UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MERANIE A ANALÝZA KREDITNÉHO RIZIKA DLHOPISOV A PORTFÓLIA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2020 Bc. Zsolt Bognár

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MERANIE A ANALÝZA KREDITNÉHO RIZIKA DLHOPISOV A PORTFÓLIA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Mgr. Miroslav Kotov

Bratislava 2020 **Bc. Zsolt Bognár**

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Zsolt Bognár
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Meranie a analýza kreditného rizika dlhopisov a portfólia
Measures and analyses of credit risk of bonds and portfolio

Anotácia: Analýza metód merania kreditného rizika, pravdepodobnosť defaultu a ich aplikácia na dlhopisové portfólio.

Vedúci: Mgr. Miroslav Kotov
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.

Dátum zadania: 07.01.2019

Dátum schválenia: 08.01.2019 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie

Touto cestou sa chcem veľmi pekne poďakovať svojmu vedúcemu diplomovej práce Mgr. Miroslavovi Kotovovi za podnetné pripomienky, ochotu a pomoc pri vedení diplomovej práce. Ďalej sa chcem poďakovať mojim kolegom za odporúčanú literatúru, konzultácie a odborné rady, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej rodine za trpezlivosť a podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

Bognár, Zsolt: Meranie a analýza kreditného rizika dlhopisov a portfólia [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; Vedúci: Mgr. Miroslav Kotov, Bratislava, 2020, 75 strán.

Diplomová práca sa zaoberá meraním a modelovaním kreditného rizika jednotlivých dlhopisov ako aj celého portfólia. Meranie kreditného rizika je nevyhnutne dôležitou úlohou každej finančnej inštitúcie. Tento proces určuje možné straty firmy spôsobené neschopnosťou dlžníkov splniť svoje záväzky, ktoré v konečnom dôsledku môžu viesť aj k bankrotu spoločnosti. Od veľkej finančnej krízy, teda od roku 2008, venujú vedenia firiem tejto oblasti väčšiu pozornosť a snažia sa neustále rozvíjať a aktualizovať vlastné použité modely. Samozrejme, neexistuje len jeden všeobecný model, ktorý by bol vhodný pre všetky finančné inštitúcie, každý z nich má svoje výhody a môžu byť rovnako veľmi prínosné. V našej práci predstavíme zopár najčastejšie používaných modelov na meranie kreditného rizika, popíšeme ich a poukážeme na výhody a nevýhody ich použitia. Po podrobnom popise si zoberieme konkrétne príklady a vysvetlíme ich fungovanie a dôležité kroky jednotlivých procesov. Následne použijeme jeden z vybraných modelov na detailnú analýzu nášho dlhopisového portfólia a prácu ukončíme modelovaním korelačného rizika.

Kľúčové slová: kreditné riziko, dlhopis, portfólio, pravdepodobnosť zlyhania, kreditný rating, migračná matica, korelácia

Abstract

Bognár, Zsolt: Measures and analyses of credit risk of bonds and portfolio [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Tutor: Mgr. Miroslav Kotov, Bratislava, 2020, 75 pages.

This master thesis focuses on measuring and modelling of credit risk of single bonds and the whole bond portfolio. Measuring the credit risk is an essential task for every financial institution. This process identifies possible losses for the firm, due to the inability of their clients to repay their debt, which in the end, could lead to the bankruptcy of the firm. Since the big financial crisis of 2008, the leadership of firms have paid more attention to this field and tried to evolve and upgrade their models as well. There is no general model which would be suitable for every financial institution, but each one has its own advantages and can be very beneficial in different situations. In our work, we present some of the most frequently used models for measuring credit risk, describe their structure and show their biggest advantages and flaws. This detailed description is then followed by showing their use in practice, and an explanation on how they work, by highlighting the important steps of their processes. Later, we use one of the models for a detailed analysis of our bond portfolio before we end our work with correlation risk modelling.

Keywords: credit risk, bond, portfolio, probability of default, credit rating, migration matrix, correlation

Obsah

Obsah **7**

Slovník pojmov **9**

Úvod **11**

1 Úvod do modelovania kreditného rizika **13**

1.1 Kreditné ratingy 14

1.2 Štrukturálne modely 15

1.3 Iné modely 16

2 Mertonov model **17**

2.1 Predpoklady modelu 18

2.2 Odvodenie pravdepodobnosti defaultu 19

2.3 Kreditné prirážky 22

2.4 Výhody a nevýhody modelu 23

3 CreditMetrics model **25**

3.1 Meranie kreditného rizika dlhopisu 26

3.2 Meranie kreditného rizika portfólia dvoch dlhopisov 30

3.3 Meranie kreditného rizika portfólia troch a viac dlhopisov 34

3.3.1 Analytický prístup 34

3.3.2 Simulačný prístup 37

3.4 Výhody a nevýhody modelu 40

4 Meranie kreditného rizika nášho portfólia **42**

4.1 Korelácia dlhopisov 48

4.1.1 Systematické chyby v korelácii 48

4.1.2 Náhodné chyby 51

4.2 Presnosť odhadu 95% VaR ... 52
4.3 Predĺženie časového horizontu ... 54
4.4 Ziskovosť portfólia ... 56
5 Modelovanie korelačného rizika ... 58
5.1 BET model ... 58
5.2 Davis-Lo model ... 60
5.2.1 Rozdelenie dlhopisov do rôznych sektorov ... 63
5.2.2 Aplikácia metódy v rámci modelu CreditMetrics ... 67
Záver ... 70
Zoznam použitej literatúry ... 73

Slovník pojmov

Aktíva – všetok majetok, ktorý vlastní ekonomický subjekt

Bernoulliho rozdelenie – diskrétne rozdelenie pravdepodobnosti, ktoré je špeciálnym prípadom binomického rozdelenia a opisuje situáciu, v ktorej existujú iba dva prípady: udalosť nastáva s pravdepodobnosťou p alebo nenastáva s pravdepodobnosťou $(1 - p)$

Default – označuje stav, kedy dlžník nie je schopný plniť svoje záväzky voči veriteľovi podľa podmienok kontraktu

Diverzifikácia – rozloženie investície do viacerých dlhopisov alebo iných aktív, ktoré pomáha znižovať mieru rizika portfólia

Dlhopis – dlhový cenný papier, ktorý vyjadruje záväzok dlžníka (eminenta) platiť veriteľovi výnos z nominálnej hodnoty dlhopisu vo vopred stanovených časových intervaloch, pričom v termíne jeho splatnosti je povinný vrátiť veriteľovi aj nominálnu hodnotu

Dlžník – osoba, ktorá je veriteľovi zaviazaná peňažným, vecným alebo iným plnením

Expozícia pri zlyhaní (EAD) – výška pohľadávky veriteľa v momente defaultu protistrany

Forwardova krivka – je úroková miera medzi dvoma budúcimi časovými obdobiami za podmienok dohodnutých dnes

Korelácia – vzájomný vzťah medzi dvomi alebo viacerými znakmi alebo vlastnosťami

Kreditná prirážka – vyjadruje rizikovú prémiu, ktorú klient musí navyše zaplatiť s porovnaním s bezrizikovou investíciou

Kreditný rating – nástroj na hodnotenie úverovej kvality protistrany

Kreditné riziko – riziko straty vyplývajúcej z dôvodu, že dlžník si neplní svoje záväzky podľa dohodnutých podmienok

Kupón – výnos, ktorý majiteľovi dlhopisu dlžník pravidelne vypláca vo vopred stanovených termínoch

Marginálna štandardná odchýlka – predstavuje takú mieru rizika, ktorú daný dlhopis do celkovej štandardnej odchýlky prináša po jeho pridaní do portfólia

Markovova vlastnosť – vlastnosť daného procesu, ktorá vyjadruje, že budúcnosť závisí len od prítomnosti, nie však od minulých stavov

Maturita – splatnosť finančného nástroja

Miera návratnosti – percentuálny podiel celkovej dlžnej čiastky, ktorý sa veriteľovi podarí od dlžníka vymôcť

Migrácia ratingu – zmena aktuálneho kreditného ratingu

Migračná matica – matica, ktorá obsahuje všetky pravdepodobnosti zmien ratingov

Neočakávaná strata – očakávaný objem finančných prostriedkov, ktoré veriteľ stráca pri nepredvídateľnom vychýlení od očakávanej hodnoty strát

Nominálna hodnota – hodnota uvedená na cennom papieri, ktorú určil jeho vydavateľ a je rôzna od skutočnou trhovou hodnotou, za ktorú sa dlhopis predáva resp. kupuje

Očakávaná strata – očakávaný objem finančných prostriedkov, o ktoré veriteľ príde v dôsledku nesplnenia časti záväzkov

Portfólio – je súbor všetkých finančných nástrojov v majetku jedného investora

Riziko koncentrácie – riziko zvýšeného vystavenia sa strate kvôli koncentrácii investícií v rámci ekonomického sektora, geografickej oblasti alebo individuálnych investícií

Spoločné migrácie – zmena ratingov dvoch alebo viacerých dlhopisov naraz vďaka ich vzájomného vzťahu, t. j. korelácie

Strata v prípade defaultu (LGD) – percento z nesplatenej čiastky (EAD) pri stave defaultu, ktoré sa veriteľovi vymôcť nepodarí (je doplnkovým parametrom k miere návratnosti)

Úrok – odmena určená za poskytnutie peňažných prostriedkov na vopred dohodnuté obdobie

Value-at-risk (VaR) – „hodnota v riziku“ je ukazovateľ, ktorý udáva odhad najvyššieho poklesu hodnoty portfólia aktív za dané obdobie

Veriteľ – osoba, ktorá požičala peniaze a verí, že sa jej vrátia spolu s odmenou vo forme úroku

Volatilita – miera rizika jednotlivých dlhopisov resp. celého portfólia, ktorá vyjadruje odchýlku od očakávaného stavu a meria sa štandardnou odchýlkou

Úvod

Finančné inštitúcie musia každodenne čeliť rôznym rizikám pri svojich obchodných činnostiach, pričom jedným z najvýznamnejších z nich je kreditné riziko, ktoré je spôsobené neschopnosťou resp. neochotou klientov splácať svoje záväzky. Odhadovanie veľkosti tohto typu rizika je veľmi dôležité, ukázalo sa to najmä v roku 2008, keď zlyhávali významné spoločnosti počas veľkej finančnej krízy. Modely musia byť schopné predovšetkým identifikovať klientov s nižšou kredibilitou, ktorí sú spojení s vyšším kreditným rizikom. Od času finančnej krízy sa už striedali viaceré účtovné štandardy, ktoré nútia firmy k neustálemu rozvoju a aktualizácii použitých resp. k implementácii nových modelov. Svet sa neustále mení a firmy musia byť pripravené zvládnuť všetky prekážky a šikovne manažovať finančné zdroje, pri čom im pomôžu práve rôzne modely kreditného rizika.

Predkladaná práca je rozdelená na päť kapitol a jej cieľom je opis, analýza a porovnanie niektorých prístupov, ktoré sa používajú na meranie a modelovanie kreditného rizika dlhopisov a dlhopisového portfólia. V prvej kapitole zavedieme základné pojmy, s ktorými sa budeme v našej práci často stretávať a stručne charakterizujeme základné typy modelov. Primárne sa budeme venovať štrukturálnym modelom, ktoré sú zamerané na kapitálovú štruktúru firiem. Prvá kapitola bola spracovaná na základe [1] a [18].

Druhá kapitola je zameraná na Mertonov model, ktorý je základným štrukturálnym modelom kreditného rizika. Najskôr na základe [17] priblížime základné predpoklady modelu a následne odvodíme pravdepodobnosť defaultu pomocou poznatkov z publikácií [7] a [19]. V rámci tohto kroku poukážeme aj na súvis Mertonovho modelu s teóriou oceňovania opcií. Na konci kapitoly analyzujeme štruktúru kreditných prirážok a zosumarizujeme naše poznatky opísaním výhod a nevýhod modelu.

Tretia kapitola sa venuje štrukturálnemu modelu CreditMetrics a tvorí významnú časť našej práce. V rámci kapitoly popíšeme základnú ideu modelu, jeho princíp fungovania a dôležité kroky procesu na základe [14]. Našu analýzu začneme s prípadom jedného dlhopisu, potom postupne pridáme ďalšie, následne preskúmame ako sa situácia skomplikuje v prípade portfólia dvoch, troch a viacerých dlhopisov. Pre lepšiu predstavu a porozumenie pridáme aj množstvo grafov a tabuliek, zavedieme aj jednoduché príklady. V závere kapitoly uvedieme aj výhody a nevýhody modelu.

Praktická štvrtá kapitola je venovaná meraniu a modelovaniu kreditného rizika nášho dlhopisového portfólia, ktorá sa skladá zo 105 reálnych dlhopisov s rôznymi maturitami, kupónmi a objemami. V prvej časti odhadneme výšku kreditného rizika, nakreslíme rozdelenie ziskov a strát a identifikujeme najviac rizikové dlhopisy podľa rôznych štatistík. Ďalej sa bližšie venujeme vzájomným vzťahom dlhopisov t. j. koreláciám, a preskúmame aj robustnosť modelu a presnosť odhadu rizikovej mierky Value at Risk v závislosti od počtu simulácií. V závere praktickej časti rozšírime našu pôvodnú ročnú analýzu na nasledujúcich 5 rokov a na konci obdobia výsledky zosumarizujeme a porovnáme s naivne diverzifikovaným portfóliom.

Posledná, piata kapitola je o modelovaní korelačného rizika, ktoré je jedným z najdôležitejších, ak nie najdôležitejším faktorom v riadení kreditného rizika portfólia, ktorý najviac ovplyvňuje výsledky analýzy. V rámci kapitoly detailne popíšeme dva modely kreditného rizika, ktoré sa vysporiadajú s koreláciou v rámci portfólia jedinečným spôsobom. Prvý z modelov je veľmi zjednodušený, pričom druhý je už dosť komplexný a dokáže byť užitočný najmä v rizikových časoch. V závere aplikujeme túto metodiku aj v rámci nášho portfólia a výsledky zosumarizujeme v tabuľkách. Táto kapitola bola spracovaná na základe publikácií [3] a [4], pričom ďalšie šikovné metódy nájdeme aj v [9].

1 Úvod do modelovania kreditného rizika

„All models are wrong, but some are useful.“

George Box

Kreditné riziko vznikne pri každej transakcii likvidity medzi veriteľom a dlžníkom. Dlžník musí počas vopred dohodnutej doby splácať celkovú požičanú sumu, ktorá sa nazýva istina (*principal*) a navyše pravidelne vyplácať úrok (*interest*) v nejakej forme. Túto zvyšnú sumu úrokov môžeme chápať ako kompenzáciu veriteľovi za to, že určitý čas nemal prístup k svojim vlastným peniazom a samozrejme aj za rôznych rizík, ktorými sa budeme v tejto práci zaoberať. Najprv sa ale musíme zoznámiť so základnými pojmami a rôznymi modelmi kreditného rizika, ktoré predstavujeme na základe knihy [1]. Najčastejšie používané finančné nástroje v týchto transakciách sú úvery a dlhopisy, zvyčajne s viacročnou maturitou. My sa zamierame na dlhopisy, ktoré pravidelne vyplácajú úrok vo forme kupónov. Môže to byť každý rok, polrok alebo aj štvrťrok, je to vopred dohodnuté v rámci kontraktu. Existujú však aj bezkupónové dlhopisy, ktoré žiadne kupóny nevyplácajú. Tieto cenné papiere sa predávajú za diskontovanú cenu, pričom dlžníci v čase maturity musia vyplácať už celú nominálnu hodnotu (*face value*). Rozdiel medzi nominálnou hodnotou a diskontovanou cenou dlhopisu je teda suma kompenzácie pre veriteľa. Bezkupónové dlhopisy sú základným východiskom ostatných finančných nástrojov a často sa používajú pri odvodzovaní rôznych finančných modelov, napríklad aj pri Mertonovom modeli, ktorému sa budeme neskôr detailne venovať. Zrejme najväčšie kreditné riziko vznikne pri neschopnosti splácania istiny, teda požičanej sumy, ale musíme brať do úvahy aj riziko nesplácania úrokov. Zvyčajne jeden vyplýva z druhého, keďže oneskorené platby kupónov už naznačujú finančnú neistotu dlžníkov a vo väčšine prípadov dôjde aj k zlyhaniu. V takomto prípade pohľadávky veriteľa môžu byť čiastočne uspokojené z hodnoty aktív insolventnej protistrany. Podiel tejto sumy, ktorú sa veriteľovi podarí od dlžníka vymôcť, a celkovej dlžnej čiastky, určuje mieru návratnosti v stave defaultu. Táto hodnota závisí od viacerých faktorov, najmä od podriadenosti daného dlhopisu. Túto tému ešte detailnejšie rozoberieme v nasledujúcich kapitolách. Doplnkovým parametrom k miere návratnosti je strata v prípade defaultu (*loss given default*), ktorá vyjadruje percento, ktoré sa veriteľovi vymôcť nepodarí. Je to jedným z 3 vstupných parametrov pri výpočte očakávanej straty. Zvyšné dva parametre sú pravdepodobnosť defaultu (PD) a expozícia pri zlyhaní, ktorú na

základe anglického pojmu značíme EAD (*exposure at default*). Pravdepodobnosť defaultu je pre odhad kreditného rizika nevyhnutným parametrom, ktorá sa zvyčajne udáva v horizonte jedného roku, a EAD je výška pohľadávky dlžníka v momente defaultu. Očakávaná strata je potom jednoducho súčin týchto troch parametrov a môžeme ju chápať ako pravdepodobný objem finančných prostriedkov, o ktoré veriteľ príde v dôsledku nesplnenia zmluvných podmienok dlžníkov. Túto hodnotu musíme pre každý dlhopis resp. každé aktívum počítať zvlášť, pričom celková očakávaná strata portfólia je iba súčtom strát týchto jednotlivých pohľadávok. Síce je odhad očakávanej straty celkom jednoduchý, v práci uvidíme, že určiť hodnotu neočakávanej straty je o to komplexnejší problém. Tento odhad je založený na analýze historických dát a generovaní možných scenárov vývoja. Cieľom je potom určiť maximálnu možnú stratu aktíva resp. portfólia aktív na nejakom stupni spoľahlivosti. Na rozdiel od očakávanej straty, neočakávaná strata portfólia nebude suma všetkých jednotlivých pohľadávok, ale musíme vziať do úvahy aj koreláciu aktív a diverzifikovanosť portfólia. Vďaka vhodnej diverzifikácii bude neočakávaná strata portfólia výrazne nižšia než súčet neočakávaných strát jednotlivých aktív.

Na trhu existujú aj finančné nástroje, ktoré nám umožnia poistenie kreditného rizika. Jedným z týchto nástrojov je CDS (*credit default swap*) a funguje nasledovne: osoba, ktorá zakúpi tento swap, musí predávajúcemu pravidelne vyplácať tzv. poistné (*premium*), ktoré v prípade defaultu dlhopisu musí kupujúcemu vyplatiť jeho nominálnu hodnotu. Suma poistného vždy závisí od rizikovosti daného aktíva. V prípade rizikových aktív to teda slúži ako ochrana, pomocou ktorej sa môžeme vyhnúť veľkým stratám. Dve otázky, ktoré nás môžu hneď napadnúť, a to: ktoré aktíva považujeme za rizikové a ako ich môžeme jednoducho identifikovať? Východiskom viacerých odpovedí sú ratingové agentúry a ich ratingová metóda na hodnotenie kvality (kreditný rating) daného aktíva resp. firmy, ktorá dlhopis vydáva.

1.1 Kreditné ratingy

Kreditné ratingy sú jedným z najvýznamnejších nástrojov v riadení kreditného rizika. Ratingové agentúry majú dlhodobú históriu v meraní rizikovosti firiem. Prvé potvrdené poznatky prichádzajú z roku 1849, kedy v americkom meste Cincinnati založili firmu Dun & Bradstreet. Táto firma poskytla detailnú analýzu štruktúry firiem a meranie kreditného rizika. V tom čase nemali investori vo väčšine prípadov k dispozícii historické

dáta o obchodovaniach a finančných transakciách firiem, preto s každou investíciou bola spojená veľká neistota, ktorá je najväčším nepriateľom investorov. Väčšina firiem si časom uvedomila, že túto neistotu treba nejakým spôsobom odstrániť, vtedy prišli do úvahy ratingové agentúry, ktoré ako tretia partia dokázali objektívne ohodnotiť kvalitu všetkých firiem na základe rôznych faktorov a vytvoriť tzv. kreditný rating, ktorý by mal značiť rizikovosť danej firmy. Tento krok bol nesmierne úspešný, investori sa začali čoraz viac spoliehať na ratingy firiem, vďaka ktorým sa výška investícií postupne zvyšovala. Najvýznamnejšie a najväčšie ratingové agentúry v dnešnom svete sú Standard & Poor´s (S&P) a Moody´s. Majú síce rôzne označenia ratingov (napríklad AA+ vs. Aa1) a mierne odlišné kritéria na ich identifikáciu, avšak oba systémy ratingov sa delia na 2 základné stupne: *investičný* a *špekulatívny*. Dlhopisy patriace do investičného stupňa (AAA/Aaa až BBB-/Baa3) sú najkvalitnejšie a najmenej rizikové, pričom však prinášajú aj menšie výnosy. Cenné papiere zo špekulatívneho stupňa (BB+/Ba1 až C/C) prinášajú väčší výnos, kompenzáciou však je väčšia rizikovosť a zvýšená pravdepodobnosť defaultu. Kreditné ratingy sa môžu v priebehu času meniť, lebo agentúry pravidelne (zvyčajne každý rok) prehodnocujú každý pridelený kreditný rating na základe najnovších finančných výkazov a iných dôležitých dokumentov a faktorov. Podľa posúdenia aktuálnej situácie môže dôjsť aj k zníženiu (*downgrade*) alebo zvýšeniu (*upgrade*) kreditného ratingu. Ratingové agentúry popri nových ratingoch stanovujú aj pravdepodobnosť, že sa jednotlivé ratingy v priebehu daného obdobia zmenia. Tieto pravdepodobnosti sa určujú na základe dlhodobej histórie a vytvárajú spolu tzv. migračnú maticu, ktorá obsahuje všetky pravdepodobnosti pre každý kreditný rating spolu so stavom defaultu. S touto maticou sa budeme v ďalších kapitolách často stretávať. Hlavným nedostatkom kreditných ratingov je však oneskorená informácia. Je to z toho dôvodu, že sa ratingy prehodnocujú na základe už zverejnených údajov a tým pádom nedokážu rýchlo odzrkadľovať akúkoľvek zmenu vývoja úverovej kvality dlžníka. Napriek tomu sú stále jedným z najvýraznejších a najefektívnejších indikátorov rizikovosti a využíva ich množstvo modelov.

1.2 Štrukturálne modely

Nazývajú sa štrukturálne z toho dôvodu, že odhad pravdepodobnosti defaultu sa určuje na základe kapitálovej štruktúry danej firmy. Zlyhanie nastáva vtedy, keď hodnota aktív klesne pod nejakú hodnotu. Táto dolná hranica sa nazýva *default treshold*. Túto hranicu môžeme

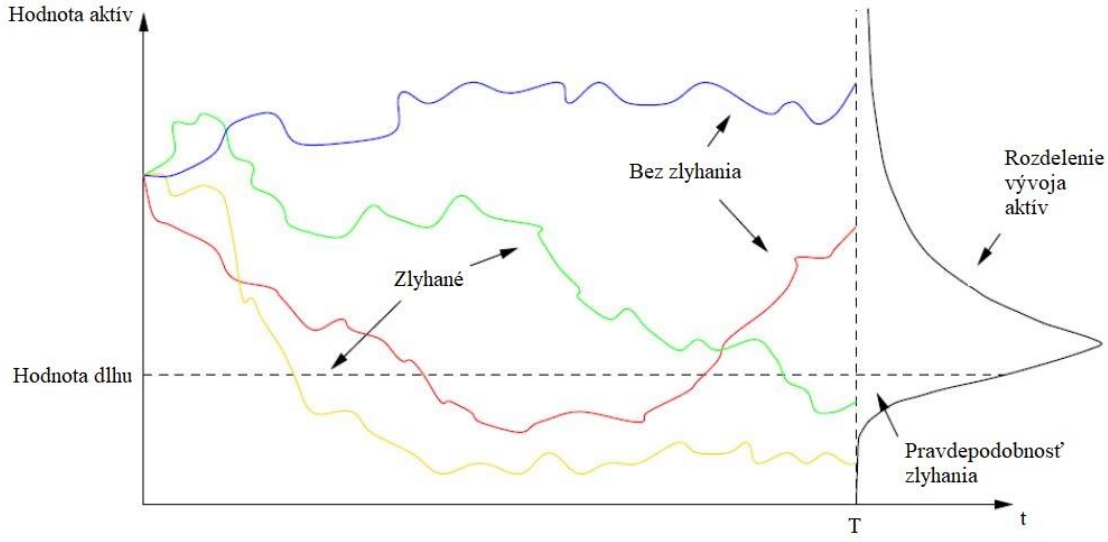
určiť rôzne, napríklad ako celkovú hodnotu dlhov. Štrukturálne modely sa zameriavajú najmä na množstvo faktorov, ktoré ovplyvnia mieru kreditnej kvality dlžníka. Základy týchto modelov položili Franco Modigliani a Merton Miller v roku 1958, ktorí skúmali vplyv zmien podielu aktív a pasív na trhovú hodnotu danej spoločnosti. Prišli s tvrdením, že trhová hodnota firmy je nezávislá na spôsobe financovania a počíta sa len na základe jej zárobkovej sily a rizika jej základných aktív. To znamená, že za určitých predpokladov (viď Modiglianiho-Millerova veta) neexistuje rozdiel medzi samotným financovaním podniku s vlastným imaním alebo dlhom. Na túto ideu nadviazali v roku 1973 Fisher Black a Myron Scholes, ktorí v spolupráci s Robertom Mertonom predstavili prvé svetovo známe analytické riešenie oceňovania opcií. Síce pôvodným účelom vzniku Black-Scholesovho vzorca bolo oceňovanie firemných dlhov, dodnes sa však používa najmä v oblasti oceňovania finančných derivátov. O rok neskôr, Merton vo svojej publikácii rozšíril použitie Black-Scholesovej teórie a vytvoril základy merania kreditného rizika pomocou štrukturálnych modelov. Keďže sa Mertonov model považuje za prvý „moderný“ model kreditného rizika, oboznámime sa s ním bližšie v rámci nasledujúcej kapitoly.

