UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



TVORBA REZERV V NEŽIVOTNOM POISTENÍ V PRÍPADE ZÁVISLÝCH RIZÍK POMOCOU KOPULA FUNKCIÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2019

Bc. Nikoleta Lengyelová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

TVORBA REZERV V NEŽIVOTNOM POISTENÍ V PRÍPADE ZÁVISLÝCH RIZÍK POMOCOU KOPULA FUNKCIÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Mgr. Gábor Szűcs, PhD.

Bratislava 2019

Bc. Nikoleta Lengyelová





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Nikoleta Lengyelová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Tvorba rezerv v neživotnom poistení v prípade závislých rizík pomocou kopula funkcií
Dependent Loss Reserving in General Insurance Using Copulas

Anotácia: Vytváranie poistných rezerv patrí medzi kľúčové úlohy poisťovní, ktoré výrazne ovplyvňuje celkovú úspešnosť a pripravenosť poisťovní. Ide o pomerne náročnú procedúru, v ktorej sa miešajú legislatívne požiadavky regulačného rámca Solventnosť II. s postupmi teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky. Pri tvorbe rezerv v neživotnom poistení sa už niekoľko desaťročí používajú štandardné trojuholníkové schémy, ktoré postupne prešli rôznymi modifikáciami a vylepšeniami. V posledných rokoch sa táto tematika skúma oveľa komplexnejšie, pretože sa už berie do úvahy aj štruktúra závislosti medzi jednotlivými rizikami, výsledkom čoho sú rôzne typy viacrozmerných stochastických trojuholníkových modelov.

Vedúci: Mgr. Gábor Szűcs, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.

Dátum zadania: 24.01.2018

Dátum schválenia: 25.01.2018 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Abstrakt

Jednou z hlavných úloh poisťovní, ako na Slovensku tak aj v zahraničí, je odhad primeranej výšky technických rezerv. Technická rezerva má za úlohu pokryť všetky poistné plnenia takých poistných udalostí, ktoré ešte neboli poisťovni nahlásené alebo úplne vybavené. Táto diplomová práca poskytuje prehľad základných metód využívaných na odhad výšky technických rezerv, bootstrap modifikácie základných metód a v neposlednom rade predstavenie novej metódy, ktorá sa opiera o teóriu kopula funkcií. Práca je rozdelená do piatich kapitol. V prvej časti je priblížená teória kopula funkcií spolu so základnými triedami a dôležitou Sklarovou vetou. Druhá kapitola slúži na oboznámenie sa so základnou teóriou poisťovní a tromi základnými metódami odhadu technickej rezervy v neživotnom poistení. Každá metóda je definovaná a jej algoritmus je bližšie vysvetlený na reálnom príklade. Tretia kapitola je venovaná novej metóde, ktorá sa opiera o teóriu kopula funkcií. V štvrtej kapitole sú predstavené nové metódy a algoritmy ako aj bootstrap modifikácie základných metód. Posledná časť diplomovej práce sa venuje aplikovaniu teórie a poznatkov na reálnych dátach z praxe, následnému porovnaniu všetkých metód a zhodnoteniu výsledkov.

Kľúčové slová: technické rezervy, neživotné poistenie, kopula funkcie, bootstrap.

Abstract

One of the main tasks of insurance companies is to estimate the appropriate amount of technical provisions. These reserves are intended to cover all of claims not yet reported or not settled by the insurance company. This master's thesis provides an overview of the basic methods used to estimate technical provisions, bootstrap modifications of basic methods and, last but not least, a new method that is based on the theory of copula functions. This thesis is divided into five chapters. In the first part, the theory of copula functions is presented along with the basic copula classes and the important Sklar's theorem. In the second chapter are defined the basic insurance concepts and the three commonly used methods of estimation of technical provisions in non-life insurance. Each method is defined and explained through a real example. The next part of the thesis is devoted to a new method based on the theory of copula functions. In the fourth chapter, new methods and algorithms are introduced as well as bootstrap modifications of basic methods. The last part of the thesis deals with the application of theory on real data from practice and a comparison of all methods.

Key words: technical provisions, non-life insurance, copula function, bootstrap.

Predhovor

Všeobecne sa uznáva, že odborné stanovenie výšky technických rezerv je jednou z kľúčových úloh poisťovní. Ide o významný proces, kde poistno–matematické funkcie zastávajú dôležitú zložku celého procesu. Pri oceňovaní a tvorbe rezerv sa používajú rôzne metódy a techniky, ktoré sa časom stále vyvíjajú, optimalizujú.

Aj vzhľadom na vyššie uvedené, môžem konštatovať, že ide o problematiku, ktorá si zaslúži intenzívnu pozornosť. Aj preto som sa rozhodla prostredníctvom predkladanej záverečnej práce poskytnúť stručný prehľad jednotlivých metód využívaných na odhad výšky technických rezerv. Hlavným zámerom práce je predstavenie nových metód pre odhad výšky technickej rezervy, ktoré odhadujú kvantily empirického rozdelenia pravdepodobnosti.

Pri písaní práce som sa pokúsila o vyváženú kombináciu teoretických poznatkov s ich praktickou aplikáciou. Jednotlivé kapitoly som sa snažila vytvoriť tak, aby poskytli čitateľovi stručný prehľad o najviac používaných metódach súčasnosti. Za teoretickou časťou práce nasleduje praktická časť, ktorej čiastkovým cieľom je namiesto jedného odhadu vypočítať kvantily. Diplomová práca je ukončená záverom, ktorý má za úlohu zhrnúť všetko to, o čom jednotlivé kapitoly práce pojednávajú.

Samozrejme problematika odhadu optimálnej technickej rezervy obsahom predkladanej práce nebola vyčerpaná. Aj preto si myslím, že predkladaná práca je prínosná vzhľadom na to, že poskytuje orientačný prehľad a užitočný zdroj pre ďalšie analýzy riešenej problematiky. Práca je určená všetkým, ktorí majú záujem spoznať základné princípy fungovania niektorých metód, využívaných na ocenenie výšky technických rezerv.

V závere by som sa chcela poďakovať svojmu školiteľovi Mgr. Gáborovi Szűcsovi, PhD. za jeho cenné rady a odborné vedenie, ktoré mi poskytol pri vypracovaní tejto diplomovej práce.

Obsah

Úvod **8**

1 Teória kopula funkcií **10**

1.1 Definícia a základné vlastnosti kopula funkcií 10

1.1.1 Sklarova veta 10

1.2 Archimedovské kopuly 11

1.2.1 Claytonova kopula 12

1.2.2 Frankova kopula 12

1.2.3 Gumbelova kopula 14

1.2.4 Joeova kopula 14

1.3 Eliptické kopuly 15

1.3.1 Gaussova kopula 16

1.3.2 Studentova t-kopula 16

1.4 Kopuly s extrémnymi hodnotami 18

2 Technické rezervy **19**

2.1 Základné metódy odhadu technických rezerv 20

2.1.1 Chain-Ladder metóda 22

2.1.2 Cape-Cod metóda 24

2.1.3 Bornhuetterova-Fergusonova metóda 27

3 Odhadovanie technických rezerv využitím kopula funkcií **30**

3.1 Akaikeho informačné kritérium 31

3.2 Výpočet optimálnych parametrov modelu 33

3.3 Odhad optimálnej kopula funkcie 34

3.4 Odhad rezerv a ich rozdelenia pomocou bootstrapu 35

4 Metódy odhadu technických rezerv využívajúce bootstrap algoritmus 37

4.1 Metóda CLS 37

4.2 Základná bootstrap Chain-Ladder metóda 39

4.3 ODP bootstrap Chain-Ladder metóda 40

4.4 Gama bootstrap Chain-Ladder metóda 44

4.5 Bootstrap Cape-Cod metóda 44

4.6 Druhá verzia bootstrap Cape-Cod metódy 46

4.7 Bootstrap Bornhuetterova-Fergusonova metóda 47

4.8 Druhá verzia bootstrap Bornhuetterovej-Fergusonovej metódy 49

4.9 Prehľad odbornej literatúry o možnostiach odhadovania výšky technických rezerv 51

5 Odhady technických rezerv pre rôzne vývojové trojuholníky poistných plnení 54

5.1 Odhad výšky rezerv pre odškodňovací fond spoločnosti 54

5.2 Odhad výšky technických rezerv na povinné zmluvné poistenie 64

Záver 75

Zoznam použitej literatúry 78

Úvod

Stanovenie výšky technických rezerv je jednou z najdôležitejších tém poisťovní po celom svete. Tieto rezervy slúžia na pokrytie poistných plnení takých poistných udalostí, ktoré neboli ešte poisťovni nahlásené, alebo neboli úplne vybavené. Je nevyhnutné tieto rezervy odhadovať optimálne. Ak je odhadnutá rezerva príliš nadhodnotená, pre poisťovňu to môže prinášať finančné straty, nakoľko sa jedná o nevyužitú príležitosť investície. Ak sa naopak odhadne menšia výška rezervy, než je potrebná na pokrytie všetkých poistných plnení, poisťovňa nedokáže plniť svoje záväzky voči poistencom a môže sa stať insolventnou.

Aj z vyššie uvedených dôvodov je nevyhnutné zvoliť metódu, ktorá pre poisťovňu čo najpresnejšie odhaduje potrebné množstvo rezerv. Metód existuje hneď niekoľko, v tejto práci sú spomenuté 3 základné, konkrétne Chain-Ladder metóda (v preklade reťazovo-rebríková metóda), Cape-Cod metóda a Bornhuetterova-Fergusonova metóda. Výstupom všetkých vymenovaných metód je hodnota predstavujúca odhad technickej rezervy na budúce poistné plnenia. Jedným z cieľov tejto práce je namiesto jedného bodového odhadu vypočítať kvantily. K tomu sa dopracujeme bootstrap modifikáciou vyššie vymenovaných základných metód.

Za jeden z hlavných prínosov tejto práce považujeme predstavenie novej metódy pre odhad technickej rezervy, kopula prístup. Metódu sme prevzali z publikácie [17], podrobne ju analyzovali a prispôsobili našim potrebám. Základná teória kopula funkcií, potrebná k pochopeniu tejto metódy, je bližšie popísaná v prvej kapitole. V tejto kapitole možno nájsť základnú definíciu n-rozmernej kopula funkcie, ďalej Sklarovu vetu, popisujúcu schopnosť spájať marginálne distribučné funkcie náhodných veličín so združenou distribučnou funkciou náhodného vektora. V neposlednom rade sú v prvej kapitole opísané aj základné triedy kopula funkcií spolu so znázorneniami ich tvaru, pričom sme vychádzali z teórie definovanej v [13, 16]. Druhá kapitola sa bližšie venuje problematike technických rezerv, vysvetleniu základnej, používanej terminológie poisťovne a predstaveniu základných metód odhadu technických rezerv, pričom sme teóriu čerpali z [2, 11]. V tejto kapitole sú predstavené vyššie spomenuté metódy (Chain-Ladder, Cape-Cod a Bornhuetterova-Fergusonova), každá osobitne na konkrétnom re-

álnom príklade.

Nakoľko jedným z hlavných cieľov tejto práce je predstavenie nových metód na výpočet technických rezerv, v tretej kapitole je predstavená nová metóda, prevzatá z publikácie [17], ktorá sa opiera predovšetkým o teóriu kopula funkcií. V predposlednej, v poradí štvrtej kapitole, sú predstavené bootstrap modifikácie známych metód Chain-Ladder, Cape-Cod a Bornhuetterovej-Fergusonovej metódy.

V záverečnej kapitole sú uvedené aplikácie všetkých, v práci definovaných metód na odhad výšky technických rezerv poisťovne pre reálne vývojové trojuholníky poistných plnení. V tejto kapitole možno nájsť odhadnutú optimálnu kopula funkciu spolu s optimálnym parametrom kopula funkcie ako aj porovnanie výstupov všetkých bootstrap metód a kopula prístupu. Súčasťou tejto diplomovej práce sú aj tabuľky a grafy, ktoré pomáhajú ilustrovať analyzované vývojové trojuholníky.

1 Teória kopula funkcií

Ako sme už aj v úvode spomenuli, táto práca má za jeden z hlavných cieľov priblížiť metódu odhadu technických rezerv, predstavenú v publikácii [17], ktorá vychádza z teórie kopula funkcií. V tejto kapitole si, vychádzajúc z poznatkov z [13, 16], priblížime základy teórie kopula funkcií spolu so známou Sklarovou vetou a uvedieme základné triedy spolu s ich vlastnosťami a grafickým znázornením ich tvaru. Podrobný výklad možno nájsť v [16].

1.1 Definícia a základné vlastnosti kopula funkcií

Všeobecnú n-rozmernú kopula funkciu definujeme nasledovne.

Definícia 1.1. Funkciu C: $\mathrm{I}^n \to \mathbb{R}$ nazývame n-rozmernou kopulou (pričom $\mathrm{I} = \langle 0; 1 \rangle$), ak sú splnené nasledujúce vlastnosti:

- C je rastúca vo všetkých zložkách,
- C má jednorozmerné marginálne funkcie C_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, pre ktoré platí: $C_k(u) = u$, $\forall u \in \mathrm{I}$,
- $\forall u \in \mathrm{I}_n$ platí: ak $C(u) = 0$, tak aspoň jedna zložka vektora u je nulová,
- $\forall u \in \mathrm{I}_n$ platí: ak $C(u) = u_i$, tak všetky zložky vektora u, okrem u_i, sú jednotky,
- pre $\forall a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^\top \in \mathrm{I}_n \wedge \forall b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^\top \in \mathrm{I}_n$, $a \leq b$, a n-rozmernú kocku $B = \langle a, b \rangle = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \ldots \times \langle a_n, b_n \rangle$, ktorej vrcholy ležia v definičnom obore C platí, že objem takejto kocky je $V_c(B) = V_c(\langle a, b \rangle) \geq 0$.

1.1.1 Sklarova veta

Jedna zo základných vlastností kopula funkcií, schopnosť spájať združenú distribučnú funkciu náhodného vektora s marginálnymi distribučnými funkciami náhodných veličín, je presnejšie definovaná v nasledujúcej Sklarovej vete.

Veta 1.1. [13] *Nech H je združená distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami F a G. Potom existuje taká kopula C, že pre $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí:*

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)).$$

Ak F a G sú spojité, potom C je jediná, inak C je jednoznačne definovaná na priestore ohraničenom obormi hodnôt F a G. Naopak, ak C je kopula a F a G sú distribučné funkcie, potom H je združená distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami F a G.
Medzi základné triedy kopula funkcií patria napríklad

- archimedovské kopuly,
- eliptické kopuly,
- kopuly s extrémnymi hodnotami.

V nasledujúcich podkapitolách sú definované vyššie vymenované triedy kopula funkcií. Okrem individuálnej definície jednotlivých kopúl možno v príslušných podkapitolách nájsť aj ich grafické znázornenia, pričom číselné osi x a y znázorňujú argumenty kopula funkcie.

1.2 Archimedovské kopuly

Archimedovské kopuly patria medzi najbežnejšie využívané kopula funkcie, čoho príčinou môže byť jednak ich pomerná jednoduchosť, ale aj spôsob definovania, keďže ich definujeme v explicitnej podobe. Do tejto triedy kopula funkcií patria napríklad

- Claytonova kopula,
- Frankova kopula,
- Gumbelova kopula,
- Joeova kopula.

Parametrom archimedovských kopula funkcií je koeficient θ.

Definícia 2.3. [13] Nech φ je spojitá, rýdzo-klesajúca funkcia φ: $\langle 0;1\rangle \to \langle 0;\infty)$ taká, že $\varphi(1) = 0$ a $\varphi(0) \leq \infty$. K funkcii φ definujeme pseudoinverznú funkciu φ^{-1} s definičným oborom $\langle 0;\infty)$ ako

$$\varphi^{-1}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Definícia 2.4. [13] Nech φ je spojitá, rýdzo-klesajúca funkcia φ: $\langle 0;1\rangle \to \langle 0;\infty)$ taká, že $\varphi(1) = 0$ a φ^{-1} je pseudoinverná k φ. Nech C: $\langle 0;1\rangle^2 \to \langle 0;1\rangle$ je funkcia daná vzťahom

$$C(u,v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)),$$

C definujeme ako archimedovskú kopula funkciu práve vtedy, keď φ je konvexná. Funkciu φ nazývame generátorom kopula funkcie.

1.2.1 Claytonova kopula

Claytonova kopula sa využíva predovšetkým pri dátach vykazujúcich najväčšiu závislosť pri malých hodnotách, nakoľko má asymetrický tvar a najväčšiu koncentráciu bodov pri negatívnom chvoste. Tvar Claytonovej kopula funkcie je nasledovný:

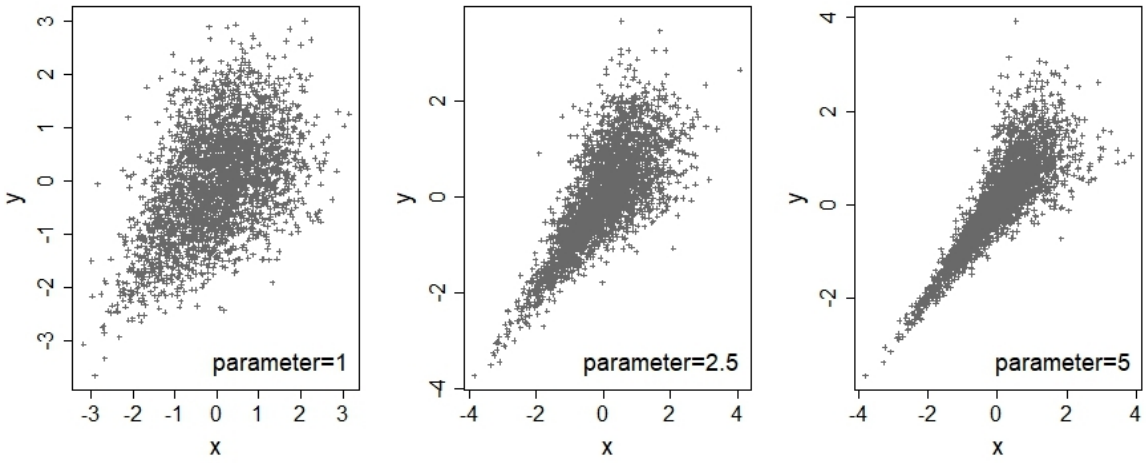
$$C_\theta(u,v) = \left[u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right]^{-\frac{1}{\theta}},$$

kde $-1 \leq \theta < \infty$, $\theta \neq 0$ a $u, v \in \mathrm{I} = \langle 0;1\rangle$. Generátor $\varphi(t)$ definujeme nasledovne $\varphi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)^{-\theta}$, pre $t \in \mathrm{I}$.

1.2.2 Frankova kopula

Frankova kopula, ako jediná spomedzi Archimedovských kopula funkcií, má symetrický tvar. Jej parameter môže nadobúdať aj záporné hodnoty, teda sa využíva najmä pri dátach vykazujúcich zápornú koreláciu. Jej tvar je nasledovný:

$$C_\theta(u,v) = -\frac{1}{\theta}\ln\left[1 + \frac{(\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)}{(\exp(-\theta) - 1)}\right],$$

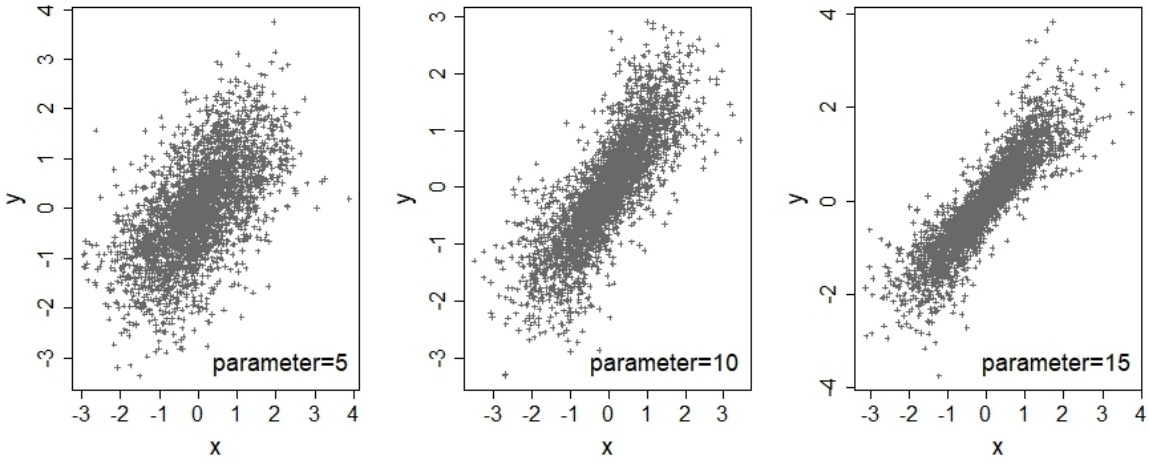


Obr. 1: Grafické znázornenie 3000 náhodne generovaných realizácií $(x, y)^\top$ v tvare Claytonovej kopula funkcie s parametrami 1, 2,5, resp. 5. Zdroj: vlastné spracovanie.

kde $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $u, v \in \mathrm{I}$. Generátor $\varphi(t)$ definujeme podľa nasledovného vzťahu:

$$\varphi(t) = -\ln\left[\frac{(\exp(-\theta t) - 1)}{(\exp(-\theta) - 1)}\right],$$

kde $t \in \mathrm{I}$.



