UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Konvergenčné modely úrokových mier so stochastickou koreláciou

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2019 Bc. Anton Kulchykovskyi

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Konvergenčné modely úrokových mier so stochastickou koreláciou

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava 2019 **Bc. Anton Kulchykovkyi**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Bc. Anton Kulchykovskyi
Študijný program:	ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor:	aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce:	diplomová
Jazyk záverečnej práce:	slovenský
Sekundárny jazyk:	anglický

Názov: Konvergenčné modely úrokových mier so stochastickou koreláciou
Convergence models of interest rates with stochastic correlation

Anotácia: Konvergenčný model popisuje úrokové miery v eurozóne a v krajine, ktorá sa chystá prijať euro a je ovplyvnená vývojom Euriboru. Toto vstupuje priamo do driftu procesu, ale aj náhodné zložky (modelované Wienerovými procesmi) môžu byť korelované. Práca sa zaoberá modelmi so stochastickou koreláciou, v ktorých sa predpokladá, že táto korelácia nie je konštantná, ale riadi sa stochastickou diferenciálnou rovnicou. Študujú sa ceny dlhopisov, ktoré sú riešením parciálnej diferenciálnej rovnice a ich aproximácie pomocou analytických aproximačných formúl.

Vedúci:	doc. RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra:	FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry:	prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
Dátum zadania:	24.01.2018

Dátum schválenia: 25.01.2018 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie Touto cestou sa chcem poďakovat svojej vedúcej diplomovej práce RNDr. Beáte Stehlíkovej za ochotu, neoceniteľnú pomoc a odborné rady, bez ktorých by sa táto práca nenarodila.

Abstrakt v štátnom jazyku

KULCHYKOVSKYI, Anton: Konvergenčné modely úrokových mier so stochastickou koreláciou [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2019, 53 s.

V našej práci sa zaoberáme modelmi úrokových mier so stochastickou koreláciou. Konvergenčné modely sú špeciálnym prípadom modelov úrokových mier, popisujúce správanie úrokovej miery krajiny, ktorá sa chystá vstúpiť do nejakej menovej únie (napr. Eurozony). Naša hlavná ciel je nájsť vhodné modely, ktoré by vedeli zachytiť dynamicky vzťah medzi úrokovou mierou vstupujúcej do únie krajiny a úrokovou mierou únie. Hlavným nástrojom na tieto učely bude stochastická korelácia. Obyčajné konvergenčné modely predpokladajú konštantnú koreláciu medzi úrokovými mierami. My skúsime namodelovať koreláciu ako stochastický proces, ktorý popíšeme vhodnou stochastickou diferenciálnou rovnicou a následne vnoríme ho do konkretného modelu. Ďalej odvodíme parciálne diferenciálne rovnice pre cenu dlhopisu zodpovedajúce daným modelom a nájdeme ich riešenie buď pomocou numerických metód alebo vhodných aproximácii. Na záver odvodíme presnosť získanej aproximácie.

Kľúčové slová: Úrokové miery, stochastická korelácia, konvergenčné modely.

Abstract

KULCHYKOVKYI, Anton: Convergence models of interest rates with stochastic correlation [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Beáta Stehlíková PhD., Bratislava, 2019, 53p.

In our thesis we deal with convergence models of interest rates with stochastic correlation. Convergence models are a special case of interest rate models describing the interest rate behavior of a country that is about to join a monetary union (e.g. the Eurozone). Our main objective is to find appropriate models that could capture dynamic relationship between the interest rate of the country entering the Union and the interest rate of the Union. Our main tool is stochastic correlation. Typically, convergence models assume a constant correlation between interest rates. We will try to model the correlation as stochastic process, which will be described by a suitable stochastic differential equation and then passing it into a convergence model. Next, we derive partial differential equations for the bond price corresponding to the given model and find the solution either by numerical methods or by appropriate approximations. Finally we will find accuracy of appropriate approximation.

Keywords: interest rates, dynamic correlation, convergence models.

Obsah

Úvod **8**

1 Úvod do modelovania úrokových mier **9**

1.1 Dlhopis a časová štruktúra úrokových mier 9

2 Modely úrokových mier **10**

2.1 Jednofaktorové modely 11

2.1.1 Oceňovanie dlhopisov v rizikovo neutrálnej miere 12

2.1.2 Rizikovo neutrálna a reálna miera 13

2.2 Dvojfaktorové modely 14

2.2.1 Odvodenie rovnice pre cenu dlhopisu vo všeobecnom dvojfaktorovom modeli 15

2.3 Konvergenčné modely 17

2.3.1 Riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre konvergenčný model Vašíčkovho typu 18

2.4 Trojfaktorové modely 20

3 Modelovanie stochastickej korelácie **21**

3.1 Motivácia 21

3.2 Korelácia ako stochastický proces definovaný hyprebolickým tangensom 21

3.3 Jakobího proces korelácie 24

4 Konvergenčný model Vašíčkovho typu so stochastickou koreláciou **24**

4.1 Aproximácia riešenia Vašíčkovho modelu so stochastickou koreláciou . . 25

4.2 Aproximácia stochastickej korelácie z transformovaním na dvojfaktorový model 29

4.3 Aproximácia modelu pri voľbe vhodného procesu korelácie 30

4.4 Presnosť aproximácie ceny dlhopisu vo Vašíčkovom modeli so stochastickou koreláciou 33

4.4.1 Rozvoj aproximatívneho riešenia 33

4.4.2 Rozvoj presného riešenia 35

5 Stochastická korelácia vo Fong-Vašíčkovom modeli **38**

5.1 Dvojfaktorový Fong-Vašíček model 38

5.2 Fong-Vašíčkov model so stochastickou koreláciou 39

Zoznam použitej literatúry **43**

A Príloha **45**

A.1 Aproximácia riešenia Vašíčkovho modelu so stochastickou koreláciou (kapitola 4.1) 45

A.2 Aproximácia stochastickej korelácie z transformovaním na dvojfaktorový model (kapitola 4.2) 47

A.3 Aproximácia modelu pri voľbe vhodného procesu korelácie (kapitola 4.3) 49

A.4 Fong-Vašíčkov model so stochastickou koreláciou (kapitola 5.2) 51

Úvod

Úroková miera je dôležitým pojmom nielen vo finančnom svete, ale aj pre bežného človeka. Asi každý videl reklamu, v ktorej sa hovorí peniazoch a „výhodných“ percentách. Práve tieto percentá predstavujú úrokovú mieru. Okrem toho má úroková miera obrovské využitie v teórii finančných derivátov. Základným derivátom úrokovej miery je dlhopis. V našej práci popíšeme štandardné spôsoby modelovania úrokovej miery a odvodenia cien dlhopisov na základe daných modelov. Viac sa budeme zaoberať konvergenčnými modelmi úrokovej miery, ktoré tvoria triedu špecifických dvojfaktorových modelov. V prvej kapitole oboznámime čitateľa s pojmami, ktoré sa tykajú modelovania úrokových mier. V druhej kapitole povieme viac o aspektoch špecifiky modelovania úrokových mier, odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu na základe všeobecného dvojfaktorového modelu, uvedieme riešenie rovnice pre cenu dlhopisu na základe konvergenčného modelu Vašíčkovho typu, do ktorého bude vstupovať konštantná korelácia. Stručne opíšeme jednofaktorové aj trojfaktorové modely. V tretej kapitole uvedieme motiváciu, prečo by bolo vhodné považovať koreláciu za nekonštantnú a vysvetlíme možné cesty, ako sa to dá spraviť. Ďalej namodelujeme koreláciu ako stochastický proces, aby vo štvrtej kapitole vnoríť ju do konvergenčného modelu Vašíčkovho typu a následne odvodíť rovnicu pre cenu dlhopisu. Potom ukážeme, ako riešiť takýto problém. Povieme, aké sme získali výsledky pomocou numerických schém. V druhej časti štvrtej kapitoly ukážeme aproximačnú schému na riešenie tohto problému a nakoniec uvedieme príklad stochastického procesu, ktorý podstatne zjednodušuje výpočty. Taktiež vo štvrtej kapitole odvodíme presnosť navrhnutej nami aproximácie. Poslednú kapitolu budeme venovať Fong-Vašíčkovmu modelu, do ktorého vnoríme koreláciu odvodenú v tretej kapitole. Navrhneme spôsob približného riešenia rovnice pre cenu dlhopisu v tomto modeli.

1 Úvod do modelovania úrokových mier

Úroková miera je veľmi dôležitá vec vo finančnom svete. Definuje cenu, ktorá sa platí za vypožičanie peňazí na určité obdobie. Úroková miera sa spravidla vyjadruje ako percento z peňažnej sumy požičanej na jeden rok. Ak je napríklad úroková miera 10% ročne, potom sa za pôžičku 1000 dolárov poskytnutú na jeden rok platí 100 dolárov. Existujú aj deriváty úrokovej miery - finančné produkty, ktoré sú závislé od konkrétnej úrokovej miery. Okrem dlhopisu sú to swapy, deriváty typu „cap“ a „floor“, opcie na deriváty a iné. Viac informácii vie čitateľ nájsť napríklad v [1]. V ďalšej podkapitole sa podrobnejšie zoznámime s úrokovou mierou a dlhopisom.

1.1 Dlhopis a časová štruktúra úrokových mier

Na Slovensku sú dlhopisy rozoberané najmä v zákone o dlhopisoch z roku 1990 v platnom znení. Podľa tohto zákona je dlhopis definovaný ako cenný papier, s ktorým je spojené právo majiteľa požadovať splácanie dlžnej sumy v menovitej hodnote a vyplácanie výnosov z nej k určitému dátumu a povinnosť osoby oprávnenej vydávať dlhopisy (emitent) tieto záväzky splniť. Bezkupónový dlhopis s nominálnou hodnotou 1 sa nazýva diskontný dlhopis. Ďalej v našej práci pod pojmom *dlhopis* budeme rozumieť diskontný dlhopis. Označme $P(t,T)$ cenu dlhopisu v čase t, ktorá závisí od maturity T (čas, kedy majiteľ dlhopisu dostane nominálnu hodnotu). Nech $R(t,T)$ je spojitý úrok na obdobie od t do T. Potom platí:

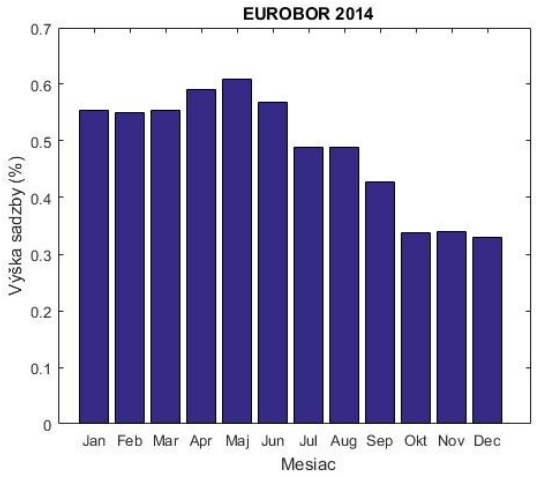
$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}. \tag{1.1}$$

Keď z daného vzťahu vyjadrime $R(t,T)$, dostaneme takzvanú časovú štruktúru úrokových mier, ktorá popisuje závislosť úrokovej miery v čase t od doby splatnosti dlhopisu T:

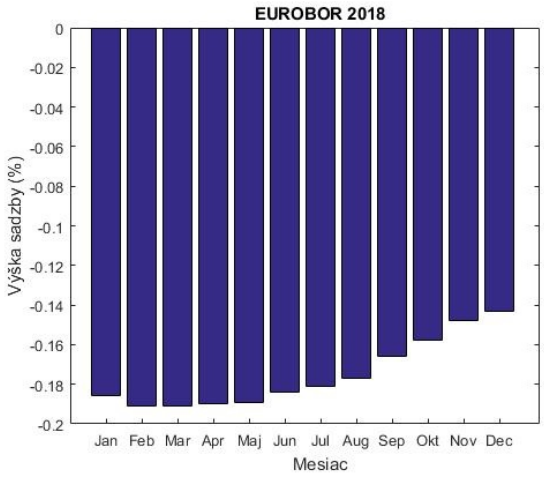
$$R(t,T) = \frac{-ln[P(t,T)]}{T-t}. \tag{1.2}$$

Niekedy sa nazýva aj výnosová krivka. Táto býva zvyčajne kladná, avšak vyskytujú sa aj záporné hodnoty v časovej štruktúre úrokových mier.

Príkladmi úrokových mier sú EURIBOR (Euro Interbank Offered Rate), LIBOR (London Interbank Offered Rate) a mnohé ďalšie. EURIBOR [6] je úroková sadzba,



(a) EURIBOR 2014



(b) EURIBOR 2018

Obr. 1.1: EURIBOR [6] s maturitou 12 mesiacov v rokoch 2014 a 2018

na základe ktorej si banky požičiavajú finančné prostriedky na medzinárodnom trhu v rámci eurozóny. Vypočítava sa ako aritmetický priemer úrokov referenčných bánk, za ktoré si navzájom požičiavajú peniaze, pričom najnižšie a najvyššie úrokové sadzby sa vynechávajú. Teraz sa daná sadzba určuje pre doby splatnosti 1 týždeň a 1, 3, 6, 12 mesiacov. Na obrázku 1.1 znázorňujeme správanie EURIBORU na mesačnej báze (k prvému pracovnému dňu príslušného mesiaca) s maturitou 12 mesiacov v rokoch 2014 a 2018. Dáta sú prevzaté z [6].

Dôležitý pojem je okamžitá úroková miera. Je definovaná vzťahom:

$$r(l) = \lim_{T \to l^+} R(l, T). \tag{1.3}$$

Predstavuje začiatok výnosovej krivky a je to teda úroková miera na veľmi krátke obdobie (okamih). Viac o základnej teórie úrokových mier čitateľ môže nájsť v [1],[4].

2 Modely úrokových mier

Modelovanie úrokovej miery je nevyhnutné na ocenenie jej derivátov. Pri modelovaní krátkodobej úrokovej miery sa popisuje jej vývoj v čase a robí sa predikcia do budúcnosti. Úroková miera nie je determenistický proces, pretože je závislá od politických rozhodnutí, správania trhu, vývoja ekonomiky a ďalších faktorov. Kvôli tomu sú modely obvykle formulované pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice, ktorá

zahŕňa náhodné fluktuácie procesu. V závislosti od toho, koľkými faktormi popisujeme úrokovú mieru, rozlišujeme jednofaktorové a viacfaktorové modely.

