

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



OBÁLKOVÁ ANALÝZA DÁT PRE HODNOTENIE
UDRŽATELNOSTI

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**OBÁLKOVÁ ANALÝZA DÁT PRE HODNOTENIE
UDRŽATELNOSTI**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Veronika Goceljaková
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Obáľková analýza dát pre hodnotenie udržateľnosti
Data envelopment analysis for sustainability evaluation

Anotácia: V ostatných rokoch rezonuje v oblasti ekonomického výskumu téma udržateľného ekonomického, environmentálneho a sociálneho vývoja. Hodnotením systémov udržateľnosti sa začali zaoberať aj odborníci z oblasti obáľkovej analýzy dát (DEA). Táto diplomová práca bude analyzovať práce z DEA venujúce sa udržateľnosti, pokúsi sa ich rozšíriť na menej používané a neštandardné modely a prípadne ich aplikuje na vhodne zvolené slovenské, prípadne stredoeurópske dáta.

Vedúci: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Dátum zadania: 07.01.2019

Dátum schválenia: 08.01.2019

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Podakovanie Na tomto mieste by som sa chcela veľmi pekne poďakovať mojej školiteľke, doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc., za všetok jej čas, ktorý mi venovala a za všetky cenné rady, pripomienky a nápady, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Veľká vďaka patrí aj mojim rodičom za všetku podporu počas celého štúdia. V neposlednom rade ďakujem aj môjmu priateľovi za množstvo pozitívnej energie, ktorou ma motivoval pri písaní tejto práce.

Abstrakt v štátnom jazyku

GOCELJAKOVÁ, Veronika: Obálková analýza dát pre hodnotenie udržateľnosti [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2020, 81 s.

V našej práci sa zameriavame na analýzu prác zaoberajúcich sa udržateľnosťou prostredníctvom obálkovej analýzy dát (DEA) a návrhom vlastných modelov venujúcich sa tejto problematike. V prvej kapitole uvedieme čitateľa do elementárnej teórie a symboliky DEA, predstavíme niektoré základné lineárne modely, rovnako aj nelineárny Russellov model a Network DEA. V ďalšej časti sa zaoberáme témou udržateľnosti vo všeobecnosti, ako k nej pristupujú svetoví odborníci a najmä odborníci z oblasti DEA. Pri podrobnejšej analýze sa zameriavame na prácu [27], ktorá sa zaoberá problematikou udržateľnosti miest v Číne. Každé z miest predstavuje udržateľný vývojový systém pozostávajúci z dvoch podsystémov, ktoré sa navzájom ovplyvňujú. Tretia kapitola obsahuje vybrané modely z práce [27] a zároveň v nej zavedieme aj úplne iný prístup pomocou spojenia Russellovho modelu a Network DEA. Následne modely aplikujeme na reálnych dátach.

Kľúčové slová: obálková analýza dát, udržateľnosť, udržateľný vývojový systém, Russellov model, parciálna efektivita, Network DEA

Abstract

GOCELJAKOVÁ, Veronika: Data envelopment analysis for sustainability evaluation [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2020, 81 p.

In our thesis we focus on the analysis of the works dealing with sustainability by Data Envelopment Analysis (DEA) and design of our own models dedicated to this issue. In the first chapter we introduce the reader to elementary theory and symbolism in DEA, we show some basic linear models as well as nonlinear Russell model and Network DEA. In the next part we deal with the topic of sustainability in general, how world experts and especially DEA experts approach to this issue. In more detailed analysis, we focus on the work [27] that deals with the issue of city sustainability in China. Every city represents a sustainable development system consisting of two subsystems that interact with each other. Chapter three contains selected models from the work [27] and as well as we introduce a completely different approach using a combination of Russell model and Network DEA. Subsequently, we apply the models on real dataset.

Keywords: Data Envelopment Analysis, sustainability, sustainable development system, Russell model, partial effectiveness, Network DEA

Obsah

Úvod	9
1 Úvod do DEA modelov	11
1.1 Základné pojmy a DEA symbolika	11
1.2 Multiplikatívny model zlomkového programovania	15
1.3 Duálny obáľkový model	16
1.4 Obáľkový Russellov model	17
1.5 Network DEA modely	21
2 Udržateľnosť	26
2.1 Udržateľnosť v DEA literatúre	26
2.2 Analýza udržateľnosti v práci [27]	28
2.2.1 Symbolika	28
2.2.2 Prístupy k podsystémom	29
2.2.3 Dáta	33
2.2.4 Výsledky modelov	35
3 Návrh vlastného prístupu a modelov	37
3.1 Multiplikatívne modely	38
3.1.1 Neprepojené modely	38
3.1.2 Prepojené modely	40
3.2 Obáľkové modely - Russellov model	43
3.2.1 Russellov model a neprepojené podsystémy	43
3.2.2 Russellov model a Network DEA	53
Záver	60
Zoznam použitej literatúry	62
Prílohy	65
PRÍLOHA A	65

PRÍLOHA B	69
PRÍLOHA C	74
PRÍLOHA D	79

Úvod

V posledných rokoch zažíva svetová ekonomika celkový prudký nárast vo výrobe. Na to, aby sme mohli produkovať, potrebujeme vstupy, ktoré sú tvorené vo významnej miere prírodnými zdrojmi, akým je napríklad voda, fosílna palivá, či mnohé iné. Oproti ich neutíchajúcemu dopytu sú však prírodné zdroje obmedzené, preto ich spotreba musí byť regulovaná. Súčasným spôsobom hospodárenia, kde sa vo veľkej miere vyrába, spotrebúva a hlavne vyhadzuje, trpí najmä oblasť environmentalistiky.

Spomínaná zvýšená ekonomická aktivita má priamy dopad na životné prostredie. Znečisťovanie prostredia, v tomto prípade máme na mysli okrem iného najmä vplyv na kvalitu ovzdušia, vody či pôdy, je zreteľným problémom pre celú spoločnosť. Obmedzenosť prírodných zdrojov sa preto ešte viac prehlbuje, nakoľko je týmto spôsobom znižovaná aj ich kvalita.

Ďalším z úzko súvisiacich problémov je enormne rýchly nárast populácie, ako uvádza stránka [26], na začiatku osemdesiatych rokov minulého storočia svetovú populáciu predstavovalo vyše 4,4 miliardy, no aktuálne na Zemi žije už vyše 7,7 miliardy obyvateľov a ich počet sa bude neustále zvyšovať. Následkom toho vznikajú globálne problémy spojené s nezamestnanosťou, chudobou, vzdelaním, zdravotnou starostlivosťou, ale aj už spomínaným znečisťovaním prostredia.

V našej práci sa najskôr zameriame na vysvetlenie základov DEA a uvedenie symboliky, ktorú budeme používať v ďalších častiach práce. Okrem základného multiplikatívneho modelu uvedieme aj menej známe a netradičnejšie modely v DEA oblasti, akým je Russellov model a Network DEA.

Vidíme, že oblasť ekonómie, environmentalistiky a sociálna oblasť bezprostredne navzájom súvisia a ovplyvňujú sa. Riešenie problémov s nimi súvisiacich sa stalo momentálnou výzvou vo svete aj pre odborníkov v DEA sfére. S využívaním obmedzených prírodných zdrojov sa v posledných rokoch vo svete skloňuje slovo udržateľnosť či udržateľný vývoj. Čo vlastne udržateľnosť predstavuje, ako sa ňou snažia zmierniť následky súčasnej ekonomickej aktivity svetoví experti a hlavne ako k týmto problémom pristupujú DEA odborníci, viac ozrejmi začiatok druhej kapitoly. V jej pokračovaní sa budeme zaoberať problémom čínskych miest, inšpirovaný článkom [27]. Konkrétne ide o dáta obsahujúce vstupy do výrobného procesu, akými sú kapitál, pracovná sila

a energie. Pri výrobe sa okrem iného produkujú aj nežiaduce výstupy, ktorými sú odpady. V práci [27] sa autori snažili vytvoriť viacero modelov riešiacich tento problém a my predstavíme niektoré z nich.

Tretia kapitola bude obsahovať najmä naše vlastné prístupy a modely. Každé mesto má dva vlastné podsystemy, ktoré sú prepojené a pri produkcii sa navzájom ovplyvňujú. Z toho dôvodu pristúpime k návrhom nových modelov, ktoré berú na zreteľ aj túto skutočnosť. Pri prepojených modeloch najprv použijeme multiplikatívny prístup. Okrem neho aplikujeme menej tradičný Russelov model v obáľkovom tvare, ktorý pri prepojení využije Network DEA. V prípade, ak by sme podsystemy považovali za samostatne fungujúce, neovplyvňujúce sa celky, predstavíme aj neprepojené modely pri multiplikatívnom, ako aj obáľkovom prístupe.

1 Úvod do DEA modelov

V prvej kapitole podrobnejšie priblížime DEA problematiku, ktorá bude tvoriť základ pre ďalšie poznatky. V nadväznosti na ňu uvedieme a definujeme menej známe DEA modely, akým je Russellov model, ktorý budeme ďalej používať v našej práci. Neskôr predstavíme iný prístup k analýze dát oproti tradičným DEA modelom a tým budú Network DEA modely.

1.1 Základné pojmy a DEA symbolika

Hoci sa na oblasť DEA modelov zameriavajú mnohé publikácie, ako napríklad [4], [5], my sa budeme v tejto podkapitole hlavne opierať o poznatky z práce [9].

V bežnom živote sa každodenne stretávame s problémami, ktoré sa snažíme čo naj-efektívnejšie riešiť. Slovo efektívnosť sa skloňuje v spojitosti s efektívnou výrobou, efektívnym využívaním zdrojov, času a podobne. Práve touto oblasťou sa zaoberá obálková analýza dát, z ang. *Data Envelopment Analysis*, ktorá vyhodnocuje, ako efektívne sa správajú subjekty v porovnaní s ostatnými v danej skupine. Ako príklad môžeme uviesť produkčné jednotky, pri ktorých hodnotíme mieru efektivity výroby pri využívaní daných vstupov, prípadne opačne, ako efektívne využívajú vstupy pri plnení požadovanej veľkosti výroby.

Produkčné jednotky alebo producentov nazýva DEA tzv. *rozhodovacími jednotkami DMU* (z ang. *Decision Making Unit*). Predpokladáme, že máme n rozhodovacích jednotiek, ktoré značíme DMU_j , $j = 1, \dots, n$. Ak sa chceme upriamiť na jeden konkrétny útvar, označujeme ho písmenom o , konkrétne DMU_o , $o = 1, \dots, n$. Pod produkčnými jednotkami si môžeme predstaviť napríklad podniky, banky, ale aj mestá, či jednotlivé krajiny. Všetky rozhodovacie jednotky vykonávajú ten istý druh činnosti, označovaný ako *technológia* T . To znamená, že predpokladáme homogénnosť subjektov v produkčnej či neprodukcnej činnosti, ktorou sa zaoberajú, aby sme ich mohli prostredníctvom DEA modelov porovnávať. Do technológie T vstupuje m vstupov $I_1, \dots, I_m$, ktoré produkujú s výstupov $O_1, \dots, O_s$. Hodnotu i -teho vstupu, ktorý vo výrobe spotrebuje j -ty subjekt, zapisujeme ako x_{ij} , $i = 1, \dots, m$ a množstvo r -teho vyprodukovaného

výstupu sa označuje y_{rj} , $r = 1, \dots, s$. Štandardne sa v DEA predpokladá, že hodnoty vstupov a výstupov sú nezáporné a každá DMU jednotka v technológii T využíva aspoň jeden vstup na výrobu aspoň jedného výstupu. Z toho môžeme vektorovo zapísať vstupy a výstupy j -teho subjektu ako

$$x_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}, \quad y_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{rj} \\ \vdots \\ y_{sj} \end{pmatrix}, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Niekedy je výhodnejšie pracovať so súhrnným, maticovým zápisom, preto potrebujeme zapísať vstupy a výstupy všetkých DMU jednotiek do takého zápisu, kde j -ty stĺpec predstavuje vstup x , resp. výstup y j -teho subjektu DMU_j , $j = 1, \dots, n$. Spomínané matice majú nasledovný tvar

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1j} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{r1} & \dots & y_{rj} & \dots & y_{rn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \dots & y_{sj} & \dots & y_{sn} \end{pmatrix}.$$

V environmentálnych modeloch môžeme predpokladať, že okrem žiaducich výstupov y môže daný subjekt vyprodukovať aj nežiaduce výstupy. Veľkosť t -teho nežiaduceho výstupu produkovaného j -tym subjektom značíme ako b_{tj} , $t = 1, \dots, p$ a vektorovo ho môžeme zapísať ako

$$b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{tj} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Matica

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{t1} & \dots & b_{tj} & \dots & b_{tn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

predstavuje súhrnný zápis nežiaducich výstupov. Podobne ako pri vstupoch a žiaducich výstupoch predpokladáme, že hodnoty nežiaducich výstupov sú nezáporné a $b_j \neq 0_p$. Ako uvádza práca [11], k nežiaducim výstupom existuje viacero prístupov. V našej práci k nim budeme pristupovať ako ku vstupom a budeme sa nimi zaoberať neskôr v ďalších kapitolách.

Označme zjednodušene vektor vstupov $x \in \mathbb{R}_+^m$ a vektor výstupov $y \in \mathbb{R}_+^s$. Každé dvojici (x, y) , pre ktorú platí, že množstvá výstupov y sa dajú vyrobiť zo vstupov x , hovoríme, že je *prípustná* pre technológiu T . Množinu všetkých takých dvojíc (x, y) nazývame *množinou produkčných možností* G . Skutočnú množinu G presne nepoznáme, preto ďalej budeme pracovať s aproximáciou M tejto množiny. Môže nadobúdať rôzne tvary, no my sa zameriame na dva prípady podľa toho, či berieme do úvahy konštantné alebo variabilné výnosy z rozsahu, označujúc M_{CRS} , resp. M_{VRS} . Dvojica (x_A, y_A) hovorí, že producent A vyrobí y_A výstupov pri zužitkovaní hladiny vstupov x_A . Množina M bude najmenšou množinou, ktorá bude obsahovať všetky pre technológiu T známe dvojice (x_j, y_j) , $j = 1, \dots, n$ a zároveň bude spĺňať nasledovné axiómy:

(A1) $(x_j, y_j) \in M$, $\forall j = 1, \dots, n$,

(A2) M je konvexná

(Každá konvexná kombinácia dvoch bodov patriacich do M patrí tiež do M , teda ak $(x_A, y_A), (x_B, y_B) \in M$, pre $\forall \lambda \in [0, 1]$ platí: $(\lambda x_A + (1-\lambda)x_B, \lambda y_A + (1-\lambda)y_B) \in M$),

(A3) Ak $(x_A, y_A) \in M$, potom $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+s} \mid x_A \leq x, y_A \geq y\} \subset M$.

Tretiu vlastnosť poznáme aj ako *voľnú disponovateľnosť*, anglicky označovanú *free disposability*. Hovorí, že oproti výrobnjej stratégii (x_A, y_A) môžeme plytvať vstupmi ($x \geq x_A$) alebo vyrobiť menej výstupov ($y \leq y_A$). Tieto 3 axiómy sú potrebné na

aproximáciu množiny G v prípade variabilných výnosov z rozsahu VRS. Pre konštantné výnosy ešte platí, že s každým bodom (x, y) množina M obsahuje aj jeho ľubovoľný kladný násobok, teda zahŕňa celú polpriamku $c(x, y)$, $c > 0$, preto v tomto prípade vzniká ďalšia axióma, charakteristická len pre CRS:

(A4) Ak $(x_A, y_A) \in M$, potom aj $c(x_A, y_A) \in M$, $\forall c > 0$.

Na základe predošlých axiém vieme analyticky zapísať množinu M_{CRS} ako

$$M_{CRS} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+s} \mid X\lambda \leq x, Y\lambda \geq y, \lambda \geq 0\}. \quad (1)$$

Pre množinu M_{VRS} platí analogicky podobný zápis ako pre (1), len ešte pribudne do neho podmienka $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, a teda vyzerá nasledovne

$$M_{VRS} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+s} \mid X\lambda \leq x, Y\lambda \geq y, \lambda \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1\}. \quad (2)$$

Takto vytvorené množiny M_{CRS} , resp. M_{VRS} predstavujú tzv. *obálku* dát daných útvarov DMU , z čoho aj vznikol názov pre samotnú oblasť operačného výskumu DEA.

Množina M je ohraničená v smere zmenšujúcich sa vstupov x a zväčšujúcich sa výstupov y . V súlade s definíciou Pareto optimality podľa [9, kap. 5.5], bod $(x_A, y_A) \in M$ je *efektívny*, ak preň neexistuje žiadne také $(x, y) \in M$, $(x, y) \neq (x_A, y_A)$ a zároveň $x_A \geq x$ a $y_A \leq y$. To znamená, že žiaden iný útvar (x, y) patriaci do množiny M nedokáže vyrobiť väčšie alebo rovnaké množstvo výstupov pri nezmenených vstupoch alebo pri produkcii rovnakého množstva výstupov nedokáže spotrebovať menej alebo to isté množstvo vstupov. Je zrejmé, že Pareto efektívne body ležia na hranici ∂M množiny M . Táto časť hranice sa nazýva *hranica efektívnosti* H_E . Zvyšnú časť hranice tvorí *hranica pseudoefektívnosti* H_P .

Pomocou DEA modelov sa snažíme zistiť, či útvary, ktoré analyzujeme, sú efektívne. Ak útvar nie je efektívny, nazývame ho *neefektívny*. Pre neefektívne útvary chceme zistiť mieru tejto neefektívnosti a budeme ju nazývať *efektivitou* E . Ide o bezrozmernú veličinu z intervalu $(0, 1]$. Pre efektívneho producenta platí $E = 1$. DEA modely vyhodnocujú túto hodnotu prostredníctvom riešenia optimalizačného problému, ktorý predstavuje daný model. Ako príklad môžeme uviesť minimalizáciu vstupov pri nezmenených hodnotách výstupov, tzv. vstupne orientovaný model, či opačne maximalizáciu hodnoty produkcie pri nezmenených vstupoch, ktorá súvisí s výstupne orientovaným

modelom. Tieto modely však neuvažujú nad nežiaducimi výstupmi, ktoré bude zahŕňať náš optimalizačný problém, a preto okrem bežne používaných prístupov predstavíme v nasledujúcich podkapitolách netradičnejšie DEA modely. Ešte predtým však uvedieme tzv. *zlomkový model*, na základe ktorého boli vytvorené modely aplikované v práci [27].

1.2 Multiplikatívny model zlomkového programovania

Táto podkapitola využíva poznatky z práce [9]. Ako sme už uviedli, pre každú rozhodovaciu jednotku chceme zistiť, ako efektívne vyrába dané produkty y pri spotrebe hladiny vstupov x .

Pod efektivitou E_o útvaru DMU_o , kde $o \in \{1, \dots, n\}$, pri CRS rozumieme

$$E_o = \frac{\frac{v^T y_o}{u^T x_o}}{\max_j \frac{v^T y_j}{u^T x_j}} , \quad (3)$$

pričom vektory u a v predstavujú príslušné váhy vstupov, resp. výstupov. Tieto multiplikátory však nepoznáme, a preto sa rieši optimalizačná úloha

$$\begin{aligned} \max_{u,v} E_o \\ u \geq 0_m, v \geq 0_s , \end{aligned} \quad (4)$$

pričom 0_m , 0_s predstavujú nulové vektory príslušnej veľkosti. Táto úloha je dosť komplikovaná kvôli tomu, ako je E_o definované v (3), preto pridaním dodatočnej podmienky sa tento problém dá podľa [9] zjednodušiť na tzv. *zlomkový model*:

$$\begin{aligned} \max_{u,v} \frac{v^T y_o}{u^T x_o} \\ \frac{v^T y_j}{u^T x_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n , \\ u \geq 0_m , v \geq 0_s . \end{aligned} \quad (5)$$

Na váhy u a v máme požiadavku ich nezápornosti. Hoci podľa [9, kap. 2.4] sa vyžaduje ich kladnosť, my požadujeme neostre nerovnosti kvôli existencii optimálneho riešenia. V práci [8] sú uvedené dodatočné predpoklady na dáta, ktoré ukazujú, že úloha (5) je dobre definovaná.