1.3 Iné modely

Samozrejme, štrukturálne modely sú iba jedným z rôznych typov modelov kreditného rizika, v dnešnom svete ich však existuje pomerne veľa. Druhým základným typom modelov sú redukované modely (*reduced-form models*), ktoré na rozdiel od štrukturálnych modelov nie sú spojené so žiadnou podobou kapitálovej štruktúry firiem, zlyhania modelujú ako náhodný Poissonov proces. Kalibrácia modelu prebieha na základe trhových dát, ktoré sú priamo pozorovateľné, napríklad makroekonomické faktory, ako rast HDP, miera nezamestnanosti, inflácia atď. Tieto modely sú z matematického hľadiska atraktívne, keďže sú rozvinutím rizikovo-neutrálnych pravdepodobností zlyhania. Ďalšia metóda je fundamentálna analýza, ktorá spočíva v detailnej analýze bilančnej štruktúry spoločnosti a jej finančných činností a cieľom procesu je správne ohodnotenie firmy resp. firemných aktív na základe historických dát. Mnohí experti tvrdia, že táto metóda je stále najpresnejším a najvhodnejším spôsobom ohodnotenia rizikovosti firiem. Kniha [1] nám predstaví ešte mnoho ďalších metód, ale my sa v našej práci budeme primárne venovať štrukturálnym modelom.

2 Mertonov model

Mertonov model je základným východiskom štrukturálnych modelov a je jedným z najvýraznejších publikácií 20. storočia v oblasti financií. Je založený na Black-Scholesovom modeli oceňovania opcií, ktorý vypracovali Fischer Black a Myron Scholes a publikovali v časopise *Journal of Political Economy* pod názvom *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* v roku 1973. O rok neskôr, Robert C. Merton prišiel na to, že rozvinutie ich modelu môže slúžiť aj na meranie resp. manažovanie kreditného rizika. Svoju prácu publikoval v *Journal of Finance* pod názvom *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates.* Vo svojej publikácii skúmal finančnú udržateľnosť a pravdepodobnosť defaultu firiem v závislosti od ich kapitálovej štruktúry. Podľa jeho argumentov, pravdepodobnosť zlyhania danej spoločnosti priamo závisí na pomere jej aktív a dlhov, t. j. čím väčšia zadlženosť, tým väčšia pravdepodobnosť zlyhania, čo implikuje väčšie kreditné riziko. Konkrétne, default nastane v prípade, že hodnota aktív spoločnosti v čase maturity klesne pod hodnotu jej dlhov. Nás bude zaujímať práve táto pravdepodobnosť, ku ktorej sa dostaneme s využitím modelu Blacka a Scholesa. Tento súvis medzi spomenutými modelmi najskôr objasníme, potom sa dostaneme k samotnému výpočtu pravdepodobnosti defaultu. Pre lepšiu predstavu fungovania modelu prikladáme aj nasledujúci obrázok:



Obr. 1: Základná idea Mertonovho modelu (vlastné spracovanie na základe [5])

2.1 Predpoklady modelu

Mertonov model teda používa ceny akcií eminenta dlhopisu k predikovaniu pravdepodobnosti zlyhania a do popredia sa tým pádom dostáva vzťah medzi jeho objemom aktív a dlhov. Default eminenta môže byť vysvetlený buď vysokým zadĺžením alebo poklesom jej hodnoty aktív z akýchkoľvek dôvodov. Základnými vstupnými parametrami modelu sú teda hodnota aktív a ich volatilita, ktorá implikuje rizikovosť spoločnosti. K volatilite sa dostaneme práve pomocou Black-Scholesovho vzorca oceňovania opcií.

Model predpokladá akciovú spoločnosť, ktorá je obchodovateľná na burze a ktorej záväzky pozostávajú z jedného bezkupónového dlhopisu s nominálnou hodnotou F. Bilančná štruktúra firmy potom vyzerá nasledujúco:

Aktíva	**Pasíva**
A_t = aktíva firmy (*assets*) modelované stochastickým procesom, t. j. geometrickým Brownovým pohybom	E_t = vlastné imanie (*equity*), pre ktoré platí vzťah $E_t = A_t - D_t$
	D_t = dlh (*debt*) reprezentovaný bezkupónovým dlhopisom s maturitou v čase T a nominálnou hodnotou F platí teda $D_t = Fe^{-r(T-t)}$

Ďalšie dôležité predpoklady Mertonovho modelu [17]:

- Žiadne transakčné náklady a dane
- Konštantná úroková miera
- Aktíva firmy sú nekonečne deliteľné
- Na trhu je dostatočné množstvo investorov, ktorí môžu kúpiť a predať ľubovoľné množstvo aktív za trhovú cenu
- Existuje trh na pôžičky za sadzbu bezrizikového výnosu
- Krátke pozície sú povolené
- Kúpa a predaj aktív prebiehajú spojito v čase
- Platí Modigliani-Millerova veta: hodnota firmy nezávisí od jej kapitálovej štruktúry
- Bezrizikový výnos dlhopisov je pevne daný a vopred známy
- Vývoj hodnoty firmy sleduje Brownov pohyb, t. j. je stochastickým procesom
- Dividendy a ďalšie priebežné platby sa nevyplácajú
- Na trhu neexistuje arbitráž

- Náklady súvisiace s bankrotom firmy sú nulové, pričom bankrot môže nastať iba v čase maturity T
- Dlh spoločnosti sa nemení v čase (je reprezentovaný jedným bezkupónovým dlhopisom s nominálnou hodnotu F a maturitou v čase T)

2.2 Odvodenie pravdepodobnosti defaultu

Na základe predchádzajúcich poznatkov vieme, že zlyhanie nastáva vtedy, ak hodnota aktív v čase maturity klesne pod hodnotou dlhov, t. j. ak $A_T < D_T$. Pravdepodobnosť nastatia tejto udalosti je potom

$$PD = P(A_T < D_T) \tag{2.1}$$

Pre výpočet potrebujeme zistiť aké rozdelenie má A_T. Podľa predpokladov modelu, hodnota aktív sleduje geometrický Brownov pohyb, rieši teda stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dA_t = \mu A_t dt + \sigma_A A_t dW_t \tag{2.2}$$

kde μ je očakávaná miera rastu aktív (deterministická časť) a σ_A značí volatilitu aktív (stochastická časť) a W_t je Wienerov proces resp. Brownov pohyb. Riešením tejto diferenciálnej rovnice je

$$A_t = A_0 e^{(\mu - \frac{{\sigma_A}^2}{2})t + \sigma_A W_t} \tag{2.3}$$

ku ktorej sa vieme dostať pomocou Itôovej lemy. Ďalej pomocou lemy sa dá ukázať, že keď hodnota aktív má lognormálne rozdelenie, potom logaritmus z hodnoty aktív riadi normálnym rozdelením so strednou hodnotou a disperziou

$$E[\ln A_T] = \ln A_t + \left(\mu - \frac{{\sigma_A}^2}{2}\right)(T - t) \tag{2.4}$$

$$D[\ln A_T] = {\sigma_A}^2 (T - t) \tag{2.5}$$

Vieme, že logaritmus je rastúca funkcia, platí teda $A_T < D_T \Rightarrow \ln A_T < \ln D_T$. Pre pravdepodobnosť defaultu potom platí $PD = P(A_T < D_T) = P(\ln A_T < \ln D_T)$. Keďže $\ln A_T$ riadi normálnym rozdelením, môžeme použiť normálnu distribučnú funkciu $N(*)$.

Platí teda

$$PD = N\left(\frac{\ln D_T - E[\ln A_T]}{\sqrt{D[\ln A_T]}}\right) = N\left(\frac{\ln D_T - \ln A_t - \left(\mu - \frac{{\sigma_A}^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_A\sqrt{T-t}}\right) \tag{2.6}$$

Vidíme, že pravdepodobnosť zlyhania závisí od viacerých parametrov, pričom len A_t a σ_A je problematické určiť. Tieto parametre nie sú priamo pozorovateľné a musíme ich nejakým spôsobom odhadnúť. Zrejme musíme začať s výpočtom hodnoty aktív, pre ktorý platí vzťah $A_t = E_t + D_t$ (viď bilančná štruktúra). Potrebujeme teda zistiť hodnotu vlastného imania a celkového dlhu firmy, pričom musíme rozlíšiť 2 prípady:

1) Ak $A_T > F$

V prípade, že hodnota aktív spoločnosti je väčšia než hodnota dlhu (t. j. bezkupónového dlhopisu), firma je schopná splniť svoj záväzok, vyplatí teda celú dlžnú čiastku F. Hodnota vlastného kapitálu tým pádom bude $E_T = A_T - F$.

2) Ak $A_T \leq F$

Ak hodnota aktív klesne pod hodnotu dlhopisu, firma nedokáže splniť svoj zmluvný záväzok a ide do konkurzu. To znamená, že veritelia dlhopisu si uplatňujú nárok na aktíva spoločnosti, ale stále zaznamenávajú stratu $F - A_T$. Zrejme hodnota vlastného imania v takomto prípade je nulová a hodnota dlhu $D_T = A_T$.

Zosumarizovaním týchto poznatkov dostaneme

$$E_T = \max(0, A_T - F) \tag{2.7}$$

$$D_T = \min(F, A_T) \tag{2.8}$$

Výraz (2.8) môžeme previesť na tvar

$$D_T = \min(F, A_T) = F - \max(0. F - A_T) \tag{2.9}$$

Podľa vzťahu (2.7) hodnota vlastného kapitálu je ekvivalentná s výplatou Európskej call opcie s realizačnou cenou F, pričom podkladovým aktívom je hodnota aktív spoločnosti A_T. V tomto okamihu vstupuje do modelu Black-Scholesov model na oceňovanie opcií, pomocou ktorého dostaneme

$$E_t = C_t(A_t, F, \sigma_A, \tau, r) = A_t\, N(d_1) - F\, e^{-r\tau}\, N(d_2), \tag{2.10}$$

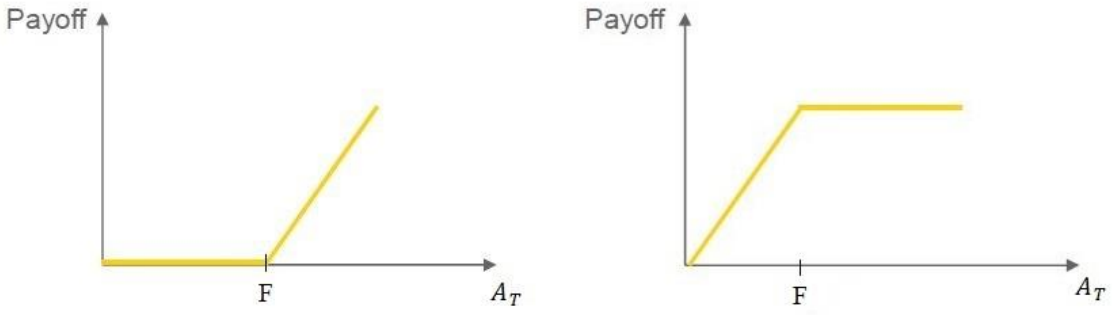
kde $\tau = T - t$ a d_1 resp. d_2 sú rovné

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{A_t}{F}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)\tau}{\sigma_A \sqrt{\tau}} \tag{2.11}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{A_t}{F}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)\tau}{\sigma_A \sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma_A \sqrt{\tau} \tag{2.12}$$

pričom r je bezriziková úroková miera a σ_A je volatilita aktív.

Čo sa týka hodnoty dlhu, veriteľ dlhopisu podľa vzťahu (2.9) vystupuje v pozícii držiteľa dlhej pozície na nominálnu hodnotu dlhopisu (F) a zároveň drží krátku pozíciu v put opcii na hodnotu aktív spoločnosti ako môžeme vidieť aj na Obr. 2.



Obr. 2: Hodnota vlastného kapitálu (naľavo) resp. dlhu firmy
(vlastné spracovanie na základe [5])

Držitelia dlhopisu sú zrejme vystavení istému kreditnému riziku, keďže v prípade defaultu stratia sumu $F - A_T$. Ich snahou je tým pádom neutralizovať toto kreditné riziko kúpou nejakého typu úverovej ochrany. V tomto prípade to zabezpečí kúpa put opcie. V čase maturity totiž výplata držiteľa dlhopisu bude rovná F, bez ohľadu na to, či nastane default. Kúpa put opcie teda dokáže transformovať rizikovú pôžičku na bezrizikový úver s nominálnou hodnotou F. Payoff držiteľa dlhopisu potom bude

$$D_t + P_t(A_t, F, \sigma_A, \tau, r) = Fe^{-r\tau} \tag{2.13}$$

kde podľa Black-Scholesovho modelu

$$P_t(A_t, F, \sigma_A, \tau, r) = F\, e^{-r\tau}\, N(-d_2) - A_t\, N(-d_1) \tag{2.14}$$

Zo vzťahu (2.13) vyplýva, že hodnota dlhu sa rovná hodnote bezkupónového dlhopisu zníženej o hodnotu Európskej put opcie, kde podkladovým aktívom je hodnota aktív firmy.

Na túto opciu sa môžeme pozerať ako na kompenzáciu za riziko nesplatenia. Zrejme túto opciu uplatníme iba v prípade defaultu, kedy má hodnotu $F - A_T$, ktorá práve neutralizuje možnú stratu veriteľov. Síce hodnoty aktív už vieme vyjadriť zo vzorca (2.10), stále nám chýba volatilita. Podľa predpokladov Mertonovho modelu, firma (eminent dlhopisu) je obchodovateľná na burze, čo znamená, že hodnota jej vlastného kapitálu je pozorovateľná. Ďalej predpokladajme, že rovnako ako hodnota aktív, E_t tiež sleduje geometrický Brownov pohyb a platí teda rovnaký vzťah ako (2.2). Použitím Itôovej lemy získame

$$dE_t = \left(\frac{\partial E_t}{\partial t} + rA_t\frac{\partial E_t}{\partial A_t} + \frac{1}{2}\sigma_A^2 {A_t}^2\frac{\partial^2 E_t}{\partial {A_t}^2}\right)dt + \sigma_A A_t\frac{\partial E_t}{\partial A_t}dW_t \tag{2.15}$$

Z rovnosti stochastických členov potom dostaneme

$$\sigma_E E_t = \sigma_A A_t\frac{\partial E_t}{\partial A_t} = \sigma_A A_t N(d_1) \tag{2.16}$$

kde $N(d_1)$ je delta opcie. Sústava rovníc (2.10) a (2.16) sa používa pre odhadnutie hodnoty aktív A_t a volatility aktív σ_A. Po vyriešení tohto systému rovníc môžeme všetky parametre dosadiť do vzorca (2.6) a určiť pravdepodobnosť defaultu. Táto metóda však má jednu veľkú nevýhodu, keďže predpokladá konštantnosť volatility vlastného kapitálu. Jej hodnota ale závisí od pomeru dlhov a aktív, ktorý sa môže v priebehu času zmeniť a tým pádom sa zmení aj volatilita σ_E. Existuje však druhá metóda, ktorá sa dokáže so zmenami pomeru zadlženosti vysporiadať. Ide o *iteračnú metódu*, ktorá je založená na vytváraní systému rovníc pre hodnoty aktív podľa (2.10), pričom volatilitu aktív určíme na základe časového radu týchto hodnôt. Podrobný popis tejto metodiky môžeme nájsť v publikácii [7]. Ak sa teda pomer zadlženosti výrazne zmení, druhá metóda nám dáva presnejšie výsledky, avšak v inom prípade sa odporúča použiť prvú, oveľa jednoduchšiu metódu dvoch rovníc.

2.3 Kreditné prirážky

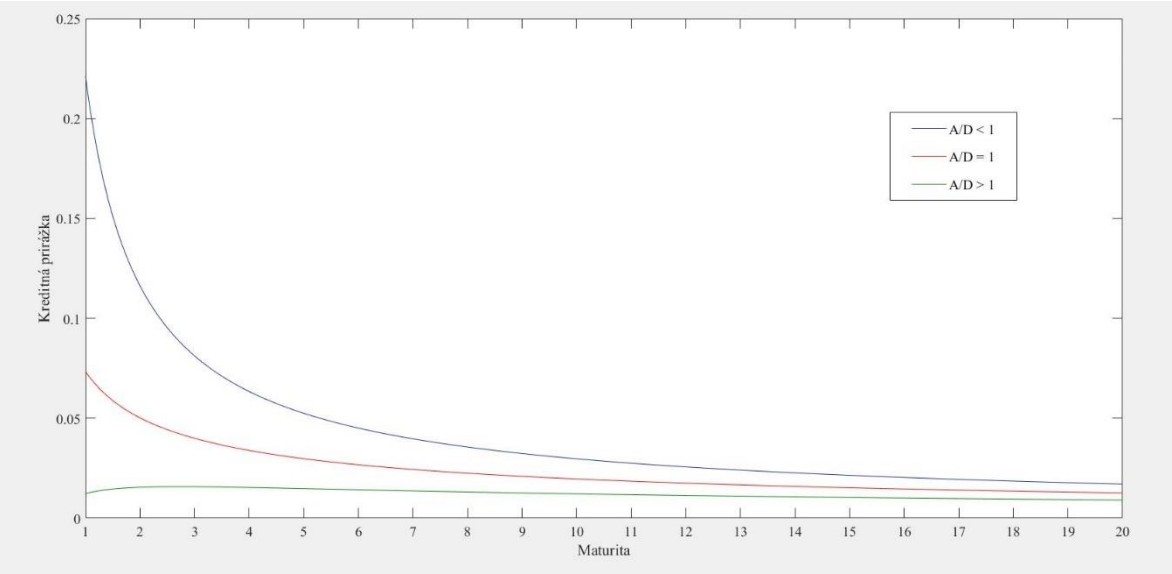
V skutočnosti je korporátny dlh reprezentovaný rizikovými dlhopismi, pričom musíme brať do úvahy aj kreditnú prirážku (*credit spread*). Jej hodnota vyjadruje rizikovú prémiu, ktorú eminent musí navyše zaplatiť s porovnaním s bezrizikovou investíciou. Čím je klient v lepšej finančnej situácii, t. j. čím väčší majetok vlastní a čím má menej dlhov, tým bude jeho prirážka menšia. Nech s je kreditná prirážka, potom hodnota korporátneho dlhopisu je

$$D_t = Fe^{-(r+s)\,\tau} \tag{2.17}$$

Pomocou (2.13) a (2.17) môžeme vyjadriť kreditnú prirážku ako

$$s = -\frac{1}{\tau}\ln\left(N(d_2) + \frac{A_t}{F}e^{r\tau}N(d_1)\right) \tag{2.18}$$

Pripomeňme si, že F vyjadruje hodnotu dlhu D_t a pomer zadlženosti je teda A_t/F. Je zaujímavé sa pozrieť na to, ako sa hodnota kreditnej prirážky v čase zmení v závislosti od tohto pomeru (Obr. 3).



Obr. 3: Hodnota kreditnej prirážky v čase v závislosti od pomeru zadlženosti (vlastné spracovanie na základe [19])

Môžeme si všimnúť, že kreditná prirážka zadlženej firmy je na začiatku obdobia veľmi vysoká, ale pomerne rýchlo klesá. Dôvodom je to, že časom hodnota firemných aktív narastá a po prežití ťažkého obdobia už bude mať firma dostatok zdrojov na postupné pokrytie dlhu. Naopak firma s dostatočným objemom vlastného kapitálu má na začiatku kreditnú prirážku blízko k nule, čo sa následne vďaka neistote zvýši a pred maturitou začne klesať. Hodnota kreditných prirážok je veľmi dôležitým indikátorom rizikovosti korporátnych dlhopisov, uvidíme to aj v rámci nasledujúcich kapitol pri modeli CreditMetrics.

2.4 Výhody a nevýhody modelu

Síce je Mertonov model jedným z najdôležitejších modelov kreditného rizika, v reálnom svete nie je vždy úspešný, keďže je príliš zjednodušený a počíta s viacerými nereálnymi

predpokladmi. Jedným z najväčších prekážok plynie hneď z toho, že firemné aktíva väčšinou nie sú obchodovateľné a tým pádom ani pozorovateľné. Existujú však viaceré komplexnejšie štrukturálne modely, ktoré sa s týmto problémom vedia vysporiadať a ponúkajú voči tejto metóde mnoho ďalších výhod.

Výhody:

- Jednoduchosť a pomerne ľahký výpočet
- Dobrá finančná interpretácia payoff profilu dlžníkov a veriteľov
- Súvislosť medzi zadlženosťou firmy a pravdepodobnosťou defaultu

Nevýhody:

- Akcie firmy musia byť obchodovateľné na burze
- Výpočet default tresholdu je arbitrárny
- Konštantná úroková miera
- Nezachytáva vplyv systémového rizika
- Informácia na základe účtovnej závierky firiem je oneskorená a vychádza s nízkou frekvenciou (zvyčajne ročne alebo polročne)
- Hodnota a volatilita aktív nie sú pozorovateľné a treba ich odhadnúť

3 CreditMetrics model

Tento model patrí do skupiny štrukturálnych modelov. Rozvíja Mertonovu ideu o skúmaní vývoja firemných aktív, pričom je jedným z najefektívnejších metód na určenie kreditného rizika celého portfólia dlhopisov. Vstupom tohto modelu sú okrem základnej informácie o jednotlivých dlhopisoch (nominálna hodnota, kupóny, maturita, atď.) aj kreditné ratingy. Model funguje na princípe toho, že kreditné riziko vznikne nielen pri zlyhaní dlhopisov, ale aj pri zmene kreditného ratingu. Výstupom je tzv. loss distribution (rozdelenie ziskov a strát) ako aj Value at Risk (VaR) portfólia, čo je odhad najvyššej možnej straty. Pomocou modelu CreditMetrics teda určujeme kreditné riziko portfólia ako celku, pričom sa vieme pozrieť aj na to, akú časť rizika prinášajú jednotlivé dlhopisy. Na základe týchto informácií budeme schopní identifikovať najviac rizikové aktíva, a optimálne diverzifikovať resp. zahedžovať naše portfólio proti veľkým stratám.

Takýto prístup prináša lepší prehľad a umožňuje ľahšiu identifikáciu rizika koncentrácie, ktoré spôsobia najmä výrazne korelované aktíva a príliš veľké (koncentrované) expozície. Jedným riešením tejto situácie by mohlo byť zavedenie hornej hranice na objem jednotlivých dlhopisov, čo by ale obmedzilo aj náš možný zisk. V prvom kroku je teda treba určiť najviac rizikové aktíva na základe výsledkov modelu a zaviesť horné ohraničenie len na tie expozície. Je to komplexný proces, ktorý v konečnom dôsledku vedie k optimálnej alokácii kapitálu.