2.1 Jednofaktorové modely

Vo všeobecnosti jednofaktorový model úrokovej miery vyzerá nasledovne:

$$dr = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dW, \tag{2.1}$$

kde dW je zmena Wienerovho procesu v čase, ktorý zabezpečuje náhodnosť v našom modeli. Deterministický člen $\mu(r,t)dt$ popisuje trend procesu a stochastický člen $\sigma(r,t)dW$ vytvára kolísanie okolo trendu. V praxe sa používajú modely, ktoré sú relatívne jednoduché (z toho vyplýva výpočtová nenáročnosť) a sú čo najlepšie zhodné s reálnymi dátami. Viac o stochastických procesoch môže čitateľ nájsť v [1], [4]. V tabuľke 1 uvádzame stručný prehľad jednofaktorových modelov úrokových mier.

Rok	Model	SDR	$r > 0$	r	AB
1977	Vašíček	$dr = \kappa[\theta - r]dt + \sigma dW$	N	N	A
1978	Dothan	$dr = ardt + \sigma rdW$	A	LN	A
1985	Cox-Ingersoll-Ross	$dr = \kappa[\theta - r]dt + \sigma\sqrt{r}dW$	A	NC_{χ^2}	A
1990	Hull and White	$dr = \kappa[\theta_t - r]dt + \sigma dW$	N	N	A
1991	Exponenciálny Vašíček	$dr = r[\mu - aln(r)]dt + \sigma rdW$	A	LN	N
1992	Black and Karasinski	$dr = r[\mu_t - aln(r)]dt + \sigma rdW$	A	LN	N
1992	CKLS	$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^{\gamma}dW$	A	-	N
2000	Mercirio and Modarela	$dr = r[\nu - (\lambda - \frac{\gamma_t}{\alpha+\gamma_t})ln(r)]dt + \sigma rdW$	A	LN	A

Tabuľka 1: Prehľaď základných modelov úrokových mier (zdroj [9])
Použité skratky: A-áno, N-nie, AB-či existuje explicitné riešenie pre PDR ceny dlhopisu (viac o tom ďalej), N - normálne rozdelenie, LN - lognormálne rozdelenie, NC_{χ^2}-necentrálny chí-kvadrát rozdelenie.

V nasledujúcej časti uvedieme základne fakty o Vašíčkovom modeli, ktorý bol uvedený v [2] v roku 1977, nakoľko s ním budeme neskôr pracovať:

$$dr = \kappa[\theta - r]dt + \sigma dW, \tag{2.2}$$

kde θ, σ a κ sú konštanty. Jeho trendová zložka sa priťahuje k dlhodobej strednej hodnote θ. Parameter κ hovorí o rýchlosti priťahovania ku dlhodobej strednej hodnote a σ kontroluje silu volatility procesu. Nie je ťažko odvodiť strednú hodnotu procesu (2.2) [24]:

$$E(dr) = dE(r) = \kappa(\theta - E(r))dt, \tag{2.3}$$

potom sa vyrieši parciálna diferenciálna rovnica (2.3) riešenie ktorej vyzerá nasledovne:

$$E(r) = r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t}),$$

z čoho vyplýva, že

$$\lim_{t\to\infty} E(r) = \theta. \tag{2.4}$$

Vlastnosť (2.4) sa nazýva *mean-reversion* [2]. Taktiež vieme vypočítať volatilitu procesu (2.2) [24]:

$$Var(r) = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t}),$$

z čoho vyplýva

$$\lim_{t\to\infty} Var(r) = \frac{\sigma^2}{2\kappa}.$$

Donedávna hlavnou nevýhodou modelu sa považovalo to, že s nenulovou pravdepodobnosťou pripúšťa záporné hodnoty úrokovej miery. Avšak v súčasnosti sa môže vyskytnúť aj taká situácia, čo vidíme na obrázku (1.1b).

2.1.1 Oceňovanie dlhopisov v rizikovo neutrálnej miere

Pre začiatok je nutne povedať o *arbitráži*. Arbitráž (Arbitrage) je pojem z oblasti obchodu - používa sa na označenie obchodnej praktiky pre predaj a nákup aktíva na rôznych trhoch (časovo alebo miestne oddelených) s využitím rozdielu v ich cenách. Matematické vyjadrenie neexistencii arbitráže na trhu je existencia rizikovo neutrálnej úrokovej miery, v ktorej môžeme oceňovať finančné deriváty pomocou výpočtu stredných hodnôt. Nech vývoj krátkodobej úrokovej miery v rizikovo neutrálnom svete je Markovovský proces

$$dr = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dW_t,$$

kde $\mu(r,t)$ a $\sigma(r,t)$ sú $\mathcal{F}_t^W$ - adaptované procesy. Cena diskontného dlhopisu v čase $t < T$ spĺňa

$$P(t,T) = E_Q\left[e^{-\int_t^T r_k dk} \mid \mathcal{F}_t^W\right].$$

Ak máme derivát s hodnotou $X = P_T$ v čase maturity T, jeho cena v čase t:

$$P(t,T) = P(r,t) = E_Q\left[e^{-\int_t^T r_k dk} X \mid \mathcal{F}_t^W\right] = E_Q\left[e^{-\int_t^T r_k dk} X \mid r_t = r\right].$$

Potom cena P v čase t spĺňa Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu v tvare:

$$-\frac{\partial P}{\partial t} + \mu(r,t)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2(r,t)\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0,$$

kde $r > 0$, $\tau \in (0,T)$ a platí koncová podmienka $P(r,T) = 1$ pre každé $r > 0$. Detailnejšie, viac o $\mathcal{F}_t^W$ - adaptovaných procesoch čitateľ môže nájsť v [1].

2.1.2 Rizikovo neutrálna a reálna miera

Správanie úrokovej miery môžeme analyzovať buď v reálnej alebo v rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere. Reálna miera sa používa, keď pracujeme s reálnymi dátami. Pri riziko neutrálnej miere platí, že hodnota aktíva v súčasnosti sa rovná hodnote diskontovaného bezrizikovou úrokovou mierou aktíva v budúcnosti. Tento prístup vylučuje možnosť arbitráže. Dané pojmy súvisia z teóriou martingalov o ktorých je napísane viac napríklad v [1]. Chceli by sme mať prechod medzi modelom sformulovaným v reálnej miere a rizikovo neutrálnej miere. S týmto nám pomôže funkcia $\lambda(r)$, ktorú voláme trhová cena rizika. Je možné ukázať [1], že pre model sformulovaný v reálnej miery existuje $\lambda(r)$ a že je spoločná pre všetky dlhopisy, pretože nezávisí od maturity. Trhová cena rizika popisuje nárast výnosu aktíva na jednotku rizika, ktoré prijíma investor. Volatility sú rovnaké v oboch mierach a pre trendovú zložku platí vzťah:

(rizikovo neutrálny drift) = (reálny drift) - (trhová cena rizika) $\times$ (volatilita).

Vo všeobecnosti proces (2.1) v riziko neutrálnej úrokovej miere má tvar

$$dr = (\mu(r,t) - \lambda(r,t)\sigma(r,t))dt + \sigma(r,t)dW.$$

Napríklad, Vašíčkov model v riziko neutrálnej úrokovej miere by pri konštantnej trhovej cene rizika vyzeral nasledovne:

$$dr = (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma)dt + \sigma dr. \tag{2.5}$$

Pomocou takej jednoduchej úpravy môžeme prejsť do inej miery aj v iných modeloch.

Cena diskontného dlhopisu vo Vašíčkovom modeli (2.5) je

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau}+(\kappa(\theta-r)-\lambda\sigma)\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}-rP=0, \tag{2.6}$$

s počiatočnou podmienkou $P(r,0)=1$. Uvádzame riešenia problému (2.6) prebraté z [5]. Riešenie je v tvare

$$P(r,\tau)=e^{A(\tau)-rD(\tau)},$$

kde funkcie $A(\tau)$, $D(\tau)$ sú dané nasledovnými vzťahmi:

$$A(\tau)=\left(\frac{1-e^{-\kappa\tau}}{\kappa}-\tau\right)\times\left(\theta-\frac{\lambda\sigma}{\kappa}-\frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right)-\frac{\sigma^2}{4\kappa^3}(1-e^{-\kappa\tau})^2,$$

$$D(\tau)=\frac{1-e^{-\kappa\tau}}{\kappa}.$$

2.2 Dvojfaktorové modely

Dvojfaktorové modely sa skladajú z dvoch stochastických diferenciálnych rovnic, ktoré môžu byť navzájom prepojené. Motiváciu k vytvoreniu dvojfaktorových modelov môžeme zhrnúť do niekoľkých bodov [25]:

- výnosová krivka nie je jednoznačné určená hodnotou okamžitej úrokovej miery,
- viac možných tvarov výnosových kriviek,
- samotné modelovanie okamžitej úrokovej miery.

Dôležitú rolu v dvojfaktorových modeloch zohráva korelácia medzi prírastkami Wienerových procesov. Môže byť konštantná alebo aj funkciou času (viac o tom v kapitole 3). Nech x je prvý faktor a y druhý. Potom všeobecný dvojfaktorový model vyzerá nasledovne

$$dx=\mu_x(x,y)dt+\sigma_x(x,y)dw_x, \tag{2.7}$$

$$dy=\mu_y(x,y)dt+\sigma_y(x,y)dw_y, \tag{2.8}$$

pričom

$$cov(dw_x,dw_y)=\rho dt, \tag{2.9}$$

kde $\rho\in[-1;1]$. Okamžitá úroková miera môže potom vystupovať ako napríklad súčet dvoch faktorov. Napríklad $r=x+y$, kde x je *risk-free rate* (spoločná pre všetky štáty)

a y je *credit spread* (pre každý štát samostatne) [22]. Iný prípad je, keď sa druhým faktorom snažíme lepšie popísať prvú rovnicu systému. To sú napríklad modely so stochastickou volatilitou, v ktorých proces y vstupuje do funkcie $\sigma_x(x, y)$. Príkladom takého modelu je Fong-Vašíčkov model [19], ktorým sa zaoberáme v kapitole 5. Keď prvý faktor je úroková miera štátu a druhý je úroková miera v eurozóne, ide o konvergenčný model, ktorému venujeme kapitolu 4. Viac informácii o dvojfaktorových modeloch môže čitateľ nájsť [22], [5], [7], [1].

Taktiež môžeme prepísať model (2.7), (2.8) do tvaru, v ktorom Wienerové procesy budú nezávislé (pozri napr. [19]):

$$\begin{aligned} dx &= \mu_x(x, y)dt + \sigma_x(x, y)dw_x, \\ dy &= \mu_y(x, y)dt + \sigma_y(x, y)[\rho dw_x + (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} dw_y]. \end{aligned}$$

Zvyčajne sa pri simuláciách používa toto vyjadrenie.

Podobne ako v jednofaktorových modeloch môžeme formulovať model v rizikovo neutrálnej alebo reálnej úrokovej miere. Pri zmene miery sa zmenia len drifty a tie rovnakým spôsobom ako v jednofaktorovom:

$$\text{(rizikovo neutrálny drift)}_x = \text{(reálny drift)}_x - \text{(trhová cena rizika)}_x \times \text{(volatilita)}_x,$$
$$\text{(rizikovo neutrálny drift)}_y = \text{(reálny drift)}_y - \text{(trhová cena rizika)}_y \times \text{(volatilita)}_y.$$

Tuto úvahu môžeme aplikovať aj na viacfaktorové modely. V ďalšej časti odvodíme PDR pre všeobecný dvojfaktorový model.

2.2.1 Odvodenie rovnice pre cenu dlhopisu vo všeobecnom dvojfaktorovom modeli

Postupujeme na základe [5]. Predpokladáme, že máme model

$$\begin{aligned} dx &= \mu_x(x, y)dt + \sigma_x(x, y)dw_x, \\ dy &= \mu_y(x, y)dt + \sigma_y(x, y)dw_y, \end{aligned}$$

pričom

$$cov(dw_x, dw_y) = \rho dt. \tag{2.10}$$

Úroková miera je funkciou faktorov x a y, ciže $r = r(x, y)$. Teraz odvodíme rovnicu pre cenu dlhopisu v čase t viazaného na premenné x,y a dobu splatnosti T. Cena dlhopisu je funkcia $P = P(x, y, t, T)$. Najprv aplikujeme Itóovu lemu [1] a nájdeme diferenciál funkcie P. Získame:

$$dP = \mu dt + \sigma_1 dw_x + \sigma_2 dw_y, \tag{2.11}$$

kde $\mu = \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_x \frac{\partial P}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\sigma_x^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\sigma_y^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho\sigma_x\sigma_y\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}$, $\sigma_1 = \sigma_x \frac{\partial P}{\partial x}$, $\sigma_2 = \sigma_y \frac{\partial P}{\partial y}$.

Ďalej vytvoríme portfólio, ktoré bude zostavené z troch typov dlhopisov v množstvach V_1, V_2 V_3, každý z rôznou maturitou T_1,T_2,T_3. Hodnota takéhoto portfólia je:

$$\Pi = P(T_1)V_1 + P(T_2)V_2 + P(T_3)V_3, \tag{2.12}$$

kde $P(T_i)$ je cena dlhopisu s maturitou i, pre $i = 1, 2, 3$. Zmenu hodnoty portfólia zapíšeme nasledovne:

$$d\Pi = dP(T_1)V_1 + dP(T_2)V_2 + dP(T_3)V_3, \tag{2.13}$$

a po využití vzťahu (2.11) získame:

$$\begin{aligned} d\Pi = [V_1\mu(T_1) + V_2\mu(T_2) + V_3\mu(T_3)]dt + [V_1\sigma_1(T_1) + V_2\sigma_1(T_2) + V_3\sigma_1(T_3)]dw_1 \\ +[V_1\sigma_2(T_1) + V_2\sigma_2(T_2) + V_3\sigma_2(T_3)]dw_2. \end{aligned}$$

Teraz chceme eliminovať stochastické členy, čiže chceme dosiahnuť aby zátvorky pri dw_1 a dw_2 boli nulové:

$$\begin{aligned} V_1\sigma_1(T_1) + V_2\sigma_1(T_2) + V_3\sigma_1(T_3) = 0, \\ V_1\sigma_2(T_1) + V_2\sigma_2(T_2) + V_3\sigma_2(T_3) = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

V tom prípade vieme, že pre zmenu portfólia musí platiť (kvôli vylúčeniu arbitráže) $d\Pi = r\Pi dt$, kde r je bezriziková úroková miera. Tým pádom dostaneme:

$$V_1\mu(T_1) + V_2\mu(T_2) + V_3\mu(T_3) = r[P(T_1)V_1 + P(T_2)V_2 + P(T_3)V_3]$$

a po úprave

$$V_1[\mu(T_1) - rP(T_1)] + V_2[\mu(T_2) + rP(T_2)] + V_3[\mu(T_3) - rP(T_3)] = 0. \tag{2.15}$$