Zlomkový model (5) odpovedá konštantným výnosom z rozsahu. Zároveň by sme chceli poznamenať, že nepoznáme model odpovedajúci variabilným výnosom z rozsahu, ktorý by mal analogickú interpretáciu.

Vstupný multiplikatívny model

V úvode našej práce sme spomínali, že pri produkcii sa využívajú prírodné zdroje, ktoré sú obmedzené. Kvôli tomu je hlavným cieľom minimalizácia spotreby týchto faktorov, preto sa pri základných DEA modeloch zameriame na vstupne orientovaný multiplikatívny model. Vychádzajúc zo zlomkového modelu (5), jeho účelová funkcia sa upraví normalizáciou vstupov, t.j.

$$u^T x_o = 1$$

na lineárny tvar $v^T y_o$. Aby aj podmienka $\frac{v^T y_j}{u^T x_j} \leq 1$, $j = 1, \dots, n$ bola zjednodušená, prepíše sa do lineárnej podoby:

$$v^T y_j - u^T x_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Výsledkom týchto úprav je nasledujúca úloha lineárneho programovania

$$\begin{aligned} \max_{u,v} \quad & v^T y_o \\ & u^T x_o = 1, \\ & v^T y_j - u^T x_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & u \geq 0_m, v \geq 0_s, \end{aligned} \tag{6}$$

maticovo zapísaná ako

$$\begin{aligned} \max_{u,v} \quad & y_o^T v \\ & x_o^T u = 1, \\ & Y^T v - X^T u \leq 0, \\ & u \geq 0_m, v \geq 0_s. \end{aligned} \tag{7}$$

Rovnako ako aj pri zlomkovom modeli (5), aj pri jeho vstupne orientovanej verzii platí, že odpovedá konštantným výnosom z rozsahu a analogický model prislúchajúci variabilným výnosom z rozsahu nepoznáme.

1.3 Duálny obáľkový model

V predošlej podkapitole sme predstavili multiplikatívny prístup k DEA modelom, ktorý pomocou váh vytvoril z vektora vstupov a vektora výstupov jednorozmerný vstup

a výstup, a tak maximalizoval efektivitu. Druhý prístup tvorí tzv. *obáľkový model*, ktorý je duálnou úlohou k multiplikatívnemu modelu.

Sledujúc [9], duálny model k vstupne orientovanému modelu (7) vyzerá nasledovne

$$\begin{aligned} \min_{\theta, \lambda} \quad & \theta \\ & X\lambda \leq \theta x_o, \\ & Y\lambda \geq y_o, \\ & \lambda \geq 0_n, \end{aligned} \tag{8}$$

pričom θ predstavuje koeficient skracovania vstupov. Pri porovnaní podmienok modelu (8) so zápisom (1) množiny M_{CRS} si môžeme všimnúť isté podobnosti. Na základe nich sa tento obáľkový model dá ekvivalentne zapísať ako

$$\min\{ \theta \mid (\theta x_o, y_o) \in M_{CRS} \}. \tag{9}$$

Z tohto zápisu vyplýva, že cieľom obáľkového prístupu vstupne orientovaného modelu je pomocou koeficientu θ maximálne radiálne skrátiť vstupy pri nezmenených výstupoch. Zároveň má pritom platiť, aby projekcia $(\theta x_o, y_o)$ bodu (x_o, y_o) patrila do množiny M_{CRS} , teda pri maximálnom skrátení vstupov sa dostávame na hranicu tejto množiny.

Výhodou obáľkových modelov v porovnaní s multiplikatívnymi je to, že obáľkové modely je možné modifikovať aj pre potreby modelovania *VRS*. V tomto prípade by nastala úprava modelu (8) pridaním ohraničenia

$$\mathbf{e}^T \lambda = 1,$$

kde $\mathbf{e}$ predstavuje jednotkový vektor príslušnej veľkosti. V zápise (9) namiesto množiny M_{CRS} bude v tomto prípade množina M_{VRS} .

Oba modely, či vstupne alebo výstupne orientované, sa zaoberajú optimalizáciou len vstupov, resp. len výstupov. Ak je zámerom ich optimalizovať súčasne, vhodným nástrojom je Russellov model, ktorý bude náplňou nasledujúcej podkapitoly.

1.4 Obáľkový Russellov model

Matematické pozadie pre DEA modely tvorí lineárne programovanie, preto z tohto hľadiska vedú pomerne jednoducho riešiť lineárne formulované úlohy. Avšak nie všetko

sa dá zapísať lineárne, preto tu nastávajú otázky, ako sa vysporiadať s nelineárnymi problémami a modelmi opisujúcimi dané skutočnosti. Ich charakteristickou vlastnosťou je, že niektorá z neznámych veličín vystupuje v modeli v podobe prevrátenej hodnoty, čo má za následok vznik ťažkostí pri výpočtoch, preto bolo ich použitie v DEA komunitě dosť obmedzené.

Jedným z nelineárnych modelov je **Russellov model**. Patrí medzi neradiálne modely, čo podľa [1] znamená, že oproti radiálnym modelom, ktoré pri optimalizácii vstupov zachovávajú počiatočné pomery medzi nimi, Russellov model sa zameriava na maximálnu redukciu vstupov a predlžovanie výstupov bez ohľadu na ich pomery. Podľa článku [10], z ktorého vychádzame pri značnej časti tejto podkapitoly, Russellov model v prípade *VRS* má v zložkovom tvare nasledovný zápis

$$\begin{aligned}
 \min_{\theta_m, \phi_s, \lambda_n} \quad & \frac{1}{m+s} \left(\sum_{i=1}^m \theta_i + \sum_{r=1}^s \frac{1}{\phi_r} \right) \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} & \leq \theta_i x_{io}, \quad \theta_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} & \geq \phi_r y_{ro}, \quad \phi_r \geq 1, \quad r = 1, \dots, s, \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_j & = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{10}$$

kde platí rovnaké značenie, ako sme uviedli v podkapitole 1.1. Okrem toho pribudli symboly θ_i a ϕ_r , ktoré predstavujú koeficienty skracovania θ_i v prípade vstupov a koeficienty predlžovania ϕ_r pre výstupy. Keďže tento model zodpovedá *VRS*, tak sa spája s množinou produkčných možností M_{VRS} definovanou v (2). V prípade *CRS* by bola podmienka $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ vynechaná a takto vzniknutý model by sa zase spájal s množinou M_{CRS} definovanou v (1). Vstupy skracujeme a výstupy predlžujeme maximálne do takej miery, aby novovzniknutý útvar stále patril do množiny M_{VRS} , resp. M_{CRS} . Dôležitou poznámkou je to, že koeficientami θ a ϕ skracujeme, resp. predlžujeme individuálne každý vstup alebo výstup, nakoľko pre každý vstup a každý výstup môžu byť tieto koeficienty odlišné. Je to dôsledkom toho, že zložky vektorov θ_i a ϕ_r nemusia byť nutne rovnaké, z čoho vyplýva základná vlastnosť neproporcionality neradiálnych modelov.

Vo vektorovo-maticovom zápise modelu pre VRS dostávame

$$\min_{\theta, \phi, \lambda} \frac{1}{m+s} (\mathbf{e}^T \theta + \mathbf{e}^T \phi^{-1}) \quad (11)$$

$$X\lambda \leq \theta \circ x_o, \quad \theta \leq \mathbf{e}, \quad \theta \in \mathbb{R}^m, \quad (12)$$

$$Y\lambda \geq \phi \circ y_o, \quad \phi \geq \mathbf{e}, \quad \phi \in \mathbb{R}^s, \quad (13)$$

$$\mathbf{e}^T \lambda = 1, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad (14)$$

kde $\mathbf{e}$ predstavuje jednotkový vektor príslušnej veľkosti, znak $\circ$ Hadamardov súčin po zložkách a x_o, y_o vyjadrujú vektory vstupov, resp. výstupov o -teho útvaru DMU_o , $o = 1, \dots, n$, ktorého efektivitu zisťujeme.

Označme $\theta^*, \phi^*, \lambda^*$ optimálne vektory úlohy (10). Potom definujeme podľa [10]:

$$(\hat{x}, \hat{y}) := (X\lambda^*, Y\lambda^*).$$

Riešenie $(\hat{x}, \hat{y})$ je projekciou bodu (x_o, y_o) na hranicu efektívnosti množiny M_{VRS} . Podľa [10], pre zložky optimálnych vektorov platí

$$\theta_i^* = \frac{\hat{x}_i}{x_{io}} \leq 1, \quad (15)$$

$$\frac{1}{\phi_r^*} = \frac{y_{ro}}{\hat{y}_r} \leq 1. \quad (16)$$

Je tomu tak preto, lebo z podmienok (12) a (13) dostávame dolné ohraničenia pre zložky koeficientov θ, ϕ :

$$\theta_i \geq \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}}{x_{io}},$$

$$\frac{1}{\phi_r} \geq \frac{y_{ro}}{\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}}.$$

Nakoľko minimalizujeme účelovú funkciu (11), premenné $\theta_i, \frac{1}{\phi_r}$ volíme čo najmenšie, kvôli čomu budú mať hodnotu určenú dolnou hranicou a preto pre ich optimálne zložky v (15) a (16) nastávajú rovnosti. Tieto zložky nazývame *parciálnymi efektivitami vstupov*, resp. *výstupov*. Potom úlohu Russellovho modelu môžeme chápať ako minimalizáciu aritmetického priemeru parciálnych efektívít, ktorý taktiež spĺňa požadovanú podmienku, že je z intervalu $(0, 1]$. Model identifikuje útvar ako *(Pareto) efektívny* vtedy a len vtedy, ak optimálna hodnota účelovej funkcie je rovná 1, čo nastáva vtedy a len vtedy, keď všetky jeho parciálne efektivity sú rovné 1.

Pri Russellovom modeli máme požiadavku na kladnosť dát. Nulové hodnoty zamietame preto, lebo z matematického hľadiska, ak by bol nejaký vstup $x_{io} = 0$, tak potom príslušný koeficient θ_i by mohol byť ľubovoľný, aj záporný, čím by sme pri minimalizácii účelovej funkcie mohli dostať hodnotu $-\infty$, preto by sme museli pridať ďalšie dolné ohraničenie. Analogicky pre nejaký nulový výstup y_{ro} by sme mohli zvoliť ľubovoľne príslušný koeficient $\phi_r \rightarrow \infty$, čím by sme optimálne riešenie nedostali, lebo by sme mohli dosiahnuť iba *inf* a nikdy nie *min* účelovej funkcie.

Reformulácia na úlohu SDP

Hoci sme na začiatku tejto podkapitoly povedali, že nelineárne modely boli v DEA pokladané za výpočtovo náročné a klasickými DEA solvermi založenými na lineárnom programovaní neboli riešiteľné, základom pre ich riešenie sa stala oblasť konvexného programovania. V roku 2007 bol v článku [21] sformulovaný Russellov model ako úloha tzv. *programovania nad kužeľmi 2. rádu* - SOCP (z ang. second-order cone programming). Ak je možné preformulovať nelineárnu úlohu na úlohu SOCP alebo úlohu *semi-definitného programovania* - SDP, ako môžeme vidieť v článku [10], v prípade potreby k nej vieme vytvoriť duálnu úlohu a na obe implementovať štandardné softvéry na riešenie.

V našej práci budeme používať pri aplikácii reálnych dát počas výpočtov reformuláciu na úlohu SDP. Sledujúc [10], v modeli (11) sa zavedie nová premenná ψ , splňajúca

$$\psi = \frac{1}{\phi}.$$

Táto substitúcia sa v účelovej funkcii modelu (11) zavedie spolu s relaxáciou prostredníctvom nerovnosti

$$\psi \geq \frac{1}{\phi}, \text{ resp. } \psi\phi \geq 1. \quad (17)$$

Nerovnosť (17) spolu s prirodzenou požiadavkou na nezápornosť koeficientu predlžovania vstupov, t.j. $\phi \geq 0$, sa dá zapísať do semidefinitnej podmienky

$$\begin{pmatrix} \phi & 1 \\ 1 & \psi \end{pmatrix} \succeq 0. \quad (18)$$

V prípade, ak by koeficient ϕ predstavoval vektor, podmienka (18) sa dá vo viacroz-

mernom prípade ekvivalentne zapísať ako

$$\begin{pmatrix} \text{diag}(\phi) & I_s \\ I_s & \text{diag}(\psi) \end{pmatrix} \succeq 0, \quad (19)$$

pričom $\text{diag}(\phi)$, $\text{diag}(\psi)$ predstavujú diagonálne matice, ktorých diagonálne prvky sú tvorené zložkami príslušných koeficientov ϕ , resp. ψ , a I_s predstavuje s -rozmernú maticu identity.

Po odvodení dodatočných podmienok, SDP reformulácia Russelovho modelu (11) má nasledovný tvar

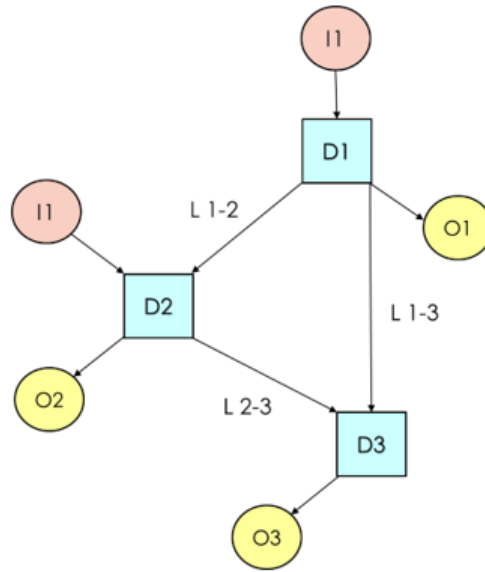
$$\begin{aligned} \min_{\theta, \phi, \lambda} \quad & \frac{1}{m+s} (\mathbf{e}^T \theta + \mathbf{e}^T \psi) \\ & X\lambda \leq \theta \circ x_o, \quad \theta \leq \mathbf{e}, \quad \theta \in \mathbb{R}^m, \\ & Y\lambda \geq \phi \circ y_o, \quad \phi \geq \mathbf{e}, \quad \phi \in \mathbb{R}^s, \\ & \mathbf{e}^T \lambda = 1, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \\ & \begin{pmatrix} \text{diag}(\phi) & I_s \\ I_s & \text{diag}(\psi) \end{pmatrix} \succeq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

1.5 Network DEA modely

V tejto podkapitole čerpáme informácie najmä z článku [24], ale obsiahnejšie a ucelené informácie obsahuje kniha [13].

Úvod do Network DEA

Tradičné DEA modely považujú určitý faktor, tým máme na mysli napr. vstupné materiály, údaje o klientoch banky, či hotové výrobky, len ako vstup alebo len ako výstup v danej technológii. Tento prípad však nemusia spĺňať všetky výrobné procesy. Ako príklad uvedieme firmu, ktorá má 3 výrobné oddelenia, tzv. divízie D . Každá z nich môže mať svoje vlastné vstupy a výstupy, ale nastávajú aj také prípady, že výstup z jednej divízie tvorí vstup do ďalšej. Medzi oddeleniami sa takto vytvárajú *prepojenia*, ozn. $L \ i - j$, kde výstup i -tej divízie je vstupom pre j -tu divíziu a tvorí medziprodukt. Prepojenia sú základom menej známej oblasti DEA, a tou sú *Network DEA modely*. Nasledujúci obrázok lepšie ilustruje práve opísané vzťahy:



Obr. 1: Network DEA schéma, vlastné spracovanie, podľa [24]

Ako uvádza [24], prvotným prístupom ešte pred vznikom Network DEA bola tzv. „čierna skrinka“, kde do technológie vstupovali samostatne len vstupy a výsledkom boli len samostatné výstupy. Týmto spôsobom sa však prichádzalo o vzájomné vzťahy medzi divíziami, nedala sa zistiť ich efektivita, iba celková, ktorá nemusí zobrazovať realitu hodnoverne. Ďalším pokusom bola separácia jednotlivých oddelení a ich samostatné vyhodnocovanie, avšak tu nastávala opäť strata prepojenia medzi jednotlivými divíziami, ktoré nemohli byť vyhodnotené ako celok správne. Kvôli týmto dôvodom boli vytvorené Network DEA modely. Ich hlavným cieľom je ohodnotenie celkovej efektivity a zároveň aj parciálnych efektív jednotlivých oddelení. Prvotne sa pri Network DEA aplikovali radiálne modely, ktoré skracujú vstupy proporcionálne, avšak niektoré z nich podľa [24] nemusia byť substitučné a dať sa skracovať v rovnakom pomere. Uvedieme príklad pri spomínanej firme, keď pracovná sila ako vstup sa nedá nahradiť dodatočným materiálom, preto sa začali používať v oblasti Network DEA neradiálne modely.

Využitie Network DEA modelov si postupne nachádza svoje miesto v rámci operačnej analýzy. Článok [3] sa zameriava na viacstupňové Network DEA modely, aj s ilustratívnym príkladom. Nežiaduce výstupy sa vo viacerých prípadoch spájajú práve s týmito modelmi, ako môžeme vidieť napríklad v práci [16]. Reálnu aplikáciu Network DEA predkladá práca [6], ktorá sa zaoberá modelovaním bankových procesov v tureckých bankách.

Symbolika

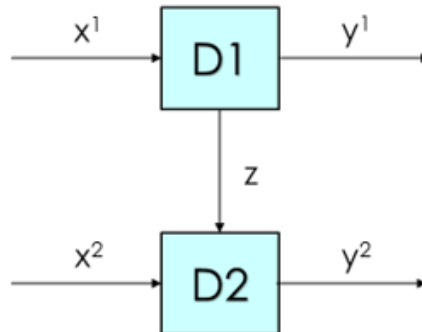
V našej práci budeme neskôr potrebovať DMU jednotky s dvomi divíziami, medzi ktorými bude jedno prepojenie, a preto symboliku uvedieme pre tento prípad. Predpokladajme, že máme n rozhodovacích jednotiek DMU, pričom každá pozostáva z dvoch divízií. Do k -tej divízie, $k = 1, 2$, vstupuje m_k vstupov, pričom vyrobí s_k výstupov. Vstupy do k -tej divízie preto označíme $x^k \in \mathbb{R}_+^{m_k}$ a výstupy sú označované ako $y^k \in \mathbb{R}_+^{s_k}$. Z hľadiska prehľadnosti budeme ďalej súhrnne zapisovať vstupy jednej divízie do matice vstupov X^1 , resp. X^2 a matice výstupov budú označované Y^1 a Y^2 pre dané divízie. Okrem samostatných vstupov a výstupov, Network DEA modely zahŕňajú aj spomínané prepojenia. Medziprodukt, ktorý predstavuje prepojenie z divízie $D1$ do divízie $D2$, sa označuje ako $z \in \mathbb{R}_+^h$. Hodnotu l -tého medziproduktu j -teho subjektu zapisujeme z_{lj} , $l = 1, \dots, h$.