V tejto kapitole vysvetlíme jednotlivé kroky výpočtu ako pravdepodobnosť prechodu medzi kreditnými ratingami, ocenenie dlhopisov v závislosti od kreditných ratingov, spoločné migrácie dvoch a viac dlhopisov, meranie kreditného rizika, a charakterizujeme aj stav defaultu. Najprv však musíme zaviesť ratingové kategórie. V našej práci použijeme ratingový systém *Standard & Poor´*s, ktorý sa skladá z 8 ratingov: *AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC* a *Default*. Pre jednoduchosť si zvoľme ročnú analýzu, čo znamená, že sa pozrieme na veľkosť rizika, ktorej je daná firma vystavená počas nasledujúcich 12 mesiacov. V prvom kroku chceme vypočítať forwardovú cenu dlhopisov v každom ratingovom stave, ktorú spravíme pomocou forwardových výnosových kriviek. Logicky, v prípade horších kreditných ratingov sme vystavení väčšiemu riziku a požadujeme vyššie výnosy. Pre lepšiu predstavu prikladáme aj ilustratívny príklad ročných forwardových kriviek na základe publikácie [14]:

Forwardové krivky	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
Rok 1	3,60%	3,65%	3,72%	4,10%	5,55%	6,05%	15,05%
Rok 2	4,17%	4,22%	4,32%	4,67%	6,02%	7,02%	15,02%
Rok 3	4,73%	4,78%	4,93%	5,25%	6,78%	8,03%	14,03%
Rok 4	5,12%	5,17%	5,32%	5,63%	7,27%	8,52%	13,52%

Tab. 1: Štruktúra forwardových kriviek našich kreditných ratingov [14]

3.1 Meranie kreditného rizika dlhopisu

Našu analýzu začneme s jedným dlhopisom a postupne ju rozšírime v nasledujúcich podkapitolách o ďalšie dlhopisy. Zoberme si päťročný dlhopis s nominálnou hodnotou 100 €, ratingom BBB a ročným kupónom 6%. Aktuálnu hodnotu dlhopisu dostaneme jednoducho, diskontovaním budúcich peňažných tokov (*cashflow*), t. j. kupónov vyplácaných na konci každého roku a nominálnej hodnoty, ktorú dostaneme v čase maturity. Keďže ide o ročnú forwardovú cenu, prvý kupón bude bez diskontovania:

$$V_{BBB} = 6 + \frac{6}{(1+0{,}041)} + \frac{6}{(1+0{,}0467)^2} + \frac{6}{(1+0{,}0525)^3} + \frac{106}{(1+0{,}0563)^4} = 107{,}53$$

V prípade iných kreditných ratingov nahradíme len výnosové krivky z Tab. 1 a dostaneme:

Rating na konci roka	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
Hodnota [€]	109,35	109,17	108,64	107,53	102,01	98,09	83,63

Tab. 2: Hodnota dlhopisu v závislosti od ratingu

Hodnoty v Tab. 2 teda značia sumu prvého kupónu a hodnoty dlhopisu. Ak nastane default, situácia sa zmení. To znamená, že dlžník si nesplní svoje záväzky podľa dohodnutých podmienok kontraktu a vstupuje do hry miera návratnosti. Je to vyjadrené v percentách a značí časť celkovej expozície, ktorú dostaneme späť po zlyhaní dlhopisu. Táto hodnota závisí od rôznych faktorov, ako sú kapitálová štruktúra firmy, makroekonomické ukazovatele, stav ekonomiky, a predovšetkým od podriadenosti dlhopisov.

Podľa zákona o dlhopisoch § 20a [20] platí: „Podriadeným dlhopisom je dlhopis, pri ktorom pri vstupe emitenta do likvidácie, vyhlásení konkurzu alebo povolení reštrukturalizácie emitenta alebo, ak je emitentom zahraničná osoba pri inom obdobnom opatrení, bude pohľadávka zodpovedajúca právam spojeným s týmto dlhopisom uspokojená až po

uspokojení všetkých ostatných pohľadávok okrem pohľadávok, ktoré sú viazané rovnakou alebo podobnou podmienkou podriadenosti.“

To znamená, že v prípade defaultu dlhopisy s vyššou podmienkou podriadenosti sú splácané ako prvé. My budeme predpokladať, že náš dlhopis patrí do skupiny podriadenosti s priemernou mierou návratnosťou 51,13% a štandardnou odchýlkou 25,45%. Pre jednoduchosť nech je hodnota dlhopisu pri defaulte 51,13 €, pričom ale neskôr tieto čísla vygenerujeme z beta rozdelenia s daným priemerom a štandardnou odchýlkou.

Vidíme, že v prípade zníženia kreditného ratingu (*downgrade*) klesne hodnota dlhopisu oveľa viac, ako rastie pri jeho zvýšení (*upgrade*) a to kvôli zlyhaniu. Z toho vyplýva, že rozdelenie hodnôt dlhopisov má ťažké chvosty a je šikmé. Keď chceme merať rizikovosť dlhopisového portfólia, nestačí teda použiť strednú hodnotu a štandardnú odchýlku ako v prípade normálneho rozdelenia, ale musíme nájsť aj inú mierku. Práve k takémuto účelu slúži hodnota v riziku (VaR) portfólia a zvyčajne sa ráta 95% alebo 99% VaR, ktoré neskôr použijeme aj my.

Pozrime sa teraz na spomenuté pravdepodobnosti prechodu ratingov. Keďže hodnota dlhopisov je rôzna pre rôzne kreditné ratingy, dôležitou súčasťou metódy je určenie pravdepodobnosti každého stavu resp. prechodov medzi jednotlivými ratingami. Zoberme si znovu náš predchádzajúci BBB dlhopis ako príklad. Čo sa s ním môže stať o rok vzhľadom na kreditný rating? Rating BBB sa môže zachovať, môže sa zlepšiť ako aj zhoršiť, dokonca môže nastať aj default. Počas jedného roka neočakávame veľké zmeny a zrejme s veľkou pravdepodobnosťou sa kreditný rating nezmení, pričom reálna šanca bude len na zvýšenie resp. zníženie o jeden stupeň. Rating BBB je ešte dosť kvalitný a tým pádom pravdepodobnosť defaultu bude veľmi malá.

Rating o rok	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
Pravdepodobnosť	0,02%	0,33%	5,95%	86,93%	5,30%	1,17%	0,12%	0.18%

Tab. 3: Pravdepodobnosť prechodov ratingu BBB [14]

Táto tabuľka potvrdila naše tušenia, vidíme, že s 86,93% pravdepodobnosťou sa rating dlhopisu počas nasledujúcich 12 mesiacov nezmení, pričom pravdepodobnosti väčších zmien sú výrazne pod jedným percentom. Ak spravíme takúto tabuľku pre všetky ostatné kreditné ratingy a dáme ich dokopy, dostaneme migračnú maticu alebo maticu prechodov (viď Tab. 12). Ratingové agentúry ako *Standard & Poor´s*, *Moody´s* alebo *Fitch Group* pravidelne aktualizujú a zdieľajú tieto matice na ich stránkach. Nájdeme tam matice pre

rôzne obdobia, od jedného až po desať rokov, priemery posledných pár rokov, ako aj dlhoročné priemery, škála je naozaj široká. Na druhej strane, ak máme k dispozícii dostatočné informácie, vieme ich vyrobiť aj my sami. Po prvé si musíme zvoliť časový interval podľa toho, akú maticu potrebujeme. Zoberieme si všetky naše dlhopisy k nejakému dátumu s daným ratingom a zapamätáme si koľko ich bolo. Toto bude naša báza. Ďalej sa posunieme o nami zvolený časový interval a pozrieme sa na to, ako sa dané ratingy zmenili. Ak sme mali na začiatku 1000 AAA dlhopisov (báza) a na konci obdobia sa 50 z nich zmenil na AA, tak pravdepodobnosť prechodu zo stavu AAA do AA je jednoducho 50/1000, čo je 5%. Takto pokračujeme až kým nemáme všetky pravdepodobnosti prechodov, t. j. migračnú maticu.

Už máme k dispozícii všetky dôležité informácie a môžeme prejsť k meraniu rizikovosti tohto dlhopisu. Začneme so štandardnou odchýlkou (volatilita), ktorú vyrátame v nasledujúcej tabuľke:

Rating	Pravdepodobnosť	Hodnota (spolu s prvým kupónom)	Hodnota * pravdep.	Rozdiel od priemeru	Pravdep. * rozdiel^2
AAA	0,02%	109,35 €	0,02 €	2,28 €	0,0010
AA	0,33%	109,17 €	0,36 €	2,10 €	0,0146
A	5,95%	108,64 €	6,46 €	1,57 €	0,1469
BBB	86,93%	107,53 €	93,48 €	0,46 €	0,1851
BB	5,30%	102,01 €	5,41 €	- 5,06 €	1,3562
B	1,17%	98,09 €	1,15 €	- 8,98 €	0,9432
CCC	0,12%	83,63 €	0,10 €	- 23,44 €	0,6592
Default	0,18%	51,13 €	0,09 €	- 55,94 €	5,6324
		Vážený priemer	**107,07 €**	Disperzia	8,9387
				Volatilita	**2,99 €**

Tab. 4: Výpočet štandardnej odchýlky dlhopisu

K výpočtu volatility potrebujeme najprv vypočítať vážený aritmetický priemer hodnoty dlhopisu. Ako vidíme, je to 107,07 €. Potom jednoducho vyrátame rozdiely v každom stave od tohto priemeru, umocníme ich na druhú a vynásobíme s príslušnou pravdepodobnosťou. Dostaneme týmto spôsobom disperziu, ktorá je druhou mocninou štandardnej odchýlky. Konečne sa dostaneme k hodnote 2,99 €, ktorá značí výšku kreditného rizika tohto dlhopisu. Tu sme ale predpokladali vopred danú hodnotu v prípade defaultu, ktorá v skutočnosti pochádza z beta rozdelenia so spomenutou strednou hodnotou a štandardnou odchýlkou.

Štandardná odchýlka vyjadruje „neistotu“, ktorú chceme zahrnúť aj v našich výpočtoch. Keďže to ovplyvňuje iba volatilitu dlhopisu, priemer bude stále rovnaký.

(3.1) (3.2)

$$\mu_{total} = \sum_{i=1}^{8} p_i \, \mu_i \qquad \sigma_{total}^2 = \sum_{i=1}^{8} p_i(\mu_i^2 + \sigma_i^2 - \mu_{total}^2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}02\% * 109{,}35 + \\ 0{,}33\% * 109{,}17 + \\ 5{,}95\% * 108{,}64 + \\ 86{,}93\% * 107{,}53 + \\ 5{,}30\% * 102{,}01 + \\ 1{,}17\% * 98{,}09 + \\ 0{,}12\% * \ 83{,}63 + \\ 0{,}18\% * 51{,}13 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 0{,}02\% * 109{,}35^2 + \\ 0{,}33\% * 109{,}17^2 + \\ 5{,}95\% * 108{,}64^2 + \\ 86{,}93\% * 107{,}53^2 + \\ 5{,}30\% * 102{,}01^2 + \\ 1{,}17\% * 98{,}09^2 + \\ 0{,}12\% * \ 83{,}63^2 + \\ 0{,}18\% * (51{,}13^2 + 25{,}45^2) \end{pmatrix} - 107{,}07^2$$

$$= 107{,}07 \qquad = 10{,}10$$

Zo vzťahu (3.2) dostaneme $\sigma_{total} = 3{,}18$. To znamená, že volatilita sa z pôvodných 2,99 € zvýšila na 3,18 €. V našom prípade sme všetky štandardné odchýlky okrem stavu defaultu nastavili na nulu a predpokladali sme teda konštantnosť kreditných prirážok. Robíme to preto, lebo nevieme ktorú časť kreditnej prirážky tvoria systematické a ktorú nesystematické riziká. Systematické riziko vyplýva z celkového vývoja ekonomiky a makroekonomických ukazovateľov a ovplyvňuje teda všetky aktíva, pričom nesystematické riziko existuje len na úrovni firmy a vyplýva priamo z hospodárenia a finančných činností danej inštitúcie. Ak by sme mali informáciu o takomto rozdelení rizík pre jednotlivé firmy, systematické riziko by sme zrejme považovali za základnú časť a nesystematické riziko by určilo volatilitu σ_i, tým pádom by sme dostali presnejšie odhady kreditného rizika. My ale túto informáciu nemáme k dispozícii a pracujeme ďalej s konštantnými kreditnými prirážkami.

Namiesto štandardnej odchýlky môžeme použiť percentilovú mierku rizika, ktorej interpretácia je veľmi jednoduchá. Prvý percentil rozdelenia hodnôt dlhopisu značí hodnotu, pod ktorú skutočná hodnota portfólia padne s pravdepodobnosťou 1%. Ak toto číslo odrátame od pôvodnej hodnoty dlhopisu resp. portfólia, dostaneme 99% VaR. Všeobecne, pomocou α percentilu sa dostaneme k hodnote (100-α)% VaR. Síce to má zmysel najmä pre portfóliá, ktoré sa skladajú z viacerých dlhopisov, ukážeme si na našom jednoduchom príklade, ako to funguje. Z Tab. 4 zistíme pravdepodobnosť stavov ako aj príslušné hodnoty dlhopisu. Začneme odzadu, teda od stavu defaultu, a ideme smerom nahor, pričom v každom kroku pripočítame príslušnú pravdepodobnosť k predošlej, až kým sa nedostaneme k 1%.

Pravdepodobnosť v stave defaultu je 0,18%. Je to menej ako 1%, posunieme sa teda do stavu CCC. Kreditný rating CCC dostaneme s 0,12%-nou pravdepodobnosťou, ktorú pripočítame k predošlej a dostaneme 0,30%. Je to stále menej ako 1%, tak sa posunieme ďalej. Táto kombinovaná pravdepodobnosť, že budeme v stave Default, CCC alebo B je už 1,47%. Tu sa teda zastavíme a pozrieme sa na príslušnú hodnotu dlhopisu v stave, kde sme prekročili hranicu 1%. Je to kreditný rating B, ku ktorému patrí hodnota 98,09 €. Táto hodnota je o 8,98 € menšia ako vážený aritmetický priemer hodnôt dlhopisu, čo je vlastne výška kreditného rizika podľa tejto mierky. Je to oveľa viac ako v prípade štandardnej odchýlky, ale ako sme spomínali, v prípade jedného jediného dlhopisu to nemá veľký zmysel porovnávať a v tomto prípade ide len o ukážku.

3.2 Meranie kreditného rizika portfólia dvoch dlhopisov

V predchádzajúcej časti sme mali len jeden BBB dlhopis, poďme teraz postupne rozšíriť našu analýzu a zoberme si najskôr portfólio dvoch dlhopisov. Nech k predošlému dlhopisu pridáme ďalší s ratingom A, 5%-ným ročným kupónom, maturitou 3 roky a rovnakou skupinou podriadenosti. Výpočet hodnôt dlhopisov v každom ratingovom stave bude rovnaký, veľkú zmenu oproti predchádzajúcej časti prinesú ale spoločné migrácie ratingov, ktoré spôsobia zvýšenie kreditného rizika. Závisí to od hodnoty korelácie medzi dlhopismi, zrejme väčšia korelácia je spojená s väčším kreditným rizikom.

V prípade jedného dlhopisu sme mali 8 možných stavov na konci obdobia (AAA,AA,...,Default), pričom pre portfólio 2 dlhopisov už máme 8^2, teda 64 možností. Najprv predpokladajme nulovú koreláciu, teda nezávislosť našich dvoch dlhopisov. V tom prípade platí vzťah:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1) * P(X_2 = x_2) \tag{3.3}$$

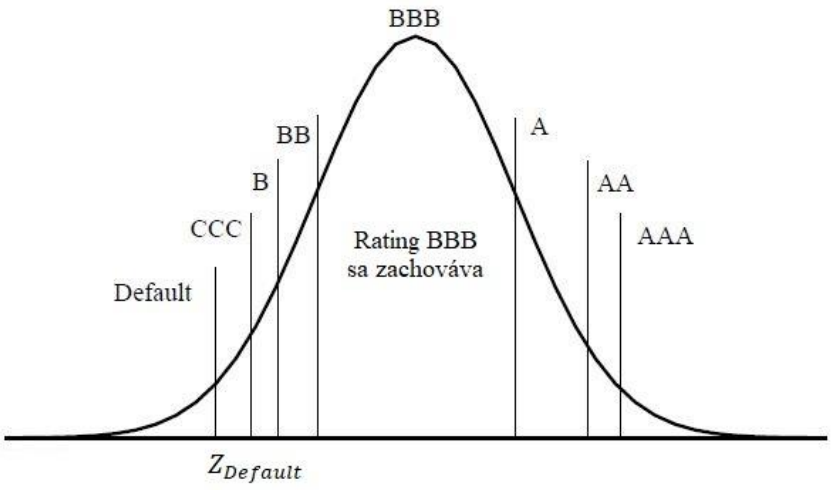
Vo vzorci (3.3) X_1 a X_2 značia jednotlivé dlhopisy, pričom x_1 a x_2 sú stavy kreditných ratingov. Pravdepodobnosti prechodov nášho druhého dlhopisu sú:

Rating o rok	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
Pravdepodobnosť	0,09%	2,27%	91,05%	5,52%	0,74%	0,26%	0,01%	0,06%

Tab. 5: Pravdepodobnosť prechodov ratingu A [14]

Podľa (3.3) pravdepodobnosť toho, že oba dlhopisy zostanú v aktuálnom ratingovom stave je $86{,}93\% * 91{,}05\% = 79{,}15\%$. Rovnakým výpočtom by sme vedeli určiť pravdepodobnosti všetkých 64 stavov. Je to ale príliš optimistický a nereálny predpoklad, keďže spoločné faktory, ako napríklad určité makroekonomické ukazovatele, ovplyvnia migrácie kreditných ratingov rovnako pre všetky dlhopisy a korelácia medzi nimi teda nikdy nebude nulová.

V prípade nenulovej korelácie sa situácia dosť skomplikuje. Predtým, než začneme počítať jednotlivé pravdepodobnosti, potrebujeme trochu odbočiť. Zoberme si znovu Mertonov model, ktorým sme sa v predchádzajúcej kapitole zaoberali. Podľa Mertona je zmena kreditného ratingu spojená s vývojom hodnoty aktív danej spoločnosti, ktorá dlhopis emituje. Model nám povie, že ak hodnota aktív klesne pod nejakú hranicu, tak nastane default. My ale musíme brať do úvahy všetky ratingové stavy a vytvárať viacero takýchto hraníc (tzv. *treshold*). Ďalej predpokladajme normálne rozdelenie zmien hodnoty aktív (ako keby „výnosy“ – označme ich R) so strednou hodnotou μ a volatilitou σ. Stredná hodnota nám neovplyvňuje výsledky a pre jednoduchosť môžeme predpokladať, že je nulová. Musí teda existovať dolná hranica $Z_{Default}$, že ak platí $R < Z_{Default}$, tak dlhopis zlyhá. Podobne, ak platí vzťah $Z_{Default} < R < Z_{CCC}$, tak sa dostaneme do stavu CCC.



Obr. 4: Vývoj hodnoty aktív spoločnosti s ratingom BBB [14]

Chceme teda „rozkúskovať“ toto rozdelenie (Obr. 4) na pásma tak, aby sme dostali príslušné pravdepodobnosti prechodu. Veľké pásmo pre BBB napríklad má pokryť 86,93% rozdelenia. Keďže sme predpokladali normalitu, pravdepodobnosti nastatia týchto udalostí budú:

$$P(Default) = P\left(R < Z_{Default}\right) = \phi\left(\frac{Z_{Default}}{\sigma}\right) \tag{3.4}$$

$$P(CCC) = P\left(Z_{Default} < R < Z_{CCC}\right) = \phi\left(\frac{Z_{CCC}}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{Z_{Default}}{\sigma}\right) \tag{3.5}$$

kde ϕ je distribučná funkcia štandardného normálneho rozdelenia a σ je volatilita vývoja aktív. Z týchto vzťahov a pravdepodobnosti z Tab. 3 a Tab. 5 vieme jednoducho vyrátať hranice jednotlivých stavov:

$Z^1_{Default} = \phi^{-1}(0{,}18\%) * \sigma = -2{,}91\ \sigma_1$

$Z^1_{CCC} = \phi^{-1}(0{,}12\% + 0{,}18\%) * \sigma = -2{,}75\ \sigma_1$

$Z^2_{Default} = \phi^{-1}(0{,}06\%) * \sigma = -3{,}24\ \sigma_2$

$Z^2_{CCC} = \phi^{-1}(0{,}01\% + 0{,}06\%) * \sigma = -3{,}19\ \sigma_2$

Horný index tu značí číslo dlhopisu, prvé dve hodnoty sa teda vzťahujú na náš prvý dlhopis a posledné dve na druhý. Volatility vývoja aktív pre firmy 1 a 2 budú rôzne, preto ich značíme σ_1 resp. σ_2. Rovnakým spôsobom by sme boli schopní vypočítať všetky hranice:

Rating	*Pravdepodobnosť*	*Dlhopis BBB*	*Treshold*	*Dlhopis A*	*Treshold*
AAA		0,02%		0,09%	
AA	$\phi\left(\frac{Z_{AA}}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{Z_A}{\sigma}\right)$	0,33%	3,54 σ_1	2,27%	3,12 σ_2
A	$\phi\left(\frac{Z_A}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{Z_{BBB}}{\sigma}\right)$	5,95%	2,70 σ_1	91,05%	1,98 σ_2
BBB	$\phi\left(\frac{Z_{BBB}}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{Z_{BB}}{\sigma}\right)$	86,93%	1,53 σ_1	5,52%	-1,51 σ_2
BB	$\phi\left(\frac{Z_{BB}}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{Z_B}{\sigma}\right)$	5,30%	-1,49 σ_1	0,74%	-2,30 σ_2
B	$\phi\left(\frac{Z_B}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{Z_{CCC}}{\sigma}\right)$	1,17%	-2,18 σ_1	0,26%	-2,72 σ_2
CCC	$\phi\left(\frac{Z_{CCC}}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{Z_{Default}}{\sigma}\right)$	0,12%	-2,75 σ_1	0,01%	-3,19 σ_2
Default	$\phi\left(\frac{Z_{Default}}{\sigma}\right)$	0,18%	-2,91 σ_1	0,06%	-3,24 σ_2

Tab. 6: Výpočet tresholdov našich 2 dlhopisov

Zrejme výpočet pre rating AAA môžeme zanedbať, keďže všetko nad hodnotou 3,54 σ_1 resp. 3,12 σ_2 padne do tohto stavu. Poďme sa teraz pozrieť na to, aká bude pravdepodobnosť, že kreditné ratingy našich dlhopisov sa zachovajú, ak máme koreláciu vývojov aktív $\rho = 0{,}3$. Príslušné horné a dolné hranice môžeme zistiť z Tab. 6.

$$P(Z_{BBB}^1 < R^1 < Z_A^1, Z_A^2 < R^2 < Z_{AA}^2) = P(-1{,}49 < R^1 < 1{,}53, -1{,}51 < R^2 < 1{,}98) =$$

$$\int_{-1,49}^{1,53}\int_{-1,51}^{1,98} f(x,y,\rho)dy\,dx = \int_{-1,49}^{1,53}\int_{-1,51}^{1,98} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}\, dy\,dx = 0{,}7969$$

Pravdepodobnosť sa teda zvýšila na 79,69%. Prikladáme aj celú tabuľku prechodov:

		AAA	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**CCC**	**Default**
		0,09%	2,27%	91,05%	5,52%	0,74%	0,26%	0,01%	0,06%
AAA	0,02%	0,00%	0,00%	0,02%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
AA	0,33%	0,00%	0,04%	0,29%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
A	5,95%	0,02%	0,39%	5,44%	0,08%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%
BBB	86,93%	0,07%	1,81%	**79,69%**	4,55%	0,57%	0,19%	0,01%	0,04%
BB	5,30%	0,00%	0,02%	4,47%	0,64%	0,11%	0,04%	0,00%	0,01%
B	1,17%	0,00%	0,00%	0,92%	0,18%	0,04%	0,02%	0,00%	0,00%
CCC	0,12%	0,00%	0,00%	0,09%	0,02%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Default	0,18%	0,00%	0,00%	0,13%	0,04%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%

Tab. 7: Spoločné migrácie ratingov pri $\rho = 0{,}3$ [7]

Zrejme suma týchto 64 pravdepodobností musí byť 100%. Ak zosumujeme hodnoty v riadkoch, dostaneme pravdepodobnosti prechodov prvého dlhopisu s ratingom BBB, ak stĺpce, tak druhého dlhopisu s ratingom A. To nám môže slúžiť aj ako skúška správnosti. Keďže už máme k dispozícii pravdepodobnosti nastatia spoločných prechodov a hodnotu portfólia vieme v každom stave jednoducho vyrátať ako sumu hodnôt dvoch dlhopisov, môžeme prejsť k samotnému meraniu kreditného rizika tohto portfólia. Začneme zase s výpočtom štandardnej odchýlky. Vzorce (3.1) a (3.2) sa zmenia iba v počte stavov, teda namiesto 8 tam bude 64. Ak neberieme do úvahy 25,45%-nú volatilitu miery návratnosti, dostaneme:

$$\mu_{total} = \sum_{i=1}^{64} p_i\,\mu_i = 213{,}63$$

$\sigma_{total}^2 = \sum_{i=1}^{64} p_i(\mu_i^2 - \mu_{total}^2) = 11{,}22$, z čoho vyplýva, že štandardná odchýlka je

$$\sigma_{total} = 3{,}35$$

Štandardná odchýlka portfólia sa pridaním druhého dlhopisu zvýšila z 2,99 € na 3,35 € (viď Tab. 4). Pozrime sa teraz na samotnú rizikovosť nášho druhého dlhopisu. Stredná hodnota, teda vážený aritmetický priemer hodnôt dlhopisu vyjde 106,54 € a štandardná odchýlka je 1,42 €. Z toho je zrejmé, že stredná hodnota portfólia síce vyjde priamo zosumovaním stredných hodnôt jednotlivých dlhopisov, pre štandardnú odchýlku to už neplatí a to vďaka

diverzifikácii. Síce samotné kreditné riziko nášho druhého dlhopisu je 1,42 €, jeho marginálne riziko (t. j. hodnota, o ktorú sa zvýši celková rizikovosť portfólia), je iba 0,36 €.

