

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



CYKlickÝ KONVERGENČNÝ MODEL
ÚROKOVÝCH MIER

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**CYKlickÝ KONVERGENČNÝ MODEL
ÚROKOVÝCH MIER**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko finančná matematika a modelovanie

Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci práce: doc. RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Juraj Hanuš
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Cyklický konvergenčný model úrokových mier
A cyclical convergence model of interest rates

Anotácia: Publikovaný jednofaktorový cyklický model úrokových mier je upravený a rozšírený tak, aby modeloval vývoj úrokovej miery v eurozóne a v krajine, ktorá sa do eurozóny chystá vstúpiť a jej úrokové miery sú ovplyvňované európskymi. V diplomovej práci sa študuje oceňovanie dlhopisov v takomto modeli a získané výsledky sú použité na kalibráciu modelu pomocou reálnych trhových dát.

Vedúci: doc. RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Dátum zadania: 07.01.2019

Dátum schválenia: 08.01.2019
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

PodĎakovanie: Rád by som poĎakoval svojej školiteľke doc. RNDr. Mgr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za cenné rady, pripomienky a veľmi ochotný prístup počas celého vedenia diplomovej práce. Taktiež by som chcel poĎakovať vyučujúcim z Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského za vedomosti, ktoré mi poskytlí. Moja vĎaka patrí aj všetkým ľuďom, ktorí ma počas štúdia, či písania podporovali, najmä mojej priateľke a rodine.

Abstrakt v štátnom jazyku

HANUŠ, Juraj: Cyklický konvergenčný model úrokových mier [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava 2020, 78 s.

V tejto diplomovej práci je zhotovený model, ktorý popisuje priebeh úrokovej miery v čase. Daný model má dve charakteristické vlastnosti - je cyklický a zároveň konvergenčný. V práci sa po dostatočne uvedenom teoretickom základe postupne odvodí pravdepodobnostné rozdelenie modelu a vypočítajú sa ceny dlhopisov. Následne sa vykoná kalibrácia modelu ukončená odhadnutím trhovej ceny rizika - parametrom, ktorý do priebehu krátkodobej úrokovej miery nevstupuje.

Kľúčové slová: stochastický proces, úroková miera, Vašíčkov model, cyklický model, dvojfaktorový model, konvergenčný model, cena dlhopisov, kalibrácia, metóda maximálnej vierohodnosti

Abstract

HANUŠ, Juraj: Cyclical-convergence model of interest rates [Diploma thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of applied mathematics and statistics; supervisor: doc. RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava 2020, 78 p.

In this diploma thesis the interest-rate model, which describes the evolution of interest rates in a time, is made. The model has two characteristic attributes - it is both cyclical and convergence. In the thesis, after sufficiently quoted theoretical background, the probability distribution of the model is deduced and prices of bonds are calculated. This is followed by a calibration of the model ended by the estimation of a market price of risk - the parameter, which is not present in the short rate process.

Keywords: stochastic process, interest rate, Vasicek model, cyclical model, multi-factor model, convergence model, price of bonds, calibration, maximal likelihood estimation

Obsah

Úvod	8
1 Teoretický základ	10
1.1 Stochastický kalkulus	10
1.2 Finančné deriváty	14
2 Zostavenie modelu	18
3 Odvodenie strednej hodnoty a disperzie úrokových mier	21
3.1 Deterministická časť	24
3.2 Stochastická časť	25
4 Oceňovanie dlhopisov	33
4.1 Európske dlhopisy	33
4.2 Domáce dlhopisy	36
5 Kalibrácia modelu	39
5.1 Použité dáta	40
5.2 Európska zložka	42
5.3 Domáca zložka	48
5.4 Odhadovanie trhovej ceny rizika	52
Záver	58
Zoznam použitej literatúry	60
Príloha A	62

Úvod

Každý deň môže človek pozorovať vo svojom živote istú náhodnosť. Nie je tomu inak ani vo svete bankovníctva a financií, kde vieme v súčasnosti popisovať aj (čiastočne) náhodný vývoj finančných ukazovateľov, ako sú napríklad cena akcie, či úroková miera. Práve vývoju úrokovej miery je venovaná táto diplomová práca.

Je všeobecne známe, že v súčasnosti zažívame dobu záporných úrokových mier, kedy sa napríklad mesačný EURIBOR (Euro Interbank Offered Rate) pohybuje okolo -0,4%. Je to dôsledok neštandardnej menovej operácie ECB (Európskej centrálnej banky) motivovanej cieľom stimulovať ekonomický rast.

Model úrokových mier, ktorý je navrhnutý v tejto práci, má prívlastky cyklický a konvergenčný. Dôvodom cyklickosti je zahrnutie cyklov v limitnej hodnote úrokovej miery a vo volatilitate, zatiaľ čo konvergenčný charakter je spôsobený tým, že úrokovú mieru ovplyvňujú dva faktory, pričom jeden k druhému konverguje. Dá sa napríklad pozorovať, že úroková miera krajiny, ktorá sa chystá vstúpiť do menovej únie - v našom konkrétnom prípade Eurozóny - je dlhodobo priťahovaná k úrokovej sadzbe danej menovej únie.

Úrokové miery su dané ako riešenia systému stochastických diferenciálnych rovníc. V našom prípade je hodnota už spomínanej EURIBOR sadzby prvou zložkou tohto systému (ďalej európska zložka) a hodnota úrokovej miery v Bulharsku druhou zložkou (ďalej domáca zložka). Bulharsko sme zvolili kvôli tomu, že je to štát, ktorý už je členom Európskej únie (od roku 2007) a ktorý sa zaviazal prijať euro, keď splní potrebné podmienky - konvergenčné kritériá. Tieto kritériá sa nazývajú Maastrichské kritériá a Bulharsko ich má splnené už všetky okrem ERM-II, čo je dvojročné obdobie, počas ktorého sa pozoruje stabilita výmenných kurzov. Štátu končí toto obdobie v júli 2020 a teda posledná prekážka pred vstupom do Eurozóny bude upravenie ich legislatívy. Prijatie eura je zatiaľ naplánované na rok 2023.

K zostaveniu modelu sme potrebovali silný finančno-matematický základ a stochastický kalkulus sa ukázal ako nevyhnutný nástroj pre prácu. Preto sme sa rozhodli, že prvú kapitolu venujeme teoretickým základom, obsahujúcim aj potrebné vedomosti týkajúce sa finančných derivátov. V prípade, že na nejakom mieste v diplomovej práci budeme potrebovať definovať iné pojmy, definície uvedieme v príslušnej kapitole.

V druhej kapitole zhotovíme model a vysvetlíme význam jeho jednotlivých parametrov. Nasledovná kapitola sa bude venovať odvodeniu pravdepodobnostného rozdelenia úrokových mier, ktoré modelujeme. V predposlednej kapitole sa ocenia dlhopisy, ktorých cena je daná ako riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice (ďalej PDR). Prácu ukončíme odhadnutím hodnôt parametrov (kalibrácia modelu) využijúc reálne dáta. Odhadovanie parametrov bude prevedené metódou maximálnej vierohodnosti a bude ukončené odhadnutím trhových cien rizika z reálnych výnosových kriviek.

1 Teoretický základ

Pre pochopenie problematiky, ktorou sa zaoberá táto diplomová práca, je nutná znalosť teórie miery a integrálu. Na tejto teórii je postavený stochastický kalkulus, ktorého základné definície, vety a tvrdenia uvádzame v prvej podkapitole. Aplikácie stochastického kalkulu vo finančných derivátoch sú uvedené v druhej podkapitole, pričom našim primárnym zameraním budú úrokové miery.

1.1 Stochastický kalkulus

Majme pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kde Ω je daná množina, P pravdepodobnostná miera na tejto množine a $\mathcal{F}$ je σ -algebra merateľných množín na Ω a P .

Definícia 1.1. (Stochastický proces) [1]

Stochastický proces je súbor náhodných premenných $X = \{X_t; 0 \leq t < \infty\}$ na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s hodnotami v $\mathbf{R}^d$. Pre každé t je

$$\omega \rightarrow X_t(\omega); \omega \in \Omega$$

náhodná premenná. Ak fixujeme $\omega \in \Omega$, dostávame funkciu

$$t \rightarrow X_t(\omega); 0 \leq t < \infty,$$

ktorá sa nazýva trajektória X priradená ω .

Definícia 1.2. (Brownov pohyb) [2]

Brownov pohyb $\{X_t, t \geq 0\}$ je t -parametrický systém náhodných veličín, pričom

- i) všetky prírastky $X_{t+\Delta} - X_t$ majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu\Delta$ a disperziou (alebo aj varianciou) $\sigma^2\Delta$*
- ii) pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ sú prírastky $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa predchádzajúceho bodu*
- iii) $X_0 = 0$.*

Definícia 1.3. (Wienerov proces) [2]

Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ nazývame Wienerov proces.

Poznámka: V práci budeme ďalej označovať Wienerov proces ako W , prípadne w .

Definícia 1.4. ($\mathcal{N}_t$ -adaptovanosť) [1]

Nech $\{\mathcal{N}_t\}_{t \geq 0}$ je rastúci systém σ -algebier na Ω (t.j. $\mathcal{N}_{t_2} \supset \mathcal{N}_{t_1}$ pre $t_2 \geq t_1$). Stochastický proces

$$g(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$$

je $\mathcal{N}_t$ -adaptovaný, ak pre každé $t \geq 0$ je funkcia

$$\omega \rightarrow g(t, \omega)$$

$\mathcal{N}_t$ -merateľná.

Definícia 1.5. (Množina funkcií pre kt. je definovaný Itóov integrál) [1]

Nech $W_t(\omega)$ je Brownov pohyb na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Symbolom $\Upsilon = \Upsilon(S, T)$ označme triedu funkcií

$$f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$$

takých, že

- i) funkcia $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ je $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ - merateľná, kde $\mathcal{B}$ označuje borelovské množiny na $[0, \infty)$*
- ii) stochastický proces $f(t, \omega)$ je $\mathcal{F}_t^W$ -adaptovaný*
- iii) $E \left[\int_S^T f^2(t, \omega) dt \right] < \infty$.*

Pre $f(t, \omega) \in \Upsilon$ bude definovaný Itóov integrál

$$\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega).$$

Poznámka: Kijoši Itó bol japonský matematik, priekopník teórie stochastického kalkulu a stochastického diferenčného počtu. Základ tejto teórie položil vo svojom článku „Stochastic integral“ [9] z roku 1944. Zomrel v roku 2008 vo veku 93 rokov.

Definícia 1.6. (Itóov integrál pre elementárne funkcie) [1]

Funkcia $\Phi \in \Upsilon(S, T)$ sa nazýva elementárna, ak

$$\Phi(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i(\omega) \chi_{[t_i, t_{i+1})}.$$

Pre elementárne funkcie definujeme Itóov integrál ako

$$\int_S^T \Phi(t, \omega) dW_t(\omega) := \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(\omega).$$

Definícia 1.7. (Itóov integrál) [1]

Majme priestor $L^2(\Omega, P)$. Nech $f(t, \omega) \in \Upsilon(S, T)$ a nech $\varphi_n(t, \omega)$ je postupnosť elementárnych ohraničených funkcií taká, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\int_S^T (f(t, \omega) - \varphi_n(t, \omega))^2 dt \right) = 0.$$

Potom pre každú elementárnu funkciu možno spočítať Itóov integrál

$$I_n(\omega) = \int_S^T \varphi_n(t, \omega) dW_t(\omega).$$

Platí, že postupnosť $\{I_n(\omega)\}_n \geq 0$ je Cauchyovská a vzhľadom k úplnosti priestoru $L^2(\Omega, P)$ existuje práve jedna limita. Pre funkciu $f(t, \omega) \in \Upsilon(S, T)$ teraz definujeme Itóov integrál

$$\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \varphi_n(t, \omega) dW_t(\omega),$$

pričom limita sa myslí v zmysle priestoru $L^2(\Omega, P)$ a nezávisí od zvolenej postupnosti elementárnych funkcií $\varphi_n(t, \omega)$.

Lema 1.8. (Rozdelenie Itóovho integrálu a Itóova izometria) [2]

Nech $f(t, \omega) \in \Upsilon(S, T)$. Potom existuje Itóov integrál $\int_S^T f(t, \omega) dW_t$, ktorý predstavuje normálne rozdelenú náhodnú premennú s rozdelením $N(0, \sigma^2(t))$, kde $\sigma^2(t) = E \left[\int_S^T f^2(t, \omega) dt \right]$. To znamená, že platia identity:

$$\begin{aligned} E \left(\int_S^T f(t, \omega) dW_t \right) &= 0, \\ E \left[\left(\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) \right)^2 \right] &= E \left[\int_S^T f^2(t, \omega) dt \right]. \end{aligned}$$

Posledná identita sa nazýva Itóova izometria.

Veta 1.9. (Vlastnosti Itóovho integrálu) [1]

Nech $f, g \in \Upsilon(0, T)$, $0 \leq S \leq U < T$ a zároveň $c \in \mathbf{R}$. Potom platí

$$i) \int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) = \int_S^U f(t, \omega) dW_t(\omega) + \int_U^T f(t, \omega) dW_t(\omega) \text{ pre skoro všetky } \omega \in \Omega$$

$$ii) \int_S^T (cf(t, \omega) + g(t, \omega)) dW_t(\omega) = c \int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) + \int_S^T g(t, \omega) dW_t \text{ pre skoro všetky } \omega \in \Omega$$

$$iii) E\left(\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega)\right) = 0$$

$$iv) \text{ Náhodná premenná } \int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) \text{ je } \mathcal{F}_T^W\text{-merateľná.}$$

Poznámka: Pripomeňme, že pojem „skoro všetky“ znamená, že pre niektoré $\omega \in \Omega$ daná rovnosť nemusí platiť, ale pravdepodobnosť tých ω , pre ktoré rovnosť neplatí, je nulová.

Definícia 1.10. (Itóov proces) [1]

Nech $W_t(\omega)$ je Brownov pohyb na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Jednorozmerný Itóov proces je stochastický proces tvaru

$$X_t(\omega) = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dW_s(\omega), \quad (1)$$

kde $u, v \in \Upsilon(S, T)$ a

$$P \left[\int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty, \forall t \geq 0 \right] = 1.$$

Stochastický proces v (1) sa často zapisuje v diferenciálnom tvare

$$dX_t(\omega) = u(t, \omega)dt + v(t, \omega)dW_t,$$

kde funkcia u predstavuje tzv. „drift“, alebo trend a funkcia v predstavuje volatilitu.

Lema 1.11. (Itóova lema) [1]

Nech $X_t(\omega)$ je Itóov proces

$$dX_t(\omega) = u(t, \omega)dt + v(t, \omega)dW_t.$$

Nech $g(t, x) \in C^2([0, \infty] \times \mathbf{R})$. Potom

$$Y_t(\omega) = g(t, X_t(\omega))$$

je tiež Itóov proces a platí

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)v^2 dt.$$

Lema 1.12. (Viacrozmerná Itóova lema) [2]

Majme C^2 hladkú funkciu $f = f(\vec{X}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vektorového argumentu $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$. O premenných $X_i, i = 1, \dots, n$ budeme predpokladať, že vyhovujú sústave stochastických diferenciálnych rovníc

$$dX_i = \mu_i(\vec{X}, t)dt + \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}(\vec{X}, t)dW_k,$$

kde $\vec{W} = (W_1, W_2, \dots, W_n)^T$ je vektor Wienerových procesov, ktoré majú navzájom nezávislé prírastky, t.j.

$$E(dW_i, dW_k) = 0 \quad \text{pre } i \neq k, \quad E((dW_i)^2) = dt.$$

Potom rozvoj diferenciálu df podľa prírastkov $dt, d\vec{X}$ sa dá napísať v tvare

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} K : \nabla_X^2 f K \right) dt + \nabla_X f d\vec{X},$$

kde

$$d\vec{X} = \vec{\mu}(\vec{X}, t)dt + K(\vec{X}, t)d\vec{W},$$

K je $n \times n$ matica

$$K(\vec{X}, t) = (\sigma_{i,j}(\vec{X}, t))_{i,j=1,\dots,n},$$

a výraz $K : \nabla_X^2 f K$ definujeme ako

$$K : \nabla_X^2 f K = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j} \sum_{k=1}^n \sigma_{i,k} \sigma_{j,k}.$$

1.2 Finančné deriváty

Definícia 1.13. (Derivát) [8]

Derivát je finančná sekurita s hodnotou, ktorá je závislá alebo odvodená od podkladového aktíva, či skupiny aktív. Samotný derivát je zmluvou medzi dvomi alebo viacerými stranami a odvodzuje svoju cenu z kolísania podkladového aktíva.

Definícia 1.14. (Jednofaktorové modely úrokovej miery) [2]

Jednofaktorové modely sú také, v ktorých je okamžitá úroková miera r charakterizovaná pomocou riešenia stochastickej diferenciálnej rovnice, ktorá môže mať vo všeobecnosti tvar

$$dr = \mu(t, r)dt + \sigma(t, r)dW_t. \quad (2)$$

Definícia 1.15. (Mean-reversion proces) [2]

Ak je driftová funkcia v (2) zvolená ako $\mu(t, r) = \kappa(\theta - r)$, kde κ, θ sú konštanty, tak hovoríme o mean-reversion procese.

Poznámka: Parameter θ nazývame limitnou úrokovou mierou a κ rýchlosťou reverzie alebo aj rýchlosťou návratu k limitnej úrokovej miere. Inými slovami, stredná hodnota úrokovej miery je priťahovaná k rovnovážnej hodnote θ , pričom sila tohto priťahovania je daná parametrom κ . [2]

Definícia 1.16. (Vašíčkov model) [2]

Nech je volatilita v mean-reversion procese konštantná, t.j. $\sigma(t, r) = \sigma$. Potom dostávame tzv. Vašíčkov model:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dW_t. \quad (3)$$

Poznámka: Vašíčkov model je jeden z najstarších modelov vývoja okamžitej úrokovej miery. Čo bolo donedávna považované za jeho nevýhodu - pripúšťanie záporných úrokových mier - je v dnešných časoch neštandardných menových operácií jeho výhodou. Meno nesie po svojom zhotoviteľovi Oldřichovi Vašíčkovi, ktorý model publikoval vo svojom článku v roku 1977. [10]

Existujú aj dvoj- a viac faktorové modely. V takomto prípade je okamžitá úroková miera funkciou dvoch (alebo viac) faktorov, ktoré od seba môžu navzájom závisieť, ale môžu napríklad závisieť aj od iných veličín na trhu. Príkladom dvojfaktorového modelu je konvergenčný model uvedený v [3], kde môžeme pozorovať, že vývoj domácej úrokovej miery závisí od európskej úrokovej miery.

Definícia 1.17. (Dvojfaktorový model) [2]

Nech úroková miera je funkcia faktorov x, y t.j. $r = r(x, y)$. Vo všeobecnom prípade dvojfaktorového modelu budeme predpokladať, že faktory x, y vyhovujú nasledovným stochastickým diferenciálnym rovniciam:

$$dx = \mu_x(x, y)dt + \sigma_x(x, y)dW_1, \quad (4)$$

$$dy = \mu_y(x, y)dt + \sigma_y(x, y)dW_2, \quad (5)$$

pričom korelácia prírastkov dW_1 a dW_2 Wienerových procesov W_1 a W_2 je konštanta ρ , t.j. $E(dW_1 dW_2) = \rho dt$.

Tvrdenie 1.18. (Oceňovanie dlhopisov v jednofaktorových modeloch) [2]

Majme dlhopis B so splatnosťou v čase T . Označme cenu dlhopisu ako $P(r, t, T)$, drift ceny dlhopisu ako $\mu_B(r, t)$ a volatilitu ceny dlhopisu ako $\sigma_B(r, t)$. Pre definované veličiny existuje taká funkcia $\lambda(r, t)$, že je splnená identita

$$\lambda(r, t) = \frac{\mu_B(r, t, T) - rP(r, t, T)}{\sigma_B(r, t, T)} \quad (6)$$

pre ľubovoľnú maturitu T . Táto funkcia λ sa nazýva trhovú cenu rizika, lebo vyjadruje očakávaný nárast výnosu dlhopisu na jednotku rizika. Dosadením funkcií μ_B a σ_B do (6) nakoniec dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu $P(r, t, T)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu(r, t) - \lambda(r, t)) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2(r, t)}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0. \quad (7)$$

V okamihu splatnosti je hodnota dlhopisu rovná jednej, a to bez ohľadu na aktuálnu hodnotu okamžitej úrokovej miery. Teda funkcia $P(r, T, T)$ musí spĺňať terminálovú podmienku

$$P(r, T, T) = 1 \quad \text{pre každé } r > 0.$$

Tvrdenie 1.19. (Oceňovanie dlhopisov v dvojfaktorových modeloch) [2]

Označme $P = P(x, y, t)$ cenu dlhopisu závislú od faktorov x, y a času t . Použitím viacrozmernej Itóovej lemy dostaneme

$$dP = \mu dt + \sigma_1 dW_1 + \sigma_2 dW_2,$$

kde $\mu = \mu(x, y, t)$ a $\sigma_i = \sigma_i(x, y, t)$ sú dané vzťahmi

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_x \frac{\partial P}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\sigma_y^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho \sigma_x \sigma_y \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \\ \sigma_1 &= \sigma_x \frac{\partial P}{\partial x} \\ \sigma_2 &= \sigma_y \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned}$$

Existujú také funkcie λ_1, λ_2 , že platí

$$\mu(T_i) - rP(T_i) = \lambda_1 \sigma_1(T_i) + \lambda_2 \sigma_2(T_i), \quad \text{pre } i = 1, 2, 3.$$

Keďže doby splatnosti (maturity) T_i sú ľubovoľné, tak funkcie λ_1, λ_2 nemôžu závisieť od maturity dlhopisov. Teda

$$\lambda_1 = \lambda_1(x, y, t), \quad \lambda_2 = \lambda_2(x, y, t).$$

Dosadením μ, σ_1 a σ_2 napokon dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &+ (\mu_x - \lambda_1 \sigma_x) \frac{\partial P}{\partial x} + (\mu_y - \lambda_2 \sigma_y) \frac{\partial P}{\partial y} + \\ &+ \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\sigma_y^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \rho \sigma_x \sigma_y \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - r(x, y)P = 0. \end{aligned}$$

Poznamenajme, že funkcie λ_1, λ_2 nazývame trhovými cenami rizika jednotlivých faktorov.

2 Zostavenie modelu

Vo veľa finančných aplikáciach matematiky je predpokladané, že úroková miera je konštantná. V skutočnosti sa však hodnota úrokovej miery neustále mení a dokonca existujú úrokové miery s rôznymi splatnosťami.

V tejto diplomovej práci modelujeme tzv. okamžitú (krátkodobú) úrokovú mieru (short-term interest rate). Je to úroková miera na nekonečne krátky čas. Treba poznamenať, že pri takejto definícii je to iba teoretická veličina, ktorá sa prakticky nahrádza úrokovou mierou na krátky čas, napríklad jeden mesiac, tri mesiace, či pol roka.

Naším cieľom je zostaviť model, ktorý vznikne ako kombinácia cyklického modelu uvedeného v [4] a konvergenčného modelu z článku [3]. Z pôvodného jednofaktorového modelu teda vznikne dvojfaktorový. To znamená, že budeme predpokladať, že okamžitá úroková miera konverguje ku hodnote inej úrokovej miery, ktorou je ovplyvňovaná. Inými slovami, v našom prípade budeme modelovať vývoj dvoch úrokových mier, pričom jedna je zároveň aj dlhodobá rovnovážna hodnota pre druhú. Ako bolo spomenuté v úvode, tak jedna z úrokových mier je domáca, t.j. pre krajinu, ktorá sa chystá vstúpiť do menovej únie (Bulharsko) a druhá je európska, čiže príznačná pre danú menovú úniu.

Cyklickosť modelu znamená, že v sebe zahŕňa cykly vo volatilitě a v dlhodobú rovnovážnu hodnotu (niekedy nazývanú aj limitná úroková miera [2]). Zabezpečíme ju harmonickým oscilátorom, daným ako $f(t) = A \cdot \sin(\phi - \omega t)$, kde A označuje amplitúdu, ϕ predstavuje fázový posun a parameter ω je časová frekvencia. Vďaka tejto funkcii je jednoducho zabezpečené cyklické správanie modelu.

Publikovaný model v [4] garantoval nezápornosť úrokových mier, pretože autori modelovali volatilitu ako $\sigma_t \sqrt{r_t}$. V súčasnosti však dlhodobu zažívame obdobie záporných úrokových mier, preto pri zostavovaní modelu budeme vychádzať z Vašíčkovho modelu, ktorý záporné úrokové miery pripúšťa.

Vo všeobecnosti budeme mať dve stochastické diferenciálne rovnice:

$$dr_d = \mu_d(t, r)dt + \sigma_d(t, r)dW_1 \quad (8)$$

$$dr_e = \mu_e(t, r)dt + \sigma_e(t, r)dW_2. \quad (9)$$

Stochastická diferenciálna rovnica pre okamžitú domácu úrokovú mieru závisí od

celoeurópskej úrokovej miery. Preto konštantu θ_d z mean reversion procesu nahradíme aktuálnou hodnotou európskej úrokovej miery. Limitnú úrokovú mieru pre európsku zložku označme ako θ_e . Keďže vychádzame z Vašíčkovho modelu, tak pri modelovaní oboch zložiek (domácej aj európskej) sa vyskytuje rýchlosť konverencie, alebo aj rýchlosť návratu k limitnej úrokovej miere, ktorú označíme ako b pre domácu mieru a c pre európsku. Volatilita v domácom, respektíve európskom modeli je σ_d , resp. σ_e . Uvedomme si, že prírastky Wienerových procesov W_e (pre európsku zložku) a W_d (pre domácu zložku) sú korelované s konštantnou koreláciou ρ , t.j. $E(dW_e dW_d) = \rho dt$. Vychádzajúc z [3] vyzerá náš model vo všeobecnosti nasledovne:

$$dr_e = c(\theta_e - r_e)dt + \sigma_e dW_e \quad (10)$$

$$dr_d = b(r_e - r_d)dt + \sigma_d dW_d. \quad (11)$$

Ďalej postupujme podľa [4] a vyššie spomenutého harmonického oscilátora, pomocou ktorého budeme modelovať limitné úrokové miery aj volatility. Budeme predpokladať, že sú nahradené funkciami času, respektíve náhodnou premennou:

$$\theta_{et} \rightarrow A_e \sin(\varphi - \omega t) \quad (12)$$

$$\theta_{dt} \rightarrow r_e \quad (13)$$

$$\sigma_{et} \rightarrow B_e \sin^2(\varphi - \omega t) \quad (14)$$

$$\sigma_{dt} \rightarrow B_d \sin^2(\varphi - \omega t). \quad (15)$$

Na základe poznatkov uvedených vyššie vieme zostaviť dvojfaktorový model, ktorý bude konvergenčný. Zároveň vieme zabezpečiť cyklické správanie vďaka tomu, že limitné úrokové miery a volatility modelujeme cez harmonický oscilátor.