Matica

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & \dots & z_{1j} & \dots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{l1} & \dots & z_{lj} & \dots & z_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{h1} & \dots & z_{hj} & \dots & z_{hn} \end{pmatrix}$$

predstavuje maticu medziproduktov, pričom každý stĺpec tvorí medziprodukt z_j , $j = 1, \dots, n$ prislúchajúci j -tej jednotke DMU.

Vzťahy medzi divíziami zobrazuje tento diagram:



Obr. 2: Network DEA pre dve divízie s jedným prepojením, vlastné spracovanie

Pre tento prípad by sme chceli odvodiť množinu produkčných možností pri variabilných výnosoch z rozsahu. Najprv predpokladajme, že divízie sú neprepojené. Divízia $D1$ okrem výstupov y^1 produkuje aj výstup z , teda jej množinu produkčných možností zapíšeme ako

$$M_{VRS}^1 = \{(x^1, y^1, z) \mid x^1 \geq X^1 \lambda^1, y^1 \leq Y^1 \lambda^1, z \leq Z \lambda^1, \lambda^1 \geq 0, \mathbf{e}^T \lambda^1 = 1\}.$$

Divízia $D2$ vyrobí výstup y^2 zo vstupov x^2 a z , preto môžeme vyjadriť jej množinu produkčných možností nasledovne

$$M_{VRS}^2 = \{(x^2, y^2, z) \mid x^2 \geq X^2 \lambda^2, y^2 \leq Y^2 \lambda^2, z \geq Z \lambda^2, \lambda^2 \geq 0, \mathbf{e}^T \lambda^2 = 1\}.$$

Koeficienty $\lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{R}_+^n$ sa nazývajú *vektory intenzít* prislúchajúce divízii 1, resp. 2.

Z množín M_{VRS}^1 a M_{VRS}^2 dostávame ohraňenie pre medziprodukt z :

$$Z \lambda^2 \leq z \leq Z \lambda^1. \quad (21)$$

Nech $Z \lambda^1$ predstavuje útvar v $D1$, s ktorým sa porovnáva medziprodukt z . Rovnako sa z porovnáva so $Z \lambda^2$, ktorý vyjadruje útvar v $D2$. Ak sú divízie prepojené, v tom prípade musia byť tieto útvary rovnaké, t.j. musí platiť

$$Z \lambda^1 = Z \lambda^2,$$

preto teda podľa ohraňenia (21) pre z platí aj

$$\begin{aligned} z &= Z \lambda^1, \\ z &= Z \lambda^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Na základe rovností v (22) môžeme množinu produkčných možností pri variabilných výnosoch z rozsahu v tomto prípade analyticky zapísať ako

$$\begin{aligned} M_{VRS}^{(1,2)} &= \{(x^1, y^1, z), (x^2, y^2, z) \mid x^1 \geq X^1 \lambda^1, y^1 \leq Y^1 \lambda^1, \\ &\quad x^2 \geq X^2 \lambda^2, y^2 \leq Y^2 \lambda^2, z = Z \lambda^1, z = Z \lambda^2, \\ &\quad \lambda_j^1 \geq 0, \lambda_j^2 \geq 0, \mathbf{e}^T \lambda^1 = 1, \mathbf{e}^T \lambda^2 = 1\}. \end{aligned} \quad (23)$$

V prípade konštantných výnosov z rozsahu sú v (23) podmienky

$$\mathbf{e}^T \lambda^1 = 1, \mathbf{e}^T \lambda^2 = 1$$

vynechané.

V článku [24] autori definovali neradiálny *SBM model* použitý v Network DEA, ktorý dokáže vyhodnocovať celkovú efektivitu, ako aj efektivity jednotlivých oddelení, ktoré sú bližšie definované v článku [24], a teda na ich základe sa dá vyhodnotiť dôležitosť týchto oddelení a prípadne z toho vyvodiť dôsledky. My by sme chceli odvodiť Network DEA modely s použitím Russellovho modelu a neskôr na ne aplikovať reálne dáta, čo bude ďalšou súčasťou našej práce.

2 Udržateľnosť

V posledných rokoch rezonuje vo svete téma udržateľnosti a udržateľného vývoja v rôznych sférach. Udržateľný vývoj predstavuje riadenie daných oblastí tak, aby sa v nich zachovávala hranica medzi uspokojovaním ľudských potrieb, ktoré sa neustále vyvíjajú a potrebou zachovať prostredie, v ktorom žijeme, aj pre budúce generácie. Avšak aktuálna svetová produkcia a spotreba sú neudržateľné, lebo sú na vysokej úrovni a odhaduje sa, že spotrebujeme asi o 40 % viac zdrojov oproti tomu, čo dokážeme vrátiť späť ([25]). S tým súvisí aj hromadenie a tvorba odpadov majúcich neblahý vplyv na obmedzené prírodné zdroje, ktoré sa stávajú čoraz vzácnejšími.

V roku 2005 boli preto na *World Summit on Social Development* ustanovené 3 základné piliere udržateľnosti, a tým je ekonomický vývoj, sociálny vývoj a environmentalistika.

Trh ponuky a dopytu si neustále vyžaduje veľké množstvo zdrojov. Ekonomický vývoj predstavuje udržiavanie tejto spotreby tak, aby boli potreby ľudí napĺňané a zároveň bola regulovaná s ohľadom na životné prostredie. Ochrana zdravia ľudí pred znečisťovaním a inými poškodzujúcimi vplyvmi sa stala základnou súčasťou sociálneho vývoja. Okrem toho sem rovnako dôležito patrí snaha o skvalitňovanie prístupu vzdelávania ku čo najširším vrstvám obyvateľstva. Edukáciou v tejto sfére je podstatné učiť ľudí, ako sa majú správať pri ochrane životného prostredia a podporovať ich k tomu. Aj z toho dôvodu environmentálna ochrana je asi najdôležitejším pilierom udržateľnosti, ale bez vzájomnej spolupráce všetkých troch by však boli ciele udržateľnosti len ťažko dosiahnuteľné.

2.1 Udržateľnosť v DEA literatúre

Udržateľnosť je oblasťou, ktorou sa v týchto časoch nezaoberajú len experti v riadení ekonomík. Táto sféra sa stala dôležitou výzvou aj pre odborníkov z oblasti DEA, nakoľko je pomerne novým problémom, ktorý je zložitejší a vyžaduje si vytváranie nových, vylepšených modelov na ich riešenie.

Rovnako ako sa zvyšuje dopyt po prírodných zdrojoch, aj klimatické zmeny a znečisťovanie majú veľký vplyv na ich zásoby. Jedným z príkladov je snaha DEA odborníkov

v Taliansku riešiť problém udržateľnosti vodného sektora v práci [17] prostredníctvom základných DEA modelov, akými sú CCR a BCC modely.

Hoci v niektorých prípadoch sú dobrými nástrojmi pri analýze udržateľnosti aj jednoduchšie, vyššie spomenuté modely, problémy sa stávajú komplexnejšími. Štátni predstavitelia a manažéri rôznych firiem potrebujú realizovať svoje rozhodnutia pod vplyvom širokej škály okolností, ako sú napríklad klimatické zmeny, udržateľnosť zdrojov vody či všeobecne manažment vzácnych zdrojov, recyklácia, riadenie odpadov a mnohé iné okolnosti.

Príkladom reálnej aplikácie je práca [14], v ktorej sa autori zaoberajú udržateľným riadením zásobovacieho reťazca, konkrétne výrobcami živice v Iráne. Ide o dvojstupňový model medzi dodávateľom a výrobcom, pričom autori pri tvorbe modelov museli brať do úvahy viaceré faktory, akými sú z hľadiska ekonomickej udržateľnosti priemerná cena od dodávateľa a množstvo dodávaného tovaru medzi dodávateľom a výrobcom. Sociálnu udržateľnosť predstavujú ročné osobné obraty a množstvo vyškoleného personálu v práci a bezpečnosti. V neposlednom rade environmentálnu udržateľnosť tvorí množstvo vyrobených „zelených“ produktov a taktiež náklady spojené s environmentálnymi dopadmi, nakoľko pri výrobe živice vzniká výrazné množstvo chemikálií, ako uvádzajú v práci [14]. Vo vytvorených modeloch pristúpili k viacerým princípom, ako je SBM model a Russellov prístup.

Inú názornú ukážku predstavuje práca [7], ktorá okrem klasických DEA modelov ponúka aj rozšírené DEA modely, ktoré vlastným prístupom kalkulujú samostatné efektivity v daných oblastiach udržateľnosti, ako je ekonomická, environmentálna a sociálna oblasť. Nové vytvorené modely aplikujú na reálnej štúdii technológií vytvárajúcich elektrickú energiu.

Témou udržateľnosti sa v DEA literatúre zaoberá ďalšie množstvo článkov. Medzi práce, ktoré by sme chceli spomenúť, patria práce [12] a [22], ktoré sa venujú vplyvom čínskej politiky a regionálneho rozhodovania na udržateľný vývoj tepelných elektrární a s tým spojenej prevencie, či zmierneniu kontaminácie prostredia. Oblasť japonského energetického sektora, s ním spojeného znečisťovania a vplyvu vlády je hlavným dôvodom na tvorbu radiálnych DEA modelov udržateľnosti v článku [19]. Tí istí autori v nedávnej práci [20] vytvorili rozšírené DEA modely, tvoriace medzistupeň medzi ra-

diálnymi a neradiálnymi modelmi, ktoré aplikovali na dáta tokijských mestských štvrtí.

Viacere predošlé práce sa zameriavajú najmä na vplyv vlády, rozhodnutia firiem, či na mieru znečistenia vplývajúcu na udržateľnosť daných systémov. Práca [15] však najmä berie na ohľad vplyv verejného environmentálneho postoja na udržateľnosť čínskych miest. Prostredníctvom rozšírených DEA modelov prišli k záveru, že aj tento postoj je dôležitým faktorom udržateľného vývoja.

Ako je z predchádzajúcej časti tejto podkapitoly zrejmé, existuje veľa publikácií zameriavajúcich sa na využitie DEA modelov pri analýze udržateľnosti. Hlavným cieľom [23] je vytvoriť prehľad takýchto článkov venujúcich sa udržateľnosti v DEA. Začiatky v tejto sfére a predpovede budúceho vývoja v tejto oblasti uvádza práca [28]. V značnej časti našej práce sme sa inšpirovali článkom [27], ktorý bližšie predstavíme v nasledujúcej podkapitole.

2.2 Analýza udržateľnosti v práci [27]

V predošlej časti sme uviedli, že pre udržateľný vývoj je potrebné zaoberať sa tromi oblasťami: ekonomickou, environmentálnou a sociálnou. Článok [27], ktorý je podkladom pre túto podkapitolu, rovnako berie na zreteľ tieto 3 hlavné piliere pri hodnotení udržateľnosti čínskych miest. V prvom rade však ozrejmime, ako sa dané sféry ovplyvňujú a pre sprehľadnenie zavedieme značenie.

2.2.1 Symbolika

Podľa [27], v oblasti udržateľnosti rozhodovaciu jednotku DMU_j , $j = 1, \dots, n$ nazývame *udržateľný vývojový systém* (z angl. *sustainable development system* - *SDS*). Každý z nich tvorí dva podsystemy (angl. *subsystems*):

- *ekonomicko-environmentálny* - *EES*,
- *sociálny* - *SS*.

Ekonomickú a environmentálnu sféru sa v článku [27] rozhodli spojiť do jedného podsystemu, lebo pri výrobe v ekonomike vznikajú okrem žiaducich výrobkov, kvôli ktorým produkuje, aj nežiaduce výstupy. Tie v tomto prípade predstavujú odpady

v rôznej forme, ktoré majú priamy dopad na životné prostredie, preto je ekonomika neoddeliteľne prepojená so životným prostredím.

Ekonomicko-environmentálny podsystem zo vstupov x produkuje výstupy: žiaduce y a nežiaduce b . Pre ne platí rovnaká symbolika ako je uvedená v podkapitole 1.1. Kapitál, pracovná sila a energia sú súčasťou vstupov, ktoré produkujú hrubý domáci produkt (HDP) ako žiaduci, ale aj tuhý odpad, odpadovú vodu a plyny ako nežiaduce výstupy.

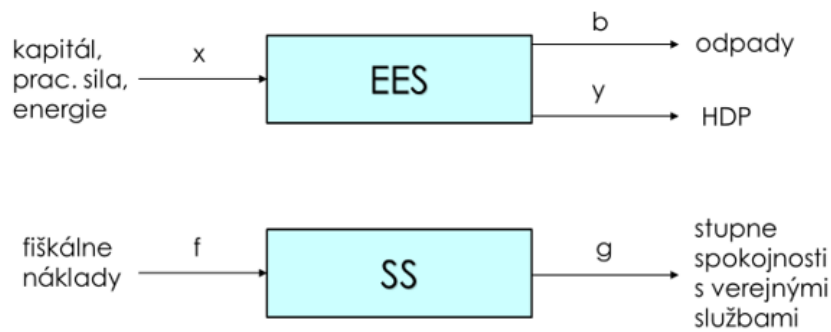
Vstupy pre sociálny podsystem značíme f . Predstavujú ich fiškálne náklady na verejné služby. Neskôr v našej práci bude vhodnejšie použiť maticový zápis, a teda maticu fiškálnych nákladov zapisujeme F . Výstupy, označované g , tvorí stupeň spokojnosti so spomínanými službami, konkrétne so zdravotníctvom, školstvom, sociálnym bezpečím a zamestnanosťou. Súhrnnú maticu stupňov spokojnosti značíme G . V niektorých prípadoch v článku [27] zahrnuli medzi vstupy aj HDP, čo bude bližšie ozrejmene v nasledujúcej časti.

2.2.2 Prístupy k podsystemom

Podľa toho, či sa považujú dané podsystemy za prepojené alebo nie, v práci [27] navrhli dva prístupy - *nezávislé paralelné nastavenie* alebo *prepojené paralelné nastavenie*.

Nezávislé paralelné nastavenie

Ako je už z názvu zrejmé, pri nezávislom paralelnom nastavení sú podsystemy od seba nezávislé a pracujú bez vzájomného prepojenia. Dôsledkom toho je, že môžu byť vyhodnocované samostatne, nakoľko sa navzájom neovplyvňujú. Nasledujúci diagram názorne približuje neprepojené podsystemy a ich jednotlivé vstupy, resp. výstupy:



Obr. 3: Nezávislé paralelné nastavenie, vlastné spracovanie podľa [27]

K nežiaducim výstupom v prípade podsystemu EES sa dá pristupovať rôznymi spôsobmi. V práci [27] nežiaduce výstupy priradili ku žiaducim výstupom so záporným znamienkom a aplikovali multiplikatívny model zlomkového programovania pre CRS, ktorý sme v základnom tvare predstavili ako model (5) v kapitole 1.2:

$$\begin{aligned}
 \max_{u,v,w} \quad & \frac{v^T y_o - w^T b_o}{u^T x_o} \\
 \frac{v^T y_j - w^T b_j}{u^T x_j} & \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\
 u & \geq 0_m, \quad v \geq 0_s, \quad w \geq 0_p.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Autori [27] sa potom rozhodli normalizáciou vstupov pre vstupne orientovaný model, v ktorom sa radiálne skracujú vstupy. Odôvodnili to tým, že z hľadiska udržateľnosti je potrebné obmedzovať spotrebu prírodných zdrojov, a teda minimalizovať ich využívanie.

Ich normalizovaný model vyzerá nasledovne

$$\begin{aligned}
 \max_{u,v,w} \quad & v^T y_o - w^T b_o \\
 u^T x_o & = 1, \\
 v^T y_j - w^T b_j - u^T x_j & \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 u & \geq 0_m, \quad v \geq 0_s, \quad w \geq 0_p.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Analogickým spôsobom je v práci [27] vytvorený optimalizačný model aj pre sociálny

podsystem, ktorého cieľom je minimalizovať fiškálne náklady:

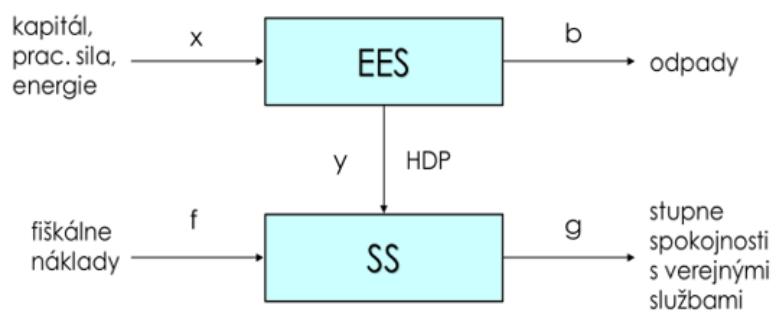
$$\begin{aligned} \max_{\pi, z} \quad & \frac{z^T g_o}{\pi^T f_o} \\ & \frac{z^T g_j}{\pi^T f_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ & z \geq 0_D, \quad \pi \geq 0_K. \end{aligned} \quad (26)$$

Po normalizácii vstupov dostali model v tvare

$$\begin{aligned} \max_{\pi, z} \quad & z^T g_o \\ & \pi^T f_o = 1, \\ & z^T g_j - \pi^T f_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & z \geq 0_D, \quad \pi \geq 0_K. \end{aligned} \quad (27)$$

Prepojené paralelné nastavenie

Oproti nezávislému paralelnému nastaveniu je v reálnom svete skôr obvyklejšie, že sa systémy navzájom ovplyvňujú a spolupracujú. Táto myšlienka sa v práci [27] stala základom pre prepojené paralelné nastavenie, keď výstup jedného podsystemu môže tvoriť vstup pre druhý. V tomto prípade takýmto medziproduktom je HDP, teda podsystem EES tvorí základ pre SS. Obr. 4 znázorňuje prepojenie medzi podsystemami:



Obr. 4: Prepojené paralelné nastavenie, vlastné spracovanie podľa [27]

V práci [27] zahrnuli HDP medzi vstupy sociálneho podsystemu a v tomto prípade model pre SS má takýto tvar:

$$\begin{aligned} \max_{v, \pi, z} \quad & \frac{z^T g_o}{\pi^T f_o + v^T y_o} \\ & \frac{z^T g_j}{\pi^T f_j + v^T y_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ & v \geq 0_s, \quad z \geq 0_D, \quad \pi \geq 0_K. \end{aligned} \quad (28)$$

Ich normalizovaný model vyzerá nasledovne

$$\begin{aligned} \max_{v, \pi, z} \quad & z^T g_o \\ & \pi^T f_o + v^T y_o = 1 \\ & z^T g_j - \pi^T f_j - v^T y_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & v \geq 0_s, \quad z \geq 0_D, \quad \pi \geq 0_K. \end{aligned} \quad (29)$$

Model pre podsystem EES zostáva rovnaký ako v prípade nezávislého paralelného nastavenia, teda platí model (24). Rozdiel oproti nezávislému paralelnému nastaveniu však nastáva v prepojení, ktoré tvorí HDP a taktiež v spoločnom multiplikátore v prislúchajúcemu tomuto prepojeniu.

Autori [27] upozorňujú, že tento prístup je vhodný vtedy, ak podsystemy nemajú rovnaký podiel spolupráce, ale jeden prevažuje nad druhým, v tomto prípade EES nad SS podsystemom. Čo to podrobnejšie znamená ohľadom konkrétneho príkladu, uvedieme v ďalšej časti tejto podkapitoly, konkrétne o reálnych dátach aplikovaných v práci [27].