Podobne ako v prípade jedného dlhopisu, vypočítame aj percentilovú mierku rizika, pričom použijeme rovnako prvý percentil. Zoberieme si Tab. 7 a začneme sčítavať hodnoty od pravého horného rohu smerom doľava a nahor. Konečne sme pri stavoch (B, A) prekročili 1%, pričom to prislúcha k hodnote 204,39 €, čo je o 9,24 € menej ako stredná hodnota portfólia a značí teda výšku kreditného rizika podľa tejto mierky. V prípade prvého dlhopisu to bolo 8,98 €, teda marginálne riziko druhého dlhopisu je 0,26 €, čo je aj v tomto prípade výrazne menej ako samostatné riziko (*stand-alone risk*) druhého dlhopisu 3,39 €.

Pre väčšie portfólia by takýto výpočet už bol ťažko zrealizovateľný. V prípade N dlhopisov by sme mali dokopy 8^N možných stavov, čo už pre 5 dlhopisov znamená 32 768 možností. Z tohto dôvodu namiesto mechanických výpočtov použijeme teda simulácie.

3.3 Meranie kreditného rizika portfólia troch a viac dlhopisov

3.3.1 Analytický prístup

V predchádzajúcej podkapitole sme prezentovali výpočet kreditného rizika portfólia, ktoré sa skladá z dvoch dlhopisov. Poďme sa teraz pozrieť na prípad, keď je minimálny počet dlhopisov v portfóliu 3. Začneme najskôr s analytickým výpočtom kreditného rizika a potom prejdeme k samotným simuláciám. Pre jednoduchosť sa budeme zaoberať portfóliom troch dlhopisov: k predchádzajúcim dvom pridáme jeden dvojročný dlhopis s ratingom CCC a 10%-ným ročným kupónom. Objemy týchto dlhopisov budú nasledovné: 4 milióny pre firmu s kreditným ratingom BBB (Firma 1), 2 milióny pre rating A (Firma 2) a 1 milión pre novú firmu s ratingom CCC (Firma 3). Pre prvé dve firmy máme k dispozícii všetky informácie, k tretej potrebujeme ešte pravdepodobnosti prechodov. Keďže táto nová firma má veľmi zlý kreditný rating (je v stave tesne pred defaultom), očakávame, že pravdepodobnosť defaultu bude oveľa väčšia, ako v prípade prvých dvoch firiem. Bude zaujímavé sledovať, v akej miere tento zlý kreditný rating dokáže ovplyvniť celkovú rizikovosť portfólia. Pre lepší prehľad pravdepodobnosti prechodov a hodnoty jednotlivých dlhopisov zapisujeme aj do tabuľky:

	Pravdep. prechodu			Hodnota [v mil. €]		
Rating	**Firma 1**	**Firma 2**	**Firma 3**	**Firma 1**	**Firma 2**	**Firma 3**
AAA	0,02%	0,09%	0,22%	4,375	2,132	1,162
AA	0,33%	2,27%	0,00%	4,368	2,13	1,161
A	5,95%	91,05%	0,22%	4,346	2,126	1,161
BBB	86,93%	5,52%	1,30%	4,302	2,113	1,157
BB	5,30%	0,74%	2,38%	4,081	2,063	1,142
B	1,17%	0,26%	11,24%	3,924	2,028	1,137
CCC	0,12%	0,01%	64,86%	3,346	1,774	1,056
Default	0,18%	0,06%	19,79%	2,125	1,023	0,551

Tab. 8: Pravdepodobnosti prechodov a hodnoty našich troch dlhopisov [14]

Výpočet strednej hodnoty a štandardnej odchýlky hodnôt dlhopisov zrejme bude rovnaký ako v predchádzajúcich podkapitolách a dostaneme teda:

$$\mu_1 = 4{,}28 \qquad \mu_2 = 2{,}12 \qquad \mu_3 = 0{,}97$$
$$\sigma^2(V_1) = 0{,}014 \qquad \sigma^2(V_2) = 0{,}001 \qquad \sigma^2(V_3) = 0{,}044$$

Stredná hodnota portfólia bude len suma týchto troch stredných hodnôt, čiže $\mu_p = 7{,}38\, mil.€$ (lebo zaokrúhlenie). Výpočet štandardnej odchýlky portfólia je trochu komplikovanejší:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2(V_i) + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} COV(V_i, V_j) \tag{3.6}$$

Zo štatistiky vieme, že platí aj vzťah:

$$\sigma^2(V_i + V_j) = \sigma^2(V_i) + 2 * COV(V_i, V_j) + \sigma^2(V_j) \tag{3.7}$$

Využitím vzťahu (3.7) a dosadením do (3.6) dostaneme jednoduchší vzorec:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \sigma^2(V_i + V_j) - (n-2) * \sum_{i=1}^{n} \sigma^2(V_i) \tag{3.8}$$

Na základe (3.8) je teda možné konštatovať, že štandardná odchýlka portfólia závisí len od štandardných odchýlok všetkých možných párov dlhopisov ako aj od samotných odchýlok jednotlivých dlhopisov. Všimnime si, že výpočet sa týmto krokom výrazne zjednodušuje. Oproti prípadu portfólia dvoch dlhopisov totiž máme navyše vypočítať len štandardné odchýlky všetkých párov dlhopisov. Ako už vieme, takýchto párov je $\binom{n}{2}$, čo je

vlastne $\frac{n(n-1)}{2}$. Na druhej strane, ak pracujeme s veľkým portfóliom, tento proces je časovo veľmi náročný. V prípade nášho portfólia troch dlhopisov však máme len 3 rôzne páry, preto môžeme vypočítať jeho štandardnú odchýlku pomocou vzorca (3.8):

$$\sigma_p^2 = \sigma^2(V_1 + V_2) + \sigma^2(V_1 + V_3) + \sigma^2(V_2 + V_3) - \sigma^2(V_1) - \sigma^2(V_2) - \sigma^2(V_3)$$

Štandardné odchýlky jednotlivých dlhopisov už máme k dispozícii, môžeme teda prejsť k výpočtu štandardných odchýlok „subportfólií" dvoch dlhopisov. Postup je rovnaký ako v predchádzajúcej podkapitole, máme najskôr vypočítať pravdepodobnosti spoločných prechodov našich dlhopisov (viď Tab. 7), a potom určiť hodnotu portfólia ako sumu hodnôt dlhopisov v každom ratingovom stave. Týmto spôsobom sa pre $\rho = 0{,}3$ dostaneme k nasledujúcim výsledkom:

$$\sigma^2(V_1 + V_2) = 0{,}018 \qquad \sigma^2(V_1 + V_3) = 0{,}083 \qquad \sigma^2(V_2 + V_3) = 0{,}051$$

Je zrejmé, že posledné 2 subportfólia obsahujúce dlhopis s ratingom CCC sú oveľa rizikovejšie. Konečne, dosadením týchto hodnôt do vzorca, dostaneme $\sigma_p^2 = 0{,}093$ a teda štandardná odchýlka portfólia je $\sigma_p = 0{,}305\ mil.$ € resp. 305 000 €.

Ak sme zvedaví aj na kovarianciu resp. koreláciu hodnôt dlhopisov, podľa (3.7) máme:

$$COV(V_i, V_j) = \frac{\sigma^2(V_i + V_j) - \sigma^2(V_i) - \sigma^2(V_j)}{2} \tag{3.9}$$

V našom prípade:

$$COV(V_1, V_2) = 0{,}0015 \qquad COV(V_1, V_3) = 0{,}0125 \qquad COV(V_2, V_3) = 0{,}003$$

Keď už máme k dispozícii jednotlivé kovariancie, korelácie hodnôt dostaneme jednoducho podľa vzťahu:

$$\rho(V_i, V_j) = \frac{COV(V_i, V_j)}{\sqrt{\sigma^2(V_i) * \sigma^2(V_j)}} \tag{3.10}$$

Dôležite je si ale uvedomiť, že tieto korelácie sa vzťahujú len na hodnoty dlhopisov v závislosti od kreditných ratingov, pričom $\rho = 0{,}3$ je korelácia vývoja aktív.

Máme teda:

$$\rho(V_1, V_2) = 0{,}401 \qquad \rho(V_1, V_3) = 0{,}504 \qquad \rho(V_2, V_3) = 0{,}452$$

Ak sme sa nepomýlili, dosadením hodnoty kovariancií do vzorca (3.6) by sme sa dopracovali k rovnakej štandardnej odchýlke portfólia $\sigma_p = 0{,}305$. Takýto detailný analytický postup nám umožňuje jednoduchý výpočet marginálnych rizík, t. j. rizikovosť jednotlivých dlhopisov na úrovni portfólia. Vezmime si, ako príklad, náš tretí dlhopis s najhorším kreditným ratingom CCC. Ak by sme ho z nášho portfólia vylúčili, dostali by sme štandardnú odchýlku portfólia $\widehat{\sigma_p}(V_1 + V_2) = 0{,}134$. Marginálne riziko tohto tretieho dlhopisu je teda rozdiel medzi pôvodnou a novou štandardnou odchýlkou $\sigma_p - \widehat{\sigma_p} = 0{,}305 - 0{,}134 = 0{,}171$. Vylúčením dlhopisu CCC teda klesne celková rizikovosť portfólia o viac ako 50%. Všimnime si, že samotná štandardná odchýlka tohto dlhopisu je 0,210, čo znamená, že v prípade perfektnej pozitívnej korelácie ($\rho = 1$), by marginálne riziko dlhopisu bolo rovné práve tejto hodnote. Týmto krokom môžeme túto analytickú časť ukončiť a prejsť k simulačným prístupom, ktorý nám poskytuje množstvo nových informácií o rizikovosti portfólia a dlhopisov.

3.3.2 Simulačný prístup

Zatiaľ sme sa zaoberali analytickým prístupom merania kreditného rizika, ktorý v prípade malých portfólií mal dve veľké výhody: rýchlosť a presnosť. Pri kalkulácii rizika veľkých portfólií však prvá výhoda kvôli veľkému počtu priamych výpočtov hneď zmizne. Čo sa týka presnosti, tá sa stále zachováva, keďže nepotrebujeme žiadne odhady ani náhodné premenné. Na druhej strane sme však nútení použiť štandardnú odchýlku a strednú hodnotu ako miery rizika, ktoré podľa našich predchádzajúcich argumentov o rozdelení hodnôt dlhopisového portfólia nie sú práve najvhodnejšie. Ako sme už spomenuli, VaR nám umožňuje lepšiu predstavu, ku ktorej sa dostaneme pomocou simuláciám Monte Carlo. Idea celého procesu spočíva v generovaní korelovaných, normálne rozdelených náhodných premenných, ktoré je možné vytvoriť pomocou Choleského dekompozície.

Simulačný prístup sa skladá z troch krokov:

1) *Generovanie možných scenárov* – vytvoríme maticu tresholdov (viď Tab. 6) a pomocou simulácie Monte Carlo generujeme rôzne scenáre vývojov aktív (t. j. budúce kreditné ratingy)

2) *Ocenenie dlhopisov a výpočet hodnoty portfólia* – pomocou matice tresholdov určujeme vygenerovaný kreditný rating a vypočítame hodnotu dlhopisu, a následne aj celého portfólia
3) *Sumarizácia a spracovanie výsledkov* – znázorníme rozdelenie ziskov a strát (loss distribution), vypočítame VaR portfólia a pozrieme sa na rizikovosť jednotlivých dlhopisov

Pracujeme s portfóliom troch dlhopisov z predchádzajúcej časti s rovnakými parametrami a objemami. To znamená, že pravdepodobnosti prechodov už máme k dispozícii (Tab. 8), z čoho na základe Tab. 6 vieme vypočítať všetky tresholdy. Aby sme vedeli vygenerovať možné scenáre spoločných migrácií, budeme potrebovať korelácie vývojov aktív pre všetky páry našich dlhopisov. Následne z toho môžeme vytvoriť korelačnú maticu (viď Tab. 11). Označme náš *i*-ty dlhopis resp. *i*-tu firmu ako F_i. Nech sú korelačné koeficienty:

$$\rho(F_1, F_2) = 0{,}3 \qquad \rho(F_1, F_3) = 0{,}1 \qquad \rho(F_2, F_3) = 0{,}2$$

Potom už môžeme prejsť k spomenutej Choleského dekompozícii, pomocou ktorej sa snažíme vygenerovať scenáre spoločnej migrácie kreditných ratingov dlhopisov. Keďže samotné migrácie závisia od vývojov aktív, za predpokladu ich normality nám stačí vytvoriť korelované náhodné premenné pochádzajúce zo štandardizovaného normálneho rozdelenia. Ukážeme si to na nasledujúcom príklade:

Zoberme si dve lineárne nezávislé náhodné premenné so štandardizovaným normálnym rozdelením, t. j. $Z_1, Z_2 \sim N(0,1)$. Našim cieľom je generovať korelované náhodné premenné s rovnakým rozdelením a korelačným koeficientom ρ. Inak povedané, chceme aby $X_1, X_2 \sim N(0,1)$ a navyše $CORR(X_1, X_2) = \rho$. Aby sme však toho dosiahli, je podľa Choleského potrebné si zvoliť $X_1 = Z_1$ a $X_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}\, Z_2$. Poďme si to aj overiť. Keďže platí $X_1 = Z_1$, zrejme $X_1 \sim N(0,1)$. Pre X_2 počítame:

$$E(X_2) = E\left(\rho * Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} * Z_2\right) = E(\rho * Z_1) + E\left(\sqrt{1-\rho^2} * Z_2\right) =$$
$$= \rho * E(Z_1) + \sqrt{1-\rho^2} * E(Z_2) = \rho * 0 + \sqrt{1-\rho^2} * 0 = 0$$

$$D(X_2) = D\left(\rho * Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} * Z_2\right) = D(\rho * Z_1) + D\left(\sqrt{1-\rho^2} * Z_2\right) =$$
$$= \rho^2 * D(Z_1) + (1-\rho^2) * D(Z_2) = \rho^2 * 1 + (1-\rho^2) * 1 = 1$$

Vďaka lineárnej nezávislosti Z_1 a Z_2 platí aj $D(X_2) = 1$. Ďalej platí, že X_2 je lineárnou kombináciou dvoch normálne rozdelených náhodných premenných a riadi teda tiež

normálnym rozdelením. Na základe týchto troch vlastností vieme teda, že aj $X_2 \sim N(0,1)$. Ostáva nám ešte overiť si platnosť $CORR(X_1, X_2) = \rho$:

$$CORR(X_1, X_2) = \frac{COV(X_1, X_2)}{\sqrt{D(X_1) * D(X_2)}} = COV(X_1, X_2) = E\left[\left(X_1 - E(X_1)\right)\left(X_2 - E(X_2)\right)\right] =$$
$$= E[X_1 * X_2] = E\left[Z_1 * \left(\rho * Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} * Z_2\right)\right] =$$
$$= \rho * E(Z_1^2) + \sqrt{1-\rho^2} * E(Z_1 * Z_2) = \rho * 1 + \sqrt{1-\rho^2} * 0 = \rho$$

Využili sme pritom lineárnu nezávislosť Z_1 a Z_2, a základné vlastnosti Z_1. Presvedčili sme sa teda o tom, že náhodne generované premenné s normálnym rozdelením budú mať naozaj koreláciu ρ. Môžeme prejsť k samotným simuláciám:

	Vývoj aktív			Nový kreditný rating		
Simulácia	**Firma 1**	**Firma 2**	**Firma 3**	**Firma 1**	**Firma 2**	**Firma 3**
1	-0,7769	-0,875	-0,6874	BBB	A	CCC
2	-2,106	-2,0646	0,2996	BB	BBB	CCC
3	-0,9276	0,0606	2,7068	BBB	A	A
4	0,6454	-0,1532	-1,151	BBB	A	Default
5	0,469	-0,5639	0,2832	BBB	A	CCC
6	-0,1252	-0,557	-1,9479	BBB	A	Default
7	0,6994	1,5191	-1,6503	BBB	A	Default
8	1,1778	-0,6342	-1,7759	BBB	A	Default
9	1,848	2,1202	1,1631	A	AA	B
10	0,0249	-0,4642	0,3533	BBB	A	CCC

Tab. 9: Monte Carlo simulácie vývojov aktív [14]

Vidíme, že v prípade malého počtu simulácií môžu vzniknúť výrazné rozdiely medzi výsledkami simulácie a reálnymi pravdepodobnosťami prechodov z Tab. 8. Keď sa pozrieme na simulované ratingy nášho tretieho dlhopisu, všimneme si, že default nastal štyrikrát z celkových 10 simulácií, čo je 40%. Pravdepodobnosť nastatia defaultu je ale výrazne menšia, len 19,79%, čo je veľký rozdiel. Ak vytvoríme viac simulácií, tieto rozdiely sa nám začnú postupne znižovať.

Keď už máme k dispozícii simulované ratingy, môžeme prejsť k oceneniu dlhopisov. Tento krok bude rovnaký, ako doteraz: pre všetky nezlyhané dlhopisy stanovíme hodnotu pomocou forwardových výnosových kriviek a keď nastane default, vygenerujeme mieru návratnosti z beta rozdelenia s príslušnou strednou hodnotou a štandardnou odchýlkou. Hodnota portfólia potom bude jednoducho suma hodnôt jednotlivých dlhopisov. Ak to spravíme pre všetky simulácie, dostaneme rozdelenie hodnôt portfólia. Po nakreslení grafu si môžeme všimnúť aj v prípade málo simulácií, že toto rozdelenie má ťažké chvosty (kvôli zlyhaniu

dlhopisov) a teda nie je normálne. Ďalej, vieme vypočítať aj strednú hodnotu a štandardnú odchýlku portfólia pre všetky scenáre. Nech n je počet simulácií a V_i je hodnota i-teho dlhopisu. Potom platí:

$$\mu_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i \tag{3.11}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(V_i - \mu_p\right)^2} \tag{3.12}$$

Ako sme už viackrát spomenuli, stredná hodnota a štandardná odchýlka nie sú práve najlepšie mierky rizika, keďže nejde o normálne rozdelenie. Z tohto dôvodu je výhodnejšie použiť percentily. Našim cieľom je teda odhadnúť nejakú hranicu, pod ktorú hodnota portfólia klesne s pravdepodobnosťou α. V prípade nášho portfólia troch dlhopisov je to hodnota medzi $6{,}58$ a $6{,}70\ mil.€$. Táto väčšia nepresnosť je znova kvôli malému počtu simulácií. So zvyšovaním n dostaneme čoraz presnejšie odhady, t. j. užšie intervaly. Musíme si však uvedomiť, že použitím simulácie Monte Carlo tam určitá nepresnosť bude vždy a možno ani obrovské množstvo simulácií nám nedá dostatočne presný odhad skutočnej hodnoty α percentilu. Od daného počtu simulácií sa však táto nepresnosť ustáli, ako aj v prípade nášho portfólia 105 dlhopisov (Obr. 9)

3.4 Výhody a nevýhody modelu

Ako vieme, každý model má svoje výhody a nevýhody, ktoré musíme brať do úvahy pri ich použití. Zatiaľ sme sa venovali predovšetkým výhodám a šikovnostiam modelu CreditMetrics, v tejto časti by sme však chceli poukázať aj na určité nedostatky, ktoré by sa dali v tomto modelu vylepšiť. Týka sa to predovšetkým niektorých predpokladov, ktoré nemusia byť v praxi splnené. Pri sumarizácií poznatkov vychádzame najmä z [9] a [14].

Výhody:

- Schopnosť identifikovať kreditné riziko celého portfólia
- Výpočet marginálneho rizika každého dlhopisu
- Kreditné riziko vznikne aj pri zmene ratingu, nielen pri zlyhaní dlhopisu

- Menšia citlivosť na zmeny na finančných trhoch
- Optimálne rozdelenie ekonomického kapitálu na základe výsledkov modelu
- Možno aplikovať aj v prípade iných finančných nástrojov (viď [14])

Nevýhody:

- Predpoklad homogenity pravdepodobnosti defaultu v rámci ratingových kategórií
- Predpoklad Markovovej vlastnosti: zmena kreditného ratingu nezávisí od historických ratingov daného dlhopisu – čo zrejme neplatí, keďže dlhopis firmy, ktorá zaregistrovala viaceré zhoršenia ratingu má výrazne väčšiu šancu na ďalší downgrade, ako dlhopis s rovnakým, ale dlhodobo stabilným ratingom
- Korelácie dlhopisov sa ťažko určujú
- Neberie do úvahy aktuálnu makroekonomickú situáciu – korelácie defaultov sú oveľa väčšie v čase recesie ([2])
- Migračná matica je určená na základe dlhodobej histórie – aktuálne migrácie sa môžu výrazne líšiť
- Oneskorené zmeny kreditných ratingov

4 Meranie kreditného rizika nášho portfólia

Naše portfólio sa skladá zo 105 dlhopisov dôchodkovej správcovskej spoločnosti Allianz. Opäť použijeme S&P ratingy, rovnako ako v predchádzajúcej časti. Najlepší rating je AA a najhorší je BBB, keďže podľa zákona DSS nemôžu mať vo svojich portfóliách dlhopis pod investičným stupňom (BBB-). Ich maturity sú rôzne, od necelého roku až po 9 rokov, počty sa pohybujú na veľmi širokej škále, pričom objemy každého dlhopisu sú rádovo v miliónoch. Naše výpočty vykonávame v softvéri MATLAB na základe webináru [11]. Pre jednoduchosť sme predpokladali, že všetky kupóny sa vyplácajú ročne, pričom máme aj jeden bezkupónový dlhopis. Ako ukážku prikladáme aj Tab. 10, kde uvádzame štruktúru našich vstupných parametrov.