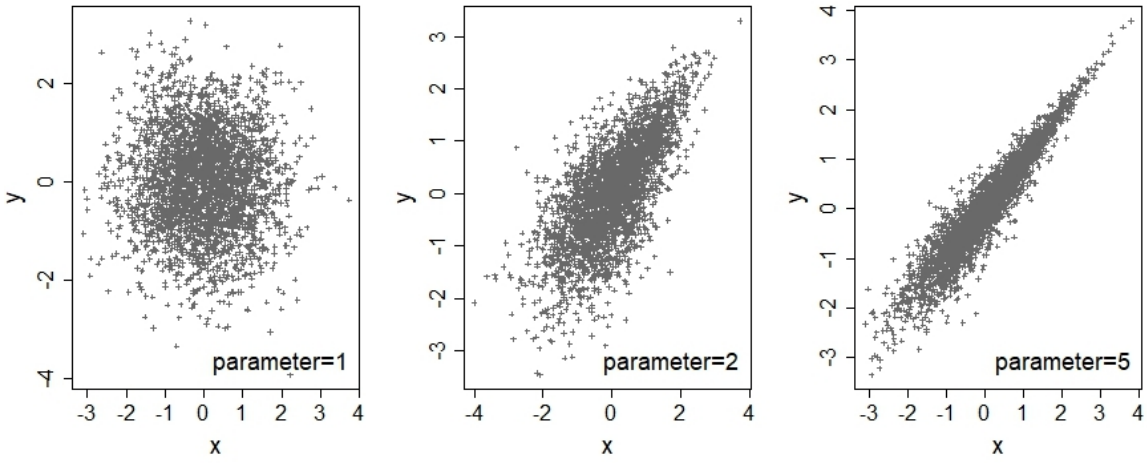
Obr. 2: Grafické znázornenie 3000 náhodne generovaných realizácií $(x, y)^\top$ v tvare Frankovej kopula funkcie s parametrami 5, 10, resp. 15. Zdroj: vlastné spracovanie.

1.2.3 Gumbelova kopula

Gumbelova kopula nadobúda asymetrický tvar so silnou závislosťou pri pozitívnom chvoste. Vďaka tejto vlastnosti sa využíva pri dátach vykazujúcich silnú závislosť pri väčších hodnotách. Jej tvar je nasledovný:

$$C_\theta(u,v) = \exp\left[-((-\ln(u))^\theta + (-\ln(v))^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\right],$$

kde $\theta \geq 1$ a $u, v \in \mathrm{I}$. Generátor $\varphi(t)$ definujeme vzťahom $\varphi(t) = [-\ln(t)]^\theta$, pre $t \in \mathrm{I}$.



Obr. 3: Grafické znázornenie 3000 náhodne generovaných realizácií $(x, y)^\top$ v tvare Gumbelovej kopula funkcie s parametrami 1, 2, resp. 5. Zdroj: vlastné spracovanie.

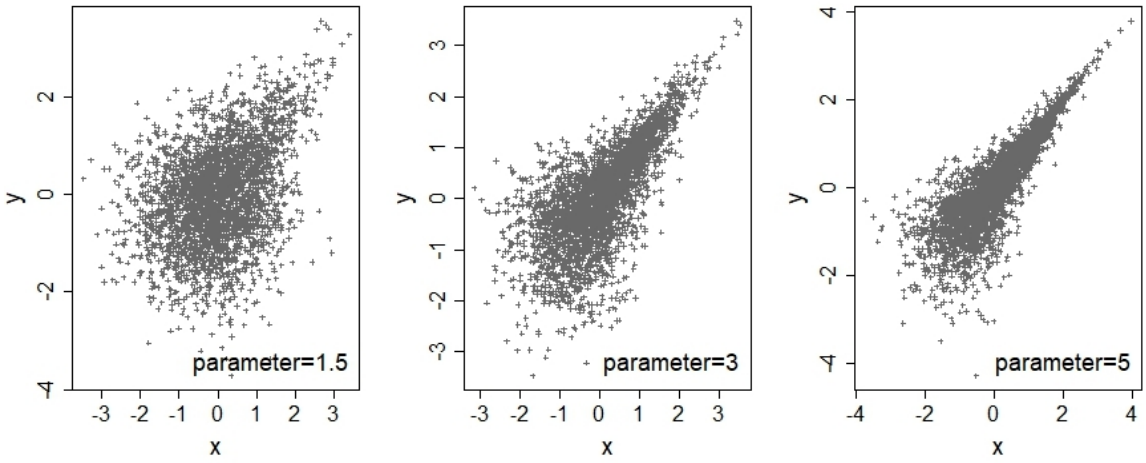
1.2.4 Joeova kopula

Joeova kopula funkcia je zovšeobecnením Claytonovej a Gumbelovej kopuly. Nadobúda nasledovný tvar:

$$C_\theta(u,v) = 1 - \left[(1-u)^\theta + (1-v)^\theta - (1-u)^\theta(1-v)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}},$$

kde $\theta \geq 1$ a $u, v \in \mathrm{I}$. Generátor $\varphi(t)$ definujeme ako $\varphi(t) = -\ln\left[1-(1-t)^\theta\right]$, pre $t \in \mathrm{I}$.

Ak by sme uvedenú definíciu Joeovej kopula funkcie prepísali do nasledujúceho tvaru:



Obr. 4: Grafické znázornenie 3000 náhodne generovaných realizácií $(x, y)^\top$ v tvare Joeovej kopula funkcie s parametrami 1,5, 3, resp. 5. Zdroj: vlastné spracovanie.

$$C(u, v) = \left[1 + ((u^{-a} - 1)^c + (v^{-a} - 1)^c)^{\frac{1}{c}}\right]^{-\frac{1}{a}},$$

tak pre a idúce k 0, Joeova kopula sa blíži ku Gumbelovej. Naopak, ak je parameter c rovný 1, potom z Joeovej kopuly dostávame Claytonovu kopulu.

1.3 Eliptické kopuly

Eliptické kopuly, získané z eliptických rozdelení, sú definované v náročnejšom, implicitnom tvare. Do tejto triedy kopula funkcií patria napríklad

- Gaussova kopula,
- Studentova t-kopula.

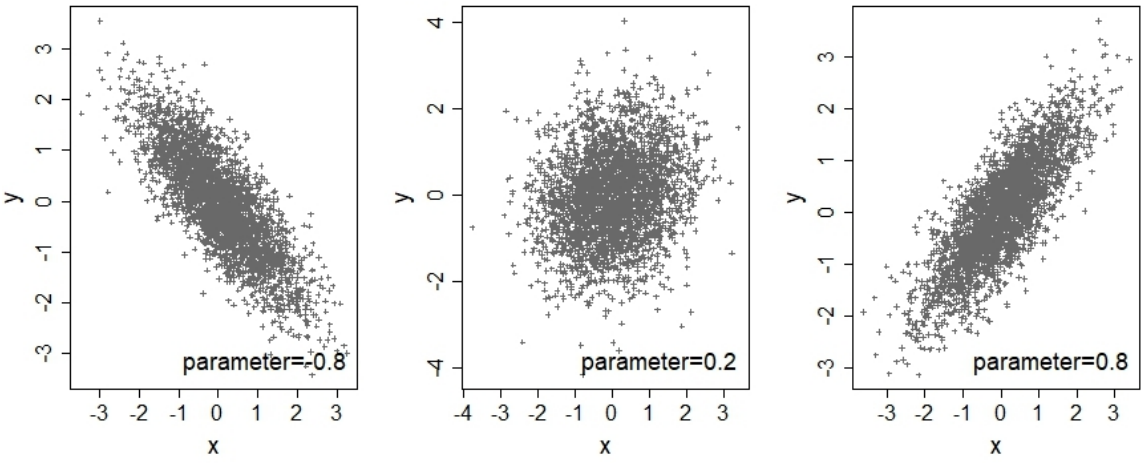
Ich parametrom je Pearsonov korelačný koeficient ρ.

1.3.1 Gaussova kopula

Gaussova kopula, vo veľkej miere využívaná vo finančnej sfére, je odvodená z normálneho rozdelenia. Jej tvar je nasledovný

$$C_\rho(u,v) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)}\right) \mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

kde ρ je už spomínaný parameter eliptických kopula funkcií, Pearsonov korelačný koeficient, ϕ^{-1} je funkcia inverzná k distribučnej funkcii štandardizovaného normálneho rozdelenia a premenné $u, v \in \mathrm{I}$.



Obr. 5: Grafické znázornenie 3000 náhodne generovaných realizácií $(x, y)^\top$ v tvare Gaussovej kopula funkcie s parametrami $-0{,}8$, 0,2, resp. 0,8. Zdroj: vlastné spracovanie.

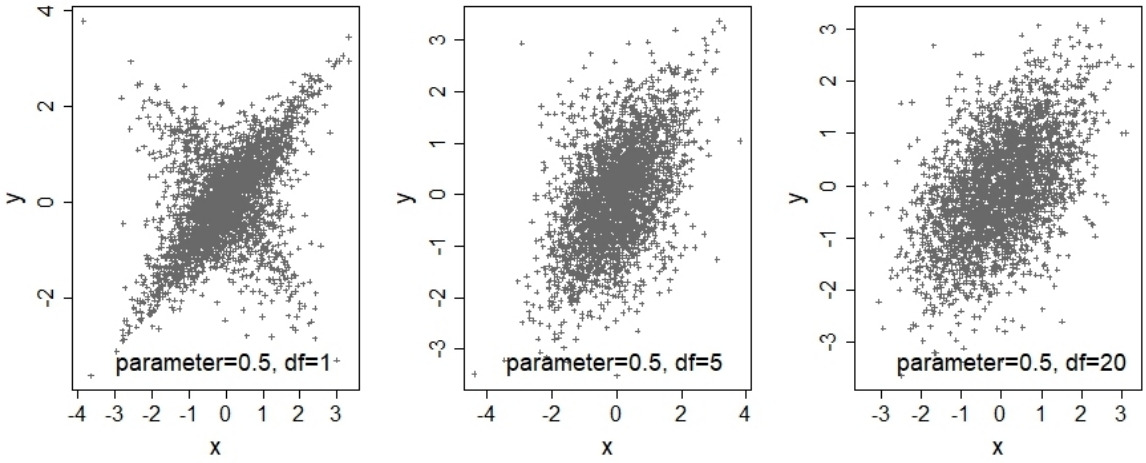
1.3.2 Studentova t-kopula

Studentova kopula je odvodená zo Studentovho rozdelenia. Okrem parametra kopula funkcie ju definuje aj počet stupňov voľnosti. Studentova kopula je definovaná vo všeobecnosti nasledovne:

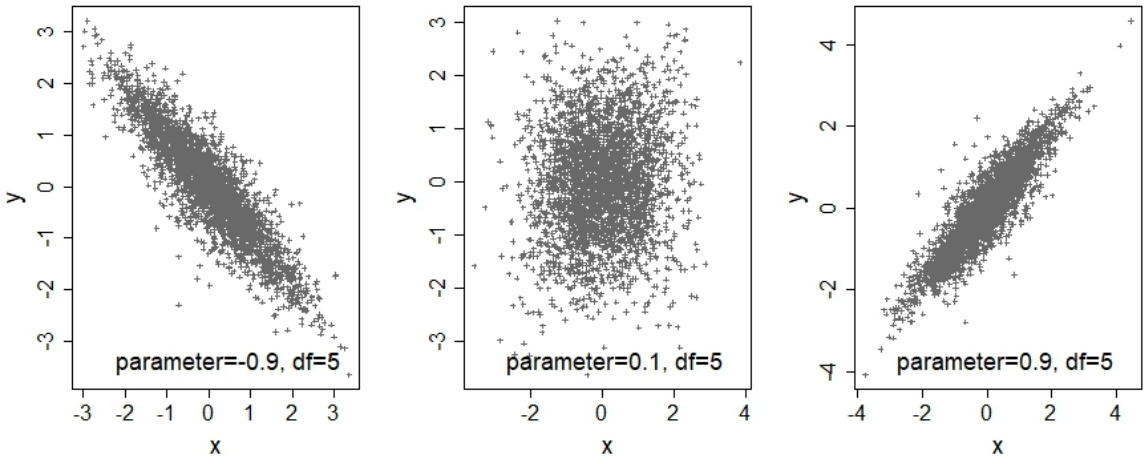
$$C_{\rho,\nu}(u,v) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{v(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}} \mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

pričom ρ je parameter kopula funkcie, t_ν^{-1} je funkcia inverzná k distribučnej funkcii Studentovho t-rozdelenia, ν je počet stupňov voľnosti a premenné $u, v \in \mathrm{I}$.

Na nasledujúcich obrázkoch sú ilustrované tvary Studentovej t-kopula funkcie najprv pre rovnaké parametre ρ a rôzne stupne voľnosti df (z angl. *degrees of freedom*), a následne pre rôzne parametre ρ a fixované stupne voľnosti df.



Obr. 6: Grafické znázornenie 3000 náhodne generovaných realizácií $(x, y)^\top$ v tvare Studentovej kopula funkcie s parametrom 0,5 a stupňami voľnosti 1, 5, resp. 20. Zdroj: vlastné spracovanie.



Obr. 7: Grafické znázornenie 3000 náhodne generovaných realizácií $(x, y)^\top$ v tvare Studentovej kopula funkcie s parametrami $-0{,}9$, 0,1, resp. 0,9 a stupňami voľnosti 5. Zdroj: vlastné spracovanie.

1.4 Kopuly s extrémnymi hodnotami

Kopuly s extrémnymi hodnotami sú bežne využívané v oblastiach, kde sa modelujú extrémne, zriedkavo sa vyskytujúce javy. Ako príklad môžeme uviesť využitie v oblasti životného prostredia na modelovanie pravdepodobnosti povodne. Medzi najznámejšie kopuly s extrémnymi hodnotami patria Hüslerova-Reissova a Galambosova kopula.

Definícia 2.5 [13] Kopulu C nazývame kopulou s extrémnymi hodnotami, ak existuje kopula C_F taká, že pre $\forall(u_1, \ldots, u_d) \in \langle 0; 1\rangle^d$ platí:

$$C_F\left(u_1^{1/n}, \ldots, u_d^{1/n}\right)^n \to C\left(u_1, \ldots, u_d\right).$$

Podrobnejší výklad možno nájsť v [4].

2 Technické rezervy

Technické rezervy sú zdrojom krytia záväzkov vyplývajúcich z uzavretia poistných zmlúv. Rezervy slúžiace na úhradu záväzkov poisťovne voči poisťovateľom sa nazývajú technické rezervy. Obvykle sa využívajú nasledovné 2 typy rezerv:

1. IBNR (z angl. *Incurred But Not Reported*),
2. RBNS (z angl. *Reported But Not Settled*).

Skratkou IBNR označujeme rezervy na poistné plnenia, ktoré neboli ešte poisťovni nahlásené a RBNS je časť rezerv na tie poistné udalosti, ktoré boli nahlásené, ale neboli vyplatené.

Cieľom tejto práce je, na základe historických dát o výške poistných plnení vyplatených v minulom období odhadnúť optimálnu výšku týchto rezerv tak, aby bola poisťovňa schopná pokryť všetky poistné plnenia. Dôležitou podmienkou je, aby táto rezerva bola adekvátna. Ak by bola nadhodnotená, každé euro navyše by mohlo znamenať pre poisťovňu stratu, resp. nevyužitú možnosť investície. Naopak, ak by bola rezerva menšia než poistné plnenia, ktoré je nutné vyplatiť, poisťovňa by nebola schopná plniť svoje záväzky voči poistencom. V tejto diplomovej práci sa zaoberáme iba odhadom výšky technických rezerv v neživotnom poistení.

Pre potreby tejto práce uvádzame základnú terminológiu a označenia, s ktorými pracujeme a metódy, ktoré využívame, pričom vychádzame z teórie definovanej v zdrojoch [2, 11].

V Tabuľke 1 je zobrazený tzv. vývojový trojuholník kumulatívnych poistných plnení, inak nazývaný aj *run-off triangle*. Nech $C_{i,j}$ označujú kumulatívne poistné plnenia poistných udalostí, ktoré nastali v roku i a ktoré boli vyplatené do konca roka j do plnej sumy. Nakoľko hodnoty $C_{i,j}$ sú kumulatívne, vieme ich definovať ako

$$C_{i,j} = \sum_{l=1}^{j} X_{i,l},$$

kde $X_{i,l}$ nazývame prírastkové (alebo nekumulatívne) poistné plnenia. Našim cieľom je odhadnúť neznáme $C_{i,j}$ pre $i + j > n + 1$, teda doplniť dolný trojuholník, ktorý pred-

Tabuľka 1: Vývojový trojuholník kumulatívnych poistných plnení (*cumulative run-off triangle)*.

Vývojový rok j						
Rok vzniku i	1	2	...	$n-2$	$n-1$	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	...	$C_{1,n-2}$	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	...	$C_{2,n-2}$	$C_{2,n-1}$	
...	...	...	...	...		
$n-2$	$C_{n-2,1}$	$C_{n-2,2}$	$C_{n-2,3}$			
$n-1$	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$				
n	$C_{n,1}$					

Zdroj: vlastné spracovanie.

stavuje odhadované poistné plnenia, ktoré poisťovňa vyplatí v priebehu nasledujúcich rokov za poistné udalosti vzniknuté v minulých rokoch.

Celkovú odhadnutú rezervu pre rok vzniku $i = 1, 2, \ldots, n$ definujeme

$$R_i = C_{i,n} - C_{i,n-i+1}.$$

Veličiny R_i teda definujeme ako rezervy pre krytie odhadnutých poistných plnení pre vývojový rok i znížený o objem poistných plnení $C_{i,n-i+1}$, ktoré už boli poisťovňou vyplatené.

V nasledujúcej podkapitole si predstavíme 3 základné metódy odhadu rezerv, z ktorých vychádzame v ďalších kapitolách vychádzať. Všetky výpočty v nasledujúcich kapitolách sú realizované v štatistickom softvéri R [19].

2.1 Základné metódy odhadu technických rezerv

Na odhad výšky technickej rezervy existuje dnes už viacero metód, ktoré poisťovne aplikujú bežne v praxi. Populárnymi metódami sú:

- Chain-Ladder metóda,
- Cape-Cod metóda,
- Bornhuetterova-Fergusonova metóda.

Táto podkapitola slúži na priblíženie základných, vyššie vymenovaných metód odhadu výšky technických rezerv. Vrámci ilustrácie jednotlivých metód sme odhadli výšku rezervy na budúce poistné plnenia pre dáta pochádzajúce z Národnej banky Slovenska, pričom poistným produktom je povinné zmluvné poistenie zodpovednosti za škodu spôsobenú prevádzkou motorového alebo prípojného vozidla (skr. PZP). Dáta o výške poistných plnení vyplatených v minulom období možno nájsť v práci [11]. Vývojový trojuholník nekumulatívnych poistných plnení je zobrazený v Tabuľke 2. Kumulatívne poistné plnenia, vypočítané z nekumulatívnych, sú zobrazené v Tabuľke 3.

Tabuľka 2: Vývojový trojuholník nekumulatívnych poistných plnení uvedených v eurách.

	Vývojový rok							
Rok vzniku	1	2	3	4	5	6	7	8
2006	64 839	39 385	11 530	5 719	2 678	1 575	1 055	1 128
2007	71 272	49 926	14 337	8 960	2 959	1 836	95	
2008	85 567	50 896	16 505	6 723	3 693	2 874		
2009	83 478	42 027	13 552	6 495	3 229			
2010	84 668	47 701	13 558	5 402				
2011	85 497	41 607	13 789					
2012	76 608	44 339						
2013	78 523							

Zdroj: [11], vlastné spracovanie.

Tabuľka 3: Vývojový trojuholník kumulatívnych poistných plnení uvedených v eurách.

	Vývojový rok							
Rok vzniku	1	2	3	4	5	6	7	8
2006	64 839	104 224	115 754	121 473	124 151	125 726	126 781	127 909
2007	71 272	121 198	135 535	144 495	147 454	149 290	149 385	
2008	85 567	136 463	152 968	159 691	163 384	166 258		
2009	83 478	125 505	139 057	145 552	148 781			
2010	84 668	132 369	145 957	151 359				
2011	85 497	127 104	140 893					
2012	76 608	120 947						
2013	78 523							

Zdroj: [11], vlastné spracovanie.

2.1.1 Chain-Ladder metóda

Chain-Ladder metóda (po slovensky reťazovo-rebríková metóda) je najbežnejšie využívanou a výpočtovo najjednoduchšou metódou spomedzi všetkých známych metód výpočtu technických rezerv. Na konkrétnom vývojovom trojuholníku, zobrazenom v Tabuľke 3 si túto metódu podrobne vysvetlíme, pričom vychádzame z teórie definovanej v [2,11].

K základným predpokladom Chain-Ladder metódy patria nasledujúce:

1. vyplácané sumy poistných plnení majú stabilný vývoj pre každý rok vzniku poistných udalostí, ktorý je charakterizovaný vývojovým koeficientom λ_j, pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n$.
2. portfóliá poistných zmlúv sú homogénne,
3. inflácia je stabilná pre každý vývojový rok $j = 1, 2, \ldots, n$.