Dopracovali sme sa k tretej rovnici, ktorú spojíme z rovnicami (2.14) a získame systém lineárnych rovníc. Maticovo:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(T_1) & \sigma_1(T_2) & \sigma_1(T_3) \\ \sigma_2(T_1) & \sigma_2(T_2) & \sigma_2(T_3) \\ \mu(T_1) - rP(T_1) & \mu(T_2) + rP(T_2) & \mu(T_3) - rP(T_3) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Chceli by sme nájsť netriviálne riešenia tohto systému, ktoré ale existuju len vtedy, ak sú riadky matice lineárne závislé. Avšak keby prvý riadok matice bol násobkom druhého riadku, náš systém by sa zredukoval na jednofaktorový model, čo nechceme. Tým pádom tretí riadok musí byť lineárnou kombináciou prvých dvoch. Potom existujú také funkcie λ_1, λ_2 že platí:

$$\mu(T_i) - rP(T_i) = \lambda_1\sigma_1(T_i) + \lambda_2\sigma_2(T_i), \text{ pre } i = 1, 2, 3. \tag{2.16}$$

Keďže maturity T_1,T_2,T_3 boli zvolené ľubovoľne, funkcie λ_1, λ_2 nezáležia od času splatnosti, čo implikuje, že majú tvar:

$$\lambda_1 = \lambda_1(x, y, t), \ \lambda_2 = \lambda_2(x, y, t).$$

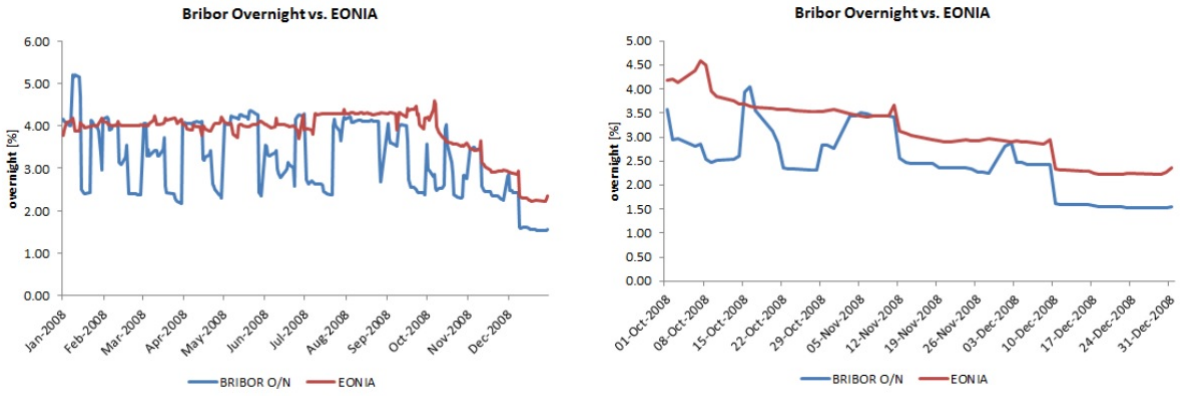
Sú to trhové ceny rizika faktorov x, y, ktoré sme spomínali v kapitole 2.1.2. Po dosadení μ, σ_1 a σ_2 z (2.11) do rovnice (2.16) a úprave dostávame nasledujúci vzťah:

$$-\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_x - \lambda_1\sigma_x)\frac{\partial P}{\partial x} + (\mu_y - \lambda_2\sigma_y)\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\sigma_x^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\sigma_y^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho\sigma_x\sigma_y\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} - rP = 0.$$

Je to parciálna diferenciálna rovnica pre cenu dlhopisu v dvojfaktorovom modeli úrokovej miery s koncovou podmienkou $P(r, x, T) = 1$ pre každé $r, x > 0$.

2.3 Konvergenčné modely

V našej práci skúmame v kapitole 4 konvergenčné modely, ktoré sú špeciálnym prípadom dvojfaktorových modelov úrokových mier. Popisujú správanie domácej úrokovej miery krajiny, ktorá sa chystá vstúpiť do inej menovej únie. Na obrázku 2.1 vidíme správanie úrokovej miery Bribor (Bratislava Interbank offered rate) pred vstupom do eurozóny (rok 2008).



Obr. 2.1: Bribor vs Eonia rok 2008. Zdroj: [6], [8]

Z obrázku je vidno, že domáca úroková miera sa s časom priťahuje k európskej. Modely tvoriace základ pre konštrukciu konvergenčného sú napríklad Vašíčkov, CIR a CKLS model. Prehľad konvergenčných modelov je napríklad v [9]. My ukážeme, ako vyzerá konvergenčný model Vašíčkovho typu, ktorý bol navrhnutý v práci [3]:

$$\begin{aligned} dr_d &= [a + b(r_e - r_d)]dt + \sigma_d dw_d, \\ dr_e &= c(d - r_e)dt + \sigma_e dw_e, \end{aligned} \tag{2.17}$$

pričom

$$cov(dw_e, dw_d) = \rho dt,$$

kde ρ je korelácia medzi prírastkami Wienerových procesov w_d a w_e, r_d je domáca úroková miera a r_e európska, a,b,c,d sú parametre. V druhej rovnici parameter c zodpovedá rýchlosti konvergencie a d je dlhodobá stredná hodnota. Prvú rovnicu systemu by sa dalo prepísať nasledovne:

$$dr_d = b(\frac{a}{b} + r_e - r_d)dt + \sigma_d dw_d.$$

Z tohto tvaru je vidno, že domáca úroková miera sa priťahuje k strednej hodnote $\frac{a}{b} + r_e$ s rýchlosťou b.

2.3.1 Riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre konvergenčný model Vašíčkovho typu

V tejto podkapitole ukážeme, ako sa dá vyriešiť PDR v konvergenčnom modeli Vašíčkovho typu. Postupujeme podobne ako v [5]. Na základe podkapitoly 2.2.1 vieme napísať PDR

po transformácii $\tau = T - t$ pre cenu domáceho dlhopisu:

$$-\frac{\partial P_d}{\partial \tau} + [a + b(r_e - r_d) - \lambda_d \sigma_d]\frac{\partial P_d}{\partial r_d} + [c(d - r_e) - \lambda_e \sigma_e]\frac{\partial P_d}{\partial r_e} + \frac{\sigma_d^2}{2}\frac{\partial^2 P_d}{\partial r_d^2} + \frac{\sigma_e^2}{2}\frac{\partial^2 P_d}{\partial r_e^2} + \rho\sigma_e\sigma_d\frac{\partial^2 P_d}{\partial r_d \partial r_e} - r_d P = 0 \tag{2.18}$$

so začiatočnou podmienkou $P(r_e, r_d, 0) = 1$. Trhové ceny rizika λ_e, λ_d zvolíme konštantné. Riešenie budeme hľadať v tvare

$$P_d(r_d, r_e, \tau) = e^{A(\tau) - r_d D(\tau) - r_e C(\tau)}. \tag{2.19}$$

Po dosadení (2.19) do (2.18) a úprave získame vzťah:

$$r_d(\dot{D} + bD - 1) + r_e(\dot{C} - bD + a_2 C) - \dot{A} - aD + \lambda_d\sigma_d D - cdC + \lambda_e\sigma_e C + \frac{\sigma_d^2}{2}D^2 + \frac{\sigma_e^2}{2}C^2 + \rho\sigma_d\sigma_e DC = 0. \tag{2.20}$$

Rovnica (2.20) musí byť platná pre ľubovoľné r_e a r_d. Z toho vyplýva, že

$$\dot{D} = 1 - bD, \tag{2.21}$$

$$\dot{C} = bD - cC, \tag{2.22}$$

$$\dot{A} = (-a + \lambda_d\sigma_d)D + (-cd + \lambda_e\sigma_e)C + \frac{\sigma_d^2}{2}D^2 + \frac{\sigma_e^2}{2}C^2 + \rho\sigma_d\sigma_e DC, \tag{2.23}$$

pričom $A(0) = B(0) = C(0) = 0$. Predpokladajme, ze $b \neq c$. Riešenia pre prípad $b = c$ je možné nájsť v [5] (ako aj postup pre $b \neq c$). (2.21) a (2.22) sú obyčajné diferenciálne rovnice, ktoré vieme ich jednoducho vyriešiť:

$$D(\tau) = \frac{1 - e^{-b\tau}}{b}, \tag{2.24}$$

$$C(\tau) = \frac{b}{c - b}(D(\tau) - E(\tau)), \tag{2.25}$$

kde $E(\tau) = (1 - e^{-c\tau})/c$ je pomocná funkcia. Zintegrovaním rovnice (2.23) nájdeme A:

$$A(\tau) = \int_0^\tau [(-a + \lambda_d\sigma_d)D(y) + (-cd + \lambda_e\sigma_e)C(y) + \frac{\sigma_d^2}{2}D(y)^2 + \frac{\sigma_e^2}{2}C(y)^2 + \rho\sigma_d\sigma_e D(y)C(y)]dy. \tag{2.26}$$

Vypočítame každý sčítanec výrazu (2.26) zvlášť. Dostaneme:

$$\int_0^\tau D(y)dy = \frac{\tau - D(\tau)}{b},$$

$$\int_0^\tau D^2(y)dy = \frac{\tau}{b^2} - \frac{2}{b^2}D(\tau) - \frac{[(1-bD(\tau)]^2-1}{2b^3},$$
$$\int_0^\tau C(y)dy = \frac{b}{c-b}\left(\frac{\tau}{b} - \frac{D(\tau)}{b} - \frac{\tau}{c} + \frac{E(\tau)}{c}\right),$$
$$\int_0^\tau C^2(y)dy = \left(\frac{b}{c-b}\right)^2\left[\frac{\tau}{b^2} - \frac{2D(\tau)}{b^2} + \frac{\tau}{c^2} - \frac{2E(\tau)}{c^2} - \frac{2\tau}{bc} - \frac{[(1-bD(\tau)]^2-1}{2b^3}\right.$$
$$\left. + \frac{[(1-cE(\tau)]^2-1}{2c^3} + \frac{2}{bc}\left(D(\tau)+E(\tau)+\frac{exp(-(b+c)\tau)-1}{b+c}\right)\right],$$
$$\int_0^\tau C(y)D(y)dy = \frac{2c-b}{bc(c-b)}D(\tau) - \frac{[2-bD(\tau)]D(\tau)}{2b(b-c)} + \frac{1-exp(-(b+c)\tau)}{c(b^2-c^2)} - \frac{E(\tau)}{c(b-c)} + \frac{\tau}{bc}. \tag{2.27}$$

Teraz stačí dosadiť výsledky do vzťahu (2.19) a získame cenu dlhopisu.

2.4 Trojfaktorové modely

Na záver kapitoly 2 uvádzame všeobecný trojfaktorový model, s ktorým sa neskôr stretneme vo 4 kapitole:

$$dx = \mu_x(x,y,z)dt + \sigma_x(x,y,z)dw_x,$$
$$dy = \mu_y(x,y,z)dt + \sigma_y(x,y,z)dw_y,$$
$$dz = \mu_z(x,y,z)dt + \sigma_y(x,y,z)dw_z,$$

kde úroková miera r je daná ako funkcia faktorov, t.j. $r = r(x,y,z)$. Rovnakým postupom ako pre dvojfaktorový model vieme odvodiť parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu v modeli uvedenom vyššie. Tu uvádzame len výsledok. Podrobnejšie odvodenie čitateľ môže nájsť v [10]. Trhové ceny rizika λ_x, λ_y, λ_z znovu nezávisia od maturity, ale iba od času t a faktorov x, y, z. Prechod medzi mierami v trojfaktorovom modeli je analogický ako v dvojfaktorovom (pozri kapitolu 2.2).

$$-\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_x - \lambda_x\sigma_x)\frac{\partial P}{\partial x} + (\mu_y - \lambda_y\sigma_y)\frac{\partial P}{\partial y} + (\mu_z - \lambda_z\sigma_z)\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\sigma_x^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\sigma_y^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} +$$
$$\frac{\sigma_z^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \rho_{xy}\sigma_x\sigma_y\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \rho_{xz}\sigma_x\sigma_z\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x} + \rho_{zy}\sigma_z\sigma_y\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - r(x,y,z)P = 0, \tag{2.28}$$

kde $\rho_{xy} = cov(dw_x, dw_y)$, $\rho_{xz} = cov(dw_x, dw_z)$ a $\rho_{yz} = cov(dw_y, dw_z)$.

3 Modelovanie stochastickej korelácie

3.1 Motivácia

Motivácia pre dynamickú koreláciu je pomerné očividná. Parameter ρ vyjadruje koreláciu náhodných členov, ktoré tvoria fluktuácie okolo trendu. Samozrejme, táto korelácia nemusí byť stále konštantnou ale s časom sa môže meniť. Preto chceme vytvoriť nástroj, ktorý umožní zachytiť dynamický vzťah medzi náhodnými členmi procesov v dvojfaktorových modeloch uvedených v kapitole 2.2.

Teraz prichádzajú dva možné prístupy. Prvý je povedať, že korelácia je deterministická funkcia času. Druhý, že korelácia je stochastický proces závislý od času. My sa zameriavame na druhý prístup. V oboch prípadoch chceme, aby boli splnené isté vlastnosti:

- funkčná hodnota patrí do intervalu $[-1; 1]$,
- $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = 1$ v prípade deterministickej korelácie, $\lim_{t\to\infty} E[\rho(t)] = 1$ v prípade stochastickej korelácie.

Prvá vlastnosť je jasná nakoľko modelujeme koreláciu. Druhú vlastnosť požadujeme z dôvodu „dokončenia“ procesu integrovania štátu do únie. Prvú podmienku môžeme prípadne upraviť a požadovať, aby korelácia bola z intervalu $[0; 1]$. Vyplýva to z toho, že bolo by čudné, keby domáca úroková miera sa správala z nejakého dôvodu „opačne“ ako európska.

V kapitole 3.2 a 3.3 ukážeme na konkrétnych príkladoch, ako sa dá modelovať korelácia pomocou stochastického procesu a následne ju vnoríme do konvergenčného modelu v kapitole 4. Potom odvodíme príslušnú PDR a pokúsime sa ju vyriešiť.