Podľa [27] môžu nastať aj opačné prípady, keď podsystemy navzájom rovnocenne spolupracujú. Vtedy je cieľom maximalizovať efektivity oboch podsystemov súčasne, preto navrhli nasledovný model:

$$\begin{aligned} \max_{u, v, w, \pi, z} \quad & \theta_1 \frac{v^T y_o - w^T b_o}{u^T x_o} + \theta_2 \frac{z^T g_o}{\pi^T f_o + v^T y_o} \\ & \frac{v^T y_j - w^T b_j}{u^T x_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \frac{z^T g_j}{\pi^T f_j + v^T y_j} \leq 1, \\ & u \geq 0_m, \quad v \geq 0_s, \quad w \geq 0_p, \quad z \geq 0_D, \quad \pi \geq 0_K, \end{aligned} \quad (30)$$

kde koeficienty θ_1 a θ_2 predstavujú váhy príslušných podsystémov a spĺňajú vlastnosť $\theta_1 + \theta_2 = 1$. Tieto váhy navrhujú voliť podľa subjektívneho posúdenia na základe podielu na spolupráci konkrétneho podsystému s druhým podsystémom. Uvádzajú aj iný spôsob voľby váh ako pomer vstupov daného podsystému ku všetkým vstupom celého systému.

Všeobecne ku každému z uvedených modelov platí, že systém SDS je efektívny práve vtedy, keď sú efektívne oba podsystémy.

2.2.3 Dáta

Článok [27] obsahuje dáta 30 čínskych miest. Každé z nich zahŕňa podsystémy EES a SS. Obsah dát je obdobný tomu, čo sme charakterizovali v podkapitole 2.2.1. To znamená, že pre podsystém EES za vstupy považujeme kapitál x_1 , pracovnú silu x_2 a energie x_3 ; žiaducim výstupom je HDP, označované y a nežiaducim je odpadová voda b_1 , odpadový plyn b_2 a tuhý odpad b_3 . Pre podsystém SS sú vstupmi fiškálne náklady f (RPFE) a HDP, zatiaľ čo medzi výstupy patria stupne spokojnosti so zdravotníctvom g_1 (SHC), základným vzdelaním g_2 (SBE), sociálnou bezpečnosťou a zamestnanosťou g_3 (SSSE). Ako sme spomenuli pri podkapitole o prepojenom paralelnom nastavení, model (28) sa používa, ak dané podsystémy nespolupracujú rovnocenne, čo v tomto prípade znamená, že vládne výdavky do oboch podsystémov nie sú rovnaké. Čína sa všeobecne viac zameriava na ekonomiku oproti fiškálnym investíciám do verejných služieb, čo zdôvodňuje fakt, že v roku 2012 tieto investície predstavovali len 31,2% z celkových nákladov, ako uvádza štatistická kniha Číny [2]. Podľa autorov [27], čínska vláda plánuje v budúcnosti túto hladinu harmonizovať s investíciami do ekonomiky, preto v tomto prípade považujú za vhodnejší model (30).

Tabuľka 1 obsahuje spomínané dáta o čínskych mestách z práce [27], ktoré budeme aplikovať v našej práci. V tabuľke sú mestá označené aj číslami pre prípadnú lepšiu prehľadnosť a orientáciu v názvoch miest pri interpretácii výsledkov modelov. Sú rozdelené do regiónov: *východný región* predstavujú mestá 1-11, *centrálny región* je tvorený mestami 12-21 a mestá 22-30 patria do *západného regiónu*.

Tabuľka 1: Dáta miest v Číne

Mesto	Kapitál x_1	Práca x_2	Energia x_3	HDP y	Odpad. voda b_1	Odpad. plyn b_2	Tuhý odpad b_3	RPFE f	SHC g_1	SBE g_2	SSSE g_3
1 Beijing	5535.96	1069.7	6995.4	15256.8	35.2	145469	2251.19	33.91	64.82	44.59	54.2
2 Tianjin	6676.63	763.16	7598.45	10737.27	66.57	67147	3504.43	31.24	62.01	37.93	40.49
3 Shijiazuang	2869.18	519.66	4734.76	3809.14	59.79	54230	3040.46	38.76	65.44	36.14	49.77
4 Shenyang	907.75	177.3	2638	1954.08	37.73	19205	6307.03	38.03	59.24	38.73	35.66
5 Shanghai	966.21	168.3	2570.56	2076.54	34.16	13754	1784.28	28.87	60.43	34.6	44.77
6 Nanjing	4278.23	357.8	4874.97	5634.7	30.74	41055	1409.22	37.2	63.6	42.38	46.24
7 Hangzhou	2234.65	384.6	2325.83	3771.79	36.04	26767	1233.79	33.79	61.16	44.92	51.57
8 Fuzhou	2488.34	315.47	4280.25	4115.63	41.57	41901	1128.93	37.6	60.49	44.91	49.2
9 Jinan	4755.17	1104.33	11270.48	18573.59	76.53	214155	4884.4	29.55	61.48	44.01	47.91
10 Guangzhou	3518.02	468.34	3447.8	5746.33	36.98	82769	3518.8	28.68	62.82	41.87	43.24
11 Haikou	2883.74	637.77	3812.82	6573.83	26.07	96219	1526.52	34.91	65.41	41.33	50.56
12 Taiyuan	2985.94	476.2	2190.11	3117.66	20.66	40213	2131.93	28.73	62.01	58.05	55.65
13 Hohhot	2534.91	425.59	1920.02	3529.45	25.31	36069	1387.36	37.25	60.57	35.19	47.79
14 Changchun	1847.17	303.64	1650.97	2494.03	12.18	40492	370.49	37.16	65.03	38.08	51.66
15 Harbin	1811.18	392.7	3935.79	4325.05	35.31	29794	2252.69	35.73	64.1	43.3	46.73
16 Hefei	2702.71	490.85	4009.92	4598.53	38.01	47307	2498.61	31.09	62.57	49.98	50.19
17 Nanchang	3951.97	498	5116.21	6205.23	31.11	76666	2759.34	32.77	62.3	36.78	46.29
18 Zhengzhou	3202.73	438.99	3332.09	5206.38	9.69	42271	355.19	28.95	62.64	37.9	48.55
19 Wuhan	3234.31	743.18	6621.69	11962.84	23.67	141610	1318.7	31.79	61.7	45.52	46.69
20 Changsha	1851.34	409.12	1617.35	2021.69	13.94	36355	697.49	37.62	62.53	40.36	49.5
21 Nanning	371.28	118.15	411.34	692.49	1.38	11911	9.54	37.77	65.1	37.8	49.09
22 Chongqing	7157.18	1585.16	7951.12	9225.38	117.05	131450	6598.37	31.17	68.36	43.49	46.91
23 Chengdu	4688.83	781.28	4144.05	6395.13	18.8	84467	1036.03	25.35	65.85	38.43	42.68
24 Guiyang	1458.6	217.92	1863.79	1312.53	20.77	14508	2280.1	31.11	64.98	37.7	55.82
25 Kunming	1792.29	400.66	2380.71	2417.14	28.77	45335	7339.84	32.63	64.4	43.3	46.73
26 Xi'an	2961.26	495.99	2250.32	3689.04	24.39	40770	555.94	34.29	59.96	35.35	45.43
27 Lanzhou	831.49	179.72	2182.05	1265.45	24.87	16102	1209.1	41.85	63.08	38.01	50.89
28 Xining	495.78	55.49	1729.72	722.57	19.94	10174	1002.38	36.76	62.64	43.33	50.91
29 Yinchuan	644.2	100.71	1257.02	887.72	21.46	17703	1249.45	26.96	61.83	43.94	50.38
30 Urumqi	610.57	116.07	3796.55	1543.31	38.27	24195	2001.39	30.76	60.35	37.83	48.89

2.2.4 Výsledky modelov

V praktickej časti sme sa rozhodli zreprodukovat niektoré výsledky z práce [27]. Na dáta z Tabuľky 1 sme aplikovali normalizované modely (25), (27) a (29) prevzaté z práce [27]. Naše vypočítané efektivity zobrazuje Tabuľka 2, ktorá je uvedená v podkapitole 3.1.1. Túto tabuľku sme sa rozhodli dať do ďalšej kapitoly z toho dôvodu, aby sme rozlíšili vlastnú tvorbu od práce prevzatej z literatúry. Nasledujúce zhodnotenie a interpretácia výsledkov pochádza z práce [27] a našimi výpočtami sa tieto výsledky potvrdili.

Tabuľka je rozdelená na 3 časti podľa lokality, a to na východný, centrálny a západný región, ako bolo spomenuté pri popise dát. Z výsledných efektív je zrejmé, že východný región vedie v počte efektívnych miest podsystemu EES a postupne smerom na západ ich počet klesá, pričom v západnom regióne sa nenachádza žiadne mesto s efektivitou rovnou 1. Túto skutočnosť potvrdzuje aj priemerná efektivita pre tento podsystem, ktorá je najvyššia vo východnom regióne.

Opačný vývoj efektív možno zaznamenať pri podsysteme SS. Najvyššiu priemernú úroveň efektivity dosahuje západná oblasť a smerom na východ sa hodnota tejto efektivity znižuje, pričom vo východnom regióne sa nenachádza žiadne efektívne mesto zo sociálneho hľadiska.

Čo sa týka podsystemov všeobecne, možno vidieť, že modely identifikovali viac efektívnych miest z hľadiska podsystemu EES, konkrétne tretinu miest, v porovnaní s podsystemom SS, a to tri, resp. päť miest. Z tohto výsledku sa podľa [27] potvrdil fakt, že sa Čína všeobecne viac zameriava na ekonomiku a výrobu ako na sociálnu oblasť, kde investuje menej nákladov ako do produkcie.

Pri porovnaní dvoch prístupov k podsystemu SS, konkrétne nezávislého paralelného nastavenia v modeli (27) a jeho úpravy pridaním HDP ako vstupu v modeli (29), si možno všimnúť, že pri modeli (29) sme dostali efektivity vyššie alebo rovnaké v porovnaní s modelom (27). Je to odôvodnené tým, že sa podľa práce [9] uplatnilo pravidlo, že pridaním faktora do analýzy sa hodnoty efektív nezmenšia.

Na základe výsledných efektív možno rovnako ako v práci [27] vyvodit, že Čína má markantné regionálne rozdiely pri spravovaní produkcie, ochrane životného prostredia a sociálnom rozvoji. Mestá východného a centrálného regiónu preukazujú vyššie hodnoty

efektivít pod systému EES v porovnaní so západným regiónom. Na základe toho v práci [27] vyvodzujú, že tieto oblasti by sa mali viac zamerať na vývoj v sociálnej sfére, a tým zlepšiť spokojnosť obyvateľstva. Naopak, nižšie hodnoty efektív miest západného regiónu v pod systéme EES poukazujú na ich slabšie miesta, teda by mali podľa [27] venovať väčšiu pozornosť rozvoju ekonomiky, výroby a s nimi spojenej environmentálnej ochrany.

3 Návrh vlastného prístupu a modelov

Autori sa v práci [27] rozhodli na riešenie problému vychádzať zo spojenia dvoch multiplikatívnych modelov zlomkového programovania. Ich prístup má však značné obmedzenia.

Jeho použitie je možné iba pri technológiach odpovedajúcich konštantným výnosom z rozsahu. Pri tomto type výnosov do množiny produkčných možností M_{CRS} patrí ľubovoľný kladný násobok známych bodov (x, y) . To znamená, že pri vyhodnocovaní efektivity určitého producenta (x, y) ho nemusíme porovnávať s jemu blízkymi inými bodmi (blízkymi v zmysle podobne veľkých vstupov, resp. výstupov), ale s takými, ktoré nemusia reálne nastať. Máme tým na mysli rozhodovacie jednotky, ktoré pri daných vstupoch vyrobia niekoľkonásobne vyššie výstupy alebo dané výstupy vytvoria pri nízkych vstupoch. Z toho dôvodu pokladáme za vhodnejšie vykonávať analýzu pri variabilných výnosoch z rozsahu, ktoré vyhodnocujú efektivitu primeranejšie vďaka porovnávaniu s podobnými producentmi. Na to však nie je vhodný model zlomkového programovania použitý v práci [27], ktorý odpovedá CRS. Pokiaľ by sme chceli analyzovať aj pri VRS, výhodnejšie je používať obáľkové modely.

Ďalším nedostatkom je to, že prístup z práce [27] je založený na orientovanom modeli. V modeloch (24), (26), (28) šlo o vstupne orientované modely, ktoré sa zameriavali len na minimalizáciu vstupov. V prípade, ak by sme chceli maximalizovať žiaduce výstupy, museli by sme sa rozhodnúť pre výstupne orientovaný model, čím však prichádzame o možnosť optimalizácie vstupov. Orientované modely sú dosť obmedzujúce v prípade, ak by sme chceli minimalizovať vstupy a zároveň maximalizovať výstupy, preto by bolo vhodnejšie použiť iné modely umožňujúce takúto optimalizáciu.

Tretí nedostatok prístupu z práce [27] vidíme v možnostiach technickej realizácie prepojenia jednotlivých podsystémov. V prípade rovnocennej spolupráce podsystémov, v práci [27] uviedli model (30). Slabou stránkou tohto modelu je však závislosť na voľbe parametrov θ_1 a θ_2 . Ich výber nie je pevne daný, preto nevieme, či práve vybraný spôsob ich zvolenia bude ten najvhodnejší. Navyše, tento model je zložitou úlohou zlomkového programovania. Autori sa snažili takúto úlohu previesť pomocou štandardných postupov na úlohu lineárneho programovania, čo sa im však nie celkom podarilo a úloha ostala nelineárnou. Ak by podsystémy nespolupracovali rovnocenne, v práci [27] použili

ako nástroj na riešenie tohto problému tzv. bilevel programovanie. V obidvoch týchto prístupoch vznikajú problémy s preformulovaním problému do spoľahlivo riešiteľných problémov. Vzhľadom na vyššie uvedené výhrady ku prístupu k riešeniu problému autormi v [27], najmä k modelu (30) a bilevel programovaniu, sme sa rozhodli ďalej sa nimi nezaoberať a radšej sme sa sústredili na vhodnejšie nástroje, ktoré predstavíme v tejto kapitole. Bude členená na dve podkapitoly, a to na multiplikatívne a obáľkové modely. Multiplikatívny prístup bude zahŕňať vybrané modely z práce [27] a vlastný model k prepojeným podsystémom. Russellov model bude aplikovaný pri analýze dát obáľkovým prístupom, a to taktiež pri prepojených a neprepojených podsystémoch.

3.1 Multiplikatívne modely

3.1.1 Neprepojené modely

Pri aplikovaní dát sme sa na začiatku rozhodli zreprodukovať niektoré modely z práce [27]. Išlo konkrétne o modely (24), (26) a (28), ktoré sme uviedli v kapitole 2.2. Model (24) predstavuje optimalizačný problém podsystému EES, pri ktorom sa autori [27] snažili o minimalizáciu vstupov, a to kapitálu, práce a energie pri produkcii žiaduceho HDP a nežiaducich odpadov. Pri výpočtoch sme konkrétne použili normalizovaný model (25). Modely (26) a (28) sa vzťahujú na podsystém SS. Ich hlavným cieľom je rovnako ako v predošlom modeli minimalizácia vstupov. V prípade modelu (26) sú nimi fiškálne náklady a v modeli (28) je k nim zahrnutý aj hrubý domáci produkt. Ich normalizované modely (27) a (29) sme aplikovali pri zisťovaní efektívít jednotlivých miest. Na ich kalkuláciu nám poslužil matematický softvér Matlab, konkrétne funkcia *linprog*. Príslušné programové kódy sú uvedené v Prílohe A.

Tabuľka 2 zobrazuje vypočítané efektivity daných podsystémov; v prípade modelu (25) ide o označenie E_EES, efektivita modelu (27) je zapísaná ako E_SS1 a E_SS2 prislúcha modelu (29). Názornú ukážku toho, ako sa dajú tieto výsledky interpretovať ekonomicky, sme uviedli na základe záverov autorov [27] v podkapitole 2.2.4. Pri porovnávaní našich výsledných efektívít s výsledkami z práce [27] sme zistili pri niektorých mestách isté nezrovnalosti, teda si myslíme, že ich výsledky sú uvedené chybné. Správnosť našich výsledkov sme potvrdili aj využitím solvera [18].

Na pripomenutie, ako sme uviedli pri popise dát v podkapitole 2.2.3, všetky ďalšie

tabuľky budú mať jednotlivé výsledky modelov oddelené podľa lokality miest v Číne, a to na východný, centrálny a západný región.

Tabuľka 2: Efektivity multiplikatívnych neprepojených modelov

Mesto	E_EES	E_SS1	E_SS2
1 Beijing	1	0.847	0.847
2 Tianjin	1	0.7765	0.7765
3 Shijiazuang	0.4522	0.7081	0.7082
4 Shenyang	0.7288	0.624	0.6717
5 Shanghai	1	0.8653	0.8917
6 Nanjing	1	0.7	0.7037
7 Hangzhou	1	0.8062	0.8062
8 Fuzhou	0.7924	0.7014	0.7014
9 Jinan	1	0.8853	0.8853
10 Guangzhou	0.8235	0.8836	0.8873
11 Haikou	0.8066	0.793	0.793
PRIEMER	0.8730	0.7809	0.7884
12 Taiyuan	0.6527	1	1
13 Hohhot	0.8429	0.6962	0.6962
14 Changchun	0.6926	0.7521	0.7521
15 Harbin	1	0.7357	0.7487
16 Hefei	0.6129	0.8721	0.874
17 Nanchang	0.7409	0.7871	0.7871
18 Zhengzhou	1	0.9171	0.9171
19 Wuhan	1	0.8137	0.8137
20 Changsha	0.5731	0.7129	0.7157
21 Nanning	1	0.7195	1
PRIEMER	0.8115	0.8006	0.8305
22 Chongqing	0.532	0.8705	0.8705
23 Chengdu	0.7076	1	1
24 Guiyang	0.3829	0.9412	0.9559
25 Kunming	0.4759	0.8073	0.8397
26 Xi'an	0.7517	0.7318	0.7318
27 Lanzhou	0.4187	0.6535	0.6892
28 Xining	0.7742	0.7419	1
29 Yinchuan	0.5241	1	1
30 Urumqi	0.7906	0.8527	0.8527
PRIEMER	0.5953	0.8443	0.8822

3.1.2 Prepojené modely

Spoločným znakom modelov z predošlej časti bol fakt, že podsystémy jednotlivých miest považovali autori [27] za samostatne fungujúce celky, bez nejakého vzájomného ovplyvňovania sa. V tejto časti podkapitoly by sme chceli vytvoriť multiplikatívne modely, ktoré berú do úvahy skutočnosť, že tieto podsystémy môžu na seba navzájom vplývať. Najprv predstavíme model, v ktorom ekonomicko-environmentálny podsystém ovplyvňuje sociálny podsystém. Druhý model bude predstavovať opačnú variantu, a to vplyv podsystému SS na podsystém EES. Programové kódy k príslušným modelom sú obsiahnuté v Prílohe B.