Pri týchto predpokladoch platí:

$$C_{i,j+1} = \lambda_j C_{i,j}, \text{ pre všetky } i = 1, 2, \ldots, n, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Vývojové koeficienty λ_j je možné z minulých kumulatívnych poistných plnení odhadnúť nasledovne [11]:

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}, \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

Vývojové koeficienty, vypočítané pre kumulatívne poistné plnenia zobrazené v Tabuľke 2, sú zobrazené v poslednom riadku Tabuľky 4.

Tabuľka 4: Kumulatívne poistné plnenia uvedené v eurách a vývojové koeficienty Chain-Ladder metódy.

Vývojový rok								
Rok vzniku	1	2	3	4	5	6	7	8
2006	64 839	104 224	115 754	121 473	124 151	125 726	126 781	127 909
2007	71 272	121 198	135 535	144 495	147 454	149 290	149 385	
2008	85 567	136 463	152 968	159 691	163 384	166 258		
2009	83 478	125 505	139 057	145 552	148 781			
2010	84 668	132 369	145 957	151 359				
2011	85 497	127 104	140 893					
2012	76 608	120 947						
2013	78 523							
Vývojové koeficienty	1,572322	1,111535	1,048310	1,021987	1,014449	1,004182	1,008897	

Zdroj: [11], vlastné spracovanie.

Následne, využitím vývojových koeficientov, môžeme odhadnúť budúce poistné plnenia a doplniť trojuholník pod diagonálou nasledovne:

$$\hat{C}_{i,j} = \hat{\lambda}_{j-1} C_{i,j-1},$$

kde $n + 1 < i + j \leq 2n$.

Tabuľka 5 obsahuje výsledné poistné plnenia odhadnuté pomocou Chain-Ladder metódy. Celkové rezervy potrebné na krytie poistných plnení z poistných udalostí vzniknutých v rokoch 2007 až 2013 sa odhadli na 129 168,40 eur.

Tabuľka 5: Výsledná tabuľka odhadnutých poistných plnení metódou Chain-Ladder (hodnoty sú uvedené v eurách).

	Vývojový rok							
Rok vzniku	1	2	3	4	5	6	7	8
2006	64 839,0	104 224,0	115 754,0	121 473,0	124 151,0	125 726,0	126 781,0	127 909,0
2007	71 272,0	121 198,0	135 535,0	144 495,0	147 454,0	149 290,0	149 385,0	150 714,1
2008	85 567,0	136 463,0	152 968,0	159 691,0	163 384,0	166 258,0	166 953,2	168 438,6
2009	83 478,0	125 505,0	139 057,0	145 552,0	148 781,0	150 930,7	151 561,8	152 910,3
2010	84 668,0	132 369,0	145 957,0	151 359,0	154 686,9	156 921,9	157 578,1	158 980,1
2011	85 497,0	127 104,0	140 893,0	147 699,6	150 947,0	153 128,0	153 768,3	155 136,4
2012	76 608,0	120 947,0	134 436,8	140 931,5	144 030,1	146 111,1	146 722,1	148 027,5
2013	78 523,0	123 463,4	137 233,9	143 863,7	147 026,8	149 151,1	149 774,8	151 107,4

Zdroj: vlastné spracovanie.

2.1.2 Cape-Cod metóda

Cape-Cod metóda, niekedy nazývaná aj na počesť jej autorov Stanardova-Bühlmannova metóda, bola predstavená v roku 1983. Od predošlej Chain-Ladder metódy sa líši predovšetkým tým, že je potrebné poznať aj hodnoty zaslúženého poistného plnenia pre jednotlivé roky. Zaslúžené poistné je, vychádzajúc zo zdroja [11], definované ako poistné pripadajúce na 1 deň vynásobené počtom dní v roku, kedy je poistné predpísané. Výšky zaslúženého poistného pre údaje o výškach kumulatívnych poistných plnení pre $1 < i + j \leq n + 1$ z Tabuľky 3 sú uvedené v Tabuľke 6.

V prvom kroku si potrebujeme vypočítať hodnoty vývojových koeficientov, rov-

Tabuľka 6: Výšky zaslúženého poistného uvedené v eurách, patriace k poistným plneniam predstaveným v Tabuľke 2.

Rok vzniku	Zaslúžené poistné
2006	268 617
2007	279 225
2008	318 992
2009	285 663
2010	276 090
2011	280 448
2012	277 029
2013	267 243

Zdroj: [11], vlastné spracovanie.

nako ako v predošlej metóde Chain-Ladder

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}, \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

Keď už poznáme odhadnuté vývojové koeficienty $\hat{\lambda}_j$ vypočítame si kumulatívne koeficienty h_j ako:

$$h_j = \prod_{i=1}^{j} \hat{\lambda}_i, \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

a následne k nim inverzné koeficienty l_j ako:

$$l_j = \frac{1}{h_j}, \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

V ďalšom kroku si musíme upraviť hodnoty zaslúženého poistného tak, že ich vynásobíme inverznými koeficientami. Aby sme boli schopní odhadnúť hodnoty technických rezerv, potrebujeme poznať škodový pomer. Škodový pomer si vypočítame ako podiel súčtu doterajších poistných plnení a súčtu upravených zaslúžených poistných za jednotlivé roky. Na záver si môžeme vypočítať technické rezervy na budúce poistné plnenia ako [11]:

$$\text{technická rezerva}_j = \text{škodový pomer}_j \times \text{zaslúžené poistné}_j \times (1 - l_j),$$

pre $j = 1, 2, \ldots, n$.

Podrobný výpočet môžeme nájsť v Tabuľke 7. Ak spočítame hodnoty posledného stĺpca, dostaneme celkový odhad technických rezerv na krytie poistných plnení z poistných udalostí vzniknutých v rokoch 2007 až 2013, čo v našom prípade predstavuje 124 628,40 eur. Všimnime si, že tento odhad rezervy na budúce poistné plnenia je nižší ako v prípade metódy Chain-Ladder (129 168,40 eur). Keďže metóda Cape-Cod pracuje s vylepšenou technikou odhadovania výšky budúcich poistných plnení, ktorá okrem medziročného vývoja vyplatených poistných plnení zohľadňuje aj výšky zaslúženého poistného, odborníci sa viac môžu prikláňať k výslednému odhadu metódy Cape-Cod (124 628,40 eur). Podľa toho odhadu by teda poisťovňa mohla držať aj trochu nižšie rezervy (v porovnaní s výsledkom postupov Chain-Ladder), čím môže dosiahnuť efektívnejšie umiestnenie zvyšných finančných prostriedkov.

Tabuľka 7: Výpočet technických rezerv uvedených v eurách pomocou metódy Cape-Cod.

Rok vzniku	Zaslúžené poistné	Inverzný koeficient	Doplnok k inverznému koeficientu	Upravené zaslúžené poistné	Doterajšie poistné plnenia	Odhadnutá rezerva
2006	268 617,0	1,0000000	0,00000000	268 617,0	127 909,0	0,0
2007	279 225,0	0,9911812	0,00881877	276 762,6	149 385,0	1 320,9
2008	318 992,0	0,9870538	0,01294621	314 862,3	166 258,0	2 215,2
2009	285 663,0	0,9729953	0,02700467	277 948,8	148 781,0	4 138,0
2010	276 090,0	0,9520627	0,04793731	262 855,0	151 359,0	7 099,3
2011	280 448,0	0,9081877	0,09181228	254 699,4	140 893,0	13 811,6
2012	277 029,0	0,8170576	0,18294240	226 348,6	120 947,0	27 185,2
2013	267 243,0	0,5196504	0,48034963	138 872,9	78 523,0	68 858,3
Škodový pomer= 0,5364042						

Zdroj: vlastné spracovanie.

2.1.3 Bornhuetterova-Fergusonova metóda

Bornhuetterova-Fergusonova metóda bola predstavená v roku 1972 a jej autormi sú Ron Bornhuetter and Ron Ferguson. Táto metóda je veľmi podobná metóde Cape-Cod. Na odhad technických rezerv sú potrebné aj v tomto prípade hodnoty zaslúženého poistného, vývojové koeficienty λ_j, z nich vypočítané kumulatívne koeficienty h_j a inverzné koeficienty l_j, všetky definované v podkapitole 2.1.2. Pri výpočte výšky technických rezerv touto metódou sa neuvažuje so škodovým pomerom ako jednou hodnotou, ale s individuálnymi škodovými priebehmi, definovanými nasledovne [11]:

$$\text{škodovosť} = \frac{\text{vyplatené poistné plnenia}}{\text{vybrané poistné}}.$$

Vychádzajúc z vyššie uvedeného vzorca si v prvom kroku hodnoty nekumulatívnych poistných plnení z Tabuľky 2 vydelíme hodnotou zaslúženého poistného pre daný rok. Hodnoty v trojuholníku pod diagonálou sa z definície doplnia ako aritmetické priemery hodnôt nad diagonálou prislúchajúcich k danému vývojovému roku. Výsledok je zobrazený v Tabuľke 8. Celkové škodové priebehy sú definované ako súčty po riadkoch a zobrazené sú v Tabuľke 9.

Celkový výpočet technických rezerv pomocou Bornhuetterovej-Fergusonovej metódy môžeme nájsť v Tabuľke 10, v ktorej sme využili nasledovné poznatky:

$$\text{technická rezerva}_j = \text{celkový škodový priebeh}_j \times \text{zaslúžené poistné}_j \times (1 - l_j),$$

pre $j = 1, 2, \ldots, n$.

Po použití Bornhuetterovej-Fergusonovej metódy bola stanovená výška technických rezerv na krytie poistných plnení z poistných udalostí vzniknutých v rokoch 2007 až 2013 vo výške 126 879 eur. Tento odhad sa nachádza medzi odhadom získaným metódou Chain-Ladder (129 168,40 eur) a odhadom metódy Cape-Cod (124 628,40 eur). Ako sme to už vyššie spomínali, Bornhuetterova-Fergusonova metóda je podobná metóde Cape-Cod, no uvažuje individuálne škodové priebehy (namiesto celkového škodového priebehu). Dôsledkom zjemnenia odhadov koeficientov škodového priebehu je teda vyšší bodový odhad pre celkovú rezervu (porovnaní s odhadom metódy Cape-Cod), ktorú by poisťovňa mala držať na krytie budúcich poistných plnení za poistné škody vzniknutých v rokoch 2007 až 2013. Treba ale poznamenať, že všetky tri odhady sú len

Tabuľka 8: Výsledná tabuľka škodových pomerov Bornhuetterovej-Fergusonovej metódy, patriacich k hodnotám nekumulatívnych poistných plnení z Tabuľky 2.

	Vývojový rok							
Rok vzniku	1	2	3	4	5	6	7	8
2006	0,2414	0,1466	0,0429	0,0213	0,0100	0,0059	0,0039	0,0042
2007	0,2552	0,1788	0,0513	0,0321	0,0106	0,0066	0,0003	0,0042
2008	0,2682	0,1596	0,0517	0,0211	0,0116	0,0090	0,0021	0,0042
2009	0,2922	0,1471	0,0474	0,0227	0,0113	0,0071	0,0021	0,0042
2010	0,3067	0,1728	0,0492	0,0196	0,0109	0,0071	0,0021	0,0042
2011	0,3049	0,1484	0,0492	0,0234	0,0109	0,0071	0,0021	0,0042
2012	0,2765	0,1601	0,0486	0,0234	0,0109	0,0071	0,0021	0,0042
2013	0,2938	0,1590	0,0486	0,0234	0,0109	0,0071	0,0021	0,0042

Zdroj: vlastné spracovanie.

Tabuľka 9: Celkové škodové priebehy Bornhuetterovej-Fergusonovej metódy.

Rok vzniku	Celkové škodové priebehy
2006	0,4762
2007	0,5392
2008	0,5275
2009	0,5343
2010	0,5726
2011	0,5501
2012	0,5329
2013	0,5492

Zdroj: vlastné spracovanie.

prvotnými bodovými odhadmi, ku ktorým sa ešte v praxi pripočítavajú rôzne druhy bezpečnostných a rizikových prirážok. Z toho vyplýva, že poisťovne v skutočnosti držia vyššie rezervy a odhady rezerv počítané pomocou vyššie spomínaných základných

Tabuľka 10: Výpočet technických rezerv uvedených v eurách pomocou Bornhuetterovej-Fergusonovej metódy.

Rok vzniku	Zaslúžené poistné	Inverzný koeficient	Doplnok k inverznému koeficientu	Celkové škodové priebehy	Odhadnutá rezerva
2006	268 617,0	1,0000000	0,00000000	0,4762	0,0
2007	279 225,0	0,9911812	0,00881877	0,5392	1 327,7
2008	318 992,0	0,9870538	0,01294621	0,5275	2 178,4
2009	285 663,0	0,9729953	0,02700467	0,5343	4 121,7
2010	276 090,0	0,9520627	0,04793731	0,5726	7 578,4
2011	280 448,0	0,9081877	0,09181228	0,5501	14 164,3
2012	277 029,0	0,8170576	0,18294240	0,5329	27 007,6
2013	267 243,0	0,5196504	0,48034963	0,5492	70 500,9

Zdroj: vlastné spracovanie.

metód používajú len ako „odrazové mostíky" k stanoveniu finálnych odhadov technických rezerv. Práve takýmto ďalším postupom odhadovania primeranej výšky rezerv sú venované ďalšie kapitoly tejto diplomovej práce.

3 Odhadovanie technických rezerv využitím kopula funkcií

V tejto kapitole je uvedená nová metóda, opierajúca sa o teóriu kopula funkcií, ktorú v ďalšom texte označujeme CLSC (z angl. *Conditional Least Squares Copula*). Túto metódu sme prevzali z publikácie [17], podrobne sme ju analyzovali a prispôsobili našim potrebám.

Uvažujme nasledujúci trojuholník kumulatívnych poistných plnení. Nech $C_{i,j}$ sú

Tabuľka 11: Vývojový trojuholník kumulatívnych poistných plnení.

Vývojový rok j						
Rok vzniku i	1	2	...	$n-2$	$n-1$	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	...	$C_{1,n-2}$	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	...	$C_{2,n-2}$	$C_{2,n-1}$	
...	...	...	...	...		
$n-2$	$C_{n-2,1}$	$C_{n-2,2}$	...			
$n-1$	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$				
n	$C_{n,1}$					

Zdroj: vlastné spracovanie.

kumulatívne poistné plnenia pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Cieľom je odhadnúť $C_{i,j}$ pre $n+1 < i+j \leq 2n$, pričom vychádzame z modelu podmienenej strednej hodnoty a variancie CMV (z angl. *Conditional Mean and Variance*). CMV model vyzerá nasledovne:

$$C_{i,j} = \mu(C_{i,j-1}, \alpha, j) + \sigma(C_{i,j-1}, \beta, j)\varepsilon_{i,j}(\alpha, \beta),$$

kde α a β sú neznáme parametre, ktorých dimenzia nezávisí od n, μ je spojitá funkcia v premennej α a σ je kladná a spojitá funkcia v premennej β. Veličiny $\varepsilon_{i,j}$ nazývame chybové členy alebo aj rezíduá.

Funkcie μ a σ si definujeme ako

$$\mu(C_{i,j-1}, \alpha, j) = \eta(\alpha, j)C_{i,j-1},$$

$$\sigma(C_{i,j-1}, \beta, j) = \nu(\beta, j)\sqrt{C_{i,j-1}}.$$

Výber optimálnych η a ν je bližšie popísaný v nasledujúcej podkapitole.

3.1 Akaikeho informačné kritérium

Uvažujme opäť funkcie

$$\mu(C_{i,j-1}, \alpha, j) = \eta(\alpha, j)C_{i,j-1},$$
$$\sigma(C_{i,j-1}, \beta, j) = \nu(\beta, j)\sqrt{C_{i,j-1}}.$$

Výber funkcií $\eta(\alpha, j)$ a $\nu(\beta, j)$ môže byť ľubovolný, za predpokladu, že funkcie spĺňajú uvedené vlastnosti:

1. η a ν sú klesajúce v j,
2. $\lim_{j\to\infty} \eta(\alpha, j) = 1$,
3. $\lim_{j\to\infty} \nu(\beta, j) = 0$.

V nasledujúcich Tabuľkách 12 a 13 uvádzame zoznam definícií funkcií η a ν, ktoré sme prevzali z článku [17] a uvažovali aj vo výskume tejto diplomovej práce. Pri voľbe optimálnych η a ν sme vychádzali zo všetkých kombinácií funkcií, uvedených v Tabuľkách 12 a 13. Optimálnu dvojicu sme hľadali pomocou Akaikeho informačného kritéria (v ďalšom texte označujeme len skratkou AIC). AIC nám pomáha pri posudzovaní kvality modelov pre daný dátový súbor. Využíva sa najmä pri lineárnych regresných modeloch a je definovaný nasledovne:

$$\mathrm{AIC} = 2k - 2\ln(\hat{L}),$$

kde k je počet parametrov v modeli a $\hat{L}$ je hodnota funkcie maximálnej vierohodnosti. Nakoľko sa v našom prípade nejedná o lineárny model a naše rezíduá sa neriadia podľa

Tabuľka 12: Typicky používané tvary funkcie $\nu(\beta, j)$.

$\beta_1 \exp(-\beta_2 j)$
$\beta_1 j^{-\beta_2}$
$\beta_1 \log(j) \exp(-\beta_2 j)$
$\beta_1 j^{-\beta_2} \exp(-\beta_3 j)$
$\beta_1 \exp(-\beta_2 j^2)$
$\frac{\beta_1}{j+\beta_2}$
$\frac{\beta_1}{\log(j+\beta_2)}$
$\beta_1 j^{-\beta_2} \exp(-\beta_3 j^2)$

Zdroj: vlastné spracovanie na základe [17].

Tabuľka 13: Typicky používané tvary funkcie $\eta(\alpha, j)$.

$1 + \alpha_1 \exp(-\alpha_2 j)$
$1 + \alpha_1 \exp(-j^{\alpha_2})$
$1 + \alpha_1 j^{-\alpha_2}$
$1 + \alpha_1 (j + \alpha_2)^{-\alpha_3}$
$1 + \alpha_1^{-\alpha_2^j}$
$\alpha_1^{\alpha_2^{-j}}$
$1 - \exp(-\alpha_1 j^{\alpha_2})$
$1 + \alpha_1 \alpha_2 j^{(-1-\alpha_2)} \exp(\alpha_1 j^{-\alpha_2})$
$\exp(\alpha_1 j^{-\alpha_2})$
$1 + \frac{\alpha_1}{j+\alpha_2}$
$1 + \frac{\alpha_1}{\log(j+\alpha_2)}$

Zdroj: vlastné spracovanie na základe [17].

normálneho rozdelenia, nemôžeme použiť klasický výpočet AIC. Preto sme aplikovali na dáta o výške poistných plnení vyplatených v minulom období modifikovanú verziu AIC, ktorá nám slúžila iba na porovnanie 2 modelov. Za lepší z týchto 2 modelov sa vyberie ten, pri ktorom AIC vykazuje nižšie hodnoty.

Pre nájdenie optimálnej kombinácie funkcií η a ν sme si v prvom rade, pre každú dvojicu funkcií η a ν, odhadli optimálne hodnoty parametrov $\hat{\alpha}(\beta)$ a $\hat{\beta}(\alpha)$. Následne sme si vyčíslili hodnoty odhadnutých rezíduí

$$\hat{\varepsilon}_{i,j} = \frac{C_{i,j} - \mu(C_{i,j-1}, \hat{\alpha}, j)}{\sigma(C_{i,j}, \hat{\beta}, j)}.$$

Rezíduá sme si usporiadali do vektora $\hat{\varepsilon}$ a hodnotu AIC vypočítali nasledovne:

$$-2\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_c}\log(w_i) - n_c\left(\log(2\pi) + 1 - \log(n_c) + \log\sum_{i=1}^{n_c} w_i\hat{\varepsilon}_i^2\right)\right] + 2\text{df}.ll,$$

kde n_c je dĺžka vektora $\hat{\varepsilon}$, $w = (1, \ldots, 1)^\top$ je vektor dĺžky n_c a df.ll je počet parametrov α a β zvýšený o 1, teda $k + 1$.

Po výpočte hodnôt AIC pre všetky dvojice funkcií η a ν by sme prehlásili za optimálnu tú kombináciu, ktorá nám dáva najnižšie AIC. Môže sa ale stať, že niektoré funkcie nerešpektujú určité predpoklady, ako napríklad neklesajúcosť kumulatívnych poistných plnení. Preto sme pri výbere optimálnej dvojice η a ν uvažovali dve podmienky, teda aby AIC bolo čo najnižšie a zároveň aby boli splnené všetky predpoklady.