3.2 Korelácia ako stochastický proces definovaný hyprebolickým tangensom

Nech stochastický proces x je Brownow pohyb

$$dx = \mu dt + \sigma dW. \tag{3.1}$$

Definujeme pomocou neho nový proces

$$\rho = tanh(x). \tag{3.2}$$

Ukážeme, že spľňa vlastnosti požadované v časti 3.1. Prvá vlastnosť vyplýva z toho, že

$$\rho(x) = tanh(x) = \frac{sinh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$$

a

$$\frac{2}{e^{2x}+1} \in (0;2),$$

pretože $e^{2x} \in (0;\infty)$ pre všetky $x \in (-\infty;\infty)$. Ďalej dokážeme platnosť druhej vlastnosti stochastického procesu (3.6), ktorý bude odvodený z (3.1) a (3.2). Všimneme si, že platí

$$\rho(x) = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1} \geq 1 - \frac{2}{e^{2x}} = 1 - 2e^{-2x}. \tag{3.3}$$

Vypočítame teraz strednú hodnotu procesu $1-2e^{-2x}$. Pripomeňme si, že proces x má normálne rozdelenie s parametrami $N(\mu t, \sigma^2 t)$ (pozri napr. [14]). Potom platí:

$$E[1-2e^{-2x}] = 1 - 2E[e^{-2x}] = 1 - 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-2x} e^{\frac{-(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} dx. \tag{3.4}$$

Predpokladajme, že platí $\mu > \sigma^2$. Ukážeme čomu sa rovná (3.4).

$$\begin{aligned}
1 - 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-2x} e^{\frac{-(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} dx = \\
1 - 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{\frac{-(x-(\mu t-2\sigma^2 t))^2+(\mu t-2\sigma^2 t)^2-\mu^2 t^2}{2\sigma^2 t}} dx = \\
1 - 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{\frac{-(x-(\mu t-2\sigma^2 t))^2}{2\sigma^2 t}} e^{-2\mu t+2\sigma^2 t} dx = \\
1 - 2e^{-2\mu t+2\sigma^2 t}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{\frac{-(x-(\mu t-2\sigma^2 t))^2}{2\sigma^2 t}} = \\
= 1 - 2e^{-2\mu t+2\sigma^2 t}.
\end{aligned}$$

Dostávame

$$E[1-2e^{-2x}] = 1 - 2e^{-2\mu t+2\sigma^2 t} = 1 - 2e^{2t(-\mu+\sigma^2)}. \tag{3.5}$$

Z čoho vyplýva, že

$$\lim_{t\to\infty} 1 - 2e^{2t(-\mu+\sigma^2)} = 1.$$

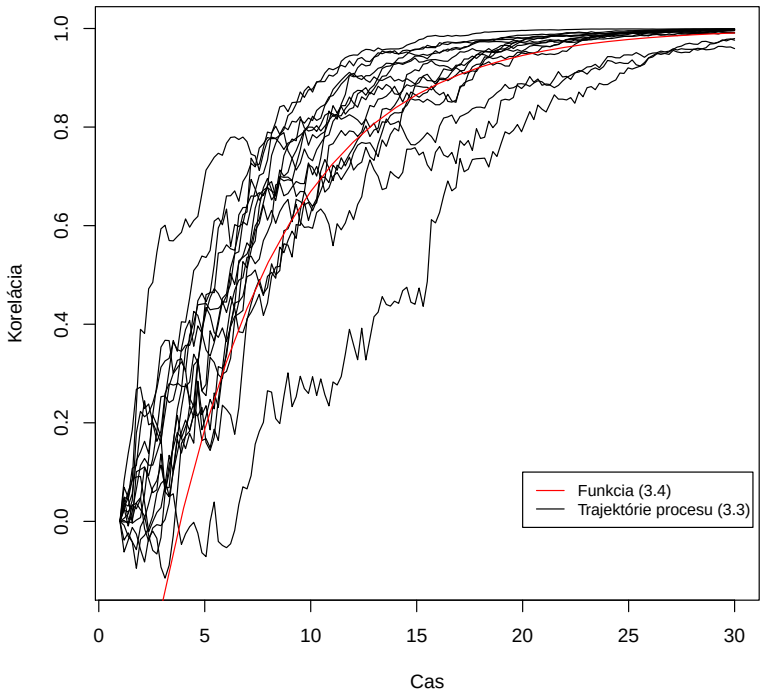
A z platnosti (3.3) vyplýva, že

$$\lim_{t\to\infty} E[\rho(x)] = 1.$$

Teraz môžeme aplikovať Itovu lemu na (3.1) a (3.2):

$$\begin{aligned} d\rho &= \frac{\partial tanh(x)}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 tanh(x)}{\partial x^2}(dx)^2 \\ &= sech(x)^2(\mu dt + \sigma dW) - tanh(x)sech^2(x)\sigma^2 dt \\ &= sech^2(x)[(\mu - tanh(x)\sigma^2)dt + \sigma dW] \\ &= (1-\rho^2)[(\mu - \rho\sigma^2)dt + \sigma dW]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Obrázok 3.1 znázorňuje 15 simulácii Wienerového procesu (3.6) a deterministickú funkciu (3.5), ktorá je dolným ohraničením skutočnej strednej hodnoty procesu (3.6). Používame parametre $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.1$.



Obr. 3.1: Príklad 15 náhodných simulácii procesu (3.6) s parametrami $\mu = 0.1$ a $\sigma = 0.1$ spolu so strednou hodnotou procesu $1 - 2e^{-2x}$ (pravá strana vzorca (3.5))

Samozrejme, sú aj iné možnosti voľby funkcie (3.2) (pozri napríklad [15]). Preto aj existuje veľa iných stochastických procesov, ktoré by splnili podmienky (3.1). V ďalšej kapitole ukážeme ešte jeden proces, s ktorým neskôr (vo 4 kapitole) budeme pracovať.

3.3 Jakobího proces korelácie

V predchádzajúcej kapitole sme dokazovali, že stredná hodnota procesu (3.6) pri $t \to \infty$ konverguje k 1. Nedokazovali sme to priamo z tvaru strednej hodnoty procesu, pretože nie vždy je možné odvodiť explicitný vzťah pre strednú hodnotu stochastického procesu. V tejto kapitole ukážeme proces, ktorého strednú hodnotu poznáme:

$$d\rho = \kappa(\theta - \rho)dt + \sqrt{\sigma\rho(1-\rho)}dW, \tag{3.7}$$

kde $\kappa, \theta, \sigma 0$ sú parametre. Vzorec (3.7) je Jakobího proces a má známu pre nás vlastnosť „mean-reversion“. Čiže pri $t \to \infty$ sa približuje k hodnote θ. V literatúre občas sa nazýva ako *Writov − Fisherov* proces (pozri [17]). Aby (3.7) vyhovoval podmienkam položeným v kapitole 3.1, stačí aby platilo $\theta \in (0; 1)$. Ako už bolo povedané, výhodou (3.7) je možnosť odvodenia explicitného vzťahu pre strednú hodnotu $E(\rho)$. Odvodenie čitateľ môže nájsť v [18]. Stredná hodnota procesu je rovná

$$E[\rho] = \theta + e^{-\kappa t}(\rho(0) - \theta). \tag{3.8}$$

V kapitole 4 ukážeme, ako vzťah (3.8) podstatne zjednoduší výpočet pri hľadaní približného riešenia rovnice pre cenu dlhopisu.

4 Konvergenčný model Vašíčkovho typu so stochastickou koreláciou

V tejto kapitole zostrojíme konvergenčné modely Vašíčkovho typu so stochastickou koreláciou, ktorú sme odvodili v tretej kapitole, ukážeme možne cesty vyriešenia týchto problémov a nakoniec odvodíme presnosť aproximácie navrhnutej nami v kapitole 4.3.

Predpokladajme, že máme Vašíčkov konvergenčný model (2.17). Doplníme ho rovnicou (3.6) a dostaneme konvergenčný model úrokovej miery so stochastickou koreláciou:

$$\begin{aligned} dr_d &= [a + b(r_e - r_d)]dt + \sigma_d dw_d, \\ dr_e &= c(d - r_e)dt + \sigma_e dw_e, \\ d\rho &= (1-\rho^2)[(\mu - \rho\sigma^2)dt + \sigma dw_\rho], \end{aligned} \tag{4.1}$$

pričom

$$cov(dw_e, dw_d) = \rho dt.$$

Ďalej predpokladáme, že existuje korelácia len medzi r_e a r_d, tým pádom členy $\rho_{\rho r_e}$=$\rho_{\rho r_d}$=0. Na základe kapitoly 2.4 vieme napísať PDR pre cenu dlhopisu v modeli (4.1):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + [a + b(r_e - r_d)]\frac{\partial P}{\partial r_d} + c(d - r_e)\frac{\partial P}{\partial r_e} + \frac{\sigma_d^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} + \frac{\sigma_e^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} + \\ (1-\rho^2)(\mu - \rho\sigma^2)\frac{\partial P}{\partial \rho} + (1-\rho^2)\sigma\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} + \rho\sigma_d\sigma_e\frac{\partial^2 P}{\partial r_e \partial r_d} - r_d P = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Bohužiaľ analytické riešenie rovnice (4.2) sa nám nepodarilo nájsť, preto sme ju skúšali vyriešiť numericky. Rozhodli sme sa použiť metódu sietí, o ktorej čitateľ nájde viac v [11]. Diskretizujeme priestor podľa štyroch premenných: čas, domáca úroková miera, európska úroková miera a korelácia. Koreláciu sme ohraničili zdola 0, zhora, samozrejme, 1. Úrokovú mieru sme diskreditovali na intervale [0,1], čas bežal od 0 po zvolenú hornú hranicu. Poznáme počiatočnú podmienku $P(0, r_e, r_d, \rho) = 1$. Musíme však poznať aj okrajové podmienky našej úlohy. To sú prípady $P(\tau, 0, r_d, \rho)$, $P(\tau, 1, r_d, \rho)$, $P(\tau, r_e, 0, \rho)$, $P(\tau, r_e, 1, \rho)$, $P(\tau, r_e, r_d, 0)$ a $P(\tau, r_e, r_d, 1)$. Ceny domáceho dlhopisu v týchto stavoch sme aproximovali riešeniami dvojfaktorového modelu (2.17) v každom zo šiestich prípadov. Je pravda, že nepoznáme mieru aproximácie a nemáme istotu v tom, že tieto okrajove podmienky by boli platné pre (4.2). Parametre pre Vašíčkov model používame také isté ako autor v [5]. Bohužiaľ táto schéma je nestabilná, riešenie pre cenu domáceho dlhopisu osciluje v extrémne veľkých hodnotách. Podmienku stability sa nám žiaľ nepodarilo odvodiť. Taktiež sme skúšali numerické schémy, ktoré nevyžadajú okrajové podmienky. Existuje *Fichera theory*, ktorá definuje podmienky, pri ktorých numerická schéma nepotrebuje poznať okrajové podmienky (viac o tom čitateľ nájde v [12]). Výsledky však boli zase neuspokojujúce. Možno sa „zlato“ skrýva v komplikovanejších metódach ako napríklad ADE (z angl. *alternating direction explicit*). Čitateľovi, ktorého zaujíma daná problematika, odporúčame prácu [12].

4.1 Aproximácia riešenia Vašíčkovho modelu so stochastickou koreláciou

V tejto podkapitole ukážeme, ako sa dá aproximovať riešenie Vašíčkovho modelu so stochastickou koreláciou. Postupujeme na základe [15]. V práci autorka používa iný

proces ρ, avšak postup sa dá použiť aj v našom prípade. Konštruovať model budeme analogicky ako v kapitole 2.4. Vo všeobecnosti sú trhové ceny rizika funkciami času, domácej a európskej úrokovej miery a korelácie. My predpokladáme, že trhové ceny rizika sú konštantné. Dostávame takúto PDR:

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau}+[a-\lambda_d\sigma_d+b(r_e-r_d)]\frac{\partial P}{\partial r_d}+[c(d-r_e)-\lambda_e\sigma_e]\frac{\partial P}{\partial r_e}+\frac{\sigma_d^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2}+\frac{\sigma_e^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2}+$$
$$(\mu(\rho)-\lambda\sigma(\rho))\frac{\partial P}{\partial \rho}+\sigma(\rho)\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}+\rho\sigma_d\sigma_e\frac{\partial^2 P}{\partial r_e \partial r_d}-r_d P=0, \tag{4.3}$$

kde $\mu(\rho)=(1-\rho^2)(\mu-\rho\sigma^2)$ a $\sigma(\rho)=(1-\rho^2)\sigma$. Riešenie hľadáme v tvare

$$P(r_d,r_e,\rho,\tau)=exp(A(\rho,\tau)-D(\tau)r_d-C(\tau)r_e). \tag{4.4}$$

Dosadením (4.4) do (4.3) získame sústavu PDR:

$$\dot{D}=1-bD,$$
$$\dot{C}=bD-cC,$$
$$\frac{\partial A}{\partial \tau}=(\mu(\rho)-\lambda\sigma(\rho))\frac{\partial A}{\partial \rho}+\frac{1}{2}\sigma^2(\rho)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \rho^2}+\left(\frac{\partial A}{\partial \rho}\right)^2\right)+(-a+\lambda_d\sigma_d)D$$
$$+(-cd+\lambda_e\sigma_e)C+\frac{\sigma_d^2}{2}D^2+\frac{\sigma_e^2}{2}C^2+\rho\sigma_d\sigma_e DC.$$

Riešenie prvých dvoch rovníc poznáme a je dané vzťahmi (2.24), (2.25). Riešenie tretej rovnice budeme aproximovať. Pre zjednodušenie zápisov zavedieme substitúcie:

$$g_1=(-a+\lambda_d\sigma_d)D+(-cd+\lambda_e\sigma_e)C+\frac{\sigma_d^2}{2}D^2+\frac{\sigma_e^2}{2}C^2+\rho(y)\sigma_d\sigma_e DC,$$
$$g_2=\sigma_d\sigma_e DC,$$
$$\hat{\mu}(\rho)=\mu(\rho)-\lambda\sigma(\rho).$$

Teraz substituujeme $x=1-\rho$ a následne spravíme Taylorov rozvoj funkcii $A(x,\tau)$, $\hat{\mu}(x)$ a $\sigma(x)$ v okolí 0. Tým pádom

$$\frac{\partial A}{\partial \tau}+\hat{\mu}(x)\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{1}{2}\sigma^2(x)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2\right)=(g_1(\tau)+g_2(\tau))-g_2(\tau)x, \tag{4.5}$$

kde g_1, g_2 sú spomínane vyššie a $\sigma^2(x)=(-x^2+2x)\sigma$, $\hat{\mu}(x)=(-x^2+2x)(\mu-\sigma^2+x\sigma^2-\lambda\sigma)$. Aplikujeme Taylorov rozvoj na $\hat{\mu}(x)=\mu_0+\mu_1x+\mu_2x^2+\mu_3x^3+...$, $\sigma^2(x)=\sigma_0+\sigma_1x+\sigma_2x^2+\sigma_3x^3+....$ Dostaneme:

$$\mu_0=0;\mu_1=2(\mu-\sigma^2-\lambda\sigma);\mu_2=2(-\mu-\sigma^2+\lambda\sigma);\mu_3=6\sigma^2, \tag{4.6}$$

$$\sigma_0 = 0; \sigma_1 = 0; \sigma_2 = 2\sigma^2; \sigma_3 = 0; \sigma_4 = -24\sigma^2. \tag{4.7}$$

Ostatné členy Taylorového rozvoja sú nulové. Funkciu $A(x, \tau)$ rozpíšeme podobne:

$$A(x, \tau) = A_0(\tau) + A_1(\tau)x + A_2(\tau)x^2 + ... \tag{4.8}$$

Po dosadení (4.6), (4.7), (4.8) do (4.5) a úpravách dostávame sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc (ďalej ODR):

$$\begin{aligned}
\dot{A}_0 &= g_1 + g_2, \\
\dot{A}_1 &= -g_2 - \mu_1 A_1, \\
\dot{A}_2 &= -\mu_2 A_1 + \frac{1}{2}\sigma_2 A_1^2 - (2\mu_1 - \sigma_2)A_2, \\
\dot{A}_3 &= -(3\mu_1 - 3\sigma_2)A_3 + (\sigma_3 - 2\mu_2)A_2 + 2\sigma_2 A_1 A_2 + \frac{1}{2}\sigma_3 A_1^2 - \mu_3 A_1.
\end{aligned}$$

My sa zastavíme na člene rozvoja A_3 avšak dalo by sa pokračovať aj ďalej. Vyriešením danej sústavy sa dopracujeme k aproximatívnemu riešeniu. Riešime sústavu numericky v R-ku pomocou funkcie *ode* [13]. Hlavnou výhodou *ode* je to, že funkcia vie rozlíšiť, či ide o stiff[1] ODR alebo nie a na základe toho zvolí vhodnú numerickú metódu. Detailnejšie sa o tom dá dočítať v [21].