ID	Objem	Maturita	Kupón	Počet	Sektor	Rating
D1	6 500 000	5/9/2029	0,125%	6 500	6	A
D2	5 500 000	1/12/2027	0,000%	55	2	BBB
D3	2 000 000	24/10/2027	0,500%	20	2	BBB
D4	20 000 000	30/9/2027	0,375%	200	4	A
D5	5 000 000	5/7/2027	0,875%	5 000	10	BBB
D6	3 200 000	5/7/2027	0,375%	3 200	2	A
D7	5 000 000	1/7/2027	1,125%	5 000	2	BBB
D8	10 350 000	8/4/2027	0,875%	10 350	9	BBB
D9	11 000 000	2/2/2027	1,000%	11 000	4	A
D10	15 000 000	24/10/2026	0,250%	15 000	10	BBB

Tab. 10: Prvých 10 dlhopisov nášho portfólia

Naše dlhopisy sme podľa akciového fondu S&P 500 rozdelili do 10 sektorov:

1) Spotrebný sektor
2) Spotrebný tovar
3) Energia
4) Financie
5) Zdravotná starostlivosť
6) Priemysel
7) Informačné technológie
8) Materiály
9) Telekomunikácie
10) Služby

Keďže v prípade dlhopisového portfólia sa ťažko určuje korelácia medzi jednotlivými aktívami, berieme korelácie sektorov S&P 500 [6], pričom v rámci sektorov predpokladáme konštantnú koreláciu 0,6. Najjednoduchšie toho dosahujeme tak, že prenásobíme pôvodnú

korelačnú maticu s týmto koeficientom a preto ho nazveme korelačným multiplikátorom. Naša pôvodná korelačná matica vyzerá nasledovne:

Sektor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,00	0,52	0,45	0,78	0,51	0,85	0,72	0,74	0,54	0,26
2	0,52	1,00	0,34	0,58	0,65	0,57	0,27	0,47	0,39	0,43
3	0,45	0,34	1,00	0,49	0,35	0,60	0,37	0,67	0,31	0,43
4	0,78	0,58	0,49	1,00	0,60	0,81	0,51	0,69	0,42	0,33
5	0,51	0,65	0,35	0,60	1,00	0,56	0,39	0,43	0,41	0,37
6	0,85	0,57	0,60	0,81	0,56	1,00	0,66	0,83	0,49	0,37
7	0,72	0,27	0,37	0,51	0,39	0,66	1,00	0,54	0,51	0,16
8	0,74	0,47	0,67	0,69	0,43	0,83	0,54	1,00	0,39	0,30
9	0,54	0,39	0,31	0,42	0,41	0,49	0,51	0,39	1,00	0,30
10	0,26	0,43	0,43	0,33	0,37	0,37	0,16	0,30	0,30	1,00

Tab. 11: Korelačná matica S&P 500 sektorov [6]

Napríklad korelácia medzi dlhopismi zo sektorov 1 a 2 bude teda $0{,}52 * 0{,}6 = 0{,}312$. Prvým krokom je ocenenie dlhopisov, aby sme vedeli, ako sa ich hodnota zmení pri zmene kreditného ratingu. Robíme to pomocou forwardových kriviek, ktoré vyrátame na základe úrokových sadzieb nemeckých štátnych dlhopisov (*German Bund Yield*). Ročné, dvojročné, trojročné, päť- a desaťročné sadzby sme získali z databázy agentúry *Bloomberg*, pričom všetky ostatné dostaneme jednoducho pomocou lineárnej interpolácie. Všeobecná formula na výpočet forwardov je:

$$ForwardRate_{a,b} = \left(\frac{(1+r_b)^b}{(1+r_a)^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} - 1 \qquad (4.1)$$

kde *a, b* označujú roky, a *r* je prislúchajúci výnos pre dané obdobie. Po dosadení do (4.1) máme teda forwardove krivky, ktoré sú zatiaľ rovnaké pre všetky ratingy. Aby sme ich mohli rozumne odlíšiť, musíme k nim pripočítať aj príslušné kreditné prirážky. Spoločnosť *National Association of Insurance Commissioners* pravidelne aktualizuje tieto prirážky k benchmarku *U.S. Treasury*, najnovšia tabuľka je dostupná na stránke [13]. Keďže sme sa ku kreditným prirážkam k nemeckých sadzieb nedostali, budeme pracovať s americkými hodnotami. Oba štáty majú pridelený rovnaký kreditný rating a môžeme sa teda aj s týmito dátami uspokojiť. Potrebujeme už len nominálnu hodnotu dlhopisov, ktorú získame jednoducho delením objemu s počtom dlhopisov. Než prejdeme k oceneniu dlhopisov, všimneme si, že 4 z našich 105 dlhopisov budú v priebehu roka zmaturovať. Aby malo

zmysel počítať ich ročné forwardové ceny, potrebujeme ich hneď po maturite s rovnakými podmienkami reinvestovať. Vytvoríme aj tzv. „*Cash účet*“, kde budeme postupne zbierať kupóny, ktoré budú počas aktuálneho roka vyplácané. Po reinvestovaní môžeme začať s ocenením dlhopisov, pričom samotnú metodiku sme si už v predchádzajúcej podkapitole vysvetlili. V prípade zlyhania generujeme mieru návratnosti z beta rozdelenia so strednou hodnotou 51,13% a štandardnou odchýlkou 25,45% podobne ako v [14].

V ďalšom kroku budeme musieť zadefinovať našu migračnú maticu, ktorá určuje pravdepodobnosť prechodov medzi jednotlivými ratingami. V publikácii [16] sme si našli ročnú migračnú maticu, ktorá je priemerom hodnôt od roku 1981 až po 2018, dokument ale obsahoval aj dlhopisy bez priradeného ratingu, ktoré sme z našej analýzy odstránili.

Prechody	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	89,82%	9,42%	0,55%	0,05%	0,08%	0,03%	0,05%	0,00%
AA	0,52%	90,64%	8,17%	0,51%	0,05%	0,06%	0,02%	0,02%
A	0,03%	1,77%	92,29%	5,40%	0,30%	0,13%	0,02%	0,06%
BBB	0,01%	0,10%	3,64%	91,61%	3,85%	0,49%	0,12%	0,18%
BB	0,01%	0,03%	0,12%	5,35%	85,80%	7,36%	0,61%	0,72%
B	0,00%	0,02%	0,09%	0,19%	5,63%	85,09%	5,05%	3,93%
CCC	0,00%	0,00%	0,13%	0,24%	0,70%	15,63%	51,49%	31,82%

Tab. 12: Ročná migračná matica [16]

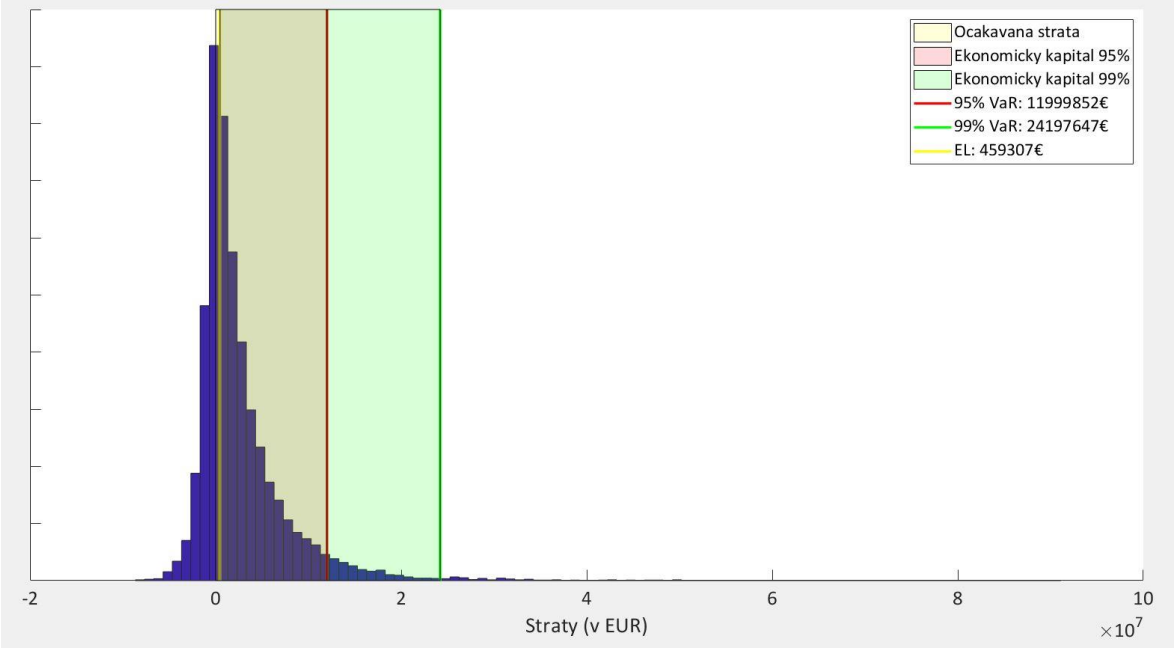
Nevýhodou takéhoto dlhodobého priemerovania je, že svet sa neustále mení a aktuálne hodnoty sa môžu od historických výrazne líšiť. Navyše berieme dlhé obdobie, počas ktorého sa viackrát striedali ekonomické cykly (*expanzie* a *recesie*), ktoré zrejme ovplyvňujú výsledky. Počas recesie totiž ekonomická aktivita začne spomaľovať, až kým dosiahne svoje dno, vďaka čomu sa zvýši aj pravdepodobnosť zlyhania dlhopisov. Navyše na základe [2] vieme, že spoločné migrácie dlhopisov sú v takomto období viac korelované. Korektným postupom by bol výpočet matíc prechodu zvlášť pre recesiu resp. expanziu, predikcia ekonomického cyklu na nasledujúce obdobie a použitie vhodnej migračnej matice. Hoci väčšina ekonómov očakáva krízu v roku 2020, predikcia cyklu je dosť náročný proces a my sa teda uspokojíme s takouto historickou maticou.

Ďalej môžeme pokračovať s výpočtom očakávanej straty portfólia podľa vzorca:

$$EL = PD * EAD * LGD \tag{4.2}$$

Pripomeňme si, že EL (*expected loss*) je očakávaná strata, PD (*probability of default*) je pravdepodobnosť zlyhania - t. j. posledný stĺpec migračnej matice, EAD (*exposure at default*) je suma ohrozená defaultom (pre jednoduchosť berieme nominálnu hodnotu dlhopisov) a LGD (*loss given default*) je strata v prípade zlyhania. LGD je vyjadrená v percentách a navyše platí vzťah $LGD = 1 - RR$, kde RR (*recovery rate*) je miera návratnosti v prípade defaultu. Očakávanú stratu nášho portfólia znázorňujeme aj na Obr. 5.

Ako sme už v predchádzajúcej časti spomenuli, za predpokladu normality môžeme pomocou inverznej hodnoty normálneho kumulatívneho rozdelenia vyrátať hranice (*treshold*) každého ratingu. Tieto hranice nám naznačia, o koľko sa má zmeniť hodnota aktíva, aby došlo k zmene kreditného ratingu. Po tomto kroku už máme všetko k dispozícii a môžeme pokračovať so samotnou simuláciou vývojov aktív. Vytvoríme 10 000 Monte Carlo simulácií a dostaneme 10 000 rôznych vývojov. Pomocou matice tresholdov priradíme vhodný kreditný rating každému jednotlivému vývoju a získame nové hodnoty dlhopisov. Potom jednoducho zosumovaním týchto hodnôt dostaneme aj hodnotu celého portfólia. Výsledok simulácie znázorňujeme aj na nasledujúcom grafe (Obr. 5).

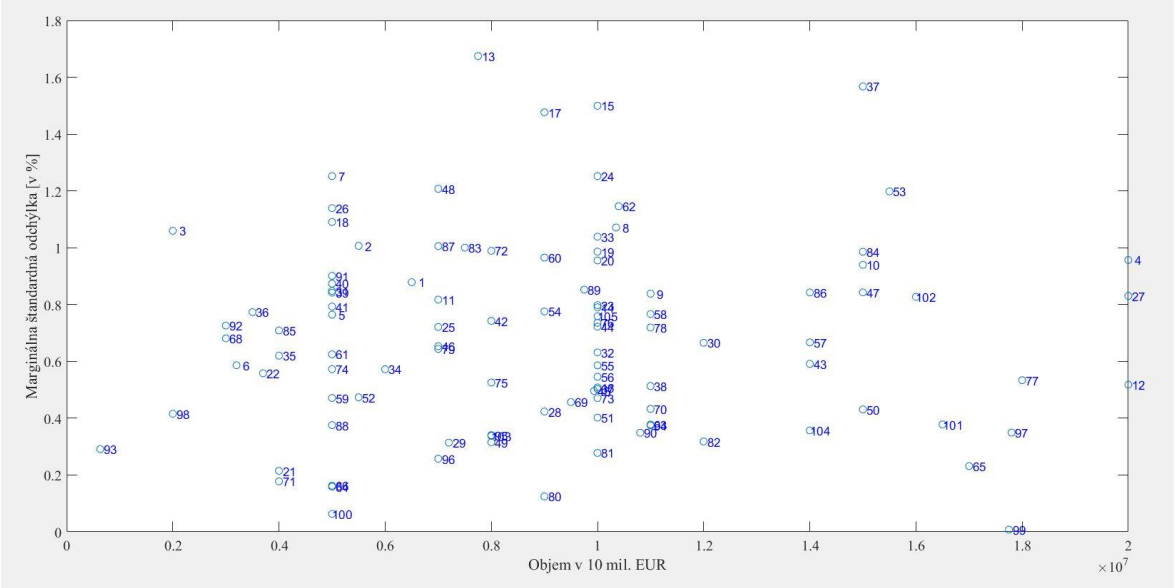


Obr. 5: Rozdelenie ziskov a strát nášho portfólia (vlastné spracovanie)

Vidíme, že 95% a 99% VaR sú 11 999 852 € resp. 24 197 647 €, pričom pôvodná hodnota portfólia je 866 270 000 €. Očakávaná strata je pomerne malá, 459 307 €, a to vďaka dobrým kreditným ratingom a teda malým pravdepodobnostiam zlyhania (viď Tab. 12). Pomocou VaR vieme vyjadriť aj výšku ekonomického kapitálu, ktorý je jedným z najdôležitejších

pojmov v riadení rizík. Predstavuje množstvo finančných zdrojov, ktoré musí banka vlastniť, aby na danej úrovni spoľahlivosti mohla plniť svoje záväzky a teda udržať si solventnosť. Z teórie už vieme, že rozdelenie hodnôt dlhopisov kvôli zlyhaniu nie je normálne, a to nám potvrdí aj predchádzajúci graf.

Poďme sa ďalej pozrieť na rizikovosť jednotlivých dlhopisov na úrovni celého portfólia. Zaujíma nás, aké riziko daný dlhopis znáša a určíme to nasledovným spôsobom: vypočítame najskôr celkovú štandardnú odchýlku portfólia a potom znova, už bez jednotlivých dlhopisov sa pozrieme na to, v akej miere klesne štandardná odchýlka po ich vylúčení. Tento pokles určuje hodnotu marginálnej štandardnej odchýlky, ktorú následne delíme strednou hodnotou daného dlhopisu, aby sme mali percentuálne vyjadrenie podľa [14]. Zrejme najväčší pokles značí najviac rizikový dlhopis. Výsledky našej analýzy vidíme na Obr. 6.



Obr. 6: Percentuálny pokles štandardnej odchýlky portfólia po vylúčení jednotlivých dlhopisov (vlastné spracovanie)

Na pravej strane grafu sú objemovo najväčšie dlhopisy a v hornej časti sú najviac rizikové. V ideálnom prípade by sa v pravom hornom rohu nenachádzali žiadne dlhopisy, avšak u nás tomu tak nie je (dlhopisy *37* a *53*). Väčšina dlhopisov sa nachádza v ľavom dolnom rohu resp. v strede obrázku, čo znamená, že portfólio celkovo nie je príliš rizikové. Na druhej strane, najrizikovejšie dlhopisy z hornej časti grafu vytvárajú významnú časť nášho portfólia, teda spôsobujú pre nás veľké množstvo rizika. Sú to predovšetkým dlhopisy s identifikačnými číslami *13, 15, 17* a *37*. Tieto 4 dlhopisy majú kreditný rating BBB a patria do sektorov 4 (Financie) a 6 (Priemysel), ktoré sú navyše aj vysoko korelované. V prípade

takýchto outlierov (spomenutých 5 dlhopisov) je rozumné zaviesť horné ohraničenie na objem, aby sme sa vyhli veľkým stratám kvôli riziku koncentrácie. Vizuálne by to znamenalo posunutie týchto bodov na grafe naľavo tak, aby pravý horný roh obrázku sa postupne vyprázdnil. Ak by sme chceli dostať komplexné informácie o rizikovosti dlhopisov, musíme brať do úvahy nielen marginálne, ale i samostatné riziko (*stand-alone risk*) každého dlhopisu, t. j. štandardnú odchýlku vyjadrenú ako sumu aj ako percento strednej hodnoty, rovnako ako v prípade marginálnych štatistík. Tabuľka 10 najrizikovejších dlhopisov podľa spomenutých štatistík vyzerá nasledovne:

TOP 10 Rizikových dlhopisov v našom portfóliu							
Samostatné riziko				Marginálne riziko			
Absolútne riziko		Percentuálne riziko		Absolútne riziko		Percentuálne riziko	
ID	**Hodnota**	**ID**	**%**	**ID**	**Hodnota**	**ID**	**%**
97	552 040,11 €	8	3,79%	37	228 413,34 €	13	1,67%
37	496 193,27 €	3	3,73%	53	195 279,85 €	37	1,57%
77	472 948,75 €	2	3,68%	4	179 890,08 €	15	1,50%
47	468 016,58 €	11	3,67%	27	167 440,22 €	17	1,48%
53	446 943,57 €	7	3,64%	84	152 110,13 €	7	1,25%
10	444 903,02 €	15	3,60%	15	148 334,75 €	24	1,25%
84	389 052,03 €	13	3,57%	102	147 573,61 €	48	1,21%
4	386 516,90 €	5	3,52%	47	132 587,71 €	53	1,20%
8	371 463,14 €	40	3,41%	13	130 920,00 €	62	1,15%
27	371 353,84 €	37	3,41%	10	128 406,73 €	26	1,14%

Tab. 13: Najviac rizikové dlhopisy nášho portfólia

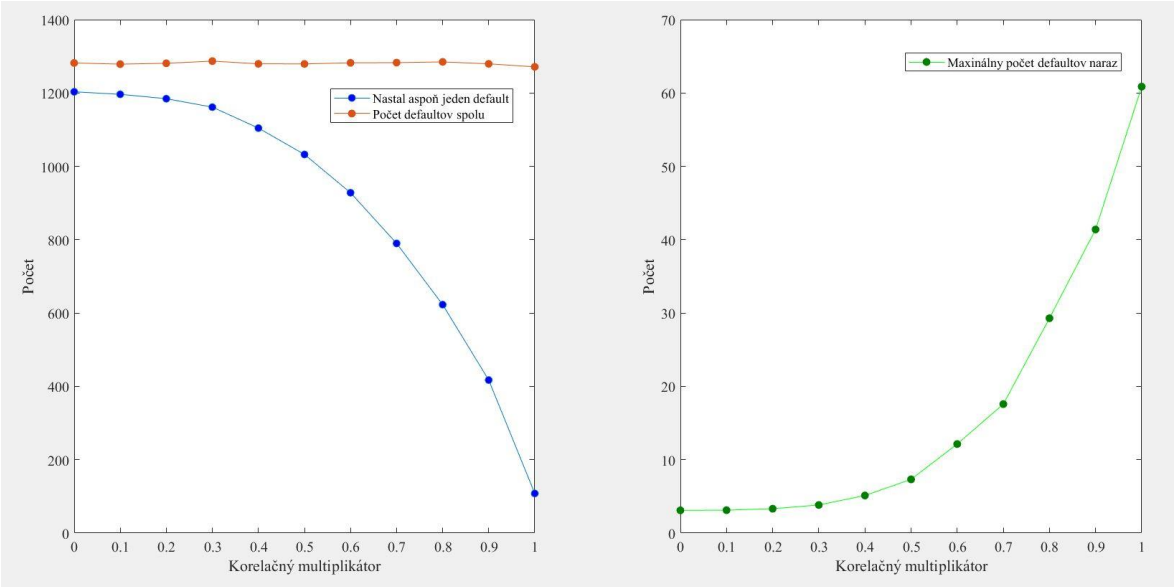
Z týchto 4 štatistík nám o rizikovosti dlhopisov v rámci portfólia najviac povie práve posledný stĺpec, ktorý sme znázornili aj na Obr. 6 spolu s poskytnutým objemom. Absolútne riziko tiež nie je zanedbateľné, ale percentuálne vyjadrenia rizík sú oveľa dôveryhodnejšie. Napríklad, ak máme AAA dlhopis s obrovským objemom, napriek tomu, že má najkvalitnejší kreditný rating spomedzi všetkých dlhopisov, bude mať stále najväčšie absolútne riziko. V prípade, že nemáme takéto vysoko koncentrované dlhopisy však môže byť táto štatistika užitočná. V našom portfóliu máme aj veľmi rôzne objemy (viď Obr. 6), z tohto dôvodu sa sústredíme najmä na percentuálne vyjadrenia rizík. V druhom stĺpci máme najviac rizikové dlhopisy, čo sa týka samostatného percentuálneho rizika. Keďže horšie ratingy majú väčšie pravdepodobnosti defaultu a tým pádom väčšiu štandardnú odchýlku, môžeme konštatovať, že dlhopisy v druhom stĺpci majú najhoršie ratingy v našom portfóliu. Ak sa pozrieme na celú tabuľku, všimneme si, že dlhopis s identifikačným číslom *37* sa nachádza vo všetkých stĺpcoch a môžeme ho tým pádom považovať za najviac rizikový.

Dlhopisy *13* a *53* sa v tabuľke vyskytujú práve trikrát, pričom dlhopisy s dvomi účasťami majú ID *4, 7, 8, 10, 15, 27, 47, 84*. Môžeme tieto výsledky porovnať s Obr. 6 a zistíme, že identifikácia rizikových dlhopisov bola úspešná. Každý z týchto dlhopisov, okrem *4* a *27* majú kreditný rating BBB. Zvyšné dva majú síce rating A, sú teda menej rizikové, ale vytvárajú najväčšiu časť nášho portfólia a vďaka riziku koncentrácie nám môžu spôsobiť veľké straty.

4.1 Korelácia dlhopisov

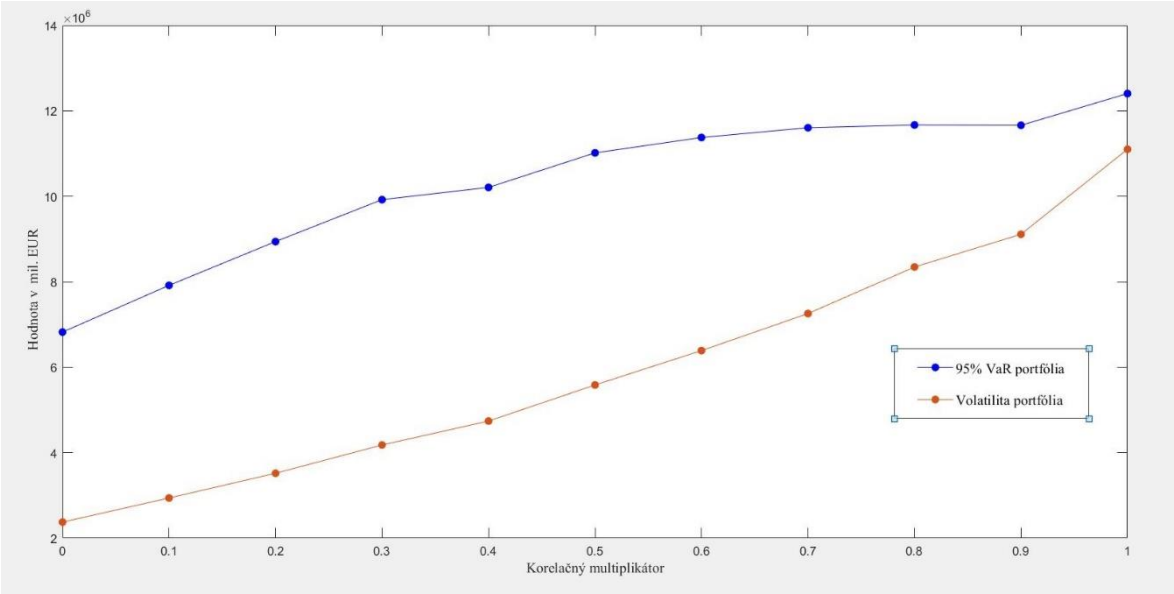
4.1.1 Systematické chyby v korelácii

Musíme si uvedomiť, že najväčší vplyv na výsledky má korelácia dlhopisov. Podľa slov Johna Hulla: „A key aspect of any credit risk VaR model is credit correlation." Ako sme v predchádzajúcich kapitolách uviedli, diverzifikácia portfólia dokáže výrazne znížiť kreditné riziko portfólia. Čo sa týka spoločnej migrácie dlhopisov, nezávislosť zrejme zabezpečuje najmenšiu rizikovosť. To by znamenalo, že default jedného dlhopisu nijakým spôsobom neovplyvňuje ostatné aktíva v rámci portfólia. To je ale príliš optimistický predpoklad, keďže dlhopisy nášho portfólia sú súčasťou sektorov S&P 500, ktoré musia mať nejaký spoločný faktor a tým pádom môžeme nezávislosť rovno vylúčiť. V prípade $\rho = 1$ sa aktíva všetkých firiem posunú rovnakým smerom. Síce to nemusí nutne znamenať default každého dlhopisu, aj hromadný downgrade však môže stále spôsobiť obrovské straty v rámci portfólia. Na druhej strane to môže priniesť aj zlepšenie každého kreditného ratingu, v ktorom prípade by sme zaznamenali výrazný zisk. Každopádne je s tým spojené veľké riziko. Takéto „hraničné situácie" v praxi nikdy nenastanú a môžeme sa teda zaoberať iba korelačným koeficientom medzi týmito hodnotami. Záporné koeficienty neberieme do úvahy, keďže všetky dlhopisy patria do indexu S&P 500, a jednotlivé sektory majú kladnú koreláciu (viď Tab. 11). Sme zvedaví predovšetkým na vplyv korelačného multiplikátora na počet zlyhaných dlhopisov, čo priamo ovplyvňuje výšku kreditného rizika portfólia. Podľa našich predchádzajúcich argumentov, pre väčšie korelačné koeficienty očakávame väčšiu koncentráciu defaultov, t. j. viac zlyhaných dlhopisov naraz, čo priamo vedie k zvýšenému kreditnému riziku portfólia. Poďme sa o tom pomocou krátkej analýzy presvedčiť (Obr. 7).



