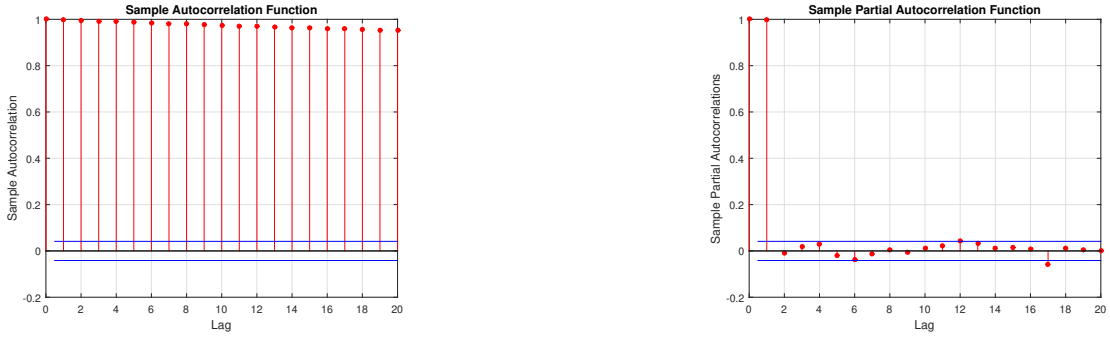


Obr. 15: Odhadnuté výnosové krivky na základe metódy najmenších štvorcov pre rôzne hodnoty parametra λ pre dátum 20.7.2018 .

	c_i	γ_i	σ_i
$\beta_{1,t}$	0.0065	0.9979	0.0297
$\beta_{2,t}$	-0.0169	0.9944	0.0311
$\beta_{3,t}$	-0.0160	0.9935	0.0882

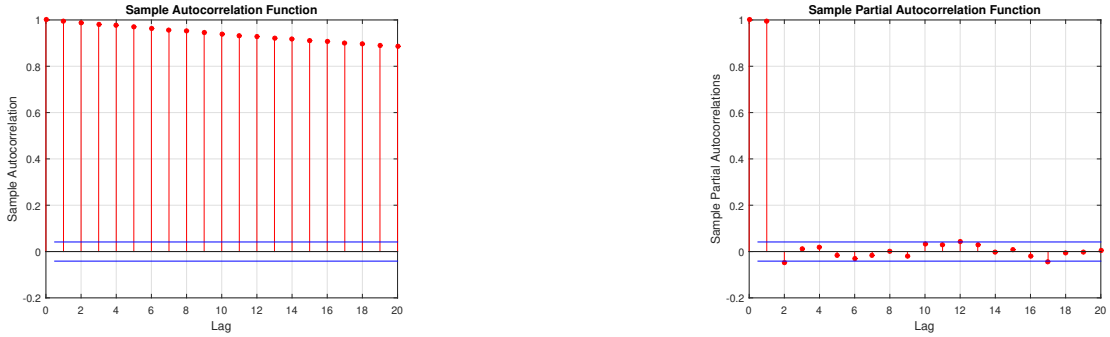
Tabuľka 3: Parametre AR(1) procesov pre koeficienty beta vypočítané na základe metódy najmenších štvorcov (LS) za obdobie 2010-2018.

kcie. Jedine pri $\beta_{3,t}$ by bol podľa ACF zrejme vhodnejší AR(2) proces.

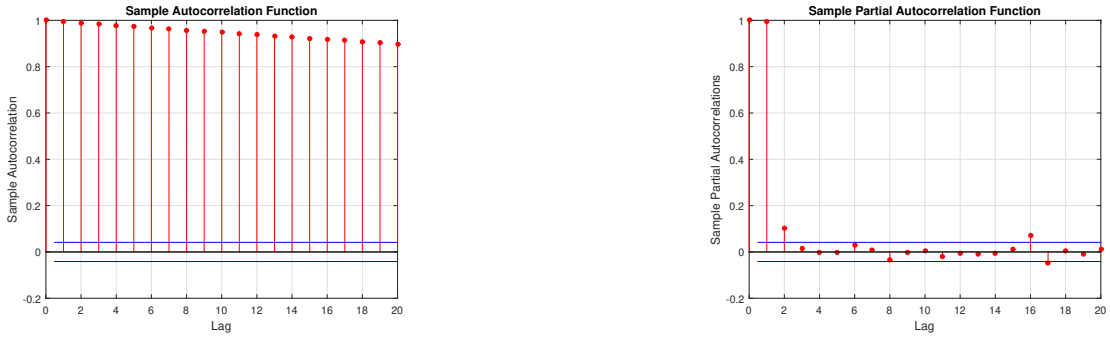


Obr. 16: Odhadnutá autokorelačná a parciálna autokorelačná funkcie pre koeficient $\beta_{1,t}$.

Pomocou vypočítaných beta koeficientov sme teda odhadli parametre jednotlivých AR(1) procesov a na základe toho, sme potom vedeli odhadnúť predikciu pre krivky v budúcich dňoch a rokoch. Aby sme navyše nemali príliš veľký rozptyl predikovaných



Obr. 17: Odhadnutá autokorelačná a parciálna autokorelačná funkcie pre koeficient $\beta_{2,t}$.

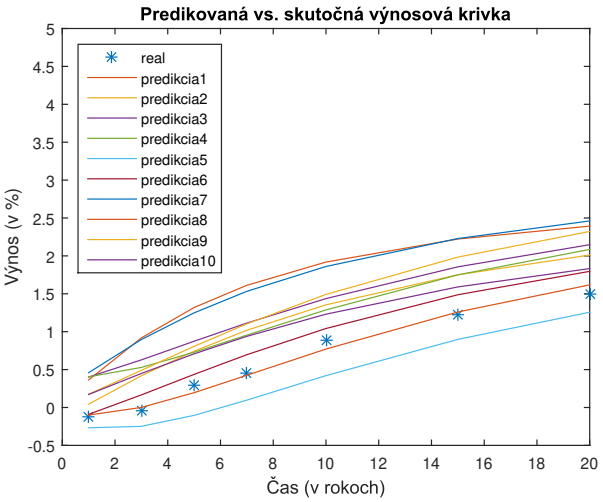


Obr. 18: Odhadnutá autokorelačná a parciálna autokorelačná funkcie pre koeficient $\beta_{3,t}$.

kriviek, odhadli sme disperziu rezíduí v modeli iba z obdobia posledných 2 rokov (500 dní).

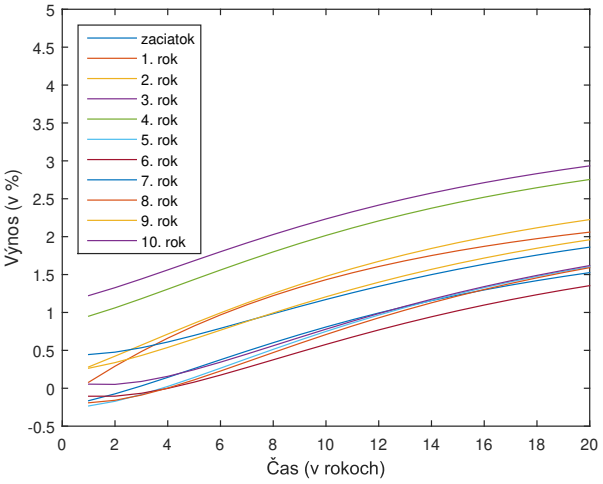
Najprv sme z dát vynechali posledných 250 pozorovaní a na základe popísaného postupu sme sa snažili vygenerovať scenáre pre posledné pozorovanie nášho datasetu. Takže sme robili predikciu výnosovej krivky o 250 dní. Okrem toho sme sa rozhodli zdola ohraničiť generované scenáre. Nechceli sme totiž, aby sa generovaná krivka dostala príliš hlboko do mínusu. Pomohol nám pti tom vzťah (34). Aktuálny spotový výnos pre jednotlivé dni sme stanovili vyšší ako -0.4%. Výsledky môžeme vidieť na Obrázku 19.