3.2 Výpočet optimálnych parametrov modelu

Jednotlivé optimálne $\hat{\alpha}(\beta)$ a $\hat{\beta}(\alpha)$ sme hľadali ako

$$\hat{\alpha}(\beta) = \arg\min_{\alpha\in\theta_1} M_n(\alpha, \beta),$$
$$\hat{\beta}(\alpha) = \arg\min_{\beta\in\theta_2} V_n(\alpha, \beta),$$

kde

$$M_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{n+1-j}\sum_{i=1}^{n+1-j}\frac{[C_{i,j} - \mu(C_{i,j-1}, \alpha, j)]^2}{\sigma^2(C_{i,j-1}, \beta, j)}$$

a

$$V_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{n+1-j}\sum_{i=1}^{n+1-j}\left\{[C_{i,j} - \mu(C_{i,j-1}, \alpha, j)]^2 - \sigma^2(C_{i,j-1}, \beta, j)\right\}^2.$$

Odhady funkcií M_n a V_n nazývame *Conditional Least Squares Estimates*, teda v preklade podmienené odhady pomocou metódy najmenších štvorcov a ich predpis

možno nájsť v publikácii [17]. Keďže funkcie M_n a V_n už poznáme, môžeme nájsť odhad optimálnych hodnôt $\hat{\alpha}(\beta)$ a $\hat{\beta}(\alpha)$ ako

$$\hat{\alpha}(\beta) = \arg\min_{\alpha \in \theta_1} M_n(\alpha, \beta),$$

$$\hat{\beta}(\alpha) = \arg\min_{\beta \in \theta_2} V_n(\alpha, \beta),$$

kde $\theta_1 = \mathrm{R}^a$, $\theta_2 = \mathrm{R}^b$, pričom a, resp. b predstavujú počet parametrov α, resp. β funkcií $\eta(\alpha, j)$ a $\nu(\beta, j)$.

Pomocou CMV modelu sa podarilo eliminovať efekt strednej hodnoty a variancie, tým pádom závislosť medzi $C_{i,j}$ môžeme ľahko zachytiť modelovaním závislosti odhadnutých rezíduí $\hat{\varepsilon}_{i,j}$

$$\hat{\varepsilon}_{i,j} = \frac{C_{i,j} - \mu(C_{i,j-1}, \hat{\alpha}, j)}{\sigma(C_{i,j}, \hat{\beta}, j)}, \quad \text{pre} \quad i + j < n + 1.$$

3.3 Odhad optimálnej kopula funkcie

Na odhad optimálnej kopula funkcie sme potrebovali odhadnuté rezíduá $\hat{\varepsilon}_{i,j}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$, pre $i = 1, 2, \ldots, n-1$ a $j = 2, 3, \ldots, n+1-i$. Optimálnu kopula funkciu sme odhadli pomocou funkcie dobrej zhody (angl. *goodness of fit*) využitím príkazu `gofCopula` z balíka `copula` [7] v štatistickom softvéri R [19].

Na odhad optimálneho parametra kopula funkcie je potrebná definícia empirickej distribučnej funkcie $\hat{G}_n(e)$ skonštruovanej z odhadnutých rezíduí, uvedená v publikácii [17]:

$$\hat{G}_n(e) = \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2} + 1} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^{n+1-i} I(\hat{\varepsilon}_{i,j}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \leq e).$$

V neposlednom rade si definujeme výpočet parametra kopula funkcie γ pomocou pseudo-vierohodnosti (angl. *pseudo-likelihood method*) [17]:

$$\hat{\gamma} = \arg\max_{\gamma \in \Gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^{n+1-i} \log c\left(\hat{G}_n(\hat{\varepsilon}_{i,j-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})), \hat{G}_n(\hat{\varepsilon}_{i,j}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})); \gamma\right),$$

kde $c(.,.;\gamma)$ je kopula hustota a Γ je definičný obor parametra kopula funkcie.

3.4 Odhad rezerv a ich rozdelenia pomocou bootstrapu

Algoritmus odhadu technických rezerv využitím bootstrap metódy je nasledovný [17]:

1. pre $1 \leq b \leq B$, pričom B je počet bootstrap cyklov,
2. vygenerujeme $n-1$ nezávislých náhodných premenných $\{X_j\}_{j=2}^{n}$ z rovnomerného rozdelenia $U(0,1)$,
3. ${}_{(b)}U_2 \leftarrow X_2$,
4. ${}_{(b)}\hat{\varepsilon}_2 \leftarrow \hat{G}_n^-({}_{(b)}U_2)$, kde $\hat{G}_n^-$ je empirická kvantilová funkcia,
5. pre $\forall j : 3 \leq j \leq n$:
   (a) ${}_{(b)}U_j \leftarrow C_{1|2}^{-1}(X_j|_{(b)}U_{j-1}; \hat{\gamma})$, kde $C_{1|2}^{-1}$ je inverzná funkcia k podmienenej parametrickej kopula funkcii,
   (b) $\hat{\varepsilon}_j \leftarrow \hat{G}_n^-({}_{(b)}U_j)$,
6. ak $b < B$, tak $\rightarrow 1$.

Ešte predtým, ako by sme prešli na výpočet technických rezerv, si potrebujeme vycentrovať bootstrap rezíduá, t. j. od bootstrap rezíduí odčítať ich aritmetický priemer:

$${}_{(b)}\tilde{\varepsilon}_j \leftarrow {}_{(b)}\hat{\varepsilon}_j - \frac{1}{n-1}\sum_{l=2}^{n} {}_{(b)}\hat{\varepsilon}_l,$$

pre všetky $1 \leq b \leq B$. V ďalšom kroku si odhadneme jednotlivé kumulatívne poistné plnenia

$${}_{(b)}\hat{C}_{i,n+1-j} \leftarrow C_{i,n+1-j}$$

a

$${}_{(b)}\hat{C}_{i,j} \leftarrow \mu({}_{(b)}\hat{C}_{i,j-1}, \hat{\alpha}, j) + \sigma({}_{(b)}\hat{C}_{i,j-1}, \hat{\beta}, j)_{(b)}\tilde{\varepsilon}_j,$$

kde $1 \leq b \leq B$, $2 \leq i \leq n$, $n+2-i \leq j \leq n$.

Keď už poznáme všetky odhadnuté výšky kumulatívnych plnení $\hat{C}_{i,j}$, technické rezervy si ľahko dopočítame ako

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - \hat{C}_{i,n+1-i},$$

pre $2 \leq i \leq n$.

Na záver sa celková výška odhadnutých rezerv potrebných na krytie záväzkov vzniknutých v minulých rokoch vypočíta ako súčet $\hat{R}_i$, pre $2 \leq i \leq n$.

4 Metódy odhadu technických rezerv využívajúce bootstrap algoritmus

Už v roku 1785 sme sa vďaka knihe o Baronovi Prášilovi dozvedeli, akú významnú úlohu bootstrap, v preklade popruh na topánke, zohráva. Vďaka nemu sa podarilo Baronovi vytiahnuť z priekopy seba aj svojho koňa a zachrániť si tým život.

V dnešnom ponímaní chápeme bootstrap ako bežne využívanú štatistickú metódu, ktorá sa opiera o jednoduchý náhodný výber s vrátením. Jeho najväčšou výhodou je pomerná jednoduchosť. Poskytuje jednoduchý spôsob odhadu vlastností alebo rozdelenia na základe vzorkovania z odhadnutého približného rozdelenia. Využíva sa to najmä v prípadoch, keď reálne rozdelenie nie je známe alebo veľmi komplikované.

V tejto kapitole sme sa zaoberali metódou CLS, a následne bootstrap modifikáciami základných metód odhadu technických rezerv, ktorými sú

- Chain-Ladder metóda,
- Cape-Cod metóda,
- Bornhuetterova-Fergusonova metóda.

4.1 Metóda CLS

Metóda CLS (z angl. *Conditional Least Squares*) sa opiera o základy metódy vysvetlenej v publikácii [17]. Uvažujme model podmienenej strednej hodnoty a variance CMV, ktorý je definovaný nasledovne

$$C_{i,j} = \mu(C_{i,j-1}, \alpha, j) + \sigma(C_{i,j-1}, \beta, j)\varepsilon_{i,j}(\alpha, \beta),$$

pričom μ a σ si definujeme ako

$$\mu(C_{i,j-1}, \alpha, j) = \eta(\alpha, j)C_{i,j-1},$$

$$\sigma(C_{i,j-1}, \beta, j) = \nu(\beta, j)\sqrt{C_{i,j-1}}.$$

Výber optimálnych η a ν je podrobne popísaný v podkapitole 3.1 a odhad optimálnych parametrov modelu $\hat{\alpha}(\beta)$ a $\hat{\beta}(\alpha)$ je bližšie definovaný v podkapitole 3.2.

Vďaka CMV modelu sa eliminoval vplyv strednej hodnoty a variancie a závislosť medzi $C_{i,j}$ sa modeloval prostredníctvom závislosti medzi odhadnutými rezíduami $\hat{\varepsilon}_{i,j}$. Algoritmus odhadu technických rezerv využitím bootstrap metódy je nasledovný.

1. Pre $1 \leq b \leq B$, kde B je počet bootstrap cyklov:
2. pre $\forall j : 2 \leq j \leq n$:
   (a) za ${}_{(b)}\hat{\varepsilon}_j \leftarrow$ zvolíme rezíduum z jednoduchého náhodného výberu s vrátením zo všetkých odhadnutých nenulových rezíduí $\hat{\varepsilon}_j$, pre $\forall j : 2 \leq j \leq n$,
3. ak $b < B$, tak $\rightarrow 1$.

V prvom kroku sme získané bootstrap rezíduá $\hat{\varepsilon}_j$ vycentrovali pomocou vzťahu

$${}_{(b)}\tilde{\varepsilon}_j \leftarrow {}_{(b)}\hat{\varepsilon}_j - \frac{1}{n-1}\sum_{l=2}^{n} {}_{(b)}\hat{\varepsilon}_l,$$

pre všetky $1 \leq b \leq B$. V ďalšom kroku sme odhadli kumulatívne poistné plnenia ako

$${}_{(b)}\hat{C}_{i,j} = \mu({}_{(b)}\hat{C}_{i,j-1}, \hat{\alpha}, j) + \sigma({}_{(b)}\hat{C}_{i,j-1}, \hat{\beta}, j)\,{}_{(b)}\tilde{\varepsilon}_j,$$

$${}_{(b)}\hat{C}_{i,n+1-j} = C_{i,n+1-j},$$

kde $1 \leq b \leq B$, $2 \leq i \leq n$, $n+2-i \leq j \leq n$.

Využitím odhadnutých kumulatívnych poistných plnení $\hat{C}_{i,j}$, sa technické rezervy dopočítajú ako

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - \hat{C}_{i,n+1-i},$$

pre $2 \leq i \leq n$.

Konečná výška rezerv potrebných na krytie záväzkov vzniknutých v minulých rokoch sa vypočíta ako $\sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i$.

4.2 Základná bootstrap Chain-Ladder metóda

Postupov na výpočet technických rezerv pomocou bootstrap Chain-Ladder metódy existuje hneď niekoľko. V tejto diplomovej práci sú predstavené 3 rôzne prístupy, počnúc základnou, zjednodušenou bootstrap Chain-Ladder metódou, definovanou v publikácii [18]. Pre túto metódu si potrebujeme položiť nasledujúce predpoklady:

1. $C_{i,j}$ sú kumulatívne poistné plnenia,
2. $\mathrm{E}[C_{i,j+1}|C_{i,1},\dots C_{i,j}] = \lambda_j C_{i,j}, \qquad 1 \le i \le n, 1 \le j \le n-1,$
3. $\mathrm{Var}[C_{i,j+1}|C_{i,1},\dots C_{i,j}] = \sigma_j^2 C_{i,j}, \qquad 1 \le i \le n, 1 \le j \le n-1,$
4. kumulatívne poistné plnenia $C_{i,1}, C_{i,2}, \dots, C_{i,n}$ pre rôzne roky vzniku $i = 1, 2, \dots, n$ sú navzájom nezávislé.

Najprv si odhadneme vývojové koeficienty trojuholníka kumulatívnych poistných plnení:

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}, \quad 1 \le j \le n-1.$$

Pomocou odhadu $\hat{\lambda}_j$ môžeme predikovať hodnoty dolného trojuholníka nasledovne:

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,n+1-i} \times \hat{\lambda}_{n+1-i} \times \cdots \times \hat{\lambda}_{j-1}, \quad i + j \ge n + 2.$$

Odhadnutú tabuľku poistných plnení si doplníme spätne pomocou známej diagonály poistných plnení:

$$\hat{C}_{i,n+1-i} = C_{i,n+1-i},$$
$$\hat{C}_{i,j} = \frac{C_{i,n+1-i}}{\hat{\lambda}_{n-i} \times \cdots \times \hat{\lambda}_j}, \quad i + j \le n.$$

V ďalšom kroku si vypočítame neškálované Pearsonove rezíduá (angl. *unscaled Pearson residuals*) ako

$$r_{i,j} = \frac{(C_{i,j} - C_{i,j-1}) - (\hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1})}{\sqrt{\hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1}}},$$

kde $i + j \le n + 1$ a navyše ak $j = 1$, tak $C_{i,j-1} = \hat{C}_{i,j-1} = 0$.

Vyššie uvedený postup je v podstate tou základnou Chain-Ladder metódou, ktorú sme podrobnejšie rozoberali v podkapitole 2.1.1. Bootstrap algoritmus je nasledovný [18].

1. Pre $1 \leq b \leq B$:
2. vypočítame $\{{}_{(b)}r^{\star}_{i,j}\}$, pomocou vzorkovania z pôvodných Pearsonových rezíduí $r_{i,j}$,
3. definujeme ${}_{(b)}X^{\star}_{i,j} = {}_{(b)}r^{\star}_{i,j}\sqrt{\hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1}} + \hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1}$, kde $i + j \leq n + 1$,
4. postupne doplníme hodnoty horného trojuholníka $C^{\star}_{i,j} = {}_{(b)}X^{\star}_{i,j} + C^{\star}_{i,j-1}$, kde $i + j \leq n + 1$,
5. vypočítame si nové vývojové koeficienty λ_j a pomocou základnej metódy Chain-Ladder odhadneme hodnoty dolného trojuholníka ako $\hat{C}_{i,j} = \lambda_j C_{i,j-1}$, kde $n < i + j \leq 2n$,
6. dostávame hodnotu technickej rezervy pomocou vzťahu $R_i = C_{i,n} - C_{i,n-i+1}$ a tieto hodnoty technických rezerv si zapamätáme ako $R_{b,i}$,
7. ak $b < B$, tak $\rightarrow 1$.

Vyššie uvedený bootstrap algoritmus prebehne B-krát a výsledok pozostáva z matice technických rezerv rozmeru $B \times n$. Všetky riadky zoradíme a za výsledok bootstrap Chain-Ladder metódy si vezmeme tú hodnotu, ktorá korešponduje so žiadaným kvantilom. Napríklad ak $B = 1000$ a chceme vypočítať 95%-ný kvantil, tak odhadnuté rezervy si usporiadame od najmenšej po najväčšiu a za výsledok vezmeme 950-tu hodnotu v poradí.

Bootstrap Chain-Ladder metódu sme aplikovali na rôzne vývojové trojuholníky poistných plnení. Výsledky tejto metódy a porovnania s ostatnými postupmi možno nájsť v kapitole 5.

4.3 ODP bootstrap Chain-Ladder metóda

Ako sme už aj v druhej kapitole tejto práce spomínali, Chain-Ladder metóda je deterministický algoritmus, jednoduchý na implementáciu. Je to model, ktorý nie je

založený na matematickej štatistike. Z tohto dôvodu boli vyvinuté rôzne stochastické metódy. Metódy uvedené v podkapitolách 4.3 a 4.4 vychádzajú zo zovšeobecneného lineárneho modelu, ktorý označujeme GLM (z angl. *Generalized Linear Model*). GLM odhady môžu byť počítané pre rôzne rozdelenia, najbežnejšie využívanými pri odhade technických rezerv sú Poissonovo a gama rozdelenie. V tejto podkapitole si priblížime odhad technických rezerv pomocou ODP bootstrap Chain-Ladder metódy, pričom vychádzame z teórie definovanej v [9, 24]. V prípade tejto metódy využívame poznatky Poissonovho rozdelenia.

Definícia 4.1. [5] Hovoríme, že diskrétna náhodná premenná X má Poissonovo rozdelenie s parametrom $\mu > 0$, ak pre každé $k = 0, 1, 2, \ldots$ platí

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\mu^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu}.$$

Označujeme $X \sim Po(\mu)$.

Medzi základné charakteristiky Poissonovho rozdelenia patria [5]:

1. stredná hodnota $\mathrm{E}(X) = \mu$,
2. variancia $\mathrm{Var}(X) = \mu$.

V praxi sa často dostávame do situácie, kedy môže byť prítomná taká korelácie medzi výsledkami, ktorá je v rozpore s predpokladmi. V takomto prípade uvažujeme Poissonovo rozdelenie s nadmernou varianciou [9], ktoré označujeme v ďalšom texte skratkou ODP (z angl. *Over-Dispersed Poisson*). ODP model pre nekumulatívne poistné plnenia definujeme strednou hodnotou

$$\mathrm{E}(X_{i,j}) = \mu_{i,j}$$

a varianciou

$$\mathrm{Var}(X_{i,j}) = \theta\mu_{i,j}.$$

Teda ak $\theta = 1$, tak dostávame klasické Poissonovo rozdelenie. Ak $\theta > 1$, tak máme ODP model, s ktorým ďalej pracujeme aj pri výpočte technických rezerv pomocou metódy bootstrap Chain-Ladder.

V prvom rade si na základe poznatkov trojuholníka kumulatívnych poistných plnení $C_{i,j}$ odhadneme vývojové koeficienty ako:

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}, \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

Pomocou známej diagonály a odhadnutých vývojových koeficientov si spätne odhadneme hodnoty horného trojuholníka:

$$\hat{C}_{i,n+1-i} = C_{i,n+1-i},$$
$$\hat{C}_{i,j} = \frac{C_{i,n+1-i}}{\hat{\lambda}_{n-i} \times \cdots \times \hat{\lambda}_j}, \quad i+j \leq n.$$

Z odhadnutého vývojového trojuholníka kumulatívnych poistných plnení si ľahko dopočítame trojuholník odhadnutých nekumulatívnych poistných plnení $\hat{X}_{i,j}$, pre $i+j \leq n$. Následne si vypočítame hodnoty neškálovaných Pearsonových rezíduí $r_{i,j}$ pomocou vzťahu:

$$r_{i,j} = \frac{X_{i,j} - \hat{X}_{i,j}}{\sqrt{\hat{X}_{i,j}}},$$

pre $i+j \leq n$, kde $X_{i,j}$ resp. $\hat{X}_{i,j}$ sú pôvodné resp. odhadnuté nekumulatívne poistné plnenia.

Vypočítame si stupne voľnosti df (z angl. *degrees of freedom*) ako $N-p$, kde N je veľkosť vzorky, teda počet prvkov horného trojuholníka poistných plnení rovný $\frac{n(n+1)}{2}$, p je počet odhadovaných parametrov rovný $2n-1$, a škálovací parameter

$$\theta = \frac{\sum_{i+j\leq n} r_{i,j}^2}{\mathrm{df}}.$$

Využitím poznatku stupňov voľnosti df si upravíme hodnoty Pearsonových rezíduí (angl. *adjusted Pearson residuals*) na základe nasledujúceho vzťahu:

$$r_{i,j}^{\mathrm{adj}} = \sqrt{\frac{N}{\mathrm{df}}}\, r_{i,j},$$

pre $i+j \leq n$. Bootstrap algoritmus je nasledovný [9, 24].

1. Pre $1 \leq b \leq B$:

2. vypočítame si nové upravené Pearsonove rezíduá $r_{i,j}^{\star}$ pomocou jednoduchého náhodného výberu s vrátením z pôvodných upravených Pearsonových rezíduí $r_{i,j}^{\mathrm{adj}}$,

3. nové hodnoty horného trojuholníka nekumulatívnych poistných plnení si odhadneme ako $X^{\star}_{i,j} = \hat{X}_{i,j} + r^{\star}_{i,j}\sqrt{\hat{X}_{i,j}}$, a následne si z nekumulatívnych poistných plnení dopočítame kumulatívne poistné plnenia,

4. vypočítame si vývojové koeficienty λ_j a pomocou základnej Chain-Ladder metódy z podkapitoly 2.1.1 si odhadneme hodnoty dolného trojuholníka kumulatívnych poistných plnení,

5. vypočítané kumulatívne poistné plnenia si opakovane prevedieme na nekumulatívne,

6. do odhadu budúcich poistných plnení zahrnieme aj varianciu procesu, simulovaním prírastkových (nekumulatívnych) poistných plnení z gama rozdelenia, pričom nové odhady označíme ako $X^{\star\star}_{i,j}$ pre všetky $n+1 < i+j \leq 2n$; varianciu si vypočítame ako súčin strednej hodnoty a škálovacieho parametra, kde za strednú hodnotu berieme odhadnuté prírastkové poistné plnenie z kroku 5.; predpokladáme pritom, že prírastkové poistné plnenia sú navzájom nezávislé; treba podotknúť, že teoreticky vychádzame z Poissonovho rozdelenia s nadmernou varianciou, ale v skutočnosti pracujeme s gama rozdelením ako blízkou aproximáciou,

7. na záver prevedieme vygenerované nekumulatívne poistné plnenia $X^{\star\star}_{i,j}$ na kumulatívne, ktoré označíme $C^{\star\star}_{i,j}$,

8. hodnotu technickej rezervy dostaneme pomocou klasického vzťahu $R_i = C^{\star\star}_{i,n} - C^{\star\star}_{i,n-i+1}$ a tieto hodnoty technických rezerv uložíme do $R_{b,i}$,

9. ak $b < B$, tak $\rightarrow 1$.