Vychádzajúc z poznatkov a predpokladov uvedených v tejto kapitole vieme zostaviť sústavu stochastických diferenciálnych rovníc pre vývoj európskej a domácej úrokovej miery. Táto sústava je základ pre náš model a vyzerá nasledovne:

$$dr_e = c(A_e \sin(\phi - \omega t) - r_e)dt + B_e \sin^2(\phi - \omega t)dW_e \quad (16)$$

$$dr_d = b(r_e - r_d)dt + B_d \sin^2(\phi - \omega t)dW_d, \quad (17)$$

pričom korelácia ρ je konštantá a platí pre ňu, že $E(dW_e dW_d) = \rho dt$.

Čo sa týka parametrov, tak vieme, že rýchlosti konvergencií (čiže parametre c, b) musia byť kladné, aby zabezpečili stabilitu modelu v dlhodobom horizonte. Parametre vystupujúce vo volatilitě (B_e, B_d) sú, prirodzene, kladné. Limitná hodnota európskej úrokovej miery (čiže hodnota, ku ktorej je EURIBOR dlhodobo priťahovaný) môže byť z pragmatických dôvodov ľubovoľného znamienka, preto $A_e \in \mathbb{R}$. Rovnako sa na parametre ϕ, ω nevzťahujú žiadne obmedzenia. Uvedomme si však, že voľbou $\omega = 0$ dostávame klasický Vašíčkov model, čo bude neskôr využité v kalibrácii.

To, že model pripúšťa záporné úrokové miery, ukážeme v ďalšej kapitole.

3 Odvodenie strednej hodnoty a disperzie úrokových mier

Na efektívne narábanie s modelom potrebujeme poznať pravdepodobnostné rozdelenie úrokových mier. Predpokladáme, že priebeh strednej hodnoty a disperzie bude cyklický, vzhľadom k spôsobu ich priradenia v (12) až (15). Majme systém stochastických diferenciálnych rovníc odvodených v predošlej kapitole

$$dr_e = c(A_e \sin(\phi - \omega t) - r_e)dt + B_e \sin^2(\phi - \omega t)dW_e \quad (18)$$

$$dr_d = b(r_e - r_d)dt + B_d \sin^2(\phi - \omega t)dW_d, \quad (19)$$

ktorý si môžeme prepísať ako

$$dr = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ b & -b \end{pmatrix} rdt + \begin{pmatrix} cA_e \sin(\phi - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} B_e \sin^2(\phi - \omega t) & 0 \\ 0 & B_d \sin^2(\phi - \omega t) \end{pmatrix} dW_t, \quad (20)$$

kde

$$r = \begin{pmatrix} r_e \\ r_d \end{pmatrix}, dr = \begin{pmatrix} dr_e \\ dr_d \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} W_e \\ W_d \end{pmatrix}, dW_t = \begin{pmatrix} dW_e \\ dW_d \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Označme

$$M = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ b & -b \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} cA_e \sin(\phi - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} B_e \sin^2(\phi - \omega t) & 0 \\ 0 & B_d \sin^2(\phi - \omega t) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Na základe vyššie uvedeného vieme formulovať model v maticovom tvare:

$$dr = Mrdt + F(t)dt + B(t)dW_t. \quad (25)$$

Pri riešení diferenciálnych rovníc vie byť užitočná maticová exponenciála [11]. Po vytvorení maticovej exponenciály pre maticu M máme

$$e^{Mt} = \begin{pmatrix} e^{-ct} & 0 \\ \frac{b}{b-c}(e^{-bt} - e^{-ct}) & e^{-bt} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Maticovú exponenciálu e^{-Mt} využijeme ako tzv. integrálny faktor, ktorým prenásobíme rovnicu (25).

Dostávame

$$e^{-Mt}dr = Me^{-Mt}r dt + e^{-Mt}F(t)dt + e^{-Mt}B(t)dW_t. \quad (27)$$

Potrebuje vyriešiť túto diferenciálnu rovnicu, teda zistiť, čomu sa rovná $d[e^{-Mt}r]$.

Vieme, že

$$e^{-Mt}r = \begin{pmatrix} e^{ct} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{bt} - e^{ct}) & e^{bt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_e \\ r_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ct}r_e \\ \frac{b}{c-b}(e^{bt} - e^{ct}) + e^{bt}r_d \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Označme teda

$$g_1(t, r_e, r_d) = e^{ct}r_e \quad (29)$$

$$g_2(t, r_e, r_d) = \frac{b}{c-b}(e^{bt} - e^{ct}) + e^{bt}r_d. \quad (30)$$

Zrejme

$$g(t, r_e, r_d) = \begin{pmatrix} g_1(t, r_e, r_d) \\ g_2(t, r_e, r_d) \end{pmatrix} \implies dg = \begin{pmatrix} dg_1 \\ dg_2 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Na základe viacrozmernej Itóovej lemy uvedenej v prvej kapitole vieme vypočítať, že

$$dg_1 = ce^{ct}r_e dt + e^{ct}dr_e, \quad (32)$$

respektíve

$$dg_2 = \left(\frac{b}{c-b}(be^{bt} - ce^{ct})r_e + be^{bt}r_d \right) dt + \frac{b}{c-b}(e^{bt} - e^{ct})dr_e + e^{bt}dr_d. \quad (33)$$

Spojením oboch zložiek máme

$$\begin{aligned} dg &= \begin{pmatrix} e^{ct} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{bt} - e^{ct}) & e^{bt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr_e \\ dr_d \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} c & 0 \\ -b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ct} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{bt} - e^{ct}) & e^{bt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_e \\ r_d \end{pmatrix} dt = \\ &= e^{-Mt}dr - Me^{-Mt}r dt, \end{aligned} \quad (34)$$

čím sme sa dopracovali k

$$d[e^{-Mt}r] = e^{-Mt}dr - Me^{-Mt}r dt. \quad (35)$$

Z (27) vieme, že

$$d[e^{-Mt}r] = e^{-Mt}F(t)dt + e^{-Mt}B(t)dW_t \quad (36)$$

$$e^{-Mt}r(t) - r(0) = \int_0^t e^{-Ms}F(s)ds + \int_0^t e^{-Ms}B(s)dW_s, \quad (37)$$

z čoho vyplýva riešenie pre $r(t)$

$$r(t) = e^{Mt}r(0) + \int_0^t e^{M(t-s)}F(s)ds + \int_0^t e^{-M(t-s)}dW_s. \quad (38)$$

Poznámka: V predchádzajúcich rovnostiach sa vyskytuje zápis, ktorý obsahuje integrál z vektora. Rozumieme pod tým integrovanie po zložkách.

Poznámka: Z rovnice (38) na základe vlastnosti Itóovho integrálu uvedenej v leme (1.8) vyplýva, že úroková miera je normálne rozdelená.

Po rozpísaní (38) po zložkách máme:

$$\begin{aligned} r(t) = & \begin{pmatrix} e^{-ct} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{-bt} - e^{-ct}) & e^{-bt} \end{pmatrix} r(0) + \\ & + \begin{pmatrix} e^{-ct} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{-bt} - e^{-ct}) & e^{-bt} \end{pmatrix} \cdot \int_0^t \begin{pmatrix} e^{cs} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{bs} - e^{cs}) & e^{bs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cA_e \sin(\phi - \omega s) \\ 0 \end{pmatrix} ds + \\ & + \begin{pmatrix} e^{-ct} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{-bt} - e^{-ct}) & e^{-bt} \end{pmatrix} \cdot \\ & \cdot \int_0^t \begin{pmatrix} e^{cs} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{bs} - e^{cs}) & e^{bs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_e \sin^2(\phi - \omega s) & 0 \\ 0 & B_d \sin^2(\phi - \omega s) \end{pmatrix} dW_s. \end{aligned} \quad (39)$$

Pre lepšiu prehľadnosť si označíme $r(t)$ ako

$$r(t) = \text{Prvá časť (PČ)} + \text{Druhá časť (DČ)} + \text{Stochastická časť (SČ)}, \quad (40)$$

pričom prvé dve časti sú deterministické. S týmito označeniami budeme v tejto kapitole pracovať.

3.1 Deterministická časť

V tejto podkapitole vypočítame deterministickú zložku úrokovej miery, čím získame stredné hodnoty európskeho a domáceho submodelu. Pre prvú časť (PČ) platí:

$$\begin{aligned} \text{PČ} &= \begin{pmatrix} e^{-ct} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{-bt} - e^{-ct}) & e^{-bt} \end{pmatrix} r(0) = \begin{pmatrix} e^{-ct} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{-bt} - e^{-ct}) & e^{-bt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_e(0) \\ r_d(0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-ct} r_e(0) \\ \frac{b}{c-b}(e^{-bt} - e^{-ct}) r_e(0) + e^{-bt} r_d(0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (41)$$

Pre druhú časť (DČ) platí, že

$$\text{DČ} = \begin{pmatrix} e^{-ct} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{-bt} - e^{-ct}) & e^{-bt} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{cs} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{bs} - e^{cs}) & e^{bs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cA_e \sin(\phi - \omega s) \\ 0 \end{pmatrix} ds. \quad (42)$$

Označme

$$\begin{aligned} I_{0,t}(c) &= \int_0^t e^{cs} \sin(\phi - \omega s) ds = \\ &= \frac{1}{c^2 + \omega^2} (ce^{ct} \sin(\phi - \omega t) + \omega e^{ct} \cos(\phi - \omega t)) - \frac{1}{c^2 + \omega^2} (c \sin(\phi) + \omega \cos(\phi)), \end{aligned} \quad (43)$$

potom

$$\int_0^t \begin{pmatrix} e^{cs} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{bs} - e^{cs}) & e^{bs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cA_e \sin(\phi - \omega s) \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} cA_e I_{0,t}(c) \\ \frac{bcA_e}{c-b} [I_{0,t}(b) - I_{0,t}(c)] \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Celá druhá časť je teda rovná

$$\begin{aligned} \text{DČ} &= \begin{pmatrix} e^{-ct} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{-bt} - e^{-ct}) & e^{-bt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cA_e I_{0,t}(c) \\ \frac{bcA_e}{c-b} [I_{0,t}(b) - I_{0,t}(c)] \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} cA_e e^{-ct} I_{0,t}(c) \\ \frac{bcA_e}{c-b} (e^{-bt} I_{0,t}(b) - e^{-ct} I_{0,t}(c)) + \frac{bcA_e}{c-b} e^{-bt} (I_{0,t}(b) - I_{0,t}(c)) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} cA_e e^{-ct} I_{0,t}(c) \\ \frac{bcA_e}{c-b} (e^{-bt} I_{0,t}(b) - e^{-ct} I_{0,t}(c)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (45)$$

Uvedomme si, že na zistenie strednej hodnoty procesu nás zaujíma iba stredná hodnota deterministickej časti (súčet prvej a druhej časti), pretože stredná hodnota stochastickej časti je nula. Navyše, stredná hodnota deterministickej časti je rovná samotnej deterministickej časti. A teda deterministická časť, čiže stredná hodnota úrokových

mier je:

$$E_e[r_t|r_0] = e^{-ct}r_e(0) + cA_e e^{-ct}I_{0,t}(c), \quad (46)$$

$$\begin{aligned} E_d[r_t|r_0] &= \frac{b}{c-b}(e^{-bt} - e^{-ct})r_e(0) + e^{-bt}r_d(0) + \\ &+ \frac{bcA_e}{c-b}(e^{-bt}I_{0,t}(b) - e^{-ct}I_{0,t}(c)), \end{aligned} \quad (47)$$

kde

$$I_{0,t}(c) = \int_0^t e^{cs} \sin(\phi - \omega s) ds. \quad (48)$$

3.2 Stochastická časť

Máme stochastický člen

$$\begin{aligned} \text{SČ} &= \begin{pmatrix} e^{-ct} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{-bt} - e^{-ct}) & e^{-bt} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{cs} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{bs} - e^{cs}) & e^{bs} \end{pmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{pmatrix} B_e \sin^2(\phi - \omega s) & 0 \\ 0 & B_d \sin^2(\phi - \omega s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_e \\ dW_d \end{pmatrix} = \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{c(s-t)} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{b(s-t)} - e^{c(s-t)}) & e^{b(s-t)} \end{pmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{pmatrix} B_e \sin^2(\phi - \omega s) & 0 \\ 0 & B_d \sin^2(\phi - \omega s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_e \\ dW_d \end{pmatrix} = \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{c(s-t)} B_e \sin^2(\phi - \omega s) dW_e & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{b(s-t)} - e^{c(s-t)}) B_e \sin^2(\phi - \omega s) & e^{b(s-t)} B_d \sin^2(\phi - \omega s) dW_d \end{pmatrix} = \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{c(s-t)} B_e \sin^2(\phi - \omega s) dW_e & \\ \frac{b}{c-b}(e^{b(s-t)} - e^{c(s-t)}) B_e \sin^2(\phi - \omega s) dW_e + e^{b(s-t)} B_d \sin^2(\phi - \omega s) dW_d & \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (49)$$

Uvedomme si, že na zistenie disperzie stochastického člena nás zaujíma iba disperzia stochastickej časti, pretože disperzia prvej a druhej časti je nula (kvôli ich nenáhodnosti). Pripomeňme, že pre disperziu náhodnej premennej X platí $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. Z vlastností Itóovho integrálu uvedených v prvej kapitole vieme, že

$$E \left[\int_0^t e^{M(t-s)} B(s) dW_s \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (50)$$

z čoho vyplýva, že

$$\left(E \left[\int_0^t e^{M(t-s)} B(s) dW_s \right] \right)^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

A teda v našom prípade $D(X) = E(X^2)$. Potrebujeme zistiť, čomu sa rovná $\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$, respektíve

$$E \left(\int_0^t \left(\frac{b}{c-b} (e^{b(s-t)} - e^{c(s-t)}) B_e \sin^2(\phi - \omega s) dW_e + e^{b(s-t)} B_d \sin^2(\phi - \omega s) dW_d \right)^2 \right). \quad (52)$$

Na zistenie strednej hodnoty prvej zložky E_1 využijeme Itóovu izometriu, uvedenú v prvej kapitole.

$$\begin{aligned} E \left[\left(\int_0^t e^{c(s-t)} B_e \sin^2(\phi - \omega s) dW_e \right)^2 \right] &= E \left[\int_0^t (e^{c(s-t)} B_e \sin^2(\phi - \omega s))^2 ds \right] = \\ &= \int_0^t (e^{c(s-t)} B_e \sin^2(\phi - \omega s))^2 ds. \end{aligned} \quad (53)$$

Druhá zložka je o niečo komplikovanejšia, pretože by sme chceli vypočítať disperziu súčtu. Vieme, že pre disperziu súčtu platí $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2cov(X, Y)$ a zároveň $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Uvedomme si, že v našom prípade platí, že $cov(X, Y) = E(XY)$, z rovnakého dôvodu ako (50).

Označme:

$$Y(t) = \int_0^t \frac{b}{c-b} (e^{b(s-t)} - e^{c(s-t)}) B_e \sin^2(\phi - \omega s) dW_e \quad (54)$$

$$Z(t) = \int_0^t e^{b(s-t)} B_d \sin^2(\phi - \omega s) dW_d. \quad (55)$$

Na základe Itóovej izometrie platí, že $D(Y(t)) = E(Y^2(t))$, respektíve

$$D(Y(t)) = \int_0^t \left(\frac{b}{c-b} (e^{b(s-t)} - e^{c(s-t)}) B_e \sin^2(\phi - \omega s) \right)^2 ds. \quad (56)$$

Analogicky

$$D(Z(t)) = \int_0^t (e^{b(s-t)} B_d \sin^2(\phi - \omega s))^2 ds. \quad (57)$$

Teraz už len zostáva zistiť, čomu sa rovná $E(Y(t) \cdot Z(t))$, čo je vlastne

$$E \left(\int_0^t \frac{b}{c-b} (e^{b(s-t)} - e^{c(s-t)}) B_e \sin^2(\phi - \omega s) dW_e \int_0^t e^{b(s-t)} B_d \sin^2(\phi - \omega s) dW_d \right). \quad (58)$$

Na tomto mieste využijeme tzv. ortogonálny rozklad Brownových pohybov (podľa [12]). Pripomeňme, že na základe formulácie modelu $W_e(s)$ a $W_d(s)$ nie sú nezávislé. Nech $U(s)$ je tiež Brownov pohyb definovaný na rovnakom filtrovanom pravdepodobnom priestore, ktorý je nezávislý s $W_e(s)$. Potom môžeme $W_d(s)$ ortogonálne rozložiť a platí:

$$dW_d(s) = \rho dW_e(s) + \sqrt{1 - \rho^2} dU(s). \quad (59)$$

V nasledujúcom výpočte (podľa [13]) využijeme fakt, že pri postupnom zjemňovaní delenia časového intervalu sa súčet druhých mocnín prírastkov Brownového pohybu prestáva správať náhodne. Dá sa ukázať, že potom konverguje k dĺžke časového kroku na ktorom prírastky sčítujeme, čiže $(dW_t)^2 \rightarrow dt$ (podľa [1]). Inými slovami, druhá mocnina prírastku Brownovho pohybu sa pri integrácii správa ako časový prírastok. V ďalšej časti zúžitkujeme fakt, že súčin dvoch integrálov s nezávislými Wienerovými procesmi, teda súčin dvoch nezávislých integrálov, čiže v našom prípade súčin dvoch nezávislých stredných hodnôt, je nula.

A teda $E(Y(t) \cdot Z(t))$ je rovné

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\int_0^t \frac{b}{c-b} (e^{b(s-t)} - e^{c(s-t)}) B_e \sin^2(\phi - \omega s) dW_e \int_0^t e^{b(s-t)} B_d \sin^2(\phi - \omega s) dW_d \right) \right] \\ &= E \left[\left(\int_0^t \frac{b}{c-b} (e^{b(s-t)} - e^{c(s-t)}) B_e \sin^2(\phi - \omega s) dW_e dW_e \right) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(\int_0^t e^{b(s-t)} B_d \sin^2(\phi - \omega s) \rho dW_e + \int_0^t e^{b(s-t)} B_d \sin^2(\phi - \omega s) \sqrt{1 - \rho^2} dU \right) \right] \\ &= E \left(\rho \int_0^t \frac{b}{c-b} (e^{b(s-t)} - e^{c(s-t)}) B_e \sin^2(\phi - \omega s) e^{b(s-t)} B_d \sin^2(\phi - \omega s) ds + 0 \right), \end{aligned} \quad (60)$$

čiže

$$E(YZ) = E \left(\rho \int_0^t \frac{b}{c-b} (e^{b(s-t)} - e^{c(s-t)}) B_e \sin^2(\phi - \omega s) e^{b(s-t)} B_d \sin^2(\phi - \omega s) ds \right), \quad (61)$$

z čoho vyplýva, že

$$cov(Y, Z) = \rho \int_0^t \frac{b}{c-b} (e^{b(s-t)} - e^{c(s-t)}) B_e \sin^2(\phi - \omega s) e^{b(s-t)} B_d \sin^2(\phi - \omega s) ds. \quad (62)$$

Celkovo teda vieme povedať, že európska aj domáca zložka majú normálne rozdelenie s nasledovnými parametrami rozdelenia:

$$E_e[r_t|r_0] = e^{-ct}r_e(0) + cA_e e^{-ct}I_{0,t}(c), \quad (63)$$

$$D_e[r_t|r_0] = B_e^2 \tilde{I}_{0,t}^2(c), \quad (64)$$

$$\begin{aligned} E_d[r_t|r_0] &= \frac{b}{c-b}(e^{-bt} - e^{-ct})r_e(0) + e^{-bt}r_d(0) + \\ &+ \frac{bcA_e}{c-b}(e^{-bt}I_{0,t}(b) - e^{-ct}I_{0,t}(c)), \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} D_e[r_t|r_0] &= \left(\frac{b}{c-b}\right)^2 B_e^2 \left(\tilde{I}_{0,t}^2(b) - \tilde{I}_{0,t}^2(c)\right) + B_d^2 \left(\tilde{I}_{0,t}^2(b)\right) + \\ &+ 2\rho B_e B_d \frac{b}{c-b} \int_0^t e^{b(s-t)} (e^{b(s-t)} - e^{c(s-t)}) \sin^4(\phi - \omega s) ds, \end{aligned} \quad (66)$$

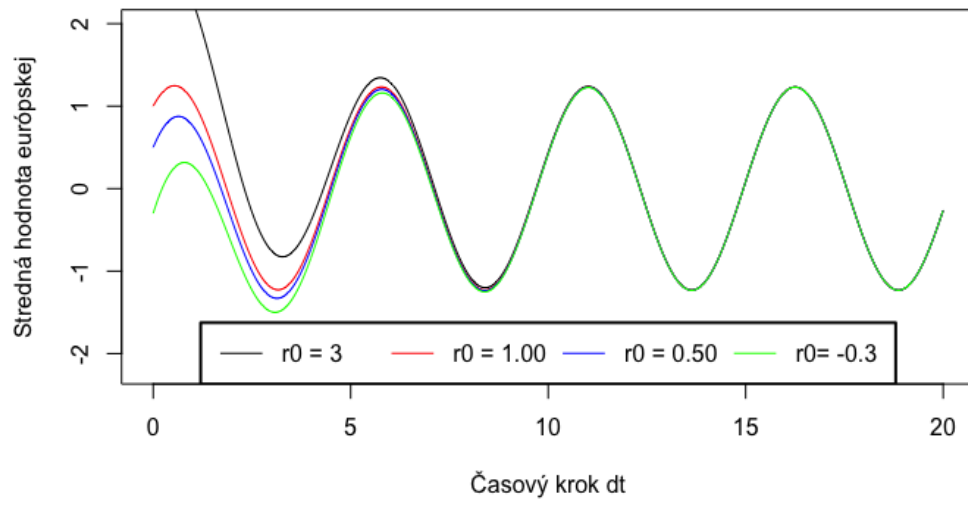
kde

$$I_{0,t}(c) = \int_0^t e^{cs} \sin(\phi - \omega s) ds, \quad (67)$$

$$\tilde{I}_{0,t}^2(c) = \int_0^t (e^{c(s-t)} \sin^2(\phi - \omega s))^2 ds. \quad (68)$$

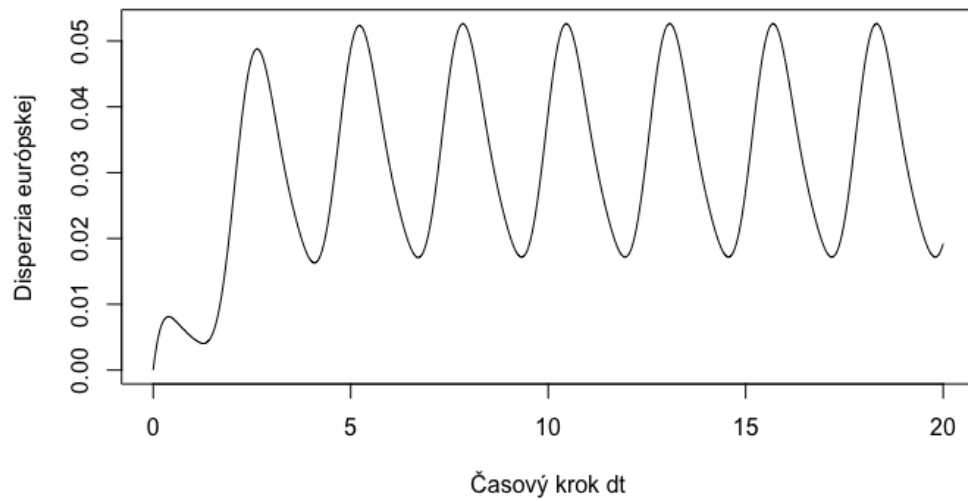
Poznámka: Horný index v druhom integráli by mohol u čitateľa neskôr vyvolať mylný dojem, že ide o druhú mocninu nejakého výrazu. Motiváciou tohto značenia bolo umocňovanie integrovanej funkcie. Preto číslo dva v hornom indexe v $\tilde{I}_{0,t}^2(c)$ neznamená umocnenie integrálu, ide výlučne o spôsob značenia.

Na obrázkoch uvedených na ďalšej strane možno vidieť priebeh strednej hodnoty a disperzie európskej, ako aj domácej zložky v čase t . Všimnime si vplyv začiatočnej podmienky, respektíve to, ako tento vplyv časom klesá a ostáva iba sínusový priebeh. Toto sme očakávali vzhľadom k tomu, ako sme model formulovali - je to cyklický model, ktorý v sebe zahŕňa cykly vo volatilita a v limitnej hodnote úrokovej miery.