Môžeme vidieť, že niektoré z kriviek sa pomerne dobre dokázali priblížiť k reálnym výnosom. Veľkou výhodou je aj to, že predikcie si dokázali zachovať približne taký tvar a sklon ako by mala reálna výnosová krivka oproti Vašíčkovi, v ktorom tvar a sklon záviseli od toho, do ktorého intervalu sa trafí krátkodobá úroková miera.



Obr. 19: Porovnanie 10 vygenerovaných predikcií 250 dní napred a reálnej výnosovej krivky v danom čase.

Posledným krokom bolo generovanie scenárov na nasledujúce roky. Ohraničenie na aktuálny výnos v danom roku pritom zostalo rovnaké. Vygenerovali sme 100 možných scenárov obsahujúcich 30 vygenerovaných výnosových kriviek pre nasledujúcich 1-30 rokov so splatnosťami 1-20 rokov, ktoré budú v nasledujúcich častiach vstupom do modelu simulujúceho fungovanie portfólia. Možný scenár pre 1-10 nasledujúcich rokov môžeme vidieť na Obrázku 20.



Obr. 20: Vygenerovaný scenár výnosovej krivky pre 10 nasledujúcich rokov pomocou dynamického Nelson-Siegelovho modelu.

4 Dynamický model optimalizácie

V tejto časti zmeníme jednokrokový model (2) na viackrokový model. V každom kroku (1 rok) teda budeme dynamicky rebalancovať investovanie do nášho portfólia na základe aktuálnej výnosovej krivky a očakávaných forwardových kriviek pre ostatné roky. V prípade jednokrokového modelu sme sa totiž rozhodovali investovať len na základe očakávania úrokových mier pre celé nami zvolené obdobie. To môže byť pomerne nevýhodné pre naše portfólio v prípade výraznejších zmien reálnych úrokov. Náš dynamický model vyzerá nasledovne:

$$for\ t = 1 : T$$

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \sum_{s=t}^{T} weight_s(\textstyle\sum_{i\in U} Z_{s+1,i} x_i^{pomocné} - \sum_{i\in U} Z_{s+1,i}^M y_i^{M\,pomocné}) \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{i\in U} F_{t,i} x_i^{pomocné} - \sum_{i\in U} F_{t,i}^M y_i^{M\,pomocné} = L_t + \sum_{i\in U} P_{t,i} x_i^{pomocné} - \sum_{i\in U} P_{t,i}^M y_i^{M\,pomocné} \\
& \frac{\sum_{i\in U} D_{t,i} Z_{t,i}^M x_i^{M\,pomocné} - \sum_{i\in U} D_{t,i} Z_{t,i}^M y_i^{M\,pomocné}}{\sum_{i\in U} Z_{t,i} x_i^{pomocné} - \sum_{i\in U} Z_{t,i}^M y_i^{M\,pomocné}} \geq 3 - tolerancia \\
& \frac{\sum_{i\in U} D_{t,i} Z_{t,i}^M x_i^{M\,pomocné} - \sum_{i\in U} D_{t,i} Z_{t,i}^M y_i^{M\,pomocné}}{\sum_{i\in U} Z_{t,i} x_i^{pomocné} - \sum_{i\in U} Z_{t,i}^M y_i^{M\,pomocné}} \leq 3 + tolerancia \\
& x_i^{M\,pomocné} - y_i^{M\,pomocné} \geq 0 \\
& x_i^{pomocné}, y_i^{M\,pomocné} \geq 0
\end{aligned} \tag{3}$$

$$x_i^t = x_i^{t\,pomocné}$$

$$y_i^t = y_i^{t\,pomocné}$$

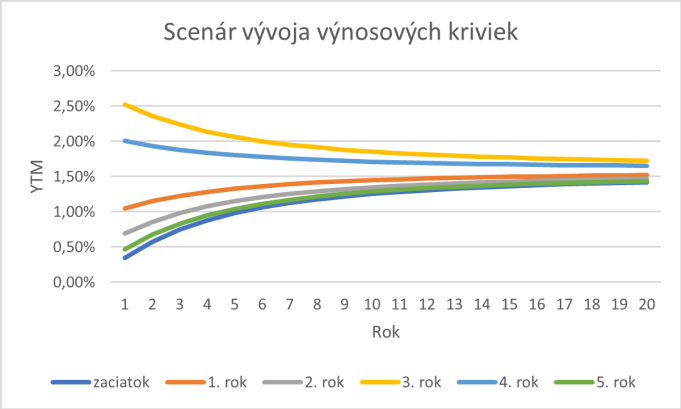
$$end$$

Taktiež pridáme nový ukazovateľ výkonnosti, ktorý budeme sledovať, tzv. benchmark.

Benchmark predstavuje čisto trhovo oceňované portfólio s cielenou duráciou. Počiatočná hodnota portfólia benchmarku je pritom rovnaká ako hodnota nášho portfólia na začiatku. Ďalšie hodnoty benchmarku potom môžeme vyjadriť nasledovne:

$$\text{Benchmark}_{t+1} = \text{Benchmark}_t \left[1 + R_{3,t} - 3\left(R_{3,t+1} - R_{3,t}\right)\right], \tag{37}$$

kde $R_{3,t}$ predstavuje výnos do splatnosti pre 3-ročné dlhopisy a 3 je cielená hodnota durácie.



Obr. 21: Scenár výnosových kriviek generovaný pomocou Vašíčkovho modelu.

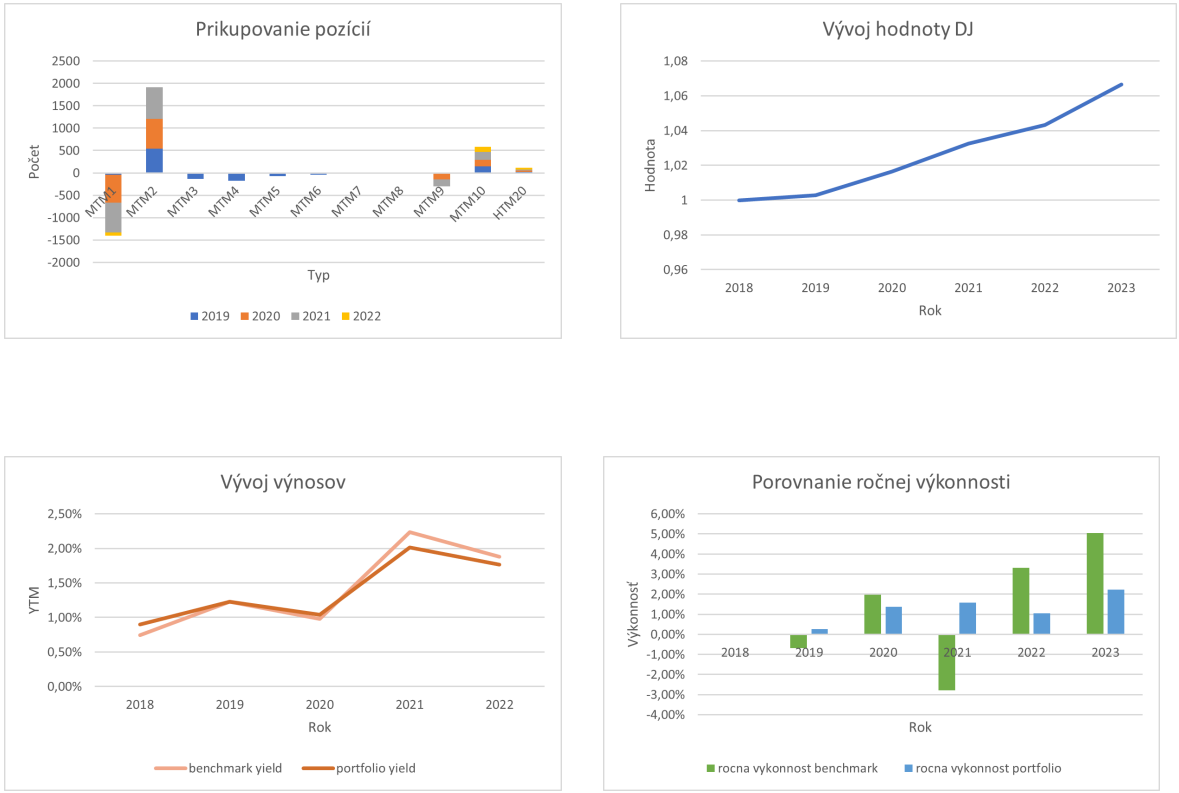
V nasledujúcich častiach budeme používať rovnaké rozloženie portfólia ako pri jednokrokovom modeli. Investujeme znovu do MTM dlhopisov so splatnosťou 1-10 rokov a do 20-ročného HTM dlhopisu, pričom predávať môžeme všetky MTM dlhopisy, ktoré máme v portfóliu. Opäť nepovoľujeme krátke pozície. V začiatočnom zložení sa nachádzajú MTM dlhopisy so splatnosťou 1-10 rokov a HTM so splatnosťou 1-20 rokov. Optimalizujeme na obdobie 5 rokov.