Po spustení vyššie definovaného algoritmu na reálnych dátach o výške poistných plnení vyplatených v minulom období dostávame maticu technických rezerv na budúce poistné plnenia, z ktorých si vypočítame požadované kvantily. Výpočty pre rôzne vývojové trojuholníky poistných plnení sú uvedené v kapitole 5.

4.4 Gama bootstrap Chain-Ladder metóda

V tejto podkapitole je bližšie definovaný gama model pre výpočet technických rezerv pomocou bootstrap Chain-Ladder metódy, pričom vychádzame zo zdroja [9]. Gama model pre nekumulatívne poistné plnenia definujeme strednou hodnotou

$$\mathrm{E}(X_{i,j}) = \mu_{i,j},$$

pričom od predošlého ODP modelu sa odlišuje definíciou variancie, ktorý vyzerá nasledovne:

$$\mathrm{Var}(X_{i,j}) = \theta\mu_{i,j}^2.$$

Bootstrap algoritmus odhadu technických rezerv je definovaný v predošlej podkapitole 4.3, rozdiel nastáva iba v bode 6 bootstrap algoritmu. Pri simulovaní prírastkových poistných plnení z gama rozdelenia uvažujeme varianciu ako súčin škálovacieho parametra a druhej mocniny strednej hodnoty, pričom strednú hodnotu definujeme ako prírastkové poistné plnenie odhadnuté v kroku 5 bootstrap algoritmu.

Celý algoritmus prebehne B-krát a vypočítame príslušné kvantily. Gama bootstrap Chain-Ladder metódu sme aplikovali na rôzne vývojové trojuholníky poistných plnení a výsledky sú zobrazené v kapitole 5.

4.5 Bootstrap Cape-Cod metóda

Základný algoritmus bootstrap Cape-Cod metódy je rovnaký ako u zjednodušenej bootstrap Chain-Ladder metódy [18] definovanej v podkapitole 4.2. V prvom kroku si odhadneme vývojové koeficienty trojuholníka kumulatívnych poistných plnení $\hat{\lambda}_j$, pre $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Využitím odhadu $\hat{\lambda}_j$ môžeme predikovať hodnoty dolného trojuholníka, a následne spätným algoritmom doplniť hodnoty horného trojuholníka pomocou známej diagonály:

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{i,j} &= C_{i,n+1-i} \times \hat{\lambda}_{n+1-i} \times \cdots \times \hat{\lambda}_{j-1} \quad i+j \geq n+2, \\
\hat{C}_{i,n+1-i} &= C_{i,n+1-i}, \\
\hat{C}_{i,j} &= \frac{C_{i,n+1-i}}{\hat{\lambda}_{n-i} \times \cdots \times \hat{\lambda}_j} \quad i+j \leq n.
\end{aligned}$$

V ďalšom kroku si vypočítame neškálované Pearsonove rezíduá, ktorých výpočet je definovaný v podkapitole 4.2. Algoritmus bootstrap Cape-Cod metódy je nasledovný.

1. Pre $1 \leq b \leq B$:
2. vypočítame $\{{}_{(b)}r^{\star}_{i,j}\}$, a to pomocou vzorkovania (z angl. *sampling*) z pôvodných neškálovaných Pearsonových rezíduí $r_{i,j}$,
3. definujeme ${}_{(b)}X^{\star}_{i,j} = {}_{(b)}r^{\star}_{i,j}\sqrt{\hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1}} + \hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1}$, kde $i + j \leq n + 1$,
4. hodnoty horného trojuholníka odhadneme ako $C^{\star}_{i,j} = {}_{(b)}X^{\star}_{i,j} + C^{\star}_{i,j-1}$, kde $i + j \leq n + 1$,
5. ďalej postupujeme rovnako, ako v základnej Cape-Cod metóde (definovanej v podkapitole 2.1.2), teda si vypočítame nové vývojové koeficienty λ_j, z nich kumulatívne koeficienty h_j, a následne k nim inverzné koeficienty l_j, pre $j = 1, 2, \ldots, n - 1$,
6. upravíme si hodnoty zaslúženého poistného tak, že ich vynásobíme vypočítanými inverznými koeficientami,
7. vypočítame si škodový pomer ako podiel súčtu doterajších poistných plnení a súčtu upravených zaslúžených poistných za jednotlivé roky,
8. na záver dostávame hodnotu technickej rezervy na budúce poistné plnenia z definície:
   technická rezerva$_j$ = škodový pomer$_j$ $\times$ zaslúžené poistné$_j$ $\times (1 - l_j)$, pričom tieto rezervy si zapamätáme ako $R_{b,j}$, pre $j = 1, 2, \ldots, n$,
9. ak $b < B$, tak $\rightarrow 1$.

Vyššie uvedený bootstrap algoritmus prebehne B-krát a výslednú maticu technických rezerv usporiadame podľa riadkov od najmenšej po najväčšiu a vypočítame žiadané kvantily.

Bootstrap Cape-Cod metódu sme aplikovali na rôzne vývojové trojuholníky kumulatívnych poistných plnení. Výsledky tejto metódy a porovnania s ostatnými postupmi možno nájsť v kapitole 5.

4.6 Druhá verzia bootstrap Cape-Cod metódy

V tejto podkapitole si predstavíme 2. prístup k odhadovaniu výšky technických rezerv pomocou Cape-Cod metódy inšpirovaný článkom [15]. Uvažujme vývojový trojuholník kumulatívnych poistných plnení $C_{i,j}$ s rokmi vzniku $i = 0, 1, \ldots, n$ a vývojovými rokmi $j = 0, 1, \ldots, n$. Táto metóda je založená na princípe generovania B horných trojuholníkov kumulatívnych poistných plnení v každom bootstrap cykle pomocou AR(1) modelu

$$C_{i,j+1} = \lambda_j C_{i,j} + \sigma_j \sqrt{C_{i,j}} z_{i,j+1},$$

pričom bootstrap algoritmus je nasledovný [15].

1. Pre každé $1 \leq b \leq B$:

2. pre daný vývojový trojuholník kumulatívnych poistných plnení si vypočítame vývojové koeficienty λ_j ako

$$\lambda_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

3. vychádzajúc z vývojových koeficientov λ_j dostaneme hodnoty koeficientu σ_j ako

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \lambda_j \right)^2},$$

pre $j = 0, 1, \ldots, n-1$,

4. následne si definujeme a dopočítame hodnoty rezíduí $\varepsilon_{i,j+1}$ ako

$$\varepsilon_{i,j+1} = \frac{\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \lambda_j}{\sigma_j} \sqrt{C_{i,j}},$$

pre $j = 0, 1, \ldots, n-1$ a $i = 0, \ldots, n-1-j$,

5. v neposlednom rade vypočítame hodnoty upravených rezíduí (z angl. *adjusted residuals*)

$$z_{i,j+1} = \frac{\varepsilon_{i,j+1}}{\sqrt{1 - \frac{C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}}},$$

pre $j = 0, 1, \ldots, n-1$ a $i = 0, \ldots, n-1-j$,

6. predpokladáme, že každá hodnota upravených rezíduí $z_{i,j}$ má rovnakú váhu, následne pomocou jednoduchého náhodného výberu s vrátením vygenerujeme nový trojuholník upravených rezíduí $z^{\star}_{i,j}$,

7. pomocou nových upravených rezíduí si vygenerujeme horný trojuholník kumulatívnych poistných plnení pomocou AR(1) modelu:

$$C^{\star}_{i,j} = \lambda_{j-1} C^{\star}_{i,j-1} + \sigma_{j-1} \sqrt{C^{\star}_{i,j-1}} z^{\star}_{i,j+1},$$

pričom prvý stĺpec je známy $C^{\star}_{i,0} = C_{i,0}$ a $i + j < n$,

8. hodnoty technických rezerv si dopočítame klasickou Cape-Cod metódou, pri ktorej si najprv vyjadríme hodnoty vývojových koeficientov λ_j, z nich si dopočítame kumulatívne koeficienty h_j, a následne k nim inverzné koeficienty l_j pre $j = 0, 1, \ldots, n-1$,

9. upravíme si hodnoty zaslúženého poistného prenásobením inverznými koeficientami,

10. vypočítame si škodový pomer a dostávame hodnoty technických rezerv na poistné plnenia podľa definície:
technická rezerva$_j$ = škodový pomer$_j$ $\times$ zaslúžené poistné$_j$ $\times (1 - l_j)$, pričom tieto rezervy si zapamätáme ako $R_{b,j}$, kde $j = 0, 1, \ldots, n$,

11. ak $b < B$, tak $\rightarrow 1$.

Po spustení B cyklov 2. verzie bootstrap Cape-Cod metódy dostávame maticu technických rezerv rozmeru $B \times n$. Túto maticu si usporiadame podľa riadkov od najmenšej po najväčšiu a vypočítame požadovaný kvantil.

4.7 Bootstrap Bornhuetterova-Fergusonova metóda

V prvom kroku algoritmu bootstrap Bornhuetterovej-Fergusonovej metódy si vypočítame vývojové koeficienty $\hat{\lambda}_j$ z kumulatívnych poistných plnení. Pomocou nich odhadneme hodnoty dolného trojuholníka, a následne spätným algoritmom si doplníme hodnoty horného trojuholníka. V ďalšom kroku si vypočítame Pearsonove rezíduá (všetky definície sú uvedené v podkapitole 4.2).

Vyššie uvedený postup je základným algoritmom bootstrap Chain-Ladder metódy (viď podkapitolu 4.2) prevzatej z publikácie [18].

Bootstrap algoritmus je nasledovný.

1. Pre $1 \leq b \leq B$:
2. vypočítame $\{{}_{(b)}r^{\star}_{i,j}\}$, a to pomocou vzorkovania (z angl. *sampling*) z pôvodných Pearsonových rezíduí $r_{i,j}$,
3. definujeme ${}_{(b)}X^{\star}_{i,j} = {}_{(b)}r^{\star}_{i,j}\sqrt{\hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1}} + \hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1}$, kde $i + j \leq n + 1$,
4. následne doplníme hodnoty horného trojuholníka kumulatívnych poistných plnení ako $C^{\star}_{i,j} = {}_{(b)}X^{\star}_{i,j} + C^{\star}_{i,j-1}$, kde $i + j \leq n + 1$,
5. v nasledujúcich krokoch využijeme základnú Bornhuetterovu-Fergusonovu metódu a teda vypočítame aktuálne vývojové koeficienty λ_j, k nim prislúchajúce kumulatívne koeficienty h_j a z nich inverzné koeficienty l_j pre $j = 1, 2, \ldots, n-1$,
6. k finálnemu výpočtu technickej rezervy potrebujeme poznať individuálne škodové priebehy
$$\text{škodovosť} = \frac{\text{vyplatené poistné plnenia}}{\text{vybrané poistné}},$$
7. škodové pomery sčítame po riadkoch a dostávame hodnotu celkových škodových priebehov, počas jednotlivých rokov vzniku poistných udalostí,
8. na záver si vypočítame hodnotu technickej rezervy ako
technická rezerva$_j$ = celkový škodový priebeh$_j$× zaslúžené poistné$_j$ × $(1 - l_j)$,
pričom tieto rezervy si zapamätáme ako $R_{b,j}$ pre $j = 1, 2 \ldots, n$,
9. ak $b < B$, tak $\rightarrow 1$.

Vyššie uvedený bootstrap algoritmus prebehol B-krát, výslednú maticu technických rezerv sme po riadkoch usporiadali od najmenšej po najväčšiu a vypočítali sme kvantily.

Bootstrap Bornhuetterovu-Fergusonovu metódu sme aplikovali na rôzne druhy dát o výške poistných plnení vyplatených v minulom období. Výsledky tejto metódy a porovnania s ostatnými postupmi možno nájsť v kapitole 5.

4.8 Druhá verzia bootstrap Bornhuetterovej-Fergusonovej metódy

Druhá verzia odhadu výšky technických rezerv pomocou Bornhuetterovej-Fergusonovej metódy, vychádzajúca zo zdroja [15], je založená na AR(1) modeli

$$C_{i,j+1} = \lambda_j C_{i,j} + \sigma_j \sqrt{C_{i,j}} z_{i,j+1}.$$

Bootstrap algoritmus tejto metódy je nasledovný [15].

1. Pre každé $1 \leq b \leq B$:

2. vývojové koeficienty pre daný trojuholník kumulatívnych poistných plnení λ_j definujeme podľa známeho vzorca

$$\lambda_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

3. hodnoty koeficientu σ_j dostaneme ako

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \lambda_j \right)^2},$$

   pre $j = 0, 1, \ldots, n-1$,

4. následne si dopočítame hodnoty rezíduí

$$\varepsilon_{i,j+1} = \frac{\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \lambda_j}{\sigma_j} \sqrt{C_{i,j}},$$

   pre $j = 0, 1, \ldots, n-1$ a $i = 0, \ldots, n-1-j$,

5. pomocou vývojových koeficientov λ_j, koeficientov σ_j a rezíduí $\varepsilon_{i,j+1}$ si v neposlednom rade vypočítame hodnoty upravených rezíduí (z angl. *adjusted residuals*)

$$z_{i,j+1} = \frac{\varepsilon_{i,j+1}}{\sqrt{1 - \frac{C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}}},$$

   pre $j = 0, 1, \ldots, n-1$ a $i = 0, \ldots, n-1-j$,

6. predpokladáme, že každá hodnota upravených rezíduí $z_{i,j}$ má rovnakú váhu, následne pomocou jednoduchého náhodného výberu s vrátením vygenerujeme nový trojuholník upravených rezíduí $z^{\star}_{i,j}$, kde $j = 0, 1, \ldots, n-1$ a $i = 0, \ldots, n-1-j$,

7. pomocou $z^{\star}_{i,j}$, si vygenerujeme horný trojuholník kumulatívnych poistných plnení využitím AR(1) modelu:

$$C^{\star}_{i,j} = \lambda_{j-1} C^{\star}_{i,j-1} + \sigma_{j-1} \sqrt{C^{\star}_{i,j-1}} z^{\star}_{i,j+1},$$

   kde $C^{\star}_{i,0} = C_{i,0}$ a $i + j < n$,

8. výšky technických rezerv dopočítame základnou Bornhuetterovou-Fergusonovou metódou, pri ktorej si najprv vypočítame hodnoty vývojových koeficientov λ_j využitím kumulatívnych poistných plnení, z nich si vypočítame kumulatívne koeficienty h_j, a potom k nim inverzné koeficienty l_j, kde $j = 0, 1, \ldots, n-1$,

9. k finálnemu výpočtu technickej rezervy pre budúce poistné plnenia potrebujeme poznať hodnoty individuálnych škodových priebehov, ktoré definujeme nasledovne

$$\text{škodovosť} = \frac{\text{vyplatené poistné plnenia}}{\text{vybrané poistné}},$$

10. škodové pomery sčítame po riadkoch a dostávame hodnotu celkových škodových priebehov,

11. na záver si vypočítame hodnotu technickej rezervy ako
    technická rezerva$_j$ = celkový škodový priebeh$_j$ $\times$ zaslúžené poistné$_j$ $\times (1 - l_j)$,
    pričom tieto rezervy si zapamätáme ako $R_{b,j}$ pre $j = 0, 1, \ldots, n$,

12. ak $b < B$, tak $\to 1$.

Po spustení B cyklov 2. verzie bootstrap Bornhuetterovej-Fergusonovej metódy dostávame maticu technických rezerv rozmeru $B \times n$. Túto maticu si usporiadame podla riadkov od najmenšej po najväčšiu a vypočítame požadovaný kvantil.

4.9 Prehľad odbornej literatúry o možnostiach odhadovania výšky technických rezerv

Pri definícii v kapitole 2 vymenovaných metód sme vychádzali najmä z publikácie [6] od autora D. Hindley. V tejto knihe možno nájsť úvod do teórie poisťovníctva s definíciami základnej terminológie ako napríklad vývojový trojuholník kumulatívnych poistných plnení. V publikácii sú uvedené aj algoritmy výpočtu výšky technických rezerv metódami Chain-Ladder, Cape-Cod a Bornuetterovej-Fergusonovej metódy. Poznatky z knihy [6] sme následne využili pri stochastických metódach odhadovania výšky technických rezerv. Kým pri základných metódach sme získali bodový odhad výšky technických rezerv, pri stochastických metódach sme odhadovali kvantily.

Prvou publikáciou, s ktorou sme sa počas diplomového výskumu podrobnejšie zaoberali, je článok [17] od autorov M. Pešta a O. Okhrin. Vo svojej publikácii sa venovali odhadovaniu výšky technických rezerv využitím teórie kopula funkcií. Autori vychádzali zo základnej poistnej terminológie definovanej v knihe [6], pričom predpokladali, že $Y_{i,j}$ sú kumulatívne poistné plnenia na také poistné udalosti, ktoré nastali v roku i a boli vyplatené do konca roka j do plnej sumy. Pre konzistentnosť s inými publikáciami označujeme v tejto práci kumulatívne poistné plnenia ako $C_{i,j}$.

Vývojové trojuholníky kumulatívnych poistných plnení sa skladajú z pozorovaní, ktoré sú usporiadané v čase. Je preto logické predpokladať, že tieto pozorovania sú navzájom závislé. Tento predpoklad definovali aj autori v článku [17] ako model podmienenej strednej hodnoty a variancie CMV (z angl. *Conditional Mean and Variance*), ktorý vyzerá nasledovne

$$C_{i,j} = \mu(C_{i,j-1}, \alpha, j) + \sigma(C_{i,j-1}, \beta, j)\varepsilon_{i,j}(\alpha, \beta).$$

Obzvlášť veľkú pozornosť venovali autori odhadu optimálnych parametrov $\hat{\alpha}(\beta)$ a $\hat{\beta}(\alpha)$, a následne odhadu optimálnych funkcií μ a σ (algoritmus výberu optimálnych parametrov a funkcií je bližšie definovaný v kapitole 3).

CMV model publikovaný v článku [17] eliminuje efekt strednej hodnoty a variancie a závislosť medzi $C_{i,j}$ môžno ľahko modelovať ako závislosť medzi odhadnutými rezíduami $\hat{\varepsilon}_{i,j}$. Pre odhadnuté rezíduá autori definovali bootstrap algoritmus odhadu

výšky technických rezerv a pre dvojice odhadnutých rezíduí uviedli návod k odhadu optimálnej kopula funkcie a jej parametra.

Ďalšími publikáciami, o ktoré sme sa v tejto diplomovej práci opierali, sú články, ktoré sa venovali bootstrap modifikáciám základných metód. Prvou takouto publikáciou je článok [18] od M. Peštu zaoberajúci sa základnou bootstrap Chain-Ladder metódou. Bootstrap algoritmus spočíval pri tejto metóde, ako aj pri mnohých iných zaoberajúcich sa stochastickým odhadom výšky technických rezerv, v generovaní nových trojuholníkov poistných plnení. Základnou myšlienkou pri generovaní nových trojuholníkov je výpočet neškálovaných Pearsonových rezíduí (definovaných v podkapitole 4.2). Pre pôvodný a všetky ďalšie vygenerované trojuholníky poistných plnení autor pomocou klasickej Chain-Ladder metódy odhadol výšku technických rezerv.

O myšlienku výpočtu Pearsonových rezíduí sa opierali aj články [9, 24], v ktorých boli definované bootstrap Chain-Ladder metódy vychádzajúce z gama rozdelenia a Poissonovho rozdelenia s nadmernou varianciou. Článok [24], ktorého autormi sú S. Wang, J. W. K. Leong a H. Chen, sa bližšie zaoberal bootstrap Chain-Ladder metódou založenou na Poissonovom rozdelení s nadmernou varianciou. Autori na konkrétnom príklade definovali celý bootstrap algoritmus počnúc výpočtom Pearsonových rezíduí, ako tomu bolo aj v publikácii [18] M. Peštu. Jedným z hlavných rozdielov publikácie [24] v porovnaní s článkom [18] je úprava základných Pearsonových rezíduí. Nové hodnoty nekumulatívnych poistných plnení v hornom trojuholníku následne autori definovali pomocou vzťahu

$$X^{\star}_{i,j} = \hat{X}_{i,j} + r^{\star}_{i,j}\sqrt{\hat{X}_{i,j}},$$

kde $r^{\star}_{i,j}$ sú upravené Pearsonove rezíduá. Hodnoty poistných plnení v dolnom trojuholníku si autori odhadli pomocou základnej Chain-Ladder metódy, pričom do odhadu budúcich poistných plnení zahrnuli aj varianciu procesu, generovaním prírastkových poistných plnení z gama rozdelenia.

Na podobnom princípe ako ODP bootstrap Chain-Ladder metóda je založená aj gama bootstrap Chain-Ladder metóda, definovaná v publikácii [9] od autora T. R. Chase. Autor tohto článku uvádza bootstrap algoritmus výpočtu technických rezerv na základe bootstrap Chain-Ladder metódy vychádzajúcej z gama rozdelenia. Boots-

trap algoritmus je rovnaký ako v článku [24] od autorov S. Wang, J. W. K. Leong a H. Chen, líši sa jedine odhadom budúcich poistných plnení. Pri generovaní prírastkových poistných plnení sa uvažuje s varianciou gama rozdelenia (bližšie definované v podkapitole 4.4).