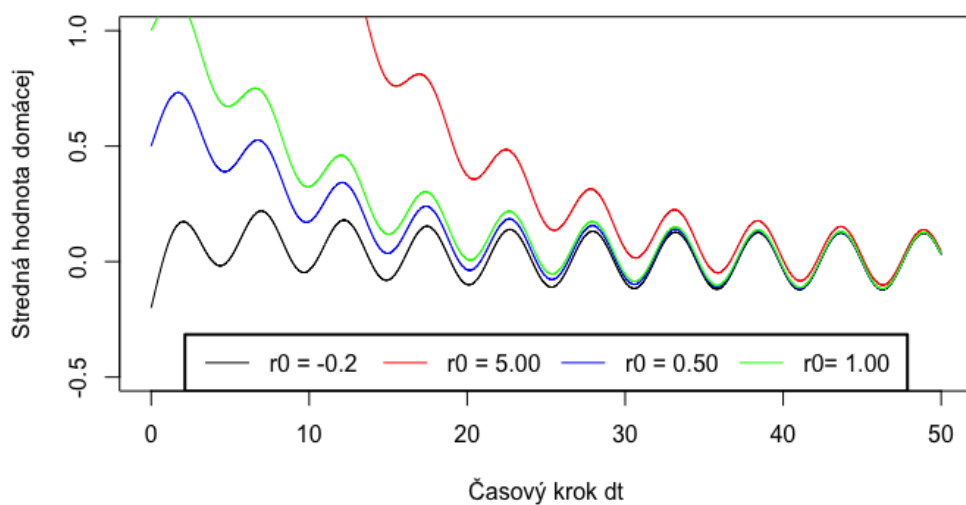
Obr. 1: Stredná hodnota európskej zložky modelu

Použité parametre: $c = 0.5$, $A_e = 3.2$, $\omega = 1.2$, $\phi = \frac{\pi}{3}$



Obr. 2: Disperzia európskej zložky modelu

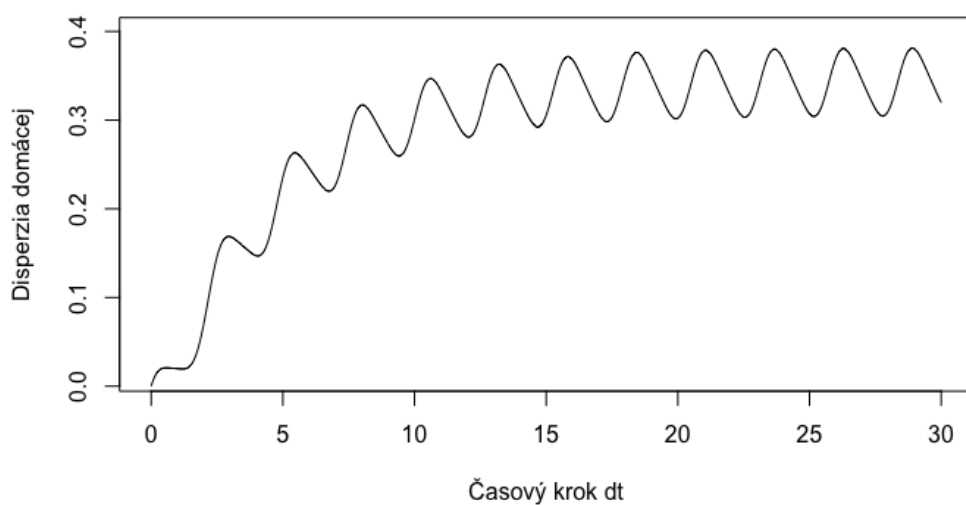
Použité parametre: $c = 0.5$, $B_e = 0.3$, $\omega = 1.2$, $\phi = \frac{\pi}{3}$



Obr. 3: Stredná hodnota domácej zložky modelu

Použité parametre: $b = 0.12, c = 0.5, A_e = 3.2, \omega = 1.2, \phi = \frac{\pi}{3}$

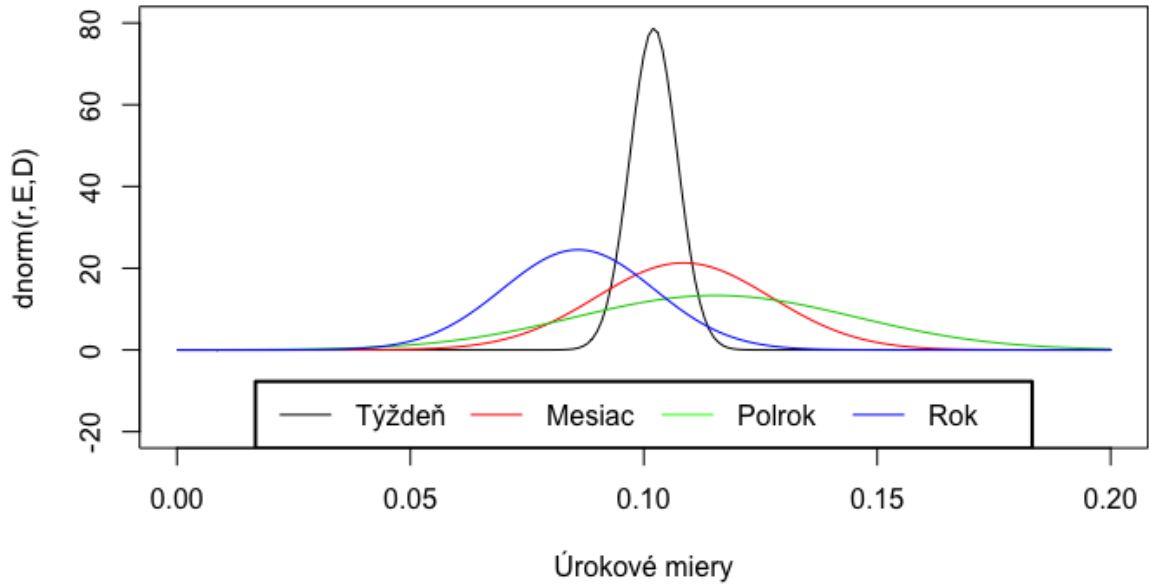
Na Obr.3 je viditeľná aj konvergenčná vlastnosť modelu - úroková miera v čase konverguje k jednej hodnote, kde sa opäť prejaví cyklický charakter a sínusoidy sa zlúčia do jednej. Zobraziť ešte disperziu domácej zložky.



Obr. 4: Disperzia domácej zložky modelu

Použité parametre: $\rho = 0.8, B_d = 0.42, \omega = 1.2, \phi = \frac{\pi}{3}$

Vieme, že zložky úrokových mier v našom modeli sa riadia normálnym rozdelením. Na demonštráciu normálnosti pridávame jeden obrázok, ktorý ukazuje graf hustoty normálneho rozdelenia európskej úrokovej miery o týždeň, mesiac, polrok a rok.



Obr. 5: Hustota európskeho modelu pre rôzne časy

Použité parametre: $c = 0.7, B_e = 0.7, \omega = 1.4, \phi = \frac{\pi}{3}, A_e = 0.3$

V ďalších kapitolách budeme potrebovať poznať tvar stredných hodnôt a disperzií pre nejaký časový krok, označme ho Δt . Postup je analogický ako na začiatku tejto kapitoly, preto ho nie je nutné opätovne uvádzať. Čo sa nám však zmení, je tvar integrálov, z ktorých vychádzame. Čiže pre „posunutú“ úrokovú mieru bude platiť, že

$$r(t + \Delta t) = e^{M\Delta t}r(t) + \int_t^{t+\Delta t} e^{M(t+\Delta t-s)}F(s)ds + \int_t^{t+\Delta t} e^{M(t+\Delta t-s)}B(s)dW_s, \quad (69)$$

pričom

$$e^{M\Delta t} = \begin{pmatrix} e^{-c\Delta t} & 0 \\ \frac{b}{b-c}(e^{-b\Delta t} - e^{-c\Delta t}) & e^{-b\Delta t} \end{pmatrix}. \quad (70)$$

Ako bolo povedané, deterministickú časť pre úrokovú mieru s časovým krokom už odtiaľto počítame analogicky. Čo sa týka stochastickej časti, opäť iba uvedieme, z akého

integrálu budeme vychádzať, pretože výpočet je tiež taký istý. Teda, pre stochastickú časť platí, že

$$SC_{krok} = \begin{pmatrix} e^{-c\Delta t} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{-b\Delta t} - e^{-c\Delta t}) & e^{-b\Delta t} \end{pmatrix} \int_t^{t+\Delta t} \begin{pmatrix} e^{cs} & 0 \\ \frac{b}{c-b}(e^{bs} - e^{cs}) & e^{bs} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_e \sin^2(\phi - \omega s) & 0 \\ 0 & B_d \sin^2(\phi - \omega s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_e \\ dW_d \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Vypočítaním integrálov sa dopracujeme k nasledovným rovnostiam:

$$E_e[r_{t+\Delta t}|r_t] = e^{-c\Delta t}r_e(t) + cA_e e^{-c(t+\Delta t)}I_{t,t+\Delta t}(c), \quad (72)$$

$$D_e[r_{t+\Delta t}|r_t] = B_e^2 \tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c), \quad (73)$$

$$E_d[r_{t+\Delta t}|r_t] = \frac{b}{c-b}(e^{-b\Delta t} - e^{-c\Delta t})r_e(t) + e^{-b\Delta t}r_d(t) + \frac{bcA_e}{c-b}(e^{-b\Delta t}I_{t,t+\Delta t}(b) - e^{-c\Delta t}I_{t,t+\Delta t}(c)), \quad (74)$$

$$D_d[r_{t+\Delta t}|r_t] = \left(\frac{b}{c-b}\right)^2 B_e^2 \left(\tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(b) - \tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c)\right) + B_d^2 \tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(b) + 2\rho B_e B_d \cdot \frac{b}{c-b} \int_t^{t+\Delta t} (e^{b(s-(t+\Delta t))} - e^{c(s-(t+\Delta t))}) \sin^4(\phi - \omega s) e^{b(s-(t+\Delta t))} ds, \quad (75)$$

kde

$$I_{t,t+\Delta t}(c) = \int_t^{t+\Delta t} e^{cs} \sin(\phi - \omega s) ds, \quad (76)$$

$$\tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c) = \int_t^{t+\Delta t} (e^{c(s-t)} \sin^2(\phi - \omega s))^2 ds \quad (77)$$

a teda vieme, ako vyzerajú stredné hodnoty a disperzie aj pre časový krok Δt .

4 Oceňovanie dlhopisov

V tejto kapitole budeme počítat ceny dlhopisov pre európsku a domácu zložku modelu. Na ich oceňovanie sú potrebné trhové ceny rizika, ktoré budeme brať konštantné v oboch submodeloch. Je to analógia s Vašíčkovým modelom [10] a aj s konvergenčným modelom od Corzovej a Schwartz [3], ktorý bol navrhnutý na základe Vašíčkovho modelu. Začneme ako obvykle, európskou zložkou.

4.1 Európske dlhopisy

Majme stochastickú diferenciálnu rovnicu:

$$dr_e = c(A_e \sin(\phi - \omega t) - r_e)dt + B_e \sin^2(\phi - \omega t)dW_t. \quad (78)$$

Nech $\tau = T - t$, pričom T považujeme za fixovaný parameter. Navyše vieme, že funkcia $P(r, \tau)$ spĺňa parciálnu diferenciálnu rovnicu (ďalej PDR) uvedenú v Tvrdení 1.18.

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{\partial P}{\partial \tau} + [c(A_e \sin(\phi - \omega t) - r_e) - \lambda_e B_e \sin^2(\phi - \omega t)] \frac{\partial P}{\partial r_e} + \\ & + \frac{B_e^2 \sin^4(\phi - \omega t)}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} - r_e P, \end{aligned} \quad (79)$$

pričom $P(r_e, 0) = 1$ pre všetky $r_e > 0$.

Majme konštantnú trhovú cenu rizika λ_e . Riešenie budeme hľadať v tvare

$$P(r_e, \tau) = \alpha(\tau) e^{-\beta(\tau)r_e}, \quad (80)$$

pričom $\alpha(0) = 1, \beta(0) = 0$.

Počítajme derivácie:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = e^{-\beta(\tau)r_e} \left(\dot{\alpha}(\tau) - \alpha(\tau)\dot{\beta}(\tau)r_e \right) \quad (81)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r_e} = \alpha(\tau) e^{-\beta(\tau)r_e} (-\beta(\tau)r_e) \quad (82)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} = \alpha(\tau) \beta^2(\tau) e^{-\beta(\tau)r_e}. \quad (83)$$

Dosadením do príslušnej PDR dostávame

$$\begin{aligned} 0 = & e^{-\beta(\tau)r_e} \left(\dot{\alpha}(\tau) - \alpha(\tau)\dot{\beta}(\tau)r_e \right) \\ & + [c(A_e \sin(\phi - \omega(T - \tau)) - r_e) - \lambda_e B_e \sin^2(\phi - \omega(T - \tau))] \cdot \\ & \cdot \alpha(\tau) e^{-\beta(\tau)r_e} (-\beta(\tau)r_e) + \frac{B_e^2 \sin^4(\phi - \omega(T - \tau))}{2} \alpha(\tau) \beta^2(\tau) e^{-\beta(\tau)r_e} - r_e \alpha e^{-\beta(\tau)r_e}, \end{aligned} \quad (84)$$

Člen r_e osamostatníme a dostávame

$$\begin{aligned}
0 &= r_e \alpha(\tau) \left(\dot{\beta} + c\beta - 1 \right) \\
&+ (-\dot{\alpha} - c(A_e \sin(\phi - \omega(T - \tau)))\alpha(\tau)\beta(\tau) + \\
&+ \lambda_e B_e \sin^2(\phi - \omega(T - \tau))\alpha(\tau)\beta(\tau) + \frac{B_e^2 \sin^4(\phi - \omega(T - \tau))}{2} \alpha(\tau)\beta^2(\tau)).
\end{aligned} \tag{85}$$

Ak má rovnosť platiť pre všetky r_e , tak obe zátvorky musia byť nulové. Teda dostávame sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc (ďalej ODR):

$$0 = -\dot{\alpha} - c(A_e \sin(\phi - \omega(T - \tau)))\alpha(\tau)\beta(\tau) + \tag{86}$$

$$+ \lambda_e B_e \sin^2(\phi - \omega(T - \tau))\alpha(\tau)\beta(\tau) + \frac{B_e^2 \sin^4(\phi - \omega(T - \tau))}{2} \alpha(\tau)\beta^2(\tau)$$

$$0 = \dot{\beta} + c\beta - 1. \tag{87}$$

Druhú z rovníc vieme vyriešiť pomerne jednoducho a jej riešenie je

$$\beta(\tau) = \frac{1 - e^{-c\tau}}{c}. \tag{88}$$

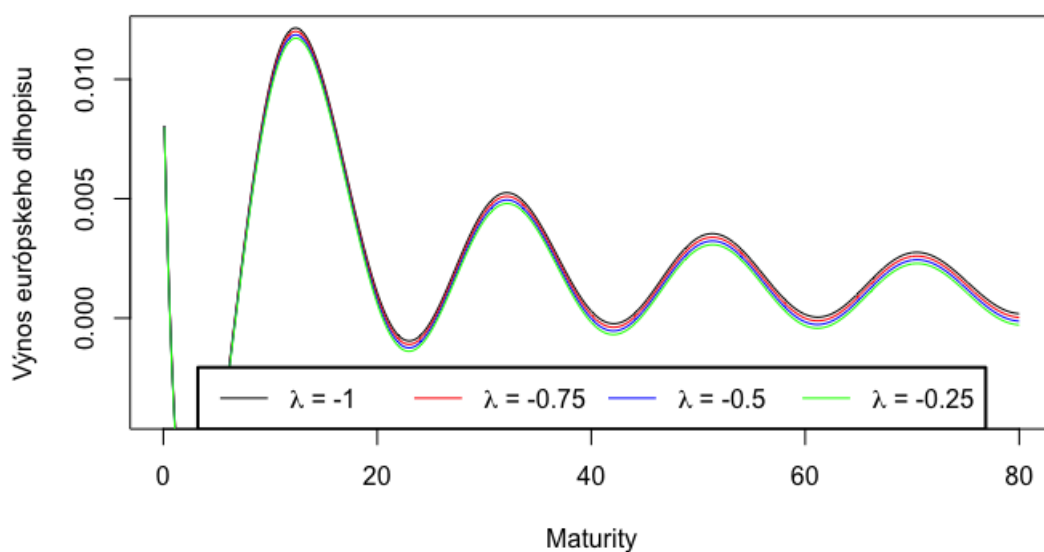
Dosadením do prvej rovnice vieme prejsť k separovanému tvaru ODR, ktorý vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{\alpha} &= \frac{1 - e^{-c\tau}}{c} \sin(\phi - \omega(T - \tau)) \cdot \\
&\cdot \left(\frac{B_e^2 \sin^3(\phi - \omega(T - \tau))}{2} \left(\frac{1 - e^{-c\tau}}{c} \right) + \lambda_e B_e \sin(\phi - \omega(T - \tau)) - cA_e \right) d\tau,
\end{aligned} \tag{89}$$

z čoho vyplýva, že

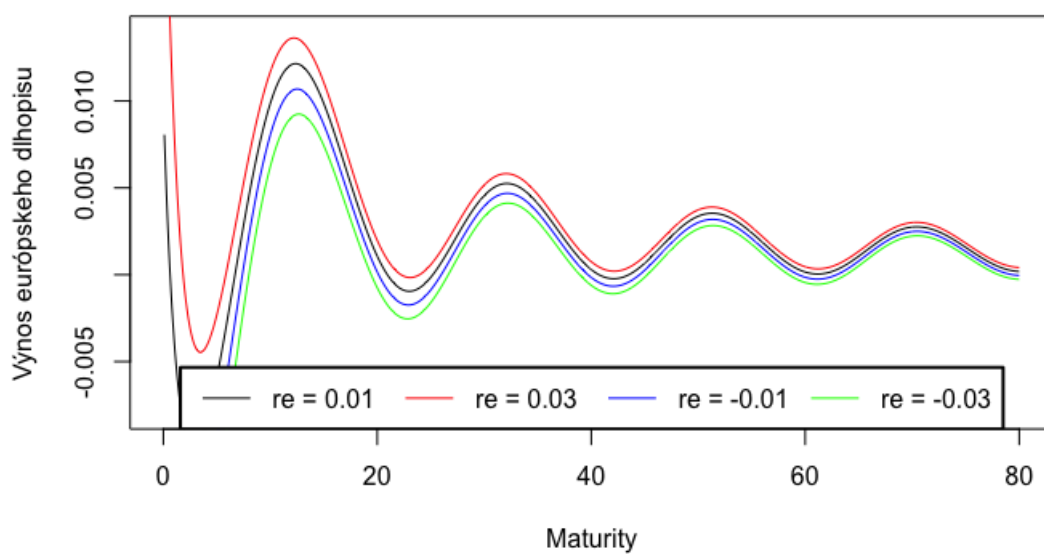
$$\begin{aligned}
\ln(\alpha) &= \int_0^\tau \frac{1 - e^{-cs}}{c} \sin(\phi - \omega(T - s)) \cdot \\
&\cdot \left(\frac{B_e^2 \sin^3(\phi - \omega(T - s))}{2} \left(\frac{1 - e^{-cs}}{c} \right) + \lambda_e B_e \sin(\phi - \omega(T - s)) - cA_e \right) ds.
\end{aligned} \tag{90}$$

Riešenie uvedenej rovnice neuvádzame, vzhľadom na jeho dĺžku. Rovnicu však bolo potrebné doriešiť, aby sme boli schopní vykresliť výnosové krivky, ktoré zobrazujeme na nasledujúcich obrázkoch (v poradí najskôr s rôznymi trhovými cenami rizika a potom s rôznymi hodnotami krátkodobej úrokovej miery). Poznamenajme, že keďže model zatiaľ nemáme nakalibrovaný, tak používame iba ilustračné hodnoty parametrov.



Obr. 6: Výnosové krivky európskeho modelu pri rôznych trhových cenách rizika
 Použité parametre: $c = 1.1$, $B_e = \sqrt{0.02}/100$, $\omega = 0.33$, $\phi = \frac{\pi}{3}$, $A_e = -3.2/100$

Nech ďalej $\lambda = -1$. Pre rôzne štartovacie hodnoty r_e dostávame:



Obr. 7: Výnosové krivky európskeho modelu pri rôznych hodnotách short-rate
 Použité parametre: $c = 1.1$, $B_e = \sqrt{0.02}/100$, $\omega = 0.33$, $\phi = \frac{\pi}{3}$, $A_e = -3.2/100$

4.2 Domáce dlhopisy

Majme stochastickú diferenciálnu rovnicu:

$$dr_d = b(r_e - r_d)dt + B_d \sin^2(\phi - \omega t) dW_d \quad (91)$$

Už vieme, že $\tau = T - t$, kde T je fixovaný parameter. Funkcia $P(r, \tau)$:

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{\partial P}{\partial \tau} + (b(r_e - r_d) - \lambda_d B_d \sin^2(\phi - \omega t)) \frac{\partial P}{\partial r_d} + \\ & + [c(A_e \sin(\phi - \omega t)) - r_e] - \lambda_e B_e \sin^2(\phi - \omega t) \frac{\partial P}{\partial r_e} + \frac{B_d^2 \sin^4(\phi - \omega t)}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} + \\ & + \frac{B_e^2 \sin^4(\phi - \omega t)}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} + \rho B_d^2 \sin^2(\phi - \omega t) B_e^2 \sin^2(\phi - \omega t) \frac{\partial^2 P}{\partial r_e \partial r_d} - r_d P \end{aligned} \quad (92)$$

Riešenie hľadáme v tvare:

$$P_d(r_d, r_e, \tau) = \tilde{\alpha}(\tau) e^{-r_d \tilde{\beta}(\tau) - r_e \tilde{\gamma}(\tau)}, \quad (93)$$

pričom $\tilde{\alpha}(\tau) = 1, \tilde{\beta}(\tau) = 0, \tilde{\gamma}(\tau) = 0$.

Počítajme derivácie:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = e^{-r_d \tilde{\beta}(\tau) - r_e \tilde{\gamma}(\tau)} \left[\dot{\tilde{\alpha}}(\tau) + \tilde{\alpha}(\tau) (-r_d \dot{\tilde{\beta}}(\tau) - r_e \dot{\tilde{\gamma}}(\tau)) \right] \quad (94)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r_e} = \tilde{\alpha}(\tau) e^{-r_d \tilde{\beta}(\tau) - r_e \tilde{\gamma}(\tau)} (-\tilde{\gamma}(\tau)) \quad (95)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} = \tilde{\alpha}(\tau) e^{-r_d \tilde{\beta}(\tau) - r_e \tilde{\gamma}(\tau)} \tilde{\gamma}^2(\tau) \quad (96)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r_d} = \tilde{\alpha}(\tau) e^{-r_d \tilde{\beta}(\tau) - r_e \tilde{\gamma}(\tau)} (-\tilde{\beta}(\tau)) \quad (97)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} = \tilde{\alpha}(\tau) e^{-r_d \tilde{\beta}(\tau) - r_e \tilde{\gamma}(\tau)} \tilde{\beta}^2(\tau) \quad (98)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r_e \partial r_d} = \tilde{\beta}(\tau) \tilde{\gamma}(\tau) \tilde{\alpha}(\tau) e^{-r_d \tilde{\beta}(\tau) - r_e \tilde{\gamma}(\tau)} \quad (99)$$

Dosadením do PDR uvedenej v Tvrdení 1.19 a následným predelením rovnice výrazom $e^{-r_d \tilde{\beta}(\tau) - r_e \tilde{\gamma}(\tau)}$ dostávame

$$\begin{aligned} 0 = & r_d \left[\tilde{\alpha}(\tau) \dot{\tilde{\beta}}(\tau) + b \tilde{\beta}(\tau) \tilde{\alpha}(\tau) - \tilde{\alpha}(\tau) \right] + r_e \left[\tilde{\alpha}(\tau) \dot{\tilde{\gamma}}(\tau) - b \tilde{\beta}(\tau) \tilde{\alpha}(\tau) + c \tilde{\gamma}(\tau) \tilde{\alpha}(\tau) \right] - \\ & - \dot{\tilde{\alpha}}(\tau) + \lambda_d \tilde{\beta}(\tau) \tilde{\alpha}(\tau) B_d \sin^2(\phi - \omega(T - \tau)) + \lambda_e \tilde{\gamma}(\tau) \tilde{\alpha}(\tau) B_e \sin^2(\phi - \omega(T - \tau)) - \\ & - c A_e \sin(\phi - \omega(T - \tau)) \tilde{\gamma}(\tau) \tilde{\alpha}(\tau) + \frac{B_d^2 \sin^4(\phi - \omega(T - \tau))}{2} \tilde{\beta}^2(\tau) \tilde{\alpha}(\tau) + \\ & + \frac{B_e^2 \sin^4(\phi - \omega(T - \tau))}{2} \tilde{\gamma}^2(\tau) \tilde{\alpha}(\tau) + \rho B_d B_e \sin^4(\phi - \omega(T - \tau)) \tilde{\gamma}(\tau) \tilde{\beta}(\tau) \tilde{\alpha}(\tau), \end{aligned} \quad (100)$$

z čoho tak, ako aj v európskom modeli, vyplýva sústava troch obyčajných diferenciálnych rovníc:

$$0 = \dot{\tilde{\beta}}(\tau)\tilde{\alpha}(\tau) + b\tilde{\beta}(\tau)\tilde{\alpha}(\tau) - \tilde{\alpha}(\tau) \quad (101)$$

$$0 = \tilde{\alpha}(\tau)\dot{\tilde{\gamma}}(\tau) - b\tilde{\beta}(\tau)\tilde{\alpha}(\tau) + c\tilde{\gamma}(\tau)\tilde{\alpha}(\tau) \quad (102)$$

$$\begin{aligned} 0 = & -\dot{\tilde{\alpha}}(\tau) + \lambda_d\tilde{\beta}(\tau)\tilde{\alpha}(\tau)B_d\sin^2(\phi - \omega(T - \tau)) + \lambda_e\tilde{\gamma}(\tau)\tilde{\alpha}(\tau)B_e\sin^2(\phi - \omega(T - \tau)) - \\ & - cA_e\sin(\phi - \omega(T - \tau))\tilde{\gamma}(\tau)\tilde{\alpha}(\tau) + \frac{B_d^2\sin^4(\phi - \omega(T - \tau))}{2}\tilde{\beta}^2(\tau)\tilde{\alpha}(\tau) + \\ & + \frac{B_e^2\sin^4(\phi - \omega(T - \tau))}{2}\tilde{\gamma}^2(\tau)\tilde{\alpha}(\tau) + \rho B_d B_e \sin^4(\phi - \omega(T - \tau))\tilde{\gamma}(\tau)\tilde{\beta}(\tau)\tilde{\alpha}(\tau) \end{aligned} \quad (103)$$