Obr. 7: Vplyv korelačného multiplikátora na počet a koncentráciu defaultov (vlastné spracovanie)

Pripravili sme 100 možných scenárov a v rámci každom z nich sme vygenerovali 10 000 simulácií pre všetky dlhopisy a korelačné multiplikátory. Tieto výsledky sme potom spriemerovali, aby sme sa vyhli extrémnym situáciám. Čoho si môžeme hneď všimnúť je, že zvyšovaním korelačného koeficientu dlhopisov výrazne klesne počet takých udalostí, kedy nastane aspoň jeden default. Pre nezávislé dlhopisy je toto číslo okolo 1 200 (z 10 000 simulácií), pričom pre druhý hraničný prípad $\rho = 1$ je to už iba 107. Vidíme tiež, že napriek tomuto faktu, počet zlyhaných dlhopisov sa veľmi nezmení (červená čiara). Je to vďaka už spomínanej zvýšenej koncentrácii defaultov pre vysoko korelované dlhopisy. Ako v pravej časti Obr. 7 vidíme, maximálny počet zlyhaní v rámci jednej simulácie pre zvýšenú koreláciu výrazne vyskočí. V prípade nezávislosti dlhopisov sme mali maximálne 3 zlyhané dlhopisy spomedzi 105, pre $\rho = 1$ je to už neskutočných 60, čo je už viac než polovica nášho portfólia. Samozrejme, ako sme sa o tom už zmienili, tieto situácie sú v praxi nereálne. V prípade nášho korelačného multiplikátora $\rho = 0{,}6$ sme mali 928 rôznych defaultových situácií a maximálne 12 zlyhaní naraz, čo je každý deviaty dlhopis. Poďme sa teraz pozrieť na to, ako sa zmení 95% VaR portfólia v závislosti od korelačného koeficientu dlhopisov. Na základe predošlých argumentov očakávame teda nárast, ale sme zvedaví aj na rýchlosť rastu. Pre zaujímavosť analyzujeme aj zmenu štandardnej odchýlky a porovnáme jej (in)stabilitu s rôznymi VaR portfólia.



Obr. 8: 95% VaR a volatilita portfólia v závislosti od korelačného multiplikátora dlhopisov (vlastné spracovanie)

Ako sme očakávali, čím je korelácia väčšia, tým je portfólio vystavené väčšiemu riziku. Keďže jednotlivé hodnoty VaR resp. volatility sa môžu pre rôzne simulácie výrazne líšiť, rozhodli sme sa vykonať 100 výpočtov pre všetky štatistiky, ktoré sme na konci spriemerovali. V rámci jedného výpočtu sme spravili 10 000 simulácií, rovnako ako v predchádzajúcej časti. Najprv si na Obr. 8 môžeme všimnúť, že volatilita portfólia rastie oveľa rýchlejšie ako 95% VaR. V prípade maximálnej korelácie je volatilita portfólia skoro päťnásobok oproti prípadu nezávislosti, pričom 95% VaR je „iba“ dvojnásobok. Spomeňme si však na naše predchádzajúce argumenty o rozdelení hodnôt portfólia – keďže nejde o normálne rozdelenie, štandardná odchýlka, resp. volatilita, nie sú najvhodnejšie štatistiky.

Korelačný multiplikátor	Volatilita	90% VaR	95% VaR	99% VaR
0	2 375 594,55 €	4 598 354,53 €	6 822 091,88 €	12 131 591,78 €
0,1	2 939 196,69 €	5 393 745,46 €	7 915 612,42 €	14 035 832,11 €
0,2	3 518 208,58 €	5 903 543,54 €	8 940 140,94 €	16 559 217,98 €
0,3	4 180 196,38 €	6 256 064,11 €	9 921 007,51 €	19 651 133,06 €
0,4	4 740 349,95 €	6 271 771,07 €	10 207 677,77 €	22 227 121,68 €
0,5	5 584 392,02 €	6 401 343,24 €	11 015 790,21 €	25 909 254,66 €
0,6	6 388 403,48 €	6 428 646,66 €	11 375 620,11 €	29 359 501,25 €
0,7	7 255 964,57 €	6 314 658,24 €	11 604 321,33 €	32 348 632,25 €
0,8	8 344 379,93 €	6 118 526,50 €	11 667 963,29 €	36 091 961,96 €
0,9	9 110 935,60 €	6 092 571,28 €	11 661 072,72 €	40 177 393,40 €
1	11 100 270,47 €	6 307 604,20 €	12 403 593,19 €	44 150 668,77 €

Tab. 14: Výška kreditného rizika portfólia v závislosti od korelačného multiplikátora

Výsledky našej analýzy, ktorú sme vykonali na základe [8], zhrnieme v Tab. 14. Pomocou tejto tabuľky vieme odpovedať na nasledujúcu otázku: ako veľmi sme precenili resp. podcenili rizikovosť portfólia, ak skutočná korelácia dlhopisov je nižšia resp. vyššia. Zoberme si 95% VaR a koreláciu 0,6, ktorú sme použili v našom portfóliu. Ak skutočná korelácia v rámci sektorov je o 0,1 vyššia, tak sme podcenili 95% VaR portfólia o $11\,604\,321 - 11\,375\,620 = 228\,701$ €. Naopak, ak je korelácia len 0,5, tak sme ju precenili o 359 830 €. Samozrejme pre 99% VaR sú tieto chyby oveľa výraznejšie. V tom prípade môže rovnaký omyl spôsobiť viac ako 10%-né rozdiely. Navyše, pre 95% VaR sa táto chyba pomaličky ustáli (nad koeficientom 0,6 sú rozdiely menej výrazné), ale pre 99% VaR sa neustále zvyšuje. Na základe týchto výsledkov môžeme teda konštatovať, že systematické chyby majú veľký vplyv na meranie kreditného rizika portfólia. Poďme sa teraz pozrieť na náhodné chyby v rámci korelačnej matice a presvedčiť sa o robustnosti metódy CreditMetrics.

4.1.2 Náhodné chyby

V tejto podkapitole budeme testovať robustnosť nášho modelu voči náhodným chybám v rámci korelačnej matice. Na rozdiel od predchádzajúcej časti zafixujeme korelačný multiplikátor (t. j. bude vždy 0,6) a modifikujeme len korelačnú maticu sektorov. Pod náhodnými chybami rozumieme náhodné čísla z normálneho rozdelenia so strednou hodnotou 0 a štandardnou odchýlkou σ, ktoré pripočítame k našej korelačnej matici. Aby sa vlastnosti korelačných matíc zachovali, diagonálne prvky ostávajú nezmenené. Po tomto kroku môžeme prejsť k simuláciám a spriemerovaniam výsledkov – rovnako ako v predchádzajúcej podkapitole. Výsledky tejto analýzy zosumarizujeme aj v nasledujúcej tabuľke:

σ	Volatilita	90% VaR	95% VaR	99% VaR
0	6 465 281,58 €	6 309 510,40 €	11 298 773,44 €	29 148 137,88 €
0,03	6 474 336,02 €	6 344 006,36 €	11 383 472,41 €	29 278 836,87 €
0,05	6 515 630,87 €	6 332 554,38 €	11 362 228,23 €	29 238 455,96 €
0,07	6 433 144,60 €	6 402 464,86 €	11 412 041,75 €	29 083 360,26 €
0,09	6 345 759,60 €	6 338 404,39 €	11 285 912,71 €	28 675 235,42 €

Tab. 15: Kreditné riziko portfólia po pripočítaní náhodných chýb ku korelačnej matici

Keďže chceme zachovať kladnú definitnosť matice, štandardné odchýlky nemôžu byť príliš veľké. Vidíme, že náhodné chyby vôbec neovplyvnili jednotlivé štatistiky, ktoré sú rovnaké

ako v prípade pôvodnej korelačnej matice, čo nám potvrdí robustnosť modelu CreditMetrics. To znamená, že akákoľvek menšia turbulencia na finančných trhoch, ktorá by ovplyvnila korelačné koeficienty našich 10 sektorov, môže byť zanedbateľná.

4.2 Presnosť odhadu 95% VaR

Ako sme sa o tom v predchádzajúcich krokoch presvedčili, odhad 95% VaR nášho portfólia je dosť robustný, vždy vyjde okolo 11 mil. €. Musíme si ale uvedomiť, že je to stále iba odhad a musíme rátať s nejakými chybami, ktoré sa vyskytnú pri simulácii rozdelenia hodnôt portfólia. Strednú hodnotu a štandardnú odchýlku teraz zanedbáme a budeme sa zaoberať len piatym percentilom rozdelenia hodnôt portfólia, nech je to θ_5, presne ako v publikácii [14]. Potom každá nová vygenerovaná hodnota portfólia bude s 5%-nou pravdepodobnosťou menšia ako θ_5. Ak toto číslo odrátame od pôvodnej hodnoty portfólia, dostaneme 95% VaR. Nech N_5 je počet simulácií, ktoré padnú pod hodnotu θ_5 a majme 1000 nezávislých simulácií. Ďalej je treba si uvedomiť, že N_5 má binomické rozdelenie $Bin(n,p)$ s parametrami $n = 10000$ a $p = 0{,}05$. Stredná hodnota a štandardná odchýlka N_5 je potom $10000 * 0{,}05 = 500$ resp. $\sqrt{10000 * 0{,}05 * (1 - 0{,}05)} = 21{,}8$. Pre takýto veľký počet simulácií je možné podľa centrálnej limitnej vety aproximovať rozdelenie N_5 s normálnym rozdelením. Potom s pravdepodobnosťou 68% skutočná hodnota N_5 sa nachádza medzi $500 - 21{,}8 = 478{,}2$ a $500 + 21{,}8 = 521{,}8$. Šanca, že je medzi hodnotami 478 a 522 je zrejme trochu väčšia. My ale nepoznáme N_5 ani hranicu θ_5, ktorú chceme odhadnúť. Uvedomme si však, že nepotrebujeme presne poznať N_5, lebo získame dostatok informácií z jeho rozdelenia. Ak totiž N_5 je väčšie alebo rovné ako 478, tak aspoň 478 z našich simulovaných hodnôt portfólia bude pod hranicou θ_5. To znamená, že θ_5 je aspoň taká veľká, ako 478. najmenšia hodnota portfólia (značíme ju V^{478}). Na druhej strane, ak N_5 je menej alebo rovné ako 522, potom θ_5 nemôže byť väčšie ako 522. najmenšia hodnota portfólia (V^{522}). Potom už máme horné a dolné ohraničenia v tvare $478 \leq N_5 \leq 522$ a ekvivalentne $V^{478} < \theta_5 < V^{522}$. Keďže tieto dve udalosti sú ekvivalentné, musia mať aj rovnaké pravdepodobnosti, t. j. platí:

$$P(478 \leq N_5 \leq 522\ ) = P(V^{478} < \theta_5 < V^{522}) = 68\%$$

Na odhad piateho percentilu hodnoty portfólia teda použijeme 500. najmenšiu hodnotu portfólia a povieme si, že sme si na 68% istí, že skutočný piaty percentil sa nachádza medzi

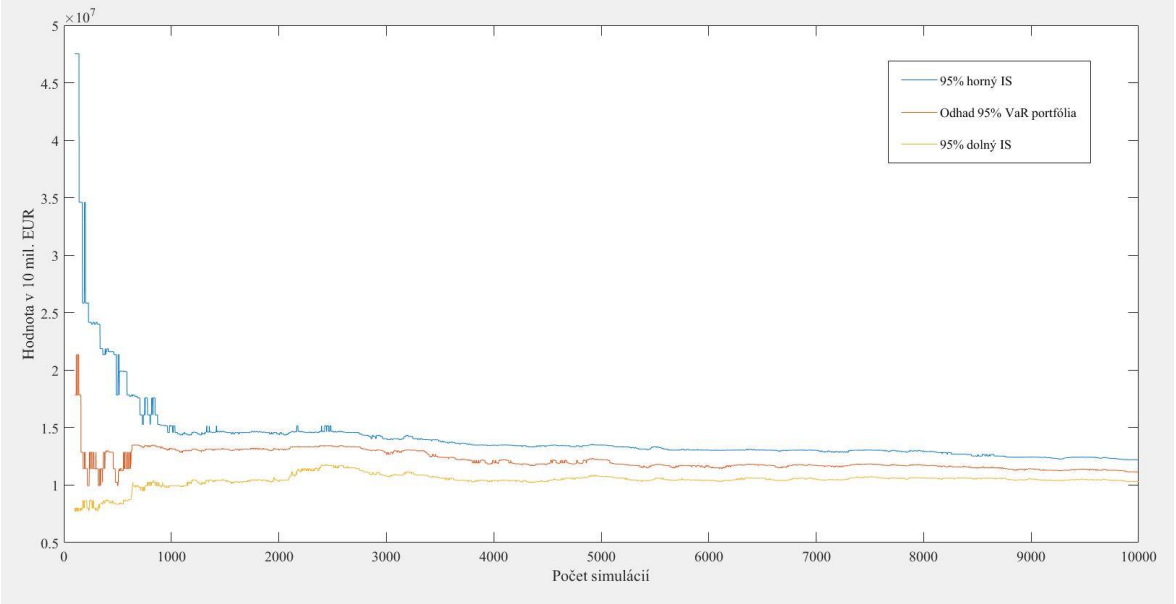
478. a 522. najmenšou simulovanou hodnotou. Týmto spôsobom sme teda schopní vytvoriť intervaly spoľahlivosti pre odhad θ_5. Vo všeobecnosti, ak chceme vygenerovať N simulácií a odhadnúť p-tý percentil, máme ohraničenia:

$$l = N * p - \alpha * \sqrt{N * p * (1 - p)} \tag{4.3}$$

$$m = N * p \tag{4.4}$$

$$u = N * p + \alpha * \sqrt{N * p * (1 - p)} \tag{4.5}$$

kde l a u sú dolné resp. horné ohraničenia a α je koeficient, ktorý si zvolíme podľa toho, aké presné intervaly spoľahlivosti žiadame. Ak $\alpha = 1$, tak máme 68%-né intervaly, ak $\alpha = 1{,}96$, tak 95%-né, ktoré použijeme aj my. Ak l alebo m nie sú celé čísla, tak ich zaokrúhlime nadol, pričom ak u nie je celé číslo, tak ho zaokrúhlime nahor. Potom už len odhadneme piaty percentil θ_5 pomocou m-tej najmenšej simulovanej hodnoty portfólia V^m a môžeme tvrdiť s 95% istotou, že skutočná hodnota leží na intervale $\langle V^l, V^u \rangle$. Ak chceme nájsť aj odhad 95% VaR, musíme tieto sumy odrátať od pôvodnej hodnoty nášho portfólia.



Obr. 9: Odhad 95% VaR nášho portfólia spolu s 95%-nými intervalmi spoľahlivosti v závislosti od počtu simulácií (vlastné spracovanie)

Analýzu sme začali so 100 simuláciami, aby sme mohli pomerne ľahko identifikovať piaty percentil rozdelenia hodnôt. Ako na obrázku vidíme, maximálny počet simulácií je 10 000, čo už považujeme za dostatočne veľký počet. Na základe grafu sa dá konštatovať, že na kvalitný odhad θ_5 potrebujeme aspoň 1000 simulovaných hodnôt. Pre menší počet

simulácií sú intervaly spoľahlivosti príliš široké. Potom to už len pomaly konverguje k nášmu odhadu (červená čiara). Hodnoty po poslednej simulácii sú:

$$l = 10\,312\,182{,}83\ € \qquad m = 11\,099\,027{,}15\ € \qquad u = 12\,191\,894{,}73\ €$$

Síce naoko sú intervaly spoľahlivosti dostatočne úzke, relatívna chyba môže byť stále veľká (okolo 10%). Ak by sme chceli dostať užšie intervaly, museli by sme zvýšiť počet simulácií. Vzhľadom na pomalú konvergenciu a časovú náročnosť výpočtov sa však uspokojíme s týmito výsledkami.

4.3 Predĺženie časového horizontu

Máme k dispozícii výsledky ročnej analýzy, poďme teraz pokračovať a „rozšíriť" náš časový interval na nasledujúcich 5 rokov. Situácia sa v dlhšom horizonte trošku zmení a musíme rozlíšiť 3 prípady:

1) *Dlhopis zmaturuje*: Posledný kupón spolu s nominálnou hodnotou pridáme na náš Cash účet a túto sumu rovno reinvestujeme do rovnakého sektora na ďalších 5 rokov vo forme dlhopisov s ratingom A, ročným kupónom 1% a nominálnou hodnotou 1000€.
2) *Nastane default*: V tomto prípade vygenerujeme mieru návratnosti z beta rozdelenia so spomenutými parametrami a sumu pridáme na Cash účet. Rovnako ako v predchádzajúcom prípade, za túto sumu si následne kúpime dlhopisy s rovnakými parametrami. V tomto prípade však až na konci roka, keďže nepoznáme presný dátum defaultu.
3) *Neplatí ani jeden z predchádzajúcich*: Nazbierame všetky kupóny, ktoré boli vyplácané počas aktuálneho roka a pripíšeme ich na Cash účet. Túto sumu tiež reinvestujeme vo forme A-čkových dlhopisov na 5 rokov do náhodného sektora (predpokladáme, že náhodne vygenerovaný sektor je práve ten najvhodnejší) so spomenutými parametrami. Zvolili sme si päťročnú analýzu, čo znamená, že na konci analýzy budeme mať v našom portfóliu o 5 dlhopisov viac ako v pôvodnom.

Prvý krok bude rovnaký, ako v predchádzajúcom prípade, až na tieto tri modifikácie vyššie. Spomeňme si, že počas tohto kroku vygenerujeme nové kreditné ratingy. Keďže už v tejto časti vykonáme päťročnú analýzu, tieto novo-vytvorené ratingy budeme musieť ukladať. V ďalšom kroku si teda zoberieme už nové, simulované ratingy a nie tie pôvodné. Toto je dôležité si uvedomiť, inak by naše výsledky nadávali zmysel. Z dôvodu časovej náročnosti

sme sa rozhodli znížiť počet simulácií na 1000. V prvom kroku teda vygenerujeme pre každý dlhopis 1000 nových ratingov, ktoré uložíme do matice. Najprv si zoberieme ten prvý rating pre všetky dlhopisy a spravíme ďalšiu simuláciu, pričom vygenerujeme už iba jeden nový rating pre každý z našich dlhopisov. V tomto momente sme len na konci druhého roku, a budeme musieť tento krok zopakovať ešte trikrát. Keď to máme, naša prvá päťročná simulácia je hotová a spravíme to isté pre ďalších 999 prípadov. Na konci analýzy môžeme výsledky vyhodnotiť. Sme zvedaví na to, ktoré dlhopisy boli najviac rizikové (t. j. ktoré zlyhávali najviac krát), koľko defaultov sme mali v jednotlivých rokoch, koľko bolo najviac defaultov v rámci jedného roka a pod. Počty zlyhaní zosumarizujeme aj v tabuľke:

Rok	Počet zlyhaných dlhopisov				
	1	2	3	4	5+
1	56	18	3	3	5
2	57	12	5	5	3
3	57	16	8	2	7
4	61	11	8	5	3
5	57	13	5	1	7

Tab. 16: Počty zlyhaných dlhopisov po rokoch

Keďže sa kreditný rating z roka na rok výrazne nezmení, pre počty zlyhaných dlhopisov platí rovnaké tvrdenie. Ako vidíme, počet takých situácií, kedy nastal aspoň jeden default je pod 100, teda nedosahuje ani 10%. Ďalej si môžeme všimnúť, že extrémnych situácií (minimálne 3 zlyhané dlhopisy) je veľmi málo. Je ich v každom roku iba 10-20, t. j. maximálne 2%. To znamená, že portfólio sa skladá primárne z kvalitných cenných papierov a nemôžeme očakávať veľké straty. Naše najčastejšie zlyhané dlhopisy sú:

ID	13	14	7	5	17	15	40	37	11	8
Počet defaultov	24	23	20	20	19	18	17	17	17	16

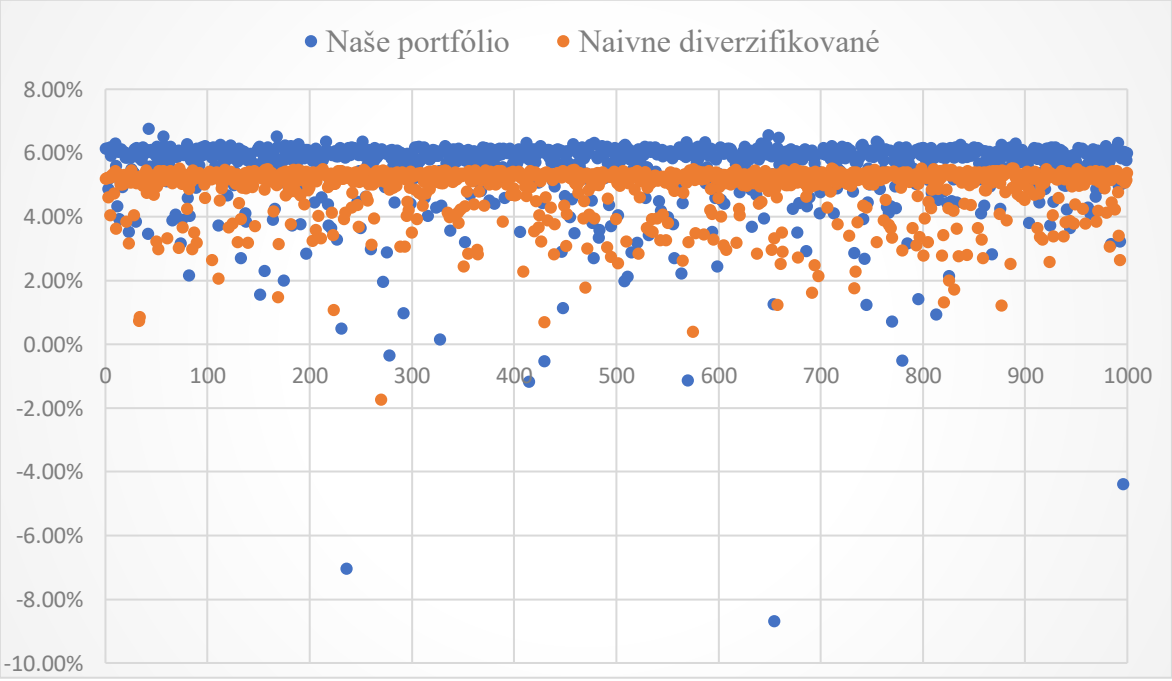
Tab. 17: Dlhopisy s najväčším počtom defaultov v rámci rôznych päťročných simulácií

Väčšina týchto dlhopisov patrila medzi najrizikovejšie dlhopisy aj v rámci ročnej analýzy z predchádzajúcej podkapitoly. Pre zaujímavosť sa môžeme vrátiť k Obr. 6 a pozrieť sa na to, kde sa nachádzajú jednotlivé dlhopisy z Tab. 17. V ďalšom kroku sa budeme zaoberať stratami spôsobenými zlyhaním resp. migráciou dlhopisov a ziskovosťou portfólia na konci päťročného obdobia. Aby sme mali lepšiu predstavu o kvalite nášho portfólia, výsledky porovnáme s naivne diverzifikovaným portfóliom.

4.4 Ziskovosť portfólia

Nemôžeme očakávať veľké straty, lebo 1-2 zlyhania dokážeme vynahradiť pomocou vyplácaných kupónov. Po prvom roku z kupónov získame 11,5 miliónov, pričom priemerný objem dlhopisov je menej ako 10 mil. €. To znamená, že ak predpokladáme zlyhanie dvoch firiem s objemom okolo priemernej hodnoty a s 50%-nou mierou návratnosti, sme stále schopní pokryť všetky straty. Ak by však zlyhali dlhopisy s najväčším objemom (*4, 12, 27*), uvedené už nemusí platiť. Zrejme všetko závisí aj od hodnoty miery návratnosti.

Ako sme už spomenuli, výsledky analýzy nášho portfólia porovnáme s naivne diverzifikovaným portfóliom, ktoré vyzerá nasledovne: skladá sa z 40 dlhopisov, pričom každý z našich sektorov reprezentujú 4 dlhopisy s rôznymi kreditnými ratingami (AAA, AA, A a BBB). Objem každého dlhopisu je 10 miliónov €, a majú nominálnu hodnotu 1000 €. Každý dlhopis zmaturuje o 6 rokov a vypláca 1,18%-né ročné kupóny, čo prislúcha priemernej hodnote kupónov nášho portfólia. Keďže v priebehu jednotlivých rokov všetko reinvestujeme, zaujíma nás len konečný stav našich peňažných tokov na konci piateho roku. Ziskovosti jednotlivých portfólií znázorňujeme na nasledujúcom obrázku (Obr. 10).



Obr. 10: Ziskovosť nášho a naivne diverzifikovaného portfólia na konci päťročného obdobia (vlastné spracovanie)

Z grafu je zrejmé, že naše portfólio prináša v priemere väčšie zisky (5,67%) než naivne diverzifikované (4,86%), ale na druhej strane môže spôsobiť aj oveľa väčšie straty.