4.1 Použitie výnosovej krivky z Vašíčkovho modelu

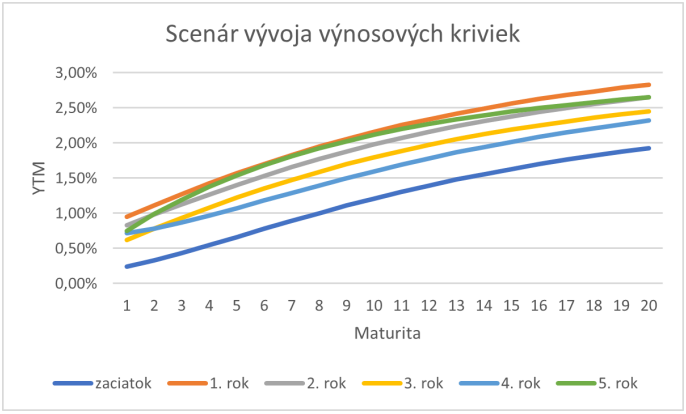
Najprv sme vybrali 1 zo scenárov pohybu výnosovej krivky, ktorý bol výsledkom dynamického Vašíčkovho modelu. Vybraný scenár možno vidieť na Obrázku 21. Následne sme tento scenár aplikovali do modelu (3). Výsledky sú zobrazené na Obrázku 22.

4.2 Použitie výnosovej krivky z dynamického Nelson-Siegelovho modelu

Tu sme použili scenár vygenerovaný prostredníctvom dynamického Nelson-Siegelovho modelu, ktorý je možné vidieť na Obrázku 23. Následnou aplikáciou daného scenára sme dostali výsledky na Obrázku 24.



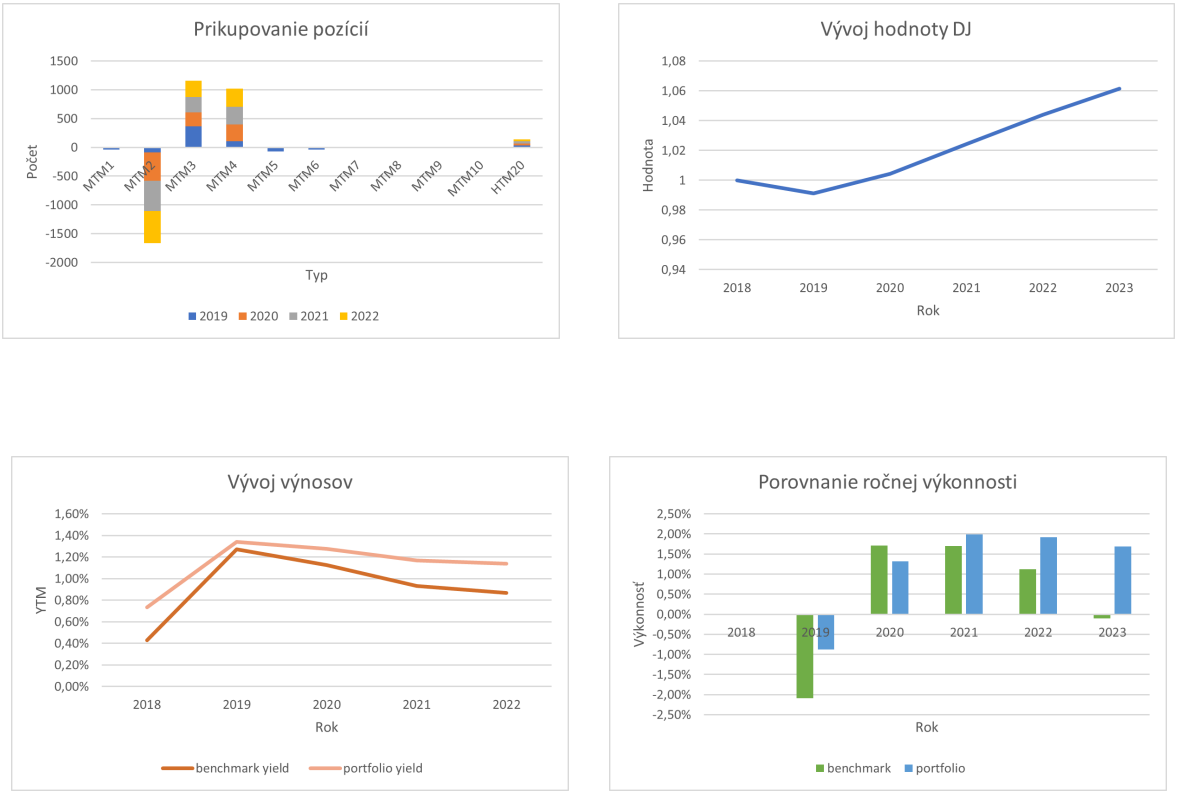
Obr. 22: Prikupovanie a parametre výkonnosti pre vybratý Vašíčkov scenár.



Obr. 23: Scenár výnosových kriviek generovaný pomocou dynamického Nelson-Siegelovho modelu.

4.3 Porovnanie výsledkov

Už pri vybratých scenároch použitých modelov vidíme značné rozdiely v tvare výnosových kriviek. Kým Nelson-Siegel má všetky krivky rastúce a ich tvar sa mení minimálne, krivky Vašíčkovho modelu sú okrem rastúcich inverzné aj ploché. To malo vplyv na



Obr. 24: Prikupovanie a parametre výkonnosti pre vybratý Nelson-Siegelov scenár.

následné investovanie, kde v prvom prípade optimalizácia preferovala investovanie do 3- a 4-ročných dlhopisov, zatiaľ čo v druhom prípade investovala do 2- a 10-ročných MTM dlhopisov.

Hodnota dôchodkovej jednotky v oboch prípadoch prevažne stúpala. Avšak jej zhodnotenie bolo pre scenáre odlišné. V Nelson-Siegelovom scenári mala výkonnosť podobné správanie ako pri benchmarku, ale výrazne ho prevýšila. To sa odrazilo aj na celkovej výkonnosti pre portfólio vo výške 6,15% a pre benchmark 2,31% za uvažované obdobie 5 rokov. Vo Vašíčkovom scenári portfólio zaostávalo za scenárom, ale jeho výkonnosť sa udržala v kladných číslach. Celková výkonnosť portfólia pre tento scenár bola 6,65% pre portfólio a 6,81% pre benchmark počas 5 rokov.

Zásluhu na lepšej výkonnosti portfólia mal zrejme aj výnos, ktorý bol pri Nelson-Siegelovi celý čas nad benchmarkovým. Pri Vašíčkovi zase výnos portfólia najprv jemne prevyšoval výnos benchmarku a ku koncu sa dostal výrazne pod tento výnos.

Na základe zahrnutých parametrov sa ukazuje, že v prípade Nelson-Siegelovho scenáru

vychádza lepšie naše portfólio a naopak v druhom scenári vychádza lepšie benchmark, teda trhovo oceňované portfólio.