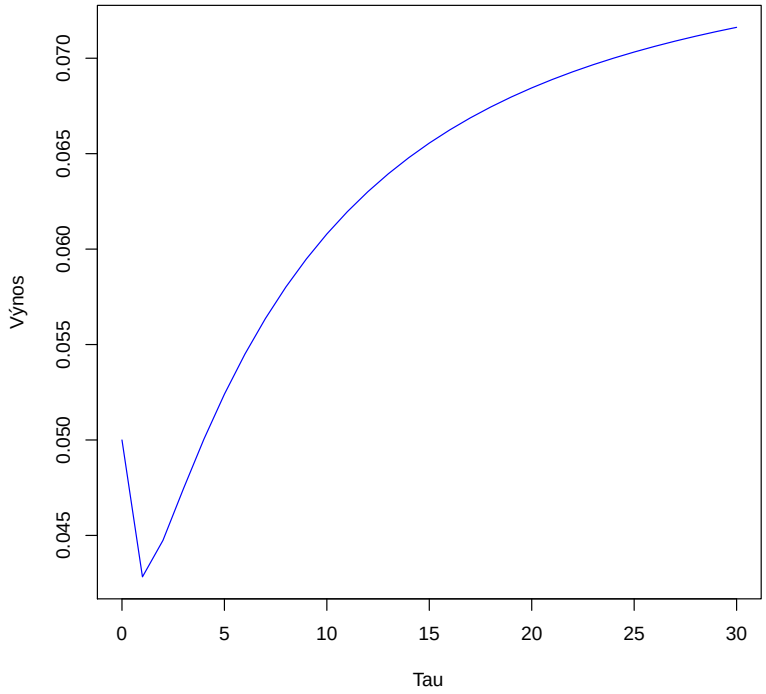
Používame nasledovné základné parametre (ako autor v [3]): $a = 0.0938, b = 3.67, c = 0.2087, d = 0.035, \sigma_d = 0.032, \sigma_u = 0.016, \lambda_d = 3.315, \lambda_u = -0.655, r_d = 0.05, r_u = 0.04$. Do stochastickej korelácie dosadzujeme $\mu = 0.5, \sigma = 0.1, \lambda = 0.5$.

V tabuľke 2 uvádzame niektoré hodnoty z časovej štruktúry výnosových kriviek v závislosti od posledného použitého člena rozvoja funkcie $A(\rho, \tau)$. Ako záver uvádzame obrázok 4.1 výnosovej krivky, ktorá zodpovedá rozvoju do člena A_3.

[1]Existujú problémy, ktoré aj pre silne stabilné metódy dávajú nestabilné riešenie pre veľké h (krok). Na druhej strane, keď h bude maličké, tak sa zvýši výpočtová náročnosť' a výsledok môže byt' zaťažený zaokrúhľovacími chybami. Takéto úlohy sa volajú stiff úlohy alebo úlohy s veľkým tlmením. [20]

Rozvoj do člena	A_0	A_1	A_2	A_3
[1]	0.5	0.5	0.5	0.5
[2]	0.04279380	0.04282213	0.04282741	0.04282884
[5]	0.04991431	0.04999188	0.05002582	0.05004491
[10]	0.05936071	0.05942724	0.05946114	0.05948314
[15]	0.06469671	0.06474691	0.06477316	0.06479057
[20]	0.06789495	0.06793387	0.06795438	0.06796806
[25]	0.06994624	0.06997760	0.06999416	0.07000523
[30]	0.07134418	0.07137029	0.07138409	0.07139332

Tabuľka 2: Vybrané hodnoty z časovej štruktúry úrokových mier



Obr. 4.1: Výnosová krivka vo Vašíčkovom modeli so stochastickou koreláciou

4.2 Aproximácia stochastickej korelácie z transformovaním na dvojfaktorový model

Vrátime sa do pôvodného tvaru trojfaktorového modelu (4.1).

$$\begin{aligned} dr_d &= [a + b(r_e - r_d)]dt + \sigma_d dw_d, \\ dr_e &= c(d - r_e)dt + \sigma_e dw_e, \\ d\rho &= (1 - \rho^2)[(\mu - \rho\sigma^2)dt + \sigma dW], \end{aligned}$$

pričom

$$cov(dw_e, dw_d) = \rho dt.$$

Je dobre vidno, že rovnica pre stochastickú koreláciu systému (4.1) nezávisí od zvyšných dvoch rovníc. Čiže mohli by sme ju vyriešiť separátne. Odvodiť analytické riešenie takej SDR nevieme, preto aproximujeme ρ strednou hodnotou tohto procesu $E(\rho)$. Vieme, že $\rho = tanh(x)$, kde $x \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$. Na druhej strane stredná hodnota spojitého náhodného procesu je integrál (pozri napr. [14])

$$E(\rho) = E(tanh(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} tanh(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} exp\left(-\frac{(x - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right) dx. \tag{4.9}$$

Daný integrál môžeme vyrátať numericky, čo ďalej aj spravíme. Teraz zostrojíme PDR pre cenu domáceho dlhopisu na základe prvých dvoch rovníc (4.1), pričom predpokladáme, že korelácia ρ je deterministická funkcia času $\rho(t)$. Odvodenie PDR pre cenu dlhopisu je rovnaké ako v prípade konštantnej korelácie, vo výslednej PDR je iba konštantná ρ nahradená funkciou $\rho(t)$. Dostávame:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + [a + b(r_e - r_d) - \lambda_d \sigma_d]\frac{\partial P}{\partial r_d} + [c(d - r_e) - \lambda_e \sigma_e]\frac{\partial P}{\partial r_e} + \frac{\sigma_d^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} + \\ \rho(T - \tau)\sigma_d \sigma_e \frac{\partial^2 P}{\partial r_e \partial r_d} - r_d P = 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

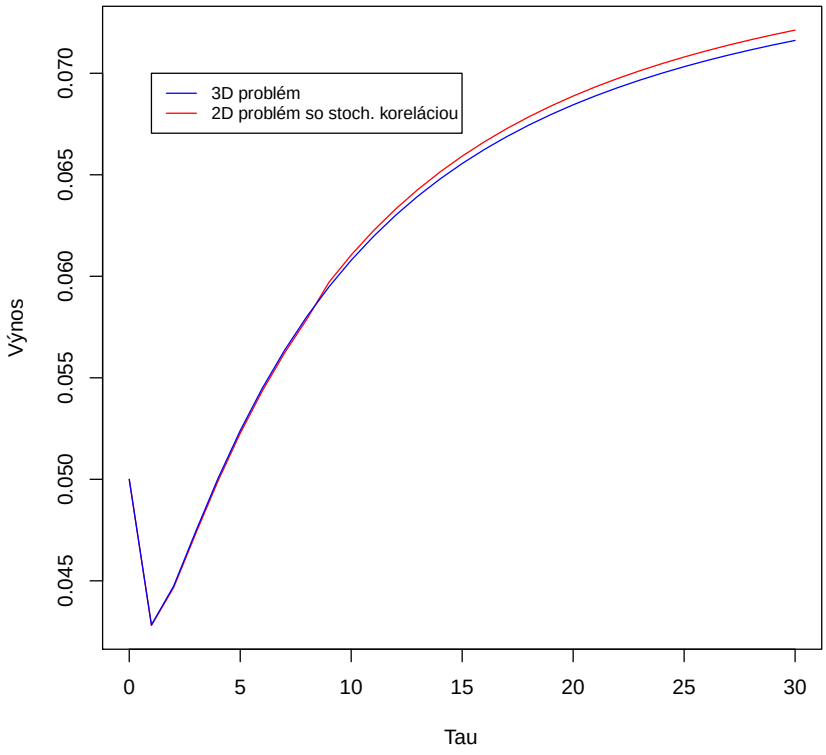
Rovnicu (4.10) riešime analogicky ako v kapitole 2.3.1. Jediný problém nastane pri výpočte integrálu:

$$\int_0^\tau \rho(T - s)D(s)C(s)ds. \tag{4.11}$$

Integrál (4.11) vyzerá nasledovne:

$$\int_0^\tau D(s)C(s)\left[\int_{-\infty}^{\infty} tanh(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T - s)}} exp\left(-\frac{(x - \nu(T - s))^2}{2\sigma^2(T - s)}\right) dx\right] ds. \tag{4.12}$$

Vnútorný integrál vyriešime numericky pre každé τ od 0 po 30 a potom použijeme explicitný vzťah (2.27) na výpočet celého výrazu v každom čase τ. Numericky počítame v R-ku pomocou funkcie *quadinf*, ktorá je založená na metódach kvadratického integrovania (viac o tom [16]). Používame rovnaké parametre ako v kapitole 4.1. Na obrázku 4.2 porovnávame časové štruktúry výnosových kriviek získanej v tejto kapitole a v kapitole 4.1.



Obr. 4.2: Porovnanie výnosových kriviek v 2-faktorovom aproximatívnom modeli (kapitola 4.2) a 3-faktorovom modeli (kapitola 4.1)

4.3 Aproximácia modelu pri voľbe vhodného procesu korelácie

V tejto kapitole ukážeme, ako sa dá obísť numerické integrovanie strednej hodnoty voľbou „slušného“ procesu korelácie. Príklad takého procesu sme ukázali v kapitole 3.3:

$$d\rho = \kappa(\theta - \rho)dt + \sqrt{\sigma\rho(1-\rho)}dW. \tag{4.13}$$

Číže máme systém

$$\begin{aligned} dr_d &= [a + b(r_e - r_d)]dt + \sigma_d dw_d, \\ dr_e &= c(d - r_e)dt + \sigma_e dw_e, \\ d\rho &= \kappa(\theta - \rho)dt + \sqrt{\sigma\rho(1-\rho)}dw, \end{aligned} \tag{4.14}$$

pričom znovu $cov(dw_d, dw) = 0$, $cov(dw_e, dw) = 0$. Na aproximovanie ceny dlhopisu použijeme PDR pre cenu dlhopisu odvodenú z prvých dvoch rovníc (4.14):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + [a + b(r_e - r_d) - \lambda_d\sigma_d]\frac{\partial P}{\partial r_d} + [c(d - r_e) - \lambda_e\sigma_e]\frac{\partial P}{\partial r_e} + \frac{\sigma_d^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} + \\ \rho(T-\tau)\sigma_d\sigma_e\frac{\partial^2 P}{\partial r_e \partial r_d} - r_d P = 0, \end{aligned} \tag{4.15}$$

pričom $cov(dw_d, dw) = \rho$ a aproximujeme ρ jej strednou hodnotou (3.8). Zoberieme teda

$$\rho(t) = \theta + e^{-\kappa t}(\rho(0) - \theta). \tag{4.16}$$

Podobne ako v predchádzajúcej kapitole sa stretneme z integrálom

$$\int_0^\tau \rho(T-s)D(s)C(s)ds. \tag{4.17}$$

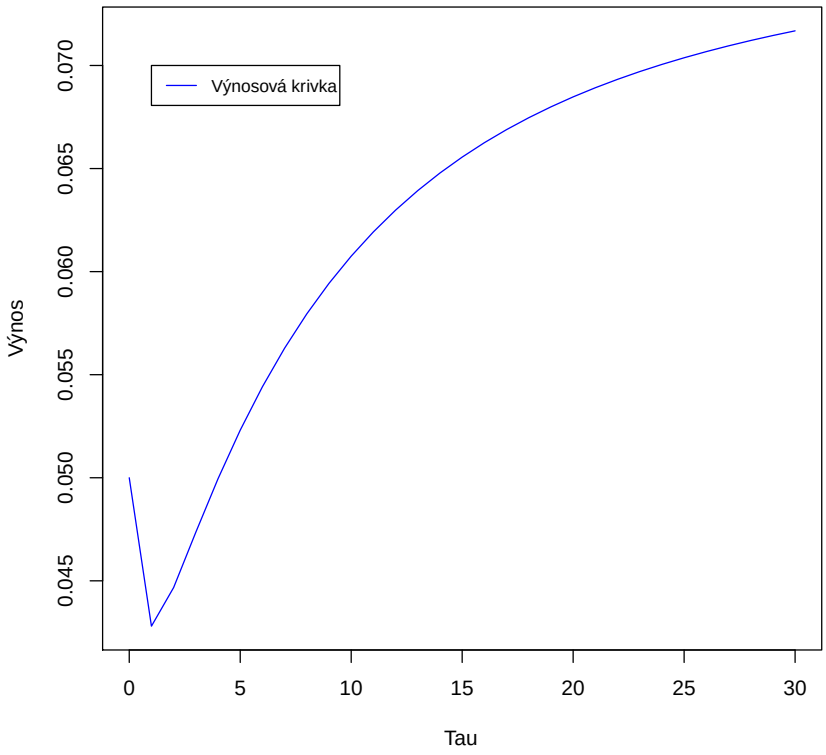
Po dosadení (4.16) do (4.17) dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^\tau [\theta + e^{-\kappa(T-s)}(\rho(0) - \theta)]D(s)C(s)ds = \theta\int_0^\tau D(s)C(s)ds + \\ e^{-\kappa T}\rho(0)\int_0^\tau e^{\kappa s}D(s)C(s)ds + e^{-\kappa T}\theta\int_0^\tau e^{\kappa s}D(s)C(s)ds. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Integral $\int_0^\tau D(s)C(s)ds$ sme vyriesili v kapitole 2.3 (2.27). Tým pádom nepoznáme len hodnotu $\int_0^\tau e^{\kappa s}D(s)C(s)ds$. Tento integrál nie je problematický a vieme ho vyriešiť analyticky:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau e^{\kappa s}D(s)C(s)ds = \frac{c(e^{\tau(\kappa-b)} - 1)}{b - \kappa} + \frac{b(e^{\tau(\kappa+c)} - 1)}{c + \kappa} + \\ \frac{b(1 - e^{\tau\kappa})}{\kappa} + \frac{c(e^{\tau\kappa} - 1)}{k}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Teraz stačí dosadiť (4.19) do (4.18) a získame riešenie PDR pre cenu dlhopisu. Klasický používame základne parametre z kapitoly (4.1) a $\theta = 0.8$, $\kappa = 1$, $\rho(0) = 0.5$. Obrázok 4.3 znázorňuje časovú štruktúru výnosovej krivky v danom modeli.