Riešenia rovníc (101-104) sú:

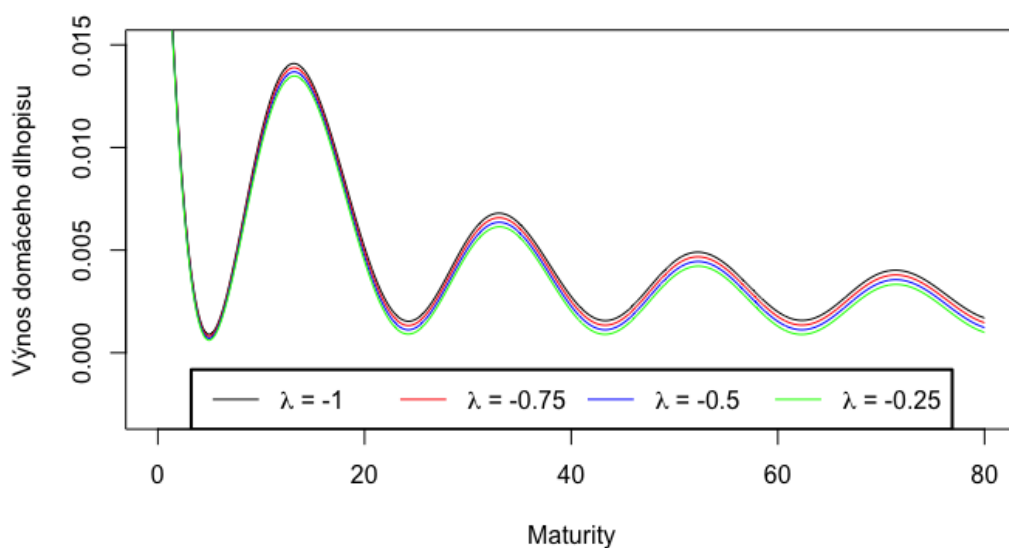
$$\tilde{\beta}(\tau) = \frac{1 - e^{-b\tau}}{b} \quad (104)$$

$$\tilde{\gamma}(\tau) = \frac{-be^{-c\tau} + c(e^{-b\tau} - 1) + b}{c(b - c)} \quad (105)$$

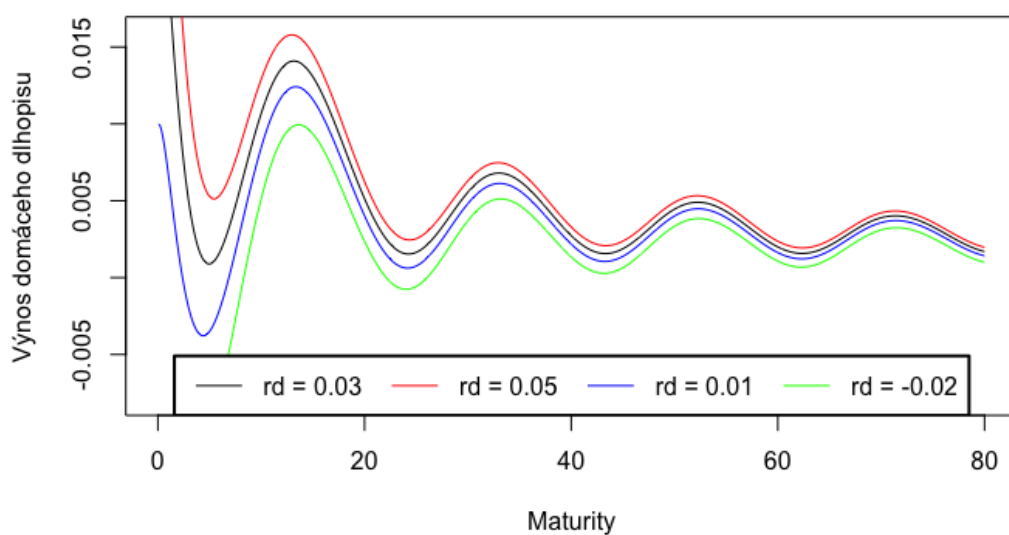
$$\begin{aligned} \ln \tilde{\alpha}(\tau) = & \int_0^\tau \tilde{\beta}\lambda_d B_d \sin^2(\phi - \omega(T - s)) - \tilde{\gamma}cA_e \sin(\phi - \omega(T - s)) + \\ & + \tilde{\gamma}\lambda_e B_e \sin^2(\phi - \omega(T - s)) + \frac{1}{2}B_d^2\tilde{\beta}^2 \sin^4(\phi - \omega(T - s)) + \\ & + \frac{1}{2}B_e^2\tilde{\gamma}^2 \sin^4(\phi - \omega(T - s)) + \rho B_d B_e \tilde{\beta}\tilde{\gamma} \sin^4(\phi - \omega(T - s)) ds \end{aligned} \quad (106)$$

Na ďalšej strane môže čitateľ nájsť výnosové krivky. Tak, ako pri európskom modeli, aj v domácom sme očakávali cyklický charakter, čo sa potvrdilo.

Na Obr.č.8 sú vykreslené výnosové krivky domáceho modelu pre rôzne trhové ceny rizika. Na ďalšom obrázku sme zvolili $\lambda_d = -1$ a vykreslili sme výnosové krivky pre rôzne štartovacie hodnoty short-rate.



Obr. 8: Výnosové krivky domáceho modelu pri rôznych trhových cenách rizika
 Použité parametre: $c = 1.1$, $B_e = \sqrt{0.02}/100$, $\omega = 0.33$, $\phi = \frac{\pi}{3}$, $A_e = -3.2/100$
 $b = 0.03$, $\lambda_e = -0.05$, $B_d = \sqrt{0.03}/100$, $\rho = 0.65$



Obr. 9: Výnosové krivky domáceho modelu pri rôznych hodnotách short-rate
 Použité parametre: $c = 1.1$, $B_e = \sqrt{0.02}/100$, $\omega = 0.33$, $\phi = \frac{\pi}{3}$, $A_e = -3.2/100$
 $b = 0.03$, $\lambda_e = -0.05$, $B_d = \sqrt{0.03}/100$, $\rho = 0.65$

5 Kalibrácia modelu

V minulých kapitolách sme vykresľovali priebeh strednej hodnoty a disperzie oboch zložiek modelu, či výnosové krivky, avšak pripomeňme, že sme použili iba ilustračné hodnoty parametrov popisujúcich model. Prirodzene, s ilustračnými hodnotami si nevystačíme a potrebovali by sme hodnoty nejakým spôsobom primerane odhadnúť, čomu sa hovorí aj kalibrácia modelu. Tento odhad vieme uskutočniť z časových radov európskej a domácej úrokovej miery. Vďaka tomu, že poznáme pravdepodobnostné rozdelenie týchto úrokových mier, môžeme použiť metódu maximálnej vierohodnosti.

Definícia 5.1. (Metóda maximálnej vierohodnosti) [6]

Nech náhodný vektor $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)^T$ má známy tvar hustoty pravdepodobnosti (alebo rozdelenia pravdepodobnosti v diskretnom prípade):

$$f(y; \theta)$$

avšak vektor parametrov $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)^T$ je neznámy, vie sa len to, že patrí do známej množiny $\Theta \subset \mathbf{R}^m$ (tzv. parametrického priestoru). Metóda maximálnej vierohodnosti odhaduje hodnotu vektora $\hat{\theta}$ pomocou vektora nameraných údajov $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ ako riešenie maximalizačnej úlohy:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} f(y; \theta).$$

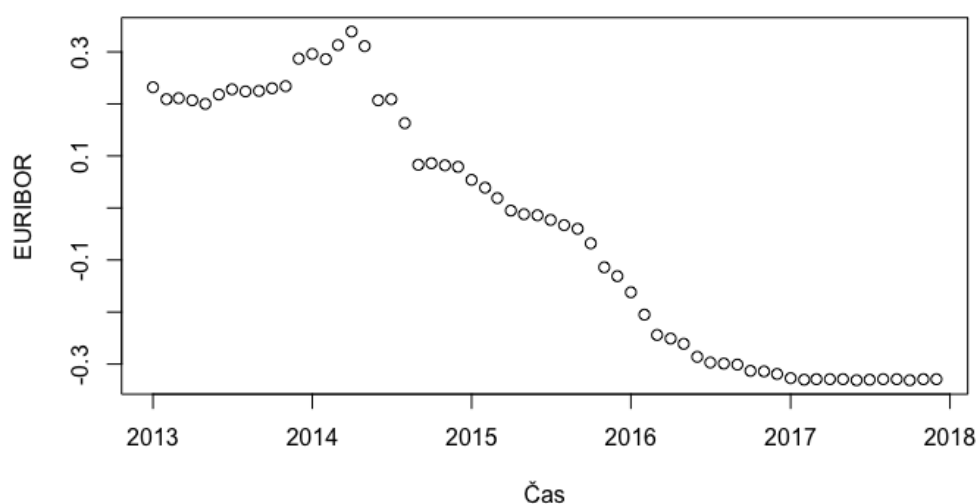
Podstatou tejto kapitoly je odhadnutie hodnôt neznámych parametrov, vystupujúcich v našom modeli. Celkovo máme osem neznámych parametrov, konkrétne parametre c, A_e, B_e^2 v európskom submodeli, ρ, b, B_d^2 v domácom submodeli a ϕ, ω zhodne v oboch. Vďaka predchádzajúcej kapitole poznáme strednú hodnotu a disperziu ako európskej, tak aj domácej úrokovej miery. Budeme postupovať metódou maximálnej vierohodnosti a to nasledovne:

- Najskôr odhadneme parametre zo stochastickej diferenciálnej rovnice pre európsku úrokovú mieru z jej rozdelenia.
- Optimálne hodnoty parametrov A_e, B_e^2 vieme vyjadriť pomocou derivácií, zvyšné európske parametre získame optimalizáciou účelovej funkcie.
- Získané parametre považujeme za známe.

- Parametre, ktoré sú iba v stochastickej diferenciálnej rovnici pre domácu úrokovú mieru odhadujeme z jednorozmerného rozdelenia domácej úrokovej miery, pričom budeme pre jednoduchosť predpokladať nulovú koreláciu.

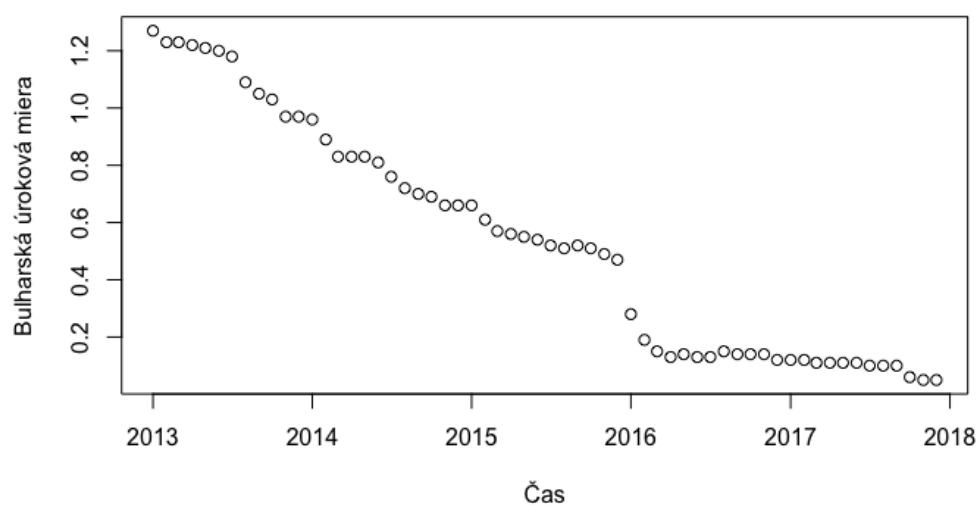
5.1 Použité dáta

V kalibrácii sme použili reálne mesačné dáta pre európsku aj domácu zložku modelu. Tak, ako v práci spomíname, za európsku zložku sme si zvolili EURIBOR za časové obdobie január 2013 až december 2017. Hodnoty európskej úrokovej miery sú znázornené na nasledovnom obrázku:

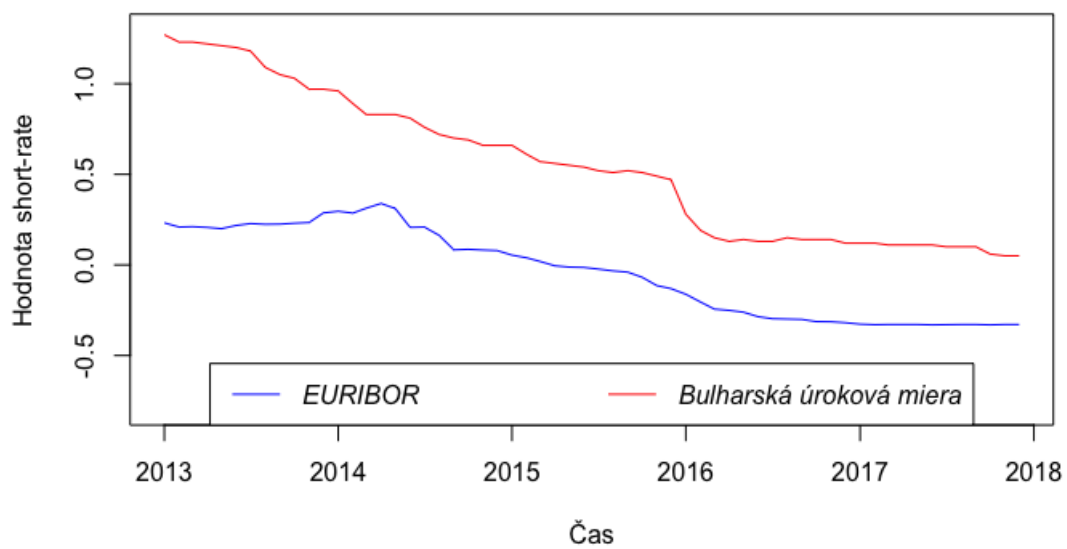


Obr. 10: Priebeh EURIBORu

V úvode sme písali o motivácii výberu Bulharska ako krajiny, pre ktorú budeme zostavovať domácu zložku modelu. Na nasledovnom obrázku zobrazujeme priebeh bulharskej úrokovej miery a následne na Obr.č.12 si možno všimnúť, ako bulharská úroková miera konverguje k EURIBORu.



Obr. 11: Priebeh bulharskej úrokovej miery



Obr. 12: Konvergencia úrokových mier

	r_e	r_d	diferencie r_e	diferencie r_d
Stredná hodnota	-0.0395	0.5413	-0.009508	-0.020678
Medián	-0.0185	0.5300	-0.004	-0.01
Variancia	0.0575	0.1597	0.0005359	0.0010409

Tabuľka 1: Štatistiky použitých dát

5.2 Európska zložka

Na úvod tejto podkapitoly treba čitateľa upozorniť, že kvôli zjednodušeniu označenia budeme pod označením r rozumieť európsku úrokovú mieru, čiže nie vektor úrokových mier, ako tomu bolo doteraz.

Vo všeobecnosti predpokladajme, že máme dáta $r_0, r_{\Delta t}, r_{2\Delta t}, \dots, r_{N\Delta t}$ namerané v časoch $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, N\Delta t$. Poznáme podmienenú strednú hodnotu aj disperziu

$$E[r_{t+\Delta t}|r_t] = e^{-c\Delta t}r(t) + cA_e e^{-c(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} e^{cs} \sin(\phi - \omega s) ds \quad (107)$$

$$D[r_{t+\Delta t}|r_t] = B_e^2 \int_t^{t+\Delta t} (e^{c(s-(t+\Delta t))} \sin^2(\phi - \omega s))^2 ds, \quad (108)$$

respektíve použitím označenia z kapitoly 3

$$E_e[r_{t+\Delta t}|r_t] = e^{-c\Delta t}r(t) + cA_e e^{-c(t+\Delta t)} I_{t,t+\Delta t}(c) \quad (109)$$

$$D_e[r_{t+\Delta t}|r_t] = B_e^2 \tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c). \quad (110)$$

Poznáme aj podmienenú hustotu:

$$f(r_{t+\Delta t}|r_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D[r_{t+\Delta t}|r_t]}} e^{\frac{-(r_{t+\Delta t} - E[r_{t+\Delta t}|r_t])^2}{2D[r_{t+\Delta t}|r_t]}} \quad (111)$$

Keďže chceme použiť metódu maximálnej vierohodnosti, tak je výhodné rovnicu (111) zlogaritmovat, čo výpočty značne zjednoduší. Dostávame

$$\ln(f(r_{t+\Delta t}|r_t)) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{2} \ln(D[r_{t+\Delta t}|r_t]) - \frac{(r_{t+\Delta t} - E[r_{t+\Delta t}|r_t])^2}{2D[r_{t+\Delta t}|r_t]}. \quad (112)$$

Funkcia vierohodnosti L je súčinom hustôt vo všetkých časoch $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, N\Delta t$:

$$L(c, A_e, B_e^2, \omega, \phi) = \prod_{t=0}^{(N-1)\Delta t} f(r_{t+\Delta t}|r_t). \quad (113)$$

Zlogaritmovaním funkcie virohodnosti dostávame jej obvykle používaný tvar

$$\begin{aligned}
\ln(L) &= \ln \left(\prod_{t=0}^{(N-1)\Delta t} f(r_{t+\Delta t}|r_t) \right) = \sum_{t=0}^{(N-1)\Delta t} \ln f(r_{t+\Delta t}|r_t) = \\
&= N \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{(N-1)\Delta t} \left(\ln(D[r_{t+\Delta t}|r_t]) + \frac{(r_{t+\Delta t} - E[r_{t+\Delta t}|r_t])^2}{D[r_{t+\Delta t}|r_t]} \right) = \\
&= N \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{(N-1)} \left(\ln(D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]) + \frac{(r_{(k+1)\Delta t} - E[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}])^2}{D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]} \right),
\end{aligned} \tag{114}$$

ktorý chceme minimalizovať vzhľadom na parametre A_e, B_e^2 . Budeme teda postupovať parciálnym derivovaním podľa týchto dvoch parametrov. Po vypočítaní optimálnych hodnôt $\hat{A}_e, \hat{B}_e^2$, ktoré maximalizujú virohodnostnú funkciu, si ich budeme vedieť vyjadriť. Tým pádom sa nám optimalizácia zjednoduší, pretože budeme optimalizovať iba vzhľadom na parametre c, ω, ϕ , pričom za A_e, B_e^2 budú do účelovej funkcie dosadené už spomínané optimálne hodnoty, ktorých výpočet na tomto mieste uvidíme. Počítajme teda derivácie:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial A_e} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]} (r_{(k+1)\Delta t} - E[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]) \frac{\partial E[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]}{\partial A_e} \tag{115}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L}{\partial B_e^2} &= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]} \frac{\partial D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]}{\partial B_e^2} - \\
&\quad - (r_{(k+1)\Delta t} - E[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}])^2 \frac{1}{D^2[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]} \frac{\partial D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]}{\partial B_e^2}
\end{aligned} \tag{116}$$

Vieme, že

$$\frac{\partial E[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]}{\partial A_e} = c \cdot I_{t,t+\Delta t}(c) e^{-c(k+1)\Delta t}. \tag{117}$$

Pre optimálne A_e má platiť, že $\frac{\partial \ln L}{\partial A_e} = 0$, respektíve

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]} (r_{(k+1)\Delta t} - E[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]) \frac{\partial E[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]}{\partial A_e} = 0. \tag{118}$$

Teda platí, že

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{c \cdot I_{t,t+\Delta t}(c) e^{-c(k+1)\Delta t}}{D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]} (r_{(k+1)\Delta t} - E[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]) = 0. \tag{119}$$

Dosadením dostávame

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{c \cdot I_{t,t+\Delta t}(c) e^{-c(k+1)\Delta t}}{D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]} \left(r_{(k+1)\Delta t} - e^{-c\Delta t} r_{k\Delta t} - c \hat{A}_e e^{-c(k+1)\Delta t} I_{t,t+\Delta t}(c) \right) = 0, \tag{120}$$

respektíve

$$\hat{A}_e \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(c \cdot I_{t,t+\Delta t}(c) e^{-c(k+1)\Delta t})^2}{D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(r_{(k+1)\Delta t} - e^{-c\Delta t} r_{k\Delta t}) c \cdot I_{t,t+\Delta t}(c) e^{-c(k+1)\Delta t}}{D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]} \quad (121)$$

Z rovnice (121) už vieme vyjadriť optimálne A_e :

$$\hat{A}_e = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(r_{(k+1)\Delta t} - e^{-c\Delta t} r_{k\Delta t}) c \cdot I_{t,t+\Delta t}(c) e^{-c(k+1)\Delta t}}{D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]}}{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(c \cdot I_{t,t+\Delta t}(c) e^{-c(k+1)\Delta t})^2}{D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]}}, \quad (122)$$

respektíve použitím $D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}] = B_e^2 \tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c)$:

$$\hat{A}_e = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(r_{(k+1)\Delta t} - e^{-c\Delta t} r_{k\Delta t}) c \cdot I_{t,t+\Delta t}(c) e^{-c(k+1)\Delta t}}{\tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c)}}{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(c \cdot I_{t,t+\Delta t}(c) e^{-c(k+1)\Delta t})^2}{\tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c)}}, \quad (123)$$

kde

$$I_{t,t+\Delta t}(c) = \int_t^{t+\Delta t} e^{cs} \sin(\phi - \omega s) ds \quad (124)$$

$$\tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c) = \int_t^{t+\Delta t} (e^{c(s-t)} \sin^2(\phi - \omega s))^2 ds. \quad (125)$$

Budeme pokračovať vyjadrením optimálneho B_e^2 z (116). Vieme, že

$$\frac{\partial D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]}{\partial B_e^2} = \tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c). \quad (126)$$

Pre optimálne B_e^2 platí, že $\frac{\partial \ln L}{\partial B_e^2} = 0$, t.j.:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]} \cdot \frac{\partial D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]}{\partial B_e^2} - \\ &- (r_{(k+1)\Delta t} - E[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}])^2 \frac{1}{D^2[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]} \frac{\partial D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]}{\partial B_e^2}. \end{aligned} \quad (127)$$

Teda

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\hat{B}_e^2 \tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c)} \cdot \tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c) = \sum_{k=0}^{N-1} (r_{(k+1)\Delta t} - E[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}])^2 \frac{\tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c)}{\hat{B}_e^4 \tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c)} \quad (128)$$

$$N \hat{B}_e^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (r_{(k+1)\Delta t} - E[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}])^2 \frac{1}{\tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c)}, \quad (129)$$

čiže optimálna hodnota $\hat{B}_e^2$ je

$$\hat{B}_e^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (r_{(k+1)\Delta t} - E[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}])^2 \frac{1}{\tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c)}. \quad (130)$$

Keďže poznáme odhad pre parametre A_e a B_e^2 , tak môžeme pokročiť ďalej v optimalizácii. Ako už bolo povedané, tak optimalizovaním vierohodnostnej funkcie vzhľadom na parametre c, ω, ϕ budeme schopní nakalibrovať model. Optimalizáciu prevedieme pomocou funkcie *optim()* použitím metódy *Nelder – Mead*. Na to, aby bola metóda úspešná, musíme vhodne zvoliť štartovacie parametre pre optimalizáciu. Uvedomme si, že voľbou $\omega = 0$ dostávame Vašíčkov model, pre ktorý poznáme (z [7]) vzťah na odhadnutie rýchlosti konverencie, teda parametra c , čo bude naša druhá štartovacia hodnota (prvá bola $\omega = 0$). V cykle vykonáme optimalizáciu pre niekoľko hodnôt ϕ , pričom pre každú hodnotu budeme ukladať funkčnú hodnotu účelovej funkcie, čím jednoducho zistíme, kedy a pre aké hodnoty parametrov c, ω, ϕ účelová funkcia nadobúda maximum.

Uvedomme si, že pri určení intervalu pre ϕ sa nám stačí obmedziť iba na interval dĺžky π . Vysvetlíme prečo, avšak najskôr uvedieme dve vlastnosti funkcie sínus:

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x) \quad (131)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad (132)$$

V našej účelovej funkcii (114) vystupuje výraz $\sin(\phi - \omega s)$ v rôznych mocninách. Je zrejmé, že funkčná hodnota účelovej funkcie sa posunutím ϕ o 2π nezmení (podľa 132). Dá sa ale ukázať viac a síce, že ani posunutie o π nedá inú hodnotu účelovej funkcie.

Pripomeňme, že pre disperziu platí

$$D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}] = B_e^2 \tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c), \quad (133)$$

kde

$$\tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c) = \int_t^{t+\Delta t} (e^{c(s-t)} \sin^2(\phi - \omega s))^2 ds. \quad (134)$$

Jednoducho sa dá ukázať, že $(\sin^2(\phi - \omega s))^2 = (\sin^2(\phi + \pi - \omega s))^2$ (podľa 132). Tým pádom je disperzia rovnaká pre obe periódy.