5 Stresové scenáre pre portfólio dlhopisového fondu

Dlhopisový fond počas svojho fungovania čelí dvom základným rizikám:

- riziko defaultu
- riziko úrokových mier.

My sa budeme zaoberať druhým prípadom spojeným so zmenou úrokových mier. V prípade zvýšenia úrokových mier sa totiž hodnota portfólia precení nadol. Na druhej strane sa viac oplatí prikupovať nové dlhopisy, ktoré sú vtedy lacnejšie. Naopak pri poklese úrokových mier sa hodnota portfólia zvýši, ale zároveň sa zvýši aj kúpna cena dlhopisov. My sa ďalej budeme venovať práve riziku spojenému so zmenou úrokových sadzieb.

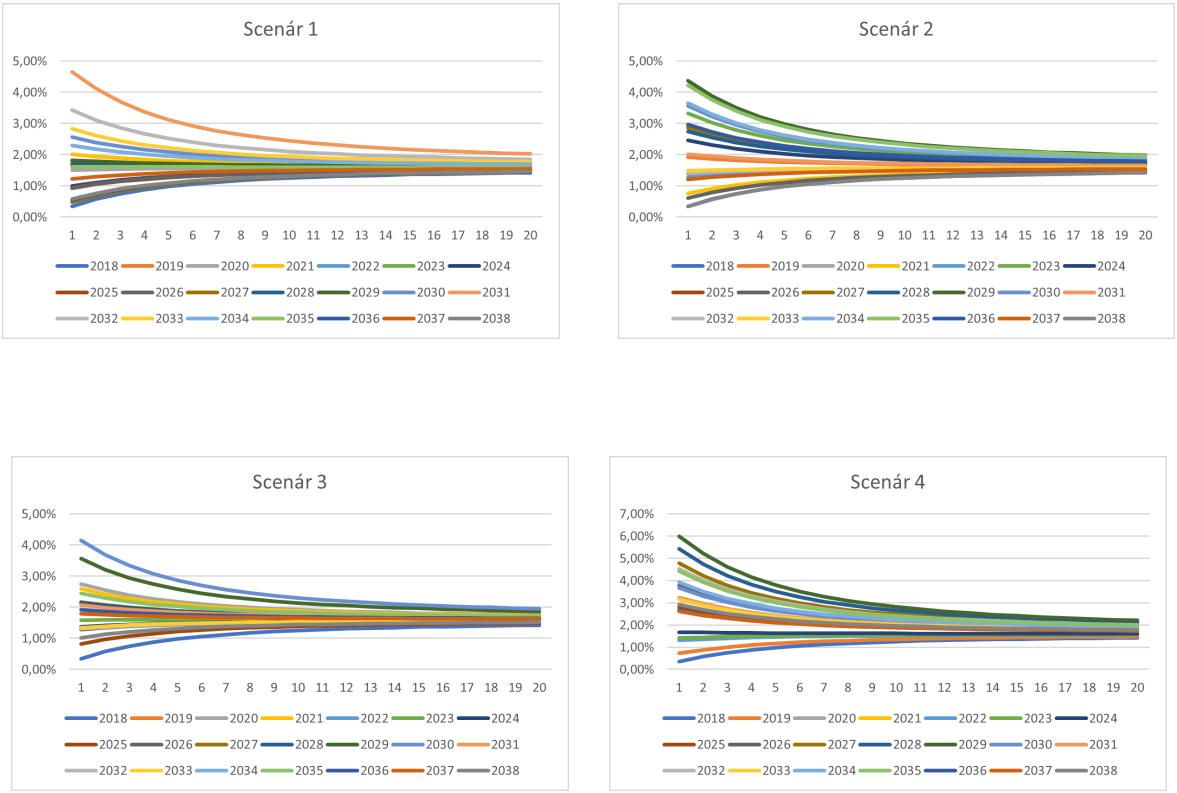
Pre naše portfólio je rizikový najmä rast úroku. Trhovú časť portfólia vtedy síce dokážeme rebalancovať, ale časť portfólia investovanú do HTM musíme držať so zamknutými úrokmi až do splatnosti. To môže byť v niektorých prípadoch nevýhodné v porovnaní s trhovo oceňovanými portfóliami, ktoré reprezentuje benchmark.

Preto sme najprv aplikovali model (3) s pôvodnou stratégiou a zistili, v ktorých prípadoch sa náš model najviac odchyľuje od výkonnosti benchmarku, respektíve kde má benchmark najvyššiu výkonnosť. Na stresové scenáre úrokových mier sme použili Vašíčkov model, ktorý sa ukázal ako vhodnejší.[5] Z vygenerovaných scenárov sme vybrali scenáre zobrazené na Obrázku 25.

5.1 Metódy pre zlepšenie výkonnosti portfólia

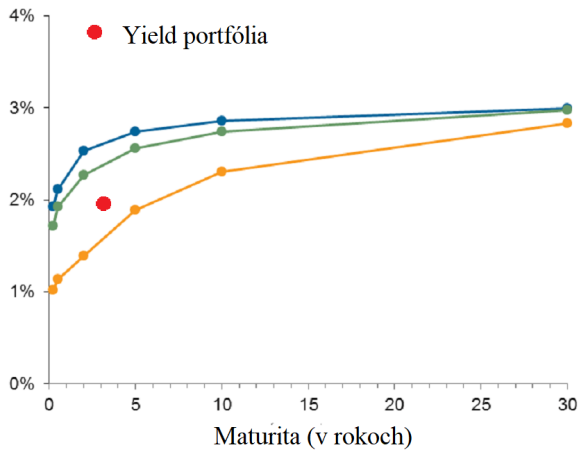
Ako sme už spomínali, pre naše portfólio môže byť kritický výrazný rast výnosovej krivky a pritom aj zmena jej tvaru, teda prechod z rastúcej krivky na plochú alebo

[5] V prípade Nelson-Siegela vo väčšine prípadov vyšlo naše portfólio lepšie ako benchmark. My však chceme získať scenáre, v ktorých portfólio zaostáva za benchmarkom.



Obr. 25: Vybraté stresové scenáre vygenerované Vašíčkovým modelom.

dokonca inverznú. Príklad možného rizikového scenára je uvedený na Obrázku 26.



Obr. 26: Rizikový scenár pre portfólio s výnosom, ktorý sa dostáva pod úroveň výnosovej krivky v prípade ak je aktuálna výnosová krivka modrá alebo zelená. Zdroj dát: vlastná tvorba.

Aby sme portfólio chránili pred podobnými zmenami výnosovej krivky, môžeme

aplikovať viacero stratégií:

1. prestať investovať do HTM portfólia pri očakávaní rastu úrokov v budúcnosti
2. investovať do HTM portfólia v menšom objeme pri očakávaní rastu úrokov v budúcnosti
3. investovať do HTM portfólia vo väčšom objeme pri aktuálnom náraste úrokov
4. dorovnávať výnos portfólia čo najbližšie k trhovému

V prvom prípade to znamená investovať len do trhovo oceňovaných dlhopisov. HTM portfólio má totiž uzamknuté výnosy a ak je výnosová krivka nad nimi, výnosy pozícií sa navyšujú pomaly, zatiaľ čo MTM pozície dosiahnu tento výnos okamžite. Preto má vtedy trhovo oceňované portfólio výraznú výhodu oproti nášmu portfóliu.

Druhý prípad hovorí o postupnom obmedzovaní objemu portfólia investovaného do HTM dlhopisov z dôvodov uvedených v prvom bode. Tento typ stratégie oproti predchádzajúcemu lepšie reaguje v prípade výrazného poklesu úrokových mier, kedy sa nám oplatí mať investovaný objem aj v HTM a nielen v MTM dlhopisoch.

Tretia stratégia sa snaží vyťažiť z vysokých výnosov. Preto investuje do dlhých HTM splatností väčší objem ako obyčajne.

V poslednom prípade sa snažíme dostatočne priblížiť výnos portfólia k trhovému výnosu.