Obr. 4.3: Výnosová krivka v modeli s vhodnou koreláciou (4.14)

4.4 Presnosť aproximácie ceny dlhopisu vo Vašíčkovom modeli so stochastickou koreláciou

V danej kapitole skúsime odvodiť presnosť aproximácie vo Vašíčkovom modeli so „slušnou“ koreláciou (viď. kapitola 4.3). Inštrumentom na porovnanie bude Taylorov rozvoj. Najprv nájdeme rozvoj riešenia s funkciou $E[\rho(t)]$. Potom ukážeme, ako sa dá rozvinúť presne riešenie a porovnáme výsledky.

4.4.1 Rozvoj aproximatívneho riešenia

Predpokladáme, že máme model, ktorý sme aproximovali v kapitole (4.3).

$$dr_d = [a + b(r_e - r_d)]dt + \sigma_d dw_d,$$
$$dr_e = [c(d - r_e)]dt + \sigma_e dw_e,$$
$$d\rho = \kappa(\theta - \rho)dt + \sqrt{\sigma\rho(1-\rho)}dW.$$

Tretiu rovnicu zanedbáme a ρ nahradíme jeho strednou hodnotou (označujeme ju $\rho(t)$). Z prvých dvoch rovnic vytvoríme náš model. Na základe kapitoly 2 vieme, ako vyzerá PDR pre cenu domáceho dlhopisu. Hľadané riešenie je v tvare (2.19), kde ($b \neq c$). Pre jednoduchosť predpokladáme, že trhové ceny rizika sú konštantne nulové. Môžeme to však spraviť bez ujmy na všeobecnosti, lebo pri nenulových konštantách λ_d, λ_e by stačilo upraviť parametre $a \to a - \lambda_d\sigma_d$, $d \to d - \frac{\lambda_e\sigma_e}{c}$. Teda máme systém rovníc:

$$D(\tau) = \frac{1 - e^{-b\tau}}{b},$$
$$C(\tau) = \frac{1}{c(c-b)}[c(1 - e^{-b\tau}) - b(1 - e^{-b\tau})],$$
$$A(\tau) = \int_0^\tau [-aD(y) - cdC(y) + \frac{\sigma_d^2}{2}D(y)^2 +$$
$$\frac{\sigma_e^2}{2}C(y)^2 + \sigma_d\sigma_e\rho(T-y)D(y)C(y)]dy.$$

Teraz urobíme Taylorov rozvoj pre $D(\tau)$, $C(\tau)$, $A(\tau)$ v bode 0 do rádu 4. Derivácie členov $D(\tau), C(\tau)$ sú priamočiare, preto postup derivovania ukazovať nebudeme. Ukážeme však ako by sa zderivovala funkcia $A(\tau)$. Zrejme

$$\dot{A}(0) = -aD(0) - cdC(0) + \frac{\sigma_d^2}{2}D(0)^2 + \frac{\sigma_e^2}{2}C(0)^2 + \sigma_d\sigma_e\rho(T)D(0)C(0).$$

Aby sme skrátili zápisy, ďalej ako C, D a ρ označujeme funkčné hodnoty $C(\tau)$, $D(\tau)$, $\rho(T-\tau)$ v bode $\tau = 0$, horným indexom označujeme derivacie týchto funkcií v bode $\tau = 0$ (napríklad $\rho^{(2)} = \rho''(T)$, $C^{(2)} = C''(0)$). Potom

$$A^{(2)}(0) = -aD^{(1)} - cdC^{(1)} + \sigma_d^2 DD^{(1)} + \sigma_e^2 CC^{(1)} + \sigma_d\sigma_e[-\rho^{(1)}DC + \rho D^{(1)}C + \rho DC^{(1)}].$$

$$A^{(3)}(0) = -aD^{(2)} - cdC^{(2)} + \sigma_d^2(DD^{(2)} + D^{(1)}D^{(1)}) + \sigma_e^2(CC^{(2)} + C^{(1)}C^{(1)}) +$$
$$\sigma_d\sigma_e[\rho^{(2)}DC + \rho D^{(2)}C + \rho DC^{(2)} + 2\rho D^{(1)}C^{(1)} - 2\rho^{(1)}DC^{(1)} - 2\rho^{(1)}D^{(1)}C].$$

$$A^{(4)}(0) = -aD^{(3)} - cdC^{(3)} + \sigma_d^2(DD^{(3)} + 3D^{(2)}D^{(1)}) + \sigma_e^2(CC^{(3)} + 3C^{(2)}C^{(1)}) +$$
$$\sigma_d\sigma_e[-\rho^{(3)}DC + \rho D^{(3)}C + \rho DC^{(3)} + 3\rho D^{(2)}C^{(1)} + 3\rho D^{(1)}C^{(2)} + 3\rho^{(2)}D^{(1)}C$$
$$+3\rho^{(2)}DC^{(1)} - 3\rho^{(1)}DC^{(2)} - 3\rho^{(1)}D^{(2)}C - 6\rho^{(1)}D^{(1)}C^{(1)}].$$

Zaujímavé je, že väčšina členov vypadne kvôli nulovosti funkčných hodnôt $C(0)$ a $D(0)$. Výsledne hodnoty uvádzame v tabuľke 3. Pozrieme sa, ako vyzerá rozvoj logaritmu ceny

Derivácia i-tého rádu	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$D^i(0)$	0	1	$-b$	b^2	$-b^3$
$C^i(0)$	0	0	b	$-b(c+b)$	$b(c^2+bc+b^2)$
$A^i(0)$	0	0	$-a$	$ab - cdb + \sigma_d^2$	$-ab^2 + cdb(c+b) - 3b\sigma_d^2 + 3b\sigma_e\sigma_d\rho(T)$

Tabuľka 3: Výpočet derivácii do 4-ho radu potrebných pre Taylorov rozvoj

domáceho dlhopisu:

$$lnP = A(\tau) - D(\tau)r_d - C(\tau)r_e = (A(0) - D(0)r_d - C(0)r_e) + (\dot{A}(0) - \dot{D}(0)r_d - \dot{C}(0)r_e)\tau$$
$$+\frac{1}{2}(A^{(2)}(0) - D^{(2)}(0)r_d - C^{(2)}(0)r_e)\tau^2 + \frac{1}{6}(A^{(3)}(0) - D^{(3)}(0)r_d - C^{(3)}(0)r_e)\tau^3$$
$$+\frac{1}{24}(A^{(4)}(0) - D^{(4)}(0)r_d - C^{(4)}(0)r_e)\tau^4 + o(r^4). \tag{4.20}$$

Po dosadení hodnôt z tabuľky 3 do (4.20) dostaneme:

$$lnP^{ap} = A(\tau) - D(\tau)r_d - C(\tau)r_e =$$
$$-r_d\tau + \frac{1}{2}[-a + br_d - br_e]\tau^2 + \frac{1}{6}[ab + cdb + \sigma_d^2 - b^2r_d + b(c+b)r_e]\tau^3$$
$$+\frac{1}{24}[-ab^2 + cdb(c+b) - 3b\sigma_d^2 + 3b\sigma_e\sigma_d\rho(T) + b^3r_d - b(c^2+bc+c^2)r_e]\tau^4 + o(\tau^4).$$

Potom aproximačná domáca úroková miera je

$$R^{ap} = -\frac{lnP^{ap}}{\tau} = A(\tau) - D(\tau)r_d - C(\tau)r_e =$$
$$r_d - \frac{1}{2}[-a + br_d - br_e]\tau - \frac{1}{6}[ab + cdb + \sigma_d^2 - b^2 r_d + b(c+b)r_e]\tau^2$$
$$-\frac{1}{24}[-ab^2 + cdb(c+b) - 3b\sigma_d^2 + 3b\sigma_e\sigma_d\rho(T) + b^3 r_d - b(c^2 + bc + c^2)r_e]\tau^3 + o(\tau^3).$$

Vidíme, že pri $\tau = 0$ $R^{ap} = r_d$. Tým pádom časová štruktúra domácej úrokovej miery sa začína bodom r_d (podobne ako v klasickom riešení). Teraz stačí dosadiť známu funkciu $E[\rho(t)]$ namiesto $\rho(t)$. Výpočet sa bude líšiť len tým, že v $A^{(4)}(0)$ na miesto $\rho(T)$ príde vyraz $E[\rho(T)] = \theta + e^{-\kappa T}(\rho(0) - \theta)$. Tým pádom máme urobený rozvoj aproximatívneho riešenia.

4.4.2 Rozvoj presného riešenia

Vrátime sa k trojrozmernému modelu, ktorý sme odvodili v tretej kapitole.

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + [a + b(r_e - r_d)]\frac{\partial P}{\partial r_d} + c(d - r_e)\frac{\partial P}{\partial r_e} + \frac{\sigma_d^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} + \frac{\sigma_e^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} +$$
$$\mu(\rho)\frac{\partial P}{\partial \rho} + \sigma(\rho)\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} + \rho\sigma_d\sigma_e\frac{\partial^2 P}{\partial r_e \partial r_d} - r_d P = 0.$$

Aj v tomto prípade uvažujeme nulové trhové ceny rizika. V prípade nenulových konštánt λ_d, λ_e a funkci $\lambda_\rho(\rho)$ by sme opäť spravili $a \to a - \lambda_d\sigma_d$, $d \to d - \frac{\lambda_e\sigma_e}{c}$, $\mu(\rho) \to \mu(\rho) - \lambda(\rho)\sigma(\rho)$, takže aj v tomto modeli to robíme bez ujmy na všeobecnosti. Riešenie hľadáme v tvare

$$P(r_d, r_e, \rho, \tau) = exp(A(\rho, \tau) - D(\tau)r_d - C(\tau)r_e),$$

kde

$$\begin{aligned}
\dot{D} &= 1 - bD, \\
\dot{C} &= bD - cC, \\
\frac{\partial A}{\partial \tau} &= \mu(\rho)\frac{\partial A}{\partial \rho} + \frac{1}{2}\sigma^2(\rho)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \rho^2} + \left(\frac{\partial A}{\partial \rho}\right)^2\right) + (-a)D + \\
&\quad (-cd)C + \frac{\sigma_d^2}{2}D^2 + \frac{\sigma_e^2}{2}C^2 + \rho\sigma_d\sigma_e DC.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Rozvoj funkcií D a C poznáme z predchádzajúcej podkapitoly. Treba len rozviť funkciu A. Predpokladajme, že rozvoj A má tvar

$$A(\rho, \tau) = A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + ..., \tag{4.22}$$

kde A_0, A_1, A_2,... sú neznáme koeficienty, ktoré môžu závisieť od ρ. Vieme, že musí platiť $A(\rho,0)=0$ a tým pádom $A_0=0$. Chceme zistiť, čomu sa rovnajú koeficienty A_1, A_2, A_3, A_4. Dosadíme rozvoj funkcii A, C, D do tretej rovnice systému (4.21). Členy, ktoré sú vyššieho radu ako 4 vynecháme. Dostaneme:

$$A_1+2A_2\tau+3A_3\tau^2+4A_4\tau^3=\mu(\rho)\left[\frac{\partial A_0}{\partial\rho}+\frac{\partial A_1}{\partial\rho}\tau+\frac{\partial A_2}{\partial\rho}\tau^2+\frac{\partial A_3}{\partial\rho}\tau^3+\frac{\partial A_4}{\partial\rho}\tau^4\right]+$$
$$\frac{1}{2}\sigma(\rho)\left[\frac{\partial^2 A_0}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial\rho^2}\tau+\frac{\partial^2 A_2}{\partial\rho^2}\tau^2+\frac{\partial^2 A_3}{\partial\rho^2}\tau^3+\frac{\partial^2 A_4}{\partial\rho^2}\tau^4+\left(\frac{\partial A_0}{\partial\rho}\right)^2+2\frac{\partial A_0}{\partial\rho}\frac{\partial A_1}{\partial\rho}\tau+2\frac{\partial A_0}{\partial\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\rho}\tau^2+\right.$$
$$\left.2\frac{\partial A_0}{\partial\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\rho}\tau^3+2\frac{\partial A_0}{\partial\rho}\frac{\partial A_4}{\partial\rho}\tau^4+\left(\frac{\partial A_1}{\partial\rho}\right)^2\tau^2+2\frac{\partial A_1}{\partial\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\rho}\tau^3+2\frac{\partial A_1}{\partial\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\rho}\tau^4+\left(\frac{\partial A_2}{\partial\rho}\right)^2\tau^4\right]-$$
$$a[D_0+D_1\tau+D_2\tau^2+D_3\tau^3+D_4\tau^4]-cd[C_0+C_1\tau+C_2\tau^2+C_3\tau^3+C_4\tau^4]+\frac{1}{2}\sigma_d^2[D_0^2+$$
$$2D_0D_1\tau+(2D_0D_2+D_1^2)\tau^2+(2D_0D_3+2D_1D_2)\tau^3+(2D_0D_4+2D_1D_3+D_2^2)\tau^4]+\frac{1}{2}\sigma_e^2[C_0^2+$$
$$2C_0C_1\tau+(2C_0C_2+C_1^2)\tau^2+(2C_0C_3+2C_1C_2)\tau^3+(2C_0C_4+2C_1C_3+C_2^2)\tau^4]+\rho\sigma_e\sigma_d[D_0C_0+$$
$$(D_1C_0+C_1D_0)\tau+(D_0C_2+D_1C_1+D_2C_0)\tau^2+(D_0C_3+D_1C_2+D_2C_1+D_3C_0)\tau^3$$
$$+(D_0C_4+D_1C_3+D_2C_2+D_3C_1+D_4C_0)\tau^4],$$

kde C_0,...C_4, D_0, ..., D_4 sú známe koeficienty, ktoré čitateľ vie nájsť v tabuľke 3. Teraz porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách τ. Najprv sa pozrieme na členy, ktoré neobsahujú τ.

$$A_1=\mu(\rho)\frac{\partial A_0}{\partial\rho}+\frac{1}{2}\sigma(\rho)\left[\frac{\partial^2 A_0}{\partial\rho^2}+\left(\frac{\partial A_0}{\partial\rho}\right)^2\right]-aD_0-cdC_0+\frac{1}{2}\sigma_d^2D_0^2+\frac{1}{2}\sigma_e^2C_0^2+\rho\sigma_d\sigma_eC_0D_0.$$

Po dosadení hodnôt z tabuľky 3 a $A_0=0$ nám vyjde, že

$$A_1=0.$$

Pokračujeme koeficientami, ktoré majú pri sebe τ.