Model EES $\rightarrow$ SS

V tomto modeli zoberieme na zreteľ vplyv podsystému EES na fungovanie podsystému SS. V prvom kroku vypočítame efektivity podsystému EES prostredníctvom modelu (25), ako sme vykonali pri neprepojených podsystémoch. Efektivity EES jednotlivých miest označíme E_o , $o = 1, \dots, n$. V druhom kroku budeme aplikovať model (29), v ktorom upravíme podmienky v ohraničeniach. Pridáme ohraničenia z modelu (25) a podmienku, aby účelová funkcia v (25) bola rovná vypočítanej hodnote v predošlom kroku. Takýmto spôsobom budeme optimalizovať podsystém SS na množine optimálnych váh modelu (25). Upravený model vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}
 & \max_{u,v,w,\pi,z} z^T g_o \\
 & \pi^T f_o + v^T y_o = 1 , \\
 & u^T x_o = 1 , \\
 & v^T y_o - w^T b_o = E_o , \\
 & z^T g_j - \pi^T f_j - v^T y_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n , \\
 & v^T y_j - w^T b_j - u^T x_j \leq 0 , \\
 & u \geq 0_m, \quad v \geq 0_s, \quad w \geq 0_p , \\
 & \pi \geq 0_K, \quad z \geq 0_D .
 \end{aligned} \tag{31}$$

Vypočítané efektivity budú uvedené spolu s výsledkami druhého prepojeného modelu v ďalšej časti našej práce.

Model SS → EES

Druhý prepojený model bude analyzovať vplyv sociálneho podsystemu na ekonomicko-environmentálny podsystem. Postup pri tvorbe modelu je analogický ako v predošlom prepojenom modeli. Prvý krok predstavuje výpočet efektívít podsystemu SS prostredníctvom neprepojeného multiplikatívneho modelu (29). Efektivity SS označíme E_o , $o = 1, \dots, n$. V druhom kroku budeme optimalizovať podsystem EES pomocou upraveného modelu (25). Pribudnú do neho ohraničenia z modelu (29) a podmienka rovnosti účelovej funkcie v (29) s jej vypočítanou hodnotou v prvom kroku. Nasledujúci model zahŕňa spomínané úpravy:

$$\begin{aligned}
& \max_{u,v,w,\pi,z} v^T y_o - w^T b_o \\
& u^T x_o = 1 , \\
& \pi^T f_o + v^T y_o = 1 , \\
& z^T g_o = E_o , \\
& v^T y_j - w^T b_j - u^T x_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n , \\
& z^T g_j - \pi^T f_j - v^T y_j \leq 0 , \\
& u \geq 0_m, \quad v \geq 0_s, \quad w \geq 0_p , \\
& \pi \geq 0_K, \quad z \geq 0_D .
\end{aligned} \tag{32}$$

Výsledky

Tabuľka 3 obsahuje výsledné efektivity prepojených multiplikatívnych modelov. Vidíme, že efektivity z druhého kroku sú v oboch modeloch výrazne nižšie oproti neprepojeným modelom, čo je spôsobené tým, že sme sprísnilí ohraničenia. Efektivity EES v druhom modeli vo viacerých prípadoch sú vykázané ako nulové, avšak nakoľko mali dlhší nulový desatinný rozvoj, tak vyšli nulové až po zaokrúhlení. Dá sa všimnúť, že v jednom prípade vyšla efektivita záporná. Výskyt záporných hodnôt nás v tomto prípade až tak neprekvapuje, pretože ohraničenosť účelovej funkcie nulou zdola, sme na rozdiel od predchádzajúceho prepojenia v tomto prepojení nevedeli dokázať.

Čo sa týka regiónov, pri porovnávaní priemerných efektívít kalkulovaných v druhom kroku sme zistili, že najvyššie efektivity dosahuje západný región, smerom na východ

klesajú, a to v oboch prepojených modeloch. Táto skutočnosť môže vypovedať to, že podsystemy jednotlivých miest západného regiónu majú medzi sebou najefektívnejšiu spoluprácu v porovnaní s ostatnými regiónmi.

Tabuľka 3: Efektivity multiplikatívnych prepojených modelov

	EES $\rightarrow$ SS		SS $\rightarrow$ EES	
Mesto	1. E_EES	2. E_SS	1. E_SS	2. E_EES
1 Beijing	1	0.0503	0.8470	0
2 Tianjin	1	0.0089	0.7765	0
3 Shijiazuang	0.4522	0.5148	0.7082	0.0572
4 Shenyang	0.7288	0.3404	0.6717	0.0307
5 Shanghai	1	0.0910	0.8917	0.0425
6 Nanjing	1	0.0854	0.7037	0.0499
7 Hangzhou	1	0.0793	0.8062	0
8 Fuzhou	0.7924	0.2493	0.7014	0
9 Jinan	1	0.0395	0.8853	0
10 Guangzhou	0.8235	0.2978	0.8873	0.0649
11 Haikou	0.8066	0.2733	0.7930	0
PRIEMER	0.8730	0.1846	0.7884	0.0223
12 Taiyuan	0.6527	0.6761	1	0.2776
13 Hohhot	0.8429	0.3109	0.6962	0
14 Changchun	0.6926	0.4938	0.7521	0
15 Harbin	1	0.1731	0.7487	0.0403
16 Hefei	0.6129	0.3515	0.8740	0.0488
17 Nanchang	0.7409	0.3216	0.7871	0
18 Zhengzhou	1	0.0200	0.9171	0
19 Wuhan	1	0.0635	0.8137	-0.0059
20 Changsha	0.5731	0.5639	0.7157	0.0321
21 Nanning	1	0.6800	1	0.9787
PRIEMER	0.8115	0.3654	0.8305	0.1372
22 Chongqing	0.532	0.5041	0.8705	0
23 Chengdu	0.7076	0.4358	1	0.1347
24 Guiyang	0.3829	0.8687	0.9559	0.0203
25 Kunming	0.4759	0.6331	0.8397	0.0437
26 Xi'an	0.7517	0.3648	0.7318	0
27 Lanzhou	0.4187	0.6817	0.6892	0.3957
28 Xining	0.7742	1	1	0.7742
29 Yinchuan	0.5241	1	1	0.5241
30 Urumqi	0.7906	0.5964	0.8527	0
PRIEMER	0.5953	0.6761	0.8822	0.2103

3.2 Obáľkové modely - Russellov model

Ako sme spomínali na začiatku tejto kapitoly pri vyhodnocovaní modelov použitých v práci [27], ich modely mali orientovaný charakter, a teda sa mohli zamerať len na optimalizáciu vstupov alebo len výstupov. Ak chceme optimalizovať vstupy a zároveň aj výstupy, vhodným nástrojom je Russellov model.

Pre pripomenutie obsahu dát, každá rozhodovacia jednotka, v tomto prípade mesto, sa skladá z dvoch podsystémov, a to ekonomicko-environmentálneho a sociálneho podsystému. Vstupy $x \in \mathbb{R}_+^3$ do podsystému EES tvorí kapitál, pracovná sila a energia. Žiaducim výstupom je HDP, v tomto prípade označovaný $y \in \mathbb{R}_+$ a nežiaduce výstupy $b \in \mathbb{R}_+^3$ tvoria odpady, a to tuhý odpad, odpadová voda a plyny. Do podsystému SS vstupuje HDP, predstavujúci prepojenie, a fiškálne náklady na verejné služby, označované ako $f \in \mathbb{R}_+$. Výstupy predstavujú stupne spokojnosti s verejnými službami, konkrétne so zdravotníctvom, školstvom, sociálnym bezpečím a zamestnanosťou. Značíme ich $g \in \mathbb{R}_+^3$.

3.2.1 Russellov model a neprepojené podsystémy

K multiplikatívnym neprepojeným modelom z predošlej podkapitoly sme si zaumienili zostaviť ich duálne modely, ktorých základom je obáľkový prístup k dátam. Vybrali sme spomínaný Russellov model, ktorý sme predstavili v kapitole 1.4. V nadchádzajúcej časti našej práce ho budeme aplikovať samostatne na každý z podsystémov, predstavíme príslušné modely a aj vypočítané výsledné efektivity. Pri výpočtoch bol použitý matematický softvér Matlab s doplnkom na riešenie konvexných úloh CVX. Príslušné programové kódy sú k nahliadnutiu v Prílohe C.

Russellov model - EES

Po uplatnení Russellovho obáľkového modelu na ekonomicko-environmentálny pod-systém sme dostali nasledovný model:

$$\begin{aligned}
\min_{\lambda, \theta, \phi} \quad & \frac{1}{7} \left(\sum_{i=1}^6 \theta_i + \frac{1}{\phi^y} \right) \\
& X\lambda \leq \theta^x \circ x_o, \\
& B\lambda \leq \theta^b \circ b_o, \\
& Y\lambda \geq \phi^y \circ y_o, \\
& \theta^x \leq \mathbf{e}_3, \quad \theta^b \leq \mathbf{e}_3, \\
& \phi^y \geq 1, \quad \lambda \geq 0_n,
\end{aligned} \tag{33}$$

pričom θ^x predstavuje trojrozmerný vektor skracovania vstupov podsystemu EES, θ^b trojrozmerný vektor skracovania nežiaducich výstupov podsystemu EES a ϕ^y je koeficient predlžovania žiaduceho výstupu podsystemu EES.

Tento model sa spája s nasledujúcou množinou produkčných možností pri konštantných výnosoch z rozsahu:

$$M_{CRS}^{EES} = \{(x, b, y) \mid X\lambda \leq x, B\lambda \leq b, Y\lambda \geq y, \lambda \geq 0_n\}. \tag{34}$$

Reformulácia modelu (33) na úlohu SDP nám umožní zistiť príslušnú celkovú, ako aj parciálne efektivity jednotlivých miest. Zaoberali sme sa ňou v podkapitole 1.4. Transformovaný model (33) vyzerá takto:

$$\begin{aligned}
\min_{\lambda, \theta, \phi, \psi} \quad & \frac{1}{7} \left(\sum_{i=1}^6 \theta_i + \psi^y \right) \\
& X\lambda \leq \theta^x \circ x_o, \\
& B\lambda \leq \theta^b \circ b_o, \\
& Y\lambda \geq \phi^y \circ y_o, \\
& \theta^x \leq \mathbf{e}_3, \quad \theta^b \leq \mathbf{e}_3, \\
& \phi^y \geq 1, \quad \lambda \geq 0_n, \\
& \begin{pmatrix} \phi^y & 1 \\ 1 & \psi \end{pmatrix} \succeq 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

Russellov model - SS1

V multiplikatívnom prístupe sme sa na základe [27] zaoberali dvomi modelmi sociálneho podsystemu, a to či bolo okrem fiškálnych nákladov zahrnuté HDP do vstupov podsystemu SS. V prvom prípade vstupy tvorili len fiškálne náklady a tento podsystem sme označili SS1. Jeho prislúchajúci Russellov model je nasledovný:

$$\begin{aligned}
\min_{\lambda, \theta, \phi} \quad & \frac{1}{4} \left(\theta^f + \sum_{r=1}^3 \frac{1}{\phi_r} \right) \\
& F\lambda \leq \theta^f \circ f_o , \\
& G\lambda \geq \phi^g \circ g_o , \\
& \theta^f \leq 1, \quad \phi^g \geq \mathbf{e}_3 , \\
& \lambda \geq 0_n ,
\end{aligned} \tag{36}$$

pričom θ^f je koeficientom skracovania fiškálnych nákladov ako vstupu do podsystemu SS1 a ϕ^g tvorí trojrozmerný vektor predlžovania výstupov podsystemu SS1.

Nasledujúca množina produkčných možností pri CRS prislúcha modelu (36):

$$M_{CRS}^{SS1} = \{(f, g) \mid F\lambda \leq f, \quad G\lambda \geq g, \quad \lambda \geq 0_n\} . \tag{37}$$

Transformovanú verziu modelu (36) na úlohu SDP predstavuje tento model:

$$\begin{aligned}
\min_{\lambda, \theta, \phi, \psi} \quad & \frac{1}{4} \left(\theta^f + \sum_{i=1}^3 \psi_r \right) \\
& F\lambda \leq \theta^f \circ f_o , \\
& G\lambda \geq \phi^g \circ g_o , \\
& \theta^f \leq 1, \quad \phi^g \geq \mathbf{e}_3 , \\
& \lambda \geq 0_n , \\
& \begin{pmatrix} \text{diag}(\phi^y) & I_3 \\ I_3 & \text{diag}(\psi) \end{pmatrix} \succeq 0 .
\end{aligned} \tag{38}$$

Russellov model - SS2

Sociálny podsystem, do ktorého vstupuje okrem fiškálnych nákladov aj HDP, sme označili SS2. Preň dostávame takýto Russellov model:

$$\begin{aligned}
\min_{\lambda, \theta, \phi} \quad & \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^2 \theta_i + \sum_{r=1}^3 \frac{1}{\phi_r} \right) \\
& F\lambda \leq \theta^f \circ f_o , \\
& Y\lambda \leq \theta^y \circ y_o , \\
& G\lambda \geq \phi^g \circ g_o , \\
& \theta^f \leq 1, \theta^y \leq 1 , \\
& \phi^g \geq \mathbf{e}_3, \lambda \geq 0_n ,
\end{aligned} \tag{39}$$

pričom θ^f predstavuje koeficient skracovania fiškálnych nákladov ako vstupu do pod-systému SS2, θ^y je koeficientom skracovania HDP ako vstupu do podsystemu SS2 a ϕ^g tvorí trojrozmerný vektor predlžovania výstupov podsystemu SS2.

Model (39) sa spája s nasledujúcou množinou produkčných možností pri CRS:

$$M_{CRS}^{SS2} = \{(f, y, g) \mid F\lambda \leq f, Y\lambda \leq y, G\lambda \geq g, \lambda \geq 0_n\} . \tag{40}$$

Po aplikácii reformulácie modelu (39) na úlohu SDP získame nasledujúci model:

$$\begin{aligned}
\min_{\lambda, \theta, \phi} \quad & \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^2 \theta_i + \sum_{r=1}^3 \psi_r \right) \\
& F\lambda \leq \theta^f \circ f_o , \\
& Y\lambda \leq \theta^y \circ y_o , \\
& G\lambda \geq \phi^g \circ g_o , \\
& \theta^f \leq 1, \theta^y \leq 1 , \\
& \phi^g \geq \mathbf{e}_3, \lambda \geq 0_n , \\
& \begin{pmatrix} \text{diag}(\phi^y) & I_3 \\ I_3 & \text{diag}(\psi) \end{pmatrix} \succeq 0 .
\end{aligned} \tag{41}$$

Výsledky

Na modely (35), (38) a (41) sme aplikovali dáta z práce [27] a Tabuľka 4 zobrazuje len celkové vypočítané efektivity daných podsystemov pre prehľadnejšie porovnanie s výsledkami multiplikatívnych neprepojených modelov. Pri ich porovnávaní sme došli k záveru, že mestá, ktoré boli efektívne v multiplikatívnom prístupe, zostali taktiež efektívne aj pri duálnom obáľkovom prístupe, čím sa potvrdila správnosť našich výsledkov, a teda efektivity v práci [27] nie sú všetky uvedené korektne.

Tabuľka 4: Efektivity neprepojených Russell modelov

Mesto	E_EES	E_SS1	E_SS2
1 Beijing	1	0.8404	0.7137
2 Tianjin	1	0.7974	0.6800
3 Shijiazuang	0.4793	0.7267	0.6661
4 Shenyang	0.5753	0.6775	0.6893
5 Shanghai	1	0.8409	0.7871
6 Nanjing	1	0.7494	0.6654
7 Hangzhou	1	0.8211	0.7433
8 Fuzhou	0.6612	0.7530	0.6871
9 Jinan	1	0.8845	0.7420
10 Guangzhou	0.6337	0.8804	0.7644
11 Haikou	0.7133	0.8004	0.6987
PRIEMER	0.8239	0.7974	0.7125
12 Taiyuan	0.5420	1	1
13 Hohhot	0.6514	0.7208	0.6645
14 Changchun	0.6554	0.7589	0.7253
15 Harbin	1	0.7765	0.6995
16 Hefei	0.6107	0.8904	0.7901
17 Nanchang	0.6387	0.7914	0.6895
18 Zhengzhou	1	0.8793	0.7654
19 Wuhan	1	0.8415	0.7197
20 Changsha	0.5084	0.7451	0.7400
21 Nanning	1	0.7412	1
PRIEMER	0.7607	0.8145	0.7794
22 Chongqing	0.4950	0.8724	0.7458
23 Chengdu	0.7116	1	1
24 Guiyang	0.4521	0.8735	0.8790
25 Kunming	0.4470	0.8276	0.7771
26 Xi'an	0.6900	0.7511	0.6820
27 Lanzhou	0.4738	0.6939	0.7899
28 Xining	0.4894	0.7720	1
29 Yinchuan	0.4378	1	1
30 Urumqi	0.5220	0.8346	0.8234
PRIEMER	0.5243	0.8472	0.8552

Nasledujúce tabuľky, a to Tabuľka 5, Tabuľka 6 a Tabuľka 7 prezentujú výsledky Russellových neprepojených modelov (35), (38) a (41). Pod označením $E_{x1}, \dots, E_{g3}$ rozumieme parciálne efektivity jednotlivých faktorov v daných modeloch. Tie predstavujú koeficienty skracovania, resp. prevrátené hodnoty koeficientov predlžovania daných faktorov v modeli.