Sínus nám vystupuje aj v strednej hodnote, pretože

$$E_e[r_{t+\Delta t}|r_t] = e^{-c\Delta t} r_e(t) + c A_e e^{-c(t+\Delta t)} I_{t,t+\Delta t}(c), \quad (135)$$

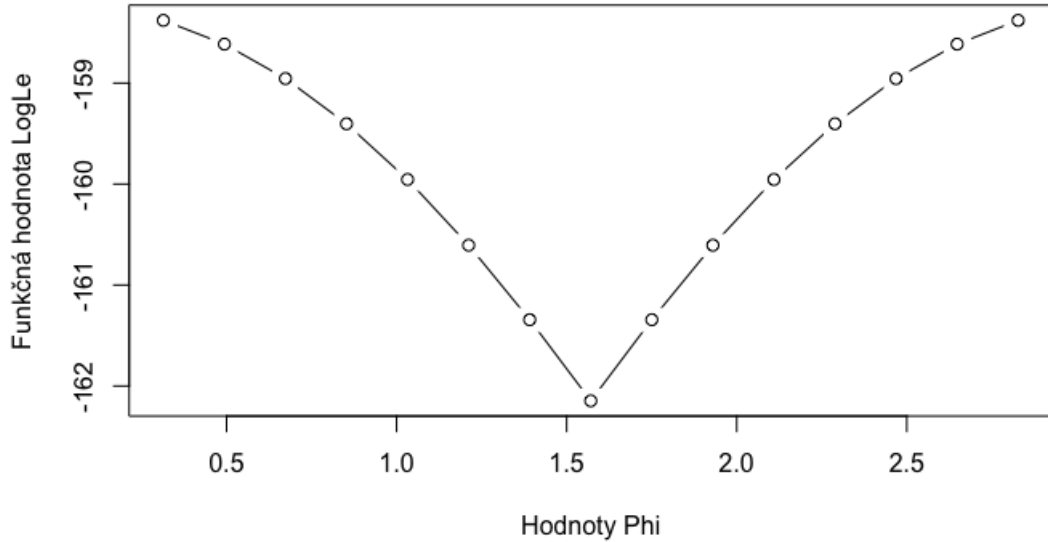
kde

$$I_{t,t+\Delta t}(c) = \int_t^{t+\Delta t} e^{cs} \sin(\phi - \omega s) ds. \quad (136)$$

Všimnime si, že pre dvojicu (ϕ, A_e) a $(\phi + \pi, -A_e)$ dostaneme (podľa 131) tú istú funkčnú hodnotu účelovej funkcie v (114). Pretože

$$-A_e \sin(\phi + \pi - \omega s) = -A_e(-\sin(\phi - \omega s)) = A_e \sin(\phi - \omega s). \quad (137)$$

Z tohto dôvodu budeme v optimalizácii v cykle dodávať štartovacie hodnoty pre ϕ iba z intervalu dĺžky π . Výsledky odhadov pre tieto parametre potom označíme za štartovacie, ktoré vstúpia do druhej fázy optimalizácie, ktorej výsledok budú finálne odhady spomínaných troch parametrov.

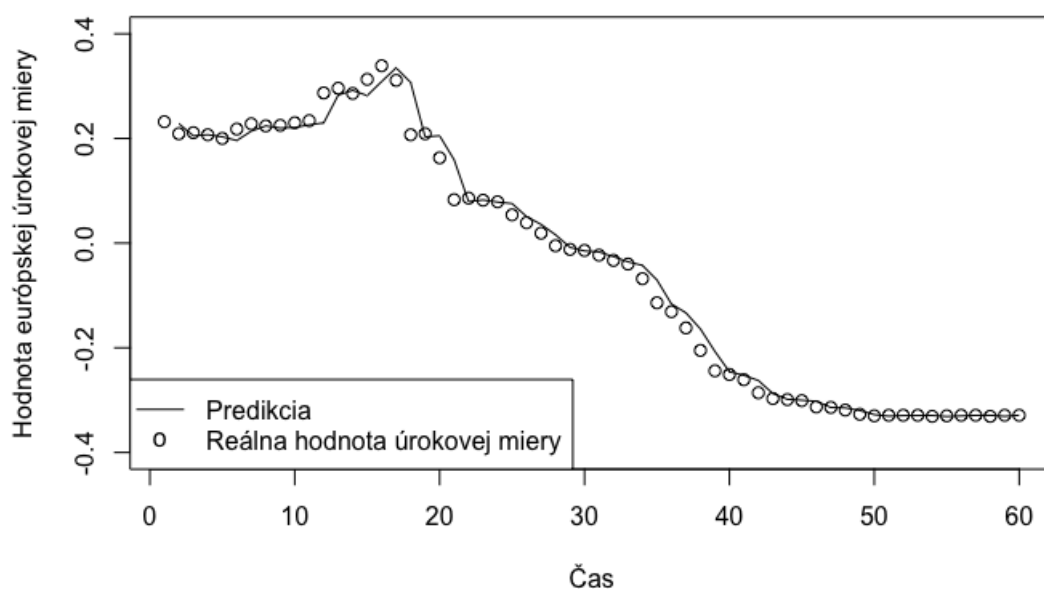


Obr. 13: Funkčné hodnoty logaritmu likelihood funkcie pre rôzne hodnoty ϕ

Keďže máme odvodené, ako vyzerá priebeh strednej hodnoty pre časový krok dt , sme schopní zostrojiť pomocou toho jednokrokovú predikciu zobrazenú na ďalšej strane.

Parameter	Odhadnutá hodnota
c	0.01547261
ω	0.4469588
ϕ	2.316414
A_e	-3.614195
B_e^2	0.01105966

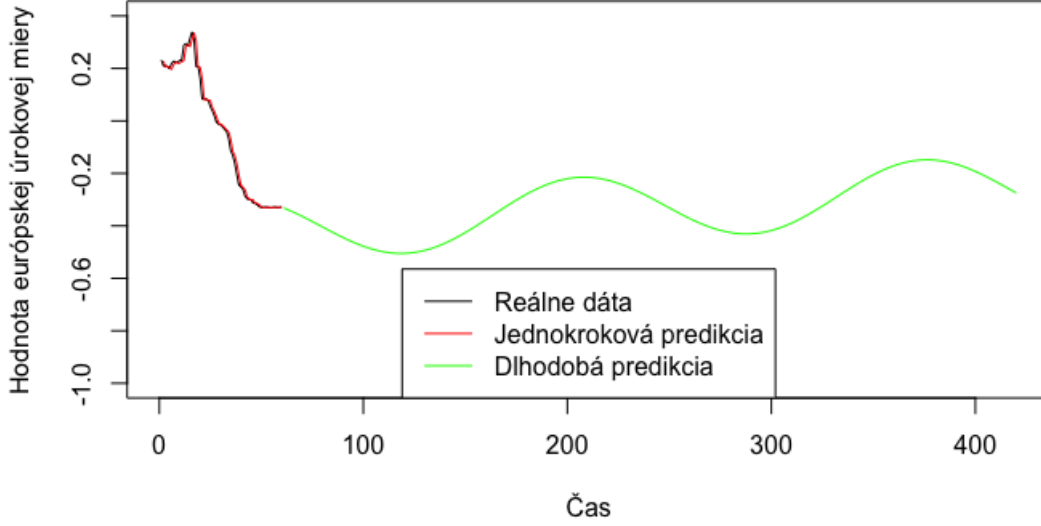
Tabuľka 2: Odhadnuté hodnoty európskych parametrov



Obr. 14: Jednokrokové predikcie

Ak vypočítame sumu štvorcov odchýlok z Obr. 14, dostávame číslo 0.033846. Toto číslo je lepšie ako triviálna predikcia, kedy ako odhad pre nasledujúci mesiac použijeme terajšiu hodnotu (suma štvorcov v takomto prípade je 0.03642).

Pre ilustráciu uvádzame aj dlhodobú predikciu (v tomto prípade 30 rokov). Uvádzame ju preto, lebo na kratšiu predikciu (napríklad jeden rok) výjdu necyklické predikcie, avšak pri (možno až nereálne) dlhej predikcii sa cyklická funkcia - sínus - objaví. Uvedomujeme si, že stav o 3 desaťročia nie je reálna ambícia predikovania. Obrázok slúži na ilustráciu toho, že predikcie sú naozaj také, ako je definovaný náš model - cyklické.



Obr. 15: Dlhodobé predikcie

5.3 Domáca zložka

Podobne, ako v predchádzajúcej podkapitole, tak aj tu budeme pod označením r rozumieť domácu úrokovú mieru a nie vektor oboch zložiek. Analogickým postupom potrebujeme odhadnúť zvyšné parametre, menovite b, B_d^2 . Pre funkciu maximálnej vierohodnosti, respektíve jej logaritmus, platí rovnaký vzťah ako (114), samozrejme v tomto prípade pre domácu strednú hodnotu a disperziu. Naším cieľom je pomocou derivácie podľa B_d^2 odhadnúť tento parameter, aby sa optimalizácia zjednodušila. Odhad pre jednoduchosť urobíme iba pre nulovú koreláciu, rovnako ako sa to robilo v článku [14]. Počítajme teda deriváciu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial B_d^2} &= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]} \frac{\partial D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]}{\partial B_e^2} - \\ &\quad - \left(r_{(k+1)\Delta t} - E[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}] \right)^2 \frac{1}{D^2[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]} \frac{\partial D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]}{\partial B_e^2} \end{aligned} \quad (138)$$

Pre optimálne B_d^2 platí, že $\frac{\partial \ln L}{\partial B_d^2} = 0$, t.j.:

$$0 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]} \cdot \frac{\partial D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]}{\partial B_d^2} - \\ - \left(r_{(k+1)\Delta t} - E[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}] \right)^2 \frac{1}{D^2[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]} \frac{\partial D[r_{(k+1)\Delta t}|r_{k\Delta t}]}{\partial B_d^2}. \quad (139)$$

Pripomeňme, že

$$E_d[r_{t+\Delta t}|r_t] = \frac{b}{c-b}(e^{-b\Delta t} - e^{-c\Delta t})r_e(t) + e^{-b\Delta t}r_d(t) + \\ + \frac{bcA_e}{c-b}(e^{-b\Delta t}I_{t,t+\Delta t}(b) - e^{-c\Delta t}I_{t,t+\Delta t}(c)), \quad (140)$$

$$D_d[r_{t+\Delta t}|r_t] = \left(\frac{b}{c-b} \right)^2 B_e^2 \left(\tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(b) - \tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c) \right) + B_d^2 \tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(b) + 2\rho B_e B_d \frac{b}{c-b} \cdot \\ \cdot \int_t^{t+\Delta t} (e^{b(s-(t+\Delta t))} - e^{c(s-(t+\Delta t))}) \sin^4(\phi - \omega s) e^{b(s-(t+\Delta t))} ds, \quad (141)$$

avšak za predpokladu nulovej korelácie

$$D_d[r_{t+\Delta t}|r_t] = \left(\frac{b}{c-b} \right)^2 B_e^2 \left(\tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(b) - \tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c) \right) + B_d^2 \tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(b). \quad (142)$$

Keďže

$$\frac{\partial D_d[r_{t+\Delta t}|r_t]}{\partial B_d^2} = \tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(b), \quad (143)$$

tak dosadením do (139) dostávame

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(r_{(k+1)\Delta t} - \frac{b}{c-b} \left[(e^{-b\Delta t} - e^{-c\Delta t})r_e(t) - cA_e(e^{-b\Delta t}I_{k\Delta t,(k+1)\Delta t}(b) - \right. \right. \\ \left. \left. - e^{-c\Delta t}I_{k\Delta t,(k+1)\Delta t}(c)) \right] - e^{-b\Delta t}r_d(t) \right)^2 \cdot \\ \cdot \frac{\tilde{I}_{k\Delta t,(k+1)\Delta t}^2(b)}{\left(\left(\frac{b}{c-b} \right)^2 B_e^2 \left(\tilde{I}_{k\Delta t,(k+1)\Delta t}^2(b) - \tilde{I}_{k\Delta t,(k+1)\Delta t}^2(c) \right) + B_d^2 \tilde{I}_{k\Delta t,(k+1)\Delta t}^2(b) \right)^2} = \\ = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{I}_{k\Delta t,(k+1)\Delta t}^2(b)}{\left[\left(\frac{b}{c-b} \right)^2 B_e^2 \left(\tilde{I}_{k\Delta t,(k+1)\Delta t}^2(b) - \tilde{I}_{k\Delta t,(k+1)\Delta t}^2(c) \right) + B_d^2 \tilde{I}_{k\Delta t,(k+1)\Delta t}^2(b) \right]}, \quad (144)$$

kde

$$I_{t,t+\Delta t}(c) = \int_t^{t+\Delta t} e^{cs} \sin(\phi - \omega s) ds \quad (145)$$

$$\tilde{I}_{t,t+\Delta t}^2(c) = \int_t^{t+\Delta t} (e^{c(s-t)} \sin^2(\phi - \omega s))^2 ds. \quad (146)$$

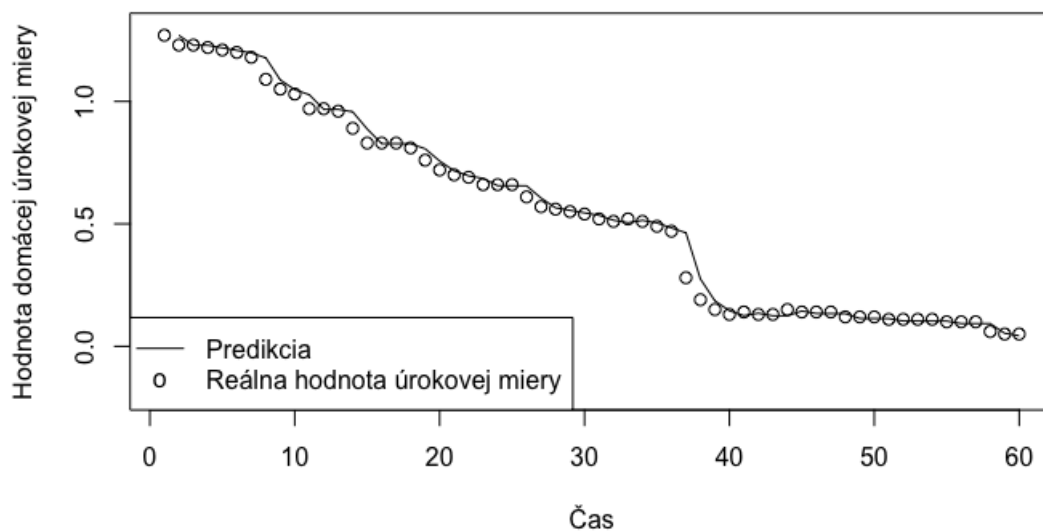
Vyjadriť explicitne parameter B_d^2 v tomto prípade nie je tak jednoduché, ako v európskom sub modeli. Preto použijeme funkciu *uniroot()*, čím si hodnotu B_d^2 vypočítame a následne prevedieme jednorozmernú optimalizáciu, taktiež pomocou funkcie *optim*, lenže tentokrát použitím metódy *Brent* - kvôli jednorozmernosti úlohy. Pripomeňme, že optimalizácia je výrazne zjednodušená vďaka nulovej korelácii.

Na tomto mieste uvádzame tabuľku s odhadnutými hodnotami parametrov domáceho submodelu:

Parameter	Odhadnutá hodnota
b	0.003750925
B_d^2	0.1710355

Tabuľka 3: Odhadnuté domáce parametre

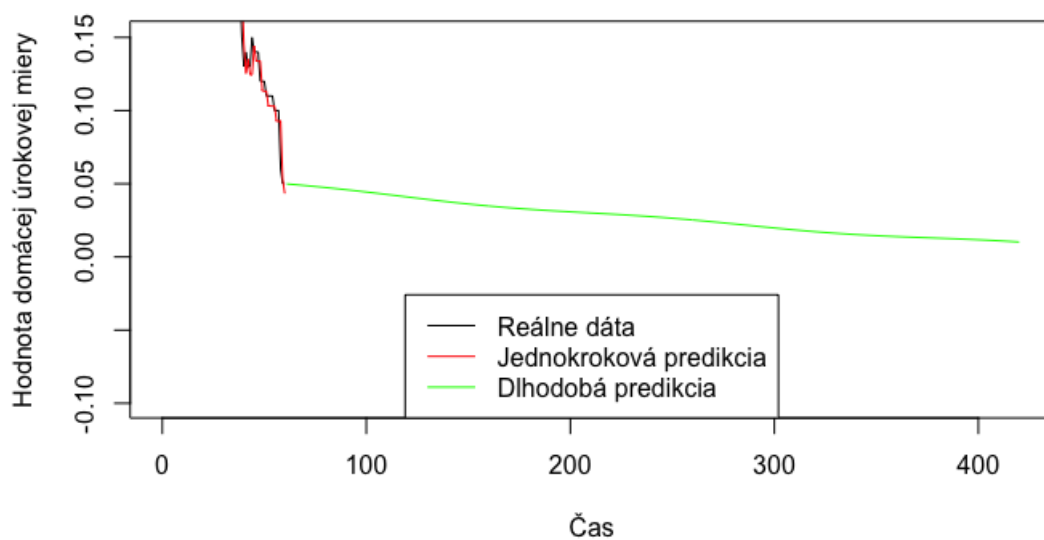
Rovnako ako pre európsku zložku, tak aj v tomto prípade sme urobili jednokrokové predikcie viditeľné na obrázku nižšie.



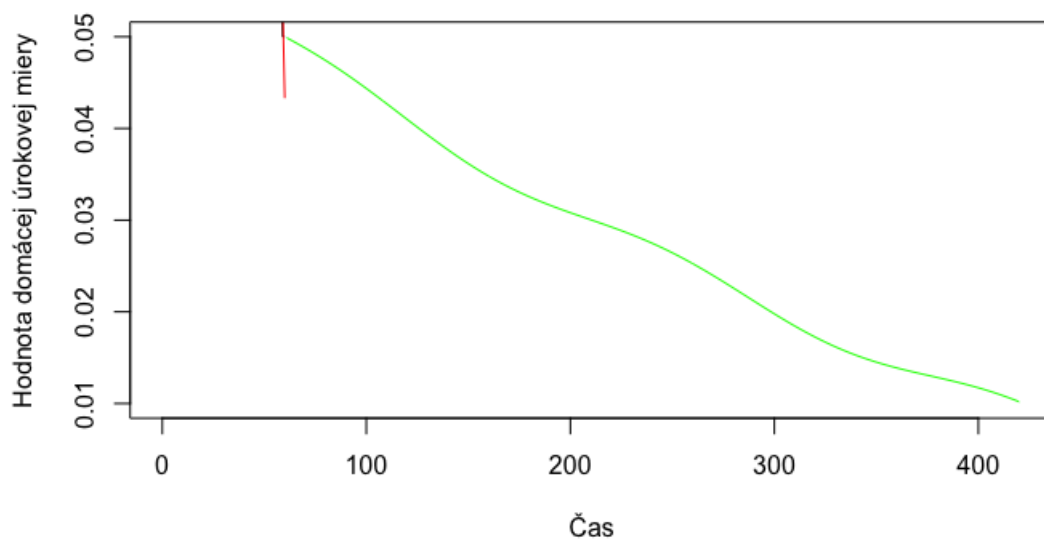
Obr. 16: Jednokrokové predikcie domáceho submodelu

Čo sa týka sumy štvorcov odchýlok, tak pre náš model dostávame číslo 0.07686056, čo je opäť lepšie ako triviálna predikcia, kedy je súčet štvorcov odchýlok 0.0856.

V dlhodobej predikcii je cyklickosť viditeľná menej. Závisí od odhadnutých parametrov, takže takýto priebeh je možný.



Obr. 17: Dlhodobá predikcia

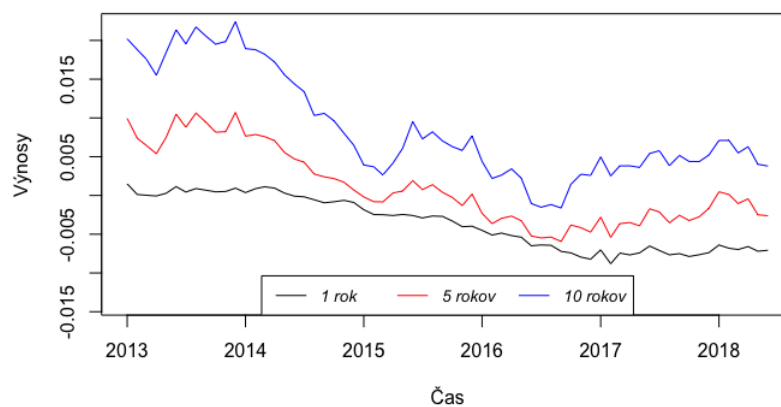


Obr. 18: Dlhodobá predikcia priblížená

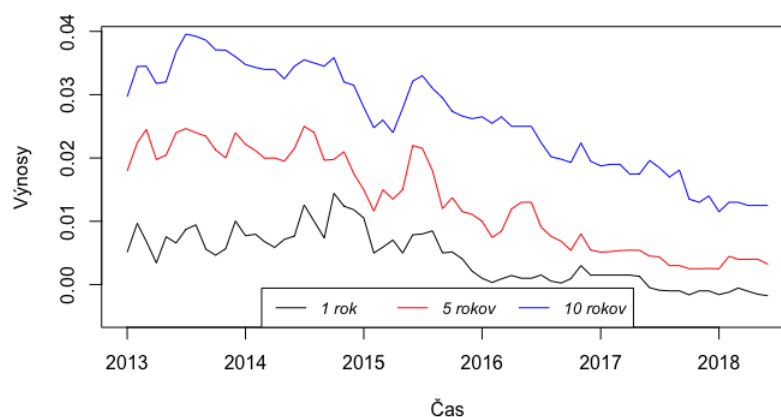
5.4 Odhadovanie trhovej ceny rizika

Kalibrácia by sa ešte mala dokončiť odhadnutím trhových cien rizika (λ_e pre európsky model a λ_d pre domáci). Pripomeňme, že podľa [2] je trhovú cenu rizika funkcia, ktorá vyjadruje očakávaný nárast výnosu dlhopisu na jednotku rizika. Táto funkcia závisí od hodnoty short-rate a času. My sme však v predchádzajúcej kapitole povedali, že budeme brať trhovú cenu rizika konštantnú, takže túto hodnotu budeme vedieť odhadnúť pomocou reálnych trhových dát.

Ako dáta sme použili výnosy európskych, respektíve bulharských dlhopisov s maturitami 1 rok, 5 rokov a 10 rokov. Uvádzame ich priebeh:



Obr. 19: Priebeh výnosov európskych dlhopisov



Obr. 20: Priebeh výnosov domácich dlhopisov

Podľa [2] vypočítame časovú štruktúru úrokových mier $R(r, t, t + \tau)$ ako

$$R(r, t, t + \tau) = -\frac{\ln P(r, t, t + \tau)}{\tau}, \quad (147)$$

pričom vzťahy pre výpočet ceny dlhopisov $P(r, t, t + \tau)$ sme uviedli v predošlej kapitole. Ak zoberieme štandardnú účelovú funkciu na minimalizáciu, ktorá sa rovná váženej sume štvorcov rozdielov trhovej úrokovej miery a úrokovej miery z nášho modelu, tak sme schopní trhové ceny rizika vypočítať. Zostavme teda účelovú funkciu, ktorá má rovnaký tvar pre oba modely (samozrejme, vyjadrenie ceny dlhopisov závisí od submodelu) a ktorú v programe budeme optimalizovať vzhľadom na trhové ceny rizika:

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k w_{ij} (R(\tau_j, r_i) - R_{ij})^2, \quad (148)$$

kde i označuje i -ty mesiac, j označuje maturitu dlhopisu, r_i je short-rate v i -tom mesiaci a τ_j je j -ta maturita (v rokoch) z reálnych dát. Reálna úroková miera je označená ako $R_{i,j}$. Váhy w_{ij} volíme tiež štandardne, čiže $w_{ij} = \tau_j^2$ podľa vzoru v [14].

Poznamenajme, že hodnoty parametrov musia byť preškálované ako desatinné čísla, pretože odhady parametrov sme robili pre percentuálne hodnoty. Z toho vyplýva, že odhadnuté A_e sa zmení na $\frac{A_e}{100}$ a odhadnuté B_e, B_d sa taktiež zmenia na $\frac{B_e}{100}$, respektíve $\frac{B_d}{100}$. Uvedieme prečo, avšak najskôr pripomeňme, ako vyzerá náš model:

$$dr_e = c(A_e \sin(\phi - \omega t) - r_e)dt + B_e \sin^2(\phi - \omega t)dW_e \quad (149)$$

$$dr_d = b(r_e - r_d)dt + B_d \sin^2(\phi - \omega t)dW_d. \quad (150)$$

V prípade, že úrokovú mieru vyjadríme v desatinných číslach, dostávame

$$\frac{dr_e}{100} = c\left(A_e \sin(\phi - \omega t) - \frac{r_e}{100}\right)dt + B_e \sin^2(\phi - \omega t)dW_e \quad (151)$$

$$\frac{dr_d}{100} = b\left(\frac{r_e}{100} - \frac{r_d}{100}\right)dt + B_d \sin^2(\phi - \omega t)dW_d, \quad (152)$$

čo je po úprave rovné

$$dr_e = c(100 \cdot A_e \sin(\phi - \omega t) - r_e)dt + 100 \cdot B_e \sin^2(\phi - \omega t)dW_e \quad (153)$$

$$dr_d = b(r_e - r_d)dt + 100 \cdot B_d \sin^2(\phi - \omega t)dW_d, \quad (154)$$

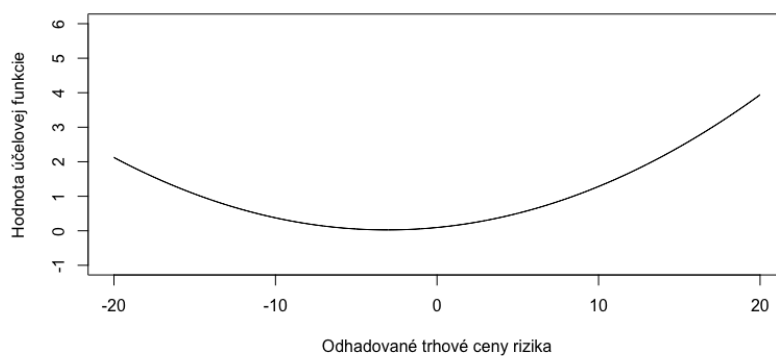
z čoho vidíme, že v prípade vyjadrenia v desatinných číslach by sme pôvodné hodnoty parametrov A_e, B_e a B_d bez úpravy mali stokrát väčšie.