V prípade nášho portfólia sme stratu zaznamenali 8-krát, pričom pre naivne diverzifikované portfólio len raz, aj to len -1,75%. Je to preto, že v našom portfóliu máme dlhopisy s veľkým objemom, ktoré keď zlyhávajú, zaznamenáme hneď výraznú stratu. Na rozdiel od toho sú však v naivne diverzifikovanom portfóliu všetky objemy rovnaké, čo znamená, že vyplácané kupóny dokážu vybalansovať straty z dôvodu zlyhania hociktorého dlhopisu. Pozrime sa teraz na to, koľko defaultov viedlo k týmto 8 veľkým stratám:

Strata	Rok 1	Rok 2	Rok 3	Rok 4	Rok 5	Spolu
-7,05%	5	1	22	0	0	28
-0,35%	0	0	6	0	1	7
-1,19%	1	1	2	0	5	9
-0,53%	0	0	0	8	0	8
-1,13%	2	0	0	3	6	11
-8,70%	0	2	0	2	20	24
-0,53%	0	0	1	2	8	11
-4,40%	0	0	10	4	4	18

Tab. 18: Najväčšie simulované straty nášho portfólia a počty defaultov, ktoré sú za ne zodpovedné

Vidíme, že najextrémnejšie situácie boli spôsobené veľkým počtom zlyhaných dlhopisov, v niektorých prípadoch nastalo naraz aj vyše 20 zlyhaní. To je však nereálne, v tomto prípade by muselo dôjsť ku katastrofálnej situácii, napr. finančnej kríze alebo zlyhaniu niektorého sektora. V ostatných prípadoch došlo iba k menšej strate. Na základe vyššie uvedených poznatkov môžeme tvrdiť, že naše portfólio je dostatočne diverzifikované a jednoznačne lepšie postavené ako to druhé, naivne diverzifikované portfólio.

V tejto kapitole sme merali kreditné riziko nášho portfólia pomocou viacerých štatistík, simulovali sme rozdelenie strát, identifikovali najrizikovejšie dlhopisy samostatne ako aj na úrovni celého portfólia, skúmali sme efekt korelačného multiplikátora a prebrali rôzne scenáre. Zaoberali sme sa aj presnosťou odhadu 95% VaR nášho portfólia a vypracovali sme päťročnú analýzu, ktorú sme vyhodnotili a výsledky porovnali s prípadom naivne diverzifikovaného portfólia. Ako sme si mohli všimnúť, najväčšiu rolu v riadení kreditného rizika portfólia zohráva korelácia dlhopisov, preto tejto problematike venujeme aj samostatnú kapitolu.

5 Modelovanie korelačného rizika

Korelačné riziko predstavuje také riziko, keď sa vzťah medzi nakúpenými dlhopismi zmení a bude sa vyvíjať proti majiteľovi portfólia. Môže to byť napríklad hromadný downgrade kreditných ratingov alebo dokonca aj zlyhanie dlhopisov. Ako na základe predchádzajúcich kapitol už vieme, zlyhanie nám spôsobí najväčšie riziko, preto sa tejto problematike budeme venovať intenzívnejšie. V rámci modelu CreditMetrics sme už predstavili korelované Brownove pohyby a využili sme Choleského dekompozíciu na generovanie simulácií Monte Carlo. Táto metóda je založená na použití Pearsonovho korelačného koeficientu na určenie vzájomného vzťahu dvoch dlhopisov, ale existujú aj modely, ktoré sa bez neho zaobídu a modelujú spoločnú migráciu dlhopisov úplne iným spôsobom. V tejto kapitole predstavujeme niektoré z týchto modelov a následne ich porovnáme. Ako zdroj týchto poznatkov sme použili [10] a [12].

5.1 BET model

Jedným netradičným modelom, ktorý sa vysporiada s problémom korelačného rizika, sa nazýva *Binomial Expansion Technique* (alebo jednoducho BET) ratingovej agentúry Moody´s. Táto metóda využíva mieru *diversity score* („skóre diverzifikovanosti“), ktorá označuje diverzifikovanosť portfólia a je základným parametrom modelu. Ideou je, že na základe tejto miery diverzifikovanosti vytvárame nové portfólio s nezávislými a homogénnymi dlhopismi, pomocou ktorého dokážeme modelovať rizikovosť resp. očakávanú stratu pôvodného portfólia. Počet týchto nezávislých dlhopisov sa bude rovnať práve hodnote diversity score. Síce je BET model veľmi zjednodušený, keďže pracuje s nezávislými cennými papiermi a čas defaultu považuje za irelevantný, existujú už rôzne modifikácie, ktoré tieto nedostatky dokážu vyriešiť. Majme teda d identických dlhopisov s pravdepodobnosťou defaultu p, pričom zlyhania sú nezávislé. Nech N je počet defaultov, ktorý riadi binomickým rozdelením, potom pravdepodobnosť nastatia presne k defaultov je

$$P_k = P(N = k) = C_k^d p^k (1-p)^{d-k} \tag{5.1}$$

kde d je diversity score a $C_k^d = \frac{d!}{k!(d-k)!}$ je binomický koeficient. Očakávaný počet zlyhaní je potom $d * p$, čo je stredná hodnota binomického rozdelenia. BET model považuje

dlhopisy z rôznych sektorov za nezávislé, pričom predpokladá, že v rámci rovnakých sektorov existuje medzi nimi vzájomný vzťah (korelácia). Na základe týchto predpokladov je vytvorená tabuľka na výpočet skóre diverzifikovanosti agentúry Moody´s [3]:

Počet dlhopisov v rámci sektora	Diversity score
1	1,0
2	1,5
3	2,0
4	2,3
5	2,6
6	3,0
7	3,2
8	3,5
9	3,7
10	4,0
Viac ako 10	Individuálne hodnotenie

Tab. 19: Hodnota diversity score v závislosti od počtu dlhopisov v rámci sektorov

Ak sme v pôvodnom portfóliu mali n dlhopisov, potom objem nového portfólia d nezávislých dlhopisov bude n/d-krát objem pôvodného portfólia. Týmto krokom zabezpečíme, aby očakávaná strata bola rovnaká ako pôvodne. Zrejme väčšie skóre diverzifikovanosti indikuje menšie riziko. Predstavme si, že máme v portfóliu 10 dlhopisov, všetky z rovnakého sektora. V tomto prípade podľa Tab. 19 diversity score je 4. Ak by však pochádzali z rôznych sektorov, mali by sme $d = 10 * 1 = 10$, čo značí lepšiu diverzifikáciu a oveľa menšie riziko. Nech L_k je strata portfólia pre k-ty scenár (t. j. k zlyhaných dlhopisov), ktorú vyjadríme ako percento z celkového objemu. Potom očakávaná strata portfólia je jednoducho

$$EL = \sum_{k=1}^{d} P_k L_k \tag{5.2}$$

Podľa [4] stratu portfólia v jednotlivých scenároch môžeme definovať ako $\max\{x - K, 0\}$, kde x vyjadruje časť celkového objemu portfólia, ktorá zlyhá a K značí dolnú hranicu, ktorú počet defaultov musí prekročiť, aby sme zaznamenali stratu. Zoberme si portfólio s pravdepodobnosťou defaultu 0,1 a nech diversity score d je 60. Očakávaný počet zlyhaní je potom 6 a štandardná odchýlka je $r = \sqrt{dp(1-p)} = 2{,}32$. Ak si zvolíme „vzdialenosť“ 3 sigma od strednej hodnoty, dostaneme dolnú hranicu $K = 13/60$. Stratu teda

zaznamenáme iba v prípade 14 a viac defaultov. Očakávanú stratu portfólia potom dostaneme jednoducho dosadením do vzorca (5.2). Táto metóda sa teda zaobíde bez použitia korelačných koeficientov a napriek tomu dokáže modelovať korelačné riziko portfólia. Je to ale veľmi zjednodušené, keďže vzájomný vzťah dlhopisov v rámci sektorov reprezentujú tabuľkové hodnoty diversity score, pričom rôzne sektory sa považujú za nezávislé. V nasledujúcej kapitole predstavíme model, ktorý je rozvinutím metódy BET, dokáže sa však vysporiadať s komplexnejšou štruktúrou korelácie dlhopisov a ich zlyhania modeluje priamym spôsobom.

5.2 Davis-Lo model

Tento model sa nazýva aj „nákazový model“ (*contagion model)*, ktorý vypracovali Mark Davis a Violet Lo v roku 1999. Základnou ideou modelu je, že zlyhanie jednej firmy môže ovplyvniť ďalšie firmy, t. j. spôsobiť ďalšie defaulty a naštartovať tzv. domino efekt. Viacero príkladov takéhoto efektu môžeme vidieť aj v Tab. 18, kde naraz zlyhalo až 22 firiem. V nasledujúcej časti podkapitoly predstavujeme tento model na základe publikácie [3], ukážeme si ako tento efekt funguje a uvedieme si aj príklady.

Majme portfólio n identických dlhopisov, ktoré však nie sú nezávislé, existuje medzi nimi nejaká korelácia. Nech $Z_i, i = 1, \dots, n$ je náhodná premenná, ktorá má hodnotu 1, ak nastane default dlhopisu i, inak je 0. Potom je celkový počet defaultov v portfóliu:

$$N = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n \tag{5.3}$$

Ďalej, nech pre $i = 1, \dots n$ a $j = 1, \dots, n$ s podmienkou $j \neq i$ majme dve nezávislé náhodné premenné $X_i, Y_{i,j}$ s Bernoulliho rozdelením, pre ktoré platí:

$$P(X_i = 1) = p \tag{5.4}$$

$$P\big(Y_{i,j} = 1\big) = q \tag{5.5}$$

Potom

$$Z_i = X_i + (1 - X_i)\left(1 - \prod_{j \neq i}\big(1 - X_j Y_{j,i}\big)\right) \tag{5.6}$$

Funguje to nasledujúco: i-ty dlhopis môže zlyhať priamo ($X_i = 1$) alebo môže byť aj „obeťou“ domino efektu dlhopisu j. Ak teda pre j-ty dlhopis nastáva default ($X_j = 1$), potom hodnota náhodnej premennej $Y_{j,i}$ určuje, či default j-teho dlhopisu sa prenáša aj na i-ty. Druhý člen výrazu na pravej strane sa teda rovná jednej práve vtedy, keď $Y_{j,i} = 1$ pre $j \neq i$. V tom prípade hodnota výrazu $\prod_{j \neq i}(1 - X_j Y_{j,i}) = 0,$ a platí $Z_i = X_i + (1 - X_i) * 1 = 1$. Zrejme vtedy $X_i = 0$, keďže nenastalo priame zlyhanie. Tretia možnosť je, že neplatí ani jeden z predchádzajúcich ($X_i \neq 1$ a $X_j Y_{j,i} \neq 1$), potom zrejme $Z_i = 0$, dlhopis teda nezlyhá. Parameter q môžeme v ďalšom nazvať aj „koeficientom infekcie“ resp. „infekčným koeficientom“.

Veta 5.1 [2, strana 3] Nech $F(n, k, p, q)$ značí pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej premennej N, t. j. platí $P(N = k) = F(n, k, p, q)$. Potom distribučná funkcia F je daná pomocou vzorca

$$F(n, k, p, q) = C_k^n \alpha_{nk}^{pq} \tag{5.7}$$

kde C_k^n je binomický koeficient a

$$\alpha_{nk}^{pq} = p^k (1-p)^{n-k} (1-q)^{k(n-k)} + \sum_{i=1}^{k-1} C_i^k \, p^i (1-p)^{n-i} \left(1 - (1-q)^i\right)^{k-i} (1-q)^{i(n-k)}$$

Potom stredná hodnota a disperzia N je

$$E(N) = n(1 - (1-p)(1-pq)^{n-1}) \tag{5.8}$$

$$V(N) = E(N) + n(n-1)\beta_n^{pq} - \left(E(N)\right)^2 \tag{5.9}$$

kde

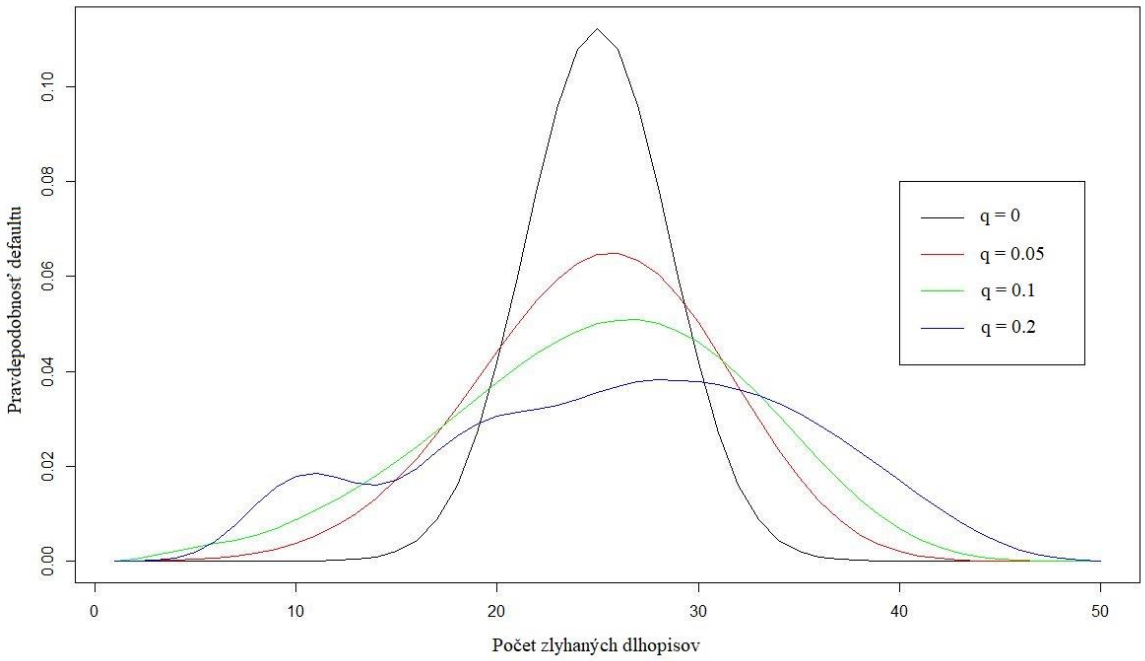
$$\begin{aligned} \beta_n^{pq} &= p^2 + 2p(1-p)(1 - (1-q)(1-pq)^{n-2}) \\ &\quad + (1-p)^2 (1 - 2(1-pq)^{n-2} + (1 - 2pq + pq^2)^{n-2}). \end{aligned}$$

Dôkaz tejto vety môžeme nájsť v publikácii [3] na strane 4. Keďže parametre rozdelenia sú už známe, môžeme prejsť k jednoduchému príkladu, aby sme si ukázali vplyv korelačného koeficientu q na pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej premennej N.

Zoberieme si príklad z [3]:

Majme v portfóliu 50 dlhopisov ($n = 50$) a nech je pravdepodobnosť defaultu každého dlhopisu rovnaká, $p = 0{,}5$. Predpokladajme najskôr nezávislosť dlhopisov, t. j. $q = 0$.

Potom stredná hodnota počtu defaultov je 25. Aby sme mohli skúmať vplyv domino efektu, zafixujeme túto strednú hodnotu, aby bola aj pre $q > 0$ rovnaká. To znamená, že pre rastúce q musíme znížiť hodnotu p tak, aby stredná hodnota bola stále 25. Našou úlohou teda bude vypočítať hodnotu p pre $q = \{0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}2\}$ pomocou vzorca (5.8). Prislúchajúce hodnoty p sú $\{0{,}194;\ 0{,}116;\ 0{,}064\}$. Výsledky znázorníme na Obr. 11. V prípade nezávislosti dlhopisov máme binomické rozdelenie, ktoré možno aproximovať normálnym rozdelením. Povšimnime si, že aj pre malé q môžu vzniknúť veľké rozdiely, pričom štandardná odchýlka sa postupne zvýši a hustota rozdelenia sa stáva „tučnejším“.



Obr. 11: Počty defaultov v závislosti od parametra q (vlastné spracovanie na základe [3])

To znamená, že nové rozdelenia pripúšťajú extrémne situácie s väčšou pravdepodobnosťou ako pôvodné. Je zaujímavé, že tvar normálneho rozdelenia sa zachováva len pre malé q, napríklad pre $q = 0{,}2$ to už neplatí.

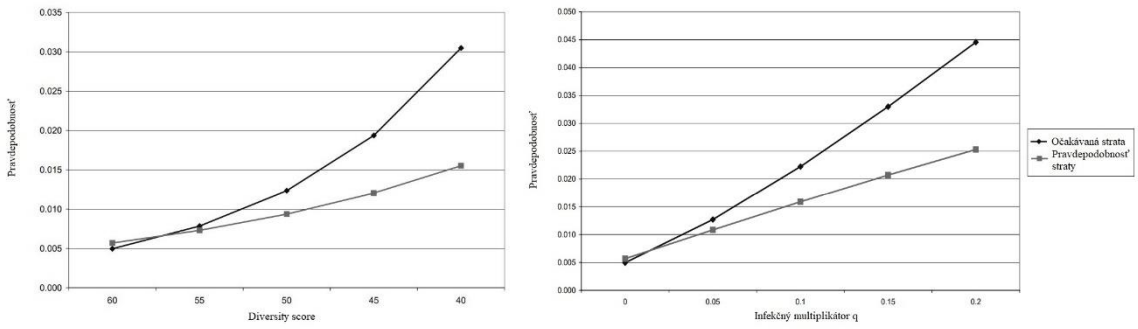
Vypracujme teraz druhú analýzu, kde namiesto strednej hodnoty počtu defaultov bude p konštantná, pričom q postupne navýšime. Nech $p = 0{,}005$ a majme portfólio 1000 dlhopisov. V prípade nezávislosti je teda očakávaný počet defaultov 5. Už sme sa o tom presvedčili, že aj malé q má výrazný vplyv na rozdelenie N (viď Obr. 11), preto neberieme do úvahy hodnoty väčšie ako 0,1. Výsledky zhrnieme v nasledujúcej tabuľke:

q	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
$E(N)$	5	53	99	143	185	224	262	298	332	365	396

Tab. 20: Stredná hodnota počtu zlyhaní v závislosti od parametra q

Ako sme očakávali, stredná hodnota prudko rastie a pre $q = 0{,}1$ už dosiahne hodnotu 396. To by znamenalo, že v portfóliu očakávame zlyhanie 40% dlhopisov, čo je obrovské množstvo. Uvedomme si ale, že zatiaľ všetky dlhopisy patria do rovnakého sektora, čiže portfólio nebolo dostatočne diverzifikované. Môžeme teda uvažovať o tom, čo by sa zmenilo, ak by sme dlhopisy rozdelili do rôznych sektorov, podobne ako v prípade nášho portfólia v predchádzajúcej kapitole.

Dôležitou otázkou však je, ako si zvoliť koeficient q. Už sme spomenuli, že tento model je rozvinutím BET modelu, pomocou ktorého môžeme určiť aj hodnotu q. Spomeňme si na výpočet očakávanej straty pomocou (5.2), ktorú vieme vypočítať aj v prípade tohto modelu, pričom vzorec (5.1) sa zmení na (5.7) a rozdelenie počtu defaultov už nebude binomické. Jeho strednú hodnotu a štandardnú odchýlku môžeme vypočítať podľa vzťahov (5.8) a (5.9) na základe Vety 5.1. Pozrime sa teraz na to, aká hodnota q prislúcha rovnakej očakávanej strate pri danej skóre diverzifikovanosti d. Ako ukážku prikladáme aj obrázok na základe príkladu z [4], kde skóre diverzifikovanosti 45 prislúcha hodnota koeficientu $q = 0{,}08$.



Obr. 12: Očakávaná strata portfólia v závislosti od diversity score (naľavo) a od hodnoty infekčného koeficientu ([4])

5.2.1 Rozdelenie dlhopisov do rôznych sektorov

Majme portfólio $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ dlhopisov, ktoré sú rozdelené do m sektorov. Hodnota n_i teda značí počet dlhopisov v i-tom sektore. Predpokladáme, že zlyhania dlhopisov rôznych sektorov sú nezávislé a domino efekt platí iba v rámci sektorov. Pravdepodobnosť toho, že zrealizujeme k_i defaultov v rámci sektora i pre $i = 1, \dots, m$ je

$$\prod_{i=1}^{m} F(n_i, k_i, p_i, q_i) \tag{5.10}$$

kde p_i a q_i sú parametre Bernoulliho rozdelenia prislúchajúce i-temu sektoru. Pravdepodobnosť nastatia k defaultov v portfóliu je potom

$$P(N = k) = \sum_{a \in A_m(k)} \prod_{i=1}^{m} F(n_i, k_i, p_i, q_i) \tag{5.11}$$

kde $A_m(k)$ je množina všetkých kombinácií k defaultov v rámci m sektorov, kde $a = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$. Pre množinu $A_m(k)$ teda platí

$$A_m(k) = \bigcup_{j=j_{min}}^{j_{max}} \{A_{m-1}(k-j), j\} \tag{5.12}$$

Výraz v množinovej zátvorke značí všetky permutácie $\{k_1, \dots, k_{m-1}, j\}$. Pre j_{min} a j_{max} platí

$$j_{min} = max(k - t_{m-1}, 0)$$
$$j_{max} = min(k, n_m)$$

kde $t_{m-1} = \sum_{j=1}^{m-1} n_j$ značí počet dlhopisov v sektoroch 1 až $m-1$. Nech $card(m,k)$ je počet prvkov množiny $A_m(k)$, potom platí rekurentný vzťah

$$card(m,k) = \sum_{j=j_{min}}^{j_{max}} card(m-1, k-j) \tag{5.13}$$

s hraničnými podmienkami

$$card(1,k) = card(m,0) = 1 \tag{5.14}$$

Na prvý pohľad to vyzerá mätúco, preto si to ukážeme na jednoduchom príklade. Majme v portfóliu 6 dlhopisov, ktoré po dvoch rozdelíme do rôznych sektorov. Našou úlohou bude skúmať vplyv koeficientu infekcie q na pravdepodobnosť 4 defaultov. Vstupné parametre sú teda $n_1 = n_2 = n_3 = 2, m = 3, k = 4, p = \frac{1}{6}$ a nech q je na začiatku 0, pričom pre jednoduchosť sme si zvolili všetky p_i a q_i rovnaké. Prvou úlohou bude nájsť všetky možnosti, ako môžu nastať práve 4 zlyhania v našom portfóliu – je to práve množina $A_m(k)$. Keďže v každom sektore sú iba 2 dlhopisy, máme len 6 možností:

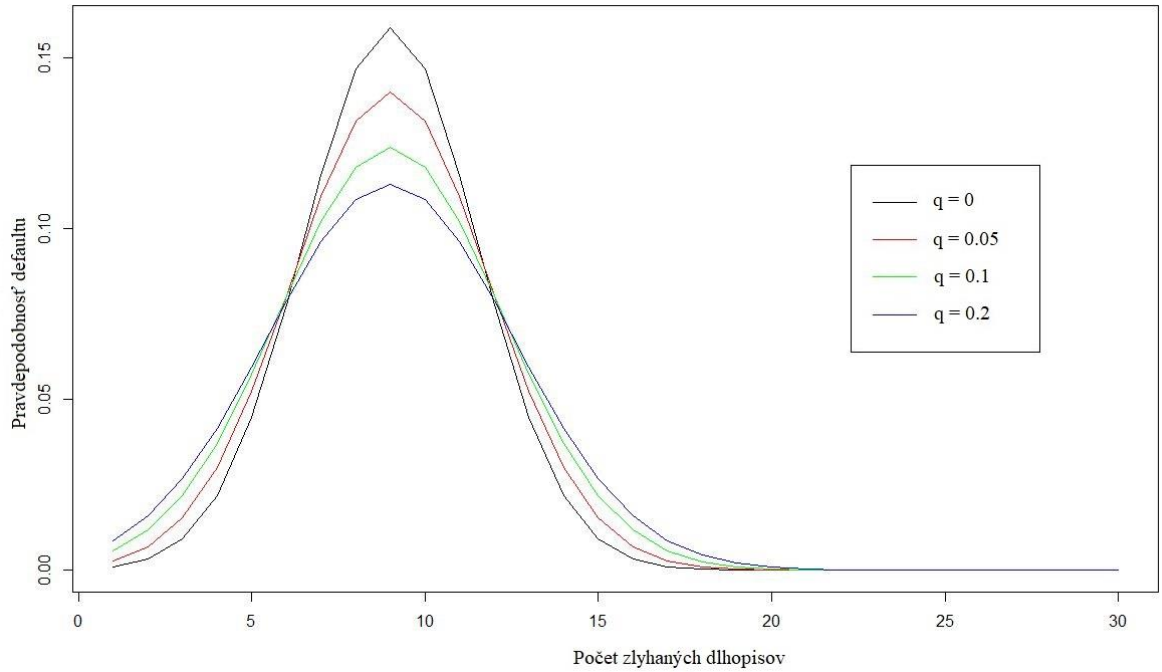
$$A_m(k) = \{\{2,2,0\},\{2,0,2\},\{0,2,2\},\{2,1,1\},\{1,2,1\},\{1,1,2\}\}$$

kde trojica čísel značí počet defaultov v jednotlivých sektoroch. Keďže už poznáme množinu $A_m(k)$ a na základe predchádzajúcej časti vieme vypočítať aj $\prod_{i=1}^{m} F(n_i, k_i, p_i, q_i)$, môžeme určiť pravdepodobnosť nastatia 4 defaultov podľa (5.11):

$$\begin{aligned} P(N=4) = {} & F(n_1,2,p,q) * F(n_2,2,p,q) * F(n_3,0,p,q) + \\ & + F(n_1,2,p,q) * F(n_2,0,p,q) * F(n_3,2,p,q) + \\ & + \cdots + \\ & + F(n_1,1,p,q) * F(n_2,1,p,q) * F(n_3,2,p,q) \end{aligned}$$

Všimnime si, že druhý parameter v každom riadku je práve trojčíslie z množiny $A_m(k)$. Môžeme dosadiť aj hodnoty parametrov n_i, p a q pre $i = 1,2,3$. Keďže máme q nulové, stredná hodnota počtu defaultov bude $E(N) = n * p = 6 * \frac{1}{6} = 1$. Počítame teraz pravdepodobnosť nastatia 4 defaultov a môžeme očakávať, že táto pravdepodobnosť bude veľmi malá. Po dosadení vstupných parametrov nám vyjde $P(N = 4) = 0{,}8\%$. Rovnako ako v predošlom príklade, vedeli by sme preskúmať, ako sa táto pravdepodobnosť zmení pre kladné q, pričom chceme zachovať hodnotu $E(N)$. Keďže ale máme malé portfólio, nemá veľký zmysel tieto výsledky s predchádzajúcim porovnávať. Namiesto toho si vezmime trochu komplexnejší príklad z [3]:

Majme $n = 30$ dlhopisov a $m = 8$ sektorov, pričom počty v jednotlivých sektoroch sú $\{1,2,2,3,4,5,6,7\}$. Ďalej, predpokladajme rovnakú pravdepodobnosť defaultov ($p = 0{,}3$) a rovnaký koeficient infekcie q. Stredná hodnota počtu defaultov bude $E(N) = 9$. Ako sme vyššie uviedli, ak nechceme aby sa táto hodnota pre rôzne q zmenila, musíme vypočítať prislúchajúce pravdepodobnosti defaultu. Máme osem sektorov v 7 rôznych veľkostiach (n_i), čo znamená, že pre každé q máme vypočítať 7 rôznych hodnôt p. Budeme skúmať rovnaké koeficienty infekcie ako v prvom príklade, aby sme mohli výsledky porovnať. Keď už máme k dispozícii všetky parametre, môžeme vypočítať hodnoty rozdelenia počtu defaultov pomocou vzorca (5.11) a nakresliť podobný graf ako na Obr. 11.