Tabuľka 5: Russelov neprepojený model - EES

Mesto	Efektivita	E_{x1}	E_{x2}	E_{x3}	E_{b1}	E_{b2}	E_{b3}	E_y
1 Beijing	1	1	1	1	1	1	1	1
2 Tianjin	1	1	1	1	1	1	1	1
3 Shijiazuang	0.4793	0.3589	0.4554	0.4453	0.1261	0.8315	0.1381	1
4 Shenyang	0.5753	0.7557	0.7615	0.3486	0.1173	1	0.0442	1
5 Shanghai	1	1	1	1	1	1	1	1
6 Nanjing	1	1	1	1	1	1	1	1
7 Hangzhou	1	1	1	1	1	1	1	1
8 Fuzhou	0.6612	0.5572	0.8854	0.4665	0.2193	1	0.4997	1
9 Jinan	1	1	1	1	1	1	1	1
10 Guangzhou	0.6337	0.4416	0.7622	0.9225	0.3075	0.8218	0.1800	1
11 Haikou	0.7133	0.6163	0.6403	0.9543	0.4989	0.8088	0.4747	1
PRIEMER	0.8239	0.7936	0.8641	0.8307	0.6608	0.9511	0.6670	1
12 Taiyuan	0.5420	0.3789	0.4590	0.6527	0.3482	0.7392	0.2158	1
13 Hohhot	0.6514	0.5052	0.5815	0.8429	0.3217	0.9330	0.3754	1
14 Changchun	0.6554	0.3650	0.5103	0.8362	0.4052	0.7291	0.7421	1
15 Harbin	1	1	1	1	1	1	1	1
16 Hefei	0.6107	0.5659	0.6324	0.5614	0.2661	1	0.2491	1
17 Nanchang	0.6387	0.4245	0.7741	0.6713	0.3947	0.9581	0.2479	1
18 Zhengzhou	1	1	1	1	1	1	1	1
19 Wuhan	1	1	1	1	1	1	1	1
20 Changsha	0.5084	0.2952	0.3070	0.6919	0.2870	0.6583	0.3195	1
21 Nanning	1	1	1	1	1	1	1	1
PRIEMER	0.7607	0.6535	0.7264	0.8256	0.6023	0.9018	0.6150	1
22 Chongqing	0.4950	0.4677	0.4080	0.5320	0.1818	0.6692	0.2063	1
23 Chengdu	0.7116	0.3688	0.5085	0.8542	0.6731	0.8962	0.6804	1
24 Guiyang	0.4521	0.3265	0.4223	0.3229	0.1458	0.8626	0.0849	1
25 Kunming	0.4470	0.4894	0.4230	0.4655	0.1938	0.5084	0.0486	1
26 Xi'an	0.6900	0.4276	0.4969	0.9374	0.2955	1	0.6726	1
27 Lanzhou	0.4738	0.4115	0.4374	0.3210	0.1007	0.9303	0.1154	1
28 Xining	0.4894	0.3940	0.8090	0.2312	0.0717	0.8407	0.0795	1
29 Yinchuan	0.4378	0.3726	0.5476	0.3909	0.0818	0.5936	0.0783	1
30 Urumqi	0.5220	0.6834	0.8260	0.2250	0.0798	0.7551	0.0850	1
PRIEMER	0.5243	0.4379	0.5421	0.4756	0.2027	0.7840	0.2279	1

Tabuľka 6: Russellov neprepojený model - SS1

Mesto	Efektivita	E_f	E_g1	E_g2	E_g3
1 Beijing	0.8404	1	0.8856	0.6508	0.8252
2 Tianjin	0.7974	1	0.9197	0.6009	0.6691
3 Shijiazuang	0.7267	1	0.7822	0.4615	0.6629
4 Shenyang	0.6775	1	0.7217	0.5040	0.4841
5 Shanghai	0.8409	1	0.9698	0.5931	0.8006
6 Nanjing	0.7494	1	0.7921	0.5638	0.6417
7 Hangzhou	0.8211	1	0.8386	0.6579	0.7879
8 Fuzhou	0.7530	1	0.7454	0.5911	0.6755
9 Jinan	0.8845	1	0.9639	0.7371	0.8370
10 Guangzhou	0.8804	1	1	0.7359	0.7858
11 Haikou	0.8004	1	0.8681	0.5859	0.7477
PRIEMER	0.7974	1	0.8625	0.6075	0.7198
12 Taiyuan	1	1	1	1	1
13 Hohhot	0.7208	1	0.7534	0.4675	0.6623
14 Changchun	0.7589	1	0.8108	0.5072	0.7177
15 Harbin	0.7765	1	0.8312	0.5998	0.6752
16 Hefei	0.8904	1	0.9324	0.7956	0.8334
17 Nanchang	0.7914	1	0.8808	0.5555	0.7293
18 Zhengzhou	0.8793	1	1	0.6499	0.8672
19 Wuhan	0.8415	1	0.8992	0.7087	0.7582
20 Changsha	0.7451	1	0.7701	0.5310	0.6793
21 Nanning	0.7412	1	0.7986	0.4953	0.6710
PRIEMER	0.8145	1	0.8676	0.6310	0.7594
22 Chongqing	0.8724	1	1	0.7045	0.7851
23 Chengdu	1	1	1	1	1
24 Guiyang	0.8735	1	0.9677	0.5998	0.9263
25 Kunming	0.8276	1	0.9144	0.6568	0.7393
26 Xi'an	0.7511	1	0.8102	0.5102	0.6840
27 Lanzhou	0.6939	1	0.6983	0.4495	0.6278
28 Xining	0.7720	1	0.7895	0.5834	0.7150
29 Yinchuan	1	1	1	1	1
30 Urumqi	0.8346	1	0.9090	0.6087	0.8205
PRIEMER	0.8472	1	0.8988	0.6792	0.8109

Tabuľka 7: Russellov neprepojený model - SS2

Mesto	Efektivita	E_f	E_y	E_g1	E_g2	E_g3
1 Beijing	0.7137	1	0.0862	0.8373	0.7921	0.8529
2 Tianjin	0.6800	1	0.0958	0.8655	0.7450	0.6936
3 Shijiazuang	0.6661	1	0.3351	0.7362	0.5721	0.6871
4 Shenyang	0.6893	1	0.6408	0.6792	0.6249	0.5018
5 Shanghai	0.7871	1	0.4578	0.9127	0.7353	0.8299
6 Nanjing	0.6654	1	0.2174	0.7455	0.6990	0.6652
7 Hangzhou	0.7433	1	0.2950	0.7892	0.8157	0.8167
8 Fuzhou	0.6871	1	0.3008	0.7015	0.7328	0.7002
9 Jinan	0.7420	1	0.1573	0.9563	0.7557	0.8408
10 Guangzhou	0.7644	1	0.1643	0.9551	0.8957	0.8068
11 Haikou	0.6987	1	0.1749	0.8170	0.7264	0.7750
PRIEMER	0.7125	1	0.2659	0.8178	0.7359	0.7427
12 Taiyuan	1	1	1	1	1	1
13 Hohhot	0.6645	1	0.3475	0.7090	0.5796	0.6866
14 Changchun	0.7253	1	0.4906	0.7631	0.6288	0.7439
15 Harbin	0.6995	1	0.2720	0.7823	0.7436	0.6999
16 Hefei	0.7901	1	0.2226	0.8775	0.9864	0.8639
17 Nanchang	0.6895	1	0.1739	0.8290	0.6886	0.7559
18 Zhengzhou	0.7654	1	0.1831	0.9435	0.8032	0.8974
19 Wuhan	0.7197	1	0.0875	0.8463	0.8786	0.7860
20 Changsha	0.7400	1	0.6127	0.7248	0.6583	0.7041
21 Nanning	1	1	1	1	1	1
PRIEMER	0.7794	1	0.4390	0.8475	0.7967	0.8138
22 Chongqing	0.7458	1	0.1113	0.9563	0.8561	0.8054
23 Chengdu	1	1	1	1	1	1
24 Guiyang	0.8790	1	0.7805	0.9108	0.7435	0.9602
25 Kunming	0.7771	1	0.4445	0.8606	0.8142	0.7664
26 Xi'an	0.6820	1	0.3061	0.7625	0.6325	0.7090
27 Lanzhou	0.7899	0.9183	1	0.7157	0.6068	0.7086
28 Xining	1	1	1	1	1	1
29 Yinchuan	1	1	1	1	1	1
30 Urumqi	0.8234	1	0.6563	0.8555	0.7546	0.8505
PRIEMER	0.8552	0.9909	0.6998	0.8957	0.8231	0.8667

Tabuľka 8 zobrazuje kumulatívne parciálne efektivity, to znamená, že **E_X** označuje priemernú parciálnu efektivitu vstupov podsystemu EES, **E_B** predstavuje priemernú parciálnu efektivitu nežiaducich výstupov podsystemu EES a **E_G** je priemernou parciálnou efektivitou výstupov podsystemu SS1, resp. SS2.

Tabuľka 8: Kumulatívne parciálne efektivity - neprepojený Russellov model

	EES		SS1	SS2
Mesto	E_X	E_B	E_G	E_G
1 Beijing	1	1	0.7872	0.8274
2 Tianjin	1	1	0.7299	0.7680
3 Shijiazhuang	0.4199	0.3652	0.6355	0.6651
4 Shenyang	0.6220	0.3872	0.5699	0.6020
5 Shanghai	1	1	0.7878	0.8260
6 Nanjing	1	1	0.6659	0.7032
7 Hangzhou	1	1	0.7615	0.8072
8 Fuzhou	0.6364	0.5730	0.6707	0.7115
9 Jinan	1	1	0.8460	0.8509
10 Guangzhou	0.7088	0.4364	0.8406	0.8859
11 Haikou	0.7370	0.5941	0.7339	0.7728
12 Taiyuan	0.4969	0.4344	1	1
13 Hohhot	0.6432	0.5434	0.6278	0.6584
14 Changchun	0.5705	0.6254	0.6786	0.7119
15 Harbin	1	1	0.7021	0.7419
16 Hefei	0.5866	0.5051	0.8538	0.9093
17 Nanchang	0.6233	0.5336	0.7219	0.7578
18 Zhengzhou	1	1	0.8390	0.8814
19 Wuhan	1	1	0.7887	0.8369
20 Changsha	0.4314	0.4216	0.6601	0.6957
21 Nanning	1	1	0.6550	1
22 Chongqing	0.4692	0.3524	0.8298	0.8726
23 Chengdu	0.5772	0.7499	1	1
24 Guiyang	0.3572	0.3644	0.8313	0.8715
25 Kunming	0.4593	0.2503	0.7702	0.8137
26 Xi'an	0.6206	0.6560	0.6681	0.7013
27 Lanzhou	0.3900	0.3821	0.5919	0.6770
28 Xining	0.4781	0.3306	0.6960	1
29 Yinchuan	0.4370	0.2513	1	1
30 Urumqi	0.5781	0.3066	0.7794	0.8202

Čo sa týka Russellovho modelu (35) pre podsystém EES, z výsledkov v Tabuľke 5 sme zistili, že celková efektivita miest sa mení v závislosti od regiónov podobne ako vyjadrujú výsledky multiplikatívnych modelov. Najvyššiu efektivitu vykazujú mestá východného regiónu a smerom na západ sa ich hodnoty znižujú. Okrem toho model ponúka pohľad na stav jednotlivých faktorov prostredníctvom ich parciálnych efektív. Pre ne platí rovnako ako pri celkových efektivitách, teda najvyššie hodnoty parciálnych efektív patria mestám na východe a v západných mestách sú ich hodnoty najnižšie. Keď sa pozrieme bližšie na parciálne efektivity vstupov, zistili sme spoločný znak všetkých regiónov, a to, že spomedzi troch vstupov majú najnižšiu efektivitu E_{x1} , teda kapitál je najmenej efektívne využívaným vstupom. Pri pohľade na efektivity nežiaducich výstupov si môžeme všimnúť, že vo všetkých regiónoch dosahuje E_{b2} najvyššie hodnoty, čo znamená, že pri produkcii odpadových plynov si mestá vedú najlepšie, no ich slabou stránkou je vytváranie vysokého množstva odpadových vôd, o čom hovorí príslušná najnižšia efektivita E_{b1} . Pri produkcii žiaduceho výstupu HDP si všetky mestá počínajú dobre, nakoľko efektivity E_y sú všetky jednotkové.

Pri analýze výsledkov Russellovho modelu (38) pre SS1, resp. modelu (41) pre SS2 v Tabuľkách 6 a 7 sme mohli pozorovať ďalšie regionálne rozdiely. Pre celkové, ako aj parciálne efektivity jednotlivých faktorov platí opačná skutočnosť na rozdiel od podsystému EES, teda v mestách východného regiónu sú efektivity najnižšie a smerom na západ sa ich hodnoty zvyšujú. Pri pohľade na parciálne efektivity sme zistili, že fiškálne náklady tvoriace vstup do sociálneho podsystému sú efektívne vo všetkých mestách okrem jedného prípadu. Oba modely taktiež vykazujú, že vo všetkých regiónoch je najvyššia efektivita E_{g1} spojená so spokojnosťou obyvateľstva so zdravotnou starostlivosťou, no spokojnosť so základným vzdelaním je najnižšia, čo dokazuje súvisiaca nízka efektivita E_{g2} . Pri porovnaní modelov pre SS1 a SS2 pozorujeme vo väčšine miest nižšiu celkovú efektivitu v prípade SS2. Môže to byť spôsobené pridaním HDP ako vstupu do sociálneho podsystému, nakoľko parciálne efektivity prislúchajúce HDP majú pomerne nízke hodnoty. Napriek tomu, vplyv HDP na výstupy podsystému SS, teda na spokojnosť obyvateľov so službami je pozitívny, čo dokazuje Tabuľka 8 vyššími kumulatívnymi parciálnymi efektivitami E_G pre SS2 v porovnaní s E_G pre SS1. V tejto tabuľke sme si ešte mohli všimnúť v prípade podsystému EES, že kumulatívna

parciálna efektivita E_X je vo väčšine miest oproti kumulatívnej parciálnej efektivite E_B vyššia, čo môže znamenať lepšie hospodárenie so vstupmi EES v porovnaní s produkciou nežiaducich odpadov.

3.2.2 Russellov model a Network DEA

V aplikovaných dátach je medzi podsystémami vytvorené prepojenie prostredníctvom HDP, ktoré ako výstup podsystému EES je zároveň vstupom do podsystému SS. Ak chceme zobrať do úvahy toto prepojenie pri analýze a vytváraní modelov, z toho dôvodu je vhodné do Russellovho modelu zapojiť aj Network DEA.

Aplikovaný model má v tomto prípade nasledovný tvar

$$\begin{aligned}
\min_{\lambda^1, \lambda^2, \theta, \phi} \quad & \frac{1}{10} \left(\sum_{i=1}^7 \theta_i + \sum_{r=1}^3 \frac{1}{\phi_r} \right) \\
& X\lambda^1 \leq \theta^x \circ x_o, \\
& B\lambda^1 \leq \theta^b \circ b_o, \\
& Y\lambda^1 = y_o, \\
& Y\lambda^2 = y_o, \\
& F\lambda^2 \leq \theta^f \circ f_o, \\
& G\lambda^2 \geq \phi^g \circ g_o, \\
& \mathbf{e}^T \lambda^1 = 1, \lambda^1 \geq 0_n, \\
& \mathbf{e}^T \lambda^2 = 1, \lambda^2 \geq 0_n, \\
& \theta^x \leq \mathbf{e}_3, \theta^b \leq \mathbf{e}_3, \\
& \theta^f \leq 1, \phi^g \geq \mathbf{e}_3,
\end{aligned} \tag{42}$$

pričom θ^x predstavuje trojrozmerný vektor skracovania vstupov podsystému EES, θ^b trojrozmerný vektor skracovania nežiaducich výstupov podsystému EES, θ^f je koeficientom skracovania fiškálnych nákladov ako vstupu do podsystému SS a ϕ^g tvorí trojrozmerný vektor predlžovania výstupov podsystému SS.

Tento model sa spája s nasledujúcou množinou produkčných možností pri variabil-

ných výnosoch z rozsahu:

$$\begin{aligned} M_{VRS}^{R-NDEA} = \{ & (x, b, y), (f, g, y) \mid X\lambda^1 \leq x, \ B\lambda^1 \leq b, \\ & F\lambda^2 \leq f, \ G\lambda^2 \geq g, \ y = Y\lambda^1, \ y = Y\lambda^2, \\ & \lambda^1 \geq 0_n, \ \lambda^2 \geq 0_n, \ \mathbf{e}^T \lambda^1 = 1, \ \mathbf{e}^T \lambda^2 = 1 \} . \end{aligned} \quad (43)$$

V prípade, ak by sme pracovali s konštantnými výnosmi z rozsahu, z modelu (42) a množiny (43) by boli podmienky

$$\mathbf{e}^T \lambda^1 = 1 \text{ a } \mathbf{e}^T \lambda^2 = 1$$

vynechané.

Ak chceme zistiť efektivity jednotlivých miest, prípadne efektivity ich podsystémov, model (42) je potrebné pri výpočtoch reformulovať na úlohu SDP. Nasledujúci model predstavuje transformovanú SDP verziu modelu (42):

$$\begin{aligned} \min_{\lambda^1, \lambda^2, \theta, \phi} \quad & \frac{1}{10} \left(\sum_{i=1}^7 \theta_i + \sum_{r=1}^3 \psi_r \right) \\ & X\lambda^1 \leq \theta^x \circ x_o , \\ & B\lambda^1 \leq \theta^b \circ b_o , \\ & Y\lambda^1 = y_o , \\ & Y\lambda^2 = y_o , \\ & F\lambda^2 \leq \theta^f \circ f_o , \\ & G\lambda^2 \geq \phi^g \circ g_o , \\ & \mathbf{e}^T \lambda^1 = 1, \ \lambda^1 \geq 0_n , \\ & \mathbf{e}^T \lambda^2 = 1, \ \lambda^2 \geq 0_n , \\ & \theta^x \leq \mathbf{e}_3, \ \theta^b \leq \mathbf{e}_3 , \\ & \theta^f \leq 1, \ \phi^g \geq \mathbf{e}_3 , \\ & \begin{pmatrix} \text{diag}(\phi) & I_3 \\ I_3 & \text{diag}(\psi) \end{pmatrix} \succeq 0 . \end{aligned} \quad (44)$$

Výsledky

Nasledujúce tabuľky, konkrétne Tabuľka 9 a Tabuľka 10, zobrazujú vypočítanú celkovú, ako aj parciálne efektivity jednotlivých miest pri konštantných aj variabilných výnosoch z rozsahu. Príslušné programové kódy obsahuje Príloha D.

Tabuľka 9: Russell model a Network DEA - CRS

Mesto	Efektivita	E_x1	E_x2	E_x3	E_b1	E_b2	E_b3	E_f	E_g1	E_g2	E_g3
1 Beijing	0.9618	1	1	1	1	1	1	1	0.9071	0.7865	0.9240
2 Tianjin	0.9339	1	1	1	1	1	1	1	0.9349	0.6820	0.7224
3 Shijiazuang	0.5271	0.3589	0.4554	0.4453	0.1261	0.8315	0.1381	1	0.7757	0.4739	0.6661
4 Shenyang	0.5804	0.7557	0.7615	0.3486	0.1173	1	0.0442	1	0.6891	0.5903	0.4973
5 Shanghai	0.9410	1	1	1	1	1	1	1	0.9413	0.6544	0.8145
6 Nanjing	0.9021	1	1	1	1	1	1	1	0.7815	0.5846	0.6549
7 Hangzhou	0.9286	1	1	1	1	1	1	1	0.8388	0.6590	0.7887
8 Fuzhou	0.6641	0.5572	0.8854	0.4665	0.2193	1	0.4997	1	0.7454	0.5914	0.6757
9 Jinan	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10 Guangzhou	0.7016	0.4416	0.7622	0.9225	0.3075	0.8218	0.1800	1	1	0.7719	0.8085
11 Haikou	0.7244	0.6163	0.6403	0.9543	0.4989	0.8088	0.4747	1	0.8628	0.6168	0.7706
PRIEMER	0.8059	0.7936	0.8641	0.8307	0.6608	0.9511	0.6670	1	0.8615	0.6737	0.7566
12 Taiyuan	0.6794	0.3789	0.4590	0.6527	0.3482	0.7392	0.2158	1	1	1	1
13 Hohhot	0.6456	0.5052	0.5815	0.8429	0.3217	0.9330	0.3754	1	0.7449	0.4846	0.6666
14 Changchun	0.6671	0.3650	0.5103	0.8362	0.4052	0.7291	0.7421	1	0.7839	0.5672	0.7318
15 Harbin	0.9113	1	1	1	1	1	1	1	0.8167	0.6131	0.6830
16 Hefei	0.6866	0.5659	0.6324	0.5614	0.2661	1	0.2491	1	0.9350	0.8118	0.8438
17 Nanchang	0.6683	0.4245	0.7741	0.6713	0.3947	0.9581	0.2479	1	0.8612	0.5937	0.7571
18 Zhengzhou	0.9564	1	1	1	1	1	1	1	0.9863	0.6847	0.8934
19 Wuhan	0.9564	1	1	1	1	1	1	1	0.9162	0.8196	0.8277
20 Changsha	0.5610	0.2952	0.3070	0.6919	0.2870	0.6583	0.3195	1	0.7367	0.6175	0.6971
21 Nanning	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
PRIEMER	0.7732	0.6535	0.7264	0.8256	0.6023	0.9018	0.6150	1	0.8781	0.7192	0.8101
22 Chongqing	0.6085	0.4677	0.4080	0.5320	0.1818	0.6692	0.2063	1	1	0.7837	0.8358
23 Chengdu	0.7981	0.3688	0.5085	0.8542	0.6731	0.8962	0.6804	1	1	1	1
24 Guiyang	0.5761	0.3265	0.4223	0.3229	0.1458	0.8626	0.0849	1	0.9174	0.7223	0.9559
25 Kunming	0.5489	0.4894	0.4230	0.4655	0.1938	0.5084	0.0486	1	0.8891	0.7202	0.7514
26 Xian	0.6835	0.4276	0.4969	0.9374	0.2955	1	0.6726	1	0.8095	0.5114	0.6843
27 Lanzhou	0.5266	0.4115	0.4374	0.3210	0.1007	0.9303	0.1154	0.9183	0.7157	0.6068	0.7086
28 Xining	0.6426	0.3940	0.8090	0.2312	0.0717	0.8407	0.0795	1	1	1	1
29 Yinchuan	0.6065	0.3726	0.5476	0.3909	0.0818	0.5936	0.0783	1	1	1	1
30 Urumqi	0.6080	0.6834	0.8260	0.2250	0.0798	0.7551	0.0850	1	0.8671	0.7155	0.8435
PRIEMER	0.6221	0.4379	0.5421	0.4756	0.2027	0.7840	0.2279	0.9909	0.9110	0.7844	0.8644