Po optimalizácii pomocou funkcie *optim()* sme odhadli nasledovné hodnoty pre trhové ceny rizika:

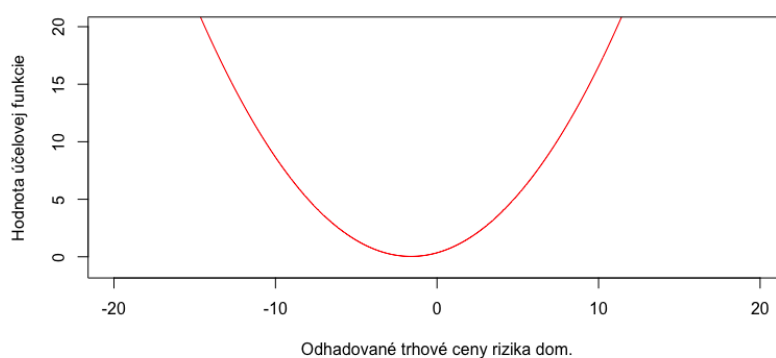
Parameter	Odhadnutá hodnota
λ_e	-3.268589
λ_d	-1.664898

Tabuľka 4: Odhadnuté trhové ceny rizika

Ak si vykreslíme závislosť účelových funkcií (114) od odhadovaných trhových cien rizika, tak dostávame:

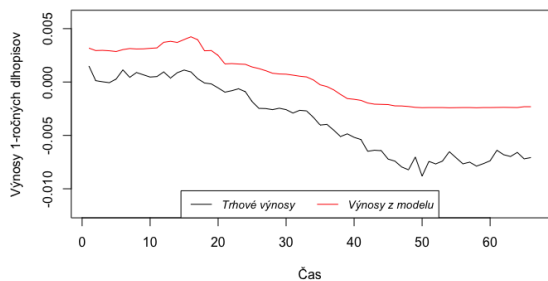


Obr. 21: Európska zložka

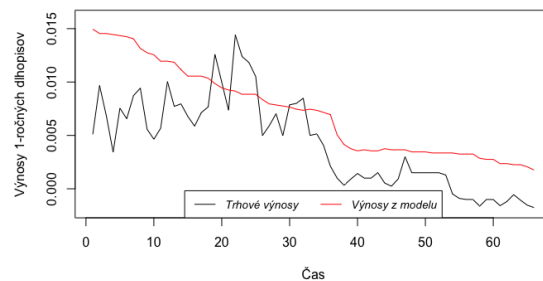


Obr. 22: Domáca zložka

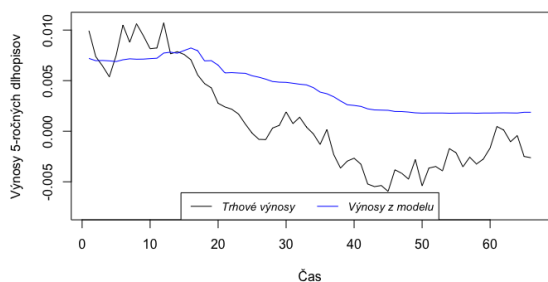
Na záver diplomovej práce ukážeme, ako sú fitované niektoré výnosy. To znamená, že porovnáme reálny vývoj a nami odhadnutý vývoj. Na prvej sérii obrázkov na ďalšej strane porovnáme časové priebehy úrokových mier.



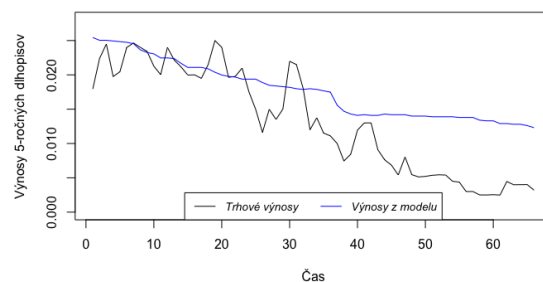
Obr. 23: Výnosy európskych 1Y - dlhopisov



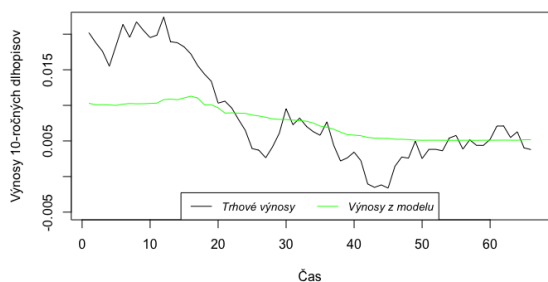
Obr. 24: Výnosy domácich 1Y - dlhopisov



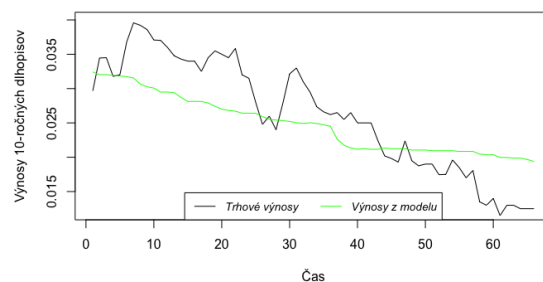
Obr. 25: Výnosy európskych 5Y - dlhopisov



Obr. 26: Výnosy domácich 5Y - dlhopisov

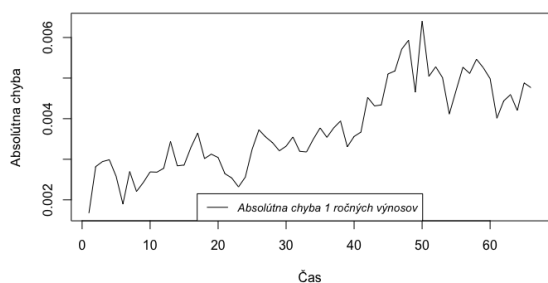


Obr. 27: Výnosy európskych 10Y - dlhopisov

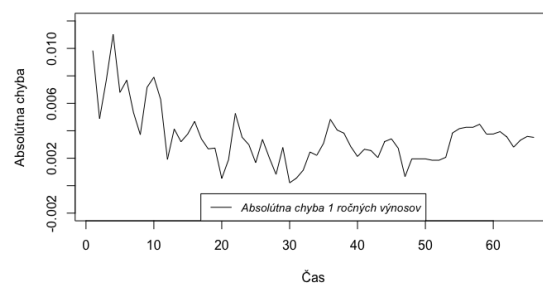


Obr. 28: Výnosy domácich 10Y - dlhopisov

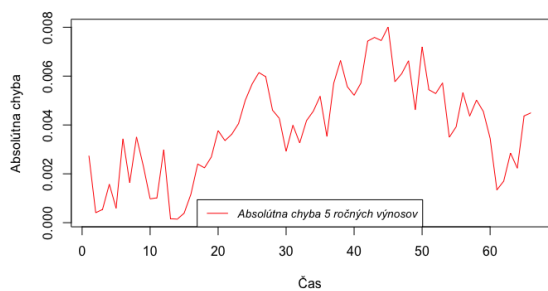
Nasledovné grafy ukazujú priebeh absolútnej chyby medzi výnosmi z nášho modelu a reálnymi trhovými výnosmi:



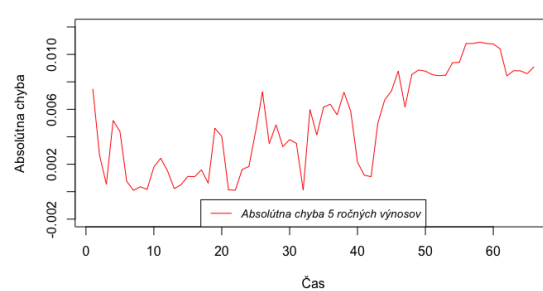
Obr. 29: Abs.chyba 1-ročných EUR



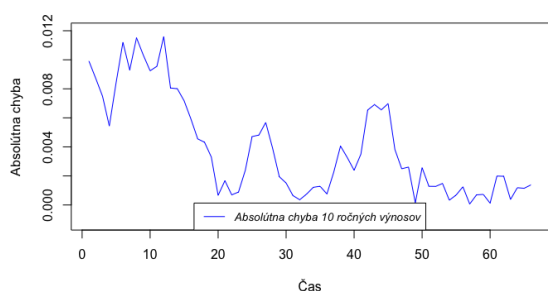
Obr. 30: Abs.chyba 1-ročných BUL



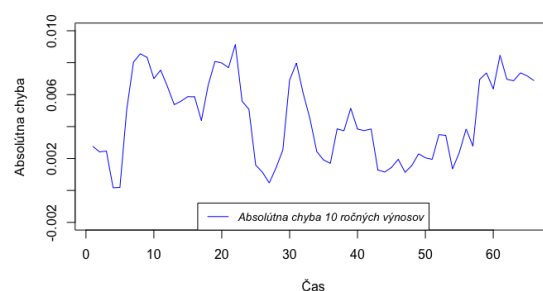
Obr. 31: Abs.chyba 5-ročných EUR



Obr. 32: Abs.chyba 5-ročných BUL

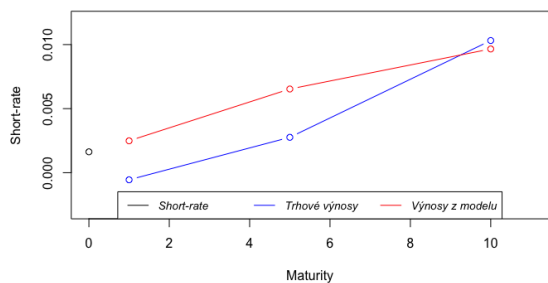


Obr. 33: Abs.chyba 10-ročných EUR

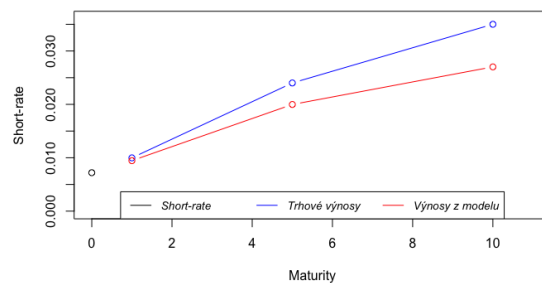


Obr. 34: Abs.chyba 10-ročných BUL

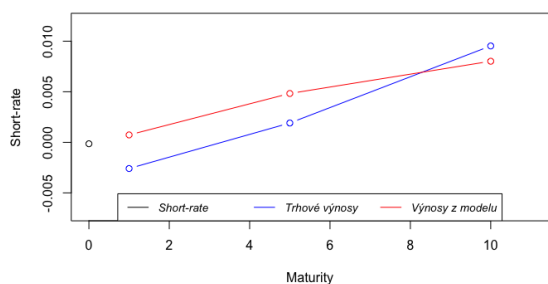
Posledná séria grafov bude porovnanie výnosových kriviek pre i -te pozorovanie.



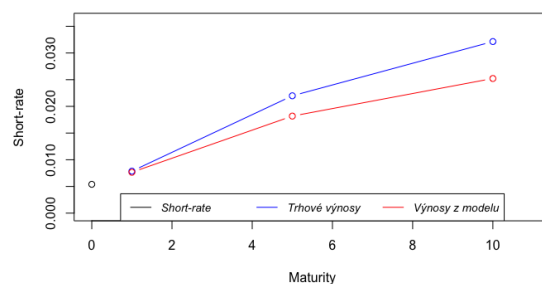
Obr. 35: $i=20$



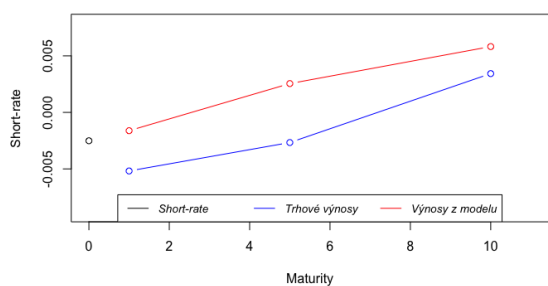
Obr. 36: $i=20$



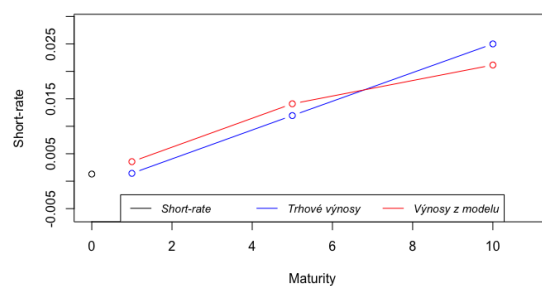
Obr. 37: $i=30$



Obr. 38: $i=30$



Obr. 39: $i=40$



Obr. 40: $i=40$

Záver

V tejto diplomovej práci bol zostavený model úrokových mier, ktorý v sebe zahŕňa cykly vo volatilitate a limitnej hodnote úrokovej miery. Model je dvojfaktorový, pretože sme modelovali dve úrokové miery - európsku a domácu. Navyše je model konvergenčný, pretože jedna úroková miera konverguje k druhej, čo je vidno aj na použitých dátach. Ako európsku úrokovú mieru sme používali EURIBOR a ako domácu (konvergujúcu) sme používali bulharskú short-rate, pretože Bulharsko sa chystá prijať EURO v roku 2023.

Zostavený model vychádza prevažne z článkov o konvergenčnom modeli od Corzovej a Schwartza [3], cyklickom CIR modeli od Morena a Plataniu [4] a Vašíčkovho modelu [10]. Model pripúšťa záporné úrokové miery a je použiteľný pre ľubovoľnú dvojicu časových radov domácej úrokovej miery a úrokovej miery menovej únie.

Po položení teoretických základov sme zostavili model a získali pravdepodobnostné rozdelenie procesu. Poznamenajme, že sme mohli využiť Fokker-Planckovú rovnicu, avšak rozdelenie sme získali aj bez nej vďaka vetám a tvrdeniam uvedených v teoretickej kapitole. Tak, ako sme predpokladali, proces má normálne rozdelenie s cyklickou strednou hodnotou a cyklickou volatilitou, čo sme ukázali aj na obrázkoch.

V práci sme taktiež oceňovali dlhopisy pre oba submodely a vykreslili výnosové krivky pre ilustračné hodnoty parametrov popisujúcich model. Výnosové krivky sú cyklické, čo sme očakávali, vzhľadom k spôsobu zostavenia modelu, teda stochastických diferenciálnych rovníc popisujúcich vývoj úrokových mier.

Veľká časť práce je venovaná kalibrácii modelu, keďže v ňom vystupuje pomerne veľa neznámych parametrov. Kalibráciu sme vykonávali pomocou metódy maximálnej vierohodnosti, pričom odhadnuté hodnoty parametrov z európskej zložky sme považovali za známe v domácej kalibrácii. Pripomeňme, že sme pracovali s nulovou koreláciou, čo kalibráciu značne zjednodušilo. Odhad korelácie by však mohol byť potenciálne rozšírenie modelu v budúcnosti.

Napokon sme odhadli hodnoty trhových cien rizika, ktoré sme považovali za konštantné. Odhadovali sme ich z reálnych výnosových kriviek pre európske a bulharské dlhopisy s maturitami 1 rok, 5 rokov a 10 rokov. Napokon sme pozorovali porovnanie reálnych trhových výnosov s výnosmi nášho modelu.

Počas práce sme na programovanie používali program *Rstudio* na vykresľovanie hustôt a rozdelení, kalibráciu, počítanie výnosov a vykresľovanie výnosových kriviek a program *wxMaxima* na výpočet niektorých integrálov. Použitý kód prikladáme v prílohe.

Zoznam použitej literatúry

- [1] MELICHERČÍK, Igor; OLŠAROVÁ, Ladislava; ÚRADNÍČEK, Vladimír. Kapitoly z finančnej matematiky 1. Bratia Sabovci, 2005.
- [2] ŠEVČOVIČ, Daniel; STEHLIKOVÁ, Beáta; MIKULA, Karol. Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov. Nakladateľstvo STU, Bratislava, 2009.
- [3] CORZO SANTAMARIA, Teresa; SCHWARTZ, Eduardo S. Convergence within the EU: Evidence from interest rates. *Economic Notes*, 2000, 29.2: 243-266.
- [4] MORENO, Manuel; PLATANIA, Federico. A cyclical square-root model for the term structure of interest rates. *European journal of operational research*, 2015, 241.1: 109-121.
- [5] YUH-DAUH Lyuu. Financial Engineering and Computation, slidy z prednášok, National Taiwan University, 2011, dostupné na internete (3.5.2020):
<https://www.csie.ntu.edu.tw/~lyuu/finance1/2011/20110427.pdf>
- [6] JANKOVÁ, K.; PÁZMAN, A. Pravdepodobnosť a štatistika. Univerzita Komenského, Bratislava, 2011.
- [7] BRIGO, Damiano; MERCURIO, Fabio. Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit. Springer Science & Business Media, 2007.
- [8] Investopedia: Derivate Definition, dostupné na internete (3.5.2020):
<https://www.investopedia.com/terms/d/derivative.asp>
- [9] ITÔ, Kiyosi. 109. stochastic integral. *Proceedings of the Imperial Academy*, 1944, 20.8: 519-524.
- [10] VASICEK, Oldrich. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, 1977, 5.2: 177-188.
- [11] STRANG, Gilbert. Differential Equations and Linear Algebra, 6.4: The Matrix Exponential, $\exp(A \cdot t)$, Massachusetts Institute of Technology (MIT)

<https://www.mathworks.com/videos/differential-equations-and-linear-algebra-64-the-matrix-exponential-expat-117473.html>

- [12] WU, Ching-Tang; YOR, Marc. Linear transformations of two independent Brownian motions and orthogonal decompositions of Brownian filtrations. *Publicacions matemàtiques*, 2002, 237-256.
- [13] StackExchange - Quantitative Finance, internetové fórum, dostupné na internete (3.5.2020):
<https://quant.stackexchange.com/questions/24472/two-correlated-brownian-motions>
- [14] BUČKOVÁ, Zuzana; GIROVÁ, Zuzana; STEHLÍKOVÁ, Beáta. Estimating the Domestic Short Rate in a Convergence Model of Interest Rates. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 2020, 75.1: 33-48.

Príloha - Kód k diplomovej práci

```
rm(list=ls())
options(max.print=1000000)
setwd("/Users/jurco/Desktop")
library("readxl")
library("zoo")
library(stats4)
library(stats)

data <- as.data.frame(read_excel("data.xlsx"))
re <- data$EURIBOR
rd <- data$BULGARIA
indx <- seq(as.Date('2013-01-01'), length.out=length(re), by='1month')

c <- 0.5
b <- 0.12
dt <- seq(from = 0,to = 20, by = 0.01)
Ae <- -3.2
omega <- 0.42
phi <- pi/3
t<-0
B <- 0.033
rho <- 0.8
Bd <- 0.042

#stredna hodnota europskej S datovym clenom
Ee <- exp(-c*dt)*3 + c*Ae*exp(-c*(t+dt))*(-(c*exp(c*t+c*dt)*
sin(omega*t-phi+dt*omega)-omega*exp(c*t+c*dt)*cos(omega*t-phi+
dt*omega)-c*exp(c*t)*sin(omega*t-phi)+omega*exp(c*t)*cos(omega*t-
phi)))/(omega**2+c**2)

Ee1 <- exp(-c*dt)*1 + c*Ae*exp(-c*(t+dt))*(-(c*exp(c*t+c*dt)*
*sin(omega*t-phi+dt*omega)-omega*exp(c*t+c*dt)*cos(omega*t-
phi+dt*omega)-c*exp(c*t)*sin(omega*t-phi)+omega*exp(c*t)*
cos(omega*t-phi)))/(omega**2+c**2)

Ee2 <- exp(-c*dt)*0.5 + c*Ae*exp(-c*(t+dt))*(-(
c*exp(c*t+c*dt)*sin(omega*t-phi+dt*omega)-omega*
exp(c*t+c*dt)*cos(omega*t-phi+dt*omega)-c*exp(c*t)*
sin(omega*t-phi)+omega*exp(c*t)*cos(omega*t-phi))
/(omega**2+c**2)

Ee3 <- exp(-c*dt)*-0.3 + c*Ae*exp(-c*(t+dt))*(-(c*exp(c*t+c*dt)*
sin(omega*t-phi+dt*omega)-omega*exp(c*t+c*dt)
*cos(omega*t-phi+dt*omega)-c*exp(c*t)*sin(omega*t-phi)+
omega*exp(c*t)*cos(omega*t-phi)))/(omega**2+c**2)

#dispersia europskej
De <- ((2*c*exp(2*c*dt)*omega**3+2*c**3*exp(2*c*dt)*omega)*
sin(4*omega*t-4*phi+4*dt*omega)+(c**2*exp(2*c*dt)*omega**
2+c**4*exp(2*c*dt))*cos(4*omega*t-4*phi+4*dt*omega)+(-2*c*
omega**3-2*c**3*omega)*sin(4*omega*t-4*phi)+(-c**2*omega**
2-c**4)*cos(4*omega*t-4*phi)+(-16*c*exp(2*c*dt)*omega**3-4*c**3*
exp(2*c*dt)*omega)*sin(2*omega*t-2*phi+
2*dt*omega)+(-16*c**2*exp(2*c*dt)*omega**2-4*
c**4*exp(2*c*dt))*cos(2*omega*t-2*phi+2*dt*omega)+
(16*c*omega**3+4*c**3*omega)*sin(2*omega*t-2*phi)+
(16*c**2*omega**2+4*c**4)*cos(2*omega*t-2*phi)+
(12*exp(2*c*dt)-12)*omega**4+(15*c**2*exp(2*c*dt)-
15*c**2)*omega**2+3*c**4*exp(2*c*dt)-3*c**4)*B**2/
(64*c*exp(2*c*dt)*omega**4+80*c**3*exp(2*c*dt)*omega**
2+16*c**5*exp(2*c*dt))
```

```

#kreslenie europskej strednej hodnoty
plot(dt,Ee,type="l",xlab = "Casovy_krok_dt",
      ylab = "Stredna_hodnota_europskej",
      ylim=c(-3.4,2.8))
lines(dt,Ee1,type="l", col="red")
lines(dt,Ee2,type="l", col="blue")
lines(dt,Ee3,type="l", col="green")
legend("bottom",legend=c("r0=-3","r0=-1.00","r0=-0.50","r0=-0.3"),
      col=c("black","red","blue","green"),lty=1:1,box.lty=1,
      box.lwd=2, box.col="black", horiz = TRUE)

#kreslenie europskej disperzie
plot(dt,De,type="l",xlab="Casovy_krok_dt",ylab="Disperzia_europskej")

#stredna hodnota domacej S datovym clenom
dt <- seq(from = 0,to = 50, by = 0.01)
Ed <- (b/(c-b))*(exp(-b*dt)-exp(-c*dt))*(2.2+exp(-b*dt)*(-0.2)+
Ae*b*c*(exp(-b*(t+dt))*((b*exp(b*t)*
sin(omega*t-phi)-omega*exp(b*t)*
*cos(omega*t-phi))/(omega**2+b**2)-(b*exp(b*t+b*dt)*
sin(omega*t-phi+dt*omega)-
omega*exp(b*t+b*dt)*cos(omega*t-phi+dt*omega)))/
(omega**2+b**2))-
exp(-c*(t+dt))*((c*exp(c*t)*sin(omega*t-phi)-
omega*exp(c*t)*cos(omega*t-phi))/
(omega**2+c**2)-(c*exp(c*t+c*dt)*sin(omega*t-phi+dt*omega)-
omega*exp(c*t+c*dt)*cos(omega*t-phi+dt*omega))/(omega**2+c**2)))/(c-b)

Ed1 <- (b/(c-b))*(exp(-b*dt)-exp(-c*dt))*(2.2+exp(-b*dt)*3+
Ae*b*c*(exp(-b*(t+dt))*((b*exp(b*t)*sin(omega*t-phi)-omega*exp(b*t)*
cos(omega*t-phi))/(omega**2+b**2)-(b*exp(b*t+b*dt)*sin(omega*t-phi+
dt*omega)-omega*exp(b*t+b*dt)*cos(omega*t-phi+dt*omega))/
(omega**2+b**2))-exp(-c*(t+dt))*((c*exp(c*t)*sin(omega*t-phi)-
omega*exp(c*t)*cos(omega*t-phi))/(omega**2+c**2)-
(c*exp(c*t+c*dt)*sin(omega*t-phi+dt*omega)-omega*exp(c*t+c*dt)*
cos(omega*t-phi+dt*omega))/(omega**2+c**2)))/(c-b)

Ed2 <- (b/(c-b))*(exp(-b*dt)-exp(-c*dt))*(2.2+exp(-b*dt)*0.5+
Ae*b*c*(exp(-b*(t+dt))*((b*exp(b*t)*sin(omega*t-phi)-omega*exp(b*t)*
*cos(omega*t-phi))/(omega**2+b**2)-(b*exp(b*t+b*dt)*sin(omega*t-phi+
dt*omega)-omega*exp(b*t+b*dt)*cos(omega*t-phi+dt*omega))/(omega**2+b**2))-
exp(-c*(t+dt))*((c*exp(c*t)*sin(omega*t-phi)-omega*exp(c*t)*
cos(omega*t-phi))/(omega**2+c**2)-(c*exp(c*t+c*dt)*sin(omega*t-
phi+dt*omega)-omega*exp(c*t+c*dt)*cos(omega*t-phi+dt*omega))/
(omega**2+c**2)))/(c-b)

Ed3 <- (b/(c-b))*(exp(-b*dt)-exp(-c*dt))*(2.2+exp(-b*dt)*1+Ae*b*c*
(exp(-b*(t+dt))*((b*exp(b*t)*sin(omega*t-phi)-omega*exp(b*t)*
cos(omega*t-phi))/(omega**2+b**2)-(b*exp(b*t+b*dt)*sin(omega*t-
phi+dt*omega)-omega*exp(b*t+b*dt)*cos(omega*t-phi+dt*omega))/
(omega**2+b**2))-exp(-c*(t+dt))*((c*exp(c*t)*sin(omega*t-phi)-
omega*exp(c*t)*cos(omega*t-phi))/(omega**2+c**2)-(c*exp(c*t+c*
dt)*sin(omega*t-phi+dt*omega)-omega*exp(c*t+c*dt)*cos(omega*t-phi+
dt*omega))/(omega**2+c**2)))/(c-b)

#kreslenie domacej strednej hodnoty
plot(dt,Ed,type="l",xlab = "Casovy_krok_dt",
      ylab = "Stredna_hodnota_domacej",
      ylim=c(-1.3,2.4))
lines(dt,Ed1,type="l", col="red")
lines(dt,Ed2,type="l", col="blue")
lines(dt,Ed3,type="l", col="green")
legend("bottom",legend=c("r0=-0.2",
"r0=-3.00","r0=-0.50","r0=-1.00"),