Na základe uvedených vlastností sme vytvorili spôsoby ako investovať v prípade, že očakávaný výnos portfólia v doteraz používanom modeli 3 (ďalej označovaný M) bude nasledujúci rok nižší ako očakávaný výnos portfólia benchmarku (3-ročná úroková sadzba):

1. investovanie len do MTM dlhopisov
2. investovanie v rámci HTM len do najdlhšej splatnosti v objeme 0,5% portfólia.

Ďalšou stratégiou je investovanie v prípade, že aktuálny výnos portfólia vyjde v modeli M nižší ako výnos benchmarku:

3. investovanie v rámci HTM len do najdlhšej splatnosti v objeme 2,5% pokiaľ HTM časť nepresiahne 35% celkovej hodnoty portfólia

A poslednou stratégiou je:

4. pôvodný model M s pridaním ohraničenia na aktuálny výnos portfólia:

$$ytm_p \geq ytm_{benchmark} - tolerancia. \tag{38}$$

V spomínaných metódach pritom stále používame maximalizáciu priebežnej hodnoty v jednotlivých rokoch. Jediné, čo sa mení oproti pôvodnému modelu je v prípade nedostatočného výnosu portfólia spôsob investovania do HTM časti portfólia alebo výnos portfólia. Začiatočné zloženie portfólia aj možnosti investovania ostávajú rovnaké ako pri predošlých modeloch. Avšak budeme uvažovať časový horizont 20 rokov, počas ktorých budeme optimalizovať hodnotu nášho portfólia.

5.2 Porovnanie jednotlivých metód na stresových scenároch

Metódy, ktoré sme predstavili v predchádzajúcej časti tu využijeme na vybraté stresové scenáre výnosových kriviek. Porovnávali sme 5 základných parametrov, konkrétne: nárast dôchodkovej jednotky oproti východziemu modelu, percentuálny nárast majetku v porovnaní s doterajším modelom, výnosy do splatnosti jednotlivých metód a benchmarku a ročnú a celkovú výkonnosť portfólia. V prílohe na Obrázkoch 27-30 možno vidieť vykreslené parametre pre každý rok fungovania portfólia.

Celkové výkonnosti portfólia pri použití jednotlivých metód a benchmarku sú vyjadrené v Tabuľke 4. Môžeme vidieť, že zrejme najlepšia metóda na základe celkovej výkonnosti je metóda č. 1, kedy investujeme len do MTM dlhopisov. Bola totiž výrazne lepšia takmer v každom použitom scenári. V dvoch metódach dokonca porazila výkonnosť benchmarku.

Za ňou nasleduje metóda č. 4, v ktorej sa snažíme o priblíženie výnosu do splatnosti portfólia k trhovému výnosu. Tá dokázala benchmark prekonať v jednom scenári a v ostatných mierne zaostávala za najlepšou metódou.

	benchmark	M	M1	M2	M3	M4
Scenár 1	**38,27%**	37,65%	38,88%	37,66%	37,93%	38,10%
Scenár 2	**48,93%**	44,87%	46,50%	45,11%	44,16%	44,89%
Scenár 3	**42,26%**	41,07%	41,72%	41,06%	41,00%	42,26%
Scenár 4	**56,87%**	53,58%	59,29%	57,55%	51,06%	58,98%

Tabuľka 4: Celková výkonnosť portfólia s použitím vybraných metód v porovnaní s celkovou výkonnosťou benchmarku počas 20 rokov.

5.3 Zhrnutie výsledkov

V predchádzajúcich častiach sme predstavili možné stresové scenáre pre portfólio dlhopisového fondu, ktoré sa skladá z MTM aj HTM dlhopisov. Na tieto scenáre sme potom aplikovali v prípade nižšieho výnosu portfólia v porovnaní s trhovým portfóliom vybrané metódy. Ich účelom bolo zvýšiť výkonnosť a čo najviac sa priblížiť výkonnosti trhového portfólia. V prípade, že sa výnos dostal pod trhovú hodnotu, aplikovali sme prvé 3 stratégie. V opačnom prípade sa pokračovalo doterajším spôsobom investovania - doplnenie HTM do 25% prostredníctvom investície do najdlhšej splatnosti s účelom maximalizovania priebežnej hodnoty portfólia. Posledná stratégia bolo vylepšenie pôvodného modelu M o ohraničenie výnosu portfólia (38).

Aplikované metódy v prípade stresových scenárov v niektorých prípadoch naozaj zvýšili výkonnosť klasického modelu M a dokonca dokázali v celkovej výkonnosti predbehnúť aj benchmark.

V prvom scenári sa vývoj nárastu dôchodkovej jednotky pri jednotlivých metódach menil dosť výrazne. Kvôli tomu nevieme povedať, ktorá z metód je podľa toho najlepšia. Čo sa týka výnosov, všetky metódy približne kopírovali vývoj trhového výnosu. Najlepšie však pri náraste úroku reagovali metódy 1 a 2. Ročné výkonnosti jednotlivých metód sa vyvíjali veľmi podobne bez výraznejších rozdielov s výnimkou benchmarku. Podľa celkovej výkonnosti vyšla najlepšie metóda č. 2, pričom prekonala aj benchmark. V tomto scenári však prevládali najmä inverzné a ploché výnosové krivky, takže jeho výskyt hodnotíme ako veľmi málo pravdepodobný v porovnaní s ostatnými.

Druhý scenár na základe vývoja nárastu dôchodkovej jednotky od roku 2026 výrazne preferoval metódu č. 2 oproti ostatným. Do roku 2026 sa zdala byť najlepšia metóda č. 4, ktorá však neskôr mala veľmi premenlivý vývoj rastu. Rovnako aj celková výkonnosť vyšla pri metóde č. 2 najlepšie. Pri výraznejších rastoch úroku však lepšie reagovala metóda č. 4. Ročné výkonnosti jednotlivých metód mali medzi sebou minimálne rozdiely ako aj v ostatných scenároch. Na základe všetkých paramatreov výkonnosti tu hodnotíme najlepšie metódu č. 2. Tento scenár pritom pozostáva približne rovnomerne z rastúcich, plochých a inverzných kriviek.

V treťom scenári na základe vývoja rastu dôchodkovej jednotky od začiatku optimalizácie, celkovej výkonnosti aj výnosu portfólia hodnotíme najlepšie metódu č. 4. Najmä rast dôchodkovej jednotky bol pomerne výrazný v porovnaní s ostatnými metódami. Napriek tomu celkovou výkonnosťou nedokázala táto metóda prekonať výkonnosť benchmarku. Scenár je pritom tvorený najmä plochými krivkami a preto je hodnotený ako najpravdepodobnejší, keďže u ostatných scenárov je oveľa vyššia miera inverzných kriviek, ktoré sú v realite naozaj zriedkavé.

Posledný scenár na základe dôchodkovej jednotky vyhodnotil najlepšie metódy č. 1 a 4. Pri raste výnosu však lepšie reagovala metóda č. 2 a taktiež jej celková výkonnosť vyšla najvyššia. Obe spomínané metódy pritom prekonali celkovú výkonnosť benchmarku. Daný scenár pozostával prevažne z inverzných kriviek, preto ho taktiež hodnotíme ako pomerne málo pravdepodobný.

Celkovo metódy č. 2 a 3 hodnotíme ako nevýrazné a niekedy dokonca horšie ako pôvodný model. Naopak dobre vyšli už spomínané metódy 1 a 4. V prípade, že nechceme stratégiu investovania príliš meniť, odporúča sa stratégia č. 4. Vtedy do základného modelu M pridáme len 1 nové ohraničenie. Navyše vychádza výkonnostne najlepšie v podľa nás najpravdepodobnejšom z vybratých scenárov. Na druhej strane ak zoberieme do úvahy všetky scenáre, najlepšie vychádza metóda č. 2, pri ktorej sa naše portfólio v podstate postupne mení na trhové.