Tabulka 10: Russell model a Network DEA - VRS

Mesto	Efektivita	E_x1	E_x2	E_x3	E_b1	E_b2	E_b3	E_f	E_g1	E_g2	E_g3
1 Beijing	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2 Tianjin	0.9465	1	1	1	1	1	1	0.9444	1	0.7447	0.7755
3 Shijiazhuang	0.6119	0.4053	0.5600	0.4496	0.1262	0.8810	0.1222	0.7931	1	0.8481	0.9336
4 Shenyang	0.7341	0.9127	1	0.6662	0.4867	1	0.1488	0.7312	0.9568	0.7641	0.6741
5 Shanghai	0.9456	1	1	1	1	1	1	0.9665	0.9758	0.6723	0.8417
6 Nanjing	0.9451	1	1	1	1	1	1	0.8003	1	0.7896	0.8608
7 Hangzhou	0.9552	1	1	1	1	1	1	0.8513	0.9866	0.7818	0.9322
8 Fuzhou	0.7628	0.8300	1	0.6323	0.2807	1	0.4654	0.7655	0.9760	0.7859	0.8921
9 Jinan	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10 Guangzhou	0.7177	0.4705	0.8507	0.9270	0.3076	0.8466	0.1695	1	1	0.7854	0.8194
11 Haikou	0.7760	0.6468	0.6967	0.9579	0.4991	0.8272	0.4538	0.8627	1	0.8247	0.9910
PRIEMER	0.8541	0.8423	0.9189	0.8757	0.7	0.9595	0.6691	0.8832	0.9905	0.8179	0.8837
12 Taiyuan	0.7050	0.4124	0.5808	0.6884	0.3394	0.8492	0.1796	1	1	1	1
13 Hohhot	0.7108	0.6251	0.7234	0.9594	0.3004	1	0.2792	0.7719	0.9770	0.6101	0.8620
14 Changchun	0.7525	0.4488	0.7182	0.8504	0.4058	0.8062	0.5906	0.8296	1	0.9316	0.9441
15 Harbin	0.9556	1	1	1	1	1	1	0.8325	1	0.8503	0.8733
16 Hefei	0.7239	0.6673	0.7626	0.5514	0.2727	1	0.2391	0.9442	1	0.8915	0.9105
17 Nanchang	0.7002	0.4483	0.8512	0.6741	0.3948	0.9829	0.2355	0.8987	1	0.6694	0.8467
18 Zhengzhou	0.9592	1	1	1	1	1	1	1	1	0.6901	0.9023
19 Wuhan	0.9740	1	1	1	1	1	1	0.9185	0.9999	0.9101	0.9115
20 Changsha	0.6326	0.3829	0.4690	0.7072	0.2876	0.7484	0.2350	0.7604	1	0.8175	0.9179
21 Nanning	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
PRIEMER	0.8114	0.6985	0.8105	0.8431	0.6001	0.9387	0.5759	0.8956	0.9977	0.8371	0.9168
22 Chongqing	0.6505	0.4746	0.4262	0.5369	0.1811	0.6859	0.2005	1	1	1	1
23 Chengdu	0.8042	0.3881	0.5560	0.8575	0.6733	0.9180	0.6486	1	1	1	1
24 Guiyang	0.7342	0.4949	0.6998	0.5471	0.4216	1	0.1787	1	1	1	1
25 Kunming	0.6221	0.4516	0.5336	0.5720	0.1665	0.7005	0.0286	0.9330	1	0.9873	0.8481
26 Xian	0.7201	0.5307	0.6103	0.9667	0.2930	1	0.5595	0.8387	0.9672	0.6145	0.8206
27 Lanzhou	0.6747	0.8335	0.8796	0.3461	0.1006	1	0.0530	0.6870	1	0.8873	0.9600
28 Xining	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
29 Yinchuan	0.8184	0.7330	1	0.8679	0.4611	0.7480	0.3737	1	1	1	1
30 Urumqi	0.9597	1	1	1	1	1	1	0.8934	0.9752	0.7867	0.9415
PRIEMER	0.7760	0.6563	0.7451	0.7438	0.4775	0.8947	0.4492	0.9280	0.9936	0.9195	0.9522

Tabuľka 11 zobrazuje kumulatívne parciálne efektivity jednotlivých faktorov v prepojenom Russellovom modeli s Network DEA, a to samostatne pre konštantné, ako aj variabilné výnosy z rozsahu. Značenie je analogické ako pri neprepojených Russellových modeloch, teda E_X je priemernou parciálnou efektivitou vstupov do pod systému EES, E_B predstavuje priemernú parciálnu efektivitu nežiaducich výstupov pod systému EES a E_G zobrazuje priemernú parciálnu efektivitu výstupov pod systému SS.

Tabuľka 11: Kumulatívne parciálne efektivity - Russell model a Network DEA

	CRS			VRS		
Mesto	E_X	E_B	E_G	E_X	E_B	E_G
1 Beijing	1	1	0.8726	1	1	1
2 Tianjin	1	1	0.7798	1	1	0.8401
3 Shijiazuang	0.4199	0.3652	0.6385	0.4716	0.3765	0.9272
4 Shenyang	0.6220	0.3872	0.5923	0.8596	0.5452	0.7983
5 Shanghai	1	1	0.8034	1	1	0.8300
6 Nanjing	1	1	0.6736	1	1	0.8835
7 Hangzhou	1	1	0.7621	1	1	0.9002
8 Fuzhou	0.6364	0.5730	0.6709	0.8208	0.5820	0.8847
9 Jinan	1	1	1	1	1	1
10 Guangzhou	0.7088	0.4364	0.8602	0.7494	0.4412	0.8683
11 Haikou	0.7370	0.5941	0.7501	0.7671	0.5934	0.9386
12 Taiyuan	0.4969	0.4344	1	0.5605	0.4561	1
13 Hohhot	0.6432	0.5434	0.6320	0.7693	0.5265	0.8164
14 Changchun	0.5705	0.6254	0.6943	0.6724	0.6009	0.9586
15 Harbin	1	1	0.7043	1	1	0.9079
16 Hefei	0.5866	0.5051	0.8635	0.6604	0.5039	0.9340
17 Nanchang	0.6233	0.5336	0.7373	0.6579	0.5377	0.8387
18 Zhengzhou	1	1	0.8548	1	1	0.8642
19 Wuhan	1	1	0.8545	1	1	0.9405
20 Changsha	0.4314	0.4216	0.6838	0.5197	0.4237	0.9118
21 Nanning	1	1	1	1	1	1
22 Chongqing	0.4692	0.3524	0.8732	0.4793	0.3558	1
23 Chengdu	0.5772	0.7499	1	0.6006	0.7466	1
24 Guiyang	0.3572	0.3644	0.8652	0.5806	0.5334	1
25 Kunming	0.4593	0.2503	0.7869	0.5191	0.2985	0.9451
26 Xian	0.6206	0.6560	0.6684	0.7026	0.6175	0.8008
27 Lanzhou	0.3900	0.3821	0.6770	0.6864	0.3845	0.9491
28 Xining	0.4781	0.3306	1	1	1	1
29 Yinchuan	0.4370	0.2513	1	0.8670	0.5276	1
30 Urumqi	0.5781	0.3066	0.8087	1	1	0.9011

Pri vyhodnocovaní Russelových modelov so zapojením Network DEA v prípade konštantných, ako aj variabilných výnosoch z rozsahu sme prišli na viaceré spoločné závery týchto modelov. Rovnako, ako pri predošlých modeloch, aj tu platí závislosť hodnoty efektívít od regiónu, v ktorom sa dané mesto nechádza.

V prípade pod systému EES sú najefektívnejšími mestami mestá východného regiónu, zatiaľ čo na západe sú efektivity najnižšie, čo môžeme vidieť na príslušných parciálnych efektívítach. V oboch prípadoch, CRS aj VRS, vidíme, že najmenej efektívne je využitý vstup x_1 , ktorým je kapitál. Najvyššie efektivity dosahovala pracovná sila x_2 v západnom a východnom regióne, pričom v centrálnej oblasti to boli energie x_3 . Pri produkcii nežiaducich odpadov si v oboch modeloch všetky regióny najlepšie počínali s odpadovými plynmi, o čom svedčí najvyššia priemerná efektivita E_b2 medzi všetkých príslušných parciálnych efektívít. Model s CRS poukazuje na najväčšie nedostatky pri produkcii odpadových vôd vo všetkých troch regiónoch, zatiaľ čo v modeli pri VRS je ním tvorba tuhého odpadu, čo vyjadruje nízka hodnota E_b1 pri CRS, resp. E_b3 pri VRS.

Pre pod systém SS nastáva opačný vývoj efektívít v rámci regiónov v porovnaní s pod systémom EES. To znamená, že východný región má príslušné parciálne efektivity najnižšie a smerom na západ sa dané efektivity zvyšujú. V prípade CRS aj VRS platí pre výstupy, že najvyššia dosahovaná efektivita E_g1 je spojená so spokojnosťou so zdravotnou starostlivosťou a spokojnosť so základným vzdelaním vykazuje najnižšie hodnoty efektívít E_g2 vo všetkých regiónoch. Čo sa fiškálnych nákladov týka, v prípade CRS boli efektívne takmer vo všetkých mestách s výnimkou jedného, no pri VRS dosahovali vo viacerých prípadoch nižšie hodnoty.

Keď sa pozrieme na celkové výsledné efektivity miest, bez ohľadu na typ výnosov z rozsahu, mestá východného regiónu dosahujú najvyššie efektivity, centrálny región ich má o niečo nižšie a najnižšie efektivity prislúchajú mestám v západnej oblasti. Napriek tomu, že práve západné mestá boli zo sociálneho hľadiska najefektívnejšie, na celkovú efektivitu to nemalo až taký vplyv. Z tohto výsledku sa opäť potvrdil fakt, že Čína sa viac zameriava na výrobu v porovnaní so sociálnou oblasťou, teda aj vplyv pod systému EES na celkovú efektivitu je väčší ako vplyv pod systému SS.

Porovnaním Russelových modelov s Network DEA počítaných pri variabilných aj

konštantných výnosoch z rozsahu sme zistili, že efektivity, či celkové, ako aj parciálne, sú pri VRS vo väčšine prípadov vyššie ako pri CRS. Táto skutočnosť je celkovo zrejmá, nakoľko pri VRS porovnávame dané mesto s inými jemu blízkymi mestami (blízkosťou tým máme na mysli podobne veľké vstupy, resp. výstupy), čím efektivity sú lepšie vyhodnocované a vďaka tomu aj výsledná analýza môže ponúkať pri VRS virohodnejšie výsledky v porovnaní s multiplikatívnymi modelmi.

Záver

V našej práci sme sa zaoberali témou udržateľnosti, postojom DEA odborníkov k tejto oblasti a hlavne tvorbou a návrhmi nových modelov riešiacich tento pomerne nedávny problém vo svete. Následne sme na modely aplikovali reálne dáta.

V prvej kapitole sme stručne uviedli, čím sa DEA zaoberá a zaviedli sme označenia, ktoré sme používali následne v práci. Pripomenuli sme, čo predstavuje základný zlomkový model v multiplikatívnej, ako aj obáľkovej verzii. Okrem známych modelov sme vysvetlili menej tradičný Russellov model, patriaci k nelineárnym modelom, ktoré sú skôr nezvyčajné v DEA a rovnako sme ozrejmili aj jeho reformuláciu na úlohu konvexného programovania, čím sa riešenie značne uľahčilo. Ďalšou z menej známych oblastí, ktorú sme priblížili, je Network DEA, ktorá postupne nachádza svoje miesto pri analýze celkových, ako aj parciálnych efektívít viacstupňových modelov.

Druhú kapitolu sme venovali téme udržateľnosti, čo predstavuje v dnešnom svete a hlavne ako sa ňou zaoberajú odborníci z oblasti DEA. Na túto tému existuje značné množstvo prác z DEA, ako je možné vidieť v prehľadovej časti, v ktorej sme spomenuli aspoň pár z nich. Na podrobnejšiu analýzu sme si vybrali prácu [27], ktorá sa venuje problému udržateľnosti čínskych miest. V ďalšej časti tejto kapitoly vysvetľujeme podľa [27] ako je každé z miest tvorené dvoma podsystémami, a to ekonomicko-environmentálnym a sociálnym. Predstavili sme niektoré z prístupov a modelov, ktoré navrhli autori práce [27] na riešenie tohto problému.

Tretia kapitola bola zameraná na návrh vlastného prístupu a tvorbu nových modelov. Modely sme rozdelili na multiplikatívny a obáľkový prístup a každý z nich zahŕňal prepojené aj neprepojené modely, podľa vzájomného vzťahu podsystémov. Multiplikatívne neprepojené modely predstavovali vybrané modely z práce [27]. Prepojené modely sme vytvorili na základe predošlých neprepojených verzií pridaním ďalších ohrazení. Ich výsledkom je analýza vplyvu jedného podsystému na druhý a zistenie, ako efektívne vzájomne spolupracujú. Multiplikatívny prístup bolo možné použiť len pri konštantných výnosoch z rozsahu. Z toho dôvodu sme hľadali aj iné riešenia umožňujúce použitie aj pri variabilných výnosoch z rozsahu, preto sme na tvorbu ďalších modelov vybrali obáľkovú verziu Russellovho modelu. Ďalšou výhodou tohto modelu predstavuje rozsiahlosť výsledkov, ktoré vytvára. Okrem celkovej efektivity kalkuluje aj parciálne

efektivity jednotlivých faktorov v danom systéme, čím ponúka podrobnejšiu analýzu konkrétného problému. V prípade prepojenia podsystémov EES a SS sme do Russellovho modelu zapojili Network DEA, čím sme vytvorili jeden model, ktorý dokázal analyzovať oba systémy naraz, čo tiež prináša výhodu v podobe ušetreného času pri analýze v porovnaní s neprepojenými modelmi. Všetky uvedené modely sme aplikovali na reálnych dátach z Tabuľky 1, ktorých zdrojom bol článok [27]. Jednotlivé modely sme naprogramovali v prostredí matematického softvéru Matlab a pri Russellových modeloch sme použili aj doplnok CVX na riešenie konvexných úloh. Všetky numerické výsledky z našich naprogramovaných kódov sú uvedené v Tabuľkách 2-11. Príslušné kódy sú zahrnuté v prílohe.

Naša práca vytvára prínos vo viacerých smeroch. V prvom rade spracúva prehľad vybraných prác z oblasti DEA zaoberajúcich sa udržateľnosťou. Hlavný prínos však spočíva predovšetkým vo využití nelineárneho Russellovho modelu na takéto prepojené systémy, ktoré v našom prípade predstavujú podsystémy EES a SS. Tento model prináša oproti tradičným lineárnym modelom viacero výhod. Chceme poukázať najmä na jeho schopnosť rovnocenne narábať s jednotlivými faktormi určitého systému, či už sú to vstupy, výstupy alebo nežiaduce výstupy. Okrem toho dokáže poskytovať čiastočné agregované výsledky vypočítané z parciálnych efektívít daných faktorov.

Možným rozšírením tejto práce je vyhľadanie obdobných slovenských, prípadne stredoeurópskych dát, ktoré by boli následne aplikované na vytvorených modeloch.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Avkiran, N. K., Tone, K., Tsutsui, M.: *Bridging radial and non-radial measures of efficiency in DEA*, Annals of Operations Research 164 (2008), Issue 1, 127-138
- [2] *China Statistical Yearbook*, 2012, dostupné na internete (12.1.2020): <http://www.stats.gov.cn/tjsj/ndsj/2012/indexeh.htm>
- [3] Cook, W. D. et al: *Network DEA: Additive efficiency decomposition*, European Journal of Operational Research 207 (2010), 1122–1129
- [4] Cooper, W.W., Seiford, L. M., Tone, K.: *Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, 2nd edition, Springer, New York, 2007
- [5] Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K.: *The Measurement of Efficiency of Production*, Springer Science+Business Media, New York, 1985
- [6] Fukuyama, H., Matousek, R., Tzeremes, N. G.: *A Nerlovian cost inefficiency two-stage DEA model for modeling banks' production process: Evidence from the Turkish banking system*, Omega, dostupné na internete (14.4.2020): <https://doi.org/10.1016/j.omega.2020.102198>
- [7] Galán-Martína, Á. et al: *Enhanced data envelopment analysis for sustainability assessment: A novel methodology and application to electricity technologies*, Computers and Chemical Engineering 90 (2016), 188–200
- [8] Grižáková, L.: *Metóda krížovej efektivity v obálkovej analýze dát*, bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2019
- [9] Halická, M.: *DEA modely*, učebné texty, FMFI UK, Bratislava, 2015, dostupné na internete (12.11.2019): <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/halicka/teach/DEAskripta.pdf>
- [10] Halická, M., Trnovská, M.: *The Russell measure model: Computational aspects, duality and profit efficiency*, European Journal of Operational Research 268 (2018), 386-397

- [11] Halkos, G., Petrou K. N.: *Treating undesirable outputs in DEA: A critical review*, Economic Analysis and Policy 62 (2019), 97-104
- [12] Ji, X., Li, G., Wang, Z.: *Impact of emission regulation policies on Chinese power firms' reusable environmental investments and sustainable operations*, Energy Policy 108 (2017), 163–177
- [13] Kao, Ch.: *Network Data Envelopment Analysis: Foundations and Extensions*, Springer, Cham, 2017
- [14] Khodakarami, M. et al: *Developing distinctive two-stage data envelopment analysis models: An application in evaluating the sustainability of supply chain management*, Measurement 70 (2015), 62–74
- [15] Liu, X. et al: *How public environmental concern affects the sustainable development of Chinese cities: An empirical study using extended DEA models*, Journal of Environmental Management 251 (2019), 109619
- [16] Maghbouli, M., Amirteimoori A., Kordrostami, S.: *Two-stage network structures with undesirable outputs: A DEA based approach*, Measurement 48 (2014), 109–118
- [17] Lombardi, G. V. et al: *The sustainability of the Italian water sector: An empirical analysis by DEA*, Journal of Cleaner Production 227 (2019), 1035-1043
- [18] Profantov DEA solver, http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/projekty/profant/in_mat_octave.php
- [19] Sueyoshi, T., Goto, M.: *Environmental assessment for corporate sustainability by resource utilization and technology innovation: DEA radial measurement on Japanese industrial sectors*, Energy Economics 46 (2014), 295–307
- [20] Sueyoshi, T., Goto, M.: *The intermediate approach to sustainability enhancement and scale-related measures in environmental assessment*, European Journal of Operational Research 276 (2019), 744–756
- [21] Sueyoshi, T., Sekitani, K.: *Computational strategy for Russell measure in DEA: Second-order cone programming*, European Journal of Operational Research 180 (2007), 459-471

- [22] Sueyoshi, T., Yuan Y.: *Social sustainability measured by intermediate approach for DEA environmental assessment: Chinese regional planning for economic development and pollution prevention*, Energy Economics 66 (2017), 154–166
- [23] Thies, Ch. et al: *Operations research for sustainability assessment of products: A review*, European Journal of Operational Research 274 (2019), 1–21
- [24] Tone, K., Tsutsui, M.: *Network DEA: A slacks-based measure approach*, European Journal of Operational Research 197 (2009), 243-252
- [25] *What is Sustainability and Why Is It Important?*, dostupné na internete (13.1.2020): <https://www.environmentalscience.org/sustainability>
- [26] *Worldometer, svetová populácia podľa rokov*, dostupné na internete (10.1.2020): <https://www.worldometers.info/world-population/world-population-by-year/>
- [27] Zhao, L., Zhuang, Y., Liang, L.: *Data envelopment analysis for sustainability evaluation in China: Tackling the economic, environmental and social dimensions*, European Journal of Operational Research 275 (2019), 1083-1095
- [28] Zhou, H. et al.: *Data envelopment analysis in sustainability: The origins, development and future directions*, European Journal of Operational Research 264 (2018), 1-16

Prílohy

Zdrojové kódy

Príslušné zdrojové kódy boli zostavené v matematickom softvéri Matlab. V Prílohe C a v Prílohe D bol v Matlabe použitý doplnok CVX na riešenie konvexných úloh.