V neposlednom rade by sme spomenuli aj článok [15] od autorov B. Linda, J. Kubanová a J. Jindrová. V tomto článku je definovaný okrem iného aj bootstrap algoritmus na výpočet výšky technických rezerv vychádzajúc z Bornhuetterovej-Fergusonovej metódy. Tento algoritmus sa od predošlých bootstrap algoritmov, spomenutých v tejto podkapitole, líši od základov. Neopiera sa o výpočet Pearsonových rezíduí, ale pri výpočte budúcich poistných plnení sú využité vývojové koeficienty λ_j, koeficienty σ_j a z nich vypočítané rezíduá $\varepsilon_{i,j}$. Hodnoty týchto rezíduí odporúčali autori upraviť na hodnoty $z_{i,j}$ (podľa vzťahov definovaných v podkapitole 4.8). Nový trojuholník kumulatívnych poistných plnení autori definovali pomocou AR(1) vzťahu ako

$$C^{\star}_{i,j} = \lambda_{j-1} C^{\star}_{i,j-1} + \sigma_{j-1} \sqrt{C^{\star}_{i,j-1}}\, z^{\star}_{i,j+1},$$

kde $i + j < n$ a pre prvý stĺpec platí $C^{\star}_{i,0} = C_{i,0}$.

Aj na základe poznatkov z vyššie uvedených publikácií sme premietli teóriu do praxe a na konkrétnych údajoch o výškach kumulatívnych poistných plnení pre $1 < i + j \leq n + 1$ sme odhadovali technické rezervy na budúce poistné plnenia. Všetky realizované výpočty sú publikované v nasledujúcej kapitole.

5 Odhady technických rezerv pre rôzne vývojové trojuholníky poistných plnení

Viaceré metódy z predošlých kapitol sme aplikovali na rôzne vývojové trojuholníky poistných plnení zobrazené v tejto kapitole. V prípade každej metódy sme za počet bootstrap krokov vzali $B = 5000$.

5.1 Odhad výšky rezerv pre odškodňovací fond spoločnosti

Dáta, o ktorých sa pojednáva v tejto podkapitole, pochádzajú zo zdroja [1]. Nejedná sa o typické dáta poisťovne s informáciami o vyplatených poistných plnení, ale o odškodňovací fond firmy pre prípad úrazu, resp. smrti zamestnanca v rokoch 1977 až 1987. Z tohto dôvodu nemáme k dispozícii hodnoty zaslúženého poistného. Vývojové trojuholníky sú zobrazené v Tabuľkách 14 a 15.

Tabuľka 14: Vývojový trojuholník nekumulatívnych poistných plnení uvedených v amerických dolároch.

	Vývojový rok										
Rok vzniku	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1977	153 638	188 412	134 534	87 456	60 348	42 404	31 238	21 252	16 622	14 440	12 200
1978	178 536	226 412	158 894	104 686	71 448	47 990	35 576	24 818	22 662	18 000	
1979	210 172	259 168	188 388	123 074	83 380	56 086	38 496	33 768	27 400		
1980	211 448	253 482	183 370	131 040	78 994	60 232	45 568	38 000			
1981	219 810	266 304	194 650	120 098	87 582	62 750	51 000				
1982	205 654	252 746	177 506	129 522	96 786	82 400					
1983	197 716	255 408	194 648	142 328	105 600						
1984	239 784	329 242	264 802	190 400							
1985	326 304	471 744	375 400								
1986	420 778	590 400									
1987	496 200										

Zdroj: [1], vlastné spracovanie.

Tabuľka 15: Vývojový trojuholník kumulatívnych poistných plnení uvedených v dolároch.

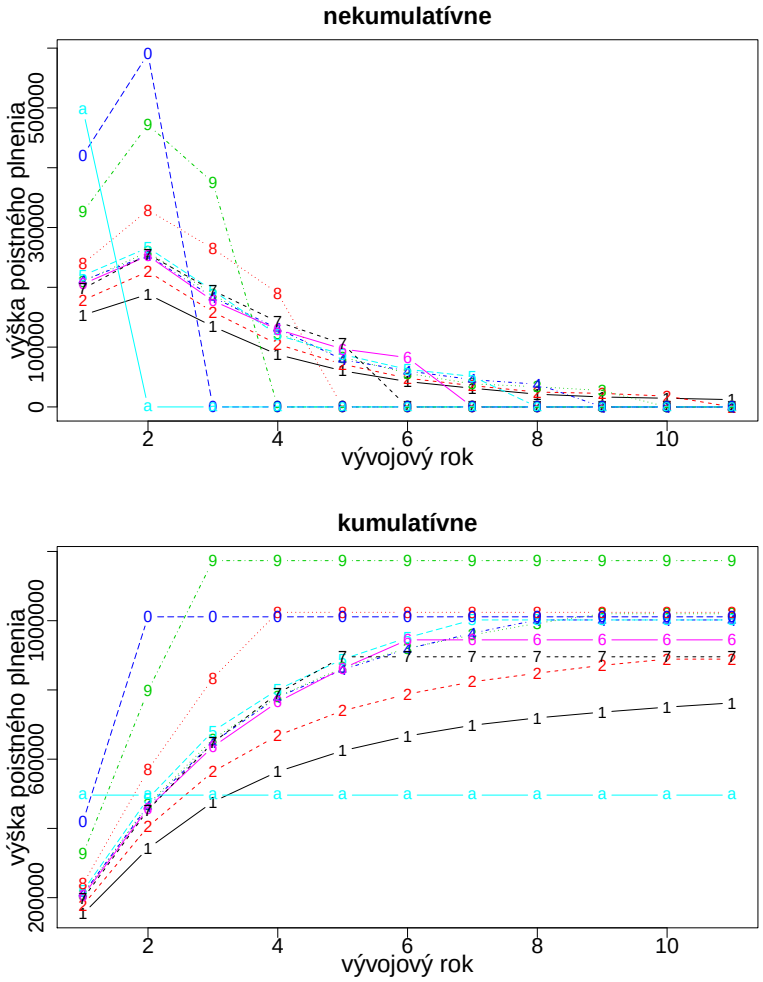
	Vývojový rok										
Rok vzniku	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1977	153 638	342 050	476 584	564 040	624 388	666 792	698 030	719 282	735 904	750 344	762 544
1978	178 536	404 948	563 842	668 528	739 976	787 966	823 542	848 360	871 022	889 022	
1979	210 172	469 340	657 728	780 802	864 182	920 268	958 764	992 532	1 019 932		
1980	211 448	464 930	648 300	779 340	858 334	918 566	964 134	1 002 134			
1981	219 810	486 114	680 764	800 862	888 444	951 194	1 002 194				
1982	205 654	458 400	635 906	765 428	862 214	944 614					
1983	197 716	453 124	647 772	790 100	895 700						
1984	239 784	569 026	833 828	1 024 228							
1985	326 304	798 048	1 173 448								
1986	420 778	1 011 178									
1987	496 200										

Zdroj: [1], vlastné spracovanie.

Na Obr. 8 je graficky znázornený vývoj nekumulatívnych, resp. kumulatívnych poistných plnení. Symboly pri krivkách označujú rok vzniku poistných udalostí, kým samotné krivky výšku vyplatených poistných plnení v danom roku resp. do daného roku vývoja. Číslica 1 v Obr. 8 označuje rok vzniku poistných udalostí 1977, číslica 2 rok vzniku 1978, atď, číslica 0 označuje rok vzniku 1986, kým symbol „a" označuje rok vzniku 1987.

Pre kumulatívne poistné plnenia (viď Tabuľku 15) sme vypočítali vývojové koeficienty základnej Chain-Ladder metódy (viď podkapitolu 2.1.1). Na Obr. 9 možno nájsť grafické znázornenie týchto vývojových koeficientov. Podľa vyjadrenia autorov článku [17] vývojový trojuholník poistných plnení má zásadnú zmenu trendu medzi vývojovými rokmi 1984 a 1985, napriek tomu, že ako dáta, tak aj vývojové koeficienty sú relatívne hladké. Treba podotknúť, že vo všeobecnosti trend nestability nemá nič spoločné s volatilitou alebo hladkosťou dát či vývojových koeficientov. Ak nastane zmena trendu, formulácia predpokladov o budúcom trende bude závisieť od vysvetlenia zmeny trendu.

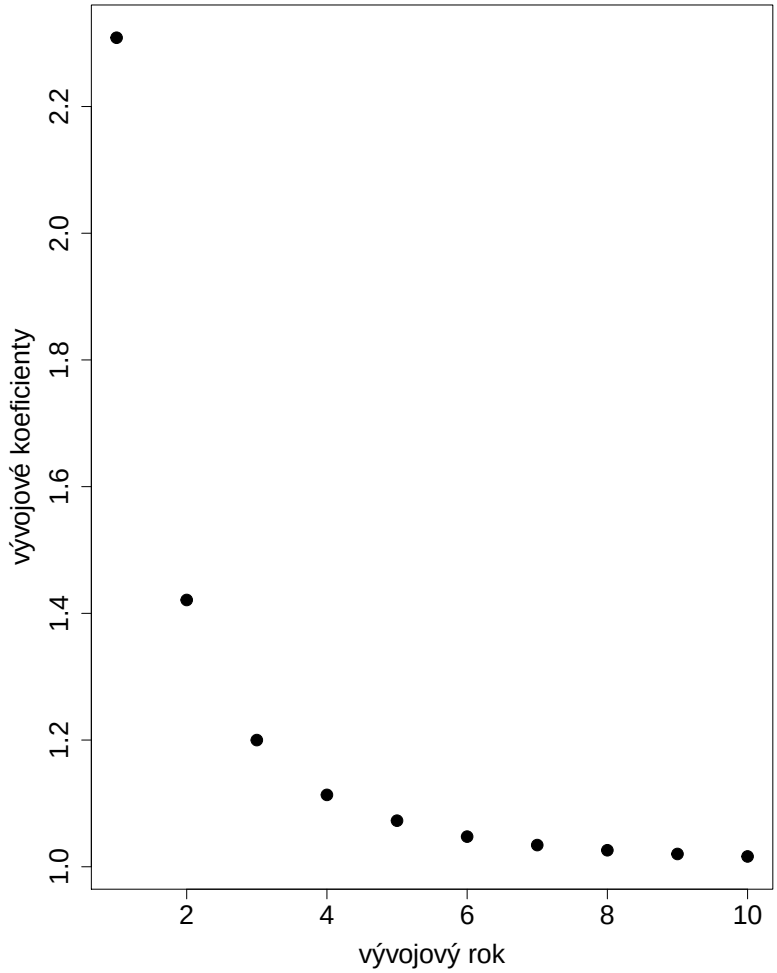
Keďže neexistujú informácie o výške zaslúženého poistného, ktoré sú potrebné pri odhade výšky technických rezerv pomocou bootstrap Bornhuetterovej-Fergusonovej metódy a bootstrap Cape-Cod metódy, na tieto dáta sme aplikovali len metódy CLS



Obr. 8: Grafické znázornenie vývoja nekumulatívnych, resp. kumulatívnych poistných plnení v prípade dátového súboru z publikácie [1]. Zdroj: vlastné spracovanie.

(z angl. *Conditional Least Squares*), kopula prístup CLSC (z angl. *Conditional Least Squares Copula*) a 3 prístupy bootstrap Chain-Ladder metódy. Pre metódy CLSC a CLS uvádzame v tejto podkapitole podrobný popis výberu optimálnych funkcií a parametrov, následne pre metódu CLSC aj odhad optimálnej kopula funkcie a jej parametra.

V prvom rade sme si našli optimálnu kombináciu funkcií η a ν potrebnú v modeli podmienenej strednej hodnoty a variancie. Pre každú dvojicu η a ν sme odhadli optimálne parametre α a β a za optimálne, na základe Akaikeho informačného kritéria definovaného v kapitole 3 a splnených predpokladov o neklesajúcosti kumulatívnych



Obr. 9: Grafické znázornenie vývojových koeficientov vypočítaných pre kumulatívne poistné plnenia zobrazené v Tabuľke 15. Zdroj: vlastné spracovanie.

poistných plnení, sme zvolili funkcie

$$\eta(\alpha_1, \alpha_2, j) = 1 + (\alpha_1 \alpha_2 j^{-1-\alpha_2} \exp(\alpha_1 j^{-\alpha_2})),$$
$$\nu(\beta_1, \beta_2, j) = \beta_1 \exp(-\beta_2 j).$$

Následne sme odhadli optimálne hodnoty parametrov α_1, α_2, β_1 a β_2 (viď Tabuľku 16). Využitím vyššie uvedených poznatkov sme vyčíslili hodnoty odhadnutých rezíduí CMV modelu $\hat{\varepsilon}_{i,j}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$. Pre dvojice rezíduí $(\hat{\varepsilon}_{i,j-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}), \hat{\varepsilon}_{i,j}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}))$, kde $i = 1, 2, \ldots, n-2$ a $j = 3, 4, \ldots, n+1-i$, sme odhadli Kendallov korelačný koeficient na hodnotu 0,42, čiže predpokladáme prítomnosť určitej kladnej korelácie medzi dvoji-

Tabuľka 16: Hodnoty odhadnutých parametrov $\hat{\alpha}(\beta)$ a $\hat{\beta}(\alpha)$.

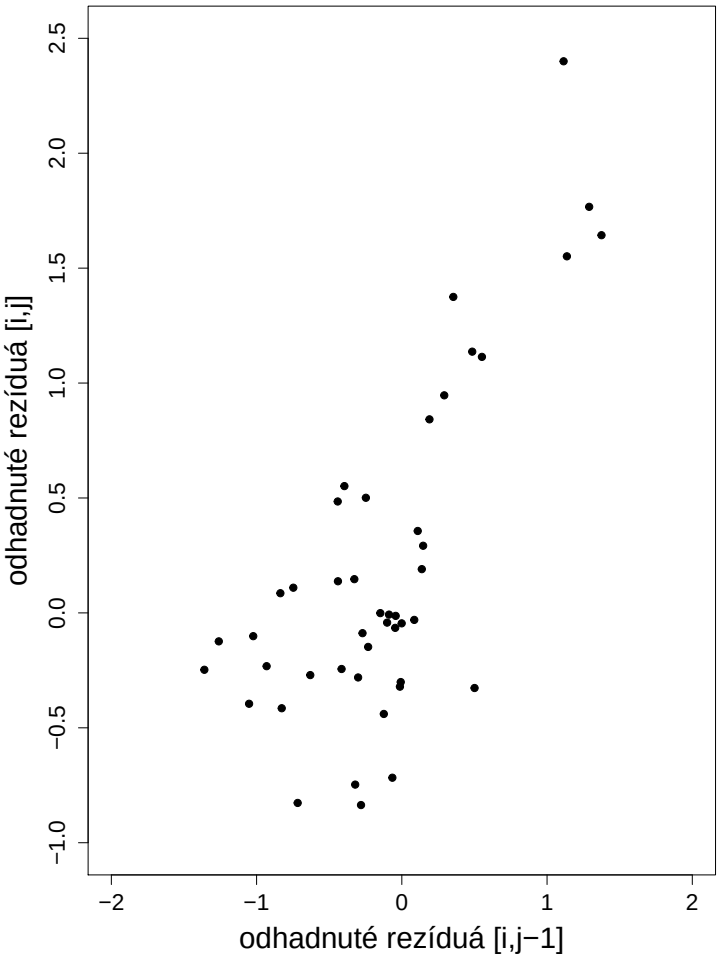
Parameter	Hodnota parametra
$\hat{\alpha}_1$	2,027795
$\hat{\alpha}_2$	1,102009
$\hat{\beta}_1$	100,711500
$\hat{\beta}_2$	0,377345

Zdroj: vlastné spracovanie.

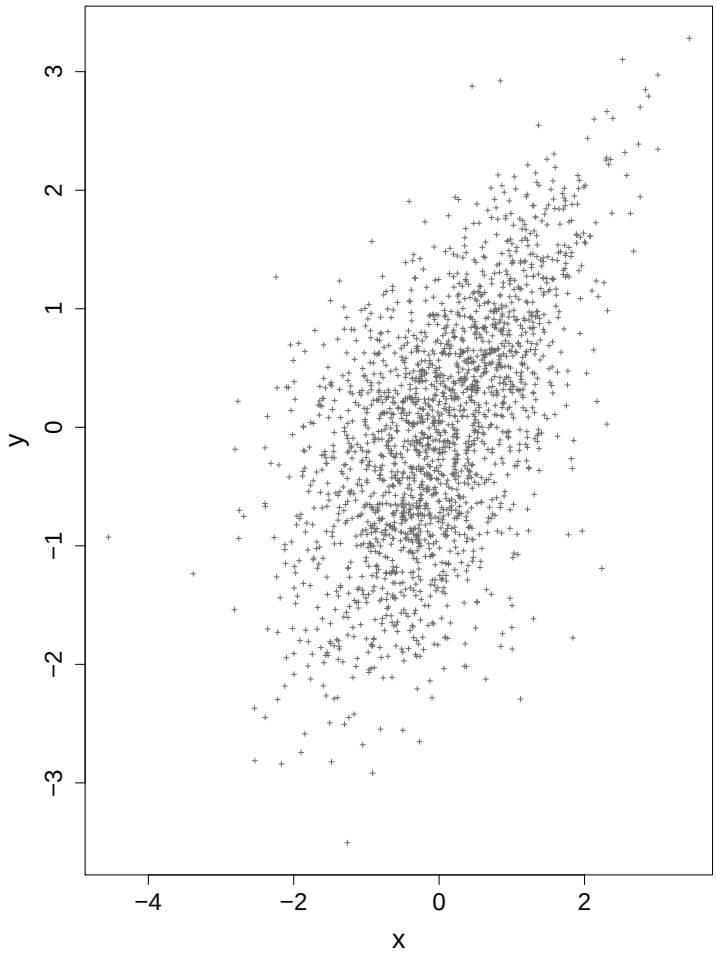
cami rezíduí. Na Obr. 9 je táto korelácia jednoznačne viditeľná.

Pri metóde CLSC sme optimálnu kopula funkciu na modelovanie závislosti medzi rezíduami odhadovali pomocou štatistického softvéru R [19] využitím príkazu `gofCopula` z balíka `copula` [7]. Uvažovali sme pritom 2 triedy kopula funkcií, archimedovské, konkrétne Claytonovu, Gumbelovu a Frankovu, a eliptické, Gaussovu a Studentovu t-kopulu s fixnými 5 stupňami voľnosti (aby bol 4. moment konečný). Gumbelova kopula funkcia sa ukázala byť najlepšia pre modelovanie závislosti dvojíc odhadnutých rezíduí, keďže p-hodnota testu dobrej zhody nám vyšla najvyššia, konkrétne 0,40. Kopula parameter bol odhadnutý na hodnotu 1,75.

Po výpočte výšky technických rezerv metódami CLSC a CLS sme na dáta o výške odškodnení vyplatených v minulom období aplikovali aj 3 prístupy bootstrap Chain-Ladder metódy. Jednalo sa o metódu základnú, ďalej metódu vychádzajúcu z Poissonovho rozdelenia s nadmernou varianciou, ODP bootstrap Chain-Ladder metódu a na záver gama bootstrap Chain-Ladder metódu. Všetky výpočty sme realizovali v štatistickom softvéri R [19] využitím balíka `ChainLadder` [3]. V tabuľkách sú tieto metódy označené skratkami ako BCL pre základnú bootstrap Chain-Ladder metódu, ODP-BCL pre ODP bootstrap Chain-Ladder metódu a G-BCL pre gama bootstrap Chain-Ladder metódu. Po 5000 bootstrap cykloch boli odhadnuté technické rezervy jednotlivými metódami na hodnoty zobrazené v Tabuľke 17 a Tabuľke 18. V týchto tabuľkách uvádzame hodnoty 50%, 95% a 99,5%-ného kvantilu odhadnutých metódami CLSC, CLS, BCL, ODP-BCL a G-BCL.



Obr. 10: Grafické znázornenie dvojíc odhadnutých rezíduí $(\hat{\varepsilon}_{i,j-1}(\hat{\alpha},\hat{\beta}), \hat{\varepsilon}_{i,j}(\hat{\alpha},\hat{\beta}))$ pre dáta z publikácie [1]. Zdroj: vlastné spracovanie.



Obr. 11: Grafické znázornenie 2000 náhodne generovaných realizácií $(x, y)^\top$ v tvare Gumbelovej kopula funkcie s parametrom 1,75. Zdroj: vlastné spracovanie.

Tabuľka 17: Kvantily empirických rozdelení pravdepodobností opisujúce celkové výšky technických rezerv odhadnuté metódami BCL, ODP-BCL a G-BCL uvedené v tisícoch amerických dolárov.

Odhady technických rezerv pre jednotlivé roky vzniku poistných udalostí									
i	BCL 50%	ODP-BCL 50%	G-BCL 50%	BCL 95%	ODP-BCL 95%	G-BCL 95%	BCL 99,5%	ODP-BCL 99,5%	G-BCL 99,5%
2	14	14	14	20	24	24	24	30	31
3	37	37	37	46	51	52	51	62	61
4	64	63	64	73	81	82	79	93	92
5	100	100	100	111	121	121	118	138	135
6	143	143	144	156	168	167	164	183	184
7	212	211	211	226	240	242	235	260	260
8	385	385	385	408	427	428	420	451	454
9	764	765	765	803	831	828	823	872	866
10	1 360	1 361	1 361	1 429	1 462	1 463	1 470	1 528	1 533
11	2 185	2 185	2 186	2 342	2 390	2 390	2 427	2 503	2 521
Spolu	**5 264**	**5 264**	**5 267**	**5 614**	**5 795**	**5 797**	**5 811**	**6 120**	**6 137**

Zdroj: vlastné spracovanie.