$$2A_2=\mu(\rho)\frac{\partial A_1}{\partial\rho}+\frac{1}{2}\sigma(\rho)\left[\frac{\partial^2 A_1}{\partial\rho^2}+2\frac{\partial A_0}{\partial\rho}\frac{\partial A_1}{\partial\rho}\right]-$$
$$aD_1-cdC_1+\sigma_e^2C_0C_1+\sigma_d^2D_0D_1+\rho\sigma_d\sigma_e[C_0D_1+C_1D_0].$$

Po dosadení hodnôt dostaneme

$$A_2=-a/2.$$

Analogicky

$$3A_3 = \mu(\rho)\frac{\partial A_2}{\partial \rho} + \frac{1}{2}\sigma(\rho)\left[\frac{\partial^2 A_2}{\partial \rho^2} + 2\frac{\partial A_0}{\partial \rho}\frac{\partial A_2}{\partial \rho} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial \rho}\right)^2\right] -$$

$$aD_2 - cdC_2 + \frac{1}{2}\sigma_d^2(2D_0D_1 + D_2^1) + \frac{1}{2}\sigma_e^2(2C_0C_1 + C_2^1) + \rho\sigma_d\sigma_e[C_0D_2 + C_1D_1 + C_2D_0].$$

Potom

$$A_3 = \left(\frac{ab}{2} - \frac{cdb}{2} + \frac{1}{2}\sigma_d^2\right)/3.$$

A nakoniec

$$4A_4 = \mu(\rho)\frac{\partial A_3}{\partial \rho} + \frac{1}{2}\sigma(\rho)\left[\frac{\partial^2 A_3}{\partial \rho^2} + 2\frac{\partial A_0}{\partial \rho}\frac{\partial A_3}{\partial \rho} + 2\frac{\partial A_1}{\partial \rho}\frac{\partial A_2}{\partial \rho}\right] - aD_3 - cdC_3 +$$

$$\sigma_d^2(D_0D_3 + D_1D_2) + \sigma_e^2(C_0C_3 + C_1C_2) + \rho\sigma_d\sigma_e[C_0D_3 + C_1D_2 + C_2D_1 + C_3D_0].$$

Po dosadení hodnôt nám vyjde

$$A_4 = \left[\frac{-ab^2}{6} + \frac{cdb(b+c)}{6} + \frac{\sigma_d^2 b}{6} + \frac{\rho\sigma_d\sigma_e b}{3}\right]/4.$$

Zhrnieme naše výsledky v tabuľke 4.

Derivácia i-tého rádu	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$D^i(0)$	0	1	$-b$	b^2	$-b^3$
$C^i(0)$	0	0	b	$-b(c+b)$	$b(c^2+bc+b^2)$
$A^i(0)$	0	0	$-a$	$ab - cdb + \sigma_d^2$	$-ab^2 + cdb(b+c) - \sigma_d^2 b + 3\rho\sigma_d\sigma_e b$

Tabuľka 4: Výpočet derivácii do 4-ho rádu potrebných pre Taylorov rozvoj

Logaritmus ceny domáceho dlhopisu v tomto prípade vyzerá nasledovne:

$$lnP^{presne} = A(\tau) - D(\tau)r_d - C(\tau)r_e = -r_d\tau + \frac{1}{2}[-a]\tau^2 + \frac{1}{6}[ab - cdb + \sigma_d^2]\tau^3 +$$
$$\frac{1}{24}[-ab^2 + cdb(b+c) - 3\sigma_d^2 b + 3\rho(T)\sigma_d\sigma_e b]\tau^4 + o(\tau^4).$$

Teraz môžeme vypočítať chybu aproximácie:

$$lnP^{presne} - lnP^{ap} = A(\tau) - D(\tau)r_d - C(\tau)r_e = \frac{1}{24}[3\sigma_e\sigma_d b(\rho - \rho^{(*)}(T))]\tau^4 + o(\tau^4),$$

kde $\rho^{(*)}(T) = \theta + e^{-\kappa T}(\rho(0) - \theta)$ a ρ je hodnota stochastickej korelácie v čase, keď sa ocenuje dlhopis. Súčasne vidíme, prečo je výhodné aproximovať stochastickú koreláciu

práve jej strednou hodnotou. V tomto prípade stredná hodnota člena $o(\tau^4)$ konverguje k nule pre $\tau \to 0$, keďže $E[\rho - \rho^*(T)] \to 0$ pre $\tau \to 0$. To znamená, že ak by sme zvolili ρ^* inak ako strednú hodnotu, chyba by bola tiež $O(\tau^4)$, ale ak zvolíme ρ^* ako stednú hodnotu, môžeme pre malé τ navyše očakávať, že koeficient pri τ^4 bude malý (približovať sa k 0). Máme teda odhadnutú chybu aproximácie, ktorá je 4 radu.

5 Stochastická korelácia vo Fong-Vašíčkovom modeli

V tejto kapitole vnoríme stochastickú koreláciu do Fong-Vašíčkového dvojfaktorového modelu a ukážeme, ako výpočítať aproximáciu ceny dlhopisu podobným postupom, ako sme to spravili v konvergenčnom modeli. Na úvod povieme si základnú informáciu o Fong-Vašíčkovom modeli.

5.1 Dvojfaktorový Fong-Vašíček model

Model bol navrhnutý v roku 1991 v článku [19]. Líši sa od klasického Vašíčkovho modelu tým, že volatilita procesu je stochastický faktor. Je to v súlade s reálnymi pozorovaniami, v ktorých môžeme vidieť slabšie zmeny úrokovej miery v pokojnejších obdobiach a rýchlu zmenu vo volatilnejších. Samotný model vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} dr &= b(a - r)dt + \sqrt{y}dw_r, \\ dy &= c(d - y)dt + v\sqrt{y}dw_y, \end{aligned} \tag{5.1}$$

kde a, b, c, d sú parametre driftov *mean-reversion* procesov a v je ďalší parameter, ktorý kontroluje silu volatility procesu y. Zatiaľ predpokladáme, že korelácia medzi prírastkami Wienorových procesov je konštantná $cov(dw_r, dw_y) = \rho$. Znovu predpokladáme, že trhové ceny rizika sú nulové. Na základe druhej kapitoly vieme odvodiť PDR pre cenu dlhopisu. Ukážeme, ako sa hľadá riešenie v tomto modeli. Postupujeme ako autorka v [23]. Riešenie sa hľadá v tvare

$$P(r, y, \tau) = A(\tau)e^{-D(\tau)r - C(\tau)y}. \tag{5.2}$$

Po dosadení (5.2) do PDR a separovaní členov dostaneme systém ODR:

$$\begin{aligned} \dot{D}(\tau) &= -bD + 1, \\ \dot{C}(\tau) &= -cC - \frac{D^2}{2} - \frac{v^2}{2}C^2 - v\rho DC, \\ \dot{A}(\tau) &= -A(abD + cdC), \end{aligned} \tag{5.3}$$

pričom C(0)=D(0)=0 a A(0)=1. Riešenie prvej rovnici systému poznáme (2.24). Druhá rovnica vyhovuje ODR

$$\dot{C}(\tau) = -cC - \frac{D^2}{2} - \frac{v^2}{2}C^2 - v\rho DC,$$

pričom $C(0) = 0$. Nie je ťažko ju vyriešiť numericky. Po integrácii A a úpravách dostávame:

$$A(\tau) = exp(-ab\int_0^\tau D(u)du - cd\int_0^\tau C(u)du).$$

5.2 Fong-Vašíčkov model so stochastickou koreláciou

My však chceme skonštruovať model so stochastickou koreláciou. Za koreláciu použijeme proces z kapitoly 3.3. Tým pádom máme systém:

$$\begin{aligned} dr &= b(a - r)dt + \sqrt{y}dw_r, \\ dy &= c(d - y)dt + v\sqrt{y}dw_y, \\ d\rho &= \kappa(\theta - \rho)dt + \sqrt{\sigma\rho(1 - \rho)}dw, \end{aligned}$$

pričom

$$cov(dw_r, dw_y) = \rho \tag{5.4}$$

a zvyšné korelácie medzi prírastkami Wienorových procesov sú nulové. Trhové ceny rizika uvažujeme znovu nulové. PDR pre cenu domáceho dlhopisu vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + [b(a - r)]\frac{\partial P}{\partial r} + c(d - y)\frac{\partial P}{\partial y} + \kappa(\theta - \rho)\frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{v^2}{2}y\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \\ \frac{1}{2}y\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\sigma\rho(1 - \rho)\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} + \frac{1}{2}\rho v y\frac{\partial^2 P}{\partial r \partial r y} - rP = 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Ukážeme, že v tomto prípade riešenie (5.6) nemá separovaný tvar.

$$P(r, y, \tau) = A(\tau, \rho)e^{-D(\tau)r - C(\tau)y}, \tag{5.6}$$

s počiatočnými podmienkami $A(\rho,0)=1, D(0)=C(0)=0$. Po dosadení (5.6) do (5.5) a triedení dostaneme

$$\begin{aligned}\left[-\frac{\partial A}{\partial \tau}-baAD-cdAC+\kappa(\theta-\rho)\frac{\partial A}{\partial \rho}+\frac{1}{2}\sigma\rho(1-\rho)\frac{\partial^2 A}{\partial \rho^2}\right]+\\ r\left[-A\dot{D}+bAD-A\right]+y\left[\dot{C}+cC+\frac{v^2}{2}C^2+\frac{1}{2}D^2+\frac{1}{2}\rho vCD\right]=0.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Pre $r\to 0$ a $y\to 0$ dostaneme, že prvá hranatá zátvorka (5.7) musí byť nulová. Zostane nám

$$r\left[-A\dot{D}+bAD-A\right]+y\left[\dot{C}+cC+\frac{v^2}{2}C^2+\frac{1}{2}D^2\right]+\frac{1}{2}\rho vyCD=0. \tag{5.8}$$

Posledný sčítanec obsahuje premennú ρ, ktorá však nemá ako vzniknúť z ostatných členov. Musí teda platiť, že $C(\tau)D(\tau)=0$. Pre $y\to 0$ však dostaneme

$$A\left[-\dot{D}+bD-1\right]=0, \tag{5.9}$$

z čoho ziskame funkciu $D(\tau)$, ktorá je nenulová. Preto by mala byť funkcia C nulová. Dosadením $C(\tau)=0$ a (5.9) do (5.8) však dostaneme

$$\frac{1}{2}yD^2=0,$$

čo je spor.

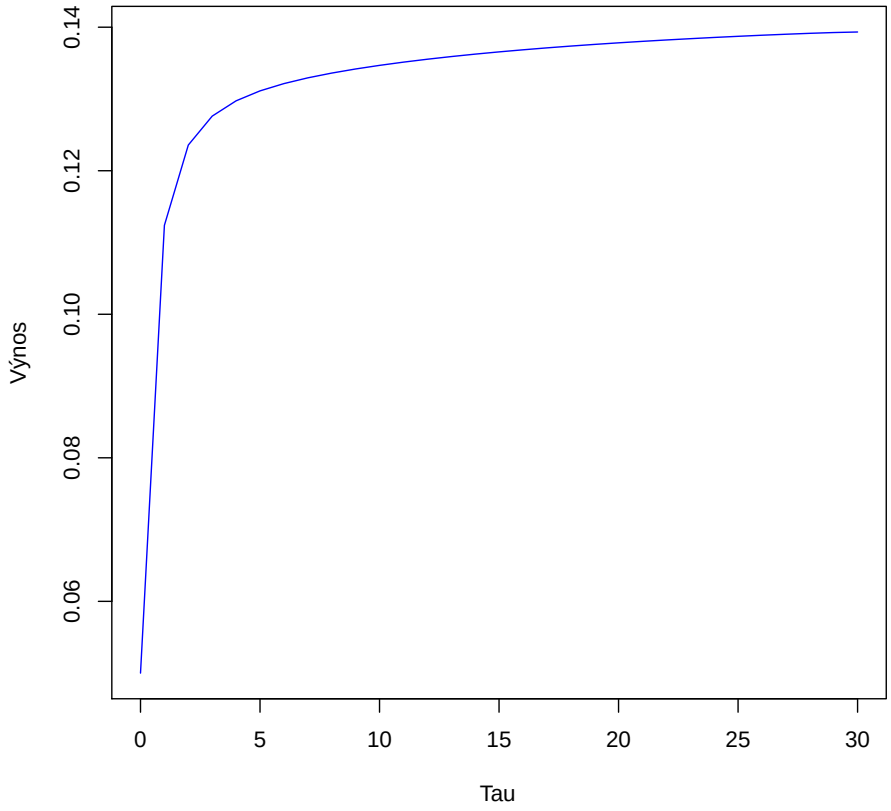
Preto budeme postupovať podobne ako v kapitole 4.2. Substituujeme stochastickú koreláciu jej strednou hodnotou. Čiže máme systém (5.1) s podmienkou

$$cov(dw_r,dw_y)=\rho(t)=\theta+exp(-\kappa t)[\rho(0)-\theta].$$

Po odvodení PDR a dosadení predpokladaného riešenia (5.2) dostaneme analogický systém ako v kapitole (5.1) ale so stochastickou koreláciou:

$$\begin{aligned}\dot{D}(\tau)&=-bD+1,\\ \dot{C}(\tau)&=-cC-\frac{D^2}{2}-\frac{v^2}{2}C^2-v\rho(T-t)DC,\\ \dot{A}(\tau)&=-A(abD+cdC).\end{aligned}$$

Riešenie prvej rovnice vieme, druhú a tretiu rovnicu vyriešime numericky. Používame pre ilustráciu parametre: $a=0.0938, b=3.67, c=0.2087, d=0.035, \sigma_d=0.032, \sigma_u=0.016, r=0.05, y=0.04, \mu=0.8, \sigma=0.1, \kappa=1, \rho_0=0.5$. Za „nový“ parameter v dosadíme hodnotu 0.1. Obrázok 5.1 znázorňuje časovú štruktúru úrokovej miery vo Fong-Vašíčkovom modeli so stochastickou koreláciou.



Obr. 5.1: Fong-Vašíčkov model so stochastickou koreláciou

Záver

V našej práci sme skúmali konvergenčné modely úrokových mier. V prvej kapitole sme vysvetlili základne pojmy, ktoré sa tykajú úrokových mier a dlhopisov. V druhej kapitole sme sa postupne dopracovali ku konvergenčným modelom, odvodili sme rovnicu pre cenu domáceho dlhopisu a vypočítali sme riešenie príslušnej parciálnej diferenciálnej rovnice s konštantnou koreláciou. V tretej kapitole sme povedali, prečo by bolo vhodné považovať koreláciu za nekonštantnú potom sme ukázali, ako by sa dalo namodelovať koreláciu pomocou stochastického procesu. Následne sme vnorili daný proces do konvergenčného modelu. Potom sme odvodili parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu domáceho dlhopisu v tomto modeli a skúsili sme ju vyriešiť pomocou metódy sietí. Potom sme navrhli aproximáciu riešenia tak, že sme oceňovali dlhopis v modeli s dynamickou (ale nenáhodnou) koreláciou. Túto dynamickú koreláciu sme zobrali rovnú strednej hodnote stochastickej korelácii. Pre jeden z procesov korelácie sme odvodili presnosť takejto aproximácii.