Neúspech metód 2 a 3 považujeme za prirodzený. Benchmark bol totiž 3-ročná úroková miera na krátkom konci výnosovej krivky. Pri častom výskyte inverzných kriviek sa na dlhom konci výnosovej krivky zmeny úroku v porovnaní s krátkym koncom

veľmi nediali. My sme však nepriamo predpokladali, že vysoký benchmarkový výnos znamená aj vysoké výnosy pre dlhé splatnosti a na základe toho sme do nich investovali viac alebo menej objemu oproti pôvodnému modelu. Tieto stratégie by však mohli byť užitočné v prípade rastúcich výnosových kriviek.

Záver

V našej práci sme sa venovali 2. pilieru - konkrétne dlhopisovému dôchodkovému fondu. Zaoberali sme sa jeho fungovaním a vplyvom zmien výnosovej krivky na jeho výkonnosť, pričom sme sa snažili dodržať vopred stanovenú stratégiu súčasného fondu.

V 1. kapitole sme čitateľovi priblížili systém dôchodkového sporenia na Slovensku. Popísali sme dôchodkové sporenie v II. pilieri s jeho vlastnosťami, výhodami, ale aj nevýhodami. Ďalej sme sa podrobnejšie venovali terminológii a charakteristike dlhopisového fondu na základe [3] a [4], ktoré sme využívali v ďalších častiach.

Na základe 1. kapitoly a [1] sme v 2. kapitole formulovali požiadavky, ktoré kladieme na model, ktorý simuluje fungovanie portfólia dlhopisového fondu. Podľa nich sme potom predstavili optimalizačné úlohy (1) a (2). V týchto jednokrokových modeloch sme optimalizovali priemernú hodnotu portfólia v jednotlivých rokoch za požadovaných podmienok, napr. stanovená hodnota durácie, ohraničenie HTM dlhopisov,... Uvažovali sme pritom bezkupónové dlhopisy a aktuálnu výnosovú krivku s forwardovými výnosovými krivkami v budúcnosti. Výstupom modelov bolo rozloženie investícií a pozícií v portfóliu uvedené na Obrázkoch 2, 3 pre prvý model a 4, 5 pre druhý model rozšírený o možnosť predávania dlhopisov v portfóliu.

V 3. kapitole sme sa venovali tomu, aby sme model priblížili realite prostredníctvom výnosovej krivky, ktorá sa mení v čase. Aplikovali sme Vašíčkov short-rate model a dynamický Nelson-Siegelov model na fitovanie aktuálnej výnosovej krivky a predikovanie scenárov budúcich výnosových kriviek, ktoré budú vstupom do nášho modelu. Na základe vymodelovaných scenárov uvedených na Obrázkoch 10-12 pre Vašíčka a na Obrázku 20 pre dynamický Nelson-Siegelov model, sme zhodnotili ako lepšie predikujúci Nelson-Siegelov model. Pomerne dobre totiž dokázal predikovať aj fitovať aktuálnu výnosovú krivku, zatiaľ čo Vašíček často generoval inverzné scenáre, ktoré sú v realite pomerne zriedkavé.

V nasledujúcej kapitole sme využili výnosové krivky vygenerované v 3. kapitole ako vstup do modelu a vytvorili sme viackrokový model (3). Ten oproti minulým modelom v každom roku bral do úvahy aktuálnu výnosovú krivku pre daný čas a podľa nej skonštruoval forwardové výnosové krivky pre budúce obdobia. Dynamicky teda

prispôsoboval výsledky optimalizácie v závislosti od aktuálneho vývoja úroku narozdiel od modelov (1) a (2), kde sa optimalizovalo iba na základe očakávaných forwardových sadzieb. Pre Vašíčkov model sme si vybrali scenár vývoja úrokových mier na nasledujúcich 5 rokov uvedený na Obrázku 21 a pre dynamický Nelson-Siegelov model scenár na Obrázku 23. Príslušné výsledky na Obrázku 22, resp. 24 nám ukázali, že v prvom prípade sa výkonnostne dostávame pod benchmark, zatiaľ čo v druhom prípade máme lepší výkon v porovnaní s benchmarkom. Všoebecne pri Nelson-Siegelovom modeli portfólio predbiehalo výkonnosť trhovo-oceňovaných portfólií, zatiaľ čo použitím Vašíčkových scenárov sme častokrát zostali pod benchmarkom.

V poslednej kapitole sme predstavili stresové scenáre pre naše portfólio spojené s rizikom výrazného rastu úrokových mier uvedené na Obrázku 25. Použili sme Vašíčkove scenáre, o ktorých sme v predchádzajúcej kapitole zistili, že sú náchylnejšie mať horší výkon v porovnaní s benchmarkom ako Nelson-Siegelove scenáre. Taktiež sme navrhli 4 stratégie s výsledkami na Obrázkoch 27-30, ktoré mohli zlepšiť výkonnosť pôvodného modelu 3. Dve stratégie sa nám naozaj osvedčili a na základe toho sa ponúka možnosť prestať investovať do HTM časti alebo sa snažiť výnos portfólia do splatnosti dostatočne priblížiť trhovému výnosu podľa (38) pri očakávaní nastania daných scenárov.

Veľkým prínosom tejto práce bolo, že poskytla viacero prístupov k modelovaniu výnosovej krivky - dokonca aj v prípade, že je záporná, čo bolo kedysi nemysliteľné. Dokázali sme tak použitím týchto modelov a historických dát vygenerovať pravdepodobné aj stresové scenáre možného správania štruktúry úrokových mier. Prínosom bolo taktiež zakomponovanie vygenerovaných scenárov do modelu simulujúceho fungovanie portfólia v porovnaní s inými prácami, ktoré uvažujú iba paralelné posuny výnosovej krivky alebo konkrétne scenáre, viď. [6], [7].

Navyše sme model viac priblížili realite prostredníctvom ohraničení, ktoré sa naozaj využívajú v dôchodkovej správcovskej spoločnosti. A taktiež sme určili stresové scenáre pre dané portfólio a ponúkli metódy vylepšenia pôvodného modelu, za predpokladu ich nastania. Pritom 2 z metód naozaj dokázali výraznejšie zlepšiť výkonnosť pôvodného modelu.

Pre autorku bola vďačná tým, že rozšírila jej poznatky v oblasti dôchodkového

sporenia. Taktiež priniesla nové skúsenosti s modelmi, či už CF párovcím modelom alebo modelmi na simuláciu výnosových kriviek. Okrem toho sme sa priučili novým finančným funkcionalitám v prostredí Matlab.

Možným rozšírením práce by bolo napríklad aplikovať do modelu aj scenáre generované inými metódami, aby sme sa vyhli početnosti inverzných kriviek vo Vašíčkovom modeli.

Zoznam použitej literatúry

[1] Kotov, M.: osobná komunikácia, Bratislava, 2018/2019

[2] Hornáčková, I.: *Slovenský dôchodkový systém po legislatívnych zmenách v roku 2012*, bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2013, dostupné na internete (27.12.2018): http://www.iam.fmph.uniba.sk/efm/bakalarky/2013/hornackova/bakalarka.pdf

[3] *Zákon o starobnom dôchodkovom sporení č. 43/2004 Z.z. a o zmene a doplnení niektorých zákonov*, dostupné na internete (27.12.2018): http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Legislativa/_UplneZneniaZakonov/Z0432004.pdf

[4] Melicherčík, I., Olšarová L., Úradníček V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, 2004.