PRÍLOHA A - Multiplikatívne neprepojené modely

- Model EES

```
%načítanie dát

[num, txt] = xlsread('D:\Diplomová práca\mestá.xlsx');

data = num(:,4:14); %numerické dáta
text = txt(2:end,2); %názvy miest

%EES vstupy - kapitál, práca, energia
X1 = data(:,1);
X2 = data(:,2);
X3 = data(:,3);
X = [X1 X2 X3];

%EES žiaduci výstup - HDP
Y = data(:,4);

% EES nežiaduce výstupy - odpady
B1 = data(:,5); %odpadová voda
B2 = data(:,6); %odpadový plyn
B3 = data(:,7); %tuhý odpad
B = [B1 B2 B3];

n = length(Y); %počet DMU
M = zeros(n,8); %inicializácia matice na zápis výsledkov

%optimalizácia
for i=1:n
    x0 = X(i,:);
    y0 = Y(i);
```

```
b0 = B(i,:);
A = [-X Y -B];
b = zeros(n,1);
Aeq = [x0 zeros(1,4)];
beq = 1;
lb = zeros(7,1);
f = -[zeros(1,3) y0 -b0];
[x,fval, exitflag] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, []);
fval = -fval;
M(i,:)=[fval,x'];
end
```

```
%výsledné efektivity
```

```
efektivitaEES = [char(text) num2str(M(:,1))]
```

- Model SS1

```
[num, txt] = xlsread('D:\Diplomová práca\mestá.xlsx');
data = num(:,4:14);
text = txt(2:end,2);
```

```
%SS vstup - fiškálne náklady
```

```
F = data(:,8);
```

```
%SS výstupy - stupne spokojnosti
```

```
G1 = data(:,9);
```

```
G2 = data(:,10);
```

```
G3 = data(:,11);
```

```
G = [G1 G2 G3];
```

```
n = length(F);
```

```
M = zeros(n,5);
```

```
%optimalizácia
```

```
for i=1:n
```

```
    f0 = F(i);
```

```

    g0 = G(i,:);
    A = [-F G];
    b = zeros(n,1);
    Aeq = [f0 zeros(1,3)];
    beq = 1;
    lb = zeros(4,1);
    f = -[zeros(1,1) g0];
    [x,fval, exitflag] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, []);
    fval = -fval;
    M(i,:)=[fval,x'];
end

```

```
%výsledné efektivity
```

```
efektivitaSS1 = [char(text) num2str(M(:,1))]
```

• Model SS2

```

[num, txt] = xlsread('D:\Diplomová práca\mestá.xlsx');
data = num(:,4:14);
text = txt(2:end,2);

```

```
%SS vstup - fiškálne náklady
```

```
F = data(:,8);
```

```
%SS vstup tvorený EES výstupom - HDP
```

```
Y = data(:,4);
```

```
%SS výstupy - stupne spokojnosti
```

```
G1 = data(:,9);
```

```
G2 = data(:,10);
```

```
G3 = data(:,11);
```

```
G = [G1 G2 G3];
```

```
n = length(F);
```

```
M = zeros(n,6);
```

```
% optimalizácia
```

```
for i=1:n
    y0 = Y(i);
    f0 = F(i);
    g0 = G(i,:);
    A = [-Y -F G];
    b = zeros(n,1);
    Aeq = [y0 f0 zeros(1,3)];
    beq = 1;
    lb = zeros(5,1);
    f = -[zeros(1,2) g0];
    [x,fval, exitflag] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, []);
    fval = -fval;
    M(i,:)= [fval,x'];
end

%výsledné efektivity
efektivitaSS2 = [char(text) num2str(M(:,1))]
```

PRÍLOHA B - Multiplikatívne prepojené modely

- Model EES $\rightarrow$ SS

```
[num, txt] = xlsread('D:\Diplomová práca\mestá.xlsx');  
data = num(:,4:14);  
text = txt(2:end,2);  
  
%EES vstup - kapitál, práca, energia  
X1 = data(:,1);  
X2 = data(:,2);  
X3 = data(:,3);  
X = [X1 X2 X3];  
  
%EES žiaduci výstup, zároveň SS vstup - HDP  
Y = data(:,4);  
  
%EES nežiaduce výstupy - odpady  
B1 = data(:,5);  
B2 = data(:,6);  
B3 = data(:,7);  
B = [B1 B2 B3];  
  
n = length(Y);  
  
%SS vstup - fiškálne náklady  
F = data(:,8);  
  
%SS výstupy - stupne spokojnosti  
G1 = data(:,9);  
G2 = data(:,10);  
G3 = data(:,11);  
G = [G1 G2 G3];  
  
%1.krok: EES  
%inicializácia matice na vkladanie výsledkov z linprog pre EES  
M1 = zeros(n,8);  
  
%optimalizácia EES  
for i=1:n
```

```
x0 = X(i,:);
y0 = Y(i);
b0 = B(i,:);
A = [-X Y -B];
b = zeros(n,1);
Aeq = [x0 zeros(1,4)];
beq = 1;
lb = zeros(7,1);
f = -[zeros(1,3) y0 -b0];
[x,fval, exitflag] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, []);
fval = -fval;
M1(i,:)= [fval,x'];
end

%výsledné efektivity
E1 = M1(:,1);
efektivityEES_prepojene = [char(text) num2str(M1(:,1)))]

%2.krok: SS
%inicializacia matice na vkladanie vysledkov z linprog pre SS
M2 = zeros(n,12);
%optimalizácia
for i=1:n
    x00 = X(i,:);
    y00 = Y(i);
    b00 = B(i,:);
    f00 = F(i);
    g00 = G(i,:);
    E0 = E1(i);
    AA = [zeros(n,3) -Y zeros(n,3) -F G;
          -X Y -B zeros(n,1) zeros(n,3)];
    bb = zeros(2*n,1);
```

```

AAeq = [zeros(1,3) y00 zeros(1,3) f00 zeros(1,3);
        x00 zeros(1,8);
        zeros(1,3) y00 -b00 zeros(1,4)];
bbeq = [1 1 E0];
llb = zeros(11,1);
ff = -[zeros(1,8) g00];
[xx,ffval, exitflag] = linprog(ff, AA, bb, AAeq, bbeq, llb, []);
ffval = -ffval;
M2(i,:)= [ffval,xx'];
end

```

%výsledné efektivity

```

E2 = M2(:,1);
efektivitaSS_prepojene = [char(text) num2str(M2(:,1))]
```

• Model SS → EES

```

[num, txt] = xlsread('D:\Diplomová práca\mestá.xlsx');
data = num(:,4:14);
text = txt(2:end,2);
%EES vstupy - kapitál, práca, energia
X1 = data(:,1);
X2 = data(:,2);
X3 = data(:,3);
X = [X1 X2 X3];
%EES žiaduci vystup, zároveň SS vstup - HDP
Y = data(:,4);
%EES nežiaduce výstupy - odpady
B1 = data(:,5);
B2 = data(:,6);
B3 = data(:,7);
B = [B1 B2 B3];
n = length(Y);

```

```
%SS vstup - fiškálne náklady
F = data(:,8);

%SS výstupy - stupne spokojnosti
G1 = data(:,9);
G2 = data(:,10);
G3 = data(:,11);
G = [G1 G2 G3];

%1.krok: SS
%inicializácia matice na vkladanie výsledkov z linprog pre SS
M1 = zeros(n,6);

%optimalizácia
for i=1:n
    y0 = Y(i);
    f0 = F(i);
    g0 = G(i,:);
    A = [-Y -F G];
    b = zeros(n,1);
    Aeq = [y0 f0 zeros(1,3)];
    beq = 1;
    lb = zeros(5,1);
    f = -[zeros(1,2) g0];
    [x,fval, exitflag] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, []);
    fval = -fval;
    M1(i,:)= [fval,x'];
end

%výsledné efektivity
E1 = M1(:,1);
efektivitaSS_pojene = [char(text) num2str(M1(:,1))];

%2.krok: EES
%inicializácia matice na vkladanie výsledkov z linprog pre EES
```

```
M2 = zeros(n,12);

%optimalizácia
for i=1:n
    x00 = X(i,:);
    y00 = Y(i);
    b00 = B(i,:);
    f00 = F(i);
    g00 = G(i,:);
    E0 = E1(i);
    AA = [-X Y -B zeros(n,1) zeros(n,3);
          zeros(n,3) -Y zeros(n,3) -F G];
    bb = zeros(2*n,1);
    AAeq = [x00 zeros(1,8);
            zeros(1,3) y00 zeros(1,3) f00 zeros(1,3);
            zeros(1,8) g00];
    bbeq = [1 1 E0];
    llb = zeros(11,1);
    ff = -[zeros(1,3) y00 -b00 zeros(1,4)];
    [xx,ffval, exitflag] = linprog(ff, AA, bb, AAeq, bbeq, llb, []);
    ffval = -ffval;
    M2(i,:)= [ffval,xx'];
end

%výsledné efektivity
E2 = M2(:,1);
efektivitaEES_prepojene = [char(text) num2str(M2(:,1))]
```

PRÍLOHA C - Russellove modely a neprepojené podsystémy

- Russellov model - EES

```
[num, txt] = xlsread('D:\Diplomová práca\mestá.xlsx');  
data = num(:,4:14);  
text = txt(2:end,2);  
  
%EES vstupy - kapitál, práca, energia (normalizované)  
X1 = data(:,1)/max(data(:,1));  
X2 = data(:,2)/max(data(:,2));  
X3 = data(:,3)/max(data(:,3));  
X = [X1 X2 X3]';  
  
%EES žiaduci výstup - HDP (normalizované)  
Y = (data(:,4)/max(data(:,4)))';  
  
%EES nežiaduce výstupy - odpady (normalizované)  
B1 = data(:,5)/max(data(:,5));  
B2 = data(:,6)/max(data(:,6));  
B3 = data(:,7)/max(data(:,7));  
B = [B1 B2 B3]';  
  
%rozmer vektora vstupov EES  
x = size(X,1);  
  
%počet DMU jednotiek  
n = size(X,2);  
  
%rozmer vektora nežiaducich výstupov EES  
b = size(B,1);  
  
%rozmer vektora žiaducich výstupov EES  
y = size(Y,1);  
  
%inicializácia neznámych pre efektivity  
riesenieRUSSELL = zeros(n,1);  
thetaX = zeros(n,x);  
thetaB = zeros(n,b);  
phiY = zeros(n,y);  
  
% RUSSELLOV MODEL
```

```

for i = 1:n
    cvx_begin sdg
        variable theta_x(x)
        variable theta_b(b)
        variable phi(y)
        variable psii(y)
        variable lambda(n)
        minimize 1/(x+b+y)*(ones(1,x)*theta_x+ones(1,b)*theta_b+ones(1,y)*psii)
        subject to
            X*lambda <= theta_x.*X(:,i);
            B*lambda <= theta_b.*B(:,i);
            Y*lambda >= phi.*Y(:,i);
            theta_x <= ones(x,1);
            theta_b <= ones(b,1);
            lambda >= 0;
            phi >= ones(y,1);
            [diag(phi), eye(y); eye(y), diag(psii)] >= 0;
    cvx_end
    riesenieRUSSELL(i) = cvx_optval;
    thetaX(i,:) = theta_x;
    thetaB(i,:) = theta_b;
    phiY(i,:) = phi;
end

```

%výsledné efektivity

```
efektivitaRUSSELL_EES = [char(text) num2str(riesenieRUSSELL)];
```

- Russellov model - SS1

```
[num, txt] = xlsread('D:\Diplomová práca\mestá.xlsx');
```

```
data = num(:,4:14);
```

```
text = txt(2:end,2);
```

%SS vstup - fiškálne náklady (normalizované)

```

F = (data(:,8)/max(data(:,8)))';
%SS výstupy - stupne spokojnosti (normalizované)
G1 = data(:,9)/max(data(:,9));
G2 = data(:,10)/max(data(:,10));
G3 = data(:,11)/max(data(:,11));
G = [G1 G2 G3]';
%počet DMU jednotiek
n = size(F,2);
%rozmer vektora vstupov SS
f = size(F,1);
%rozmer vektora výstupov SS
g = size(G,1);
%inicializácia neznámych pre efektivity
riesenieRUSSELL = zeros(n,1);
thetaF = zeros(n,f);
phiG = zeros(n,g);

% RUSSELLOV MODEL
for i = 1:n
    cvx_begin sdp
        variable theta_f(f)
        variable phi(g)
        variable psii(g)
        variable lambda(n)
        minimize 1/(f+g)*(ones(1,f)*theta_f+ones(1,g)*psii)
        subject to
            F*lambda <= theta_f.*F(:,i);
            G*lambda >= phi.*G(:,i);
            theta_f <= ones(f,1);
            lambda >= 0;
            phi >= ones(g,1);
            [diag(phi), eye(g); eye(g), diag(psii)] >= 0;
    end
end

```

```
    cvx_end

    riesenieRUSSELL(i) = cvx_optval;

    thetaF(i,:) = theta_f;

    phiG(i,:) = phi;

end

%výsledné efektivity
efektivitaRUSSELL_SS1 = [char(text) num2str(riesenieRUSSELL)];
```

- Russellov model - SS2

```
[num, txt] = xlsread('D:\Diplomová práca\mestá.xlsx');

data = num(:,4:14);
text = txt(2:end,2);

%SS vstup - fiškálne náklady (normalizované)
F = (data(:,8)/max(data(:,8)))';

%SS vstup - HDP (normalizované)
Y = (data(:,4)/max(data(:,4)))';

%SS výstupy - stupne spokojnosti (normalizované)
G1 = data(:,9)/max(data(:,9));
G2 = data(:,10)/max(data(:,10));
G3 = data(:,11)/max(data(:,11));
G = [G1 G2 G3]';

%počet DMU jednotiek
n = size(F,2);

%rozmer vektora vstupov SS
f = size(F,1);

%rozmer vektora vstupov SS
y = size(Y,1);

%rozmer vektora výstupov SS
g = size(G,1);

%inicializácia neznámych pre efektivity
riesenieRUSSELL = zeros(n,1);
```

```
thetaF = zeros(n,f);
thetaY = zeros(n,y);
phiG = zeros(n,g);

% RUSSELLOV MODEL
for i = 1:n
    cvx_begin sdp
        variable theta_f(f)
        variable theta_y(y)
        variable phi(g)
        variable psii(g)
        variable lambda(n)
        minimize 1/(f+y+g)*(ones(1,f)*theta_f+ones(1,y)*theta_y+ones(1,g)*psii)
        subject to
            F*lambda <= theta_f.*F(:,i);
            Y*lambda <= theta_y.*Y(:,i);
            G*lambda >= phi.*G(:,i);
            theta_f <= ones(f,1);
            theta_y <= ones(y,1);
            lambda >= 0;
            phi >= ones(g,1);
            [diag(phi), eye(g); eye(g), diag(psii)] >= 0;
    cvx_end
    riesenieRUSSELL(i) = cvx_optval;
    thetaF(i,:) = theta_f;
    phiG(i,:) = phi;
end

%výsledné efektivity
efektivitaRUSSELL_SS2 = [char(text) num2str(riesenieRUSSELL)];
```

PRÍLOHA D - Russellove modely a Network DEA

- Russellov model a Network DEA - CRS/VRS

```
[num, txt] = xlsread('D:\Diplomová práca\mestá.xlsx');  
data = num(:,4:14);  
text = txt(2:end,2);  
  
%EES vstupy - kapitál, práca, energia (normalizované)  
X1 = data(:,1)/max(data(:,1));  
X2 = data(:,2)/max(data(:,2));  
X3 = data(:,3)/max(data(:,3));  
X = [X1 X2 X3]';  
  
%prepojenie - HDP (normalizované)  
Y = (data(:,4)/max(data(:,4)))';  
  
%EES nežiaduce výstupy - odpady (normalizované)  
B1 = data(:,5)/max(data(:,5));  
B2 = data(:,6)/max(data(:,6));  
B3 = data(:,7)/max(data(:,7));  
B = [B1 B2 B3]';  
  
%SS vstup - fiškálne náklady (normalizované)  
F = (data(:,8)/max(data(:,8)))';  
  
%SS výstupy - stupne spokojnosti (normalizované)  
G1 = data(:,9)/max(data(:,9));  
G2 = data(:,10)/max(data(:,10));  
G3 = data(:,11)/max(data(:,11));  
G = [G1 G2 G3]';  
  
%rozmer vektora vstupov EES  
x = size(X,1);  
  
%počet DMU jednotiek  
n = size(X,2);  
  
%rozmer vektora nežiaducich výstupov EES  
b = size(B,1);  
  
%rozmer vektora vstupov SS
```

```
f = size(F,1);
%rozmer vektora výstupov SS
g = size(G,1);
%inicializácia neznámych pre efektivity
riesenieRUSSELL = zeros(n,1);
thetaX = zeros(n,x);
thetaB = zeros(n,b);
thetaF = zeros(n,f);
phiG = zeros(n,g);

% RUSSELLOV MODEL
for i = 1:n
    cvx_begin sdp
        variable theta_x(x)
        variable theta_b(b)
        variable theta_f(f)
        variable phi(g)
        variable psii(g)
        variable lambda_1(n)
        variable lambda_2(n)
        minimize 1/(x+b+f+g)*(ones(1,x)*theta_x+ones(1,b)*theta_b + ...
            ... +ones(1,f)*theta_f+ones(1,g)*psii)
        subject to
            X*lambda_1 <= theta_x.*X(:,i);
            B*lambda_1 <= theta_b.*B(:,i);
            Y*lambda_1 == Y(:,i);
            Y*lambda_2 == Y(:,i);
            F*lambda_2 <= theta_f.*F(:,i);
            G*lambda_2 >= phi.*G(:,i);
            theta_x <= ones(x,1);
            theta_b <= ones(b,1);
            theta_f <= ones(f,1);
```

```
lambda_1 >= 0;
lambda_2 >= 0;
%v prípade VRS treba vypnúť komentár na nasledujúce 2 riadky:
%ones(1,n)*lambda_1 == 1;
%ones(1,n)*lambda_2 == 1;
phi >= ones(g,1);
[diag(phi), eye(g); eye(g), diag(psii)] >= 0;
cvx_end
riesenieRUSSELL(i) = cvx_optval;
thetaX(i,:) = theta_x;
thetaB(i,:) = theta_b;
thetaF(i,:) = theta_f;
phiG(i,:) = phi;
end

%výsledné efektivity
efektivitaRUSSELL_NDEA = [char(text) num2str(riesenieRUSSELL)];
```