```

```

col=c("black","red","blue","green"),lty=1:1,box.lty=1,
box.lwd=2, box.col="black", horiz = TRUE)

#vypocet domacej disperzie
dt <- seq(from = 0,to = 30, by = 0.01)
Dd <- c(rep(0,length(dt)))

for (i in 1:length(dt)) {
  funkcial <- function(s) {((b/(c-b))*
    ((exp(b*(s-(t+dt[i]))))-
    exp(c*(s-(t+dt[i])))))*(B*(sin(phi-omega*s))^2))^2}

  funkcia2 <- function(s) {(exp(b*(s-(t+dt[i]))))*Bd*
    (sin(phi-omega*s))^2}

  funkcia3 <- function(s) {(b/(c-b))*(exp(b*(s-(t+dt[i])))-
    exp(c*(s-(t+dt[i]))))*2*rho*B*(sin(phi-omega*s))^4)*
    exp(b*(s-(t+dt[i])))*Bd}

  Dd[i] <- integrate(funkcial,0,dt[i])[1]$value +
    integrate(funkcia2,0,dt[i])[1]$value +
    integrate(funkcia3,0,dt[i])[1]$value
}

#kreslenie domacej disperzie
plot(dt,Dd,type="l",xlab = "Casovy_krok_dt",
      ylab = "Disperzia_domacej",ylim=c(-0.0,0.006))

##-----
# x-ova os (urokove miery)
r <- seq(from = 0, to = 0.2, by = 0.001)
c <- 0.7
b <- 0.32
Ae <- 0.3
omega <- 1.4
phi <- pi/3
B <- 0.7
rho <- 0.75
Bd <- 0.82

EENN <- function (t) (1/(c^2 + omega^2))*c*Ae*exp(-c*t)*(exp(c*t)*
  (c*sin(phi-omega * t)
  +omega*cos(phi-omega*t))-c*sin(phi)-omega*cos(phi))
  + 0.1*exp(-c*t)
DENN <- function(t) De <- ((1/(16*(c^2 + 4*omega^2)))*
  (exp(2*c*t)*(c*cos(4*
  (phi-omega*t))-2*omega*sin(4*(phi-omega*t)))-c*cos(4*phi)+
  2*omega*sin(4*phi)) -1*
  ((1/(4*(c^2 + omega^2)))*(exp(2*c*t)*(c*cos(2*(phi-omega*t))-
  omega*sin(2*(phi-omega*t)))-c*cos(2*phi)+omega*sin(2*phi)))+
  (3*(exp(2*c*t)-1))/(16*c))*(B)^2 * exp(-2*c*t)

# skumane casy
t <- c(1/52, 1/12, 1/6,1) #o tyzden, mesiac, rok
# vykreslenie hustot pre dane casy
plot(r, dnorm(r, EENN(t[1]), DENN(t[1])), type = 'l',
      xlab="Urokove_miery",
      ylab="dnorm(r,E,D)",ylim=c(-20,80))
for (i in 2:length(t)) {
  lines(r, dnorm(r, EENN(t[i]), DENN(t[i])), col = i)
}
legend("bottom",legend=c("tyzden","Mesiac","Polrok","Rok"),
col=c("black","red","green","blue"),lty=1:1,box.lty=1,

```



```

box.lwd=2, box.col="black", horiz = TRUE)

# KALIBRACIA

data <- as.data.frame(read_excel("data.xlsx"))
cas <- data$DATE
re <- data$EURIBOR[1:(length(cas)-6)]
indx <- seq(as.Date('2013-01-01'), length.out=length(re),
            by='1 month')

n <- length(re)-1
plot(indx, re, xlab="Cas", ylab="EURIBOR")

# casovy krok, casova premenna
dt<-1/12
t<-seq(0,length.out = (n),by=1)

# napasovanie urokovej miery pre cas k, k+1
rec <- re[2:(n+1)]
rep <- re[1:n]

#startovacie hodnoty - opravene
omega.start <- 0
alfa <- (n*sum(rec*rep) - sum(rec)*sum(rep))/
        (n*sum(rep^2) - (sum(rep))^2)
c.start <- -log(alfa)/dt

Intgr <- c(rep(0,n))
IntgrV <- c(rep(0,n))
expon <- c(rep(0,length(t)))
kdt <- c(rep(0,n))
kdt1 <- c(rep(0,n))

#kvoli sumovaniu: kdt = k*dt, kdt1 = (k+1)*dt
for (j in seq(1,n,by=1)) {
  kdt[j] <- (j-1)*(1/12)
  kdt1[j] <- j*(1/12)
}

phi_vec <- seq(from = 1/10, to = 9/10, length.out = 15)*pi
val <- rep(0, length(phi_vec))
parhat <- matrix(0, nrow = length(phi_vec), ncol = 4)

for(i in 1:length(phi_vec)){
  phi <- phi_vec[i]

  logLe <- function(re,par) {
    c = par[1]
    omega = par[2]

    for (k in 0:(n-1)) {

      Intgr[k+1] <- (c*exp(c*kdt1[k+1])*sin(phi-
kdt1[k+1]*omega)+exp(c*kdt1[k+1])*omega*cos(phi-
kdt1[k+1]*omega))/(omega**2+c**2)-(c*exp(c*kdt[k+1])*
sin(phi-kdt[k+1]*omega)+exp(c*kdt[k+1])*omega*cos(phi-
kdt[k+1]*omega))/(omega**2+c**2)

      IntgrV[k+1] <- (((c**2*omega**2+c**4)*sin(4*phi)+
(-2*c*omega**3-2*c**3*omega)*cos(4*phi))*sin(8*phi-
4*kdt1[k+1]*omega)+((2*c*omega**3+2*c**3*omega)*
sin(4*phi)+(c**2*omega**2+c**4)*cos(4*phi))*cos(8*phi-
4*kdt1[k+1]*omega)+((-16*c**2*omega**2-4*c**4)*
sin(4*phi)+(16*c*omega**3+4*c**3*omega)*cos(4*phi))*
sin(6*phi-2*kdt1[k+1]*omega)+((-16*c*omega**3-4*c**3*

```

```

omega)*sin(4*phi)+(-16*c**2*omega**2-4*c**4)*cos(4*phi))
*cos(6*phi-2*kdt1[k+1]*omega)+((-16*c**2*omega**2-4*
c**4)*sin(4*phi)+(-16*c*omega**3-4*c**3*omega)*
cos(4*phi))*sin(2*phi+2*kdt1[k+1]*omega)+((16*
c*omega**3+4*c**3*omega)*sin(4*phi)+(-16*c**2*
omega**2-4*c**4)*cos(4*phi))*cos(2*phi+2*kdt1[k+1]*
omega)+(24*omega**4+30*c**2*omega**2+6*c**4)*
sin(4*phi)**2+((c**2*omega**2+c**4)*sin(4*
kdt1[k+1]*omega)+(-2*c*omega**3-2*c**3*omega)*
cos(4*kdt1[k+1]*omega))*sin(4*phi)+(24*omega**4+
30*c**2*omega**2+6*c**4)*cos(4*phi)**2+((2*c*
omega**3+2*c**3*omega)*sin(4*kdt1[k+1]*omega)+
(c**2*omega**2+c**4)*cos(4*kdt1[k+1]*omega))*cos(4*phi))
/((128*c*omega**4+160*c**3*omega**2+32*c**5)*sin(4*phi)**
2+(128*c*omega**4+160*c**3*omega**2+32*c**5)*
cos(4*phi)**2-(((c**2*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2+
c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*sin(4*phi)+(-2*c*exp(2*c*
kdt[k+1])*omega**3-2*c**3*exp(2*c*kdt[k+1])*omega)*
cos(4*phi))*sin(8*phi-4*kdt[k+1]*omega)+((2*c*exp(2*
c*kdt[k+1])*omega**3+2*c**3*exp(2*c*kdt[k+1])*
omega)*sin(4*phi)+(c**2*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2+
c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*cos(4*phi))*cos(8*phi-4*
kdt[k+1]*omega)+((-16*c**2*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**
2-4*c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*sin(4*phi)+(16*c*exp(2*
c*kdt[k+1])*omega**3+4*c**3*exp(2*c*kdt[k+1])*
omega)*cos(4*phi))*sin(6*phi-2*kdt[k+1]*omega)+
((-16*c*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**3-4*c**3*exp(2*
c*kdt[k+1])*omega)*sin(4*phi)+(-16*c**2*exp(2*c*
kdt[k+1])*omega**2-4*c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*cos(4*
phi))*cos(6*phi-2*kdt[k+1]*omega)+((-16*c**2*exp(2*
c*kdt[k+1])*omega**2-4*c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*
sin(4*phi)+(-16*c*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**3-4*c**
3*exp(2*c*kdt[k+1])*omega)*cos(4*phi))*sin(2*phi+
2*kdt[k+1]*omega)+((16*c*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**3+
4*c**3*exp(2*c*kdt[k+1])*omega)*sin(4*phi)+(-16*c**
2*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2-4*c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*
cos(4*phi))*cos(2*phi+2*kdt[k+1]*omega)+(24*exp(2*c*
kdt[k+1])*omega**4+30*c**2*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2+
6*c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*sin(4*phi)**2+((c**2*exp(2*c*
kdt[k+1])*omega**2+c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*sin(4*
kdt[k+1]*omega)+(-2*c*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**3-
2*c**3*exp(2*c*kdt[k+1])*omega)*cos(4*kdt[k+1]*omega))*
sin(4*phi)+(24*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**4+30*c**2*
exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2+6*c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*
cos(4*phi)**2+((2*c*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**3+2*c**3*
exp(2*c*kdt[k+1])*omega)*sin(4*kdt[k+1]*omega)+(c**2*
exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2+c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*
cos(4*kdt[k+1]*omega))*cos(4*phi))/((128*c*exp(2*c*
kdt1[k+1])*omega**4+160*c**3*exp(2*c*kdt1[k+1])*omega**
2+32*c**5*exp(2*c*kdt1[k+1]))*sin(4*phi)**2+(128*c*
exp(2*c*kdt1[k+1])*omega**4+160*c**3*exp(2*c*kdt1[k+1])*
omega**2+32*c**5*exp(2*c*kdt1[k+1]))*cos(4*phi)**2)

expon[k+1] <- exp(-c*(k+1)*dt)
}

Ae <- (sum(((rec-exp(-c*dt))*rep)*c*Intgr*expon)/
(IntgrV)))/(sum((c*Intgr*expon)^(2)/(IntgrV)))
Eenova <- exp(-c*dt)*re[1:(n)] + c*Ae*exp(-c*(t+dt))*Intgr
Be2 <- (1/n)*sum((rec-Eenova)^(2)*(1/IntgrV))
Denova <- Be2*IntgrV
return(-1*(n*log(1/sqrt(2*pi))-0.5*sum(log(Denova)+
((rec-Eenova)^(2))/(Denova))))
}

```

```

odhad <- optim(par=c(c_start, omega_start), logLe, re=re,
               method="Nelder-Mead", hessian = FALSE)

val[i] <- odhad$value
parhat[i,1] <- odhad$par[1]
parhat[i,2] <- odhad$par[2]
parhat[i,3] <- phi_vec[i]
parhat[i,4] <- val[i]
}

plot(phi_vec, val, type="b", xlab="Hodnoty_Phi",
      ylab="Funkcna_hodnota_LogLe")

# tymto sme ziskali odhad startovacich parametrov
phi_nove <- phi_vec[which.min(val)]
c_nove <- parhat[,1][which.min(parhat[,4])]
omega_nove <- parhat[,2][which.min(parhat[,4])]

logLe <- function(re, par) {
  c = par[1]
  omega = par[2]
  phi = par[3]

  for (k in 0:(n-1)) {

    Intgr[k+1] <- (c*exp(c*kdt1[k+1])*sin(phi-
kdt1[k+1]*omega)+exp(c*kdt1[k+1])*omega*cos(phi-
kdt1[k+1]*omega))/(omega**2+c**2)-(c*exp(c*kdt[k+1])*
sin(phi-kdt[k+1]*omega)+exp(c*kdt[k+1])*omega*cos(phi-
kdt[k+1]*omega))/(omega**2+c**2)

    IntgrV[k+1] <- (((c**2*omega**2+c**4)*sin(4*phi)+
(-2*c*omega**3-2*c**3*omega)*cos(4*phi))*sin(8*phi-
4*kdt1[k+1]*omega)+((2*c*omega**3+2*c**3*omega)*
sin(4*phi)+(c**2*omega**2+c**4)*cos(4*phi))*cos(8*phi-
4*kdt1[k+1]*omega)+((-16*c**2*omega**2-4*c**4)*
sin(4*phi)+(16*c*omega**3+4*c**3*omega)*cos(4*phi))*
sin(6*phi-2*kdt1[k+1]*omega)+((-16*c*omega**3-4*c**3*
omega)*sin(4*phi)+(-16*c**2*omega**2-4*c**4)*cos(4*phi))
*cos(6*phi-2*kdt1[k+1]*omega)+((-16*c**2*omega**2-4*
c**4)*sin(4*phi)+(-16*c*omega**3-4*c**3*omega)*
cos(4*phi))*sin(2*phi+2*kdt1[k+1]*omega)+((16*
c*omega**3+4*c**3*omega)*sin(4*phi)+(-16*c**2*
omega**2-4*c**4)*cos(4*phi))*cos(2*phi+2*kdt1[k+1]*
omega)+(24*omega**4+30*c**2*omega**2+6*c**4)*
sin(4*phi)**2+((c**2*omega**2+c**4)*sin(4*
kdt1[k+1]*omega)+(-2*c*omega**3-2*c**3*omega)*
cos(4*kdt1[k+1]*omega))*sin(4*phi)+(24*omega**4+
30*c**2*omega**2+6*c**4)*cos(4*phi)**2+((2*c*
omega**3+2*c**3*omega)*sin(4*kdt1[k+1]*omega)+
(c**2*omega**2+c**4)*cos(4*kdt1[k+1]*omega))*cos(4*phi))
/((128*c*omega**4+160*c**3*omega**2+32*c**5)*sin(4*phi)**
2+(128*c*omega**4+160*c**3*omega**2+32*c**5)*
cos(4*phi)**2)-(((c**2*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2+
c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*sin(4*phi)+(-2*c*exp(2*c*
kdt[k+1])*omega**3-2*c**3*exp(2*c*kdt[k+1])*omega)*
cos(4*phi))*sin(8*phi-4*kdt[k+1]*omega)+((2*c*exp(2*
c*kdt[k+1])*omega**3+2*c**3*exp(2*c*kdt[k+1])*
omega)*sin(4*phi)+(c**2*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2+
c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*cos(4*phi))*cos(8*phi-4*
kdt[k+1]*omega)+((-16*c**2*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**
2-4*c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*sin(4*phi)+(16*c*exp(2*
c*kdt[k+1])*omega**3+4*c**3*exp(2*c*kdt[k+1])*

```

```

omega)*cos(4*phi))*sin(6*phi-2*kdt[k+1]*omega)+
((-16*c*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**3-4*c**3*exp(2*
c*kdt[k+1])*omega)*sin(4*phi)+(-16*c**2*exp(2*c*
kdt[k+1])*omega**2-4*c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*cos(4*
phi))*cos(6*phi-2*kdt[k+1]*omega)+((-16*c**2*exp(2*
c*kdt[k+1])*omega**2-4*c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*
sin(4*phi)+(-16*c*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**3-4*c**
3*exp(2*c*kdt[k+1])*omega)*cos(4*phi))*sin(2*phi+
2*kdt[k+1]*omega)+((16*c*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**3+
4*c**3*exp(2*c*kdt[k+1])*omega)*sin(4*phi)+(-16*c**
2*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2-4*c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*
cos(4*phi))*cos(2*phi+2*kdt[k+1]*omega)+(24*exp(2*c*
kdt[k+1])*omega**4+30*c**2*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2+
6*c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*sin(4*phi)**2+((c**2*exp(2*c*
kdt[k+1])*omega**2+c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*sin(4*
kdt[k+1])*omega)+(-2*c*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**3-
2*c**3*exp(2*c*kdt[k+1])*omega)*cos(4*kdt[k+1]*omega))*
sin(4*phi)+(24*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**4+30*c**2*
exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2+6*c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*
cos(4*phi)**2+((2*c*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**3+2*c**3*
exp(2*c*kdt[k+1])*omega)*sin(4*kdt[k+1]*omega)+(c**2*
exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2+c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*
cos(4*kdt[k+1]*omega))*cos(4*phi))/((128*c*exp(2*c*
kdt1[k+1])*omega**4+160*c**3*exp(2*c*kdt1[k+1])*omega**
2+32*c**5*exp(2*c*kdt1[k+1]))*sin(4*phi)**2+(128*c*
exp(2*c*kdt1[k+1])*omega**4+160*c**3*exp(2*c*kdt1[k+1])*
omega**2+32*c**5*exp(2*c*kdt1[k+1]))*cos(4*phi)**2)

```

```

    expon[k+1] <- exp(-c*(k+1)*dt)
  }

```

```

  Ae <- (sum(((rec-exp(-c*dt))*rep)*c*Intgr*expon)/
(IntgrV)))/(sum((c*Intgr*expon)^(2)/(IntgrV)))
  Eenova <- exp(-c*dt)*re[1:(n)] + c*Ae*exp(-c*(t+dt))*Intgr
  Be2 <- (1/n)*sum((rec-Eenova)^(2)*(1/IntgrV))
  Denova <- Be2*IntgrV
  return(-1*(n*log(1/sqrt(2*pi))-0.5*
sum(log(Denova)+((rec-Eenova)^(2))/(Denova))))
}

```

```

odhad_novy <- optim(par=c(c_nove, omega_nove, phi_nove),
logLe, re=re, method="Nelder-Mead", hessian = FALSE)

```

```

c <- odhad_novy$par[1]
omega <- odhad_novy$par[2]
phi <- odhad_novy$par[3]

```

```

#spustit bez returnu - ziskat Ae, Be2, Eenova, Denova
Ae
Be2
#jednokrokové predikcie
plot(re, xlab="Cas", ylab="Hodnota_europskej_urokovej_miery",
      ylim=c(-0.4, 0.4))
lines(2:length(re), Eenova)
legend("bottomleft", legend=c("Predikcia",
"Realna_hodnota_urokovej_miery"), lty=c(1, NA),
pch=c(NA, "o"), horiz=F)

```

```

#suma stvorcov odchyliek z obrazku
sum((re[-1]-Eenova)^2)
#trivialna predikcia
sum((re[-1]-re[-length(re)])^2)

```

```

#casove obdobia M
M <- 12 * 30
# zo skriptu hustota a i.
t <- 0
dt <- seq(from = 1/12, by = 1/12, length.out = M)
Ee1 <- exp(-c*dt)*tail(re,1) + c*Ae*exp(-c
*(t+dt))*(-(c*exp(c*t+c*dt)*sin(omega*t-phi+
dt*omega)-omega*exp(c*t+c*dt)*cos(omega*t-phi+
dt*omega)-c*exp(c*t)*sin(omega*t-phi)+omega*
exp(c*t)*cos(omega*t-phi)))/(omega**2+c**2)

# aby bolo vidiet vsetko
re.ts <- ts(re, start = 1)
Eenova.ts <- ts(Eenova, start = 2)
Ee1.ts <- ts(Ee1, start = length(re) + 1)
ts.plot(re.ts, Eenova.ts, Ee1.ts, col = c("black", "red", "green"),
xlab="Cas", ylab="Hodnota_europskej_urokovej_miery",
ylim=c(-1,0.4))
legend("bottom",legend=c("Realne_data", "Jednokrokov_a_predikcia",
"Dlhodob_a_predikcia"),
col=c("black", "red", "green"),lty=1:1,horiz=F)

# DOMACE PARAMETRE
rd <- data$BULGARIA[1:(length(cas)-6)]

plot(indx,rd,xlab="Cas",ylab="Bulharska_urokova_miera")

plot(indx,c(re),type="l",col="blue",ylim=c(-0.8,1.3),
xlab="Cas",ylab="Hodnota_short-rate")
lines(indx,rd,type="l",col="red")
legend("bottom",legend=c("EURIBOR", "Bulharska_urokova_miera"),
col=c("blue", "red"),lty=1:1,horiz=TRUE,text.font = 3)

# casovy krok, casova premenna
dt<-1/12
t<-seq(0,length.out = (n),by=1)
# napasovanie urokovej miery pre cas k, k+1
rec <- re[2:(n+1)]
rep <- re[1:n]
rdc <- rd[2:(n+1)]
rdp <- rd[1:n]

Intgrc <- c(rep(0,n))
IntgrcV <- c(rep(0,n))
Intgrb <- c(rep(0,n))
IntgrbV <- c(rep(0,n))
exponc <- c(rep(0,length(t)))
exponb <- c(rep(0,length(t)))
kdt <- c(rep(0,n))
kdt1 <- c(rep(0,n))
Bd2<-c(rep(0,1))
vysle<-c(rep(0,1))
fhod <- c(rep(0,500))

#kvoli sumovaniu: kdt = k*dt, kdt1 = (k+1)*dt
for (j in seq(1,n,by=1)) {
  kdt[j] <- (j-1)*(1/12)
  kdt1[j] <- j*(1/12)
}

c <- 0.01547261
omega <- 0.4469588

```

```

phi <- 2.316414
Ac<- -3.614195
Be2 <- 0.01105966
# b<- 0.19 #preventivne
# Bd2 <- 0.013 #preventivne

logLd <- function(b) { #

for (k in 0:(n-1)) {

  Intgrc[k+1] <- (c*exp(c*kdt1[k+1])*
sin(phi-kdt1[k+1]*omega)+exp(c*kdt1[k+1])*
omega*cos(phi-kdt1[k+1]*omega))/(omega**2+c**2)-
(c*exp(c*kdt[k+1])*sin(phi-kdt[k+1]*omega)+
exp(c*kdt[k+1])*omega*cos(phi-kdt[k+1]*omega))
/(omega**2+c**2)

  Intgrb[k+1] <- (b*exp(b*kdt1[k+1])*sin(phi-
kdt1[k+1]*omega)+exp(b*kdt1[k+1])*omega*
cos(phi-kdt1[k+1]*omega))/(omega**2+b**2)-
(b*exp(b*kdt[k+1])*sin(phi-kdt[k+1]*omega)+
exp(b*kdt[k+1])*omega*cos(phi-kdt[k+1]
*omega))/(omega**2+b**2)

  IntgrV[k+1] <- (((c**2*omega**2+c**4)*sin(4*phi)+
(-2*c*omega**3-2*c**3*omega)*cos(4*phi))*sin(8*phi-
4*kdt1[k+1]*omega)+((2*c*omega**3+2*c**3*omega)*
sin(4*phi)+(c**2*omega**2+c**4)*cos(4*phi))*cos(8*
phi-4*kdt1[k+1]*omega)+((-16*c**2*omega**2-4*c**4)*
sin(4*phi)+(16*c*omega**3+4*c**3*omega)*cos(4*phi))*
sin(6*phi-2*kdt1[k+1]*omega)+((-16*c*omega**3-4*c**3*
omega)*sin(4*phi)+(-16*c**2*omega**2-4*c**4)*cos(4*
phi))*cos(6*phi-2*kdt1[k+1]*omega)+((-16*c**2*
omega**2-4*c**4)*sin(4*phi)+(-16*c*omega**3-4*c**
3*omega)*cos(4*phi))*sin(2*phi+2*kdt1[k+1]*omega)+
((16*c*omega**3+4*c**3*omega)*sin(4*phi)+(-16*c**2*
omega**2-4*c**4)*cos(4*phi))*cos(2*phi+2*kdt1[k+1]*
omega)+(24*omega**4+30*c**2*omega**2+6*c**4)*sin
(4*phi)**2+((c**2*omega**2+c**4)*sin(4*kdt1[k+1]*
omega)+(-2*c*omega**3-2*c**3*omega)*cos(4*kdt1[k+1]*
omega))*sin(4*phi)+(24*omega**4+30*c**2*omega**2+
6*c**4)*cos(4*phi)**2+((2*c*omega**3+2*c**3*omega)*
sin(4*kdt1[k+1]*omega)+(c**2*omega**2+c**4)*cos(4*
kdt1[k+1]*omega))*cos(4*phi))/((128*c*omega**4+160*
c**3*omega**2+32*c**5)*sin(4*phi)**2+(128*c*omega**4+
160*c**3*omega**2+32*c**5)*cos(4*phi)**2)-(((c**2*
exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2+c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*
sin(4*phi)+(-2*c*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**3-2*c**3*
exp(2*c*kdt[k+1])*omega)*cos(4*phi))*sin(8*phi-4*
kdt[k+1]*omega)+((2*c*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**3+
2*c**3*exp(2*c*kdt[k+1])*omega)*sin(4*phi)+(c**2*
exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2+c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*
cos(4*phi))*cos(8*phi-4*kdt[k+1]*omega)+((-16*c**2*
exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2-4*c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*
sin(4*phi)+(16*c*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**3+4*c**3*
exp(2*c*kdt[k+1])*omega)*cos(4*phi))*sin(6*phi-2*
kdt[k+1]*omega)+((-16*c*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**3-
4*c**3*exp(2*c*kdt[k+1])*omega)*sin(4*phi)+(-16*c**
2*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2-4*c**4*exp(2*c*
kdt[k+1]))*cos(4*phi))*cos(6*phi-2*kdt[k+1]*omega)+
((-16*c**2*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2-4*c**4*exp(2*
c*kdt[k+1]))*sin(4*phi)+(-16*c*exp(2*c*kdt[k+1])*
omega**3-4*c**3*exp(2*c*kdt[k+1])*omega)*cos(4*phi))*
sin(2*phi+2*kdt[k+1]*omega)+((16*c*exp(2*c*kdt[k+1])