[5] Hornáčková, I.:*Konštrukcia portfólia garantovaného fondu v dôchodkovom systéme*, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2015, dostupné na internete (13.1.2019): http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2015/hornackova/diplomovka.pdf

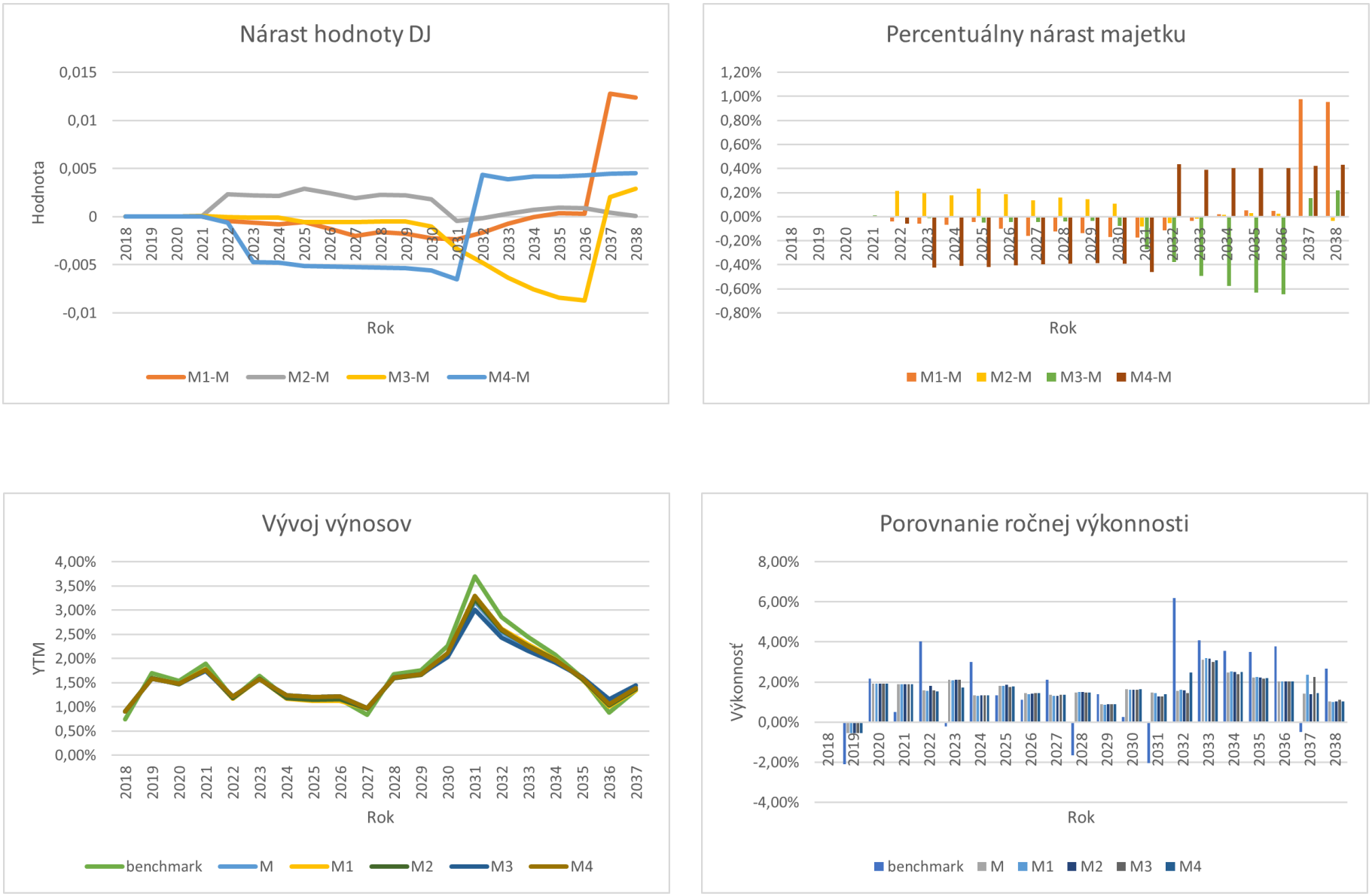
[6] Malik, T.: *: HTM dlhopisy v dlhopisovom portfóliu*, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2013, dostupné na internete (13.1.2019): http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2013/malik/diplomovka.pdf

[7] Zima, S.: *Výnosové křivky dluhopisů a jejich predikční schopnosti*, diplomová práca, Ekonomicko-správní fakulta MU, Brno, 2017, dostupné na internete (13.1.2019): https://is.muni.cz/th/ox9m9/SamuelZima_DP.pdf

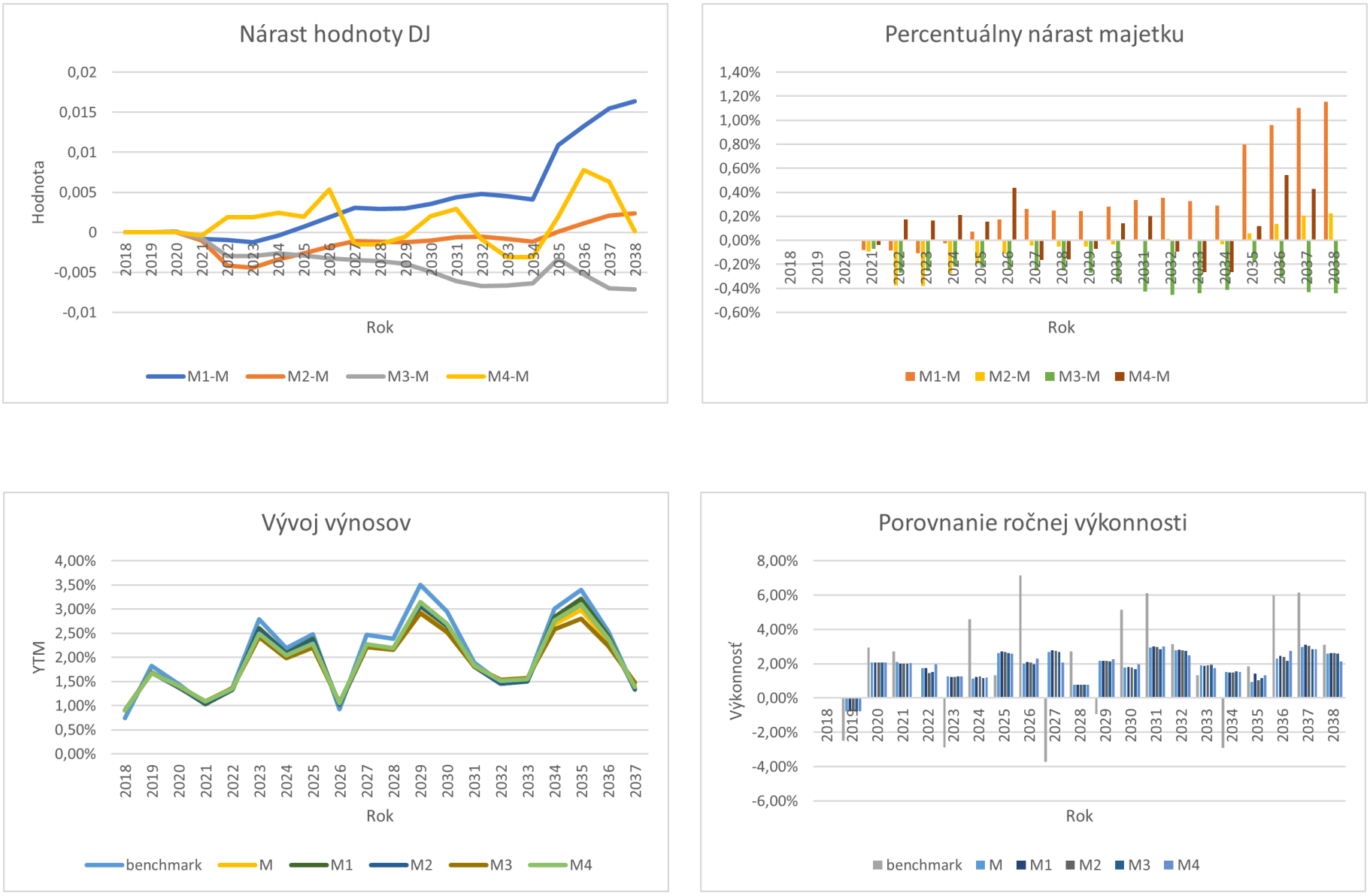
[8] Diebold, F. X., Li, C. : *Forecasting the term structure of government bond yields*, Journal of econometrics, 2006, 130.2: 337-364.

[9] Ibanez, F.: *Calibrating the Dynamic Nelson-Siegel Model: A Practitioner Approach*, 2015.