Obr. 13: Rozdelenie počtu defaultov dlhopisového portfólia, ktoré sa skladá z dlhopisov z viacerých sektorov (rekonštrukcia grafu z [3])

Vidíme, že q má síce podobný vplyv ako v predchádzajúcom prípade, tento vplyv infekčného koeficientu však nie je až taký výrazný vďaka diverzifikovanosti portfólia. Zásah prípadnej finančnej krízy alebo inej katastrofálnej udalosti, ktorá by spôsobila hromadné zlyhanie firiem, je teda pre dobre diverzifikované portfólio oveľa menší. Veľkou nevýhodou tohto modelu je ale náročnosť výpočtov. Množina $A_m(k)$ totiž v prípade veľkého počtu dlhopisov a sektorov môže byť veľmi rozsiahla. Na skrátenie a zjednodušenie procesu vznikla idea tzv. „superbox approach“. Predstavme si, že naše dlhopisy sú lopty a ich sektory sú krabice („boxes“). Hodnota $card(m, k)$ vo vzorci (5.13) značí počet možností, koľkými vieme rozdeliť k loptičiek do m krabíc pri daných obmedzeniach každej krabice $(n_1, n_2, \dots, n_m)$. Ak pravdepodobnosti defaultu (p_i) a infekčné koeficienty (q_i) sú rôzne pre každý sektor, táto metóda nám nepomôže. Ale keď sú rovnaké a navyše veľkosti niektorých sektorov sú tiež identické, ako aj v našom príklade, dokážeme naše výpočty zefektívniť. Pripomeňme si, že množina $A_m(k)$ z predchádzajúceho príkladu sa skladala z nasledujúcich 6 možností: $\{\{2,2,0\},\{2,0,2\},\{0,2,2\},\{2,1,1\},\{1,2,1\},\{1,1,2\}\}$. Vidíme, že máme len 2 základne prípady, tzv. „superboxes“ ($\{2,2,0\},\{2,1,1\}$), všetky ostatné sú len permutáciou týchto dvoch možností. Keďže máme sektory rovnakej veľkosti a parametre p a q sú v rámci portfólia konštantné, stačilo by vypočítať pravdepodobnosť nastatia týchto dvoch udalostí, namiesto pôvodných 6. Samozrejme v prípade veľkého portfólia je to stále dosť komplexné

a časovo náročné. Detailnejší popis tejto metodiky a výpočet „superboxov“ pomocou softvéru nájdeme v publikácii [3].

5.2.2 Aplikácia metódy v rámci modelu CreditMetrics

V tejto časti podkapitoly aplikujeme naše nové poznatky o modeli Davis-Lo pri simulácii nových ratingov v rámci CreditMetrics z predchádzajúcej kapitoly a vytvoríme tým pádom hybrid týchto dvoch modelov. Pripomeňme si, že v modeli CreditMetrics sme simulovali nové kreditné ratingy našich dlhopisov na základe migračnej matice a využili sme pritom Choleského dekompozíciu. Potom sme znova ocenili dlhopisy už podľa nového kreditného ratingu a zosumovali výsledky. Novým medzikrokom bude aplikácia infekčného koeficientu q a skúmanie domino efektu zlyhania dlhopisov. Po vygenerovaní nových ratingov sa teda pozrieme na to, či prípadné zlyhania dlhopisov spôsobia ďalší default v rámci portfólia. To prebieha pomocou náhodnej premennej s Bernoulliho rozdelením $Y_{i,j}$, rovnako ako doteraz, pričom hodnoty X_i určujeme na základe simulovaných ratingov modelu CreditMetrics nasledovným spôsobom: ak nový rating je v stave „default“, tak $X_i = 1$, inak sa rovná 0. Keďže nové kreditné ratingy generujeme na základe migračnej matice, využijeme rovnako pravdepodobnosť nastatia defaultu p (viď posledný stĺpec Tab. 12), ako v prípade Bernoulliho rozdelenia a môžeme použiť vzorec (5.6). Najprv predpokladáme, že zlyhanie hocijakého dlhopisu môže spôsobiť default druhého, bez ohľadu na ich sektor a neskôr tento vplyv obmedzíme len na daný sektor, v ktorom default nastal. Po tomto kroku pokračujeme s oceňovaním dlhopisov a zosumovaním výsledkov rovnako ako v kapitole 4. V našej analýze budeme skúmať vplyv 3 rôznych hodnôt infekčného koeficientu $(0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}2)$ na volatilitu a VaR nášho dlhopisového portfólia z predchádzajúcej kapitoly. Pre prípad $q = 0$ použijeme hodnoty z Tab. 15, ktoré spolu s výsledkami tejto analýzy zhrnieme v nasledujúcej tabuľke:

q	Volatilita	90% VaR	95% VaR	99% VaR
0	6 465 281,58 €	6 309 510,40 €	11 298 773,44 €	29 148 137,88 €
0,05	19 743 351,02 €	7 113 100,00 €	30 747 000,00 €	94 899 000,00 €
0,1	29 633 000,00 €	7 119 200,00 €	52 912 000,00 €	152 510 000,00 €
0,2	46 028 000,00 €	7 154 000,00 €	99 912 000,00 €	248 520 000,00 €

Tab. 21: Vplyv infekčného koeficientu q na výšku kreditného rizika portfólia, keď nezavedieme žiadne obmedzenia na „šírenie“ defaultu

Na základe príkladu z [3] sme mohli očakávať, že aj malé q majú výrazný vplyv na rizikovosť portfólia, a to nám táto tabuľka aj potvrdí. Jediná hodnota, ktorá sa príliš nezmení, je 90% VaR portfólia. Dôvodom je to, že q ovplyvňuje najmä také hraničné situácie, ktoré majú najviac defaultov a patria do najhorších pár percent rozdelenia. Zrejme je to menej ako 10, ale viac ako 5, lebo 95% VaR sa ešte výrazne zmenil. Pre všetky ostatné rizikové miery sme zaznamenávali obrovský nárast. Poďme sa teraz pozrieť na to, ako sa tento vplyv zníži v prípade, že zlyhaný dlhopis môže spôsobiť ďalšie defaulty iba v rámci rovnakého sektora.

q	Volatilita	90% VaR	95% VaR	99% VaR
0	6 465 281,58 €	6 309 510,40 €	11 298 773,44 €	29 148 137,88 €
0,05	8 839 300,00 €	6 574 000,00 €	13 150 000,00 €	40 523 000,00 €
0,1	10 961 000,00 €	6 626 100,00 €	14 375 000,00 €	49 890 000,00 €
0,2	14 366 000,00 €	6 773 300,00 €	17 640 000,00 €	69 418 000,00 €

Tab. 22: Vplyv infekčného koeficientu v prípade, že „infekcia defaultu“ sa prenáša iba v rámci rovnakých sektorov

Hneď vidíme, že vplyv je oveľa miernejší oproti predchádzajúcemu prípadu. Síce je stále zasiahnutý aj 95% VaR, nárast v prípade najväčšieho koeficientu je už pod 100%, pričom v predošlom prípade hodnota narástla na skoro 9-násobok tej pôvodnej. Keď výsledky porovnáme s vplyvom korelačného multiplikátora z Tab. 14, všimneme si, že zásah infekčného koeficientu q je aj pre malé hodnoty oveľa výraznejší.

Samozrejme je to len zjednodušený prípad tohto kombinovaného modelu, keďže sme použili konštantné q pre všetky sektory. Dali by sa stanoviť rôzne infekčné koeficienty pre každý sektor a pridať ďalšie podmienky na „šírenie“ defaultu. Rôzne takéto modifikácie modelu Davis-Lo nájdeme v publikácii [15], pomocou ktorej je možné ďalej rozvíjať náš jednoduchý model. V našej verzii môže jeden default spôsobiť v rámci sektora rovno ďalšie, môžeme však pridať podmienku, ktorá určuje koľko defaultov minimálne je potrebných na spôsobenie zlyhania ďalšieho dlhopisu. Je to logická úprava, keďže jeden default môže vzniknúť len vďaka zvýšenému nesystematickému riziku, ktoré ovplyvní iba danú firmu, ale v prípade dvoch-troch alebo viacerých prípadov už môžeme predpokladať, že ide o nejaký globálny faktor. Navyše náš model je len jednokrokový, čo znamená, že dlhopis, ktorého default bol spôsobený zlyhaním iného, už nemôže ďalej prenášať tento domino efekt.

Rozvinutím tohto základného prístupu je viackrokový model, ktorý dokáže modelovať skutočný vplyv domino efektu. Idea celého procesu je rozdelenie časového horizontu na menšie intervaly t, kde $t \in \{1, \dots, T\}, T > 1$. Pre viackrokový model potom platí

$$Z_1^i = X_1^i + \left(1 - X_1^i\right)\left(1 - \prod_{j \neq i}\left(1 - X_1^j Y_1^{j,i}\right)\right) \tag{5.15}$$

$$Z_t^i = Z_{t-1}^i + \left(1 - Z_{t-1}^i\right)\left[X_t^i + \left(1 - X_t^i\right)\left(1 - \prod_{j \neq i}\left(1 - X_t^j Y_t^{j,i}\right)\right)\right], 2 \leq t \leq T \tag{5.16}$$

kde prvý krok je ekvivalentný s jednokrokovým modelom (5.6), a pre ostatné časové intervaly platí vzťah (5.16). Pomocou tohto modelu už vieme modelovať hromadný default dlhopisov.

Čas defaultov je však rovnako dôležitý ako ich počet, preto je táto informácia nezanedbateľná. Aby sme boli schopní modelácie, potrebujeme zadefinovať nejaký stochastický proces, pomocou ktorého vieme vygenerovať jednotlivé časy zlyhania dlhopisov podľa vopred stanovených predpokladov. Keď ich už poznáme, môžeme sa tváriť, že default vytvára tzv. „rizikové obdobie“, počas ktorého je pravdepodobnosť nastatia ďalších zlyhaní oveľa väčšia ako v „normálnych časoch“. Táto dynamická metóda je detailne opísaná v [4], ktorá nám umožňuje modelovať hromadný default dlhopisov komplexnejším a realistickejším spôsobom. Síce je Davis-Lo model veľmi užitočný najmä v časoch zvýšeného systematického rizika, jeho výsledky sa môžu v závislosti od voľby infekčného koeficientu q výrazne líšiť, ktorý však treba na základe historických resp. aktuálnych trhových dát odhadnúť.

Záver

Cieľom našej diplomovej práce bolo meranie a analýza kreditného rizika dlhopisov a dlhopisového portfólia pomocou rôznych prístupov, ich popis a porovnanie. Prácu sme začali úvodom do problematiky kreditného rizika, objasnili sme základné pojmy a predstavili sme niektoré najčastejšie používané modely. V rámci predkladanej práce sme publikovali aj výsledky získané počas analýzy nášho dlhopisového portfólia a poukázali na dôležitosť korelačného rizika.

V prvej kapitole sme uviedli základné pojmy zo sveta cenných papierov a riadenia kreditného rizika a stručne sme charakterizovali aj základné typy modelov. Primárne sme sa venovali štrukturálnym modelom, ktoré sú spojené s kapitálovou štruktúrou firmy, pomenovali sme aj ďalšie efektívne a často používané skupiny modelov na základe [1]. Ďalej sme sa oboznámili s kreditnými ratingami ako ukazovateľmi úverovej kvality dlžníkov, ako aj s ratingovými agentúrami a ich históriou.

Druhá kapitola bola zameraná na Mertonov model, ktorý je základným štrukturálnym modelom kreditného rizika. Ako sme sa dozvedeli, Mertonova práca je rozvinutím modelu oceňovania opcií Blacka a Scholesa a je východiskom ďalších, viac komplexných metód. V úvode kapitoly sme zaviedli základné predpoklady modelu, ktoré sa zdali byť príliš zjednodušené, optimistické a v praxi nereálne. Na základe týchto predpokladov sme následne odvodili pravdepodobnosť nastatia defaultu, pričom sme využili základné poznatky z teórie oceňovania opcií ako aj z pravdepodobnosti a štatistiky. Následne sme sa dostali ku kreditným prirážkam, ktoré sú dôležitým indikátorom rizikovosti dlhopisov a analyzovali sme ich hodnotu a vývoj v závislosti od pomeru zadlženosti. Zistili sme, že kreditné prirážky zadlžených firiem sú veľmi vysoké, ale pomerne rýchlo klesajú. Naopak, firmy s dostatočným objemom vlastných zdrojov majú oveľa stabilnejšie kreditné prirážky, ktoré sa vďaka neistote trochu zvyšujú, ale aj tak sú celý čas blízko k nulovej hodnote. Kapitolu sme uzavreli popisom výhod a nevýhod tohto modelu.

Tretia kapitola je veľmi obsiahla a bola venovaná štrukturálnemu modelu CreditMetrics, ktorý tvorí významnú časť našej práce. Na úvod sme túto metódu stručne charakterizovali, opísali základnú ideu jeho fungovania a zaviedli aj vstupné parametre modelu. Pridali sme aj množstvo grafov a tabuliek, ktoré nám pomáhajú pri porozumení jednotlivých krokov

a interpretácii výsledkov. Začali sme meraním kreditného rizika jedného dlhopisu, na ktorom sme si ukázali základné výpočty a objasnili celý postup procesu. Zoznámili sme sa s pravdepodobnosťou prechodu ratingov, ako aj s forwardovými krivkami a jednotlivými mierami kreditného rizika. Ďalej sme sa dozvedeli, že rozdelenie hodnôt dlhopisov a dlhopisového portfólia nie je normálne a namiesto štandardnej odchýlky sa oplatí použiť hodnotu v riziku (VaR) portfólia. V analýze sme pokračovali meraním kreditného rizika portfólia dvoch dlhopisov, kde sme museli vziať do úvahy aj ich koreláciu resp. spoločnú migráciu ratingov. Poukázali sme aj na dôležitosť diverzifikácie, pomocou ktorej sa výška kreditného rizika dá výrazne znížiť. Ďalej sme sa zaoberali analytickým a simulačným prístupom merania rizika väčšieho portfólia (3 a viac dlhopisov) a zistili sme, že v prípade veľkého počtu dlhopisov sa oplatí použiť simulácie Monte Carlo. Opísali sme potrebné kroky simulačného prístupu, ktorého súčasťou je Choleského dekompozícia, ktorá slúži na vygenerovanie rôznych vývojov aktív. V závere sme sa zaoberali výhodami a istými nedostatkami tejto metódy.

Vo štvrtej kapitole sme vykonali detailné meranie a modelovanie kreditného rizika nášho portfólia 105 existujúcich dlhopisov fondu DSS Allianz. Tieto dlhopisy sme následne rozdelili do 10 sektorov na základe S&P 500 a použili sme korelačnú maticu z [6]. Po výpočte forwardových kriviek a zadefinovaní migračnej matice sme vytvorili 10 000 Monte Carlo simulácií, nakreslili sme rozdelenie ziskov a strát, a určili výšku kreditného rizika portfólia podľa rôznych štatistík. Potom sme sa pozreli na rizikovosť jednotlivých aktív v rámci portfólií a poznatky sme sumarizovali v grafe a aj v tabuľke. Významnú časť sme venovali aj analýze korelácie dlhopisov, ktorá je najdôležitejšou časťou procesu. V rámci tohto kroku sme potvrdili aj robustnosť modelu CreditMetrics a otestovali ho na náhodné chyby v korelácii. Pomocou intervalov spoľahlivosti sme zistili aj minimálny počet simulácií, ktorý musíme vykonať na kvalitný odhad VaR portfólia. V závere kapitoly sme rozšírili našu analýzu rizikovosti na ďalších 5 rokov, pričom zlyhané resp. zmaturované dlhopisy sme rovno reinvestovali. Na konci piateho roku sme výsledky zosumovali a porovnali s naivne diverzifikovaným portfóliom. Zistili sme, že naše portfólio je dostatočne kvalitné a dobre diverzifikované, avšak v niektorých prípadoch sme zaznamenali významné straty pre hromadný default dlhopisov. Z tohto dôvodu sme sa rozhodli tejto problematike venovať samostatnú kapitolu.

V poslednej, piatej kapitole sme sa zaoberali modelovaním korelačného rizika, kde sme opísali dva modely: BET model ratingovej agentúry Moody´s a Davis-Lo model. Keďže

druhý je v istom zmysle rozvinutím prvého modelu, začali sme charakteristikou BET a uviedli jeho základnú ideu, ktorá je založená na použití diversity score, ako mierke diverzifikovanosti portfólia. Zadefinovali sme aj vzorec na výpočet očakávanej straty portfólia a poukázali na určité nedostatky tejto metódy. Najväčší problém vyplýva hneď z toho, že rizikovosť pôvodného portfólia modeluje pomocou nového, ktoré obsahuje len nezávislé a homogénne dlhopisy. Model Davis-Lo dokáže túto metódu vylepšiť, a ten modeluje kreditné riziko pôvodného portfólia už priamym spôsobom. Namiesto diversity score použije infekčný koeficient q, ktorého hodnota značí pravdepodobnosť, že default daného dlhopisu dokáže ovplyvniť ďalšie a naštartovať „domino efekt“. Táto metóda teda modeluje hromadný default dlhopisov a je efektívny najmä v rizikovom období. V poslednej časti práce sme analyzovali vplyv tohto koeficientu v rámci dlhopisového portfólia a jednotlivé výsledky sme znázornili na grafoch. Zistili sme, že v prípade diverzifikovaného portfólia je jeho efekt oveľa miernejší. V závere sme túto metodiku zabudovali do modelu CreditMetrics a analyzovali zmenu rizikovosti nášho portfólia.

Treba si však uvedomiť, že všetky modely pracujú so zjednodušenými predpokladmi resp. parametrami. Neexistuje perfektný model, ktorý by nemal žiadne nedostatky a neexistuje ani všeobecný model, ktorý by bol aplikovateľný v každej situácii. Všetky však majú svoje výhody a dokážu nám poskytnúť dôležitú a užitočnú informáciu. Na záver ešte raz pripomenieme slová Georga Boxa: „All models are wrong, but some are useful“.

Zoznam použitej literatúry

[1] Benzschawel, T.: *Credit Risk Modelling: Facts, Theory and Applications*, Risk Books, London, 2012

[2] Das, S., Freed, L., Geng, G., Kapadia, N.: *Correlated Default Risk*, dostupné na internete (30.12.2019): https://people.umass.edu/nkapadia/docs/Das_Freed_Geng_Kapadia_JFI.pdf

[3] Davis, M., Lo, V.: *Infectious Defaults*, dostupné na internete (19.03.2020): http://wwwf.imperial.ac.uk/~mdavis/docs/infectionii.pdf

[4] Davis, M., Lo, V.: *Modelling Default Correlation in Bond Portfolios*, dostupné na internete (20.04.2020): https://wwwf.imperial.ac.uk/~mdavis/docs/mastering_risk.pdf

[5] De Jonghe, F.: *Financial Risk Management*, slajdy z prednášok, UGent, Ghent, 2018

[6] Global X: *CIO Insights: Sector Investing and Correlations*, dostupné na internete (30.12.2019): https://www.globalxetfs.com/cio-insights-sector-investing-and-correlations/

[7] Goswin, T.: *The Merton Model: A Structural Approach to Default Prediction*, dostupné na internete (08.04.2020): https://www.bot.or.th/Thai/FinancialInstitutions/Highlights/IFRS9_Doc/The%20Merton%20Model.pdf

[8] Gunnarsson, S., Lundstedt, A.: *The Effects of Asset Return Correlation Errors in the CreditMetrics Framework*, dostupné na internete (10.03.2020): http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:571402/FULLTEXT01.pdf

[9] Jurča, P.: *Kvantitatívne metódy v riadení rizík*, učebné texty, FMFI UK, Bratislava, 2019, dostupné na internete (05.01.2020): http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/jurca/qrm/qrm.html

[10] Kwok, Y. K.: *Dynamic credit models and portfolio risk analysis*, slajdy z prednášok, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, 2013, dostupné na internete (23.03.2020):
https://www.math.ust.hk/~maykwok/courses/Dyn_Cred_Models/Topic2.pdf

[11] MathWorks: *Credit Risk Modeling with MATLAB*, dostupné na internete (30.12.2019):
https://www.mathworks.com/videos/credit-risk-modeling-with-matlab-81728.html

[12] Meissner, G.: *Correlation Risk Modeling and Management: An Applied Guide Including the Basel III Correlation Framework - with Interactive Models in Excel/VBA*, Wiley, Singapore, 2014

[13] National Association of Insurance Commissioners: *Current Market Benchmark Spreads for Bonds*, dostupné na internete (30.12.2019):
https://www.naic.org/documents/pbr_data_2018_vm-20_table_f_&_g_current_spreads.xlsx

[14] RiskMetrics Group: *CreditMetrics - Technical Document*, dostupné na internete (30.12.2019):
https://www.msci.com/documents/10199/93396227-d449-4229-9143-24a94dab122f

[15] Rullière D., Dorobantu, D., Cousin, A.: *An extension of Davis and Lo's contagion model*, dostupné na internete (23.03.2020):
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00374367/file/Davis_Lo_extension_model.pdf

[16] S&P Global Ratings: *2018 Annual Global Corporate Default And Rating Transition Study*, dostupné na internete (30.12.2019):
https://www.spratings.com/documents/20184/774196/2018AnnualGlobalCorporateDefaultAndRatingTransitionStudy.pdf

[17] Sundaresan, S.: *A Review of Merton's Model of the Firm's Capital Structure with its Wide Applications*, dostupné na internete (20.02.2020): https://www0.gsb.columbia.edu/faculty/ssundaresan/papers/Merton_review_cap_structure.pdf

[18] Truksová, L.: *Kreditní riziko*, diplomová práca, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, Praha, 2009, dostupné na internete (30.03.2020): https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/120017813

[19] Wang, Y.: *Structural Credit Risk Modeling: Merton and Beyond*, dostupné na internete (20.02.2020): https://www.soa.org/globalassets/assets/library/newsletters/risk-management-newsletter/2009/june/jrm-2009-iss16-wang.pdf

[20] Zákon č. 530/1990 Zb. o dlhopisoch