```

```

*omega**3+4*c**3*exp(2*c*kdt[k+1])*omega)*sin(4*phi)+
(-16*c**2*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2-4*c**4*exp(2*c*
kdt[k+1]))*cos(4*phi))*cos(2*phi+2*kdt[k+1]*omega)+
(24*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**4+30*c**2*exp(2*c*
kdt[k+1])*omega**2+6*c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*
sin(4*phi)**2+((c**2*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2+
c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*sin(4*kdt[k+1]*omega)+
(-2*c**exp(2*c*kdt[k+1])*omega**3-2*c**3*exp(2*c*
kdt[k+1])*omega)*cos(4*kdt[k+1]*omega))*sin(4*phi)+
(24*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**4+30*c**2*exp(2*c*
kdt[k+1])*omega**2+6*c**4*exp(2*c*kdt[k+1]))*
cos(4*phi)**2+((2*c*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**3+
2*c**3*exp(2*c*kdt[k+1])*omega)*sin(4*kdt[k+1]*
omega)+(c**2*exp(2*c*kdt[k+1])*omega**2+c**4*
exp(2*c*kdt[k+1]))*cos(4*kdt[k+1]*omega))*
cos(4*phi))/((128*c*exp(2*c*kdt1[k+1])*omega**4+
160*c**3*exp(2*c*kdt1[k+1])*omega**2+32*c**5*
exp(2*c*kdt1[k+1]))*sin(4*phi)**2+(128*c*
exp(2*c*kdt1[k+1])*omega**4+160*c**3*exp(2*c*
kdt1[k+1])*omega**2+32*c**5*
exp(2*c*kdt1[k+1]))*cos(4*phi)**2)

```

```

IntgrbV[k+1] <- (((b**2*omega**2+b**4)*sin(4*phi)+
(-2*b*omega**3-2*b**3*omega)*cos(4*phi))*sin(8*phi-
4*kdt1[k+1]*omega)+((2*b*omega**3+2*b**3*omega)*
sin(4*phi)+(b**2*omega**2+b**4)*cos(4*phi))*
cos(8*phi-4*kdt1[k+1]*omega)+((-16*b**2*omega**2-
4*b**4)*sin(4*phi)+(16*b*omega**3+4*b**3*omega)*
cos(4*phi))*sin(6*phi-2*kdt1[k+1]*omega)+
((-16*b*omega**3-4*b**3*omega)*sin(4*phi)+
(-16*b**2*omega**2-4*b**4)*cos(4*phi))*cos(6*
phi-2*kdt1[k+1]*omega)+((-16*b**2*omega**2-4*b**4)
*sin(4*phi)+(-16*b*omega**3-4*b**3*omega)*cos(4*phi))
*sin(2*phi+2*kdt1[k+1]*omega)+((16*b*omega**3+4*b**
3*omega)*sin(4*phi)+(-16*b**2*omega**2-4*b**4)*
cos(4*phi))*cos(2*phi+2*kdt1[k+1]*omega)+(24*omega**
4+30*b**2*omega**2+6*b**4)*sin(4*phi)**2+((b**2*
omega**2+b**4)*sin(4*kdt1[k+1]*omega)+(-2*b*omega**
3-2*b**3*omega)*cos(4*kdt1[k+1]*omega))*sin(4*phi)+
(24*omega**4+30*b**2*omega**2+6*b**4)*cos(4*phi)**2+
((2*b*omega**3+2*b**3*omega)*sin(4*kdt1[k+1]*omega)+
(b**2*omega**2+b**4)*cos(4*kdt1[k+1]*omega))*
cos(4*phi))/((128*b*omega**4+160*b**3*omega**2+32*b**5)
*sin(4*phi)**2+(128*b*omega**4+160*b**3*omega**2+
32*b**5)*cos(4*phi)**2)-(((b**2*exp(2*b*kdt[k+1])*
omega**2+b**4*exp(2*b*kdt[k+1]))*sin(4*phi)+(-2*b*
exp(2*b*kdt[k+1])*omega**3-2*b**3*exp(2*b*kdt[k+1])*
omega)*cos(4*phi))*sin(8*phi-4*kdt[k+1]*omega)+((2*b*
exp(2*b*kdt[k+1])*omega**3+2*b**3*exp(2*b*kdt[k+1])*
omega)*sin(4*phi)+(b**2*exp(2*b*kdt[k+1])*omega**2+
b**4*exp(2*b*kdt[k+1]))*cos(4*phi))*cos(8*phi-4*
kdt[k+1]*omega)+((-16*b**2*exp(2*b*kdt[k+1])*omega**
2-4*b**4*exp(2*b*kdt[k+1]))*sin(4*phi)+(16*b*exp(2*b*
kdt[k+1])*omega**3+4*b**3*exp(2*b*kdt[k+1])*omega)*
cos(4*phi))*sin(6*phi-2*kdt[k+1]*omega)+((-16*b*
exp(2*b*kdt[k+1])*omega**3-4*b**3*exp(2*b*kdt[k+1])*
omega)*sin(4*phi)+(-16*b**2*exp(2*b*kdt[k+1])*
omega**2-4*b**4*exp(2*b*kdt[k+1]))*cos(4*phi))*
cos(6*phi-2*kdt[k+1]*omega)+((-16*b**2*exp(2*b*
kdt[k+1])*omega**2-4*b**4*exp(2*b*kdt[k+1]))*sin(4*
phi)+(-16*b*exp(2*b*kdt[k+1])*omega**3-4*b**3*exp(2*
b*kdt[k+1])*omega)*cos(4*phi))*sin(2*phi+2*kdt[k+1]*
omega)+((16*b*exp(2*b*kdt[k+1])*omega**3+4*b**3*
exp(2*b*kdt[k+1])*omega)*sin(4*phi)+(-16*b**2*

```

```

exp(2*b*kdt[k+1])*omega**2-4*b**4*exp(2*b*kdt[k+1])*
cos(4*phi))*cos(2*phi+2*kdt[k+1]*omega)+(24*exp(2*b*
kdt[k+1])*omega**4+30*b**2*exp(2*b*kdt[k+1])*omega**2+
6*b**4*exp(2*b*kdt[k+1]))*sin(4*phi)**2+((b**2*
exp(2*b*kdt[k+1])*omega**2+b**4*exp(2*b*kdt[k+1]))*
sin(4*kdt[k+1]*omega)+(-2*b*exp(2*b*kdt[k+1])*
omega**3-2*b**3*exp(2*b*kdt[k+1])*omega)*cos(4*
kdt[k+1]*omega))*sin(4*phi)+(24*exp(2*b*kdt[k+1])*
omega**4+30*b**2*exp(2*b*kdt[k+1])*omega**2+6*b**4*
exp(2*b*kdt[k+1])*cos(4*phi)**2+((2*b*exp(2*b*kdt[k+1])*
omega**3+2*b**3*exp(2*b*kdt[k+1])*omega)*sin(4*kdt[k+1]*
omega)+(b**2*exp(2*b*kdt[k+1])*omega**2+b**4*exp(2*
b*kdt[k+1]))*cos(4*kdt[k+1]*omega))*cos(4*phi))
/((128*b*exp(2*b*kdt1[k+1])*omega**4+160*b**3*exp(2*b*
kdt1[k+1])*omega**2+32*b**5*exp(2*b*kdt1[k+1]))*sin(4*phi)
**2+(128*b*exp(2*b*kdt1[k+1])*omega**4+160*b**3*exp(2*
b*kdt1[k+1])*omega**2+32*b**5*exp(2*b*kdt1[k+1]))*cos(4*phi)**2)

exponc[k+1] <- exp(-c*(k+1)*dt)
exponb[k+1] <- exp(-b*(k+1)*dt)
}

Ednova <- (b/(c-b))*(exponb-exponc)*rep+
exponb*rdp+((b*c*Ae)/(c-b))*(exponb*Intgrb-exponc*Intgrc)

ff <- function(Bd2) { sum(IntgrbV/((b/(c-b))^(2)
*Be2*(IntgrbV-IntgrcV)+Bd2*IntgrbV) -
(rdc-Ednova)^(2) * IntgrbV/((b/(c-b))^(2)*
Be2*(IntgrbV-IntgrcV)+Bd2*IntgrbV)^(2))
}

Bd2 <- uniroot(ff, lower=0, upper=10,
extendInt = "yes")$root

Ddnova <- (b/(c-b))^(2)*Be2*(IntgrbV-
IntgrcV)+Bd2*IntgrbV

return(-1*(n*log(1/sqrt(2*pi))-
0.5*sum(log(Ddnova)+((rdc-Ednova)^(2))/(Ddnova))))
}

vysle <- optim(0.1, logLd, method="Brent", lower=-10, upper= 10)$par
vysle2 <- optimize(logLd, c(-10,10))
vysle
b<-vysle
b
plot(rd, xlab="Cas", ylab="Hodnota_domacej
urokovej_miery", ylim=c(-0.2,1.3))
lines(2:length(rd), Ednova)
legend("bottomleft", legend=c("Predikcia", "Realna_hodnota
urokovej_miery"), lty=c(1,NA), pch=c(NA,"o"), horiz=F)

#suma stvorcov odchylok z obrazku
sum((rd[-1]-Ednova)^2)
#trivialna predikcia
sum((rd[-1]-rd[-length(rd)])^2)

#casove obdobie M
M <- 12 * 30
# zo skriptu hustota a i.

```



```

t <- 0
dt <- seq(from = 1/12, by = 1/12, length.out = M)
Ed1 <- (b/(c-b))*(exp(-b*dt)-exp(-c*dt))*
tail(re,1)+exp(-b*dt)*tail(rd,1)+Ae*
b*c*(exp(-b*(t+dt))*((b*exp(b*t)*sin(omega*t
-phi)-omega*exp(b*t)*cos(omega*t-phi))/(omega**2+
b**2)-(b*exp(b*t+b*dt)*sin(omega*t-phi+dt*omega)-
omega*exp(b*t+b*dt)*cos(omega*t-phi+dt*omega))
/(omega**2+b**2))-exp(-c*(t+dt))*((c*exp(c*t)*
sin(omega*t-phi)-omega*exp(c*t)*cos(omega*t-phi))
/(omega**2+c**2)-(c*exp(c*t+c*dt)*sin(omega*t-phi+
dt*omega)-omega*exp(c*t+c*dt)*cos(omega*t-phi+dt*
omega))/(omega**2+c**2)))/(c-b)

# aby bolo vidiet vsetko
rd.ts <- ts(rd, start = 1)
Ednova.ts <- ts(Ednova, start = 2)
Ed1.ts <- ts(Ed1, start = length(rd) + 1)
ts.plot(rd.ts, Ednova.ts, Ed1.ts, col = c("black",
"red", "green"),
xlab="Cas", ylab="Hodnota_domacej_urokovej_miery",
ylim=c(0.01,0.05))
legend("bottom", legend=c("Realne_data",
"Jednokroková_predikcia", "Dlhodobá_predikcia"),
col=c("black", "red", "green"), lty=1:1)

# VYNOSOVE KRIVKY

Ae <- -3.2/100 #-4.078969/100
c <- 1.1 #0.01621496 * 50 #
Be <- sqrt(0.02)/100 #sqrt(0.01352447)/100
omega <- 0.33 #0.2336582
phi <- pi/3 #1.525498
Bd <- sqrt(0.03)/100 #sqrt(0.06899961)/100
rho <- 0.65
re <- 0.01
rd <- 0.03
b <- 0.9 #0.009096456 *50 #

# cas
t <- 0
tau <- seq(from = 0, to=80, by=0.1)
T <- t+tau

# europske
vyne <- rep(0, length(tau))
vyne2 <- rep(0, length(tau))
vyne3 <- rep(0, length(tau))
vyne4 <- rep(0, length(tau))
vyne[1] <- re
vynre <- rep(0, length(tau))
vynre2 <- rep(0, length(tau))
vynre3 <- rep(0, length(tau))
vynre4 <- rep(0, length(tau))
vynre[1] <- re

# domace
vynd <- rep(0, length(tau))
vynd2 <- rep(0, length(tau))
vynd3 <- rep(0, length(tau))
vynd4 <- rep(0, length(tau))
vynd[1] <- rd
vynrd <- rep(0, length(tau))
vynrd2 <- rep(0, length(tau))

```

```

vynrd3 <- rep(0,length(tau))
vynrd4 <- rep(0,length(tau))
vynrd[1] <- re

vynos_eur <- function(tau, re, T, c,
Ae, Be, omega, phi, lambda) {

  beta <- (1-exp(-c*tau))/(c)

  i1 <- function(tau) {((1-exp(-c*tau))/
(c))*sin(phi-omega*(T-tau))}

  i2 <- function(tau) {(((1-exp(-c*tau))/
(c))^(2))*(sin(phi-omega*(T-tau)))^(4)}

  i3 <- function(tau) {(((1-exp(-c*tau))
/(c))^(1))*(sin(phi-omega*(T-tau)))^(2)}

  alfa <- -c*Ae*integrate(i1,0,tau)$value +
          0.5 * (Be)^(2) * integrate(i2,0,tau)$value +
          lambda * Be * integrate(i3,0,tau)$value

  return((-alfa+beta*re)/tau)
}

for (i in 2:length(tau)) {
  vyne[i] <- vynos_eur(tau[i],re,T[i],c,
Ae,Be,omega,phi,lambda=-1)

  vyne2[i] <- vynos_eur(tau[i],re,T[i],c,
Ae,Be,omega,phi,lambda=-0.75)

  vyne3[i] <- vynos_eur(tau[i],re
,T[i],c,Ae,Be,omega,phi,lambda=-0.5)

  vyne4[i] <- vynos_eur(tau[i],re,T[i]
,c,Ae,Be,omega,phi,lambda=-0.25)
}

plot(tau[-1],vyne[-1],type="l",ylim=
c(-0.004,0.012),xlab="Maturity",ylab="Vynos
europskeho_dlhopisu")
lines(tau[-1],vyne2[-1],col="red")
lines(tau[-1],vyne3[-1],col="blue")
lines(tau[-1],vyne4[-1],col="green")
legend("bottom",legend=c(expression(paste(
lambda,"=-1")),expression(paste(lambda,"=-0.75")
),expression(paste(lambda,"=-0.5")),
expression(paste(lambda,"=-0.25"))),
col=c("black","red","blue","green"),lty=1:1,box.lty=1,
box.lwd=2, box.col="black", horiz = TRUE,text.font = 0.02)

lambda <- -1

for (i in 2:length(tau)) {
  vynre[i] <- vynos_eur(tau[i],0.01,
T[i],c,Ae,Be,omega,phi,lambda)

  vynre2[i] <- vynos_eur(tau[i],0.03,
T[i],c,Ae,Be,omega,phi,lambda)

  vynre3[i] <- vynos_eur(tau[i],-0.01,

```

```

T[i], c, Ae, Be, omega, phi, lambda)

      vynre4[i] <- vynos_eur(tau[i], -0.03,
T[i], c, Ae, Be, omega, phi, lambda)
}

plot(tau[-1], vynre[-1], type="l", ylim=c(-0.008, 0.014),
xlab="Maturity", ylab="Vynos_europskeho_dlhopisu")
lines(tau[-1], vynre2[-1], col="red")
lines(tau[-1], vynre3[-1], col="blue")
lines(tau[-1], vynre4[-1], col="green")

# DOMACE DLHOPISY

vynos_dom <- function(tau, rd, re, T, b, Bd,
lambda_d, rho, c, Ae, Be, omega, phi, lambda) {

  bet_dom <- ((1-exp(-b*tau))/(b))
  gam_dom <- ((-b*exp(-c*tau) +
c*(exp(-b*tau)-1) + b)/(c*(b-c)))

  I1 <- function(tau) {(sin(phi-omega*(T-tau)))^(2)
    * (((1-exp(-b*tau))/(b)))^(1)}
  I2 <- function(tau) {(sin(phi-omega*(T-tau)))^(1) *
((-b*exp(-c*tau) + c*(exp(-b*tau)-1)
+ b)/(c*(b-c)))^(1)}
  I3 <- function(tau) {(sin(phi-omega*(T-tau)))^(2) *
((-b*exp(-c*tau) +
c*(exp(-b*tau)-1) + b)/
(c*(b-c)))^(1)}
  I4 <- function(tau) {(sin(phi-omega*(T-tau)))^(4)
    * (((1-exp(-b*tau))/(b)))^(2)}

  I5 <- function(tau) {(sin(phi-omega*(T-tau)))^(4) *
((-b*exp(-c*tau) + c*(exp(-b*tau)-
1) + b)/(c*(b-c)))^(2)}

  I6 <- function(tau) {(sin(phi-omega*(T-tau)))^(4)
    * (((1-exp(-b*tau))/(b)))^(1) *
((-b*exp(-c*tau) + c*(exp(-b*tau)-1) +
b)/(c*(b-c)))^(1) }

  alf_dom <- lambda_d * Bd * integrate(I1, 0, tau)$value +
c * (-Ae) * integrate(I2, 0, tau)$value +
lambda * Be * integrate(I3, 0, tau)$value +
0.5 * (Bd)^(2) * integrate(I4, 0, tau)$value +
0.5 * (Be)^(2) * integrate(I5, 0, tau)$value +
rho * Bd * Be * integrate(I6, 0, tau)$value

  return(-1*(alf_dom-rd*bet_dom -re*gam_dom)/tau)
}

for (i in 2:length(tau)) {
  vynd[i] <- vynos_dom(tau[i], rd, re, T[i], b, Bd, lambda_d=-1,
rho, c, Ae, Be, omega, phi, lambda)
  vynd2[i] <- vynos_dom(tau[i], rd, re, T[i], b, Bd, lambda_d=-0.75,
rho, c, Ae, Be, omega, phi, lambda)
  vynd3[i] <- vynos_dom(tau[i], rd, re, T[i], b, Bd, lambda_d=-0.5,
rho, c, Ae, Be, omega, phi, lambda)
  vynd4[i] <- vynos_dom(tau[i], rd, re, T[i], b, Bd, lambda_d=-0.25,
rho, c, Ae, Be, omega, phi, lambda)
}

```

```

}

plot(tau[-1],vynd[-1],type="l",ylim=c(-0.003,0.015),xlab="Maturity",
ylab="Vynos_domaceho_dlhopisu")
lines(tau[-1],vynd2[-1],col="red")
lines(tau[-1],vynd3[-1],col="blue")
lines(tau[-1],vynd4[-1],col="green")
legend("bottom",legend=c(expression(paste(lambda,"_=-1")),
expression(paste(lambda,"_=-0.75")),
expression(paste(lambda,"_=-0.5")),expression(paste(lambda,"_=-0.25"))),
col=c("black","red","blue","green"),lty=1:1,box.lty=1,
box.lwd=2, box.col="black", horiz = TRUE,text.font = 0.02)

# TRHOVA CENA RIZIKA

Ae <- -3.614195/100
c <- 0.01547261 # * 50 #
Be <- sqrt(0.01105966)/100
omega <- 0.4469588
phi <- 2.316414
Bd <- sqrt(0.1710355)/100
rho <- 0
b <- 0.003750925 ##*50 #

data <- as.data.frame(read_excel("data.xlsx"))
re <- data$EURIBOR/100
rd <- data$BULGARIA/100
data2 <- as.data.frame(read_excel("data2.xlsx"))

Re <- matrix(0, nrow = length(re), ncol = 3)
Re[,1] <- data2$'EUR-1Y'/100
Re[,2] <- data2$'EUR-5Y'/100
Re[,3] <- data2$'EUR-10Y'/100

plot(indx,Re[,1],type="l",ylim=c(-0.014,0.022),
xlab="Cas",ylab="Vynosy")
lines(indx,Re[,2],type="l",col="red")
lines(indx,Re[,3],type="l",col="blue")
legend("bottom", legend=c("1_rok",
"5_rokov","10_rokov"),
col=c("black","red","blue"),
text.font=3,horiz=TRUE,lty=1:1,cex=0.85)

# maturity tau
tau_mat <- c(1,5,10)

# cas
t <- 0
for (i in 1:length(tau_mat))
{T[i] <- t+tau_mat[i]}

# logarithmus P
Rme <- matrix(0, nrow = length(re), ncol = 3)
Rmd <- matrix(0, nrow = length(rd), ncol = 3)

F <- function(lambda) {
for(i in 1:length(re)) {
for(j in 1:3) {

beta <- (1-exp(-c*tau_mat[j]))/(c)

i1 <- function(tau) {((1-exp(-c*tau))/(c))

```

```

      *sin(phi-omega*(T[j]-tau)))}
  i2 <- function(tau) {(((1-exp(-c*tau))/
(c))^(2))* (sin(phi-omega*(T[j]-tau)))^(4)}
  i3 <- function(tau) {(((1-exp(-c*tau))/
(c))^(1))* (sin(phi-omega*(T[j]-tau)))^(2)}

  ln_alfa <- -c*Ae*integrate(i1,0,tau_mat[j])$value +
0.5 * (Be)^(2) * integrate(i2,0,tau_mat[j])$value +
lambda * Be * integrate(i3,0,tau_mat[j])$value

  Rme[i,j] <- (-ln_alfa+beta*re[i])/tau_mat[j]

}
}

  return(sum(tau_mat[1]*((Rme-Re)^(2))[,1] +
tau_mat[2]*((Rme-Re)^(2))[,2] +
tau_mat[3]*((Rme-Re)^(2))[,3]))

}

optimize(F,c(-5,5))
lambda <- optimize(F,c(-5,5))$minimum

# DOMACE DLHOPISY
Rd <- matrix(0, nrow = length(re), ncol = 3)
Rd[,1] <- data2$`BUL-1Y`/100
Rd[,2] <- data2$`BUL-5Y`/100
Rd[,3] <- data2$`BUL-10Y`/100

plot(indx,Rd[,1],type="l",ylim=c(-0.005,0.039),
xlab="Cas",ylab="Vynosy")
lines(indx,Rd[,2],type="l",col="red")
lines(indx,Rd[,3],type="l",col="blue")
legend("bottom", legend=c("1_rok","5_rokov",
"10_rokov"),col=c("black","red","blue"),
text.font=3,horiz=TRUE,ly=1:1,cex=0.85)

Fd <- function(lambda_d) {
  for(i in 1:length(re)) {
    for(j in 1:3) {

      bet_dom <- (((1-exp(-b*tau_mat[j]))/(b)))
      gam_dom <- ((-b*exp(-c*tau_mat[j]) +
c*(exp(-b*tau_mat[j])-1) + b)/(c*(b-c)))

      I1 <- function(tau) {(sin(phi-omega*(T[j]-tau)))^(2)
* (((1-exp(-b*tau))/(b)))^(1)}

      I2 <- function(tau) {(sin(phi-omega*(T[j]-tau)))^(1) *
((-b*exp(-c*tau) + c*(exp(-b*tau)-1) + b)/(c*(b-c)))^(1)}

      I3 <- function(tau) {(sin(phi-omega*(T[j]-tau)))^(2) *
((-b*exp(-c*tau) + c*(exp(-b*tau)-1) +
b)/(c*(b-c)))^(1)}

      I4 <- function(tau) {(sin(phi-omega*(T[j]-tau)))^(4)
* (((1-exp(-b*tau))/(b)))^(2)}

      I5 <- function(tau) {(sin(phi-omega*(T[j]-tau)))^(4) *
((-b*exp(-c*tau) + c*(exp(-b*tau)-1) + b)/(c*(b-c)))^(2)}

```

```

I6 <- function(tau) {(sin(phi-omega*(T[j]-tau)))^(4)
* (((1-exp(-b*tau))/(b)))^(1)*
((-b*exp(-c*tau) + c*(exp(-b*tau)-1) +
b)/(c*(b-c)))^(1)
}

ln_alf_dom <- lambda_d * Bd
* integrate(I1,0,tau_mat[j])$value +
c * (-Ae) * integrate(I2,0,tau_mat[j])$value +
lambda * Be * integrate(I3,0,tau_mat[j])$value +
0.5 * (Bd)^(2) * integrate(I4,0,tau_mat[j])$value +
0.5 * (Be)^(2) * integrate(I5,0,tau_mat[j])$value +
rho * Bd * Be * integrate(I6,0,tau_mat[j])$value

Rmd[i,j] <- (-ln_alf_dom + bet_dom*rd[i] +
gam_dom*re[i])/tau_mat[j]
}
}

return(sum(tau_mat[1]*((Rmd-Rd)^(2))[,1]
+ tau_mat[2]*((Rmd-Rd)^(2))[,2] +
tau_mat[3]*((Rmd-Rd)^(2))[,3]))
}

optimize(Fd,c(-5,5))
lambda_d <- optimize(Fd,c(-5,5))$minimum

```