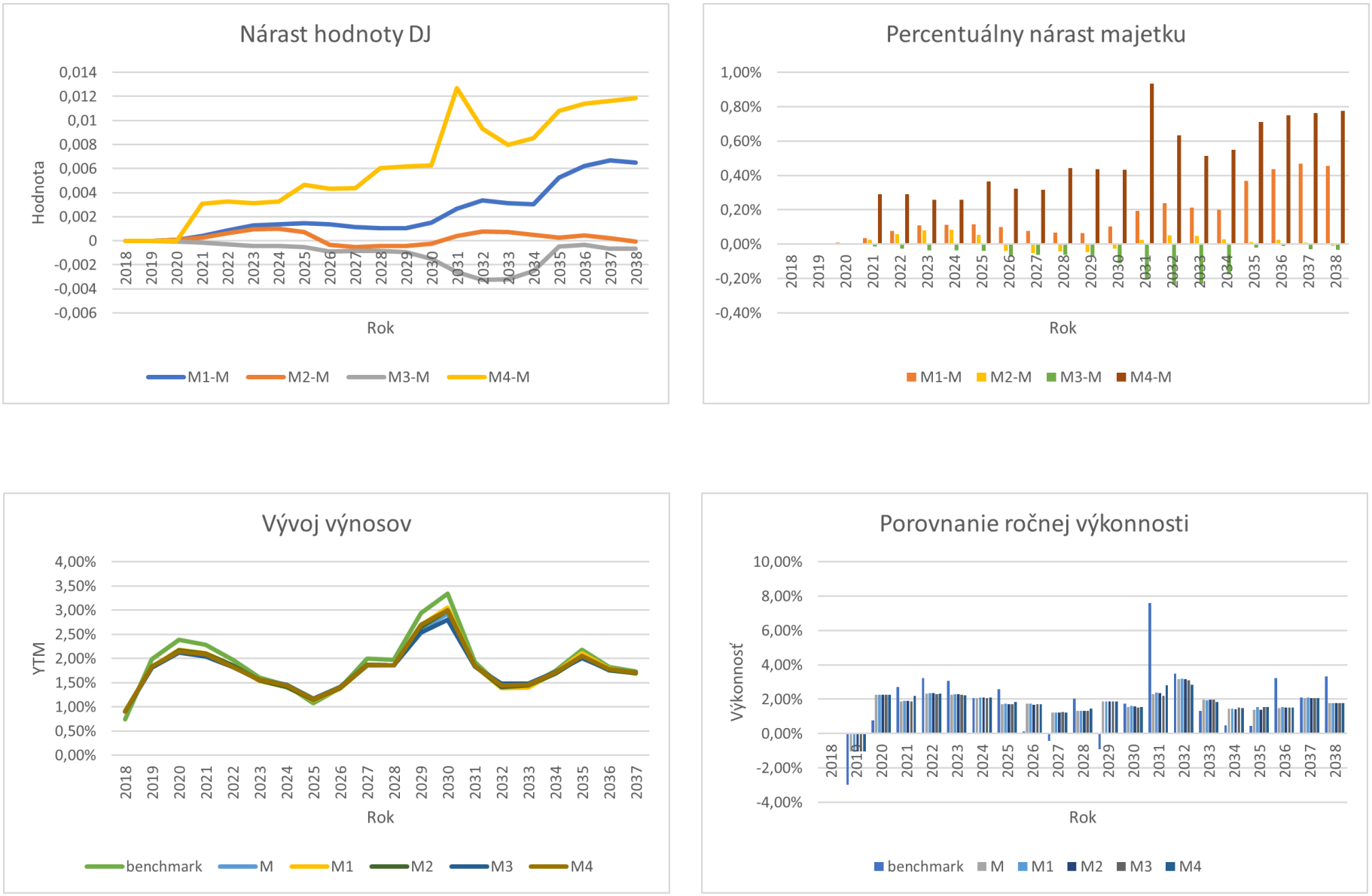
Príloha A



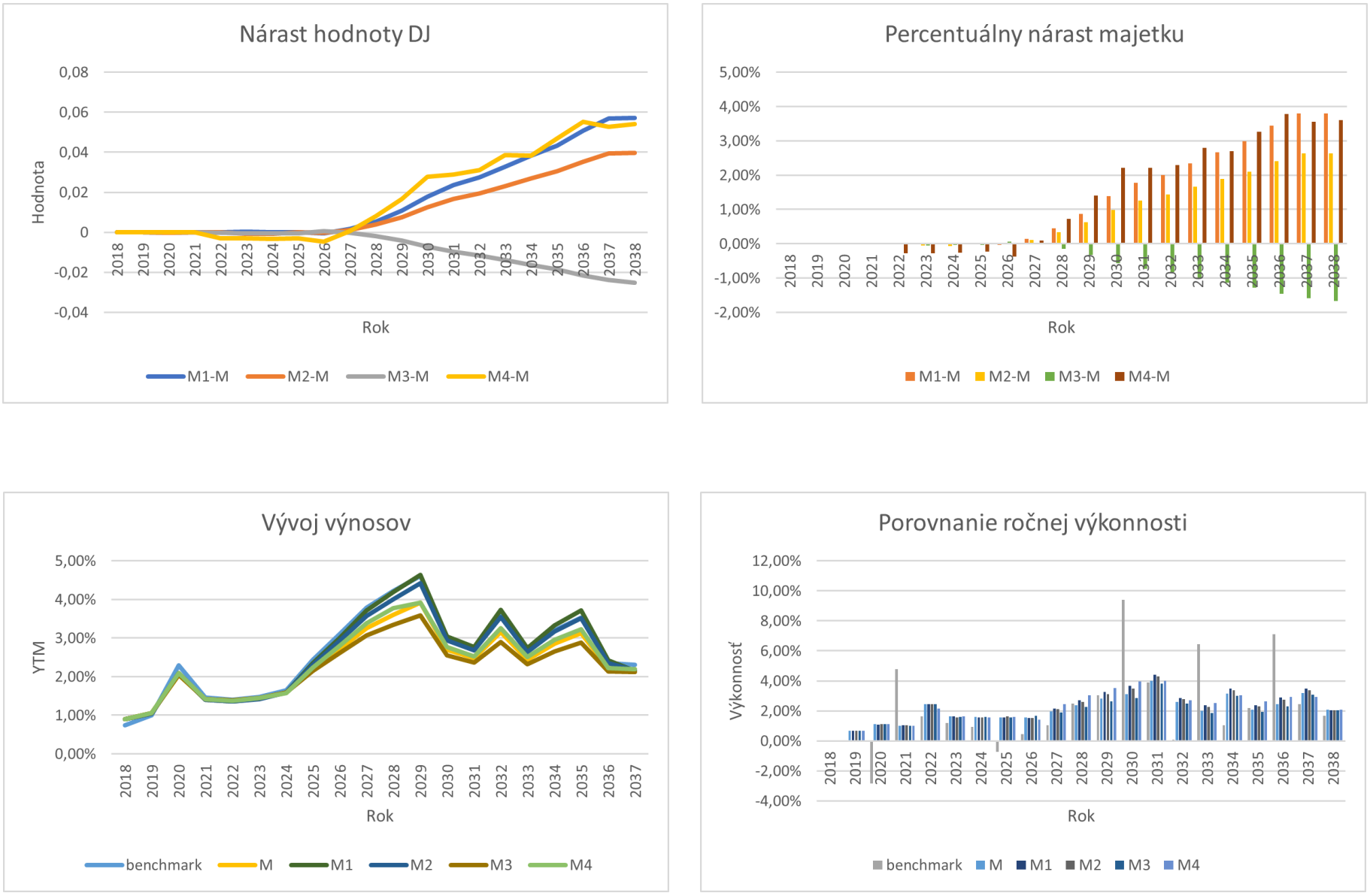
Obr. 27: Parametre výkonnosti pre scenár 1.



Obr. 28: Parametre výkonnosti pre scenár 2.



Obr. 29: Parametre výkonnosti pre scenár 3.



Obr. 30: Parametre výkonnosti pre scenár 4.