Tabuľka 18: Kvantily empirických rozdelení pravdepodobností opisujúce celkové výšky technických rezerv odhadnuté metódami CLS a CLSC uvedené v tisícoch amerických dolárov.

Odhady technických rezerv pre jednotlivé roky vzniku poistných udalostí						
i	CLS 50%	CLSC 50%	CLS 95%	CLSC 95%	CLS 99,5%	CLSC 99,5%
2	15	15	17	17	18	17
3	38	38	42	42	44	44
4	65	65	71	71	74	74
5	102	102	110	111	114	116
6	145	146	157	157	164	164
7	209	209	225	223	235	233
8	373	374	401	397	415	412
9	729	729	776	769	803	792
10	1 294	1 295	1 368	1 367	1 409	1 406
11	2 148	2 152	2 252	2 281	2 319	2 348
Spolu	**5 118**	**5 125**	**5 419**	**5 435**	**5 595**	**5 606**

Zdroj: vlastné spracovanie.

Pripomeňme si, že vývojový trojuholník (uvedený v Tabuľke 15) prevzatý z publikácie [1] nepochádzal priamo z oblasti komerčného poistenia, ale z podnikového úrazového poistenia v USA. Na základe výsledkov uvedených v Tabuľke 17 a v Tabuľke 18 môžeme vyhlásiť, že odhadnuté 50%-né kvantily simulovaných rozdelení pravdepodobností opisujúce celkové výšky technických rezerv na poistné plnenia za poistné udalosti vzniknuté v rokoch 1977 až 1987 sa viac-menej zhodujú. Pomocou metód BCL, ODP-BCL a G-BCL sme celkovú výšku rezervy odhadli zhruba na 5,265 mil. amerických dolárov, kým pri postupoch CLS a CLSC sme dostali odhad približne na úrovni 5,120 mil. amerických dolárov. Z poistnej praxe však poznáme, že poisťovateľ by nemal držať technické rezervy na úrovni odhadnutej strednej hodnoty či mediánu, pretože by mu potom s vysokou pravdepodobnosťou hrozili budúce straty.

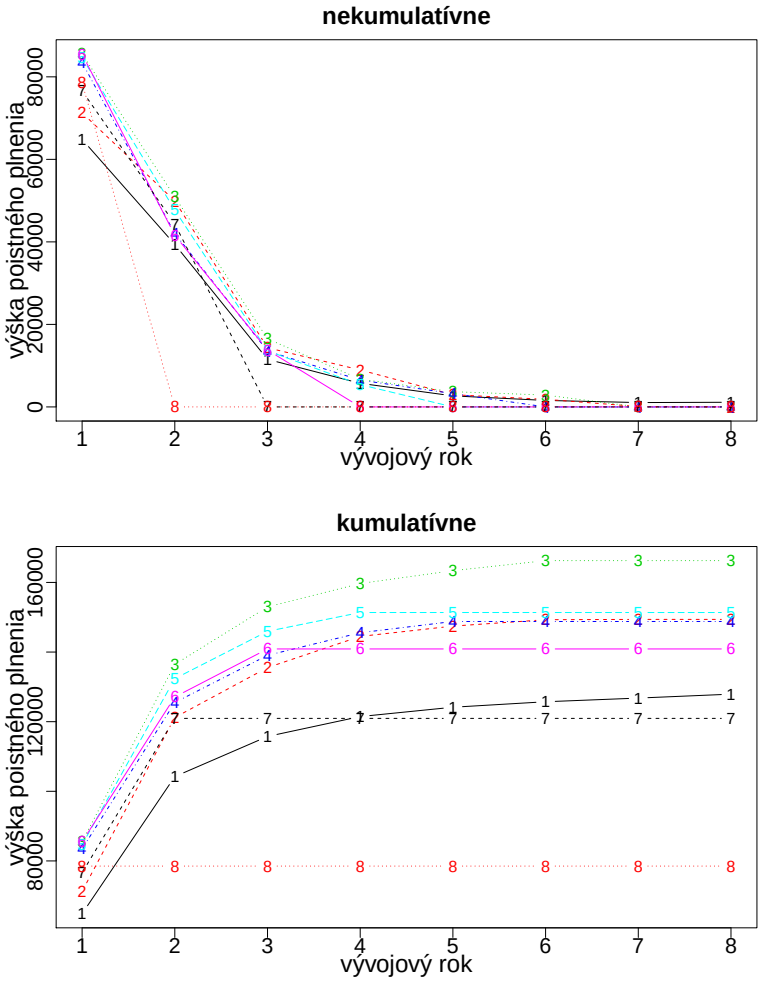
Keby sa daný podnik z USA (poskytujúci podnikové úrazové poistenie pre svojich zamestnancov) správal ako zodpovedná komerčná poisťovňa, vytváral by vyššie rezervné fondy na krytie budúcich záväzkov vyplývajúcich z minulých úrazov, v porovnaní s tým, ako to určujú vyššie spomínané 50%-né kvantily simulovaných rozdelení pravdepodobností. Podnik by si pri vytváraní rezervného fondu na úrazové poistenie mohol napríklad stanoviť požiadavku, aby pravdepodobnosť toho, že v budúcich rokoch vytvorené rezervy (na krytie záväzkov vyplývajúcich úrazov v rokoch 1977 až 1987) nebudú postačujúce, bola nanajvýš 5%. Potom by si mohla použiť 95%-né kvantily simulovaných rozdelení pravdepodobností (uvedené v Tabuľke 17 a v Tabuľke 18). Pri týchto kvantiloch už môžeme pozorovať vyššie rozdiely (v porovnaní s 50%-nými kvantilmi): metóda CLSC poskytla odhad na úrovni 5,435 mil. amerických dolárov, metóda BLC dala odhad približne 5,614 mil. amerických dolárov, kým postupy ODP-BCL a G-BCL určili 95%-ný kvantil simulovaného rozdelenia pravdepodobnosti okolo sumy 5,795 mil amerických dolárov. Spomeňme si ale na pomerne silnú závislosť v dátach o vývoji poistných plnení, ktorú zistili aj M. Pešta a O. Okhrin vo svojom článku [17]. Jedinou metódou zo skúmaných postupov, ktorá sa cielene snaží zachytiť a zohľadniť aj závislosť v dátach, je metóda *Conditional Least Squares Copula* (CLSC). Práve preto by sme podniku z USA mohli dať odporúčanie, aby na krytie budúcich plnení za úrazy nahlásené v rokoch 1977 až 1987 vytvárala rezervy na úrovni 5,435 mil. amerických dolárov. Potom, podľa našich odhadov, by tieto rezervy mali byť postačujúce s 95%-nou

pravdepodobnosťou. Ďalšie skúmané metódy výrazne nadhodnotili výšku potrebných rezerv: napr. postupy ODP-BCL a G-BCL nám poskytli odhad okolo 5,795 mil. amerických dolárov. Keby podnik držal takéto rezervy, no skutočný vývoj budúcich poistných plnení by bol taký, ako to predpovedá metóda CLSC, tak pravdepodobnosť nedostatočnosti rezerv by bola samozrejme nižšia, no na druhej by podnik mohol finančne stratiť na neefektívnom umiestnení „nadbytočných" prostriedkov rezervného fondu.

5.2 Odhad výšky technických rezerv na povinné zmluvné poistenie

V tejto podkapitole sú predstavené odhady technických rezerv pre dáta prevzaté zo zdroja [11]. Vývojový trojuholník poistných plnení s rokmi vzniku 2006 až 2013 pochádza z Národnej banky Slovenska a poistným produktom je povinné zmluvné poistenie zodpovednosti za škodu spôsobenú prevádzkou motorového alebo prípojného vozidla (skr. PZP). Nekumulatívne a kumulatívne poistné plnenia sú zobrazené v Tabuľkách 2 a 3 pre roky vzniku 2006 až 2013. Na Obr. 12 možno nájsť grafické znázornenie vývoja nekumulatívnych, resp kumulatívnych poistných plnení. Symboly pri krivkách označujú rok vzniku poistných udalostí, kým samotné krivky výšku vyplatených poistných plnení v danom roku resp. do daného roku vývoja. Číslica 1 v Obr. 12 označuje rok vzniku poistných udalostí 2006, číslica 2 rok vzniku 2007, atď, až číslica 8 označuje rok vzniku 2013.

Tieto dáta sme čiastočne už analyzovali aj v kapitole 2, kde sme pre odhad technických rezerv použili základné metódy Chain-Ladder, Cape-Cod a Bornhuetterovu-Fergusonovu metódu. Výška technických rezerv na krytie poistných plnení z poistných udalostí vzniknutých v rokoch 2007 až 2013 bola odhadnutá Chain-Ladder metódou na 129 168,40 eur, Cape-Cod metódou na 124 628,40 eur a na záver po použití Bornhuetterovej-Fergusonovej metódy bola stanovená výška technických rezerv na 126 879 eur. Cieľom tejto podkapitoly je na vyššie definovaný vývojový trojuholník poistných plnení použiť metódy založené na bootstrap algoritmoch, ktoré sú definované v kapitole 3 a 4. Výsledkom týchto metód sú 50%, 95% a 99,5%-né kvantily empirického rozdelenia pravdepodobnosti, ktoré sme získali pomocou vzorkovania (resp. bootstra-



Obr. 12: Grafické znázornenie vývoja nekumulatívnych, resp. kumulatívnych poistných plnení v prípade dátového súboru z publikácie [11]. Zdroj: vlastné spracovanie.

povania) v jednotlivých metódach.

Počnúc metódami CLSC a CLS sme pri odhade optimálnej kombinácie funkcií η a ν, okrem Akaikeho informačného kritéria definovaného v kapitole 3, uvažovali aj splnený predpoklad neklesajúcosti kumulatívnych poistných plnení. Dvojica funkcií, ktorá spĺňala obe kritéria súčasne, je

$$\eta(\alpha_1, \alpha_2, j) = 1 + \alpha_1 j^{-\alpha_2},$$
$$\nu(\beta_1, \beta_2, j) = \beta_1 \exp(-\beta_2 j).$$

Následne sme odhadli optimálne hodnoty parametrov $\hat{\alpha}(\beta)$ a $\hat{\beta}(\alpha)$, ktoré sú zo-

brazené v Tabuľke 19.

Tabuľka 19: Odhadnuté hodnoty parametrov $\hat{\alpha}(\beta)$ a $\hat{\beta}(\alpha)$.

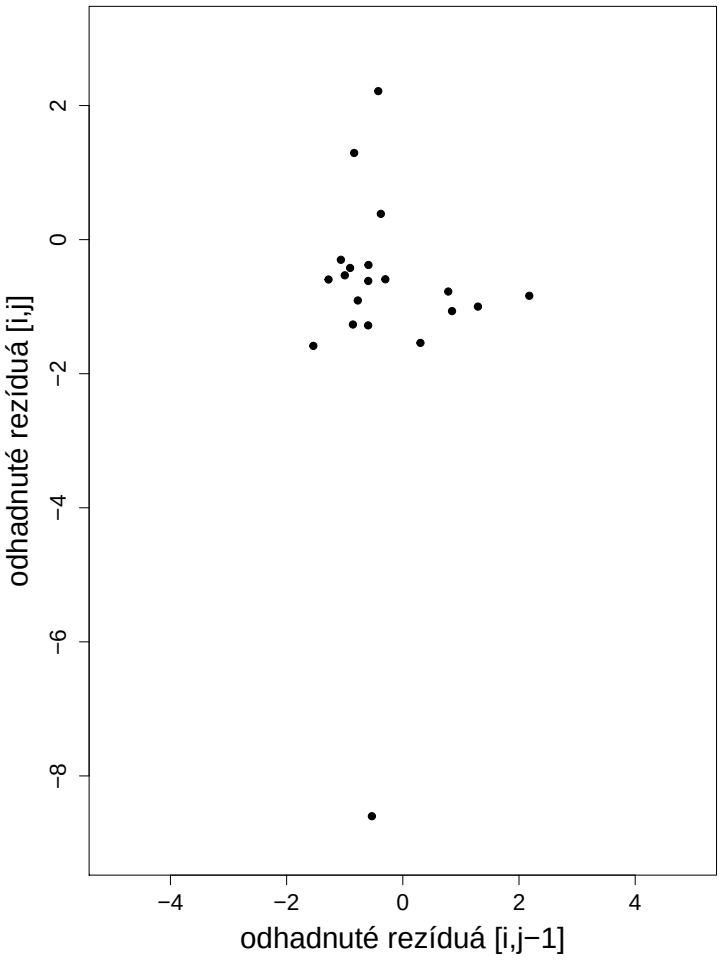
Parameter	Hodnota parametra
$\hat{\alpha}_1$	5,593740
$\hat{\alpha}_2$	3,364034
$\hat{\beta}_1$	97,872160
$\hat{\beta}_2$	0,812252

Zdroj: vlastné spracovanie.

Využitím vyššie uvedených poznatkov sme vyčíslili hodnoty odhadnutých rezíduí CMV modelu $\hat{\varepsilon}_{i,j}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$. Pre dvojice rezíduí $(\hat{\varepsilon}_{i,j-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}), \hat{\varepsilon}_{i,j}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}))$, kde $i = 1, \ldots, n-2$ a $j = 3, \ldots, n+1-i$, sme vypočítali Kendallov korelačný koeficient, ktorý vyšiel $-0{,}01904762$. Na základe vypočítaného Kendallovho korelačného koeficientu predpokladáme, že nie je prítomná žiadna signifikantná korelácia medzi dvojicami rezíduí $(\hat{\varepsilon}_{i,j-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}), \hat{\varepsilon}_{i,j}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}))$. Odhadnuté rezíduá sú zobrazené na Obr. 13.

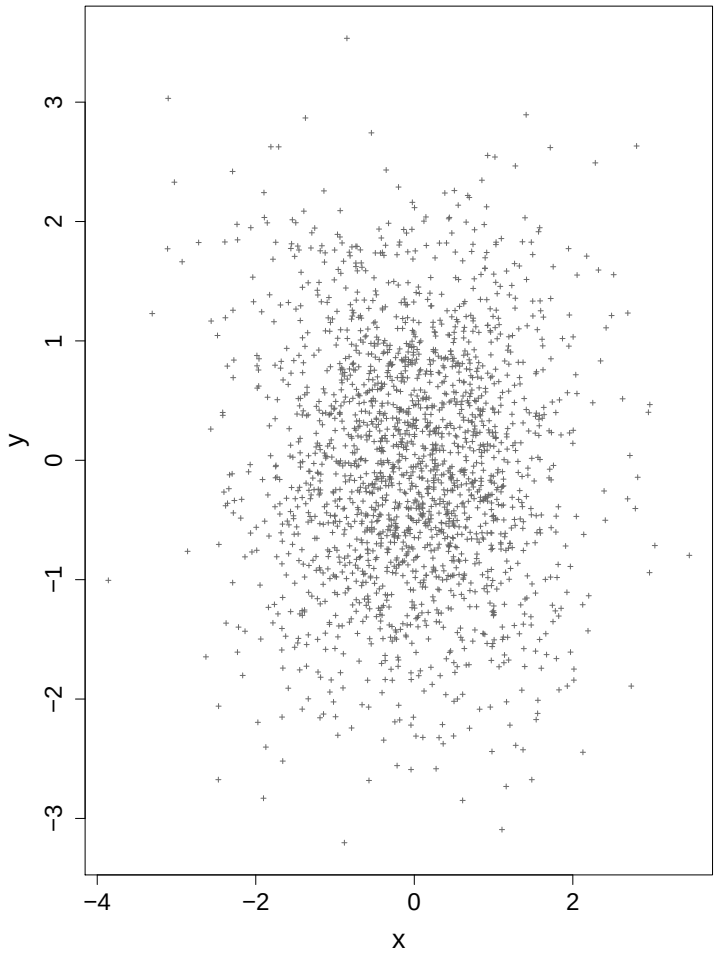
Na výpočet optimálnej kopula funkcie modelujúcej závislosti medzi rezíduami sme pri metóde CLSC pracovali s balíkom `copula` [7], konkrétne s príkazom `gofCopula`. Uvažovali sme pritom nasledujúce triedy kopula funkcií: Claytonovu, Gumbelovu a Frankovu, Gaussovu a Studentovu t-kopulu s fixnými 5 stupňami voľnosti. Pri Studentovej t-kopule sme dostali najvyššiu p-hodnotu testu dobrej zhody zo všetkých, konkrétne 0,8347. Kopula parameter bol odhadnutý na hodnotu $-0{,}03$. Z tejto hodnoty tiež vidíme, že medzi susednými dvojicami odhadnutých rezíduí je len veľmi slabá korelácia. Túto skutočnosť môžeme vnímať pozitívne a interpretovať tak, že sme našli veľmi vhodnú voľbu pomocných funkcií ν a η. Tie v CMV modeli zachytili významnú časť informácie o vývoje kumulatívnych poistných plnení a v rezíduách zostal len akýsi náhodný šum s nekorelovanými zložkami.

Po odhadnutí výšky technických rezerv metódami CLSC a CLS a odhade optimálnej kopula funkcie spolu s jej parametrom sme na vývojový trojuholník poistných plnení použili aj ďalšie metódy definované v kapitole 4. Pre stanovanie výšky technických rezerv ODP bootstrap Chain-Ladder metódou a gama bootstrap Chain-Ladder



Obr. 13: Grafické znázornenie odhadnutých rezíduí $(\hat{\varepsilon}_{i,j-1}(\hat{\alpha},\hat{\beta}), \hat{\varepsilon}_{i,j}(\hat{\alpha},\hat{\beta}))$ pre dáta z publikácie [11]. Zdroj: vlastné spracovanie.

metódou sme využívali príkazy z knižnice `ChainLadder` [3] softvéru R [19]. V ďalšej časti výskumu sme sa zaoberali odhadom výšky technických rezerv základnou metódou bootstrap Chain-Ladder (skrátene BCL), ako aj bootstrap Cape-Cod (skrátene BCC) a bootstrap Bornhuetterovou-Fergusonovou metódou (skrátene BBF).



Obr. 14: Grafické znázornenie 2000 náhodne generovaných realizácií $(x, y)^\top$ v tvare Studentovej kopula funkcie s parametrom $-0{,}03$ a 5 stupňami voľnosti. Zdroj: vlastné spracovanie.

Tabuľka 20: Kvantily simulovaných rozdelení pravdepodobností opisujúce celkové výšky technických rezerv odhadnuté metódami BCL, ODP-BCL a G-BCL uvedené v eurách.

Odhady technických rezerv pre jednotlivé roky vzniku poistných udalostí									
i	BCL 50%	ODP-BCL 50%	G-BCL 50%	BCL 95%	ODP-BCL 95%	G-BCL 95%	BCL 99,5%	ODP-BCL 99,5%	G-BCL 99,5%
2	1 321	1 238	1 208	2 291	2 985	2 878	2 598	4 041	4 297
3	2 175	2 086	2 077	3 294	4 252	4 153	3 786	5 649	5 523
4	4 124	4 067	3 983	5 200	6 541	6 494	5 787	7 965	7 871
5	7 621	7 527	7 471	8 844	10 757	10 602	9 493	12 749	12 796
6	14 255	14 188	14 149	15 733	18 237	18 193	16 605	20 677	20 711
7	27 084	27 053	27 026	29 182	32 748	32 629	30 394	35 780	36 086
8	72 552	72 428	72 318	78 995	83 771	83 757	81 964	90 517	90 571
Spolu	**129 132**	**128 587**	**128 052**	**143 539**	**159 291**	**158 706**	**150 627**	**177 378**	**177 855**

Zdroj: vlastné spracovanie.

Tabuľka 21: Kvantily simulovaných rozdelení pravdepodobností opisujúce celkové výšky technických rezerv odhadnuté metódami CLS, CLSC, BBF a BCC uvedené v eurách.

Odhady technických rezerv pre jednotlivé roky vzniku poistných udalostí												
i	CLS 50%	CLSC 50%	BBF 50%	BCC 50%	CLS 95%	CLSC 95%	BBF 95%	BCC 95%	CLS 99.5%	CLSC 99,5%	BBF 99,5%	BCC 99,5%
2	757	763	1 315	1 306	935	897	2 273	2 281	1 272	977	2 523	2 537
3	2 181	2 196	2 162	2 210	2 696	2 523	3 244	3 319	3 449	2 777	3 705	3 817
4	3 959	3 991	4 113	4 139	4 987	4 695	5 140	5 196	6 389	5 264	5 674	5 736
5	7 834	7 925	7 572	7 100	10 163	9 501	8 706	8 232	13 244	10 860	9 305	8 791
6	15 071	15 127	14 165	13 815	20 480	18 718	15 384	15 099	27 124	21 614	16 042	15 737
7	31 278	31 558	27 023	27 210	42 238	39 277	28 316	28 628	58 745	45 414	29 042	29 340
8	73 842	74 225	70 535	68 861	98 597	89 982	71 974	70 578	125 944	102 941	72 663	71 336
Spolu	**134 922**	**135 785**	**126 885**	**124 641**	**180 096**	**165 593**	**135 037**	**133 333**	**236 167**	**189 847**	**138 954**	**137 294**

Zdroj: vlastné spracovanie.