Ďalšia práca môže spočívať v tom, že pre tento stochastický proces korelácie ziskame vhodnú aproximáciu, ktorá by však pracovala priamo s PDR s tromi priestorovými premennými. Potom by sme výsledky porovnali s našou aproximáciou z tejto práce. Iným smerom môže byť odvodenie presnosti našej aproximácie aj pre iné tvary stochastickej korelácie.

Zoznam použitej literatúry

[1] Melicherčík, I., Oľarová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, Bratislava, 2005.

[2] Vasicek, O.: *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*, Journal of Financial Economics 5 (1977), pp. 177-188.

[3] Corzo, T., Schwartz, E.S.: *Convergence within the European Union: Evidence from Interest Rates*, Economic Notes, Vol. 29 (2000), pp. 243-268.

[4] Gusak, D., Kukush, A., Kulik, A., Mishura, Y., Pilipenko, A.: *Theory of Stochastic Process With Application to Financial Mathematics and Risk Theory*, Springer Science+Business Media, LLC 2009.

[5] Lacko, V.: *Two-Factor Convergence Model Of Cox-Ingersoll-Ross Type*, Master's Thesis, 2010.

[6] https://www.euribor-rates.eu

[7] Chattová, Z.: *Kalibrácia konvergenčného modelu úrokových mier Vašíčkovho typu*, Diplomová práca, 2013.

[8] https://www.nbs.sk

[9] Zíková, Z.:*Konvergenčné modely úrokových mier*, Diplomová práca, 2011.

[10] Zíková, Z., Stehlíková B.: *A three-factor convergence model of interest rates*, Algoritmy 2012, pp. 95–104.

[11] Babušíková, J., Slodička, M., Weisz, J.: *Numerické metódy*, Univerzita Komenského, 2000.

[12] Bučková, Z.: *Analytical and Numerical Approximative Methods for solving Multi-factor Models for pricing of Financial Derivatives*, Dissertation Thesis, 2016.

[13] https://cran.r-project.org/web/packages/Sim.DiffProc/Sim.DiffProc.pdf

[14] Oksendal, B.: *Stochastic differential equations*, Springer, Berlin, 2003.

[15] [preprint] Stehlíková, B.: *On the bond pricing partial differential equation in a convergence model of interest rates with stochasti correlation.*

[16] https://cran.r-project.org/web/packages/pracma/pracma.pdf

[17] Karlin, S., Taylor, H. E.: *A second course in stochastic processes*, Elsevier, 1981.

[18] Gourieroux, C., Jasiak, J.: *Multivariate Jacobi process with application to smooth transitions*, J.Econometrics 131(1-2) (2006), 475–505.

[19] Fong, H. G., Vasicek, O. A.: *Fixed-income volatility management. The Journal of Portfolio Management*, p. 41-46, 1991.

[20] Babušíková, J.: *Numerické riešenie diferenciálnych rovníc*,
http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/members/babusikova.html

[21] https://www.rdocumentation.org/packages/deSolve/versions/1.21/topics/ode

[22] Šesták, L'.: *Mathematical Analysis and Calibration of a Multifactor Panel Model for Credit Spreads and Risk-free Interest Rate*, Dizertačná práca, FMFI UK, 2012.

[23] Stehlíková, B.: *Averaged bond prices for Fong-Vasicek and the generalized Vasicek interest rates models* , Mathematical Methods In Economics And Industry 2007, June 3 – 7, 2007, Herl'any, Slovak Republic.

[24] James, J., Webber, N.: *Interest Rate Modelling*, Wiley, 2000.

[25] Stehlíková, B.: *Ceny dlhopisov v short rate modeloch*, Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava,
https://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/fd17/09_urokove_miery_2.pdf

A Príloha

Uvádzame zdrojové kódy naprogramované v jazyku R ku kapitolám 4 a 5.

A.1 Aproximácia riešenia Vašíčkovho modelu so stochastickou koreláciou (kapitola 4.1)

```
library(deSolve) #kniznica
###Parametre
a=0.0938;
b=3.67;
c=0.2087;
d=0.035;
sigma_d=0.032;
sigma_u=0.016;
lambda_d=3.315;
lambda_u=-0.655;
r_d=0.05;
r_u=0.04;
mu=0.5;
sigma=0.1;
lambda=0.5;
###Taylorov rozvoj strednej hodnoty korel.
nu1=2*(mu-sigma^2-lambda*sigma)
nu2=2*(sigma*lambda-sigma^2-mu)
nu3=6*sigma^2
###Taylorov rozvoj disperzie korelacie
si2=2*sigma^2
si3=0
si4=-24*sigma^2
###Priprava ku vypoctu clenov A0,A1,A2,A3
D=function(t) (1-exp(-b*t))/b;
```

```
E=function(t)(1-exp(-c*t))/c;
U=function(t) (b/(c-b))*(D(t)-E(t));
f1=function(t) (-a+lambda_d*sigma_d)*D(t)+(-c*d+lambda_u*sigma_u)*U(t)+
        0.5*sigma_d^2*D(t)^2+0.5*sigma_u^2*U(t)^2;
f2=function(t) sigma_d*sigma_u*D(t)*U(t);
### Vypocet A0
parameters    <- c();
initial.state <- c(Y=0);
rovnice<-function(t, state, parameters) {
  with(as.list(c(state, parameters)),{
    # rovnica
    dY <- f1(t)+f2(t)
    list(c(dY)) }) }
times <- seq(0, 30, by = 1)
out <- ode(y = initial.state, times = times, func = rovnice,
                                parms = parameters)
A0<-out[,2] #zapamatame si hodnoty (od t=0 az t=30)
### Vypocet clenov A1,A2,A3
parameters    <- c()
initial.state <- c(Y=0,X=0,Z=0)
rovnice<-function(t, state, parameters) {
  with(as.list(c(state, parameters)),{
    # system rovnic
    dY <- -nu1*Y-f2(t)
    dX <- -(2*nu1-si2)*X-nu2*Y+0.5*si2*Y^2
    dZ <- -Z*(3*nu1-3*si2)+(si3-2*nu2)*X+2*si2*X*Y+0.5*si3*Y^2-nu3*Y
    list(c(dY,dX,dZ)) }) }
times <- seq(0, 30, by = 1)
out <- ode(y = initial.state, times = times, func = rovnice,
                                parms = parameters)
A1<-out[,2] #zapamatame si hodnoty (od t=0 az t=30)
```

```
A2<-out[,3] #zapamatame si hodnoty (od t=0 az t=30)
A3<-out[,4] #zapamatame si hodnoty (od t=0 az t=30)
### Priprava cyklus
T=30;
cena3=integer(T+1);
vynosy3=integer(T+1);
### Aproximacia
for (i in 0:T)
{
t=i;
A=A0[i+1]+A1[i+1]+A2[i+1]+A3[i+1];  #do 3 radu
#A=A0[i+1]+A1[i+1]+A2[i+1];          #do 2 radu
#A=A0[i+1]+A1[i+1];                 #do 1 radu
#A=A0[i+1];                         #do 0 radu
P=exp(A-r_d*D(t)-r_u*U(t));
R=-log(P)/t;
cena3[i+1] <- P
vynosy3[i+1] <- R
}
vynosy3[1]=0.05
### Obrazok
t<-seq(0,30,1)
plot(t,vynosy3,'l',col="blue",xlab="Tau", ylab="Vynos")
```

A.2 Aproximácia stochastickej korelácie z transformovaním na dvojfaktorový model (kapitola 4.2)

```
library(pracma) #kniznica
fn <- function (x) tanh(x)* 1/(sqrt(2*pi*sigma^2*(T-s)))*
     exp(-(x-(nu-lambda*sigma)*(T-s))^2/(2*sigma^2*(T-s)));
T=31;
nu=0.5;
```

```
sigma=0.1;
lambda<-0.5;
hodnoty<- integer(T+1)
### Numericky vypocet integralu q(T-s)
for (i in 0:T)
{
s=i;
hodnoty[i+1]<- quadinf(fn, -Inf, Inf)$Q
}
###Parametre
a=0.0938;
b=3.67;
c=0.2087;
d=0.035;
sigma_d=0.032;
sigma_u=0.016;
lambda_d=3.315;
lambda_u=-0.655;
r_d=0.05;
r_u=0.04;
T=31;
cena_vasik=integer(T+1);
vynosy_vasik=integer(T+1);
###Rovnica
for (i in 0:T)
{
t=i;
D_t=(1-exp(-b*t))/b;
E_t=(1-exp(-c*t))/c;
U_t=(b/(c-b))*(D_t-E_t);
D_I=(t-D_t)/b;
```

```
D_2I=t/(b^2)-(2*D_t)/(b^2)-((1-b*D_t)^2-1)/(2*b^3);
U_I=(b/(c-b))*(t/b-D_t/b-t/c+E_t/c);
U_2I=(b/(c-b))^2*(t/(b^2)-2/(b^2)*D_t-((1-b*D_t)^2-1)/(2*b^3)+
      t/(c^2)-2/(c^2)*E_t-((1-c*E_t)^2-1)/(2*c^3)-2*t/(b*c)+
      2/(b*c)*(D_t+E_t+(exp(-(b+c)*t)-1)/(b+c)));
DU_I= (2*c-b)/(b*c*(b-c))*D_t-((2-b*D_t)*D_t)/(2*b*(b-c))+
      (1-exp(-(b+c)*t))/(c*(b^2-c^2))-E_t/(c*(b-c))+t/(b*c);
A_t=(-a+lambda_d*sigma_d)*D_I+(-c*d+lambda_u*sigma_u)*U_I+
      0.5*sigma_d^2*D_2I+0.5*sigma_u^2*U_2I+
hodnoty[T-i]*sigma_u*sigma_d*DU_I;
P=exp(A_t-D_t*r_d-U_t*r_u);
vynos=-log(P)/t;
cena_vasik[i+1]=P;
vynosy_vasik[i+1]=vynos;
}
vynosy_vasik[1]=0.05;
vynosy_vasik<-vynosy_vasik[-(T+1)]
### Obrazok
tay<-seq(0,30,1)
plot(tay,vynosy_vasik,'l',col="red", xasis="Tau", yasis="Vynos")
```

A.3 Aproximácia modelu pri voľbe vhodného procesu korelácie (kapitola 4.3)

```
###Parametre
a=0.0938;
b=3.67;
c=0.2087;
d=0.035;
sigma_d=0.032;
sigma_u=0.016;
lambda_d=3.315;
```

```
lambda_u=-0.655;
r_d=0.05;
r_u=0.04;
k=1;
tt=0.8;
q0=0.5;
T=40;
cena_vasik1=integer(T+1);
vynosy_vasik1=integer(T+1);
###Rovnica
for (i in 0:T)
{
t=i;
D_t=(1-exp(-b*t))/b;
E_t=(1-exp(-c*t))/c;
U_t=(b/(c-b))*(D_t-E_t);
D_I=(t-D_t)/b;
D_2I=t/(b^2)-(2*D_t)/(b^2)-((1-b*D_t)^2-1)/(2*b^3);
U_I=(b/(c-b))*(t/b-D_t/b-t/c+E_t/c);
U_2I=(b/(c-b))^2*(t/(b^2)-2/(b^2)*D_t-((1-b*D_t)^2-1)/(2*b^3)+t/(c^2)-
    2/(c^2)*E_t-((1-c*E_t)^2-1)/(2*c^3)-2*t/(b*c)+2/(b*c)*
    (D_t+E_t+(exp(-(b+c)*t)-1)/(b+c)));
DU_I= (2*c-b)/(b*c*(b-c))*D_t-((2-b*D_t)*D_t)/(2*b*(b-c))+
    (1-exp(-(b+c)*t))/(c*(b^2-c^2))-E_t/(c*(b-c))+t/(b*c);
DUq_I= c/(b-k)*(exp(t*(k-b))-1)+b*(exp(t*(k+c))-1)/(c+k)+
    b/k*(exp(-t*k)-1)+c/k*(exp(t*k)-1);
ALL=tt*DU_I+exp(-k*T)*q0*DUq_I+exp(-k*T)*tt*DUq_I;
A_t=(-a+lambda_d*sigma_d)*D_I+(-c*d+lambda_u*sigma_u)*U_I+
    0.5*sigma_d^2*D_2I+0.5*sigma_u^2*U_2I+sigma_u*sigma_d*ALL;
P=exp(A_t-D_t*r_d-U_t*r_u);
vynos=-log(P)/t;
```

```
cena_vasik1[i+1]=P;
vynosy_vasik1[i+1]=vynos;
}
vynosy_vasik1[1]=0.05;
vynosy_vasik1=vynosy_vasik1[1:31]
### Obrazok
tay<-seq(0,30,1)
plot(tay,vynosy_vasik1,'l')
```

A.4 Fong-Vašíčkov model so stochastickou koreláciou (kapitola 5.2)

```
library(deSolve) #kniznica
###Parametry
v=0.1;
a=0.0938;
b=3.67;
c=0.2087;
d=0.035;
r_d=0.05;
r_u=0.04;
theta<-0.8
kappa<-1
sigma<-0.1
q0<-0.5
T=30;
###Funkcia B a E[q(t)]
B <- function (t) (1-exp(-b*t))/b
q <- function (t) theta+exp(-t*kappa)*(q0-theta)
### Vypocet clenov A0,A1,A2,A3
parameters     <- c()
initial.state <- c(C=0,A=1)
```

```
rovnice<-function(t, state, parameters) {
  with(as.list(c(state, parameters)),{
    # system rovnic
    dC <- 1-exp(-b*t)-c*C+(1-exp(-b*t))^2/(2*b^2)+
                          v^2/2*C^2+q(T-t)*v*B(t)*C
    dA <- -A*(a*b*B(t)+c*d*C)
    list(c(dC,dA))
  })
}
times <- seq(0, 30, by = 1)
out <- ode(y = initial.state, times = times, func = rovnice,
                                          parms = parameters)
C<-out[,2] #zapamatame si hodnoty (od t=0 az t=30)
A<-out[,3] #zapamatame si hodnoty (od t=0 az t=30)
T=30;
###Priprava cyklus
cena3=integer(T+1);
vynosy3=integer(T+1);
###Aproximacia
for (i in 0:T)
{
t=i;
P=A[i+1]*exp(-r_d*B(t)-r_u*C[i+1])
R=-log(P)/t;
cena3[i+1] <- P
vynosy3[i+1] <- R
}
vynosy3[1]=0.05
### Obrazok
t<-seq(0,30,1)
plot(t,vynosy3,'l',col="blue",xlab="Tau", ylab="Vynos")
```