Ako si môžeme všimnúť, celkové výšky technických rezerv odhadnutých metódami CLSC a CLS vyšli príliš nadhodnotené v porovnaní s ostatnými metódami. Tento fakt je spôsobený prítomnosťou odľahlého pozorovania, v podobe neobvykle veľkého rezídua, ktorý je jednoznačne identifikovateľný aj na Obr. 13. Dôvodom spomínanej odchýlky v rezíduách je dátový prvok z vývojového trojuholníka nekumulatívnych poistných plnení (viď Tabuľku 2.). Poistné plnenia na poistné udalosti vzniknuté v roku 2007, ktoré boli vyplatené v roku 2013, predstavujú sumu 95 eur. V 6. a 7. roku vývoja sa typicky vyplácali poistné plnenia vo výškach okolo niekoľkých tisíc eur. Preto je nečakané, že poistné plnenia na poistné udalosti vzniknuté v roku 2007 a vyplatené v roku 2013, majú len výšku 95 eur. Túto hodnotu jednoznačne môžeme považovať za odľahlé pozorovanie a vylúčiť odhadnuté rezíduum, ktoré k nemu patrí.

V ďalšej časti práce sme sa rozhodli toto rezíduum vylúčiť a odhadnúť novú výšku technickej rezervy metódami CLSC a CLS. Kvantily simulovaných rozdelení pravdepodobností opisujúce celkové výšky technických rezerv po vylúčení odľahlého rezídua sú zobrazené v Tabuľke 22. Novú výšku technickej rezervy sme odhadovali iba v prípade metód CLSC a CLS, nakoľko v metódach BCL, ODP-BCL, G-BCL, BCC, resp. BBF sa nevyskytlo žiadne odľahlé rezíduum v neškálovaných Pearsonových rezíduách.

Po vylúčení neprimerane veľkého rezídua sa odhadli výšky technických rezerv metódami CLSC a CLS omnoho nižšie než predtým. Platí to najmä pri vyšších kvantiloch, konkrétne pri 95% a 99,5%-nom kvantile. Je to spôsobené algoritmom metódy. Keď sa pozrieme bližšie napríklad na metódu CLS, jej hlavným algoritmom je pri každom bootstrap cykle vygenerovať nový trojuholník rezíduí jednoduchým náhodným výberom s vrátením spomedzi pôvodných rezíduí. Pri 5000 bootstrap cykloch s vysokou pravdepodobnosťou nastanú situácie, kedy sa dané veľké rezíduum vygeneruje na viacerých miestach v danom trojuholníku rezíduí. V týchto bootstrap cykloch sa odhadnú neprimerane veľké množstvá technických rezerv. Po následnom zoradení vektora technických rezerv od najmenšieho po najväčšie sa za 95% a 99,5%-né kvantily vezmú práve tieto príliš vysoké rezervy.

Tabuľka 22: Kvantily simulovaných rozdelení pravdepodobností opisujúce celkové výšky technických rezerv po vylúčení odľahlého rezídua pomocou metód CLS, CLSC, BBF a BCC uvedené v eurách.

Odhady technických rezerv pre jednotlivé roky vzniku poistných udalostí												
i	CLS 50%	CLSC 50%	BBF 50%	BCC 50%	CLS 95%	CLSC 95%	BBF 95%	BCC 95%	CLS 99,5%	CLSC 99,5%	BBF 99,5%	BCC 99,5%
2	754	757	1 315	1 306	878	860	2 273	2 281	915	912	2 523	2 537
3	2 174	2 178	2 162	2 210	2 447	2 397	3 244	3 319	2 563	2 537	3 705	3 817
4	3 969	3 964	4 113	4 139	4 543	4 445	5 140	5 196	4 744	4 726	5 674	5 736
5	7 853	7 877	7 572	7 100	9 147	8 966	8 706	8 232	9 668	9 591	9 305	8 791
6	15 012	15 056	14 165	13 815	17 826	17 422	15 384	15 099	18 955	18 878	16 042	15 737
7	31 324	31 451	27 023	27 210	37 385	36 544	28 316	28 628	39 728	39 650	29 042	29 340
8	73 625	73 767	70 535	68 861	86 131	84 472	71 974	70 578	91 496	90 360	72 663	71 336
Spolu	**134 711**	**135 050**	126 885	124 641	**158 357**	**155 106**	135 037	133 333	**168 069**	**166 654**	138 954	137 294

Zdroj: vlastné spracovanie.

Čo sa ďalších metód týka, v Tabuľke 23 pre porovnanie stochastických metód výpočtu výšky technických rezerv so základnými metódami definovanými v kapitole 2, uvádzame odhadnuté výšky technických rezerv základnými metódami Chain-Ladder, Cape-Cod a Bornhuetterova-Fergusonova.

Tabuľka 23: Odhadnuté výšky technických rezerv pomocou Chain-Ladder, Cape-Cod, Bornhuetterovej-Fergusonovej metódy a 50%-né kvantily simulovaných rozdelení pravdepodobností opisujúce celkové výšky technických rezerv odhadnuté metódami BCL, BCC, BBF a CLSC (všetky hodnoty sú uvedené v eurách).

Chain-Ladder metóda	129 168
Cape-Cod metóda	124 628
Bornhuetterova-Fergusonova metóda	126 879
BCL metóda	129 132
BCC metóda	124 641
BBF metóda	126 885
CLSC metóda	135 050
CLS metóda	134 711

Zdroj: vlastné spracovanie.

Môžeme si všimnúť, že odhady celkových výšok technických rezerv na budúce poistné plnenia základnými metódami Chain-Ladder, Cape-Cod a Bornhuetterovou-Fergusonovou metódou vyšli podobne ako 50%-né kvantily empirických rozdelení pravdepodobností opisujúce celkové výšky technických rezerv odhadnuté metódami bootstrap Chain-Ladder, bootstrap Cape-Cod a bootstrap Bornhuetterovou-Fergusonovou metódou.

V tejto analýze sme skúmali dáta reálnej slovenskej poisťovne. Z regulačného rámca Solventnosť II. plynie kapitálová požiadavka na poisťovne, ktorá hovorí, že poisťovne by mali držať rezervy na takej úrovni, aby pravdepodobnosť nedostatočnosti rezerv bola 0,5%. V našom prípade to znamená toľko, že výšku technických rezerv by sme mali určovať na úrovni 99,5%-ného kvantilu simulovaného rozdelenia.

Medzi 99,5%-nými kvantilmi vyšli pomerne veľké rozdiely. Kým metóda CLS

odhadla výšku technickej rezervy na 168 069 eur, metóda CLSC na 166 654 eur, výšky technických rezerv pri ostatných metódach (BCL, BCC a BBF) vyšli podstatne nižšie. Metóda BCC odhadla 99,5%-ný kvantil na 137 294 eur, metóda BBF na 138 954 eur a základná BCL metóda vyhodnotila 99,5%-ný kvantil na úrovni 150 627 eur.

Pri výbere primeraného množstva technických rezerv by sme sa mohli prikloniť k výsledkom, ktoré nám dávali metódy BCC a BBF. Metóda bootstrap Cape-Cod odhadla výšku technických rezerv na budúce poistné plnenia na 137 294 eur a bootstrap Bornhuetterova-Fergusonova metóda na 138 954 eur. Obe metódy uvažujú aj vývoj zaslúženého poistného, ktorý bol viac-menej stabilný v rokoch 2006 až 2013. Na rozdiel od toho metódy CLSC a CLS nezohľadňujú hodnoty zaslúženého poistného, pracujú len s menším množstvom informácií (uvažujú len minulý vývoj poistných plnení). Odhadnuté výšky technických rezerv pomocou metód CLSC a CLS vyšli nadhodnotené.

Navyše si pripomeňme, že medzi odhadnutými rezíduami sme zistili len veľmi slabú mieru korelácie, takže používanie kopula-prístupu pri skúmanom vývojovom trojuholníku nie je opodstatnené. Mohli by sme sa preto prikloniť k jednoduchším postupom BBF resp. BCC, ktoré navyše berú ohľad aj na výšku zaslúženého poistného, a odporučiť poisťovni, aby na poistné plnenia na krytie poistných nárokov z obdobia 2007-2013 vytvárala rezervy na úrovni približne 138 tisíc eur

Nakoľko sme tento odhad dostali ako 99,5% kvantil simulovaného rozdelenia pravdepodobnosti, rezervy vo výške 138 tisíc eur by mali byť postačujúce s pravdepodobnosťou 99,5%.

Záver

Nakoľko budúcnosť je nepredvídateľná, pre zníženie rizika zruinovania poisťovne je vytváranie technických rezerv nevyhnutnou, kľúčovou úlohou poisťovne. Technické rezervy definujeme ako odloženú časť zisku poisťovne, ktorá slúži na pokrytie všetkých takých poistných udalostí, ktoré neboli poisťovni nahlásené (*IBNR*), alebo neboli ešte poisťovňou úplne vybavené (*RBNS*). V tejto práci sme sa bližšie venovali rezervám v oblasti neživotného poistenia.

Pri tvorbe rezerv sa využíva veľké množstvo metód, ktoré sa časom vyvíjajú a zdokonaľujú. Výber metódy na odhad optimálnej výšky technických rezerv je často náročnou úlohou poisťovne. Predkladaná záverečná práca preto slúži na porovnanie väčšieho množstva metód, ktoré odhadujú kvantily simulovaných rozdelení pravdepodobností opisujúce celkové výšky technických rezerv potrebných na pokrytie budúcich poistných plnení.

Prácu sme rozčlenili do 5 kapitol. V prvej kapitole sme definovali základnú teóriu kopula funkcií, pričom sme sa opierali o prácu [13]. V tejto kapitole sme uviedli základnú definíciu n-rozmernej kopula funkcie spolu so základnými vlastnosťami kopula funkcií. V pokračovaní tejto kapitoly sme uviedli prehľad najzákladnejších tried kopula funkcií, ktorými sú napríklad archimedovské, eliptické a kopuly s extrémnymi hodnotami. Druhú kapitolu sme venovali poistnej terminológii, vysvetlili sme základnú trojuholníkovú schému a metódy Chain-Ladder, Cape-Cod a Bornhuetterovu-Fergusonovu metódu. V rámci ilustrácie všetkých 3 metód sme odhadli výšku technických rezerv na budúce poistné plnenia pre dáta povinného zmluvného poistenia získané z práce [11]. Najnižšia rezerva bola odhadnutá metódou Cape-Cod (124 628 eur) a najvyššia metódou Chain-Ladder (129 168 eur).

V ďalšej kapitole sme predstavili novú metódu založenú na teórii kopula funkcií, CLSC metódu (z angl. *Conditional Least Squares Copula*), definovanú v publikácii [17]. Hlavnými výstupmi z tejto metódy boli 50%, 95% a 99,5%-né kvantily empirických rozdelení pravdepodobností opisujúce celkové výšky technických rezerv. Ďalšie stochastické metódy, opierajúce sa o bootstrap algoritmus, sme definovali v kapitole 4.

V poslednej kapitole sme teóriu definovanú v prvých 4 kapitolách premietli do praxe a pre konkrétne vývojové trojuholníky odhadli výšky technických rezerv na budúce poistné plnenia. V prvej časti 5. kapitoly sme analyzovali dáta získané zo zdroja [1]. Nejednalo sa o typické poistné dáta, ale hodnoty vo vývojovom trojuholníku (viď Tabuľku 14) predstavovali vyplatené odškodnenia zamestnancom, resp. ich rodinám, za vzniknuté úrazy, resp. smrť zamestnanca. Keďže, vyplývajúc z podstaty dát, neboli dostupné hodnoty zaslúženého poistného, výšku technickej rezervy sme odhadovali iba metódami CLSC, CLS a klasickou, gama a ODP bootstrap Chain-Ladder metódou.

Počnúc metódou CLSC sme pre odhadnuté dvojice rezíduí vypočítali Kendallov korelačný koeficient, ktorý vyšiel 0,42. Následne sme pomocou funkcie `gofCopula` odhadli Gumbelovu kopula funkciu s parametrom 1,75 za optimálnu. Po zbehnutí 5000 bootstrap cyklov sa odhadli 50%, 95% a 99,5%-né kvantily empirických rozdelení pravdepodobností opisujúce celkové výšky technických rezerv metódami CLSC, CLS, ODP-BCL, G-BCL a BCL. Výsledky sme zobrazili v Tabuľkách 17 a 18. Odhadnuté 50%-né kvantily simulovaných rozdelení vyšli celkom podobné v prípade všetkých metód. Pri vyšších kvantiloch boli už pozorovateľné rozdiely medzi jednotlivými metódami. Metóda CLSC poskytla odhad na úrovni 5,435 mil. amerických dolárov, metóda CLS približne 5,419 mil. amerických dolárov, ďalej metóda BLC dala odhad približne 5,614 mil. amerických dolárov, kým postupy ODP-BCL a G-BCL určili 95%-ný kvantil simulovaného rozdelenia pravdepodobnosti okolo sumy 5,795 mil. amerických dolárov.

Pri výbere optimálnej metódy na odhad výšky technických rezerv na budúce poistné plnenia sme poukázali na fakt signifikantnej závislosti v rezíduách modelu o vývoji poistných plnení. Jedinou metódou, ktorá túto závislosť zachytáva, je metóda CLSC. Podniku sme preto odporučili na krytie budúcich plnení za úrazy držať rezervu vo výške približne 5,435 mil. amerických dolárov. Táto rezerva by mala byť podľa našich odhadov na 95% postačujúca.

V ďalšej časti kapitoly 5 sme sa zamerali na odhad výšky technických rezerv pre dáta pochádzajúce z Národnej banky Slovenska získané zo zdroja [11]. Poistným produktom bolo povinné zmluvné poistenie zodpovednosti za škodu spôsobenú prevádzkou motorového vozidla. Dáta sme čiastočne už analyzovali aj v kapitole 2, kde sme odhadovali technické rezervy základnými metódami. V kapitole 5 sme na dáta

aplikovali stochastické metódy z kapitol 3 a 4. Keďže k týmto dátam sme mali dostupné už aj výšky zaslúženého poistného, okrem metód CLSC, CLS a 3 bootstrap Chain-Ladder metód sme pracovali aj s metódami bootstrap Cape-Cod (skr. BCC) a bootstrap Bornhuetterovou-Fergusonovou metódou (skr. BBF).

Počnúc metódou CLSC sme pre odhadnuté dvojice rezíduí vypočítali Kendallov korelačný koeficient, ktorý vyšiel približne $-0{,}02$. Následne sme na výpočet optimálnej kopula funkcie s parametrom využívali príkaz `gofCopula` z balíka `copula` [7]. Pri Studentovej kopula funkcii sme dostali najvyššiu p-hodnotu testu dobrej zhody, konkrétne 0,8347. Kopula parameter sa odhadol na hodnotu $-0{,}03$. Z tejto hodnoty si môžeme všimnúť, že medzi susednými dvojicami odhadnutých rezíduí bola iba veľmi slabá korelácia, čo môžeme interpretovať tak, že sme našli vhodnú voľbu funkcií η a ν.

Následne sme na dáta aplikovali všetky vyššie vymenované bootstrap metódy a odhadnuté kvantily simulovaných rozdelení pravdepodobností opisujúce celkové výšky technických rezerv sme znázornili v Tabuľkách 20 a 21. Celkové výšky technických rezerv metódami CLSC a CLS vyšli príliš nadhodnotené v porovnaní s ostatnými metódami. Tento fakt bol spôsobený prítomnosťou odľahlého rezídua medzi odhadnutými rezíduami. Toto odľahlé rezíduum sme pri metódach CLSC a CLS vylúčili a kvantily empirických rozdelení odhadli znovu. Výsledné kvantily simulovaných rozdelení metódami CLSC a CLS sme zvýraznili v Tabuľke 22. Pri výbere optimálnej výšky technických rezerv na budúce poistné plnenia sme odporučili poisťovni sa prikloniť k odhadom, ktoré nám dali metódy BCC a BBF. Tieto metódy uvažovali, na rozdiel od ostatných metód aj vývoj zaslúženého poistného, ktorý bol v rokoch 2006-2013 pomerne stabilný. Navyše medzi odhadnutými rezíduami sa zistila iba slabá miera korelácie. Priklonili sme sa teda k jednoduchším metódam BCC a BBF, ktoré odhadli rezervy na úrovni približne 138 tisíc eur. Táto rezerva by mala byť na 99,% postačujúca.

V práci sme vytvorili pevný teoretický základ, v ktorom sme predstavili nové metódy odhadu technických rezerv. Následne sme túto teóriu úspešne aplikovali pri analýze vývojových trojuholníkov poistných plnení a pri odhade výšky technických rezerv na budúce poistné plnenia. Na záver by sme ešte skonštatovali, že predkladaná diplomová práca splnila všetky vopred stanové ciele.

Zoznam použitej literatúry

[1] BARNETT, G., ZEHNWIRTH, B.: *Best Estimates for Reserves*, 1999, dostupné na internete (7.8.2018): https://www.casact.org/library/00pcas/barnett.pdf

[2] GAZDARICA, J.: *Matematicko-štatistické metódy výpočtu IBNR rezerv*, diplomová práca, FMFI UK, 2015

[3] GESMANN, M. a kolektív: *ChainLadder: Statistical Methods and Models for Claims Reserving in General Insurance*, R package version 0.2.9, 2018, dostupné na internete (14.4.2019): https://CRAN.R-project.org/package=ChainLadder

[4] GUDENDORF, G., SEGERS, J.: *Extreme-Value Copulas*, Institut de statistique, Universite catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, 2009

[5] HARMAN, R., FILOVÁ, L.: *Pravdepodobnosť a štatistika*, poznámky k prednáškam, FMFI UK, 2017, dostupné na internete (02.05.2019): http://www.iam.fmph.uniba.sk/ospm/Filova/PINF47.pdf

[6] HINDLEY, D.: *Claims reserving in general insurance*, Cambridge University Press, Cambridge, 2017

[7] HOFERT, M., KOJADINOVIC, I., MAECHLER, M., YAN, J.: *copula: Multivariate Dependence with Copulas*, R package version 0.999-16, 2017, dostupné na internete (14.4.2019): https://CRAN.R-project.org/package=copula

[8] HOFERT, M., MAECHLER, M.: *Nested Archimedean Copulas Meet R: The nacopula Package*, Journal of Statistical Software, 39(9), 2011, dostupné na internete (14.4.2019): http://www.jstatsoft.org/v39/i09/

[9] CHASE, T. R.: *Analysis of bootstrap techniques for loss reserving*, diploma thesis, Faculty of the North Dakota State University of Agriculture and Applied Science, 2015

[10] JANKOVÁ, K., PÁZMAN, A.: *Pravdepodobnost a štatistika*, Vydavatelstvo UK, Bratislava, 2011

[11] KARDOŠOVÁ, M.: *Výpočet technickej rezervy na poistné plnenia v neživotnom poistení*, bakalárska práca, FMFI UK, 2015

[12] KOJADINOVIC, I., YAN, J.: *Modeling Multivariate Distributions with Continuous Margins Using the copula R Package*, Journal of Statistical Software, 34(9), 2010, dostupné na internete (14.4.2019): http://www.jstatsoft.org/v34/i09/

[13] LENGYELOVÁ, N.: *Modelovanie závislosti finančno-ekonomických ukazovateľov pomocou kopula funkcií*, bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2017

[14] LEONG, J. W. K., SHAPLAND, M. L.: *Bootstrap Modeling: Beyond the Basics*, Casualty Actuarial Society E-Forum, Fall 2010

[15] LINDA, B., KUBANOVÁ, J., JINDROVÁ, J.: *Insurance reserves estimation by bootstrap*, Univerzita Pardubice, 2011

[16] NELSEN, R., B.: *An Introduction to Copulas*, Springer, New York, 2006

[17] PEŠTA, M., OKHRIN, O.: *Conditional least squares and copulae in claims reserving for a single line of business*, Elsevier, vol. 56(C), 2014

[18] PEŠTA, M.: *Bootstrap methods in reserving*, presentation, Univerzita Karlova, Praha, 2011, dostupné na internete (01.05.2019): http://www.karlin.mff.cuni.cz/ pesta/NMFM401/pesta-seminar111209.pdf

[19] R CORE TEAM: *R: A language and environment for statistical computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, 2016, dostupné na internete (12.01.2019): https://www.R-project.org/

[20] RONCALLI, T.: *Financial Applications of Copulas*, CREREG, Rennes, 2000

[21] SHI, P., FREES, E. W.: *Dependent loss reserving using copulas*, ASTIN Bull. vol 41(2), 2011

[22] SZŰCS, G.: *Využitie kopula funkcií v štatistickom softvéri R*, Forum Statisticum Slovacum 7/2012, 191-196, Bratislava, 2012

[23] VAĽKOVÁ, M.: *Bivariačné kopuly v poistnej matematike*, bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2013

[24] WANG, S., LEONG, J. W. K., CHEN, H.: *Backtesting the ODP bootstrap of the paid Chain-Ladder model with actual historical claims data*, Casualty Actuarial Society E-Forum, 2012

[25] WÜTHRICH, M. V., MERZ, M.: *Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance*, Wiley Finance, Sussex, 2008

[26] YAN, J.: *Enjoy the Joy of Copulas: With a Package copula*, Journal of Statistical Software, 21(4), 2007, dostupné na internete (14.4.2019): http://www.jstatsoft.org/v21/i04/